נוסחאות בסיסיות

אלגברה

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \overset{\text{כפל בצמוד}}{\Rightarrow} \quad \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

חוקי חזקות ולוגריתמים

$$a^x = b \quad \leftrightarrow \quad \log_a b = x$$

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

$$\log_x(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(x)}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}, \qquad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}, \qquad \log_a\left(\sqrt[y]{x}\right) = \frac{\log_a(x)}{y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

זהויות טריגונומטריות

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}, \qquad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta), \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta), \qquad \cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

<u>סדרות הנדסיות</u>

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_0 \cdot q^n$$

$$S_n = a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_0}{1 - q}$$

<u>נוסחאות חדו"א 1</u>

<u>נגזרות</u>

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[f\big(g(x)\big)\right]' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

$$[x^n]' = n \cdot x^{n-1} \to \ \left[\sqrt{x}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$[e^x]' = e^x, \qquad [a^x]' = a^x \ln(a), \qquad [\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$[\sin(x)]' = \cos(x), \qquad [\cos(x)]' = -\sin(x), \qquad [\tan(x)]' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$[\arcsin(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad [\arccos(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad [\arctan(x)]' = \frac{1}{1 + x^2}$$

<u>גבולות</u>

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$$

<u>כלל לופיטל</u>

כאשר $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ אז

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

כלל לופיטל עוזר במצבי אי ודאות מהצורות $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

במצב $0\cdot\infty$ כלל לופיטל עוזר אחרי מעבר למצב $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ או $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$

במצבים בהם $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ הוא ביטוי מהצורה $0^0, \infty^0$, 1^∞ כלל לופיטל עוזר אחרי מעבר למצב

$$\lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

<u>גבולות ידועים (בעזרת כלל לופיטל או טורי חזקות)</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos(x))}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

<u>אינטגרלים</u>

$$\int f(x)\pm g(x)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

$$f(x)\cdot g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx \ \ \rightarrow\ \int f'g=fg-\int fg'$$

$$f\big(g(x)\big)=\int f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)dx$$

$$\int x^n dx=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, & n\neq -1\\ \ln|x|+C, & n=-1\end{cases}$$

$$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{\ln|ax+b|}{a}+C$$

$$\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+C,\qquad \int m^{ax+b}dx=\frac{m^{ax+b}}{a\cdot ln(m)}+C$$

$$\int\cos(x)\,dx=\sin(x)+C,\qquad \int\sin(x)\,dx=-\cos(x)+C,$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2(x)}=\tan(x)+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C,\qquad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right)}{a}+C$$

מבחני התכנסות לאינטגרלים

עבור פונקציה $f(x)$ שרציפה בתחום $a \leq x$:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)dx$$

בהתאמה, עבור תחום רציפות $x \leq a$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx$$

תנאי הכרחי (ולא מספיק) להתכנסות: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ובהתאמה $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

ועבור תחום רציפות $a \leq x < b$ או $t < x \leq a$ כאשר יש נקודת אי רציפות ב-t:

$$\int_{a}^{t} f(x)dx = \lim_{x\to t} F(x) - F(a) \qquad \int_{t}^{a} f(x)dx = F(a) - \lim_{x\to t} F(x),$$

כאשר $F(x)$ היא הפונקציה הקדומה של $f(x)$. כלומר $F(x) = \int f(x)dx$.

עבור $0 < a \ll \infty$ (מספר סופי חיובי):

עבור $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$, אם $\alpha > 1$ האינטגרל מתכנס. עבור $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}dx$, אם $\alpha < 1$ האינטגרל מתכנס.

<u>מבחן ההשוואה לפונקציות אי שליליות</u>

עבור פונקציות $f(x), g(x)$ שרציפות בתחום $a \leq x < t$, ושמקיימות (בתחום $a \leq x < t$)

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

אם $\int_a^t g(x)dx$ מתכנס, אז גם $\int_a^t f(x)dx$ מתכנס.

אם $\int_a^t f(x)dx$ מתבדר, אז גם $\int_a^t g(x)dx$ מתבדר (קונטרה פוזיטיב לנוסחה הקודמת).

t יכול להיות ∞ או נקודת אי רציפות.

בהתאמה אפשר להחליף את סוג האינטגרל ל-$\int_t^a f(x)dx$ כאשר t יכול להיות $-\infty$ או נקודת אי רציפות.

מבחן ההשוואה הגבולי

עבור פונקציות $f(x), g(x)$ אי שליליות או אי חיוביות, רציפות בתחום $a \le x < t$ (ובהתאמה בתחום $t < x \le a$), אם קיים הגבול $L = \lim\limits_{x\to t}\frac{f(x)}{g(x)}$ ו-L אז:

- $L = 0$: אם $\int_a^t f(x)dx$ מתבדר, אז גם $\int_a^t g(x)dx$.
- $L \neq 0, \pm\infty$: $\int_a^t f(x)dx$ ו- $\int_a^t g(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.
- $L = \pm\infty$: אם $\int_a^t f(x)dx$ מתכנס, אז גם $\int_a^t g(x)dx$.

התכנסות בהחלט

עבור פונקציה $f(x)$ רציפה בתחום $a \le x < t$ (ובהתאמה בתחום $t < x \le a$), שלא חייבת להיות אי שלילית, אם $\int_a^t |f(x)|dx$ מתכנס, אז האינטגרל $\int_a^t f(x)dx$ נקרא מתכנס בהחלט.

מבחני התכנסות לטורי מספרים

סכום של m האיברים הראשונים של הסדרה $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ מסומן $S_m = \sum_{n=0}^m a_n$.

טור אינסופי מחושב על ידי $\sum_{n=0}^\infty a_n = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$.

טורים כלליים

עבור $m \in \mathbb{N}$:

אם $\sum_{n=m}^\infty a_n$ מתכנס, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (ולכן אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אז $\sum_{n=m}^\infty a_n$ מתבדר).

משפט לייבניץ: אם $\forall n \ge m:\ a_n \ge a_{n+1}$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ אז $\sum_{n=m}^\infty (-1)^n a_n$ מתכנס.

התכנסות בהחלט: אם $\sum_{n=m}^\infty |a_n|$ מתכנס, אז גם $\sum_{n=m}^\infty a_n$ מתכנס.

<u>טורי מספרים חיוביים</u> $(\forall n \geq m:\ a_n > 0)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$.

מבחן המנה ומבחן השורש: עבור $q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, אז:

- $q < 1$: הטור $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- $q = 1$: לא ניתן לקבוע על פי המבחן הזה.
- $q > 1$: הטור $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתבדר.

מבחן האינטגרל: עבור $f(n) = a_n$, הטור $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\int_m^{\infty} f(x)dx$ מתכנס.

מבחן ההשוואה: אם $\forall n \geq m:\ a_n \leq b_n$ אז אם $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתכנס (ולכן אם $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתבדר אז גם $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי: אם $L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ (הגבול קיים) אז:

- $L = 0$: אם $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- $L \neq 0, \pm\infty$: $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.
- $L = \pm\infty$: אם $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ מתכנס.

טורי חזקות

טור חזקות שמרכזו בנקודה $x = a$ הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$

תחום התכנסות של טור חזקות הוא טווח ערכי x שמקיימים $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| < 1$,

וצריך לבדוק את ההתכנסות בקצוות התחום שעבורם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{a_n}\right| = 1$.

רדיוס ההתכנסות R הוא המרחק מנקודת מרכז הטור לקצוות תחום ההתכנסות.

טור טיילור שמפותח סביב הנקודה $x = a$ הוא טור מהצורה

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n}{n!} = f(a) + \frac{f'(a)\cdot(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)\cdot(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

טור מקלורין הוא טור טיילור שמפותח סביב הנקודה $x = 0$. נוסחאות של טורי מקלורין מוכרים:

תחום התכנסות	**טור מקלורין**
כל x	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
כל x	$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$
כל x	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$
$x \in (-1,1)$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots$
$x \in (-1,1]$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots$
$x \in [-1,1]$	$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots$
$x \in [-1,1]$	$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot x^{2n+1}}{4^n\cdot(n!)^2\cdot(2n+1)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} \ldots$
$\begin{cases}[-1,1] & \alpha \geq 0 \\ (-1,1] & -1 < \alpha < 0 \\ (-1,1) & \alpha \leq -1\end{cases}$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \cdot \prod_{m=0}^{n-1}(\alpha - m)}{n!}$

כשגוזרים טור חזקות, קצוות תחום ההתכנסות עלולים להפוך למתבדרים. באינטגרציה ההיפך.

טורי פורייה

פיתוח פונקציה שמוגדרת בקטע $x \in (0,l)$ לטור סינוסים:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

פיתוח פונקציה שמוגדרת בקטע $x \in (0,l)$ לטור קוסינוסים:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

פיתוח פונקציה שמוגדרת בקטע $x \in (-l,l)$ לטור פורייה:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

כאשר

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\,, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

אלגברה לינארית

נורמה של וקטור

עבור וקטור $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ נורמות $1,2,\infty$ הן:

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \qquad \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}(|x_i|)$$

כאשר נורמה 2 משמשת לחישוב גודל וקטור (כמו משפט פיתגורס) ולנירמול על ידי חלוקה בה.

מכפלה סקלרית

עבור $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ועבור α הזווית בין הווקטורים $\vec{u},\vec{v}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\alpha)$$

פונקציה של שני משתנים

מציאת נקודות קריטיות מקומיות

מציאת נקודות חשודות שמקיימות את המשוואות $\nabla f(x,y)=\vec{0}$:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=f'_y=0\end{cases}$$

מטריצת הסיאן :

$$H_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}$$

סיווג נקודה קריטית (x_0,y_0) :

נסמן $D=\left|H_f(x_0,y_0)\right|=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2$

אם $D<0$ אז הנקודה היא נקודת אוכף.

אם $D>0$ וגם $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$ אז הנקודה היא נקודת מקסימום.

אם $D>0$ וגם $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$ אז הנקודה היא נקודת מינימום.

אם $D=0$ לא ניתן לקבוע בעזרת מבחן הנגזרת השנייה.

מציאת מקסימום ומינימום על עקומה

כדי למצוא נקודת קיצון מוחלטת לפונקציה $f(x,y)$ על תחום האילוץ שבו $g(x,y)=0$ נעזרים בפונקציית כופלי לגראנז':

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

כדי למצוא נקודות אפשריות על עקומת האילוץ, פותרים מערכת משוואות:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=L'_x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=L'_y=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=L'_\lambda=0\end{cases}$$

אם ניתן לבצע על בסיס האילוץ $g(x,y)=0$ החלפת משתנים $\begin{cases}x=h_1(t)\\ y=h_2(t)\end{cases}$ שתקיים $g_t(t)=g\big(h_1(t),h_2(t)\big)=0$, אז להחליף משתנים גם בפונקציה $f(x,y)$ כך: $f_t(t)=f\big(h_1(t),h_2(t)\big)$. נקודות חשודות מוצאים בעזרת מציאת נקודות קיצון לפונקציה $f_t(t)$ והצבה בחזרה במערכת $\begin{cases}x=h_1(t)\\ y=h_2(t)\end{cases}$.

לאחר מציאת הנקודות האפשריות (x_i,y_i) על האילוץ, בוחנים את ערכי הפונקציה בנקודות $f(x_i,y_i)$ כדי לבחון מהם ערכי המקסימום והמינימום.

וקטור הגראדיינט ונגזרת מכוונת

וקטור הגראדיינט:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=f'_x\cdot\vec{\imath}+f'_y\cdot\vec{\jmath}$$

עבור וקטור כיוון $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$ באורך 1 (מנורמל), הנגזרת של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) לכיוון של $\vec{v}$ מסומנת $f'_{\vec{v}}(x_0,y_0)$ ומחושבת בעזרת מכפלה סקלרית בווקטור הגראדיינט:

$$f'_{\vec{v}}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}=f'_x(x_0,y_0)\cdot v_1+f'_y(x_0,y_0)\cdot v_2$$

אינטגרל כפול

עבור החלפת משתנים $\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$ יעקביאן החלפת המשתנים הוא

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

כך שמתקיים

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_D f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\cdot |J|du\,dv$$

<u>קואורדינטות קוטביות</u>

לחישוב אינטגרל כפול על חלק מטבעת עיגול בעלת רדיוס חיצוני R_2 ורדיוס פנימי R_1 (שיכול להיות 0), בין הזוויות θ_1, θ_2 מומלץ להעזר בהחלפת המשתנים:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos(\alpha) \\ y = r\cdot\sin(\alpha) \end{cases}, \qquad R_1 \le r \le R_2, \qquad \theta_1 \le \alpha \le \theta_2$$

כך ש-r הוא המרחק של נקודות (x,y) ממרכז העיגול, ו-α היא הזווית בין הווקטור (x,y) לכיוון החיובי של ציר ה-x.

היעקוביאן של החלפת משתנים זו הוא:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -r\cdot\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & r\cdot\cos(\alpha) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)) = r$$

מספרים מרוכבים

$$e^{ix} = \cos(x) + i\cdot sin(x)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

עבור $z = a+ib$, המספר הצמוד הוא $\overline{z} = a-ib$.

התמרת לפלס

$$L[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

פונקציית הביסייד :

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

פונקציה - $\boldsymbol{f(t)}$	**התמרה -** $\boldsymbol{L[f](s) = F(s)}$
$f(t) = 1$	$\frac{1}{s}, \quad Re(s) > 0$
$f(t) = e^{at}, \quad a > 0$	$\frac{1}{s-a}, \quad Re(s) > Re(a)$
$e^{at}f(t), \quad a \in \mathbb{R}$	$L[e^{at}f](s) = L[f](s-a)$
$a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$	$a \cdot L[f](s) + b \cdot L[g](s)$
$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} L[f]\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t) = \sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}, \quad Re(s) > \lvert Im(b) \rvert$
$f(t) = \sinh(bt)$	$L[f](s) = \frac{b}{s^2-b^2}, \quad s > 0$
$f(t) = \cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}, \quad Re(s) > \lvert Im(b) \rvert$
$f(t) = \cosh(bt)$	$L[f](s) = \frac{s}{s^2-b^2}, \quad s > 0$
$f(t) = e^{at} \cdot \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad Re(s) > Re(a) + \lvert Im(b) \rvert$
$f(t) = e^{at} \cdot \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad Re(s) > Re(a) + \lvert Im(b) \rvert$
$f(t) = t \cdot \sin(bt)$	$\frac{2sb}{(s^2+b^2)^2}, \quad Re(s) > \lvert Im(b) \rvert$
$f(t) = t \cdot \cos(bt)$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}, \quad Re(s) > \lvert Im(b) \rvert$
$f(t) = u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad Re(s) > 0$
$u_c(t) \cdot f(t-c)$	$e^{-cs} \cdot L[f](s)$

התמרה - $\boldsymbol{L[f](s) = F(s)}$	**פונקציה - $\boldsymbol{f(t)}$**
$s \cdot L[f](s) - f(0)$	$f'(t)$
$s^2 \cdot L[f](s) - s \cdot f(0) - f'(0)$	$f''(t)$
$s^n \cdot L[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \cdot f^{(n-1-k)}(0)$	$f^{(n)}(t)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad Re(s) > 0$	$f(t) = t^n$
$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad Re(s) > Re(a)$	$f(t) = e^{at} \cdot t^n$
$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f](s)$	$t^n \cdot f(t)$
$\frac{L[f](s)}{s}$	$\int_0^t f(x)dx$
$L[f](s) \cdot L[g](s)$	$\int_0^t f(t-x) \cdot g(x)dx,$ $t < 0 \rightarrow f(t) = g(t) = 0$

התמרת פורייה

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}dx$$

התמרה הפוכה:

$$f(x)=F^{-1}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega$$

הערות	$F[u](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)e^{-i\omega x}dx$	$u(x)$
ליניאריות	$F[u](\omega)=aF[f](\omega)+bF[g](\omega)$	$u(x)=af(x)+bg(x)$
	$F[u](-\omega)=\overline{F[u](\omega)}$	$u:R\to R$
הזזה	$F[u](\omega)=\frac{1}{\lvert a\rvert}\exp\left(\frac{i\omega b}{a}\right)F[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$u(x)=f(ax+b),\ \ a,b\in R,\ \ a\neq 0$
סיבוב בזמן גורר הזזה בתדר	$F[u](\omega)=F[f](\omega-c)$	$u(x)=e^{icx}f(x),\ \ c\in R$
מודולציה	$F[u](\omega)=\frac{F[f](\omega-c)+F[f](\omega+c)}{2}$	$u(x)=f(x)\cos(cx),\ c\in R$
מודולציה	$F[u](\omega)=\frac{F[f](\omega-c)-F[f](\omega+c)}{2i}$	$u(x)=f(x)\sin(cx),\ c\in R$
נגזרת	$F[u](\omega)=(i\omega)^n F[f](\omega)$	$u(x)=f^{(n)}(x)$
	$F[u](\omega)=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F[f](\omega)$	$u(x)=x^n f(x)$
קונבולוציה	$F[u](\omega)=2\pi F[f](\omega)\cdot F[g](\omega)$	$u(x)=(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy$