1. Sebuah partikel bermuatan q bergerak dengan kecepatan $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath}$ dalam ruang bermedan magnetik konstan.

$$\vec{B} = -\hat{k}B_z$$

Tentukan gerak partikel :

a. Tuliskan hukum Newtonnya,
b. Tuliskan persamaan diferensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah,
c. Selesaikan kedua persamaan diferensial sehingga dapat diperoleh $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$, dan $y(t)$, lakukan secara teori,
d. Perolehkan solusi numeriknya,
e. Bandingkan hasil kedua pendekatan : teori dan numerik.

Jawaban :

a. Berdasarkan persamaan hukum II Newton :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$q\vec{v} \times \vec{B} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$q\left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right) \times \left(-\hat{k}B_z\right) = m\frac{dv_x\hat{\imath}}{dt} + m\frac{dv_y\hat{\jmath}}{dt} \ldots (1)$$

b. Persamaan diferensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah :

$$\frac{qB_z}{m}\left(v_x\hat{\jmath} - v_y\hat{\imath}\right) = \frac{dv_x\hat{\imath}}{dt} + \frac{dv_y\hat{\jmath}}{dt}$$

Pada sumbu x :

$$-\frac{qB_z}{m}v_y = \frac{dv_x}{dt} \ldots (2)$$

Pada sumbu y :

$$\frac{qB_z}{m}v_x = \frac{dv_y}{dt} \ldots (3)$$

c. Nilai $v_x(t)$ diperoleh dengan mensubstitusi nilai v_y dari persamaan (2) ke persamaan (3):

$$v_y = -\frac{m}{qB_z}\frac{dv_x}{dt}$$

Sehingga :

$$\frac{qB_z}{m}v_x = -\frac{m}{qB_z}\frac{d}{dt}\frac{dv_x}{dt}$$

$$-\frac{q^2B_z^2}{m^2}v_x = \frac{d^2v_x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \frac{q^2B_z^2}{m^2}v_x = 0$$

Asumsikan :

$$k^2 = \frac{q^2B_z^2}{m^2}, D^2 = \frac{d^2v_x}{dt^2}$$

Sehingga :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + k^2v_x = 0$$

$$(D^2 + k^2)v_x = 0$$

$$(D + ik)(D - ik)v_x = 0$$

Diperoleh dua solusi :

$$\frac{dv_x}{dt} = -ikv_x \rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -ikdt$$

$$\ln v_x = -ikt + a \rightarrow v_x = Ae^{-ikt} \dots (4)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = ikv_x \rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = ikdt$$

$$\ln v_x = ikt + b \rightarrow v_x = Ce^{ikt} \dots (5)$$

Dari kedua solusi tersebut, diperoleh solusi umum :

$$v_x(t) = Ae^{-ikt} + Ce^{ikt} \dots (6)$$

Nilai $v_y(t)$ diperoleh dengan mensubstitusi nilai v_x dari persamaan (3) ke persamaan (2):

$$v_x = \frac{m}{qB_z}\frac{dv_y}{dt}$$

$$-\frac{qB_z}{m}v_y = \frac{m}{qB_z}\frac{d}{dt}\frac{dv_y}{dt}$$

$$-\frac{q^2B_z^2}{m^2}v_y = \frac{d^2v_y}{dt^2}$$

Dari asumsi sebelumnya :

$$k^2 = \frac{q^2B_z^2}{m^2}, D^2 = \frac{d^2v_y}{dt^2}$$

$$D^2 v_y + k^2 v_y = 0$$

$$(D + ik)(D - ik)v_y = 0$$

Diperoleh dua solusi yang sama :

$$v_y = De^{-ikt} \ldots (7)$$

$$v_y = Fe^{ikt} \ldots (8)$$

Sehingga diperoleh solusi umum :

$$v_y(t) = De^{-ikt} + Fe^{ikt} \ldots (9)$$

Kemudian, untuk mencari $x(t)$, dari $v_x(t)$:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = Ae^{-ikt} + Ce^{ikt}$$

Diperoleh :

$$\int dx = \int \left(Ae^{-ikt} + Ce^{ikt}\right) dt$$

$$x(t) = \frac{iAe^{-ikt}}{k} - \frac{iBe^{ikt}}{k} = \frac{i}{k}\left(Ae^{-ikt} - Be^{ikt}\right) \ldots (10)$$

Dan dengan cara yang sama, diperoleh (t) :

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = De^{-ikt} + Fe^{ikt}$$

$$\int dy = \int \left(De^{-ikt} + Fe^{ikt}\right) dt$$

$$y(t) = \frac{iDe^{-ikt}}{k} - \frac{iFe^{ikt}}{k} = \frac{i}{k}\left(De^{-ikt} - Fe^{ikt}\right) \ldots (11)$$