

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования
Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра физики и технологии наноструктур

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Оптимизация однокубитных и двухкубитных вентилей
и считывающих импульсов для сверхпроводниковых
кубитов**

Выполнил студент:

Сафронов Е.С.
группа 325

Научный руководитель:

Шульга К.В.
к. ф.-м. н.

г. Москва, 2017

Оглавление

1	Введение	3
2	Теоретические сведения	5
1	Эффект Джозефсона	5
1.1	Уравнения Джозефсона	5
1.2	RCSJ-модель	6
1.3	Фазо-потокковое соотношение	7
2	Теория изолированного сверхпроводящего кубита	7
2.1	Построение гамильтониана	8
2.2	Зарядовый кубит	9
2.3	Трансмон	11
3	Бездиссипативная динамика трансмона	12
3.1	Динамика свободного кубита	12
3.2	Вынужденное поведение кубита	14
3.3	Приближение вращающейся волны	14
4	Динамика трансмона, взаимодействующего с внешней средой	15
4.1	Динамика открытой среды	15
4.2	Релаксация и дефазировка кубита	17
4.3	Утечки на более высокие уровни	18

Глава 1

Введение

Квантовый компьютер – это устройство, хранящее и обрабатывающее информацию внутри группы квантовых систем, причем обработка информации происходит в результате когерентных взаимодействий систем внутри группы.¹ Каждая квантовая система, как правило, является двухуровневой и носит название “квантовый бит” или “кубит” (англ. “qubit” – quantum bit). Для осуществления квантового расчета необходимо связать кубиты друг с другом, иметь возможность управлять состоянием кубитов и считывать его, сохраняя чистоту соответствующей матрицы плотности, а также обеспечить изоляцию кубитов от влияния окружающей среды. Следовательно, в качестве кубитов могут быть использованы любые достаточно изолированные двухуровневые системы, поддающиеся контролю и способные взаимодействовать друг с другом.^{2–4} В качестве примера можно привести фотоны,⁵ ионы в ионных ловушках,⁶ ядерные спины,⁷ атомы в электромагнитных резонаторах,⁸ электрические системы⁹ и т.п.

Последние являются одними из самых заманчивых кандидатов на эту роль, но только при условии, что их поведение будет именно квантовым, а не классическим.¹⁰ К счастью, явление сверхпроводимости и эффект Джозефсона позволяют наблюдать квантовые эффекты в контурах даже мезоскопического масштаба и создавать на их основе так называемые *сверхпроводящие (джозефсоновские) кубиты*.¹¹

Джозефсоновские кубиты имеют два значительных недостатка и одно значительное преимущество в сравнении с микроскопическими кубитами. Первый недостаток заключается в значительном взаимодействии с окружающей средой – в силу больших размеров, джозефсоновские кубиты сильнее связываются со средой, что требует дополнительных изысканий в области их изоляции; второй недостаток заключается в том, что в то время как микроскопические кубиты, например, атомы, идентичны друг другу, сверхпроводящие кубиты могут иметь отличия из-за неточностей производства. Для борьбы с этим требуется либо создавать заведомо нечувствительные к дефектам схемы, либо проводить калибровку, в процессе которой параметры цепей измеряются, а затем компенсируются в эксперименте.

Преимущество джозефсоновских кубитов в их гибкости: они могут быть произвольным образом расположены относительно друг друга, а их параметры легко и непрерывно изменяемы в широких пределах. Эта гибкость вместе с некоторыми

фундаментальными эффектами¹³ может быть использована для борьбы с первым недостатком, а также предоставляет много вариантов для подстройки параметров, что в значительной степени нивелирует второй недостаток. Далее, накопленный опыт человечества в области изготовления интегральных схем позволит упростить переход к производству реальных квантовых вычислительных устройств, что является еще одним преимуществом в сравнении с другими типами кубитов. Таким образом, скорее всего именно джозефсоновские кубиты и будут применены в первом квантовом компьютере, и именно их следует изучать.

Важно отметить, что сверхпроводящие кубиты могут применяться не только для непосредственного использования в квантовом компьютере, так как по сути являются рукотворными атомами с широко изменяемыми характеристиками, как внутренними, так и касающимися связи с окружением. Они могут быть пригодны для создания метаматериалов,¹⁴ проведения высокоточных измерений полей,¹⁵ использоваться в качестве активной среды,¹⁶ применяться в квантовой криптографии и телепортации¹⁷ и т. п.

Глава 2

Теоретические сведения

В этой главе приведены теоретическое описание некоторых явлений, учитываемых при построении модели сверхпроводящих кубитов. Далее будет кратко рассмотрен эффект Джозефсона, затем произведено рассмотрение теории изолированного сверхпроводящего кубита и его частного случая – *трансмона*, теории его взаимодействия с окружающей средой и, наконец, вопросы измерения и контроля.

1 Эффект Джозефсона

1.1 Уравнения Джозефсона

Эффект Джозефсона²¹ – это макроскопический квантовый эффект в сверхпроводниках. Согласно теории БКШ, сверхпроводящее состояние проводника может быть описано параметром порядка, являющимся модулем макроскопической волновой функции куперовских пар:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (1.1)$$

Тогда, эффект Джозефсона заключается в установлении одной фазы в двух сверхпроводниках, соединенных через “слабую связь”. “Слабые связи” многообразны: это могут быть тонкие слои диэлектрика, сужения, точечные контакты, прослойки из металла в нормальном состоянии или из ферромагнетика. В случае, если фазы не равны, то через слабую связь будет течь бездиссипативный ток, и будет выполнено некоторое *фаза-токовое соотношение* между током и скачком фазы на переходе. Часто, хотя и не всегда,²² оно оказывается синусоидальным:

$$I_s = I_c \sin(\theta_2 - \theta_1) = I_c \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Из этой формулы видно, что сверхпроводящий ток I_s не может превысить некоторого значения I_c . Это так называемый *критический ток* джозефсоновского перехода, при превышении которого бездиссипативность нарушается, и на переходе устанавливается напряжение V . В этом случае выполнено второе уравнение Джозефсона:

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV, \quad (1.3)$$

и наблюдаются осцилляции разности фаз между сверхпроводниками. Величина критического тока рассчитывается из микроскопической теории, например, для перехода SIS (*сверхпроводник - изолятор - сверхпроводник*) верна формула Амбегаокара-Баратова:

$$I_c = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left(\frac{\Delta(T)}{2k_b T} \right), \quad (1.4)$$

где через T обозначена температура, а через R_n сопротивление контакта в отсутствие сверхпроводимости, $R_n = \rho \frac{d}{S}$, где ρ – удельное сопротивление I-слоя, а d и S – его толщина и площадь.

1.2 RCSJ-модель

Для упрощения описания динамики джозефсоновского контакта применяется модель RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction), работающая для маленьких переходов со слоем изолятора, когда изменения фазы на размере контакта пренебрежимо малы и присутствует ненулевая геометрическая емкость.

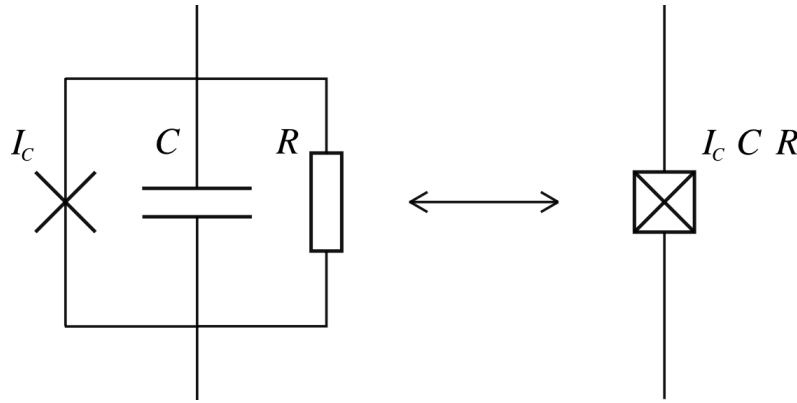


Рис. 1.1: Схема RCSJ в виде параллельного соединения идеального джозефсоновского перехода с конденсатором и резистором.

Принципиальная схема изображена на Рис. 1.1. В случае, когда ток через систему не превышает критического I_c , резистор на схеме может быть опущен. В силу параллельности соединения выполнено также соотношение $\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U_C$ между напряжениями на переходе и на конденсаторе, которое устанавливает аналогию между неидеальным переходом и колебательным контуром с нелинейной индуктивностью.

В рамках RCSJ-модели энергия перехода состоит из энергии, запасенной в нелинейной индуктивности идеального перехода, и энергии конденсатора:

$$E = E_{ind} + E_{cap} \quad (1.5)$$

Индуктивная энергия может быть определена посредством интегрирования мощности $P = IV$ по времени от 0 до момента T , когда на контакте установилась разность фаз φ :

$$\begin{aligned} E_{ind} &= \int I_J V_J dt = I_c \frac{\hbar}{2e} \int_0^T \sin(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= E_J \int_0^\varphi \sin \phi d\phi = E_J [1 - \cos \varphi], \end{aligned} \quad (1.6)$$

где была введена новая константа E_J – джозефсоновская энергия. Емкостная энергия также может быть вычислена с использованием (1.3):

$$E_{cap} = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi}^2, \quad E_C = \frac{(e)^2}{2C}, \quad (1.7)$$

где E_C – константа, описывающая емкостную энергию перехода.

1.3 Фазо-потокосое соотношение

Рассмотрим замкнутое сверхпроводящее кольцо конечной толщины, быть может, прерванное конечным числом джозефсоновских переходов $\{J_1 \dots J_n\}$. Рассмотрим применительно к данному случаю уравнение (??). Проведем контур C внутри кольца так, чтобы он нигде не приближался к стенкам на расстояние, меньшее глубины проникновения магнитного поля (Рис. 1.2). Тогда сверхток на всей его длине будет равен нулю, и, проинтегрировав по нему (??), мы получим следующее равенство:

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l}.$$

Руководствуясь Рис. 1.2, соображениями однозначности волновой функции (1.1) при обходе вокруг контура и теоремой Стокса для $\text{rot } \mathbf{A}$, можем написать:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \left(\sum_i \varphi_i + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_i \varphi_i &= 2\pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, получено фазо-потокосое соотношение. Видно, что в случае отсутствия в кольце джозефсоновских переходов полученное уравнение (1.8) опишет равенство магнитного потока Φ , проходящего через сверхпроводящее кольцо, целому числу k квантов потока Φ_0 , обосновывая определение этой константы в (??).

2 Теория изолированного сверхпроводящего кубита

Сверхпроводящие кубиты были предложен Леггеттом в 1980х, а в 1997м Yasunobu Nakamura году был проведен первый эксперимент, доказавший наличие суперпози-

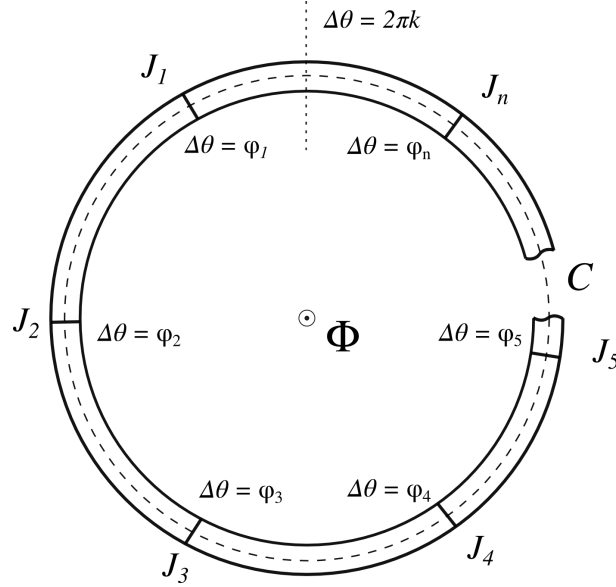


Рис. 1.2: К выводу фазо-потокowego соотношения. Пунктиром обозначен контур интегрирования C . Через φ_i обозначены скачки фаз на джозефсоновских контактах, а точками - место разрешенного накопления фазы при полном обходе вокруг кольца $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ции состояний в сверхпроводящем кубите. Он исследовал состояния в “ящике куперовских пар” (англ. – “Cooper-pair box”) или иначе, *зарядовом кубите*. В 1999 году был предложен Flux-кубит, или потоковый трехконтактный сверхпроводящий кубит.¹² Он представляет собой сверхпроводящий контур, прерванный в трех местах джозефсоновскими переходами (??), два из которых одинаковы, а третий отличается по площади в α раз. Наконец, в 2007 году был предложен¹³ *трансмон* - схожий с зарядовым кубит, однако, с существенно подавленными зарядовыми шумами и несколько меньшим *ангармонизмом*. Под *изолированным* в данном разделе понимается одиночный кубит, не взаимодействующий с окружением ни диссипативным, ни консервативным образом. Единственным внешним фактором является при таком рассмотрении постоянное магнитное поле, проходящее через контур.

2.1 Построение гамильтониана

Для того, чтобы провести квантово-механическое рассмотрение кубита, требуется записать его гамильтониан. Для этого прежде всего нужно понять, какими независимыми степенями свободы он обладает. Вообще говоря, состояние одиночного джозефсоновского перехода, в силу того, что в параллельном соединении RCSJ-модели $U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi}$, целиком описывается своей разностью фаз. Энергия, запасенная шунтирующим конденсатором, может быть записана в виде (1.7), а энергия джозефсоновского контакта в виде (1.5). Таким образом, получаем гамильтониан системы:

$$\hat{H} = E_J [1 - \cos \hat{\varphi}] + \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi}^2 \quad (2.1)$$

Аналогично сопряженной паре операторов \hat{x} и $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ можно определить оператор заряда $\hat{q} = -2ei\frac{\partial}{\partial \varphi}$ и числа куперовских пар $\hat{n} = -i\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Кроме того, иногда заряд кубита можно контролировать посредством емкостного гейта C_g с приложенным напряжением V_g . Тогда энергия, запасенная в емкостной части контура может быть записана как $4E_C(\hat{n} - n_g)^2$, где $n_g = \frac{-C_g V_g}{2e}$. Весь гамильтониан:

$$\hat{H} = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 + E_J [1 - \cos \hat{\varphi}] \quad (2.2)$$

Уровни энергии такого гамильтониана можно найти аналитически:

$$E_m(n_g) = E_C a_{2[n_g + k(m, n_g)]} \left(-\frac{E_J}{2E_C} \right) \quad (2.3)$$

, где $a_\nu(q)$ - функция Матьё, а $k(m, n_g)$ - целочисленная функция, задающая порядок собственных уровней энергии. Однако, для проведения численных расчетов решение в таком виде не является удобным. Рассмотрим гамильтониан 2.2 в зарядовом базисе (базисе собственных состояниях \hat{n}) :

$$\hat{H} = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (2.4)$$

Приблизим этот оператор конечномерным, отбросив состояния с зарядом, большим $2eN$ по модулю:

$$\hat{H}_N = 4E_C \sum_{n=-N}^N (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - E_J \sum_{n=-N}^N (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (2.5)$$

Такой гамильтониан очень удобен для каких-либо численных расчетов.

2.2 Зарядовый кубит

Зарядовый кубит представляет собой ящик для куперовских пар, связанных джозефсоновским контактом с резервуаром заряда и контролируемый приложенным напряжением на гейте. Электростатическая энергия системы...

$$E_C = C_J \frac{V^2}{2} + C_g \frac{(V_g - V)^2}{2} \quad (2.6)$$

$$E_C = \frac{C}{2} \left(V - \frac{C_g}{C} V_g \right)^2, C = C_J + C_g \quad (2.7)$$

Сводится к привычному члену гамильтониана (2.2).

У зарядового кубита $E_J < E_C$. Популярный режим работы зарядового кубита - установка полуцелого заряда на островке ($n_g = 1/2$) с помощью управляющего напряжения (см рис. 2.2b и 2.3). Преимущество такого режима заключается в том, что эта точка расщепления уровней дает двухуровневую систему с разницей энергии уровней, равной E_J . Так же в этой точке наименьшая чувствительность к зарядовому шуму [ссылка].

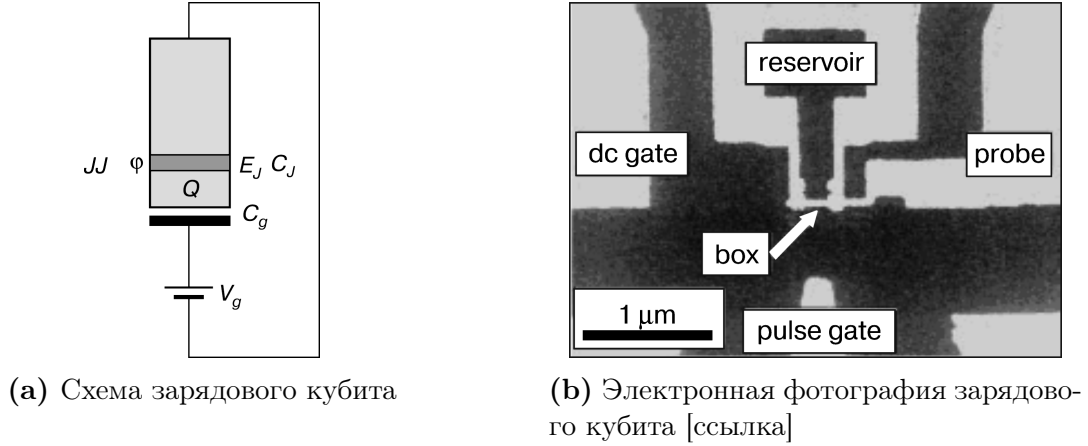


Рис. 2.1

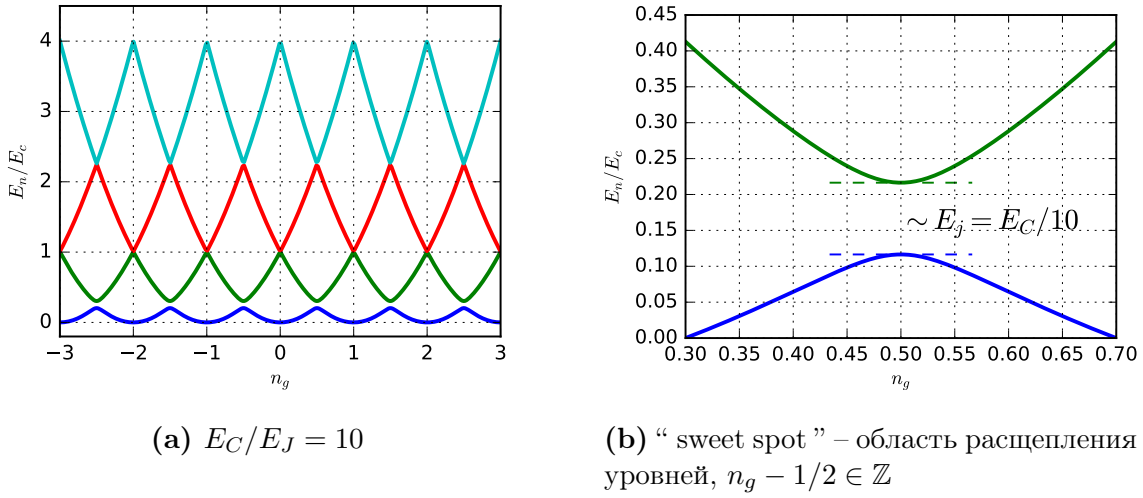


Рис. 2.2: Зависимость уровней энергии зарядового кубита от управляющего потенциала в виде n_g . Виден антикроссинг (?) и заметно отличие $\frac{\partial E_m}{\partial n_g}$ от нуля

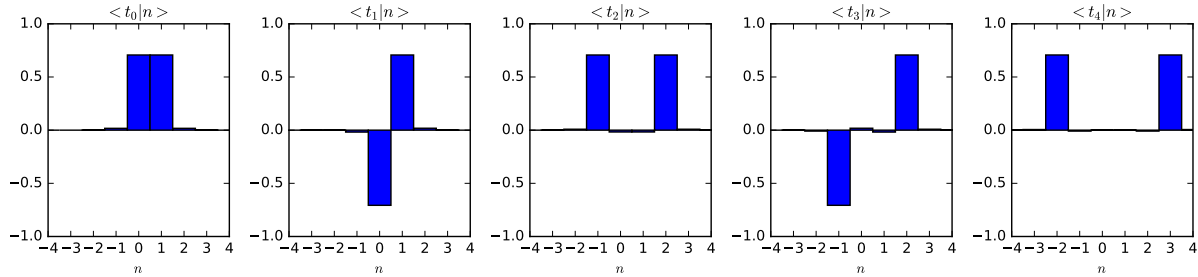


Рис. 2.3: Собственные состояния зарядового кубита. В “sweet spot” они являются гибридами слабо возмущенными зарядовыми состояниями.

2.3 Трансмон

Зарядовый шум. Для уменьшения зарядового шума необходимо увеличивать отношение E_J/E_C . Однако, это приводит к уменьшению *ангармонизма* $\alpha \equiv E_{12} - E_{01}$. Ангармонизм не может быть нулевым, в этом случае у нас не будет изоляции первых двух уровней системы от остальных (в частности, совпадут энергии переходов $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ и $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$). Так же, величина ангармонизма ограничивает скорость операций, производимых с помощью микроволновых импульсов [подробнее в ...].

Спасением является тот факт, что с уменьшением E_C чувствительность к зарядовым шумам падает *экспоненциально*, а ангармонизм всего лишь *линейно* [ссылка]. Для достаточно больших E_J/E_C зависимость $E_m(n_g)$ можно приблизить косинусом

$$E_m(n_g) = E_m(n_g = 1/4) + \frac{\epsilon_m}{2} \cos 2\pi n_g \quad (2.8)$$

, где

$$\epsilon_m = (-1)^m E_C \frac{2^{4m+5}}{m!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{E_J}{2E_C} \right)^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \exp \left(-\sqrt{8E_J/E_C} \right) \quad (2.9)$$

Для $E_J/E_C = 50$ получаем $|\epsilon_0|/E_{01} \lesssim 10^{-8}$. При этом $E_{01} \simeq \sqrt{8E_J E_C}$, а $\alpha \simeq -E_C$. Для таких значений ϵ_m нет нужды в “sweet spot”, а значит и механизма управления n_g . При моделировании трансмона можно положить $n_g = 0$. Оценим время дефазировки T_2 , возникающей из-за зарядового шума в случае трансмона:

$$T_2 \sim \frac{\hbar}{A} \left| \frac{\partial E_{01}}{\partial n_g} \right|^{-1} \simeq \frac{\hbar}{e\pi |\epsilon_1|} \quad (2.10)$$

Используя возможные параметры трансмона $E_J = 30$, $E_C = 0.35$, получаем оценку времени жизни $T_2 = 400 \mu s$. Для типичного зарядового кубита это время гораздо меньше – $T_2 \sim 1 \mu s$, что в частности и обуславливает широкую последующую популярность трансмона как физическую реализацию кубита.

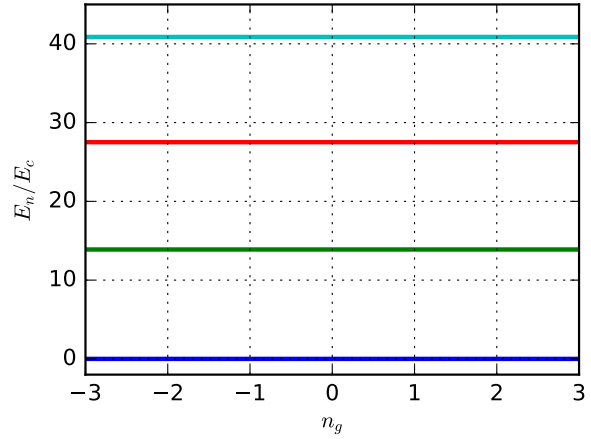


Рис. 2.4: При $E_J/E_C = 100$ $\epsilon_0 \sim 10^{-11}$ и зависимость $E_m(n_g)$ можно пренебречь

Анализ ???. Рассмотрим собственные состояния трансмона (Рис. 2.5). Для типичного $E_J/E_C = 100$ они еще не являются фазовыми состояниями ($|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{in\varphi} |n\rangle$) и $\langle t|n\rangle$ существенно затухает с ростом n [wtf? как оценить падение $\langle t|n\rangle$??]. Значит, можно использовать конечномерный гамильтониан трансмона в форме (2.5).

Кроме того, при отстутствия утечек на более высокие уровни можно рассматривать только первые два уровня трансмона $|0\rangle$ и $|1\rangle$ – они и являются репрезентативными состояниями кубита. В этом случае привычный гамильтониан трансмона (2.5) упрощается:

$$\hat{H}_{2d} = \frac{\hbar\omega_{ge}}{2}\hat{\sigma}_z \quad (2.11)$$

, где $\omega_{ge} = E_1 - E_0$. Стоит еще раз отметить, что здесь имеется ввиду **не** $N = 2$ в конечномерном гамильтониане (2.5), а первые два уровня в собственном базисе $|t\rangle$ трансмона.

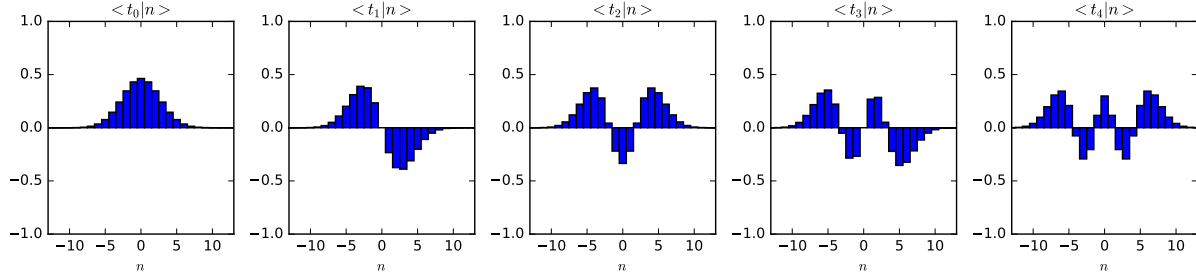


Рис. 2.5: Собственные состояния трансмона $|t\rangle$ в зарядовом базисе $|n\rangle$

3 Бездиссипативная динамика трансмона

В этом разделе будут рассмотрены следующие вопросы динамики трансмона: свободный трансмон, отклик на различные виды внешнего воздействия и использование приближения вращающейся волны (“rotating wave approximation” – RWA).

3.1 Динамика свободного кубита

Прежде всего изучим динамику свободного кубита. Отсутствует любые внешние воздействия, и, как следствие, утечки на внешние уровни. Некоторая временная зависимость при этом все же появится. Действительно, запишем уравнение Шредингера для столь простого случая:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (3.1)$$

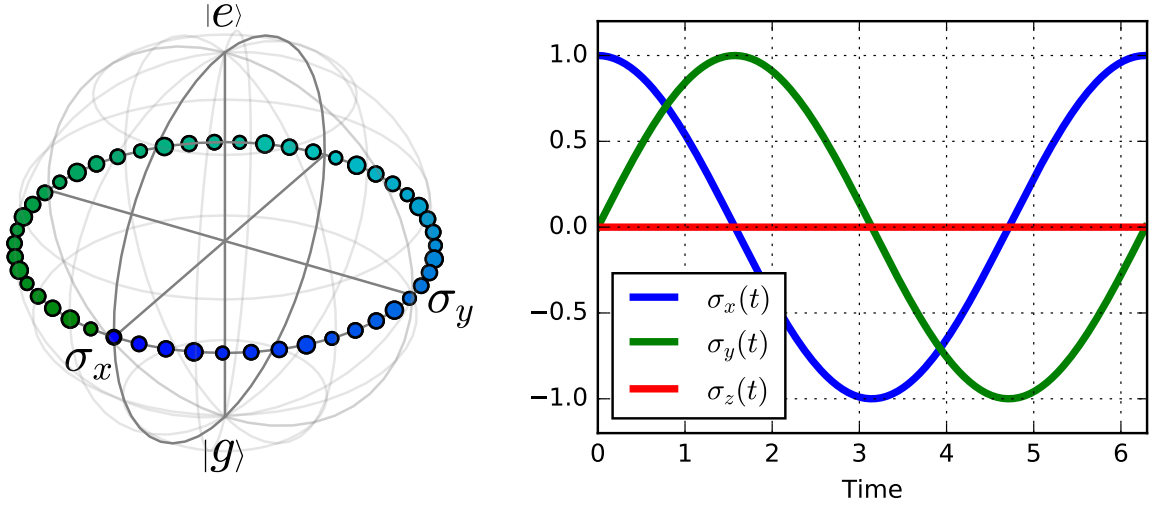
В таком случае можно ограничиться двухуровневым приближением

$$\psi(t) = \psi(0)\exp\left(-i\frac{\omega_{ge}}{2}\hat{\sigma}_z t\right) \quad (3.2)$$

При этом заселенности уровней $|\psi_{0,1}(t)|^2 = |\psi_{0,1}|^2$ не меняются со временем (что соответствует сохранению энергии в системе).

Сфера Блоха При рассмотрении двухуровневой (или квазидвухуровневой) системы зачастую удобно наблюдать за динамикой *матриц Паули* $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{\sigma}_z$. Напомню,

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$



(a) Траектория на сфере Блоха

(b) Как график зависимости от времени

Рис. 3.1: Динамика $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$. Для простоты w_{ge} положена равной 1.

Они (вместе с единичной матрицей) составляют базис в пространстве *эрмитовых* матриц 2×2 (а значит и *унитарных*). В желаемом случае отсутствия утечек с $|0\rangle$ и $|1\rangle$ $\langle \hat{1} \rangle \equiv 1$, а остальные $\langle \sigma \rangle$ лежат на сфере Блоха. В более общем случае они лежат *внутри* сферы Блоха. Для свободного трансмона значение $\langle \psi(t) | \hat{\sigma}_{x,y} | \psi(t) \rangle$ уже не будет постоянным, а будет осциллировать с частотой ω_{ge} .

Вращающийся базис Иногда, в частности при работе с более чем одним кубитом, нагляднее работать во вращающемся с частотой w_{ge} базисе. В нем $\hat{\sigma}_{x,y}$ уже не будут осциллировать при отсутствии внешних воздействий. Однако, если же из-за какого-либо взаимодействия фаза кубита все же поменяется, то это будет легче заметить без осциллирующего фона, чем с ним.

Наблюдать операторы во вращающемся базисе можно двумя способами.

Во-первых, можно просто рассмотреть операторы $\hat{\sigma}_{x,y,z}(t) = \langle \hat{U}^\dagger(t) | \hat{\sigma}_{x,y,z} | \hat{U}(t) \rangle$, где $\hat{U}(t) = \exp(i \frac{\omega_{ge}}{2} \hat{\sigma}_z t)$. При этом $\hat{\sigma}_z(t) = \hat{\sigma}_z$, так как он коммутирует с $\hat{U}(t)$.

Во-вторых, можно непосредственно перейти в этот базис:

$$\psi^{\omega_{ge}}(t) = \hat{U}(t) \psi \quad (3.4)$$

Базисными векторами являются столбцы \hat{U} . Более подробно этот переход рассмотрен в пункте (3.3). Отметим сейчас, что в этом случае необходимо так же перестроить гамильтониан (2.11) или (2.5).

3.2 Вынужденное поведение кубита

Общепринятый способ менять состояние трансмона – взаимодействие кубита с микроволновым воздействием [ссылка!]. Для маленьких амплитуд поля можно ограничиться двухуровневой моделью трансмона, случай больших амплитуд поля рассмотрен позднее [внутр.ссылка]. Действие поля может быть представлено в виде $\hat{\sigma}_x \cos(\omega t + \varphi)$:

$$\hat{H} = \frac{\hbar \omega_{ge}}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar f \hat{\sigma}_x \cos(\omega t + \phi) \quad (3.5)$$

, здесь f отвечает за амплитуду поля.

Частота поля ω как амплитуда f устанавливаются экспериментатором, однако, нерезонансный случай $\omega_{ge} \neq \omega$ не представляет особого интереса. В случае же $\omega_{ge} = \omega$ возникает резонанс уровней кубита и возникают *осцилляции Раби*. В зависимости от φ будет происходить вращение состояний вокруг различных осей на сфере Блоха. Еще один случай простой способ воздействия на кубит – изменение E_J и как следствие ω_{ge} . В этом случае σ_z не изменит свое значение, а вот фаза (σ_x, σ_y) может поменяться. На Рис 3.2 можно заметить, что осцилляции Раби не являются чистыми синусоидами, а их период, должно быть, обратно пропорционален f . Чтобы понять природу этого, рассмотрим *приближение вращающейся волны* – RWA.

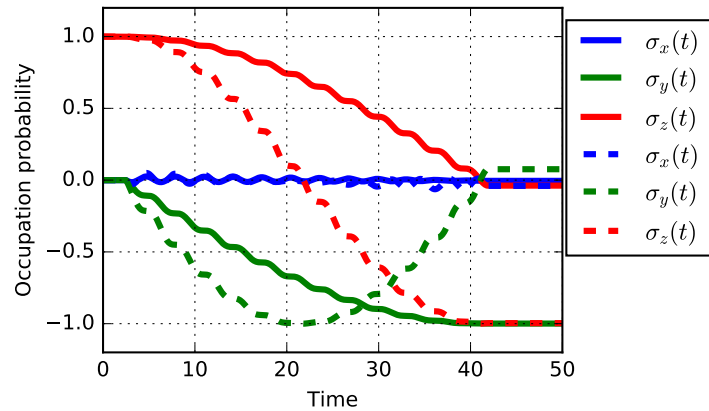


Рис. 3.2: Бездиссипативные осцилляции Раби под действием э/м поля (результат моделирования во вр. базисе). Отношение амплитуд поля для сплошных и пунктирных графиков равно 2. !!!

3.3 Приближение вращающейся волны

Попытаемся приближенно решить уравнение Шредингера на гамильтониан (3.5) в резонансном случае $\omega_{ge} = \omega$. Для этого перейдем во вращающийся базис (3.4):

$$\tilde{\psi} = \hat{U} \psi \quad (3.6)$$

Запишем в нем уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^+ \tilde{\psi} = \hbar H \hat{U}^+ \tilde{\psi}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^+ \tilde{\psi} - i\hbar \hat{U} \frac{\partial \hat{U}^+}{\partial t} \tilde{\psi}$$

После подстановки \hat{H} получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = (\hbar f (\hat{\sigma}_x \cos \omega t - \hat{\sigma}_y \sin \omega t)) \tilde{\psi} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = \frac{f}{2} [\hat{\sigma}_x (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) - \hat{\sigma}_y (\sin(2\omega t + \varphi) - \sin \varphi)]$$

Проанализируем полученное уравнение. Слагаемые двойной частоты (и частоты ω в исходном базисе) соответствуют “ряби” на осцилляциях Раби и ими при рассмотрении динамики на временах $t \gg \frac{2\pi}{\omega}$ можно пренебречь. В итоге

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} \simeq \frac{f}{2} (\hat{\sigma}_x \cos \varphi + \hat{\sigma}_y \sin \varphi) \quad (3.7)$$

описывает динамику кубита в приближении вращающейся волны. Из него сразу же видно, что φ задает ось, вокруг которой на сфере Блоха вращается состояние кубита. Например, при $\varphi = 0$ будет происходить вращение вокруг σ_x , что отражено на рис. (3.2).

4 Динамика трансмона, взаимодействующего с внешней средой

Здесь рассматривается уравнение Линблада для открытой системы, некоторые частные случаи и введем затухание и дефазировку трансмона.

4.1 Динамика открытой среды

Уравнение Шредингера дает обратимые решения, т.е. унитарную эволюцию. В этом уравнении \hat{H} полагается известным в любой момент времени, при описании взаимодействия выбранной подсистемы (например, трансмона) с внешней средой затруднительно точно описать поведение внешней среды, так как внешней средой по сути является весь остальной мир. Однако, в качестве приближения зачастую можно выбрать какую-то модельную систему, хорошо соотносящуюся с экспериментом [ссылка].

Матрица плотности Для описания динамики подсистемы в таком случае формализм вектора состояния уже не подходит, необходимо использовать его обобщение - *матрицу плотности* $\hat{\rho}$. Подробнее об этом изложено в [ссылка]. Каждому состоянию подсистемы, описываемому волновой функцией, соответствует *чистое* состояние матрицы плотности. Если же данному состоянию, описываемое $\hat{\rho}$ нельзя сопоставить вектор состояния, то такое состояние называют *смешанным*. Средние значения операторов для состояния $\hat{\rho}$ находятся следующим образом :

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{tr} (\hat{\rho} \hat{A})$$

Уравнение Шредингера на эволюцию волновой функции ψ заменяется *уравнением Лиувилля-фон-Неймана* на матрицу плотности $\hat{\rho}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (4.1)$$

Это уравнение все еще описывает унитарную эволюцию системы. Чтобы получить неунитарную эволюцию *подсистемы*, воспользуемся уравнением Линблада.

Уравнение эволюции в форме Линблада Для описания подсистемы используется понятие взятия *частичного следа* и *сокращенной матрицы плотности*:

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E [\hat{\rho}_{SE}] \equiv \sum_i \langle i |_E \hat{\rho}_{SE} | i \rangle_E \Leftrightarrow [\hat{\rho}_S]_{n,m} = \sum_i \langle n |_S \otimes \langle i |_E \hat{\rho}_{SE} | i \rangle_E \otimes | m \rangle_S$$

Далее, исходный гамильтониан включает как рассматриваемую подсистему \hat{H}_S , так и окружение \hat{H}_E и взаимодействие с ним \hat{H}_I :

$$\hat{H}_{SE} = \hat{H}_S \otimes \hat{\mathbb{1}}_E + \hat{\mathbb{1}}_S \otimes \hat{H}_E + \hat{H}_I. \quad (4.2)$$

Пренебрегая влиянием подсистемы на изменения состояния окружающей среды и считая, что у нее нет “эффекта памяти” (Марковское приближение), получим уравнение в форме Линблада:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_s, \hat{\mathcal{H}}_s] + \sum_k \frac{\gamma_k}{2} \mathcal{D} [\hat{\mathcal{O}}_k] \hat{\rho}_s, \quad (4.3)$$

где \mathcal{D} - линбладовский супероператор:

$$\mathcal{D} [\hat{\mathcal{O}}_k] \hat{\rho}_s \equiv 2\hat{\mathcal{O}}_k \hat{\rho}_s \hat{\mathcal{O}}_k^\dagger - \left\{ \hat{\mathcal{O}}_k^\dagger \hat{\mathcal{O}}_k, \hat{\rho}_s \right\} \quad (4.4)$$

Коэффициенты γ_k , определяющие скорость распада, и операторы $\hat{\mathcal{O}}_k$ выводятся отдельно для каждой модели окружения, однако, вид уравнения сохраняется [ссылка на Линблада].

4.2 Релаксация и дефазировка кубита

Наиболее частыми процессами затухания состояния кубита, наблюдаемые в эксперименте и возникающие из-за взаимодействия с окружением являются *релаксация* и *дефазировка*. Первый, релаксация, отвечает за потерю кубитом энергии, и, как следствие, переход $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$. Второй, дефазировка, не меняет энергию состояния (т.е. $\text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z) = \text{const}$), но сводит к нулю $\text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_{x,y})$, что соответствует потерей когерентности состоянием.

Релаксация Для потери энергии кубитом необходимо, чтобы \hat{O}_k содержал недиагональные члены, простейшим (и дающим удовлетворительный результат [\[ссылка!\]](#)) оператором такого рода является “ladder operator” - нижнедиагональный оператор

$$\hat{C} = \sum_t \alpha_t |t\rangle \langle t+1|, \quad (4.5)$$

где суммирование ведется по собственным состояниям трансмона. О выборе коэффициента α_t можно почитать здесь [\[ссылка\]](#), он равен

$$\alpha_t = \frac{n_{t,t+1}}{n_{0,1}} \quad (4.6)$$

Уравнение Линблада (4.3) с учетом релаксации теперь выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_s, \hat{\mathcal{H}}_s] + \frac{\gamma}{2} \mathcal{D}[\hat{C}] \hat{\rho}_s, \quad (4.7)$$

Параметр γ отвечает за скорость распада состояния и подбирается до согласия с экспериментом.

Дефазировка Противоположно предыдущему эффекту, линбладовский оператор \hat{C}_ϕ дефазировки содержит только диагональные члены. Согласно [\[ссылка\]](#) он может быть записан в виде

$$\hat{C}_\phi = \sum_t \frac{\beta_t}{2} |t\rangle \langle t|, \quad (4.8)$$

$$\beta_t = \frac{2\epsilon_t}{\epsilon_1 - \epsilon_0},$$

где ϵ_t определен в (2.8) и отвечает за возможную амплитуду зарядовых шумов. Уравнение Линблада с учетом оператора дефазировки \hat{C}_ϕ записывается аналогично (4.7). Эффект дефазировки для трансмона он в силу (2.9) чрезвычайно мал по сравнению с релаксацией и поэтому *собственной дефазировкой трансмона можно пренебречь* при численных расчетах.

Дефазировку могут вносить другие элементы системы, например, потоковый шум может возникать от SQUID-а [\[ссылка\]](#).

4.3 Утечки на более высокие уровни

Другой нежелательный (чаще всего) эффект, заключающийся в возбуждении более высоких уровней, не связан со взаимодействием с окружением кубита. Однако, он может проявиться при слишком большой амплитуде поля f в (3.5). В пункте 2.3 было сказано, что величина ангармонизма задает минимально время операций, осуществляемых с помощью микроволновых импульсов. Поясним теперь суть этого утверждения. При $f > 0$ возможны переходы в области порядка $\omega \pm f$, значит, при $f \sim \alpha$ возможны переходы $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ с энергией $\omega + \alpha$. $abcd \ x = y \ abcd$

Литература

- ¹ Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. // Science (New York, N.Y.). — 1993. — Vol. 261. — P. 1569–1571. (ссылка на стр. [3])
- ² DiVincenzo D. P. Quantum Computation // Science. — 1995. — Vol. 270, no. 5234. — P. 255–261. — Access mode: <http://www.sciencemag.org/content/270/5234/255.abstract>. (ссылка на стр. [3])
- ³ DiVincenzo D.P. Prospects for quantum computing. — 2000. — P. 12–15. (ссылка на стр. [3])
- ⁴ Spiller T. P. Quantum information processing: cryptography, computation, and teleportation // Proceedings of the IEEE. — 1996. — Vol. 84. (ссылка на стр. [3])
- ⁵ Milburn G. J. Photons as qubits // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 2009, no. T137. — P. 14003. — Access mode: <http://stacks.iop.org/1402-4896/2009/i=T137/a=014003>. (ссылка на стр. [3])
- ⁶ Cirac J. I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Physical review letters. — 1995. — Vol. 74, no. 20. — P. 4091. (ссылка на стр. [3])
- ⁷ Kane B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer // Nature. — 1998. — Vol. 393. — P. 133–137. (ссылка на стр. [3])
- ⁸ Rempe G. Cavity QED with single atomic and photonic qubits // Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS) - Technical Digest Series. — 2008. (ссылка на стр. [3])
- ⁹ Devoret M. H., Martinis J. M. Implementing qubits with superconducting integrated circuits // Experimental Aspects of Quantum Computing. — 2005. — P. 163–203. (ссылка на стр. [3])
- ¹⁰ Devoret M. H. Quantum fluctuations in electrical circuits // Les Houches, Session LXIII. — 1995. — Access mode: http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum_circuit_theory-1.pdf. (ссылка на стр. [3])
- ¹¹ Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits. // Nature. — 2008. — Vol. 453, no. 7198. — P. 1031–42. — Access mode: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18563154>. (ссылка на стр. [3])

- ¹² Superconducting persistent-current qubit / T. Orlando, J. Mooij, Lin Tian et al. // Physical Review B. — 1999. — Vol. 60, no. 22. — P. 15398–15413. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.15398>. (ссылка на стр. [8])
- ¹³ Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta et al. — 2007. — P. 21. — 0703002. (ссылки на стр. [4 и 8])
- ¹⁴ Implementation of a quantum metamaterial using superconducting qubits. / P. Macha, G. Oelsner, J.-M. Reiner et al. // Nature communications. — 2014. — Vol. 5. — P. 5146. — Access mode: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25312205>. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁵ Clarke J., Braginski A. I. The SQUID Handbook. — 2006. — Vol. 2. — P. 1–634. — ISBN: 9783527404087. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁶ Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom / O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov et al. // Science. — 2010. — Vol. 327, no. 5967. — P. 840–843. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁷ Xia K., Vanner M. R., Twamley J. An opto-magneto-mechanical quantum interface between distant superconducting qubits. // Scientific reports. — 2014. — Vol. 4. — P. 5571. — arXiv:1407.2324v1. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁸ Schrieffer J. R., Tinkham M. Superconductivity // Reviews Of Modern Physics. — 1999. — Vol. 71. — P. S313–S317.
- ¹⁹ Ginzburg V.L., Landau L.D. On the theory of superconductivity // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064. — 1950.
- ²⁰ Gorkov L. P. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity // Sov. Phys. JETP. — 1959. — Vol. 9, no. 6. — P. 1364–1367.
- ²¹ Josephson B. Coupled Superconductors // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36. — P. 216–220. (ссылка на стр. [5])
- ²² Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'Ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Reviews of Modern Physics. — 2004. — Vol. 76. — P. 411–469. (ссылка на стр. [5])
- ²³ Quantum theory of three-junction flux qubit with non-negligible loop inductance: Towards scalability / T. Robertson, B. Plourde, P. Reichardt et al. // Physical Review B. — 2006. — Vol. 73, no. 17. — P. 174526. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.174526>.
- ²⁴ Johansson R. Reproduce: Orlando et al., Phys. Rev. B 60, 15398 (1999). — Access mode: <http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/reproduced-papers/blob/master/Reproduce-PRB-60-15398-1999-Orlando.ipynb>.
- ²⁵ Nonlinear response of the vacuum Rabi resonance / L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch et al. // Nature Physics. — 2009. — Vol. 5, no. 2. — P. 105–109.

- ²⁶ Carmichael H. J. Quantum Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations. — Springer Verlag, 1999.
- ²⁷ Markovian master equations: a critical study / A. Rivas, A. D. K. Plato, S. F. Huelga, M.B. Plenio // New Journal of Physics. — 2010. — Vol. 12, no. 11. — P. 113032.
- ²⁸ Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130. — Access mode: <http://link.springer.com/10.1007/BF01608499>.
- ²⁹ Dynamics of the dissipative two-state system / A. J. Leggett, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher et al. // Reviews of Modern Physics. — 1987. — Vol. 59, no. 1. — P. 1.
- ³⁰ Hsu D., Skinner J. L. General quantum mechanical theory of pure dephasing // Journal of luminescence. — 1987. — Vol. 37, no. 6. — P. 331–337.
- ³¹ Jerger M. Experiments on Superconducting Qubits Coupled to Microwave Resonators : PhD Thesis / M. Jerger ; Karlsruhe Institute of Technology. — 2013.
- ³² Bishop L. Circuit Quantum Electrodynamics : Doctoral Thesis / L. Bishop ; Yale Institute. — 2010.
- ³³ Bauer D. Theory of intense laser-matter interaction. — Max-Planck-Institut für Kernphysik, 2006. — P. 106.
- ³⁴ Braak D. Integrability of the Rabi model // Physical review letters. — 2011. — Vol. 107, no. 10. — P. 100401.
- ³⁵ Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime / T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl et al. // Nature Physics. — 2010. — Vol. 6, no. 10. — P. 772–776.
- ³⁶ Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime / P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos et al. // Physical review letters. — 2010. — Vol. 105, no. 23. — P. 237001.
- ³⁷ Novotny L. Strong coupling, energy splitting, and level crossings: A classical perspective // American Journal of Physics. — 2010. — Vol. 78, no. 11. — P. 1199–1202.
- ³⁸ Beaudoine F., Gambetta J. M., Blais A. Dissipation and ultrastrong coupling in circuit QED // Physical Review A. — 2011. — Vol. 84, no. 4. — P. 043832.
- ³⁹ Decoherence in a superconducting quantum bit circuit / G. Ithier, E. Collin, P. Joyez et al. // Physical Review B. — 2005. — Vol. 72, no. 13. — P. 134519.
- ⁴⁰ Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation / A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff et al. — 2004. — P. 14. — 0402216.

- ⁴¹ Introduction to quantum noise, measurement, and amplification / A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin et al. // *Reviews of Modern Physics*. — 2010. — Vol. 82, no. 2. — P. 1155.
- ⁴² Gardiner C. W., Collett M. J. Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation // *Physical Review A*. — 1985. — Vol. 31, no. 6. — P. 3761.
- ⁴³ Broadband sample holder for microwave spectroscopy of superconducting qubits / A. S. Averkin, A. Karpov, K. Shulga et al. // *Review of Scientific Instruments*. — 2014. — Vol. 85, no. 10. — P. 104702.
- ⁴⁴ Göppl M. V. Engineering quantum electronic chips : Ph. D. thesis / M. V. Göppl ; Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 18314, 2009. — 2009.
- ⁴⁵ Thuneberg E. Quantum optics in electric circuits. — 2013.
- ⁴⁶ Oliver W. D., Valenzuela S. O. Large-amplitude driving of a superconducting artificial atom // *Quantum Information Processing*. — 2009. — Vol. 8, no. 2-3. — P. 261–281.
- ⁴⁷ Johansson J.R., Nation P.D., Nori Franco. QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems // *Computer Physics Communications*. — 2013. — Vol. 184, no. 4. — P. 1234 – 1240. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512003955>.