

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального  
образования  
Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)  
Факультет общей и прикладной физики  
Кафедра физики и технологии наноструктур

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Оптимизация однокубитных и двухкубитных вентилей  
и считывающих импульсов для сверхпроводниковых  
кубитов**

Выполнил студент:

Сафронов Е.С.  
группа 325

Научный руководитель:

Шульга К.В.  
к. ф.-м. н.

г. Москва, 2017

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>6</b>
1	Эффект Джозефсона . . . . .	6
1.1	Уравнения Джозефсона . . . . .	6
1.2	RCSJ-модель . . . . .	7
1.3	Фазо-потокное соотношение . . . . .	8
2	Теория изолированного сверхпроводящего кубита . . . . .	8
2.1	Построение гамильтониана . . . . .	9
2.2	Зарядовый кубит . . . . .	10
2.3	Трансмон . . . . .	12
3	Бездиссипативная динамика трансмона . . . . .	13
3.1	Динамика свободного кубита . . . . .	13
3.2	Вынужденное поведение кубита . . . . .	15
3.3	Приближение вращающейся волны . . . . .	16
4	Динамика трансмона, взаимодействующего с внешней средой . . . . .	16
4.1	Динамика открытой среды . . . . .	16
4.2	Релаксация и дефазировка кубита . . . . .	18
4.3	Взаимодействие с более высокими уровнями системы . . . . .	19
5	Квантовые вентили и их реализации . . . . .	19
5.1	Квантовые вентили . . . . .	19
5.2	Реализация однокубитных импульсов . . . . .	20
5.3	Реализация двухкубитных импульсов . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Методы оптимального контроля импульсов</b>	<b>24</b>
1	Необходимые инструменты для моделирования квантовых вентиляей . .	24
1.1	Общие сведения о моделировании импульсов . . . . .	24
1.2	Использование QuTiP . . . . .	25
1.3	Последовательность APE (Amplified Phase Error) . . . . .	26

---

1.4	Оценка точности вентиля	26
2	Способы исправления ошибок и повышения точности	27
2.1	Выбор огибающей импульса	27
2.2	Derivative Removal by Adiabatic Gate	28
2.3	Half-Derivative	30
2.4	GRadient Ascent Pulse Engineering	30
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>32</b>
1	Моделирование	32
1.1	APC	33
2	Оптимизация	33
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>36</b>
1	Список результатов	36
2	Планы на будущее	36
3	Благодарности	36

# Глава 1

## Введение

Квантовый компьютер – это устройство, хранящее и обрабатывающее информацию внутри группы квантовых систем, причем обработка информации происходит в результате когерентных взаимодействий систем внутри группы.<sup>1</sup> Каждая квантовая система, как правило, является двухуровневой и носит название “квантовый бит” или “кубит” (англ. “qubit” – quantum bit). Для осуществления квантового расчета необходимо связать кубиты друг с другом, иметь возможность управлять состоянием кубитов и считывать его, сохраняя чистоту соответствующей матрицы плотности, а также обеспечить изоляцию кубитов от влияния окружающей среды. Следовательно, в качестве кубитов могут быть использованы любые достаточно изолированные двухуровневые системы, поддающиеся контролю и способные взаимодействовать друг с другом.<sup>2–4</sup> В качестве примера можно привести фотоны,<sup>5</sup> ионы в ионных ловушках,<sup>6</sup> ядерные спины,<sup>7</sup> атомы в электромагнитных резонаторах,<sup>8</sup> электрические системы<sup>9</sup> и т.п.

Последние являются одними из самых заманчивых кандидатов на эту роль, но только при условии, что их поведение будет именно квантовым, а не классическим.<sup>10</sup> К счастью, явление сверхпроводимости и эффект Джозефсона позволяют наблюдать квантовые эффекты в контурах даже мезоскопического масштаба и создавать на их основе так называемые *сверхпроводящие (джозефсоновские) кубиты*.<sup>11</sup>

Джозефсоновские кубиты имеют два значительных недостатка и одно значительное преимущество в сравнении с микроскопическими кубитами. Первый недостаток заключается в значительном взаимодействии с окружающей средой – в силу больших размеров, джозефсоновские кубиты сильнее связываются со средой, что требует дополнительных изысканий в области их изоляции; второй недостаток заключается в том, что в то время как микроскопические кубиты, например, атомы, идентичны друг другу, сверхпроводящие кубиты могут иметь отличия из-за неточностей производства. Для борьбы с этим требуется либо создавать заведомо нечувствительные к дефектам схемы, либо проводить калибровку, в процессе которой параметры цепей измеряются, а затем компенсируются в эксперименте.

Преимущество джозефсоновских кубитов в их гибкости: они могут быть произвольным образом расположены относительно друг друга, а их параметры легко и непрерывно изменяемы в широких пределах. Эта гибкость вместе с некоторыми

фундаментальными эффектами<sup>12</sup> может быть использована для борьбы с первым недостатком, а также предоставляет много вариантов для подстройки параметров, что в значительной степени нивелирует второй недостаток. Далее, накопленный опыт человечества в области изготовления интегральных схем позволит упростить переход к производству реальных квантовых вычислительных устройств, что является еще одним преимуществом в сравнении с другими типами кубитов. Таким образом, скорее всего именно джозефсоновские кубиты и будут применены в первом квантовом компьютере, и именно их следует изучать.

Важно отметить, что сверхпроводящие кубиты могут применяться не только для непосредственного использования в квантовом компьютере, так как по сути являются рукотворными атомами с широко изменяемыми характеристиками, как внутренними, так и касающимися связи с окружением. Они могут быть пригодны для создания метаматериалов,<sup>13</sup> проведения высокоточных измерений полей,<sup>14</sup> использоваться в качестве активной среды,<sup>15</sup> применяться в квантовой криптографии и телепортации<sup>16</sup> и т. п.

# Глава 2

## Теоретические сведения

В этой главе приведены теоретическое описание некоторых явлений, учитываемых при построении модели сверхпроводящих кубитов. Далее будет кратко рассмотрен эффект Джозефсона, затем произведено рассмотрение теории изолированного сверхпроводящего кубита и его частного случая – *трансмона*, теории его взаимодействия с окружающей средой и наконец, несколько популярных квантовых вентилей.

### 1 Эффект Джозефсона

#### 1.1 Уравнения Джозефсона

Эффект Джозефсона<sup>17</sup> – это макроскопический квантовый эффект в сверхпроводниках. Согласно теории БКШ, сверхпроводящее состояние проводника может быть описано параметром порядка, являющимся модулем макроскопической волновой функции куперовских пар:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (1.1)$$

Тогда, эффект Джозефсона заключается в установлении одной фазы в двух сверхпроводниках, соединенных через “слабую связь”. “Слабые связи” многообразны: это могут быть тонкие слои диэлектрика, сужения, точечные контакты, прослойки из металла в нормальном состоянии или из ферромагнетика. В случае, если фазы не равны, то через слабую связь будет течь бездиссипативный ток, и будет выполнено некоторое *фазо-токовое соотношение* между током и скачком фазы на переходе. Часто, хотя и не всегда,<sup>18</sup> оно оказывается синусоидальным:

$$I_s = I_c \sin(\theta_2 - \theta_1) = I_c \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Из этой формулы видно, что сверхпроводящий ток  $I_s$  не может превысить некоторого значения  $I_c$ . Это так называемый *критический ток* джозефсоновского перехода, при превышении которого бездиссипативность нарушается, и на переходе устанавливается напряжение  $V$ . В этом случае выполнено второе уравнение Джозефсона:

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV, \quad (1.3)$$

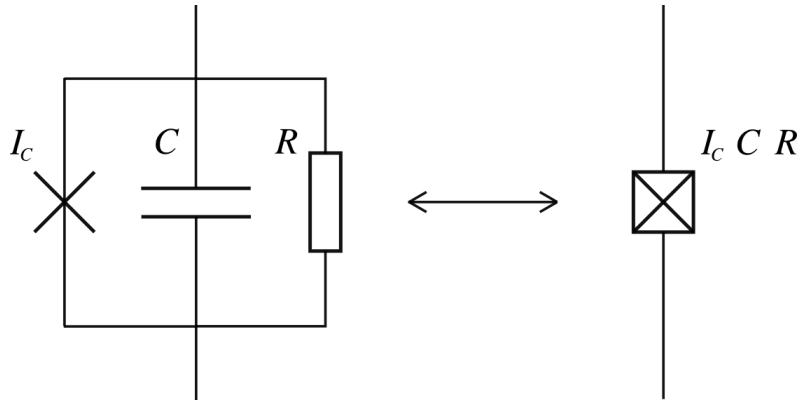
и наблюдаются осцилляции разности фаз между сверхпроводниками. Величина критического тока рассчитывается из микроскопической теории, например, для перехода SIS (*сверхпроводник - изолятор - сверхпроводник*) верна формула Амбегаокара-Баратова:

$$I_c = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left( \frac{\Delta(T)}{2k_b T} \right), \quad (1.4)$$

где через  $T$  обозначена температура, а через  $R_n$  сопротивление контакта в отсутствие сверхпроводимости,  $R_n = \rho \frac{d}{S}$ , где  $\rho$  – удельное сопротивление I-слоя, а  $d$  и  $S$  – его толщина и площадь.

## 1.2 RCSJ-модель

Для упрощения описания динамики джозефсоновского контакта применяется модель RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction), работающая для маленьких переходов со слоем изолятора, когда изменения фазы на размере контакта пренебрежимо малы и присутствует ненулевая геометрическая емкость.



**Рис. 1.1:** Схема RCSJ в виде параллельного соединения идеального джозефсоновского перехода с конденсатором и резистором.

Принципиальная схема изображена на Рис. 1.1. В случае, когда ток через систему не превышает критического  $I_c$ , резистор на схеме может быть опущен. В силу параллельности соединения выполнено также соотношение  $\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U_C$  между напряжениями на переходе и на конденсаторе, которое устанавливает аналогию между неидеальным переходом и колебательным контуром с нелинейной индуктивностью.

В рамках RCSJ-модели энергия перехода состоит из энергии, запасенной в нелинейной индуктивности идеального перехода, и энергии конденсатора:

$$E = E_{ind} + E_{cap} \quad (1.5)$$

Индуктивная энергия может быть определена посредством интегрирования мощности  $P = IV$  по времени от 0 до момента  $T$ , когда на контакте установилась разность фаз  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} E_{ind} &= \int I_J V_J dt = I_c \frac{\hbar}{2e} \int_0^T \sin(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= E_J \int_0^\varphi \sin \phi d\phi = E_J [1 - \cos \varphi], \end{aligned} \quad (1.6)$$

где была введена новая константа  $E_J$  – джозефсоновская энергия. Емкостная энергия также может быть вычислена с использованием (1.3):

$$E_{cap} = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi}^2, \quad E_C = \frac{(e)^2}{2C}, \quad (1.7)$$

где  $E_C$  – константа, описывающая емкостную энергию перехода.

### 1.3 Фазо-потокосое соотношение

Рассмотрим замкнутое сверхпроводящее кольцо конечной толщины, быть может, прерванное конечным числом джозефсоновских переходов  $\{J_1..J_n\}$ . Рассмотрим применительно к данному случаю уравнение (??). Проведем контур  $C$  внутри кольца так, чтобы он нигде не приближался к стенкам на расстояние, меньшее глубины проникновения магнитного поля (Рис. 1.2). Тогда сверхток на всей его длине будет равен нулю, и, проинтегрировав по нему (??), мы получим следующее равенство:

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l}.$$

Руководствуясь Рис. 1.2, соображениями однозначности волновой функции (1.1) при обходе вокруг контура и теоремой Стокса для  $\text{rot } \mathbf{A}$ , можем написать:

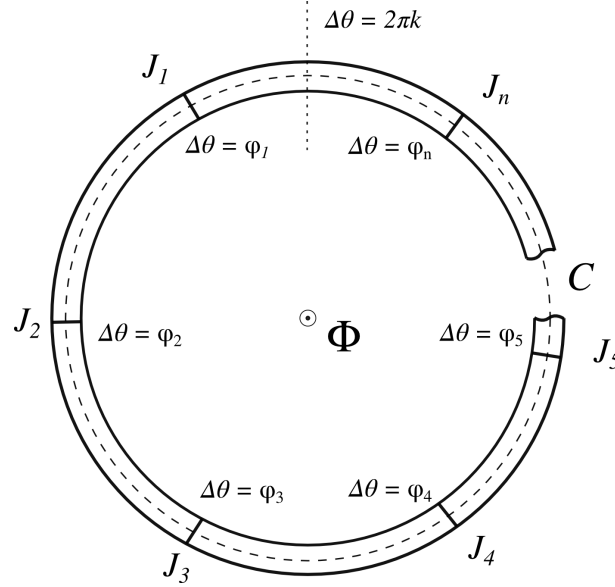
$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \sum_i \varphi_i + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_i \varphi_i &= 2\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, получено фазо-потокосое соотношение. Видно, что в случае отсутствия в кольце джозефсоновских переходов полученное уравнение (1.8) опишет равенство магнитного потока  $\Phi$ , проходящего через сверхпроводящее кольцо, целому числу  $k$  квантов потока  $\Phi_0$ , обосновывая определение этой константы в (??).

## 2 Теория изолированного сверхпроводящего кубита

Сверхпроводящие кубиты были предложен Леггеттом в 1980х, а в 1997м Yasunobu Nakamura году был проведен первый эксперимент, доказавший наличие суперпози-





**Рис. 1.2:** К выводу фазо-потокowego соотношения. Пунктиром обозначен контур интегрирования  $C$ . Через  $\varphi_i$  обозначены скачки фаз на джозефсоновских контактах, а точками - место разрешенного накопления фазы при полном обходе вокруг кольца  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

ции состояний в сверхпроводящем кубите. Он исследовал состояния в “ящике куперовских пар” (англ. – “Cooper-pair box”) или иначе, *зарядовом кубите*. В 1999 году был предложен Flux-кубит, или потоковый трехконтактный сверхпроводящий кубит.<sup>19</sup> Он представляет собой сверхпроводящий контур, прерванный в трех местах джозефсоновскими переходами (??), два из которых одинаковы, а третий отличается по площади в  $\alpha$  раз. Наконец, в 2007 году был предложен<sup>12</sup> *трансмон* - схожий с зарядовым кубит, однако, с существенно подавленными зарядовыми шумами и несколько меньшим *ангармонизмом*. Под *изолированным* в данном разделе понимается одиночный кубит, не взаимодействующий с окружением ни диссипативным, ни консервативным образом. Единственным внешним фактором является при таком рассмотрении постоянное магнитное поле, проходящее через контур.

## 2.1 Построение гамильтониана

Для того, чтобы провести квантово-механическое рассмотрение кубита, требуется записать его гамильтониан. Для этого прежде всего нужно понять, какими независимыми степенями свободы он обладает. Вообще говоря, состояние одиночного джозефсоновского перехода, в силу того, что в параллельном соединении RCSJ-модели  $U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi}$ , целиком описывается своей разностью фаз. Энергия, запасенная шунтирующим конденсатором, может быть записана в виде (1.7), а энергия джозефсоновского контакта в виде (1.5). Таким образом, получаем гамильтониан системы:

$$\hat{H} = E_J [1 - \cos \hat{\varphi}] + \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi}^2 \quad (2.1)$$

Аналогично сопряженной паре операторов  $\hat{x}$  и  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  можно определить оператор заряда  $\hat{q} = -2ei\frac{\partial}{\partial \varphi}$  и числа куперовских пар  $\hat{n} = -i\frac{\partial}{\partial \varphi}$ . Кроме того, иногда заряд кубита можно контролировать посредством емкостного гейта  $C_g$  с приложенным напряжением  $V_g$ . Тогда энергия, запасенная в емкостной части контура может быть записана как  $4E_C(\hat{n} - n_g)^2$ , где  $n_g = \frac{-C_g V_g}{2e}$ . Весь гамильтониан:

$$\hat{H} = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 + E_J [1 - \cos \hat{\varphi}] \quad (2.2)$$

Уровни энергии такого гамильтониана можно найти аналитически:

$$E_m(n_g) = E_C a_{2[n_g + k(m, n_g)]} \left( -\frac{E_J}{2E_C} \right) \quad (2.3)$$

, где  $a_\nu(q)$  - функция Матьё, а  $k(m, n_g)$  - целочисленная функция, задающая порядок собственных уровней энергии. Однако, для проведения численных расчетов решение в таком виде не является удобным, тем более что наиболее интересна динамика состояний кубита при включении какого-либо взаимодействия. Рассмотрим гамильтониан 2.2 в зарядовом базисе (базисе собственных состояниях  $\hat{n}$ ) :

$$\hat{H} = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (2.4)$$

Приблизим этот оператор конечномерным, отбросив состояния с зарядом, большим  $2eN$  по модулю:

$$\hat{H}_N = 4E_C \sum_{n=-N}^N (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - E_J \sum_{n=-N}^N (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (2.5)$$

Такой гамильтониан очень удобен для каких-либо численных расчетов.

## 2.2 Зарядовый кубит

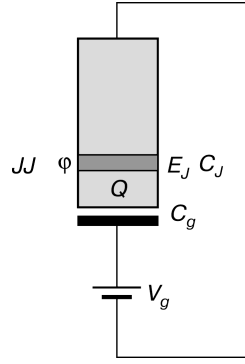
Зарядовый кубит представляет собой ящик для куперовских пар, связанных джозефсоновским контактом с резервуаром заряда и контролируемый приложенным напряжением на гейте. Электростатическая энергия системы...

$$E_C = C_J \frac{V^2}{2} + C_g \frac{(V_g - V)^2}{2} \quad (2.6)$$

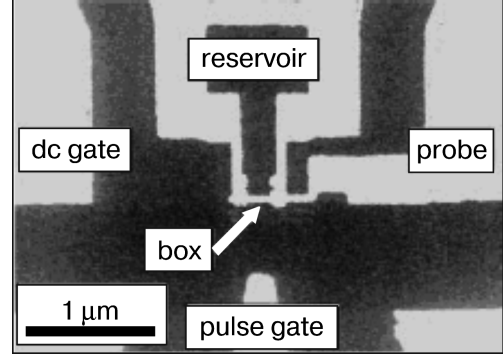
$$E_C = \frac{C}{2} \left( V - \frac{C_g}{C} V_g \right)^2, C = C_J + C_g \quad (2.7)$$

Сводится к привычному члену гамильтониана (2.2).

У зарядового кубита  $E_J < E_C$ . Популярный режим работы зарядового кубита - установка полуцелого заряда на островке ( $n_g = 1/2$ ) с помощью управляющего напряжения (см рис. 2.2b и 2.3). Преимущество такого режима заключается в том, что эта точка расщепления уровней дает двухуровневую систему с разницей энергии уровней, равной  $E_J$ . Так же в этой точке наименьшая чувствительность к зарядовому шуму [ссылка].



(a) Схема зарядового кубита



(b) Электронная фотография зарядового кубита [ссылка]

Рис. 2.1

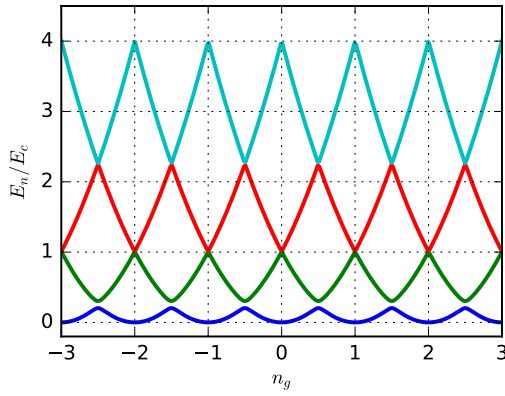
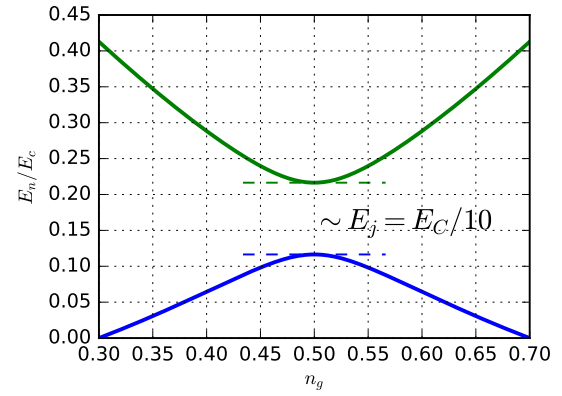
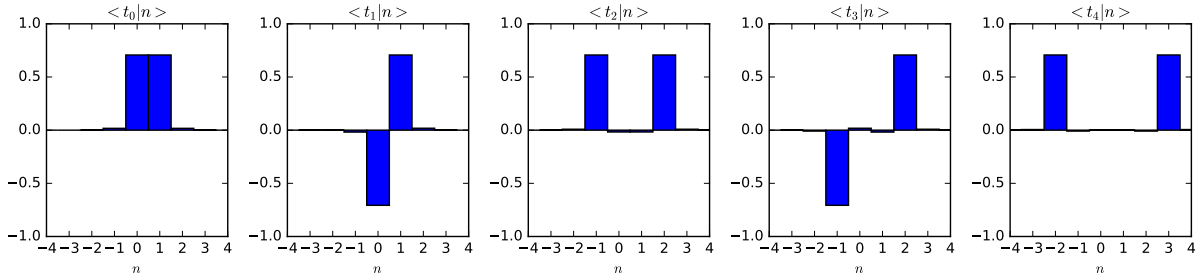
(a)  $E_C/E_J = 10$ (b) “sweet spot” – область расщепления уровней,  $n_g - 1/2 \in \mathbb{Z}$ Рис. 2.2: Зависимость уровней энергии зарядового кубита от управляющего потенциала в виде  $n_g$ . Виден антикроссинг (?) и заметно отличие  $\frac{\partial E_m}{\partial n_g}$  от нуля

Рис. 2.3: Собственные состояния зарядового кубита. В “sweet spot” они являются гибридованными слабо возмущенными зарядовыми состояниями.

## 2.3 Трансмон

**Зарядовый шум.** Для уменьшения зарядового шума необходимо увеличивать отношение  $E_J/E_C$ . Однако, это приводит к уменьшению *ангармонизма*  $\alpha \equiv E_{12} - E_{01}$ . Ангармонизм не может быть нулевым, в этом случае у нас не будет изоляции первых двух уровней системы от остальных (в частности, совпадут энергии переходов  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  и  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ). Так же, величина ангармонизма ограничивает скорость операций, производимых с помощью микроволновых импульсов [подробнее в ...].

Спасением является тот факт, что с уменьшением  $E_C$  чувствительность к зарядовым шумам падает *экспоненциально*, а ангармонизм всего лишь *линейно* [ссылка]. Для достаточно больших  $E_J/E_C$  зависимость  $E_m(n_g)$  можно приблизить косинусом

$$E_m(n_g) = E_m(n_g = 1/4) + \frac{\epsilon_m}{2} \cos 2\pi n_g \quad (2.8)$$

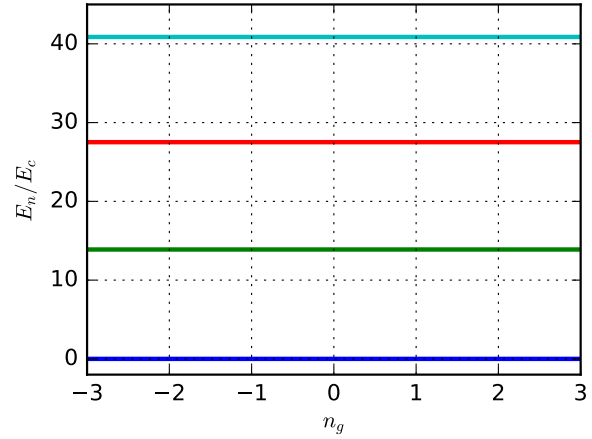
, где

$$\epsilon_m = (-1)^m E_C \frac{2^{4m+5}}{m!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{E_J}{2E_C} \right)^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \exp \left( -\sqrt{8E_J/E_C} \right) \quad (2.9)$$

Для  $E_J/E_C = 50$  получаем  $|\epsilon_0|/E_{01} \lesssim 10^{-8}$ . При этом  $E_{01} \simeq \sqrt{8E_J E_C}$ , а  $\alpha \simeq -E_C$ . Для таких значений  $\epsilon_m$  нет нужды в “sweet spot”, а значит и механизма управления  $n_g$ . При моделировании трансмона можно положить  $n_g = 0$ . Оценим время дефазировки  $T_2$ , возникающей из-за зарядового шума в случае трансмона:

$$T_2 \sim \frac{\hbar}{A} \left| \frac{\partial E_{01}}{\partial n_g} \right|^{-1} \simeq \frac{\hbar}{e\pi |\epsilon_1|} \quad (2.10)$$

Используя возможные параметры трансмона  $E_J = 30$ ,  $E_C = 0.35$ , получаем оценку времени жизни  $T_2 = 400\mu s$ . Для типичного зарядового кубита это время гораздо меньше –  $T_2 \sim 1\mu s$ , что в частности и обуславливает широкую последующую популярность трансмона как физическую реализацию кубита.



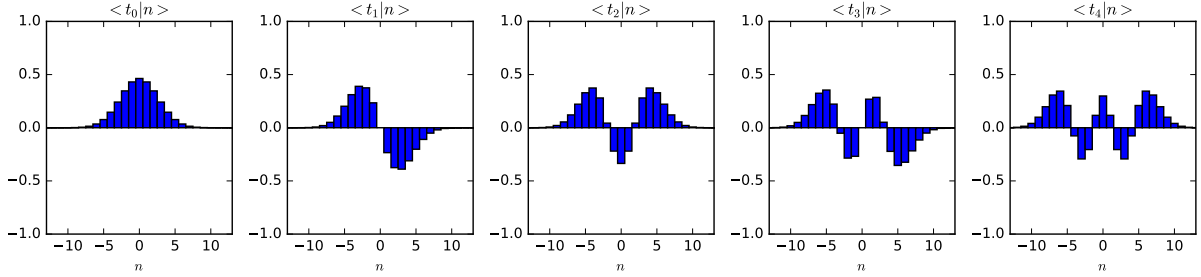
**Рис. 2.4:** При  $E_J/E_C = 100$   $\epsilon_0 \sim 10^{-11}$  и зависимостью  $E_m(n_g)$  можно пренебречь

**Анализ ???.** Рассмотрим собственные состояния трансмона (Рис. 2.5). Для типичного  $E_J/E_C = 100$  они еще не являются фазовыми состояниями ( $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{in\varphi} |n\rangle$ ) и  $\langle t|n\rangle$  существенно затухает с ростом  $n$  [wtf? как оценить падение  $\langle t|n\rangle$  ??]. Значит, можно использовать конечноразмерный гамильтониан трансмона в форме (2.5).

Кроме того, при отсутствии утечек на более высокие уровни можно рассматривать только первые два уровня трансмона  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  – они и являются репрезентативными состояниями кубита. В этом случае привычный гамильтониан трансмона (2.5) упрощается:

$$\hat{H}_{2d} = \frac{\hbar\omega_{ge}}{2}\hat{\sigma}_z \quad (2.11)$$

, где  $\omega_{ge} = E_1 - E_0$ . Стоит еще раз отметить, что здесь имеется ввиду **не**  $N = 2$  в конечномерном гамильтониане (2.5), а первые два уровня в собственном базисе  $|t\rangle$  трансмона.



**Рис. 2.5:** Собственные состояния трансмона  $|t\rangle$  в зарядовом базисе  $|n\rangle$

### 3 Бездиссипативная динамика трансмона

В этом разделе будут рассмотрены следующие вопросы динамики трансмона: свободный трансмон, отклик на различные виды внешнего воздействия и использование приближения вращающейся волны (“rotating wave approximation” – RWA).

#### 3.1 Динамика свободного кубита

Прежде всего изучим динамику свободного кубита. Отсутствует любые внешние воздействия, и, как следствие, утечки на внешние уровни. Некоторая временная зависимость при этом все же появится. Действительно, запишем уравнение Шредингера для столь простого случая:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad (3.1)$$

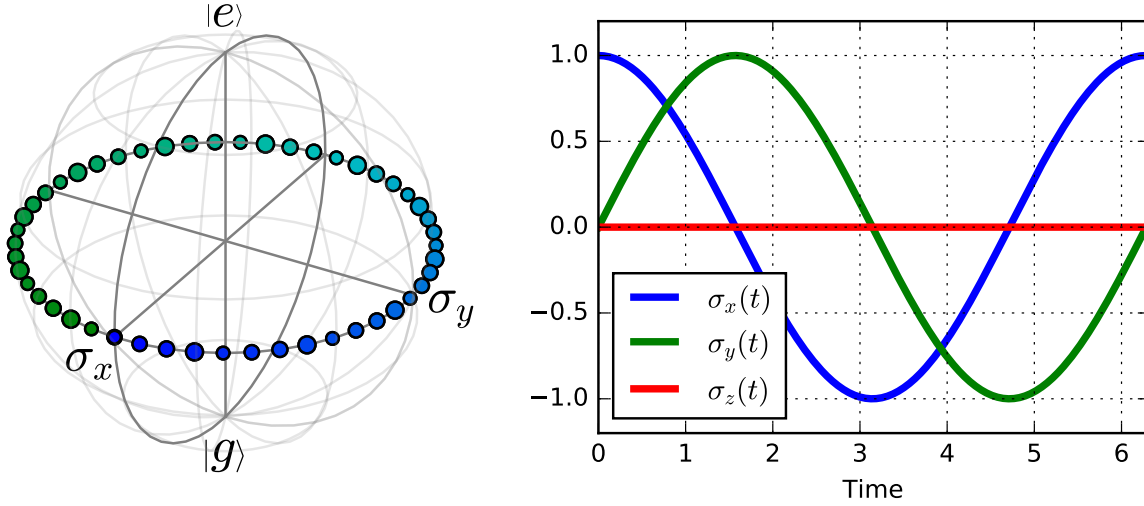
В таком случае можно ограничиться двухуровневым приближением

$$\psi(t) = \psi(0)\exp\left(-i\frac{\omega_{ge}}{2}\hat{\sigma}_z t\right) \quad (3.2)$$

При этом заселенности уровней  $|\psi_{0,1}(t)|^2 = |\psi_{0,1}|^2$  не меняются со временем (что соответствует сохранению энергии в системе).

**Сфера Блоха** При рассмотрении двухуровневой (или квазидвухуровневой) системы зачастую удобно наблюдать за динамикой *матриц Паули*  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  и  $\hat{\sigma}_z$ . Напомню,

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$



(а) Траектория на сфере Блоха

(б) Как график зависимости от времени

**Рис. 3.1:** Динамика  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$ ,  $\hat{\sigma}_z$ . Для простоты  $w_{ge}$  положена равной 1.

Они (вместе с единичной матрицей) составляют базис в пространстве *эрмитовых* матриц 2x2 (а значит и *унитарных*). В желаемом случае отсутствия утечек с  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$   $\langle \hat{1} \rangle \equiv 1$ , а остальные  $\langle \sigma \rangle$  лежат на сфере Блоха. В более общем случае они лежат *внутри* сферы Блоха. Для свободного трансмона значение  $\langle \psi(t) | \hat{\sigma}_{x,y} | \psi(t) \rangle$  уже не будет постоянным, а будет осциллировать с частотой  $\omega_{ge}$ .

**Вращающийся базис** Иногда, в частности при работе с более чем одним кубитом, нагляднее работать во вращающемся с частотой  $w_{ge}$  базисе. В нем  $\hat{\sigma}_{x,y}$  уже не будут осциллировать при отсутствии внешних воздействий. Однако, если же из-за какого-либо взаимодействия фаза кубита все же поменяется, то это будет легче заметить без осциллирующего фона, чем с ним.

*Наблюдать* операторы во вращающемся базисе можно двумя способами.

Во-первых, можно просто рассмотреть операторы  $\hat{\sigma}_{x,y,z}(t) = \langle \hat{U}^\dagger(t) | \hat{\sigma}_{x,y,z} | \hat{U}(t) \rangle$ , где  $\hat{U}(t) = \exp(i \frac{\omega_{ge}}{2} \hat{\sigma}_z t)$ . При этом  $\hat{\sigma}_z(t) = \hat{\sigma}_z$ , так как он коммутирует с  $\hat{U}(t)$ .

Во-вторых, можно непосредственно перейти в этот базис:

$$\psi^{\omega_{ge}}(t) = \hat{U}(t) \psi \quad (3.4)$$

Базисными векторами являются столбцы  $\hat{U}$ . Более подробно этот переход рассмотрен в пункте (3.3). Отметим сейчас, что в этом случае необходимо так же перестроить гамильтониан (2.11) или (2.5).

### 3.2 Вынужденное поведение кубита

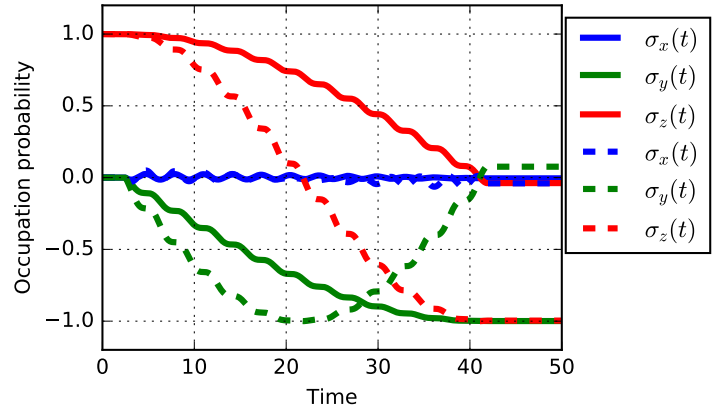
Общепринятый способ менять состояние трансмона – взаимодействие кубита с микроволновым воздействием **[ссылка!]**. Для маленьких амплитуд поля можно ограничиться двухуровневой моделью трансмона, случай больших амплитуд поля рассмотрен позднее **[внутр.ссылка]**. Действие поля может быть представлено в виде  $\hat{\sigma}_x \cos(\omega t + \varphi)$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\hbar w_{ge}}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar f \hat{\sigma}_x \cos(\omega t + \varphi) \right) \psi \quad (3.5)$$

, здесь  $f$  отвечает за амплитуду поля. Для N-мерной модели (2.5) можно записать аналогичное выражение:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \hat{H}_N + \hbar f \hat{n} \cos(\omega t + \varphi) \right) \psi \quad (3.6)$$

Частота поля  $w$  как амплитуда  $f$  устанавливаются экспериментатором, однако, нерезонансный случай  $\omega_{ge} \neq \omega$  не представляет особого интереса. В случае же  $w_{ge} = w$  возникает резонанс уровней кубита и возникают *осцилляции Раби*. В зависимости от  $\varphi$  будет происходить вращение состояний вокруг различных осей на сфере Блоха. Еще один случай простой способ воздействия на кубит – изменение  $E_J$  и как следствие  $\omega_{ge}$ . В этом случае  $\sigma_z$  не изменит свое значение, а вот фаза  $(\sigma_x, \sigma_y)$  может меняться. На Рис 3.2 можно заметить, что осцилляции Раби не являются чистыми синусоидами, а их период, должно быть, обратно пропорционален  $f$ . Чтобы понять природу этого, рассмотрим *приближение вращающейся волны* – RWA.



**Рис. 3.2:** Бездиссипативные осцилляции Раби под действием э/м поля (результат моделирования во вр. базисе). Отношение амплитуд поля для сплошных и пунктирных графиков равно 2. !!!

### 3.3 Приближение вращающейся волны

Попытаемся приближенно решить уравнение Шредингера на гамильтониан (3.5) в резонансном случае  $\omega_{ge} = \omega$ . Для этого перейдем во вращающийся базис (3.4):

$$\tilde{\psi} = \hat{U}\psi \quad (3.7)$$

Запишем в нем уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^+ \tilde{\psi} = \hbar H \hat{U}^+ \tilde{\psi}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^+ \tilde{\psi} - i\hbar \hat{U} \frac{\partial \hat{U}^+}{\partial t} \tilde{\psi}$$

После подстановки  $\hat{H}$  получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = (\hbar f (\hat{\sigma}_x \cos \omega t - \hat{\sigma}_y \sin \omega t)) \tilde{\psi} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} = \frac{f}{2} [\hat{\sigma}_x (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) - \hat{\sigma}_y (\sin(2\omega t + \varphi) - \sin \varphi)]$$

Проанализируем полученное уравнение. Слагаемые двойной частоты (и частоты  $w$  в исходном базисе) соответствуют “ряби” на осцилляциях Раби и ими при рассмотрении динамики на временах  $t \gg \frac{2\pi}{\omega}$  можно пренебречь. В итоге

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi} \simeq \frac{f}{2} (\hat{\sigma}_x \cos \varphi + \hat{\sigma}_y \sin \varphi) \quad (3.8)$$

описывает динамику кубита в приближении вращающейся волны. Из него сразу же видно, что  $\varphi$  задает ось, вокруг которой на сфере Блоха вращается состояние кубита. Например, при  $\varphi = 0$  будет происходить вращение вокруг  $\sigma_x$ , что отражено на рис. (3.2).

## 4 Динамика трансмона, взаимодействующего с внешней средой

Здесь рассматривается уравнение Линблада для открытой системы, некоторые частные случаи и введем затухание и дефазировку трансмона.

### 4.1 Динамика открытой среды

Уравнение Шредингера дает обратимые решения, т.е. унитарную эволюцию. В этом уравнении  $\hat{H}$  полагается известным в любой момент времени, при описании взаимодействия выбранной подсистемы (например, трансмона) с внешней средой затруднительно точно описать поведение внешней среды, так как внешней средой по



сути является весь остальной мир. Однако, в качестве приближения зачастую можно выбрать какую-то модельную систему, хорошо соотносящуюся с экспериментом [ссылка].

**Матрица плотности** Для описания динамики подсистемы в таком случае формализм вектора состояния уже не подходит, необходимо использовать его обобщение - *матрицу плотности*  $\hat{\rho}$ . Подробнее об этом изложено в [ссылка]. Каждому состоянию подсистемы, описываемому волновой функцией, соответствует *чистое* состояние матрицы плотности. Если же данному состоянию, описываемое  $\hat{\rho}$  нельзя сопоставить вектор состояния, то такое состояние называют *смешанным*. Средние значения операторов для состояния  $\hat{\rho}$  находятся следующим образом :

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{tr} (\hat{\rho} \hat{A})$$

Уравнение Шредингера на эволюцию волновой функции  $\psi$  заменяется *уравнением Лиувилля-фон-Неймана* на матрицу плотности  $\hat{\rho}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (4.1)$$

Это уравнение все еще описывает унитарную эволюцию системы. Чтобы получить неунитарную эволюцию *подсистемы*, воспользуемся уравнением Линблада.

**Уравнение эволюции в форме Линблада** Для описания подсистемы используется понятие взятия *частичного следа* и *сокращенной матрицы плотности*:

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E [\hat{\rho}_{SE}] \equiv \sum_i \langle i |_E \hat{\rho}_{SE} | i \rangle_E \Leftrightarrow [\hat{\rho}_S]_{n,m} = \sum_i \langle n |_S \otimes \langle i |_E \hat{\rho}_{SE} | i \rangle_E \otimes | m \rangle_S$$

Далее, исходный гамильтониан включает как рассматриваемую подсистему  $\hat{H}_S$ , так и окружение  $\hat{H}_E$  и взаимодействие с ним  $\hat{H}_I$ :

$$\hat{H}_{SE} = \hat{H}_S \otimes \hat{1}_E + \hat{1}_S \otimes \hat{H}_E + \hat{H}_I. \quad (4.2)$$

Пренебрегая влиянием подсистемы на изменения состояния окружающей среды и считая, что у нее нет “эффекта памяти” (Марковское приближение), получим уравнение в форме Линблада:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_s, \hat{H}_s] + \sum_k \frac{\gamma_k}{2} \mathcal{D} [\hat{O}_k] \hat{\rho}_s, \quad (4.3)$$

где  $\mathcal{D}$  - линбладовский супероператор:

$$\mathcal{D} [\hat{O}_k] \hat{\rho}_s \equiv 2\hat{O}_k \hat{\rho}_s \hat{O}_k^\dagger - \left\{ \hat{O}_k^\dagger \hat{O}_k, \hat{\rho}_s \right\} \quad (4.4)$$

Коэффициенты  $\gamma_k$ , определяющие скорость распада, и операторы  $\hat{O}_k$  выводятся отдельно для каждой модели окружения, однако, вид уравнения сохраняется [ссылка на Линблада].

## 4.2 Релаксация и дефазировка кубита

Наиболее частыми процессами затухания состояния кубита, наблюдаемые в эксперименте и возникающие из-за взаимодействия с окружением являются *релаксация* и *дефазировка*. Первый, релаксация, отвечает за потерю кубитом энергии, и, как следствие, переход  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ . Второй, дефазировка, не меняет энергию состояния (т.е.  $\text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z) = \text{const}$ ), но сводит к нулю  $\text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_{x,y})$ , что соответствует потерей когерентности состоянием.

**Релаксация** Для потери энергии кубитом необходимо, чтобы  $\hat{\mathcal{O}}_k$  содержал недиагональные члены, простейшим (и дающим удовлетворительный результат [\[ссылка!\]](#)) оператором такого рода является “ladder operator” - нижнедиагональный оператор

$$\hat{C} = \sum_t \alpha_t |t\rangle \langle t+1|, \quad (4.5)$$

где суммирование ведется по собственным состояниям трансмона. О выборе коэффициента  $\alpha_t$  можно почитать здесь [\[ссылка\]](#), он равен

$$\alpha_t = \frac{n_{t,t+1}}{n_{0,1}} \quad (4.6)$$

Уравнение Линблада (4.3) с учетом релаксации теперь выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}_s, \hat{H}_s] + \frac{\gamma}{2} \mathcal{D}[\hat{C}] \hat{\rho}_s, \quad (4.7)$$

Параметр  $\gamma$  отвечает за скорость распада состояния и подбирается до согласия с экспериментом.

**Дефазировка** Противоположно предыдущему эффекту, линбладовский оператор  $\hat{C}_\phi$  дефазировки содержит только диагональные члены. Согласно [\[ссылка\]](#) он может быть записан в виде

$$\hat{C}_\phi = \sum_t \frac{\beta_t}{2} |t\rangle \langle t|, \quad (4.8)$$

$$\beta_t = \frac{2\epsilon_t}{\epsilon_1 - \epsilon_0},$$

где  $\epsilon_t$  определен в (2.8) и отвечает за возможную амплитуду зарядовых шумов. Уравнение Линблада с учетом оператора дефазировки  $\hat{C}_\phi$  записывается аналогично (4.7). Эффект дефазировки для трансмона он в силу (2.9) чрезвычайно мал по сравнению с релаксацией и поэтому *собственной дефазировкой трансмона можно пренебречь* при численных расчетах.

Дефазировку могут вносить другие элементы системы, например, потоковый шум может возникать от SQUID-а [\[ссылка\]](#).

### 4.3 Взаимодействие с более высокими уровнями системы

**Утечка заселенности.** Другой нежелательный (чаще всего) эффект, заключающийся в возбуждении более высоких уровней, не связан со взаимодействием с окружением кубита. Однако, он может проявиться при слишком коротком времени импульса и соответственно большой амплитуде поля  $f$  в (3.5). В пункте 2.3 было сказано, что величина ангармонизма задает минимально время операций, осуществляемых с помощью микроволновых импульсов. Поясним теперь суть этого утверждения. Если у нас есть импульс продолжительностью конечной продолжительности  $\tau$ , то у него будет конечная ширина спектра  $\Delta\omega$ , из-за которой возможны переходы на более высокие уровни:

$$\begin{aligned}\Delta\omega \cdot \tau &\sim 1, \\ f \cdot \tau &\sim \pi \sim 1 \rightarrow \\ f_{\omega}(\omega_{01} - \Delta\omega) &\neq 0 \rightarrow \\ \tau \sim \frac{1}{f} &\sim \frac{1}{|\omega_{01} - \omega_{12}|} \rightarrow \text{утечки вида } |1\rangle \rightarrow |2\rangle.\end{aligned}$$

**Ошибка в фазе.** Наличие состояний помимо кубитных приводит не только к утечкам (можно сказать, ошибкам в амплитуде в.ф.), но и ошибкам в фазе. Теперь причиной фазовой ошибки являются виртуальные переходы без потери заселенности. Такие переходы можно эффективно представить в виде добавленного  $\sigma_z$  в гамильтониане:

$$\hat{H}_{eff} - \hat{H}_q \sim \beta(f) \sigma_z$$

## 5 Квантовые вентили и их реализации

В этой главе будут рассмотрены популярные однокубитные и двухкубитные вентили и некоторые способы их реализации.

### 5.1 Квантовые вентили

Квантовый вентиль или гейт (англ. “gate”) - операция над состоянием кубита(-ов), преобразующая его по определенному закону.

Так как состояние кубитной системы (или подсистемы) описывается волновой функцией в виде вектора состояния из двух чисел, удобно описывать однокубитные кван-

товые вентили в виде *матриц*  $2 \times 2$ , а  $N$ -кубитные в виде матриц  $2^N \times 2^N$ . Примеры:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\phi) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

$\mathbf{NOT}$  - логическое отрицание, а  $\mathbf{H}$  назван в честь французского ученого Жак Адамара (англ. Hadamard),  $\mathbf{CNOT}$  является одним из семейства  $\mathbf{C}(\mathbf{U})$  гейтов,

$$\mathbf{C}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U} & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

, где  $U$  - матрица однокубитного гейта. Суть  $\mathbf{C}(\mathbf{U})$  гейта в том, что если один из двух кубитов (управляющий) находится в состоянии  $|1\rangle$ , то над вторым (управляемым) производится операция  $U$ . Если управляющий в  $|0\rangle$ , то – тождественное. Гейты являются линейными преобразованиями, так что если управляющий кубит находится в суперпозиции состояний  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , то на управляемый подействует линейным по  $U, \infty$  образом.

Предположим, что мы реализовали  $\mathbf{CNOT}$  и однокубитные вентили. Но как получить остальные? Вдруг какой-то гейт невозможно представить в виде суперпозиции того же  $\mathbf{CNOT}$  и однокубитных вентилей? На этот вопрос отвечает *теорема Соловей-Китаяева* [Nielsen M A, Chuang I L **Quantum Computation and Quantum Information** (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)], которая утверждает, что достаточно некоторого конечного **универсального набора** гейтов для того чтобы с любой заданной точностью аппроксимировать любой гейт. Однако, число операций может быть велико. Правила выбора такого универсального набора остаются за пределами данной работы, приведем лишь пример такого набора для двухкубитной системы:

$$\mathbf{CNOT}, \mathbf{H}, \mathbf{Z}_{\pi/4} \quad (5.5)$$

## 5.2 Реализация однокубитных импульсов

Для сверхпроводниковых кубитов однокубитные импульсы

$$\mathbf{X}_\phi = \exp\left(-i\frac{\sigma_x\phi}{2}\right), \quad \mathbf{Y}_\phi = \exp\left(-i\frac{\sigma_y\phi}{2}\right) \quad (5.6)$$

реализовываются с помощью осцилляций Раби (3.8). Действительно, достаточно поставить условие

$$\cos \varphi = 1, \quad \int f dt = \phi$$

чтобы получить  $\mathbf{X}_\phi$  гейт. Аналогично для  $\mathbf{Y}_\phi$ .  $\mathbf{R}_Z(\phi)$  можно реализовать, используя в (3.5) частоту импульса, отличную от резонансной. Другой способ - изменив на время  $\hbar\omega_{ge}$ . Заметим также, что

$$\mathbf{NOT} = \mathbf{X}_\pi, \quad \mathbf{H} = \mathbf{X}_\pi \mathbf{Y}_{\pi/2}.$$

### 5.3 Реализация двухкубитных импульсов

Здесь ситуация сложнее и подходов гораздо больше. Сущность у всех схожа - необходимо иметь систему, которую можно контролировать, приводя в резонанс с кубитами или одним из кубитов или контролировать энергию связи кубитов. Управление связью кубитов влечет дополнительные экспериментальные трудности и шумы, поэтому в данной работе рассматриваются двухкубитные системы с *фиксированной связью*.

**Кросс резонанс.** Одним из минималистических способов реализации необходимого **CNOT** гейта является использование эффекта, названного **[rigetti, devoret] cross-resonance effect**. Он возникает при взаимодействии микроволнового излучения с одним из кубитов. Отличие условий кросс резонанса от обычных однокубитных импульсов в том, что мы подаем импульс на первый кубит не с его резонансной частотой, а с резонансной частотой второго. Этот эффект проявляется для широкого класса связей, в том числе, для емкостной связи двух кубитов. Запишем гамильтониан двухкубитной системы в двухуровневом приближении:

$$\hat{H} = \sum_{i=1,2} \frac{\hbar\omega_i}{2} \hat{\sigma}_i^z + \hbar\omega_{xx} \sigma_1^x \sigma_2^x + \sum_{i=1,2} f_i \hat{\sigma}_i^x \otimes \cos(\omega_i^d t + \varphi_i)$$

Тогда условия кросс-резонанса запишутся в виде:

$$f_1 = f, \quad f_2 = 0, \quad \omega_1^d = \omega_2 \quad (5.7)$$

Энергия связи  $\hbar\omega_{xx}$  должна быть достаточно малой, чтобы не расщеплять однокубитные состояния. В таком случае базисом этой системы будет тензорное произведение базисов однокубитных подсистем. Ненулевая  $\omega_{xx}$  все-таки порождает поправки к уровням энергии системы, однако они будут порядка  $\left(\frac{\omega_{xx}}{\Delta}\right)^2$ ,  $\Delta = |\omega_1 - \omega_2|$  и связанными с ними невынужденными осцилляциями во вращающемся базисе (3.4) каждого из кубитов при рассмотрении данного гейта можно пренебречь. Подставив условия кросс резонанса (5.7), проведя несколько преобразований базиса (из лабораторного

к тому, в котором чаще всего проводятся измерения) и усредняя быстро осциллирующие члены, получаем [rigetti, devoret]:

$$\hat{H}_{drive}^{eff} = \frac{\omega_{xx}}{4} \frac{1}{1 + (\Delta/f)^2} \times \left( \cos \varphi_1 \sigma_1^x \sigma_2^x + \sin \varphi_1 \sigma_1^x \sigma_2^y + \frac{\Delta}{f} \cos \varphi_1 \sigma_1^z \sigma_2^x + \frac{\Delta}{f} \sin \varphi_1 \sigma_1^z \sigma_2^y \right), \quad (5.8)$$

$$\frac{\Delta}{f} \gg 1, \quad \cos \varphi_1 = 1 \Rightarrow \hat{H}_{drive}^{eff} \simeq \frac{\omega_{xx} f}{4\Delta} \sigma_1^z \sigma_2^x \quad (5.9)$$

Таким образом кросс-резонанс эффективно усиливает связь между кубитами (от порядка  $\left(\frac{\omega_{xx}}{\Delta}\right)^2$  к линейному) и позволяет получить необходимый для **CNOT** гейт –  $[\mathbf{ZX}]_{\pi/2}$ . Через него **CNOT** выражается как

$$\mathbf{CNOT} = [\mathbf{ZI}]_{-\pi/2} [\mathbf{ZX}]_{\pi/2} [\mathbf{IX}]_{-\pi/2}, \quad (5.10)$$

где  $[\mathbf{ZI}]$  и  $[\mathbf{IX}]$  - однокубитные операции (**I** - идентичный гейт, отсутствие операции над кубитом).

**Резонанс с высшими состояниями трансмона.** Другой способ был предложен еще до изобретения трансмона, но он применим и к системе из двух кубитов, если есть возможность управлять  $E_J$  одного из кубитов. Здесь уже нельзя ограничиться рассмотрением двухуровневого приближения, так как суть явления состоит в резонансе с  $|2\rangle$  одного из кубитов. Точнее, если сначала кубиты *отстроены* друг от друга, т.е.  $\omega_1^{01} \neq \omega_2^{12}$ , то для осуществления условий гейта необходимо привести в резонанс  $\omega_1^{01}$  с  $\omega_2^{12}$  или  $\omega_2^{01}$ . Так можно получить **CPHASE** или **SWAP** – *like* гейты:

$$\omega_1^{01} = \omega_2^{12} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{CPHASE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\omega_1^{01} = \omega_2^{01} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -i \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & -i \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta_2} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

В случае  $\mathbf{U}_2$  у нас происходит расщепление всех уровней системы [Quantum logic gates for coupled superconducting phase qubits]:

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |00\rangle, \\ |1\rangle &= (|01\rangle - |10\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ |2\rangle &= (|01\rangle + |10\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ |3\rangle &= \cos \theta (|02\rangle + |20\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \theta |11\rangle, \theta \simeq 0.185. \end{aligned}$$

Здесь  $|i\rangle$  - собственные состояния системы со связью,  $|ij\rangle$  - тензорное произведение собственных состояний однокубитных подсистем, они являются собственными состояниями невозмущенной системы. Если до резонанса двухкубитная система была в состоянии  $|01\rangle$ , то после оно расщепится на  $(|1\rangle + |2\rangle) 2^{-1/2}$ , каждое из которых будет осциллировать со своей энергией и, следовательно, наберет разную фазу. Отсюда и похожее на **SWAP** поведение.

В случае **CHASE** расщепятся только два состояния, так как остальные уровни энергии будут хоть слабо, но отличаться.

$$\begin{aligned} |4\rangle &= (|02\rangle - |11\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ |5\rangle &= (|02\rangle + |11\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Но суть от этого не меняется, и состояния по прежнему набирают разную фазу. Оба гейта получаются с помощью дополнительных **Z** вращений[еще раз ссылка]. Недостатком такого гейта является фиксированность его продолжительности. Действительно, чтобы на  $|02\rangle$  не осталось заселенности, необходимо осуществить ровно половину периода осцилляции. Время  $\mathbf{U}_1$  (не считая дополнительных вращений)  $\tau_1 = \frac{2\pi\hbar}{E_5 - E_4}$ , а время  $\mathbf{U}_2$   $\tau_2 = \frac{2\pi k\hbar}{E_5 - E_3}, k \in \mathbb{Z}$ .

# Глава 3

## Методы оптимального контроля импульсов

В этой главе будут описана методология проводимых моделирований, рассмотрены вопросы измерения ошибок импульсов и оптимального контроля – исправления ошибок получаемых гейтов.

### 1 Необходимые инструменты для моделирования квантовых вентиляей

В этом параграфе охарактеризуем то, как проводилось моделирование.

#### 1.1 Общие сведения о моделировании импульсов

Основное уравнение, численно решаемое в процессе моделирования - *нестационарное уравнение Шредингера* вида:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \hat{H}_{sys} + \hat{H}_{drive}(t) \right) \psi \quad (1.1)$$

При моделировании системы с затуханием оно преобразуется в уравнение Линблада (4.7), в котором  $\hat{H}_S \equiv \hat{H}_{sys} + \hat{H}_{drive}(t)$ . Как было сказано в (3.4) практически всегда интересен вид решения не в лабораторном базисе (зарядовом или собственном базисе трансмона), а во вращающемся базисе, убирающем осцилляцию под действием гамильтониана кубита (или каждого из кубитов). В простых случаях (3.8) или когда мы специально хотим получить приближенный вид гамильтониана (например, 5.3), для анализа удобно непосредственно переходить во вращающийся базис. Иногда, особенно в N-уровневой модели вида (2.5) это требует больших предварительных выкладок и имеет смысл, только если мы хотим далее использовать подобные RWA приближения, оставляя только желаемые переходы (например,  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ). Трудоемкость связана с тем, что после перехода во вращающийся базис, различные матричные элементы оператора  $\hat{n}$ , описывавшего действия микроволнового излучения в (3.6)



будут вращаться, вообще говоря, с разными частотами.

Более простой и удобный способ состоит в переходе во вращающийся базис после решения уравнения Шредингера/Линблада. Это можно сделать одним и тем же способом для любой системы.

## 1.2 Использование QuTiP

Практически всё численное моделирование в данной работе использовало в качестве основы библиотеку QuTiP. QuTiP - кроссплатформенная библиотека, написанная на языке PYTHON для проведения численного моделирования квантовомеханических системах, особенно в конечномерном базисе<sup>20,21</sup>. Для проведения моделирования эволюции системы необходимо задать следующие параметры:

- **Гамильтониан системы.** Если есть временезависимые слагаемые, необходимо разбить его на сумму вида  $\sum_i \hat{H}_i f_i(t)$ . Для нескольких случаев:

- одиночный кубит (2-мерная модель)
- одиночный кубит (2-мерная модель) (приближение RWA)
- трансмон (N-уровневая модель)

были написанны удобные классы, позволяющие варьировать все возможные параметры. Для временезависимой части гамильтониана также были приготовлены классы импульсов, которые можно привязать к экземпляру кубита:

- прямоугольный импульс
- прямоугольный импульс, модулированный синусом/косинусом заданной частоты (2d)
- прямоугольный импульс, модулированный синусом/косинусом заданной частоты ( Nd, с возможной автоматической привязкой к резонансной частоте трансмона )
- импульс с тангенциальной огибающей вида 2.1 с возможностями предыдущего
- импульс с гауссовой огибающей вида 2.2 с возможностями предыдущего
- импульсы с различными аналитическими исправлениями ошибок (см. далее)

- **Начальное состояния кубита.** Чаще всего оно является просто суперпозицией состояний кубита (системы кубитов) (иначе - матрица плотности, не соответствующая чистому состоянию). Для этого при использовании 2-мерной модели можно воспользоваться QuTiP-овской функцией `basis(N,j)`, возвращающей j-й базис. При использовании модели трансмона (Nd) собственных вектора хранятся внутри каждого экземпляра кубита.

- **Наблюдаемые операторы.** При использовании вышеуказанных моделей можно считать динамику операторов (например, сигма-матриц паули для сферы Блоха) сразу во вращающемся базисе кубитной системы (или указать какой-то свою частоту).
- **Операторы затухания.** И снова, для вышеуказанных систем все готово. Для трансмона оператор релаксации в форме (4.7), для 2d-модели оба случая - и релаксация, и дефазировка.
- **Точки на временной оси, для которых проводится моделирование**

### 1.3 Последовательность APE (Amplified Phase Error)

Результатом *успешной* оптимизации являются импульсы с очень малыми ошибками. Однако, точное измерение ошибки высокого порядка малости после выполнения одного гейта - сложная измерительная задача. Чтобы упростить ее, можно воспользоваться APE-последовательностью, повторяющей много раз исследуемый импульс (и порождаемый им гейт) и, следовательно, усиливающей ошибку.<sup>22</sup> Малые ошибки, порождаемые процессами перехода  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  представимы в виде  $\mathbf{Z}$  вращений.<sup>23</sup>

$$\mathbf{X}'_{\pi/2} = \mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{X}_{\pi/2} \mathbf{Z}_\epsilon$$

Для того, чтобы усилить ошибку, составим для начало псевдоидентичный оператор:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}'_{\pi/2} &= (\mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{X}_{\pi/2} \mathbf{Z}_\epsilon) (\mathbf{Z}_\epsilon \mathbf{X}_{-\pi/2} \mathbf{Z}_\epsilon), \\ \mathbf{I}'_{\pi/2} &\simeq \begin{pmatrix} 1 - i\epsilon & \epsilon \\ -\epsilon & 1 - 3i\epsilon \end{pmatrix}, \epsilon \ll 1 \end{aligned}$$

Теперь составим последовательность из них вида

$$\mathbf{I}^n_{\pi/2} \simeq (\mathbf{Z}_{2\epsilon})^n = \mathbf{Z}_{2n\epsilon}$$

И в конце применим поворот вокруг произвольной оси – последовательность псевдоидентичных импульсов вставлена как бы между двумя импульсами из оригинального Ramsey fringes эксперимента. Такую последовательность назвали Amplified Phase Error sequence, или последовательность, усиливающая ошибку фазы.

### 1.4 Оценка точности вентилей

Ранее в нескольких местах работы говорилось об *ошибках, неточностях* вентилей и соответственно импульсов, но не разу не вводилось количественное описание ошибок. Соответственно необходимо ввести меру отклонения *реального* вентиля от *идеального*. В английской литературе такая функция вида

$$\mathcal{F}(U, \mathcal{U}_{ideal})$$

называется “fidelity”. Будем далее называть ее *мерой точности* гейта (или просто точностью). Ее определение не однозначно, как и не однозначно определение метрики на линейном пространстве (а пространство матриц  $2^N \times 2^N$  линейно). Однако, есть классическое определение  $\mathcal{F}$ , оно вводится для двух матриц плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ <sup>24</sup>:

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr} \left[ \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right]$$

Отметим следующие важные свойства:

1.  $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \mathcal{F}(\rho_2, \rho_1)$
2.  $0 \leq \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) \leq 1, \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = 1 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$
3. Если  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответствуют чистые состояния  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , то  $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|$
4.  $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2)$  инвариантна относительно унитарных преобразований

Теперь применим эту формулу для расчета  $\mathcal{F}(U, \mathcal{U}_{ideal})$ . Это можно сделать, например, усреднив  $\mathcal{F}$  действия неидеального (и, возможно, неунитарного) вентилля и действия идеального вентилля по всем начальным состояниям системы:

$$\mathcal{F}(U, \mathcal{U}_{ideal}) = \langle \mathcal{F}(U\psi, \mathcal{U}_{ideal}\psi) \rangle_\psi \quad (1.2)$$

При моделировании это выливается в то, что мы считаем временную эволюцию (пункт 1.2) со всем базисом состояний системы в качестве начальных состояний и усредняем полученные  $\mathcal{F}$ . Так же можно посчитать матрицу  $U$  – необходимо посчитать все  $U_{ij} = \langle \psi_i | \hat{U} \psi_j | \psi_i \rangle$ .

## 2 Способы исправления ошибок и повышения точности

В этом параграфе рассказывается о том, какими способами можно улучшать импульсы для повышения точности. Будет затронут вопрос влияния огибающей импульса и использования **Y**-квадратуры и отстройки  $\delta$  по частоте как дополнительных рычагов исправления ошибки. Описаны методы получения оптимизирующих огибающих для **Y** и  $\delta$  аналитическим образом – DRAG, HD и численным – GRAPE.

### 2.1 Выбор огибающей импульса

Как было сказано в параграфе 4.3, из-за конечного времени импульса спектр сигнала содержит не только несущую частоту (чаще всего резонансную  $\omega_{01}$ ), и он может содержать существенно отличную от нуля  $f_\omega(\omega_{12})$ , вызывающую переходы вида  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ . Для борьбы с этими утечками наиболее простым подходом является

изменение формы импульса, чтобы сжать его фурье-образ вокруг несущей частоты. Две самые популярные формы импульса - гауссова и тангенциальная:

$$f_{tanh} = A \left( \tanh \left( \frac{t-a}{\sigma} \right) - \tanh \left( \frac{t-b}{\sigma} \right) \right), \quad (2.1)$$

$$f_{gauss} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{(t-c)^2}{\sigma} \quad (2.2)$$

В таком случае просто считается набег фазы в [не здесь, дописать] (3.5, 3.8):

$$\begin{aligned} \phi_{tanh} &= A(b-a), \\ \phi_{gauss} &= A\sigma \end{aligned}$$

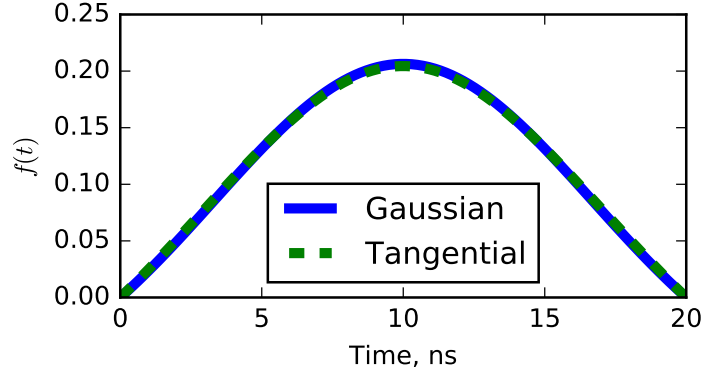
Однако, в обоих случаях  $f(t)$  хоть и быстро затухает за пределами  $(a, b)$  и  $(c - \sigma, c + \sigma)$  соответственно, не равна нулю для любого  $t$ . Чтобы избавиться от ошибок, связанных с реальной конечной продолжительностью, импульсы обрезают:

$$f_{tanh} = A \left( \tanh \left( \frac{t-a}{\sigma} \right) - \tanh \left( \frac{t-b}{\sigma} \right) \right) \cdot \eta(t, c, \xi) - B, \quad \text{где } \eta(t, c, \xi) = \theta(t - c + \frac{\xi}{2}) - \theta(t - c - \frac{\xi}{2})$$

$$f_{gauss} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{(t-c)^2}{\sigma} \cdot \eta(t, c, \xi) - B,$$

где  $\eta(t, c, \xi) = \theta(t - c + \frac{\xi}{2}) - \theta(t - c - \frac{\xi}{2})$  - обрезает в точках  $c - \frac{\xi}{2}, c + \frac{\xi}{2}$ , а  $B = f_{tanh,gauss}(c - \frac{\xi}{2}) = f_{tanh,gauss}(c + \frac{\xi}{2})$ .

Выбор огибающей позволит немного “упаковать” спектр сигнала, но повышение точности будет все же не столь большим. Поэтому прибегают к дополнительным методам, таким как HD или GRAPE.



**Рис. 2.1:** На самом деле параметры  $\sigma$  и  $b - a$  чаще всего выбираются таким образом, что огибающие практически не отличимы друг от друга. Здесь у

## 2.2 Derivative Removal by Adiabatic Gate

Чтобы избавиться от ошибок, связанных с потерей заселенности и лишней фазой (пункт 4.3), можно воспользоваться дополнительными возможностями контроля. Согласно (3.8), варьируя фазу  $\varphi$  мы меняем ось на сфере Блохе, вокруг которой совершается поворот состояния кубита. В  $N$ -мерной модели действие  $\hat{n}$  будет продолжено похожим образом на следующие состояния<sup>22</sup> (рассмотрим для простоты трехуровневую модель):

$$\hat{H}^{rf} = \hbar \sum_{j=1,2} \left[ \delta_j \Pi_j + \frac{\mathcal{E}^x(t)}{2} \lambda_j \sigma_{j-1,j}^x + \frac{\mathcal{E}^y(t)}{2} \lambda_j \sigma_{j-1,j}^y \right], \quad (2.3)$$

здесь  $\delta_i$  - разность резонансной энергии перехода  $ket i - 1 \rightarrow |i\rangle$  и частоты подаваемого излучения  $\omega_d$ . Без ограничения общности можно положить  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$ . Перейдем непосредственно в подпространство кубита с помощью адиабатического преобразования  $V(t)$  ( $\mathcal{E}^x(t)/\Delta$  - параметр адиабатического преобразования):

$$V(t) = \exp \left[ -i\mathcal{E}^x(t) (\hat{\sigma}_{0,1}^y + \lambda \hat{\sigma}_{1,2}^y) \right]$$

В представлении взаимодействия  $V$ ,  $H^V = VH^rfV^+ + i\hbar\dot{V}V^+$  и

$$\begin{aligned} \hat{H}^V \simeq & \frac{\mathcal{E}_x}{2} \sigma_{0,1}^x + \frac{\lambda \mathcal{E}_x^2}{8\Delta} \sigma_{0,2}^x + \left( \delta_2 + \frac{(\lambda^2 + 2) \mathcal{E}_x^2}{4\Delta} \right) \Pi_2 + \\ & \left( \delta_1 - \frac{(\lambda^2 - 4) \mathcal{E}_x^2}{4\Delta} \right) \Pi_1 + \left[ \frac{\mathcal{E}_y}{2} + \frac{\dot{\mathcal{E}}_x}{2\Delta} \right] (\hat{\sigma}_{0,1}^y + \lambda \hat{\sigma}_{1,2}^y) \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться имеющейся возможностью и положить

$$\mathcal{E}_y = \frac{\dot{\mathcal{E}}_x}{2},$$

чтобы нивелировать утечки и

$$\delta_1 = \frac{(\lambda^2 - 4) \mathcal{E}_x^2}{4\Delta},$$

чтобы устранить ошибку в фазе. Обе эти поправки - первого порядка. Далее можно учитывать высшие порядки в разложении и мы получим формулы вида:

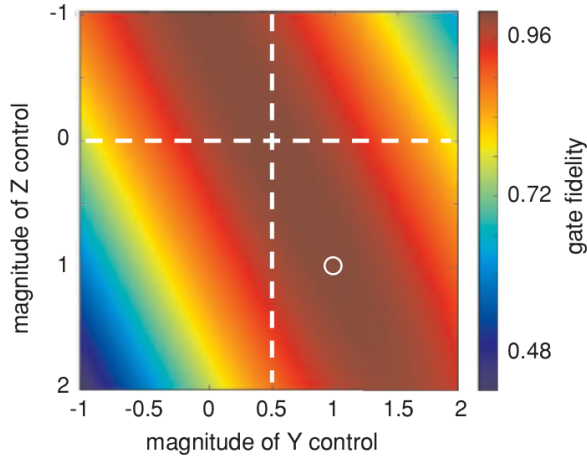
$$\mathcal{E}_x(t) = \mathcal{E}_x^0 \sum_{k=0\dots} \alpha_k(\lambda) \frac{\mathcal{E}_x^{0\,2k}}{\Delta}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{E}_y(t) = 0 - \frac{\dot{\mathcal{E}}_x^0}{\Delta} \sum_{k=0\dots} \beta_k(\lambda) \frac{\mathcal{E}_x^{0\,2k}}{\Delta}, \quad (2.5)$$

$$\delta_1(t) = \Delta \sum_{k=1\dots} \gamma_k(\lambda) \frac{\mathcal{E}_x^{0\,2k}}{\Delta}, \quad (2.6)$$

здесь  $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ .

## 2.3 Half-Derivative



**Рис. 2.2:** Здесь показана зависимость точности импульсов от амплитуд  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  относительно описанных в DRAG. В исходной точке (обведена в кружок) точность совпадает с параметрами HD -  $1/2\mathbf{Y}$  и отсутствие  $\mathbf{Z}$ .

В эксперименте значительно проще контролировать только  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  квадратуру, чем еще и  $\delta$  ( $\mathbf{Z}$ ). Кроме того, оказывается, что результат не изменится,<sup>22</sup> если мы уменьшим в два раза амплитуду  $\mathbf{Y}$  и совсем выключим  $\delta$ :

$$\mathcal{E}_y(t) = -\frac{\dot{\mathcal{E}}_x}{2\Delta}, \delta = 0 \quad (2.7)$$

## 2.4 GRadient Ascent Pulse Engineering

В предыдущих пунктах обсуждались способы аналитического получения огибающих  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  и, возможно,  $\mathbf{Z}$  импульсов. Однако, при наличии возможности моделирования импульсов, можно минимизировать их погрешность численно. Запишем гамильтониан системы с импульсом в 2-уровневом приближении (и сразу в RWA):

$$\hat{H}^{rf} = \hbar f(t) \hat{\sigma}_x \cos \varphi(t) + \hbar f(t) \hat{\sigma}_y \sin \varphi(t)$$

Или, обозначив  $f_x(t) = f(t) \cos \varphi(t)$ ,  $f_y(t) = f(t) \sin \varphi(t)$ , в форме

$$\hat{H}^{rf} = \hbar f_x(t) \hat{\sigma}_x + f_y(t) \hat{\sigma}_y$$

В N-мерном случае нельзя так просто в RWA модель из-за того, что разные уровни будут осциллировать с разными частотами, в особенности частота  $|2\rangle$  отличается от  $|1\rangle$  всего на величину ангармонизма. Можно оставить только интересующие нас уровни (например,  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ ) с соответствующими гармониками, однако исключить временную зависимость совсем не представляется возможным.

$$\hat{H} = \hat{H}_q + \hbar f(t) \hat{n} \cos(\omega_d t + \varphi(t)) \quad (2.8)$$

В оригинальной статье по GRAPE<sup>25</sup> авторы далее разбивали время на одинаковые интервалы продолжительностью  $\Delta t$  так, что в пределах  $(t_i, t_i + \Delta t)$  гамильтонианы контроля  $\hat{H}_k$  и кубита  $\hat{H}_0$  можно было считать постоянным:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_{k,i} f_{k,i} \langle H_k \rangle_i$$

В случае (2.8) это весьма затруднительно, так как частота  $\omega_d \simeq \omega_{01}$  и дискретизация времени должна осуществляться на масштабе  $\Delta t \ll 1/\omega_d$ , а это повлечет за собой как и вычислительную трудность (очень большое количество интервалов), так и экспериментальную - менять на таких масштабах  $(f, \varphi)$  произвольным образом приведет к дополнительным ошибкам формирования импульса. Более разумным представляется ограничить  $\Delta t$  снизу реальной возможной длительностью прямоугольного импульса  $\sim 1$  и считать эволюцию для временезависимого  $\hat{H}_k(t), t \in (t_i, t_i + \Delta T)$ . Минимизировать ошибку импульсов можно представив ее в виде

$$E(f_0, f_1, \dots) = 1 - \mathcal{F}(U_{f_0, f_1, \dots}, \mathcal{U}_{ideal})$$

Таким образом GRAPE-оптимизации импульса будет соответствовать поиск минимума функции  $E(\vec{f})$ .

# Глава 4

## Результаты

Наконец обсудим полученные результаты в ходе работы. Их можно поделить на две части - результаты *моделирования* некоторых важных систем и вентилей и результаты *оптимизации* квантовых вентилей.

### 1 Моделирование

Было проведено моделирование динамики различных однокубитных и двухкубитных систем. Для это был написан стандартизованный код в виде библиотеки на языке `Python`. К числу наиболее важных объектов и явлений, реализованных и/или промоделированных в ходе работы, относятся:

- Двухуровневая динамики кубита вида (3.8)
- N-уровневая динамика трансмона с гамильтонианом вида (2.5)
- Двухкубитные гейты:
  - **CNOT** (5.3)
  - **CPHASE** (5.11)
  - **SWAP-like** (5.12)
- Импульсы
  - С гауссовой огибающей (2.2, 2.1)
  - С тангенциальной огибающей (2.1, 2.1)
  - Простые прямоугольные импульсы
- Последовательность, усиливающая ошибку в фазе (APE) (1.3)
- И, наконец, методы оптимального контроля
  - **DRAG** (2.2)

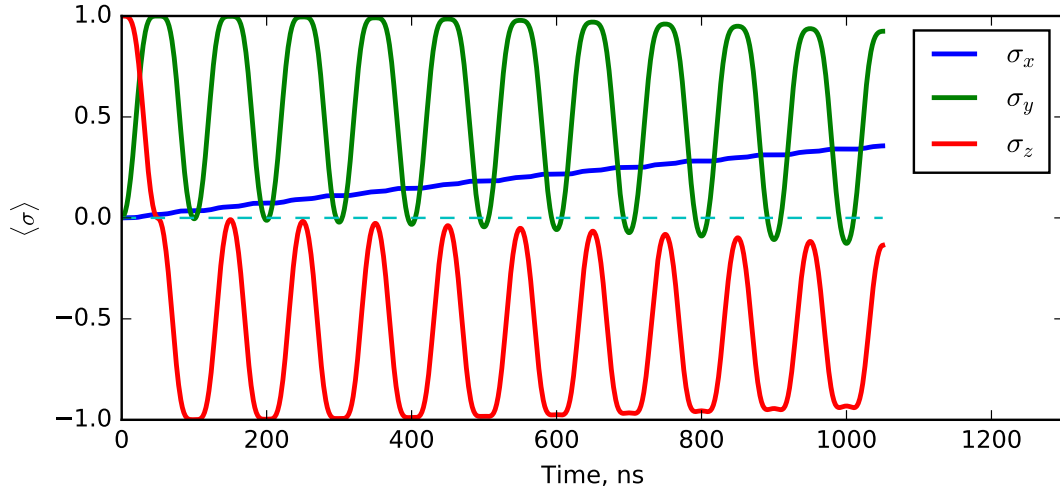


- Half-Derivative (2.3)
- GRAPE (для случая *временезависимых*  $\hat{H}_k$ ) (2.4)

Далее, о наиболее интересных результатах *моделирования* поподробнее.

## 1.1 APE

В качестве опорного  $\mathbf{X}'_{\pi/2}$  или  $\Phi'_{\pi/2}$  импульса была выбран гауссов импульс в форме (2.1) продолжительностью  $50ns$  каждый. Для трансмона использовались следующие параметры:  $\omega_{ge} = 7.9GHz$ ,  $\Delta = 240MHz$ .

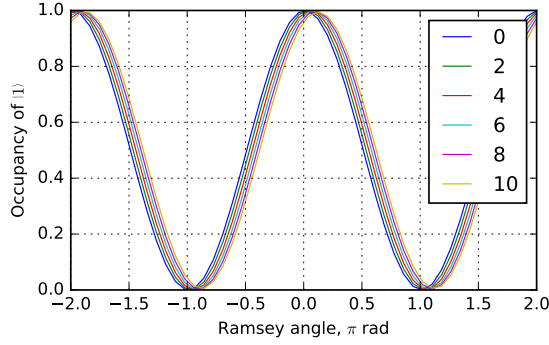


с

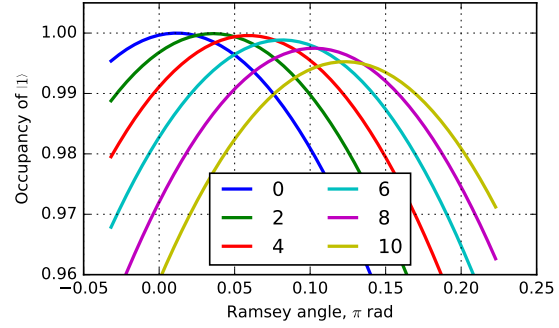
**Рис. 1.1:** Динамика трансмона под действием APE (без последнего  $\Phi_{\pi/2}$  на основе импульса  $\mathbf{X}_{\pi/2}$  с гауссовой огибающей. Продолжительность одного импульса -  $50ns$ . Как видно на графике, ошибка действительно накапливается.

Сравним с экспериментальными данными APE, полученными в Лаборатории ИКС для трансмона и импульсов с теми же параметрами:

## 2 Оптимизация

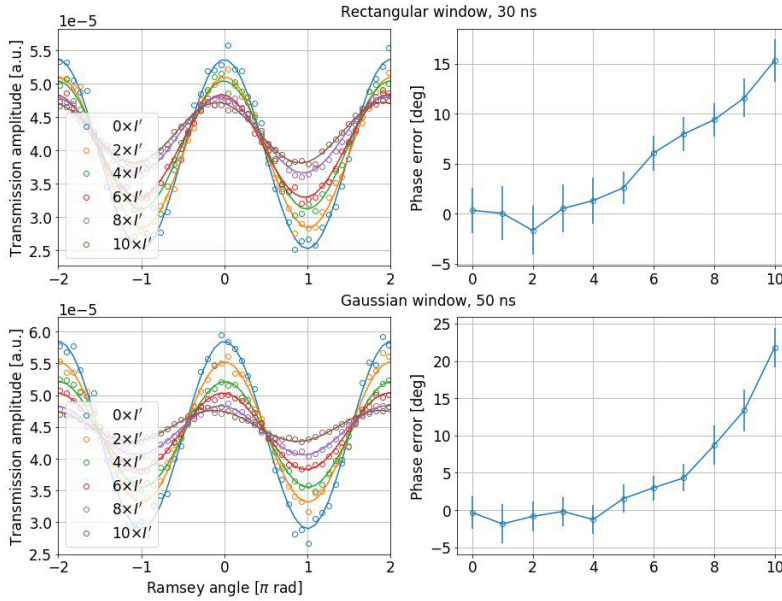


(а) Общий вид АРЕ для разного количества псевдоидентичных импульсов (0...10) в отсутствие релаксации и дефазировки.

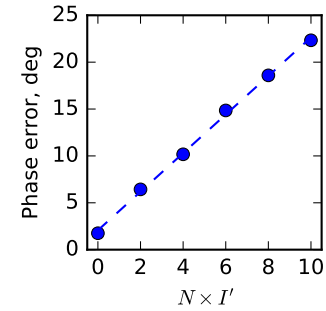


(б) Можно заметить, что накапливается ошибка как и по амплитуде, так и по фазе.

**Рис. 1.2:** Релаксация и дефазировка не влияют на фазовую ошибку, а вот амплитуда в эксперименте значительно уменьшается в силу большой продолжительности АРЕ  $t \sim 1/\gamma$ .



(а) Результат эксперимента АРЕ. Зависимость ошибки от  $N$  получилась не линейной, как предсказывает теория.



(б) Линейная зависимость, полученная моделированием.

**Рис. 1.3:** Несмотря на то, что вид зависимости для гауссовых импульсов в эксперименте отличен от теории и, соответственно, результатов моделирования, сами значения ошибки в фазе лежат в той же области, что и в эксперименте.

## Глава 5

### Заключение

- 1 Список результатов
- 2 Планы на будущее
- 3 Благодарности

# Литература

- <sup>1</sup> Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. // Science (New York, N.Y.). — 1993. — Vol. 261. — P. 1569–1571. (ссылка на стр. [4])
- <sup>2</sup> DiVincenzo D. P. Quantum Computation // Science. — 1995. — Vol. 270, no. 5234. — P. 255–261. — URL: <http://www.sciencemag.org/content/270/5234/255.abstract>. (ссылка на стр. [4])
- <sup>3</sup> DiVincenzo D.P. Prospects for quantum computing. — 2000. — P. 12–15. (ссылка на стр. [4])
- <sup>4</sup> Spiller T. P. Quantum information processing: cryptography, computation, and teleportation // Proceedings of the IEEE. — 1996. — Vol. 84. (ссылка на стр. [4])
- <sup>5</sup> Milburn G. J. Photons as qubits // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 2009, no. T137. — P. 14003. — URL: <http://stacks.iop.org/1402-4896/2009/i=T137/a=014003>. (ссылка на стр. [4])
- <sup>6</sup> Cirac J. I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Physical review letters. — 1995. — Vol. 74, no. 20. — P. 4091. (ссылка на стр. [4])
- <sup>7</sup> Kane B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer // Nature. — 1998. — Vol. 393. — P. 133–137. (ссылка на стр. [4])
- <sup>8</sup> Rempe G. Cavity QED with single atomic and photonic qubits // Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS) - Technical Digest Series. — 2008. (ссылка на стр. [4])
- <sup>9</sup> Devoret M. H., Martinis J. M. Implementing qubits with superconducting integrated circuits // Experimental Aspects of Quantum Computing. — 2005. — P. 163–203. (ссылка на стр. [4])
- <sup>10</sup> Devoret M. H. Quantum fluctuations in electrical circuits // Les Houches, Session LXIII. — 1995. — URL: [http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum\\_circuit\\_theory-1.pdf](http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum_circuit_theory-1.pdf). (ссылка на стр. [4])
- <sup>11</sup> Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits. // Nature. — 2008. — Vol. 453, no. 7198. — P. 1031–42. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18563154>. (ссылка на стр. [4])

- <sup>12</sup> Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta et al. — 2007. — P. 21. — 0703002. (ссылки на стр. [5 и 9])
- <sup>13</sup> Implementation of a quantum metamaterial using superconducting qubits. / P. Macha, G. Oelsner, J.-M. Reiner et al. // Nature communications. — 2014. — Vol. 5. — P. 5146. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25312205>. (ссылка на стр. [5])
- <sup>14</sup> Clarke J., Braginski A. I. The SQUID Handbook. — 2006. — Vol. 2. — P. 1–634. — ISBN: 9783527404087. (ссылка на стр. [5])
- <sup>15</sup> Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom / O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov et al. // Science. — 2010. — Vol. 327, no. 5967. — P. 840–843. (ссылка на стр. [5])
- <sup>16</sup> Xia K., Vanner M. R., Twamley J. An opto-magneto-mechanical quantum interface between distant superconducting qubits. // Scientific reports. — 2014. — Vol. 4. — P. 5571. — arXiv:1407.2324v1. (ссылка на стр. [5])
- <sup>17</sup> Josephson B. Coupled Superconductors // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36. — P. 216–220. (ссылка на стр. [6])
- <sup>18</sup> Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Reviews of Modern Physics. — 2004. — Vol. 76. — P. 411–469. (ссылка на стр. [6])
- <sup>19</sup> Superconducting persistent-current qubit / T. Orlando, J. Mooij, Lin Tian et al. // Physical Review B. — 1999. — Vol. 60, no. 22. — P. 15398–15413. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.15398>. (ссылка на стр. [9])
- <sup>20</sup> Johansson JR, Nation PD, Nori Franco. QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems // Computer Physics Communications. — 2012. — Vol. 183, no. 8. — P. 1760–1772. (ссылка на стр. [25])
- <sup>21</sup> Johansson J.R., Nation P.D., Nori Franco. QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems // Computer Physics Communications. — 2013. — Vol. 184, no. 4. — P. 1234 – 1240. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512003955>. (ссылка на стр. [25])
- <sup>22</sup> Reduced phase error through optimized control of a superconducting qubit / Erik Lucero, Julian Kelly, Radoslaw C. Bialczak et al. // Phys. Rev. A. — 2010. — Oct. — Vol. 82. — P. 042339. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.042339>. (ссылки на стр. [26, 28 и 30])
- <sup>23</sup> State Tomography of Capacitively Shunted Phase Qubits with High Fidelity / Matthias Steffen, M. Ansmann, R. McDermott et al. // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Aug. — Vol. 97. — P. 050502. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.050502>. (ссылка на стр. [26])

- <sup>24</sup> Jozsa Richard. Fidelity for Mixed Quantum States // Journal of Modern Optics. — 1994. — Vol. 41, no. 12. — P. 2315–2323. — <http://dx.doi.org/10.1080/09500349414552171>. (ссылка на стр. [27])
- <sup>25</sup> Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms / Navin Khaneja, Timo Reiss, Cindie Kehlet et al. // Journal of Magnetic Resonance. — 2005. — Vol. 172, no. 2. — P. 296 – 305. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1090780704003696>. (ссылка на стр. [31])