

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального  
образования  
Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)  
Факультет общей и прикладной физики  
Кафедра физики и технологии наноструктур

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Оптимизация однокубитных и двухкубитных вентилей  
и считывающих импульсов для сверхпроводниковых  
кубитов**

Выполнил студент:

Сафронов Е.С.  
группа 325

Научный руководитель:

Шульга К.В.  
к. ф.-м. н.

г. Москва, 2017

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>5</b>
1	Эффект Джозефсона . . . . .	5
1.1	Уравнения Джозефсона . . . . .	5
1.2	RCSJ-модель . . . . .	6
1.3	Фазо-потокное соотношение . . . . .	7
2	Теория изолированного сверхпроводящего кубита . . . . .	7
2.1	Построение гамильтониана . . . . .	8
2.2	Зарядовый кубит . . . . .	9
2.3	Трансмон . . . . .	11

# Глава 1

## Введение

Квантовый компьютер – это устройство, хранящее и обрабатывающее информацию внутри группы квантовых систем, причем обработка информации происходит в результате когерентных взаимодействий систем внутри группы.<sup>1</sup> Каждая квантовая система, как правило, является двухуровневой и носит название “квантовый бит” или “кубит” (англ. “qubit” – quantum bit). Для осуществления квантового расчета необходимо связать кубиты друг с другом, иметь возможность управлять состоянием кубитов и считывать его, сохраняя чистоту соответствующей матрицы плотности, а также обеспечить изоляцию кубитов от влияния окружающей среды. Следовательно, в качестве кубитов могут быть использованы любые достаточно изолированные двухуровневые системы, поддающиеся контролю и способные взаимодействовать друг с другом.<sup>2–4</sup> В качестве примера можно привести фотоны,<sup>5</sup> ионы в ионных ловушках,<sup>6</sup> ядерные спины,<sup>7</sup> атомы в электромагнитных резонаторах,<sup>8</sup> электрические системы<sup>9</sup> и т.п.

Последние являются одними из самых заманчивых кандидатов на эту роль, но только при условии, что их поведение будет именно квантовым, а не классическим.<sup>10</sup> К счастью, явление сверхпроводимости и эффект Джозефсона позволяют наблюдать квантовые эффекты в контурах даже мезоскопического масштаба и создавать на их основе так называемые *сверхпроводящие (джозефсоновские) кубиты*.<sup>11</sup>

Джозефсоновские кубиты имеют два значительных недостатка и одно значительное преимущество в сравнении с микроскопическими кубитами. Первый недостаток заключается в значительном взаимодействии с окружающей средой – в силу больших размеров, джозефсоновские кубиты сильнее связываются со средой, что требует дополнительных изысканий в области их изоляции; второй недостаток заключается в том, что в то время как микроскопические кубиты, например, атомы, идентичны друг другу, сверхпроводящие кубиты могут иметь отличия из-за неточностей производства. Для борьбы с этим требуется либо создавать заведомо нечувствительные к дефектам схемы, либо проводить калибровку, в процессе которой параметры цепей измеряются, а затем компенсируются в эксперименте.

Преимущество джозефсоновских кубитов в их гибкости: они могут быть произвольным образом расположены относительно друг друга, а их параметры легко и непрерывно изменяемы в широких пределах. Эта гибкость вместе с некоторыми

фундаментальными эффектами<sup>13</sup> может быть использована для борьбы с первым недостатком, а также предоставляет много вариантов для подстройки параметров, что в значительной степени нивелирует второй недостаток. Далее, накопленный опыт человечества в области изготовления интегральных схем позволит упростить переход к производству реальных квантовых вычислительных устройств, что является еще одним преимуществом в сравнении с другими типами кубитов. Таким образом, скорее всего именно джозефсоновские кубиты и будут применены в первом квантовом компьютере, и именно их следует изучать.

Важно отметить, что сверхпроводящие кубиты могут применяться не только для непосредственного использования в квантовом компьютере, так как по сути являются рукотворными атомами с широко изменяемыми характеристиками, как внутренними, так и касающимися связи с окружением. Они могут быть пригодны для создания метаматериалов,<sup>14</sup> проведения высокоточных измерений полей,<sup>15</sup> использоваться в качестве активной среды,<sup>16</sup> применяться в квантовой криптографии и телепортации<sup>17</sup> и т. п.

# Глава 2

## Теоретические сведения

В этой главе приведены теоретическое описание некоторых явлений, учитываемых при построении модели сверхпроводящих кубитов. Далее будет кратко рассмотрен эффект Джозефсона, затем произведено рассмотрение теории изолированного сверхпроводящего кубита и его частного случая – *трансмона*, теории его взаимодействия с окружающей средой и, наконец, вопросы измерения и контроля.

### 1 Эффект Джозефсона

#### 1.1 Уравнения Джозефсона

Эффект Джозефсона<sup>21</sup> – это макроскопический квантовый эффект в сверхпроводниках. Согласно теории БКШ, сверхпроводящее состояние проводника может быть описано параметром порядка, являющимся модулем макроскопической волновой функции куперовских пар:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (1.1)$$

Тогда, эффект Джозефсона заключается в установлении одной фазы в двух сверхпроводниках, соединенных через “слабую связь”. “Слабые связи” многообразны: это могут быть тонкие слои диэлектрика, сужения, точечные контакты, прослойки из металла в нормальном состоянии или из ферромагнетика. В случае, если фазы не равны, то через слабую связь будет течь бездиссипативный ток, и будет выполнено некоторое *фазо-токовое соотношение* между током и скачком фазы на переходе. Часто, хотя и не всегда,<sup>22</sup> оно оказывается синусоидальным:

$$I_s = I_c \sin(\theta_2 - \theta_1) = I_c \sin \varphi. \quad (1.2)$$

Из этой формулы видно, что сверхпроводящий ток  $I_s$  не может превысить некоторого значения  $I_c$ . Это так называемый *критический ток* джозефсоновского перехода, при превышении которого бездиссипативность нарушается, и на переходе устанавливается напряжение  $V$ . В этом случае выполнено второе уравнение Джозефсона:

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV, \quad (1.3)$$

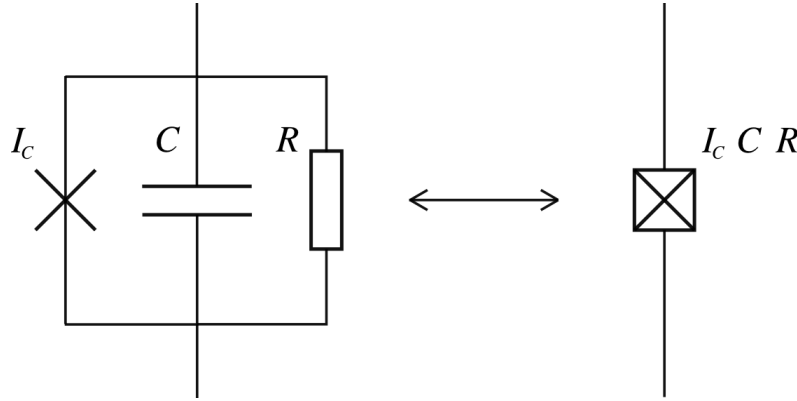
и наблюдаются осцилляции разности фаз между сверхпроводниками. Величина критического тока рассчитывается из микроскопической теории, например, для перехода SIS (*сверхпроводник - изолятор - сверхпроводник*) верна формула Амбегаокара-Баратова:

$$I_c = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left( \frac{\Delta(T)}{2k_b T} \right), \quad (1.4)$$

где через  $T$  обозначена температура, а через  $R_n$  сопротивление контакта в отсутствие сверхпроводимости,  $R_n = \rho \frac{d}{S}$ , где  $\rho$  – удельное сопротивление I-слоя, а  $d$  и  $S$  – его толщина и площадь.

## 1.2 RCSJ-модель

Для упрощения описания динамики джозефсоновского контакта применяется модель RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction), работающая для маленьких переходов со слоем изолятора, когда изменения фазы на размере контакта пренебрежимо малы и присутствует ненулевая геометрическая емкость.



**Рис. 1.1:** Схема RCSJ в виде параллельного соединения идеального джозефсоновского перехода с конденсатором и резистором.

Принципиальная схема изображена на Рис. 1.1. В случае, когда ток через систему не превышает критического  $I_c$ , резистор на схеме может быть опущен. В силу параллельности соединения выполнено также соотношение  $\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U_C$  между напряжениями на переходе и на конденсаторе, которое устанавливает аналогию между неидеальным переходом и колебательным контуром с нелинейной индуктивностью.

В рамках RCSJ-модели энергия перехода состоит из энергии, запасенной в нелинейной индуктивности идеального перехода, и энергии конденсатора:

$$E = E_{ind} + E_{cap} \quad (1.5)$$

Индуктивная энергия может быть определена посредством интегрирования мощности  $P = IV$  по времени от 0 до момента  $T$ , когда на контакте установилась разность фаз  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} E_{ind} &= \int I_J V_J dt = I_c \frac{\hbar}{2e} \int_0^T \sin(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= E_J \int_0^\varphi \sin \phi d\phi = E_J [1 - \cos \varphi], \end{aligned} \quad (1.6)$$

где была введена новая константа  $E_J$  – джозефсоновская энергия. Емкостная энергия также может быть вычислена с использованием (1.3):

$$E_{cap} = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi}^2, \quad E_C = \frac{(e)^2}{2C}, \quad (1.7)$$

где  $E_C$  – константа, описывающая емкостную энергию перехода.

### 1.3 Фазо-потокосое соотношение

Рассмотрим замкнутое сверхпроводящее кольцо конечной толщины, быть может, прерванное конечным числом джозефсоновских переходов  $\{J_1 \dots J_n\}$ . Рассмотрим применительно к данному случаю уравнение (??). Проведем контур  $C$  внутри кольца так, чтобы он нигде не приближался к стенкам на расстояние, меньшее глубины проникновения магнитного поля (Рис. 1.2). Тогда сверхток на всей его длине будет равен нулю, и, проинтегрировав по нему (??), мы получим следующее равенство:

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l}.$$

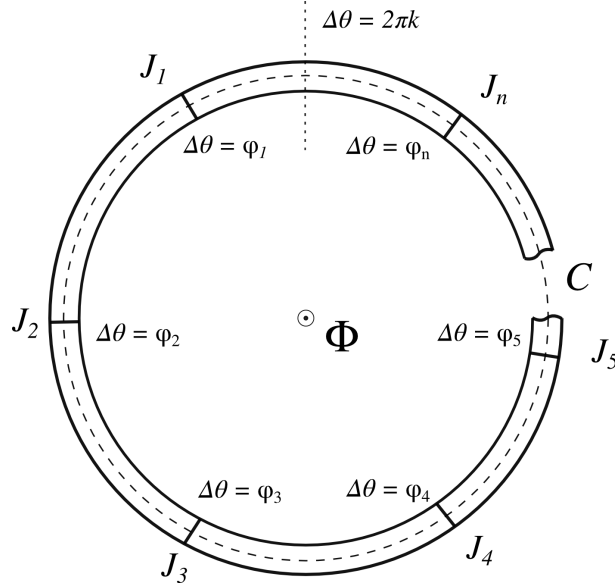
Руководствуясь Рис. 1.2, соображениями однозначности волновой функции (1.1) при обходе вокруг контура и теоремой Стокса для  $\text{rot } \mathbf{A}$ , можем написать:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \sum_i \varphi_i + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_i \varphi_i &= 2\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, получено фазо-потокосое соотношение. Видно, что в случае отсутствия в кольце джозефсоновских переходов полученное уравнение (1.8) опишет равенство магнитного потока  $\Phi$ , проходящего через сверхпроводящее кольцо, целому числу  $k$  квантов потока  $\Phi_0$ , обосновывая определение этой константы в (??).

## 2 Теория изолированного сверхпроводящего кубита

Сверхпроводящие кубиты были предложен Леггеттом в 1980х, а в 1997м Yasunobu Nakamura году был проведен первый эксперимент, доказавший наличие суперпози-



**Рис. 1.2:** К выводу фазо-потокowego соотношения. Пунктиром обозначен контур интегрирования  $C$ . Через  $\varphi_i$  обозначены скачки фаз на джозефсоновских контактах, а точками - место разрешенного накопления фазы при полном обходе вокруг кольца  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

ции состояний в сверхпроводящем кубите. Он исследовал состояния в “ящике куперовских пар” (англ. – “Cooper-pair box”) или иначе, *зарядовом кубите*. В 1999 году был предложен Flux-кубит, или потоковый трехконтактный сверхпроводящий кубит.<sup>12</sup> Он представляет собой сверхпроводящий контур, прерванный в трех местах джозефсоновскими переходами (??), два из которых одинаковы, а третий отличается по площади в  $\alpha$  раз. Наконец, в 2007 году был предложен<sup>13</sup> *трансмон* - схожий с зарядовым кубит, однако, с существенно подавленными зарядовыми шумами и несколько меньшим *ангармонизмом*. Под *изолированным* в данном разделе понимается одиночный кубит, не взаимодействующий с окружением ни диссипативным, ни консервативным образом. Единственным внешним фактором является при таком рассмотрении постоянное магнитное поле, проходящее через контур.

## 2.1 Построение гамильтониана

Для того, чтобы провести квантово-механическое рассмотрение кубита, требуется записать его гамильтониан. Для этого прежде всего нужно понять, какими независимыми степенями свободы он обладает. Вообще говоря, состояние одиночного джозефсоновского перехода, в силу того, что в параллельном соединении RCSJ-модели  $U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi}$ , целиком описывается своей разностью фаз. Энергия, запасенная шунтирующим конденсатором, может быть записана в виде (1.7), а энергия джозефсоновского контакта в виде (1.5). Таким образом, получаем гамильтониан системы:

$$\hat{H} = E_J [1 - \cos \hat{\varphi}] + \frac{\hbar^2}{E_C} \dot{\varphi}^2 \quad (2.1)$$



Аналогично сопряженной паре операторов  $\hat{x}$  и  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  можно определить оператор заряда  $\hat{q} = -2ei\frac{\partial}{\partial \varphi}$  и числа куперовских пар  $\hat{n} = -i\frac{\partial}{\partial \varphi}$ . Кроме того, иногда заряд кубита можно контролировать посредством емкостного гейта  $C_g$  с приложенным напряжением  $V_g$ . Тогда энергия, запасенная в емкостной части контура может быть записана как  $4E_C(\hat{n} - n_g)^2$ , где  $n_g = \frac{-C_g V_g}{2e}$ . Весь гамильтониан:

$$\hat{H} = 4E_C(\hat{n} - n_g)^2 + E_J [1 - \cos \hat{\varphi}] \quad (2.2)$$

Уровни энергии такого гамильтониана можно найти аналитически:

$$E_m(n_g) = E_C a_{2[n_g + k(m, n_g)]} \left( -\frac{E_J}{2E_C} \right) \quad (2.3)$$

, где  $a_\nu(q)$  - функция Матьё, а  $k(m, n_g)$  - целочисленная функция, задающая порядок собственных уровней энергии. Однако, для проведения численных расчетов решение в таком виде не является удобным. Рассмотрим гамильтониан 2.2 в зарядовом базисе (базисе собственных состояниях  $\hat{n}$ ) :

$$\hat{H} = 4E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (2.4)$$

Приблизим этот оператор конечномерным, отбросив состояния с зарядом, большим  $2eN$  по модулю:

$$\hat{H}_N = 4E_C \sum_{n=-N}^N (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - E_J \sum_{n=-N}^N (|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1|) \quad (2.5)$$

Такой гамильтониан очень удобен для каких-либо численных расчетов.

## 2.2 Зарядовый кубит

Зарядовый кубит представляет собой ящик для куперовских пар, связанных джозефсоновским контактом с резервуаром заряда и контролируемый приложенным напряжением на гейте. Электростатическая энергия системы...

$$E_C = C_J \frac{V^2}{2} + C_g \frac{(V_g - V)^2}{2} \quad (2.6)$$

$$E_C = \frac{C}{2} \left( V - \frac{C_g}{C} V_g \right)^2, C = C_J + C_g \quad (2.7)$$

Сводится к привычному члену гамильтониана (2.2).

У зарядового кубита  $E_J < E_C$ . Популярный режим работы зарядового кубита - установка полуцелого заряда на островке ( $n_g = 1/2$ ) с помощью управляющего напряжения (см рис. 2.2b и 2.3). Преимущество такого режима заключается в том, что эта точка расщепления уровней дает двухуровневую систему с разницей энергии уровней, равной  $E_J$ . Так же в этой точке наименьшая чувствительность к зарядовому шуму [ссылка].

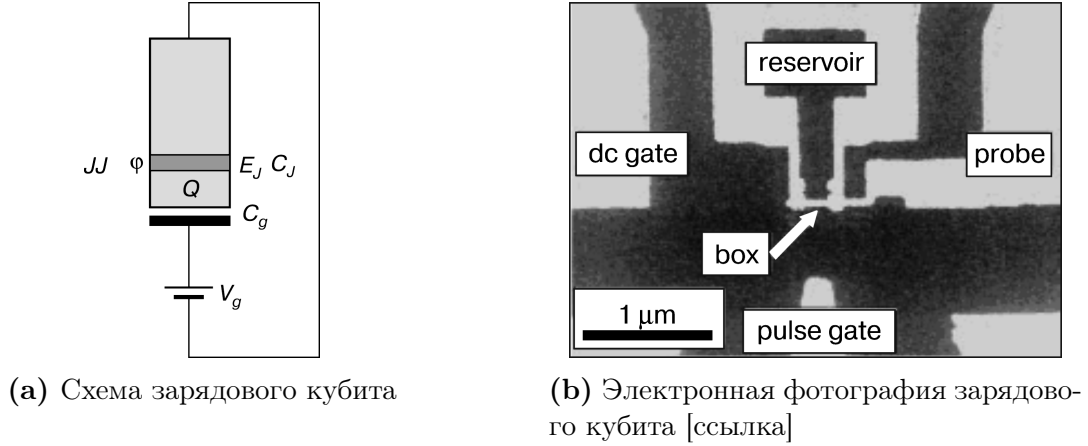


Рис. 2.1

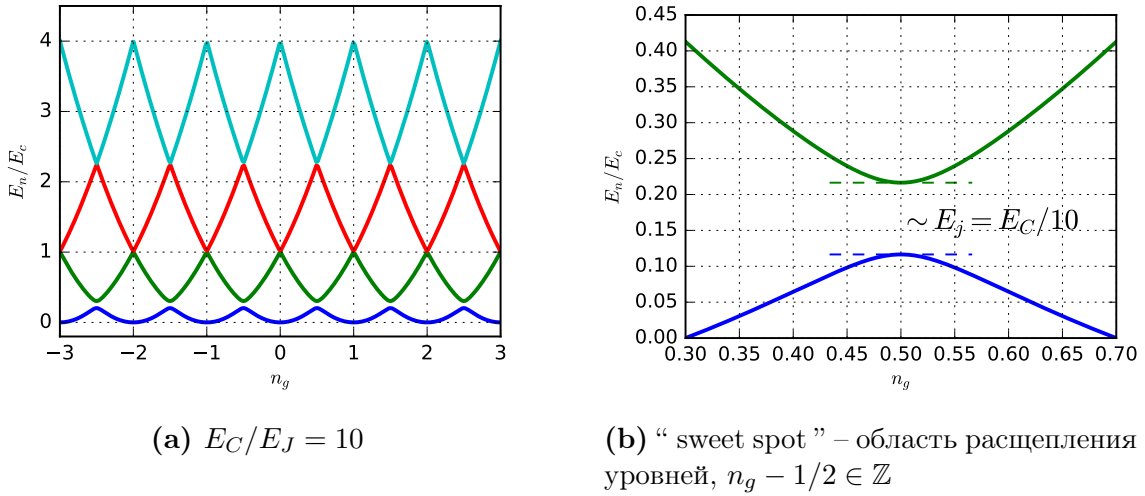


Рис. 2.2: Зависимость уровней энергии зарядового кубита от управляющего потенциала в виде  $n_g$ . Виден антикроссинг (?) и заметно отличие  $\frac{\partial E_m}{\partial n_g}$  от нуля

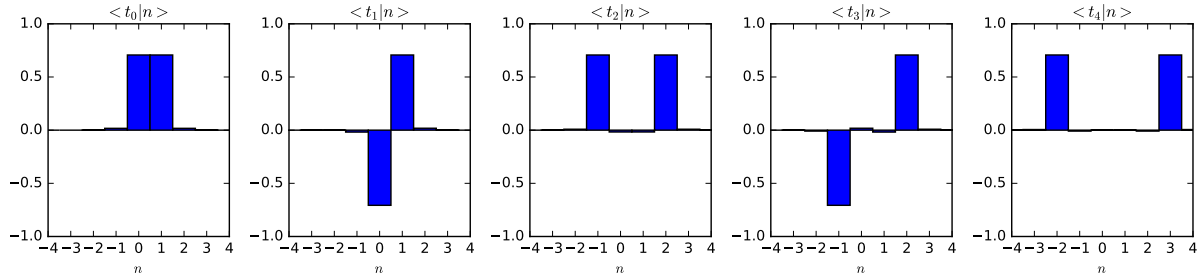


Рис. 2.3: Собственные состояния зарядового кубита. В “sweet spot” они являются гибридами слабо возмущенными зарядовыми состояниями.

## 2.3 Трансмон

**Зарядовый шум.** Для уменьшения зарядового шума необходимо увеличивать отношение  $E_J/E_C$ . Однако, это приводит к уменьшению *ангармонизма*  $\alpha \equiv E_{12} - E_{01}$ . Ангармонизм не может быть нулевым, в этом случае у нас не будет изоляции первых двух уровней системы от остальных (в частности, совпадут энергии переходов  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  и  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ ). Так же, величина ангармонизма ограничивает скорость операций, производимых с помощью микроволновых импульсов [подробнее в ...].

Спасением является тот факт, что с уменьшением  $E_C$  чувствительность к зарядовым шумам падает *экспоненциально*, а ангармонизм всего лишь *линейно* [ссылка]. Для достаточно больших  $E_J/E_C$  зависимость  $E_m(n_g)$  можно приблизить косинусом

$$E_m(n_g) = E_m(n_g = 1/4) + \frac{\epsilon_m}{2} \cos 2\pi n_g \quad (2.8)$$

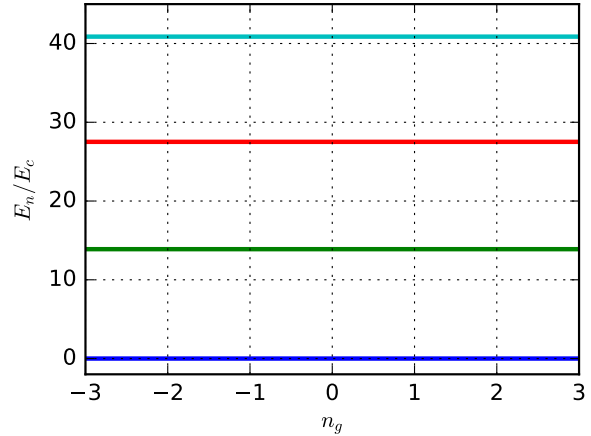
, где

$$\epsilon_m = (-1)^m E_C \frac{2^{4m+5}}{m!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{E_J}{2E_C} \right)^{\frac{m}{2} + \frac{3}{4}} \exp \left( -\sqrt{8E_J/E_C} \right) \quad (2.9)$$

Для  $E_J/E_C = 50$  получаем  $|\epsilon_0|/E_{01} \lesssim 10^{-8}$ . При этом  $E_{01} \simeq \sqrt{8E_J E_C}$ , а  $\alpha \simeq -E_C$ . Для таких значений  $\epsilon_m$  нет нужды в “sweet spot”, а значит и механизма управления  $n_g$ . При моделировании трансмона можно положить  $n_g = 0$ . Оценим время дефазировки  $T_2$ , возникающей из-за зарядового шума в случае трансмона:

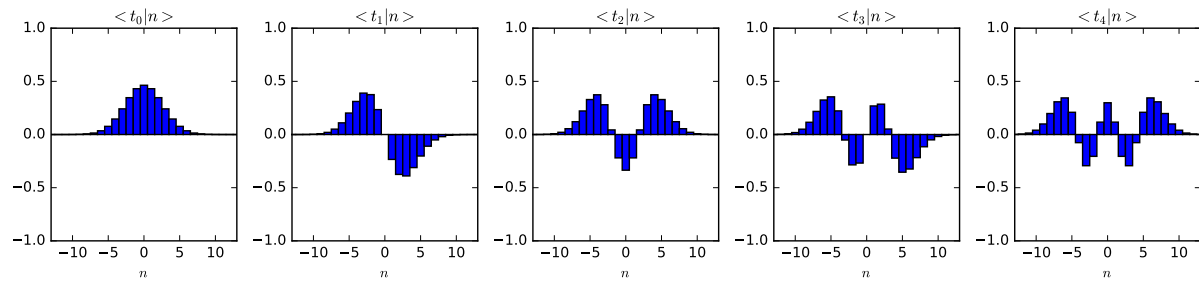
$$T_2 \sim \frac{\hbar}{A} \left| \frac{\partial E_{01}}{\partial n_g} \right|^{-1} \simeq \frac{\hbar}{e\pi |\epsilon_1|} \quad (2.10)$$

Используя возможные параметры трансмона  $E_J = 30$ ,  $E_C = 0.35$ , получаем оценку времени жизни  $T_2 = 400\mu s$ . Для типичного зарядового кубита это время гораздо меньше –  $T_2 \sim 1\mu s$ , что в частности и обуславливает широкую последующую популярность трансмона как физическую реализацию кубита.



**Рис. 2.4:** При  $E_J/E_C = 100$   $\epsilon_0 \sim 10^{-11}$  и зависимость  $E_m(n_g)$  можно пренебречь

**Анализ ???.** Рассмотрим собственные состояния трансмона (Рис. 2.5). Для типичного  $E_J/E_C = 100$  они еще не являются фазовыми состояниями ( $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{in\varphi} |n\rangle$ ) и  $\langle t|n\rangle$  существенно затухает с ростом  $n$  [wtf? как оценить падение  $\langle t|n\rangle$  ??]. Значит, можно использовать конечномерный гамильтониан трансмона в форме (2.5).



**Рис. 2.5:** Собственные состояния трансмона  $|t\rangle$  в зарядовом базисе  $|n\rangle$

# Литература

- <sup>1</sup> Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. // Science (New York, N.Y.). — 1993. — Vol. 261. — P. 1569–1571. (ссылка на стр. [3])
- <sup>2</sup> DiVincenzo D. P. Quantum Computation // Science. — 1995. — Vol. 270, no. 5234. — P. 255–261. — Access mode: <http://www.sciencemag.org/content/270/5234/255.abstract>. (ссылка на стр. [3])
- <sup>3</sup> DiVincenzo D.P. Prospects for quantum computing. — 2000. — P. 12–15. (ссылка на стр. [3])
- <sup>4</sup> Spiller T. P. Quantum information processing: cryptography, computation, and teleportation // Proceedings of the IEEE. — 1996. — Vol. 84. (ссылка на стр. [3])
- <sup>5</sup> Milburn G. J. Photons as qubits // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 2009, no. T137. — P. 14003. — Access mode: <http://stacks.iop.org/1402-4896/2009/i=T137/a=014003>. (ссылка на стр. [3])
- <sup>6</sup> Cirac J. I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Physical review letters. — 1995. — Vol. 74, no. 20. — P. 4091. (ссылка на стр. [3])
- <sup>7</sup> Kane B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer // Nature. — 1998. — Vol. 393. — P. 133–137. (ссылка на стр. [3])
- <sup>8</sup> Rempe G. Cavity QED with single atomic and photonic qubits // Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS) - Technical Digest Series. — 2008. (ссылка на стр. [3])
- <sup>9</sup> Devoret M. H., Martinis J. M. Implementing qubits with superconducting integrated circuits // Experimental Aspects of Quantum Computing. — 2005. — P. 163–203. (ссылка на стр. [3])
- <sup>10</sup> Devoret M. H. Quantum fluctuations in electrical circuits // Les Houches, Session LXIII. — 1995. — Access mode: [http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum\\_circuit\\_theory-1.pdf](http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum_circuit_theory-1.pdf). (ссылка на стр. [3])
- <sup>11</sup> Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits. // Nature. — 2008. — Vol. 453, no. 7198. — P. 1031–42. — Access mode: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18563154>. (ссылка на стр. [3])

- <sup>12</sup> Superconducting persistent-current qubit / T. Orlando, J. Mooij, Lin Tian et al. // *Physical Review B*. — 1999. — Vol. 60, no. 22. — P. 15398–15413. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.15398>. (ссылка на стр. [8])
- <sup>13</sup> Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta et al. — 2007. — P. 21. — 0703002. (ссылки на стр. [4 и 8])
- <sup>14</sup> Implementation of a quantum metamaterial using superconducting qubits. / P. Macha, G. Oelsner, J.-M. Reiner et al. // *Nature communications*. — 2014. — Vol. 5. — P. 5146. — Access mode: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25312205>. (ссылка на стр. [4])
- <sup>15</sup> Clarke J., Braginski A. I. *The SQUID Handbook*. — 2006. — Vol. 2. — P. 1–634. — ISBN: 9783527404087. (ссылка на стр. [4])
- <sup>16</sup> Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom / O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov et al. // *Science*. — 2010. — Vol. 327, no. 5967. — P. 840–843. (ссылка на стр. [4])
- <sup>17</sup> Xia K., Vanner M. R., Twamley J. An opto-magneto-mechanical quantum interface between distant superconducting qubits. // *Scientific reports*. — 2014. — Vol. 4. — P. 5571. — arXiv:1407.2324v1. (ссылка на стр. [4])
- <sup>18</sup> Schrieffer J. R., Tinkham M. *Superconductivity* // *Reviews Of Modern Physics*. — 1999. — Vol. 71. — P. S313–S317.
- <sup>19</sup> Ginzburg V.L., Landau L.D. On the theory of superconductivity // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20, 1064. — 1950.
- <sup>20</sup> Gorkov L. P. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity // *Sov. Phys. JETP*. — 1959. — Vol. 9, no. 6. — P. 1364–1367.
- <sup>21</sup> Josephson B. Coupled Superconductors // *Rev. Mod. Phys.* — 1964. — Vol. 36. — P. 216–220. (ссылка на стр. [5])
- <sup>22</sup> Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'Ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // *Reviews of Modern Physics*. — 2004. — Vol. 76. — P. 411–469. (ссылка на стр. [5])
- <sup>23</sup> Quantum theory of three-junction flux qubit with non-negligible loop inductance: Towards scalability / T. Robertson, B. Plourde, P. Reichardt et al. // *Physical Review B*. — 2006. — Vol. 73, no. 17. — P. 174526. — Access mode: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.174526>.
- <sup>24</sup> Johansson R. Reproduce: Orlando et al., *Phys. Rev. B* 60, 15398 (1999). — Access mode: <http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/reproduced-papers/blob/master/Reproduce-PRB-60-15398-1999-Orlando.ipynb>.
- <sup>25</sup> Nonlinear response of the vacuum Rabi resonance / L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch et al. // *Nature Physics*. — 2009. — Vol. 5, no. 2. — P. 105–109.

- <sup>26</sup> Carmichael H. J. Quantum Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations. — Springer Verlag, 1999.
- <sup>27</sup> Markovian master equations: a critical study / A. Rivas, A. D. K. Plato, S. F. Huelga, M.B. Plenio // New Journal of Physics. — 2010. — Vol. 12, no. 11. — P. 113032.
- <sup>28</sup> Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130. — Access mode: <http://link.springer.com/10.1007/BF01608499>.
- <sup>29</sup> Dynamics of the dissipative two-state system / A. J. Leggett, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher et al. // Reviews of Modern Physics. — 1987. — Vol. 59, no. 1. — P. 1.
- <sup>30</sup> Hsu D., Skinner J. L. General quantum mechanical theory of pure dephasing // Journal of luminescence. — 1987. — Vol. 37, no. 6. — P. 331–337.
- <sup>31</sup> Jerger M. Experiments on Superconducting Qubits Coupled to Microwave Resonators : PhD Thesis / M. Jerger ; Karlsruhe Institute of Technology. — 2013.
- <sup>32</sup> Bishop L. Circuit Quantum Electrodynamics : Doctoral Thesis / L. Bishop ; Yale Institute. — 2010.
- <sup>33</sup> Bauer D. Theory of intense laser-matter interaction. — Max-Planck-Institut für Kernphysik, 2006. — P. 106.
- <sup>34</sup> Braak D. Integrability of the Rabi model // Physical review letters. — 2011. — Vol. 107, no. 10. — P. 100401.
- <sup>35</sup> Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime / T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl et al. // Nature Physics. — 2010. — Vol. 6, no. 10. — P. 772–776.
- <sup>36</sup> Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime / P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos et al. // Physical review letters. — 2010. — Vol. 105, no. 23. — P. 237001.
- <sup>37</sup> Novotny L. Strong coupling, energy splitting, and level crossings: A classical perspective // American Journal of Physics. — 2010. — Vol. 78, no. 11. — P. 1199–1202.
- <sup>38</sup> Beaudoine F., Gambetta J. M., Blais A. Dissipation and ultrastrong coupling in circuit QED // Physical Review A. — 2011. — Vol. 84, no. 4. — P. 043832.
- <sup>39</sup> Decoherence in a superconducting quantum bit circuit / G. Ithier, E. Collin, P. Joyez et al. // Physical Review B. — 2005. — Vol. 72, no. 13. — P. 134519.
- <sup>40</sup> Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation / A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff et al. — 2004. — P. 14. — 0402216.

- <sup>41</sup> Introduction to quantum noise, measurement, and amplification / A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin et al. // Reviews of Modern Physics. — 2010. — Vol. 82, no. 2. — P. 1155.
- <sup>42</sup> Gardiner C. W., Collett M. J. Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation // Physical Review A. — 1985. — Vol. 31, no. 6. — P. 3761.
- <sup>43</sup> Broadband sample holder for microwave spectroscopy of superconducting qubits / A. S. Averkin, A. Karpov, K. Shulga et al. // Review of Scientific Instruments. — 2014. — Vol. 85, no. 10. — P. 104702.
- <sup>44</sup> Göppl M. V. Engineering quantum electronic chips : Ph. D. thesis / M. V. Göppl ; Diss., Eidgenössische Technische Hochschule ETH Zürich, Nr. 18314, 2009. — 2009.
- <sup>45</sup> Thuneberg E. Quantum optics in electric circuits. — 2013.
- <sup>46</sup> Oliver W. D., Valenzuela S. O. Large-amplitude driving of a superconducting artificial atom // Quantum Information Processing. — 2009. — Vol. 8, no. 2-3. — P. 261–281.
- <sup>47</sup> Johansson J.R., Nation P.D., Nori Franco. QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems // Computer Physics Communications. — 2013. — Vol. 184, no. 4. — P. 1234 – 1240. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465512003955>.