B. Крысиные бега

Однажды британским ученым стало скучно и они решили провести следующий эксперимент. Они сконструировали лабиринт, состоящий из N комнат и M переходов между ними, и запустили в первую комнату сто лабораторных крыс (предварительно пронумеровав их). За один переход в любую соседнюю комнату каждая крыса получала кусочек сыра. Ученые же записывали, какая крыса бежала по какому маршруту.
После того, как каждая крыса пробежала по K переходам, сыр закончился и ученые стали смотреть на результаты. Неожиданно оказалось, что все крысы бежали по разным маршрутам… Ученые очень обрадовались и начали даже писать статью на тему индивидуализма крыс, но тут один из них поинтересовался – а сколько же всего существует различных маршрутов длины K, которые начинаются в первой комнате?..
Ученые начали считать, но сбились уже на 632-м маршруте –- они все же психологи, а не математики… Однако им этого хватило, чтобы понять, что маршрутов может быть ОЧЕНЬ много –- поэтому они хотят получить хотя бы остаток от ответа по модулю 10^9+7. Помогите им –- и они сделают вас соавтором статьи!

Формат ввода

В первой строке входного файла находится три числа — N, M и K ($1 \le N \le 50$, $0 \le M \le 10^5$, $0 \le K \le 10^9$) – количество комнат в лабиринте, количество переходов между ними и длина маршрута каждой из крыс.
В следующих M строках содержится информация о переходах между комнатами: в каждой строке содержатся пары чисел вида a b ($1 \le a,\ b \le N$, a может быть равно b), обозначающие наличие перехода, ведущего из комнаты с номером a в комнату с номером b. Во входном файле могут быть одинаковые пары чисел a b, обозначающие разные переходы, ведущие из комнаты a в комнату b.

Все крысы начинают бежать из комнаты номер 1.

Формат вывода

Выведите в выходной файл единственное число P – количество различных маршрутов, по которым могли пробежать крысы, по модулю 10^9+7.

Решение (теория):

Начнем с представления лабиринта в виде графа. Каждая комната – вершина, переход – ребро. Задан граф списком ребер (списком смежности), который уже на этапе ввода превратим в матрицу смежности. Нужно найти сумму количества путей от одной вершины до каждой, а мы умеем искать от каждой до каждой в виде матрицы. Цитируя лекцию (в матрице d_i

содержится ответ для пути из i шагов вида “кол-во путей из i ребер из Атой вершины в Втую записано в $d_i[A][B]$”. Начальная матрица – матрица смежности графа):

Пусть ответ для некоторого k найден, построим ответ для k+1
d_k — посчитанная матрица ответов для k
d_{k+1} — искомая матрица ответов для k+1

Тогда получим:
Любой путь какой-то длины из i в j можно описать как путь на единицу меньшей длины в некую промежуточную p (возможно совпадающую с i или j) + путь из p в j длиной один. Займемся подсчетом количества таких путей: за к шагов можно добраться из i в p $\mathrm{d_k[i][p]}$ кол-вом способов по предположению индукции, из p в j за один $\mathrm{g[p][j]}$ таким по определению нашей матрицы смежности. Простая комбинаторика говорит перемножить эти два числа, ведь выбор путей независимый, а затем сложим значения для всех p чтоб получить пути через все. Получили формулу, которая описывает произведение матриц по определению.
$d_{k+1}[i][j]=\sum_{p=1}^{n} d_k[i][p] \cdot g[p][j]$
Значит, умножаем g на g – получаем матрицу для путей длины два, ее на g – для длины три, и так далее.

Получается, очередная матрица получается из известной домножением на матрицу смежности, а значит $d_K = g^K$. Получить ответ из финальной матрицы можно сложив все значения в первой строке (всего путей из первой комнаты = путей из нее в саму себя + во вторую + … + в Nтую). Тут сложность линейная по N – то есть O(N). Осталось посчитать матрицу. Учитывая весьма большие значения K, сделаем это бинарным возведением в степень, займет оно O(logK) умножений. Константа при этом максимум 2, поскольку хотя бы одна из двух последовательных операций делит степень на два (нечетные степени сначала разбиваем на один и четную, четные сразу пополам). Сами матрицы перемножаются за куб от кол-ва вершин, но для N <= 50 числа приемлемые. Отдельный случай с нулевой длиной пути – можем сразу возвращать один. Хотя если возведем матрицу в нулевую степень, получим единичную и, следовательно, такой же ответ.

В итоге – получаем список смежности, за O(M) превращаем в матрицу, за $O(N^3 \log K)$ возводим в нужную степень, и за O(N) находим ответ. Общая сложность – $O(N^3 \log K + M)$.