У к а з а н и е. Рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

и применить к функциям φ и ψ теорему Коши о среднем значении. Для вывода остаточного члена в виде Шлёмильха—Роша положить $\psi(t) = (x-t)^p$.

13.2. Многочлен Тейлора как многочлен наилучшего приближения функции в окрестности данной точки

Заметим предварительно, что, очевидно, всякий многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{13.11}$$

может быть представлен для любого x_0 в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x-x_0)^k. \tag{13.12}$$

В самом деле, достаточно в (13.11) положить $x = x_0 + h$ и разложить правую часть по степеням h; тогда $P_n(x) = A_0 + A_1 h + \ldots + A_n h^n$, где $h = x - x_0$, т. е. получилась формула (13.12).

Докажем теперь единственность многочлена, обладающего свойством (13.2).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция f дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0, и пусть*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{13.13}$$

где $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ — некоторый многочлен степени, меньшей или равной n. Тогда

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{13.14}$$

т. е. $P_n(x)$ является многочленом Тейлора.

Иначе говоря, никакой многочлен степени, меньшей или равной n, отличный от многочлена Тейлора порядка n, не может приближать данную функцию с точностью до $o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$ (а поэтому и с более высокой точностью $o((x-x_0)^m) m > n$, поскольку при $m > n$ имеет место соотношение $o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^n$, $x \to x_0$, — напомним, что подобные формулы читаются только слева направо). Таким образом, многочлен Тейлора является единственным многочленом, обладающим свойством (13.13), все остальные многочлены той же степени или меньшей «хуже приближают» функцию f при $x \to x_0$. Именно в этом смысле и говорят, что многочлен Тейлора является многочленом наилучшего приближения рассматриваемой функции в окрестности данной точки x_0 при $x \to x_0$.

Доказательство. Из формул (13.5) и (13.13) следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

откуда, перейдя к пределу при $x \to x_0$, получим $a_0 = f(x_0)$. Отбрасывая слева и справа этот член, сокращая оставшиеся в обеих частях выражения на множитель $x - x_0$ ($x \neq x_0$) и замечая, что

$$o((x - x_0)^n) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n,$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, следовательно, при $x \to x_0$ имеет место равенство

$$\frac{o((x - x_0)^n)}{x - x_0} = \varepsilon(x)(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}),$$

$$x \neq x_0, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}), \ x \to x_0.$$

Переходя снова к пределу при $x \to x_0$, находим $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая этот процесс, получаем

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots , n. \ \square$$

Единственность представления функции в виде (13.13) может быть иногда использована для ее разложения по формуле Тейлора. Именно: если удается каким-либо косвенным путем получить представление (13.13), то, в силу теоремы 2, можно утверждать, что это и есть разложение по формуле Тейлора (13.5), т. е. что коэффициенты найденного многочлена выражаются по формулам (13.14).

Так, например, соотношение (13.12) представляет собой разложение многочлена (13.11) по формуле Тейлора, причем в этом случае $r_n(x) = 0$, поэтому, в силу единственности многочлена, удовлетворяющего условию (13.13), коэффициенты многочлена (13.12) имеют вид

$$A_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Таким образом,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \qquad (13.15)$$

Отметим, что из того, что многочлен (13.12) совпадает со своим многочленом Тейлора (13.15), в силу единственности представления функции в виде (13.13), следует, что если два многочлена принимают одинаковые значения на каком-нибудь интервале числовой оси, то все их коэффициенты одинаковы.

Пусть требуется разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Замечая, что $\frac{1}{1-x}$ есть не что иное, как сумма бесконечной геометрической прогрессии $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, $|x| < 1$, и положив $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots \frac{x^{n+1}}{1-x}$, $|x| < 1$, получим

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x) = O(x^{n+1})$ и, значит, $r_n(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$. Таким образом, представление

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),\ x \to 0,$$

и есть разложение функции $\frac{1}{1-x}$ по формуле Тейлора в окрестности нуля.