

Lemma 1. $\forall k \in \mathbb{Z} \exists f, g \in \mathbb{R}[x] :$

$$\begin{aligned}\sin x \sin kx &= f(\cos x) \\ \cos kx &= g(\cos x)\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем утверждение по индукции для $\forall n \in \mathbb{N}$.

База индукции :

$$\begin{aligned}\sin x \sin x &= 1 - \cos^2 x \\ \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

Шаг индукции :

□

Theorem 1. $\forall n \in \mathbb{Z}$ функция $x \mapsto \cos(nx)$ есть многочлен от $\cos x$.

Доказательство. Очевидное следствие леммы ??.

□