

Задача 1.

Задача 1. Найдите все нормальные подгруппы группы перестановок S_4 .

Лемма 1. Каждая перестановка из S_n разлагается в произведение непересекающихся циклов единственным образом.

Доказательство. Пусть $\sigma \in S_n$. Рассмотрим группу $H = \langle \sigma \rangle$. Подействуем H на $\{1, \dots, n\}$ посредством применения функции из H к элементам из $\{1, \dots, n\}$. Орбитами при этом действия будут подмножества вида $Hk = \{\sigma^i(k) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, n\}\}$. Так как орбиты - это разбиение множества $\{1, \dots, n\}$, существуют элементы $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $1, \dots, n = \sqcup Hk_i$. Значит $\forall x \in \{1, \dots, n\}$ $\sigma(x) = \sigma^i(k_j)$ для некоторых i и j . Поэтому $\sigma = (\sigma(k_1)\sigma^2(k_1)\dots\sigma^{i_1}(k_1))\dots(\sigma(k_r)\sigma^2(k_r)\dots\sigma^{i_r}(k_r))$. \square

Определение 1. Циклическим типом перестановки называется упорядоченный по убыванию набор длин циклов в её разложении на непересекающиеся циклы.

Лемма 2. Пусть $\tau \in S_n$ и $\tau = (i_1 \dots i_{k_1}) \dots (i_1 \dots i_{k_p})$ - разложение τ в произведение не пересекающихся циклов. Пусть $\sigma \in S_n$. Тогда $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_{k_1})) \dots (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_{k_p}))$.

Доказательство. Так как Ad_σ - это автоморфизм S_n , нам достаточно доказать, что $\sigma(i_1 \dots i_n)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n))$. Пусть $x \in \{1, \dots, n\}$, тогда возможны два варианта

$$x = \sigma(i_k), \text{ для некоторого } k.$$

$$x = \sigma(y), \text{ где } y \notin i_1, \dots, i_n$$

Разберём сначала первый. Пусть $x = \sigma(i_k)$, для некоторого k . $\sigma\tau\sigma^{-1}(x) = \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(i_k)) = \sigma(i_{k+1 \bmod n})$

Теперь второй. Пусть $x = \sigma(y)$, где $y \notin i_1, \dots, i_n$, тогда $\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(y)) = \sigma(y)$. \square

Следствие 1. S_n сопряжением действует транзитивно на циклических типах.

Теперь можно перейти к решению задачи. Предположим, что $H \trianglelefteq S_4$. Пусть $(ij) \in H$. Тогда $H = S_n$, так как транспозиции порождают S_4 . Значит H не содержит транспозиций. Пусть $(ijk) \in H$. Тогда H содержит все 3-циклы и кроме того содержит $(123)(234) = (12)(34)$, а значит и содержит все элементы с циклическим типом $(2, 2)$. Так как, $(ijk) = (ij)(jk)$ все 3-циклы лежат в A_4 . Значит группа порождённая всеми 3-циклами содержится в A_4 . Однако элементов циклического типа $(2, 2)$ и $(3, 1)$ - 11. Вместе с Id - 12. А значит $H = A_4$. Так как $[A_4 : S_4] = 2$, A_4 - нормальна. Теперь, пусть H содержит элементы циклического типа $(2, 2)$. $H \leq A_4$. Из леммы 2 очевидно следует, что подгруппа состоящая из элементов циклического типа $(2, 2)$ и Id нормальна.

Таким образом, мы получили, что в S_4 только две нормальных подгруппы: подгруппа порождённая элементами циклического типа $(2, 2)$ и A_4 .

Обозначение 1. Обозначим нормальную подгруппу из 4 элементов как V_4

Задача 2

Задача 2. Докажите, что $Z_{S_n} = e$ при $n \geq 3$.

Определение 2. $H \subset G$, тогда $C_G(g) \stackrel{\text{df}}{=} \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \ \forall h \in H\}$

Лемма 3. Пусть G конечная группа и действует на себе сопряжением. Тогда $\#Gh = [G : C_G(h)]$

Доказательство. Пусть $g \in \tau C_G(h)$, тогда $ghg^{-1} = (\tau h_k)h(\tau h_k)^{-1} = \tau h \tau^{-1}$. То есть сопряжение элементами из одного смежного класса переводит h в один тот же элемент. Теперь пусть $g_1 h g_1^{-1} = g_2 h g_2^{-1}$, что равносильно тому, что $g_2^{-1} g_1 h g_2^{-1} g_1^{-1} = h$, т.е. $g_1 = g_2 (g_2^{-1} g_1)$, где $g_2^{-1} g_1 \in C_G(h)$, т.е. $g_1 \in g_2 C_G(h)$. Значит, сопряжение двумя элементами равно тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же смежном классе. Таким образом определена инъективная и сюръективная функция $g C_G(h) \mapsto ghg^{-1}$. \square

Утверждение 1. Пусть $(i_1 \dots i_m) \in S_n$, тогда $[G : C_G((i_1 \dots i_m))] = \frac{n!}{m(n-m)!}$

Доказательство. Посчитаем $\#S_n h$ при действии S_n на себя сопряжением. По лемме 2 $S_n h$ состоит из всех элементов циклического типа такого, как у h . То есть в нашем случае, достаточно посчитать количество m -циклов. По комбинаторным соображениям оно равно $C_m^n (m-1)!$, так как мы сначала выбираем m элементов из n -элементного множества, а потом рассматриваем их с точностью до всех перестановок, кроме циклических, которых ровно m . \square

Утверждение 2. Пусть $(i_1 \dots i_m) \in S_n$, тогда $C_G((i_1 \dots i_m)) = \{(i_1 \dots i_m)^k \sigma \mid \sigma \in S_{\{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_r\}} \leq S_n\}$

Доказательство.

$$\#[G : C_G(h)] = \frac{\#G}{\#C_G(h)} = \frac{n!}{\#C_G(h)} = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

Откуда $\#C_G(h) = m(n-m)!$.

Очевидно, что $\{(i_1 \dots i_m)^k \sigma \mid \sigma \in S_{\{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_r\}} \leq S_n\} \subset C_G((i_1 \dots i_m))$. При чём $\#\{(i_1 \dots i_m)^k \sigma \mid \sigma \in S_{\{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_r\}} \leq S_n\} = m(n-m)!$ Откуда и получаем искомое равенство множеств. \square

Утверждение 3. $Z_G = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$

Предварительная подготовка закончена, можно переходить собственно к доказательству утверждения в задаче.

По утверждению 3 $Z_{S_n} \subset \bigcap_{i=1}^n C_{S_n}((ii+1))$

$$C_{S_n}(12) = \{(12)\sigma \mid \sigma \in S_{\{1, \dots, n\} - \{1, 2\}}\}$$

$$C_{S_n}(23) = \{(23)\tau \mid \tau \in S_{\{1, \dots, n\} - \{2, 3\}}\}$$

$$C_{S_n}(12) \cap C_{S_n}(23) = S_{\{1, \dots, n\} - \{1, 2, 3\}}$$

Продолжая аналогичным образом для $(ii+1)$ получаем $\bigcap_{i=1}^n C_{S_n}((ii+1)) = S_{\{1, \dots, n\} - \{1, \dots, n\}} = \{e\}$

Задача 3

Задача 3. Постройте изоморфизмы $\mathbb{S}^1 / \mu_n \simeq \mathbb{S}^1$ и $\mathbb{R} / \mathbb{Q} \simeq \mathbb{S}^1 / \mu$.

Утверждение 4. $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$

Доказательство. $\mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}$, при чём $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi)\}$.

Заметим, что $e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1 + \phi_2 \bmod 2\pi\mathbb{Z})}$ и $\forall \phi \in \mathbb{R} \ e^{i\phi} = e^{i(\phi \bmod 2\pi\mathbb{Z})}$.

Тогда отображение $e^{i\phi} \mapsto \phi$ является гомоморфизмом и биекцией, то есть изоморфизмом. \square

Обозначение 2. Обозначим изоморфизм из доказательства утверждения как ϕ .

Утверждение 5.

$$g_{\frac{n}{2\pi}} : \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} / n\mathbb{Z}$$

$$g_{\frac{n}{2\pi}} : \bar{x} \mapsto \overline{\frac{n}{2\pi}x}$$

g - изоморфизм абелевых групп.

Утверждение 6. $\phi(g(\mu_n)) = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$

Доказательство.

$$\mu_n = \{e^{\frac{2\pi k}{n}} \in \mathbb{S}^1 \mid k \in 0, \dots, n-1\}$$

$$g(\mu_n) = \{\frac{2\pi k}{n} \in \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z} \mid k \in 0, \dots, n-1\}$$

$$\phi(g(\mu_n)) = \{\bar{k} \in \mathbb{Z} / n\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} / n\mathbb{Z} \mid k \in 0, \dots, n-1\}$$

\square

Утверждение 7 (Третья теорема об изоморфизме). $A/B \simeq (A/C)/(B/C)$

Таким образом, $\mathbb{S}^1/\mu_n \simeq (\mathbb{R}/n\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$

Утверждение 8. $\bar{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ лежит в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} iff $\exists n \in \mathbb{Z} \mid nx \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимость: Пусть $\bar{x} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, тогда $x = \frac{p}{q}$, а значит $qx \in \mathbb{Z}$. Достаточность: Пусть $nx = k$, $k \in \mathbb{Z}$, тогда $x = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. \square

Замечание 1. Это равносильно тому, что $g_{\frac{1}{2\pi}}(\mu) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Теперь, $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{S}^1/\mu$.

Задача 4

Задача 4. Докажите, что группа перестановок S_n порождена транспозициями вида $(ii+1)$, где $i = 1, \dots, n-1$.

По индукции:

Для $n = 2$ очевидно утверждение выполняется.

Пусть выполняется для S_k . Тогда заметим, что $S_{k+1} = \langle S_{\{1, \dots, k\}}, S_{\{2, \dots, k+1\}} \rangle$. В свою очередь, по предположению индукции

$$\begin{aligned} S_{\{1, \dots, k\}} &= \langle \{(ii+1) \mid i \in \{1, \dots, k-1\}\} \rangle \\ S_{\{2, \dots, k+1\}} &= \langle \{(ii+1) \mid i \in \{2, \dots, k\}\} \rangle \end{aligned}$$

что и доказывает шаг индукции.

Задача 5

Задача 5. Докажите, что при $n \geq 3$ группа S_n порождена элементами (12) и $(12 \dots n)$.

$$(12 \dots n)(ii+1)(12 \dots n)^{-1} = (i+2i+3).$$

Отсюда получаем, что $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} (ii+1) \in \langle (12), (12 \dots n) \rangle$. А значит по результату предыдущей задачи $\langle (12), (12 \dots n) \rangle = S_n$.

Задача 6

Задача 6. Пусть $n \geq 3$. Докажите, что для любого $k = 2, \dots, n-1$ в группе S_n найдётся минимальная система из k образующих.

По результату предыдущей задачи $S_{1, \dots, n-1} = \langle (12), (12 \dots n-1) \rangle$. Тогда $\langle (12), (12 \dots n-1), (1n) \rangle = S_n$, при чём это минимальная система образующих по построению. То есть мы выполнили задачу для $k = 2, 3$. Таким же образом, конструкция распространяется на остальные k : $S_n = \langle (12), (12 \dots n-(k-2)), (1n-(k-1)), \dots, (1n) \rangle$ и это минимальная система образующих.

Задача 7

Задача 7. Постройте эпиморфизм $S_4 \rightarrow S_3$ и найдите его ядро.

$$S_3 \xhookrightarrow{i} S_4 \xrightarrow{\pi} S_4/V_4$$

i - вложение. $i(S_3) \cap \ker \pi = i(S_3) \cap V_4 = e$. Значит $\ker(\pi i) = e$, что равносильно тому, что πi - мономорфизм. А так как $\#S_3 = \#S_4/V_4$, πi ещё и эпиморфизм, а значит и изоморфизм. То есть искомый эпиморфизм $\pi(\pi i)^{-1}$ и его ядро V_4 .