Задача 2.

Приведите пример моноида и эл-та у которого есть только левый (правый) обратный.

Решение:

Начнём с вспом. утверждений.

Утв. $f \in Map(X, X)$ имеет левое обратное

$$\Updownarrow$$

f - инъекция

Док-во:

(1) f - инъекция $\Rightarrow$ f имеет левое обратное

Если рассм. $\hat{f} : X \to f(X)$
$x \mapsto f(x)$,

оно будет сюръективным и инъективным, т.е. биекцией.

Т.е. $\exists \hat{f}^{-1} : f(X) \to X$.

Т.к. $X \neq \emptyset$ выберем произв. эл-т $x_0 \in X$ и определим $g : X \to X$

$$g(x) = \begin{cases} \hat{f}^{-1}(x), & x \in f(X) \\ x_0, & x \notin f(X) \end{cases}$$

$g \circ f = \mathrm{Id}_X$

(2) $\exists g \in Map(X, X) : g \circ f = \mathrm{Id}_X \Rightarrow f$ - инъекция

Пусть $x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$$g(f(x_1)) = x_1$$
$$\quad \parallel \qquad\quad \nparallel$$
$$g(f(x_2)) = x_2$$

- противоречие

$\boxtimes$

Утв. $f \in Map(X, X)$ имеет правое обратное $\Leftrightarrow$ f - сюръекция

Док-во

(1) f - сюръекция $\Rightarrow \exists g : X \to X$

$f \circ g = \mathrm{Id}_X$

Определим отношение экв-ти на X

$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

1) $x \sim x \Leftrightarrow f(x) = f(x)$

- всегда верно

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$

3) $x \sim y$ и $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

$f(x) = f(y)$ $f(y) = f(z) \Leftrightarrow$

$f(x) = f(z)$

Обозначим мн-во классов экв-ти как $X/_\sim$

f постоянно на классах экв-ти, значит можно определить $\tilde{f} : X/_\sim \to X$ так, что

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ X/_\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$f = \tilde{f} \circ \pi$

$$\tilde{f} : [x] \mapsto f(x)$$

(не зависит от выбора x)

$\tilde{f}$ — инъекция по построению

и $\tilde{f}$ — сюръекция т.к. f сюръекция.

Т.е. $\tilde{f}$ — биекция $\Rightarrow \exists\, \tilde{f}^{-1} : X \to X/_\sim$

$$f \circ \tilde{f}^{-1} = \mathrm{Id}_X$$

$$X \xleftarrow{f} X/_{\sim} \xleftarrow{f} X$$

Выберем по эл-ту из каждого класса экв-ти в $X/_{\sim}$.

Т.е. определим отображение

$$c : X/_{\sim} \longrightarrow X$$

Тогда

$$f \circ (c \circ \hat{f}^{-1}) = \mathrm{Id}_X$$

Т.е. $\exists$ правое обратное.

(2) $\exists g \in Map(X,X) : f \circ g = \mathrm{Id}_X \Rightarrow$ f – сюръекция.

Пусть $\exists y \in X : \forall x \in X \; f(x) \neq y$, то

$$f(g(y)) = y$$

противоречие.

☑

Ответ на исходный вопрос:

Искомый моноид : $Map(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ (без нуля)

$f(n) = 2 \cdot n$

f - инъекция, но не сюръекция

Значит имеет только левое обратное

$$g(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 2 \\ n-1, & n > 2 \end{cases}$$

g - сюръекция, но не инъекция

$(g(1) = g(2) = 1)$

Значит g обладает только пр-ым обратным

Задача 3.

Пусть X — множество. Опишите все обратимые слева (справа) и удовл. св-ву сократимости слева (справа) эл-ты $Map(X, X)$.

Решение:

Все обратимые слева — инъекции.

Все обратимые справа — сюръекции.

(Док-во в решении задачи 2.)

Утв 1. $f \in Map(X, X)$

$\forall g_1, g_2 \in Map(X, X)$

$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$

$\Updownarrow$

f — инъекция

Док-во

$\Leftarrow$ — очевидно из левой обратимости

$\Rightarrow$

Пусть $\forall g_1, g_2 \in Map(X, X)$

$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$

и $\exists x_1, x_2 : x_1 \neq x_2$
$f(x_1) = f(x_2)$

Пусть $x_0 \in X$. Тогда

$$g_1(x) = \begin{cases} x_1, & x = x_0 \\ x, & x \neq x_0 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x_2, & x = x_0 \\ x, & x \neq x_0 \end{cases}$$

$$g_1 \neq g_2$$

Однако $f \circ g_1 = f \circ g_2$, т.к.

$$f(g_1(x_0)) = f(g_2(x_0))$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_1) = f(x_2)$$

и $x \neq x_0$

$$f(g_1(x)) = f(g_2(x))$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) = f(x)$$

Противоречие.

Утв. 2.
$\forall g_1, g_2 \in Map(X, X)$
$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$

$\Updownarrow$

f - сюръекция

Док-во:
$\Leftarrow$ - очевидно из правой обратимости

$\Rightarrow$ Пусть $\forall g_1 g_2 \in Map(X, X)$

$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$

и $\exists y \in X : \forall x \in X \; f(x) \neq y$

Тогда пусть $x_1, x_2 \in X$

$x_1 \neq x_2$

Пусть $g_1(x) = \begin{cases} x_1, & x = y \\ x, & x \neq y \end{cases}$

$g_2(x) = \begin{cases} x_2, & x = y \\ x, & x \neq y \end{cases}$

Тогда

$g_1 \neq g_2$ однако

$g_1(f(x)) = g_2(f(x))$

$f(x) = f(x)$

Противоречие.

Замечание.

Я неявно предполагал, что $|X| \geq 2$.

Отдельно рассмотрим остальные случаи.

$|Map(\varnothing, \varnothing)| = 1$ — здесь всегда можно сокращать.

$|Map(\{a\}, \{a\})| = 1$ — здесь только одна биекция и всегда можно сокращать.

Ответ: Обратимые и сократимые слева: инъекции.

справа: сюръекции.

Задача 6.

Пусть Σ – мн-во.

M – моноид.

Постройте естественную биекцию из $Hom(\Sigma^*, M)$ в $Map(\Sigma, M)$.

Решение:

$i: \Sigma \hookrightarrow \Sigma^*$ – вложение

$a \longmapsto [a]$

слово

$i(\Sigma)$ порождает Σ^*

В Σ^* нет обратимых эл-ов.

Значит любой порождающий набор $A \subset \Sigma^*$ содержит $i(\Sigma)$.

Т.е. $i(\Sigma)$ – минимальный порождающий Σ^* набор

Утв. $f \in Hom(\Sigma^*, M)$

$f(i(\Sigma))$ порождает $f(M)$

Док-во:

$\blacktriangleleft$ $i(\Sigma)$ порождает Σ^*

Т.е. $\forall w \in \Sigma^*$ $\exists a_1, \ldots, a_n \in i(\Sigma)$:

$$w = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Значит $\forall$ $f(w) = f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) =$

$$= f(a_1) \cdot \ldots \cdot f(a_n)$$

Т.е. $f(i(\Sigma))$ порождает $f(\Sigma^*)$. $\boxtimes$

С одной стороны $f \in Hom(\Sigma^*, M)$ определяет отобр $\hat{f} \in Map(\Sigma, M)$

$$\hat{f}: a \longmapsto f([a])$$

С другой стороны,

$f(i(\Sigma))$ порождает $f(\Sigma^*)$, а значит

$\forall g \in Map(\Sigma, M)$ $\exists!$ $\tilde{g} \in Hom(\Sigma^*, M)$:

д-во единств-ти

$$\tilde{g}([a]) = g(a) \quad \forall a \in \Sigma$$

Пусть

$g_1([a]) = g(a)$

$g_2([a]) = g(a)$

и $\exists w \in \Sigma: \; g_1(w) \neq g_2(w)$

$w = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

$$g_1(w) = g_1(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n), \quad g_2(w) = g_2(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$$

$$g_1(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = g_1(a_1) \cdot \ldots \cdot g(a_n) = g_2(a_1) \cdot \ldots \cdot g(a_n)$$

противоречие. $\boxtimes$

Задача 7.

Пусть M — коммутативный моноид. Группификацией M мы назовём пару из (G, ι), где

G — абелева группа

$\iota : M \to G$ — гомоморфизм моноидов

такие, что $\forall\, G'$ — абелевой группы и

$\varphi : M \to G'$ — гомоморфизма моноидов

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G \arrow[d] \\
& G'
\end{tikzcd}$$

$\exists!\, \hat{\varphi} : \varphi = \hat{\varphi} \circ \iota$

$\hat{\varphi}$ — гомоморфизм групп.

Д-те, что, если (G_1, ι_1) и (G_2, ι_2) группификации M

То $G_1 \cong G_2$.

Решение:

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \\
M \arrow[ur, bend left] \arrow[ur, "l_1"] \arrow[r, "l_2"] \arrow[dr, "l_1"'] & C_2 \arrow[u, "g_{21}"'] \\
 & C_1 \arrow[u, "g_{12}"']
\end{tikzcd}$$

$g_{12}: C_1 \to C_2$

$g_{21}: C_2 \to C_1$

$l_1 = g_{21} \circ l_2$

$l_2 = g_{12} \circ l_1$

$l_2 = g_{12} \circ l_1$

$l_1 = g_{21} \circ l_2$

$l_2 = g_{12} \circ g_{21} \circ l_2$

$l_1 = g_{21} \circ g_{12} \circ l_1$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "l_1"] \arrow[dr, "l_1"'] & C_1 \arrow[d, "\exists!\ \varphi:"] \\
 & C_1
\end{tikzcd}$$

$l_1 = \varphi \circ l_1$

Id — подходит

Значит $\varphi = \mathrm{Id}_{C_1}$

Т.е. $g_{12} \circ g_{21} = \mathrm{Id}_{G_2}$

$g_{21} \circ g_{12} = \mathrm{Id}_{G_1}$

Значит $g_{12} : G_1 \to G_2$ – изоморфизм группы.

$$G_1 \cong G_2$$ $\boxtimes$.

Задача 9.

Пусть M - коммутативный моноид
$Gr(M)$ - его группа Гротендика
$\iota: M \to Gr(M)$ - натуральный гомоморфизм

н/д:
(1) ι - инъективно $\Leftrightarrow$ В M можно сокращать

(2) ι - изоморфизм $\Leftrightarrow$ M - группа

Решение:

(1) $\Rightarrow$ Пусть ι - инъекция:

$x_1, x_2 \in M$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \iota(x_1) \neq \iota(x_2)$

$$ab = ac \Rightarrow \iota(ab) = \iota(ac)$$
$$\Updownarrow$$
$$\iota(b) = \iota(c)$$
$$\Updownarrow \text{ (из-за инъективности)}$$
$$b = c$$

$\Leftarrow$ Пусть $a, b, c \in M$
$ab = ac \Rightarrow b = c$

Пусть $a, b, c, d \in M$

$$Gr(M) = (M \times M /_\sim, \cdot)$$

$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists m \in M$
$adm = bcm$

Так как моноид с сокр.

$\Downarrow$

$$ad = bc$$

Тогда

$$\iota(a) = (a, 1) \sim (b, 1) = \iota(b)$$

$\Downarrow$

$$a = b$$

Т.е. ι – инъекция

(2) $\iota : M \to Gr(M)$ гомоморфизм групп

а) В M можно сокращать умножением на обр.

Значит ι – инъекция.

б) $\overline{(m, n)} \in Gr(M)$ $\quad m, n \in M \Rightarrow n^{-1} \in M \Rightarrow$
$m \cdot n^{-1} \in M$

$$i(mn^{-1}) = i(m)\cdot i(n^{-1}) = i(m)\cdot(i(n))^{-1} = \overline{(m,1)}\cdot\left(\overline{(n,1)}\right)^{-1} =$$

$$= \overline{(m,1)}\cdot\overline{(1,n)} = \overline{(m,n)}$$

Т.е. i – сюръекция.

Значит i – изоморфизм.

В обратную сторону:

Если i – изоморфизм, то

$\forall m \in M \quad \exists m^{-1} = i^{-1}\left((i(m))^{-1}\right)$:

$m \cdot m^{-1} = 1$

Т.е. M – группа. $\boxtimes$

Задача 7.

Д-те, что $Gr(M)$ явл-ся группификацией M.

Решение:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Gr(M) \\ & G \end{tikzcd}$$

$\varphi : M \to G$

φ - гомоморфизм моноидов

Нужно найти $f \in Hom(Gr(M), M)$:

1) $\varphi = f \circ \iota$

2) $\forall g \in Hom(Gr(M), M)$:

$\varphi = g \circ \iota \Rightarrow g = f$

*) $\forall x \in Gr(M)$ верно, что

$$\left[\begin{array}{l} x = \iota(m) \\ x = (\iota(m))^{-1} \end{array} \right.$$, т.е.

$i(M)$ порождает $Gr(M)$

Значит $f : Gr(M) \to G$

$f(\overline{(m, 1)}) = \varphi(m)$

$f(\overline{(1, n)}) = (\varphi(n))^{-1}$

Проверим корректность

$(m, 1) \sim (x, y) \iff$

$$my = x$$

т.е. $(m, 1) \sim (my, y) \quad \forall y$

$$\overline{f(my, y)} = \overline{f(m, 1)\, f(y, y)} =$$

$$= \varphi(m)\left(\varphi(y)\varphi(y)^{-1}\right) =$$

$$= \varphi(m)$$

Для $\overline{(1, n)}$ то же самое.

т.е. отображение корректно определено

1) $\bar{f} \circ c(m) = \varphi(m)$

2) Пусть $g \circ c(m) = \varphi(m)$

$$\Updownarrow$$

$$g(c(m)) = \varphi(m)$$

g - гомоморфизм групп элемент

Если f и g равны на порожд. наборе, то $f = g$.

$\boxtimes$

Задача 5.

$(m, n) = 1$

$m, n \in \mathbb{Z}$

Д-те $\mathbb{Z}/(mn) \cong \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n)$

Решение:

Пусть $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n)$

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \pmod m \\ x = \alpha_2 \pmod n \end{cases}$$

$\Downarrow$

Решим систему.

$x = \alpha_1 \cdot F_1 \cdot n + \alpha_2 \cdot F_2 \cdot m$, где

$F_1 = n^{-1} \pmod m$

$F_2 = m^{-1} \pmod n$

F_1, F_2 существ. т.к. $(m, n) = 1$.

Т.е. $F_1 = n^{-1} + q_1 m$

$F_2 = m^{-1} + q_2 n$

$$x = \alpha_1 (n^{-1} + q_1 m) n + \alpha_2 (m^{-1} + q_2 n) m$$

$$\parallel$$

$$\alpha_1 n^{-1} \cdot n + \alpha_2 m^{-1} m + (q_1 + q_2) mn$$

Пусть $x_0 = \alpha_1 + q_1 n$

$x_0 = \alpha_2 + q_2 m$

$y_0 = \alpha_1 + r_1 n$

$y_0 = \alpha_2 + r_2 m$

$x_0 - y_0 = (q_1 - r_1) n$

$x_0 - y_0 = (q_2 - r_2) m$

$\Downarrow$ $(m, n) = 1$

$x_0 - y_0 \in (m) \cap (n) = (mn)$

Теперь

$F : (\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto x \pmod{mn}$

1) F - инъекция

2) F - гомоморфизм

$\begin{cases} x_0 = \alpha_1 \\ x_0 = \alpha_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = \beta_1 \\ y_0 = \beta_2 \end{cases}$ $\begin{matrix} (\mathrm{mod}\ m) \\ (\mathrm{mod}\ n) \end{matrix}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x_0 + y_0 = \alpha_1 + \beta_1 \\ x_0 + y_0 = \alpha_2 + \beta_2 \end{cases}$

3) $|\mathbb{Z}/(mn)| = |\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n|$

F – сюръекция

Т.е. F изоморфизм, .