Задача 1.

Задача 1. *Найдите все нормальные подгруппы группы перестановок S_4.*

Лемма 1. *Каждая перестановка из S_n разлагается в произведение непересекающихся циклов единственным образом.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in S_n$. Рассмотрим группу $H = \langle\sigma\rangle$. Подействуем H на $\{1, \ldots, n\}$ посредством применения функции из H к элементам из $\{1, \ldots, n\}$. Орбитами при этом действия будут подмножества вида $Hk = \{\sigma^i(k) | \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, n\}\}$ Так как орбиты - это разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$, существуют элементы $k_1, \ldots, k_r \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $\{1, \ldots, n\} = \sqcup Hk_i$. Значит $\forall x \in \{1, \ldots, n\}$ $\sigma(x) = \sigma^i(k_j)$ для некоторых i и j. Поэтому $\sigma = (\sigma(k_1)\sigma^2(k_1) \ldots \sigma^{i_1}(k_1)) \ldots (\sigma(k_r)\sigma^2(k_r) \ldots \sigma^{i_r}(k_r))$. □

Определение 1. ***Циклическим типом перестановки*** *называется упорядоченный по убыванию набор длин циклов в её разложении на непересекающиеся циклы.*

Лемма 2. *Пусть $\tau \in S_n$ и $\tau = (i_1 \ldots i_{k_1}) \ldots (i_1 \ldots i_{k_p})$ - разложение τ в произведение не пересекающихся циклов. Пусть $\sigma \in S_n$. Тогда $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_{k_1})) \ldots (\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_{k_p}))$.*

Доказательство. Так как Ad_σ - это автоморфизм S_n, нам достаточно доказать, что $\sigma(i_1 \ldots i_n)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_n))$. Пусть $x \in \{1, \ldots, n\}$, тогда возможны два варианта

$$x = \sigma(i_k), \text{для некоторого } k.$$
$$x = \sigma(y), \text{где } y \notin i_1, \ldots, i_n$$

Разберём сначала первый. Пусть $x = \sigma(i_k)$, для некоторого k. $\sigma\tau\sigma^{-1}(x) = \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(i_k)) = \sigma(i_{k+1 \; mod \; n})$
Теперь второй. Пусть $x = \sigma(y)$, где $y \notin i_1, \ldots, i_n$, тогда $\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(y)) = \sigma(y)$. □

Следствие 1. *S_n сопряжением действует транзитивно на циклических типах.*

Теперь можно перейти к решению задачи. Предположим, что $H \trianglelefteq S_4$. Пусть $(ij) \in H$. Тогда $H = S_n$, так как транспозиции порождают S_4. Значит H не содержит транспозиций. Пусть $(ijk) \in H$. Тогда H содержит все 3-циклы и кроме того содержит $(123)(234) = (12)(34)$, а значит и содержит все элементы с цикличиским типом $(2, 2)$. Так как, $(ijk) = (ij)(jk)$ все 3-циклы лежат в A_4. Значит группа порождённая всеми 3-циклами содержится в A_4. Однако элементов циклического типа $(2, 2)$ и $(3, 1)$ - 11. Вместе с Id - 12. А значит $H = A_4$. Так как $[A_4 : S_4] = 2$, A_4 - нормальна. Теперь, пусть H содержит элементы циклического типа $(2, 2)$. $H \le A_4$. Из леммы 2 очевидно следует, что подгруппа состоящая из элементов циклического типа $(2, 2)$ и Id нормальна.

Таким образом, мы получили, что в S_4 только две нормальных подгруппы: подгруппа порождённая элементами циклического типа $(2, 2)$ и A_4.

Задача 2

Задача 2. *Докажите, что $Z_{S_n} = e$ при $n \geq 3$.*

Определение 2. *$H \subset G$, тогда $C_G(g) \overset{df}{=} \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \; \forall h \in H\}$*

Лемма 3. *Пусть G конечная группа и действует на себе сопряжением. Тогда $\#Gh = [G : C_G(h)]$*

Доказательство. Пусть $g \in \tau C_G(h)$, тогда $ghg^{-1} = (\tau h_k)h(\tau h_k)^{-1} = \tau h\tau^{-1}$. То есть сопряжение элементами из одного смежного класса переводит h в один тот же элемент. Теперь пусть $g_1hg_1^{-1} = g_2hg_2^{-1}$, что равносильно тому, что $g_2^{-1}g_1hg_2^{-1}g_1^{-1} = h$, т.е. $g_1 = g_2(g_2^{-1}g_1)$, где $g_2^{-1}g_1 \in C_G(h)$, т.е. $g_1 \in g_2C_G(h)$. Значит, сопряжение двумя элементами равно тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же смежном классе. Таким образом определена иньективная и сюрьективная функция $gC_G(h) \mapsto ghg^{-1}$. □

Утверждение 1. *Пусть $(i_1 \ldots i_m) \in S_n$, тогда $[G : C_G((i_1 \ldots i_m))] = \frac{n!}{m(n-m)!}$*

Доказательство. Посчитаем $\#S_nh$ при действии S_n на себя сопряжением. По лемме 2 S_nh состоит из всех элементов циклического типа такого, как у h. То есть в нашем случае, достаточно посчитать количество m-циклов. По комбинаторным соображениям оно равно $C_m^n(m-1)!$, так как мы сначала выбираем m элементов из n-элементного множества, а потом рассматриваем их с точностью до всех перестановок, кроме циклических, которых ровно m. □

Утверждение 2. *Пусть* $(i_1 \dots i_m) \in S_n$, *тогда* $C_G((i_1 \dots i_m)) = \{(i_1 \dots i_m)^k \sigma | \sigma \in S_{\{1,\dots,n\}-\{i_1,\dots,i_r\}} \leq S_n\}$

Доказательство.

$$\#[G : C_G(h)] = \frac{\#G}{\#C_G(h)} = \frac{n!}{\#C_G(h)} = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

Откуда $\#C_G(h) = m(n-m)!$.
Очевидно, что $\{(i_1 \dots i_m)^k \sigma | \sigma \in S_{\{1,\dots,n\}-\{i_1,\dots,i_r\}} \leq S_n\} \subset C_G((i_1 \dots i_m))$. При чём $\#\{(i_1 \dots i_m)^k \sigma | \sigma \in S_{\{1,\dots,n\}-\{i_1,\dots,i_r\}} \leq S_n\} = m(n-m)!$ Откуда и получаем искомое равенство множеств. □

Утверждение 3. $Z_G = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$

Предварительная подготовка закончена, можно переходить собственно к доказательству утверждения в задаче.

По утверждению 3 $Z_{S_n} \subset \bigcap_{i=1}^{n} C_{S_n}((ii+1)) = e$ при $n \geq 3$ в следствии утверждения 2.