Задача 1.

Задача 1. *Найдите все нормальные подгруппы группы перестановок S_4.*

Лемма 1. *Каждая перестановка из S_n разлагается в произведение непересекающихся циклов единственным образом.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in S_n$. Рассмотрим группу $H = \langle \sigma \rangle$. Подействуем H на $\{1, \dots, n\}$ посредством применения функции из H к элементам из $\{1, \dots, n\}$. Орбитами при этом действия будут подмножества вида $Hk = \{\sigma^i(k) | \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, k \in \{1, \dots, n\}\}$ Так как орбиты - это разбиение множества $\{1, \dots, n\}$, существуют элементы $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $1, \dots, n = \sqcup Hk_i$. Значит $\forall x \in \{1, \dots, n\}$ $\sigma(x) = \sigma^i(k_j)$ для некоторых i и j. Поэтому $\sigma = (\sigma(k_1)\sigma^2(k_1) \dots \sigma^{i_1}(k_1)) \dots (\sigma(k_r)\sigma^2(k_r) \dots \sigma^{i_r}(k_r))$. $\square$

Определение 1. ***Циклическим типом перестановки*** *называется упорядоченный по убыванию набор длин циклов в её разложении на непересекающиеся циклы.*

Лемма 2. *Пусть $\tau \in S_n$ и $\tau = (i_1 \dots i_{k_1}) \dots (i_1 \dots i_{k_p})$ - разложение τ в произведение не пересекающихся циклов. Пусть $\sigma \in S_n$. Тогда $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_{k_1})) \dots (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_{k_p}))$.*

Доказательство. Так как Ad_σ - это автоморфизм S_n, нам достаточно доказать, что $\sigma(i_1 \dots i_n)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n))$. Пусть $x \in \{1, \dots, n\}$, тогда возможны два варианта

$$x = \sigma(i_k), \text{для некоторого } k.$$
$$x = \sigma(y), \text{где } y \notin i_1, \dots, i_n$$

Разберём сначала первый. Пусть $x = \sigma(i_k)$, для некоторого k. $\sigma\tau\sigma^{-1}(x) = \sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(i_k)) = \sigma(i_{k+1 \ mod \ n})$
Теперь второй. Пусть $x = \sigma(y)$, где $y \notin i_1, \dots, i_n$, тогда $\sigma\tau\sigma^{-1}(\sigma(y)) = \sigma(y)$. $\square$

Следствие 1. *S_n сопряжением действует транзитивно на циклических типах.*

Теперь можно перейти к решению задачи. Предположим, что $H \trianglelefteq S_4$. Пусть $(ij) \in H$. Тогда $H = S_n$, так как транспозиции порождают S_4. Значит H не содержит транспозиций. Пусть $(ijk) \in H$. Тогда H содержит все 3-циклы и кроме того содержит $(123)(234) = (12)(34)$, а значит и содержит все элементы с цикличиским типом $(2, 2)$. Так как, $(ijk) = (ij)(jk)$ все 3-циклы лежат в A_4. Значит группа порождённая всеми 3-циклами содержится в A_4. Однако элементов циклического типа $(2, 2)$ и $(3, 1)$ - 11. Вместе с Id - 12. А значит $H = A_4$. Так как $[A_4 : S_4] = 2$, A_4 - нормальна. Теперь, пусть H содержит элементы циклического типа $(2, 2)$. $H \leq A_4$. Из леммы 2 очевидно следует, что подгруппа состоящая из элементов циклического типа $(2, 2)$ и Id нормальна.

Таким образом, мы получили, что в S_4 только две нормальных подгруппы: подгруппа порождённая элементами циклического типа $(2, 2)$ и A_4.

Задача 2

Задача 2. *Докажите, что $Z_{S_n} = e$ при $n \geq 3$.*

Определение 2. *$H \subset G$, тогда $C_G(g) \overset{df}{=} \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \ \forall h \in H\}$*

Лемма 3. *Пусть G конечная группа и действует на себе сопряжением. Тогда $\#Gh = [G : C_G(h)]$*

Доказательство. Пусть $g \in \tau C_G(h)$, тогда $ghg^{-1} = (\tau h_k)h(\tau h_k)^{-1} = \tau h \tau^{-1}$. То есть сопряжение элементами из одного смежного класса переводит h в один тот же элемент. Теперь пусть $g_1 h g_1^{-1} = g_2 h g_2^{-1}$, что равносильно тому, что $g_2^{-1} g_1 h g_2^{-1} g_1^{-1} = h$, т.е. $g_1 = g_2(g_2^{-1}g_1)$, где $g_2^{-1}g_1 \in C_G(h)$, т.е. $g_1 \in g_2 C_G(h)$. Значит, сопряжение двумя элементами равно тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же смежном классе. Таким образом определена иньективная и сюрьективная функция $gC_G(h) \mapsto ghg^{-1}$. $\square$

Утверждение 1. *Пусть $(i_1 \dots i_m) \in S_n$, тогда $[G : C_G((i_1 \dots i_m))] = \frac{n!}{m(n-m)!}$*

Доказательство. Посчитаем $\#S_n h$ при действии S_n на себя сопряжением. По лемме 2 $S_n h$ состоит из всех элементов циклического типа такого, как у h. То есть в нашем случае, достаточно посчитать количество m-циклов. По комбинаторным соображениям оно равно $C_m^n(m-1)!$, так как мы сначала выбираем m элементов из n-элементного множества, а потом рассматриваем их с точностью до всех перестановок, кроме циклических, которых ровно m. $\square$

Утверждение 2. *Пусть* $(i_1 \dots i_m) \in S_n$, *тогда* $C_G((i_1 \dots i_m)) = \{(i_1 \dots i_m)^k \sigma | \sigma \in S_{\{1,\dots,n\}-\{i_1,\dots,i_r\}} \leq S_n\}$

Доказательство.

$$\#[G : C_G(h)] = \frac{\#G}{\#C_G(h)} = \frac{n!}{\#C_G(h)} = \frac{n!}{m(n-m)!}$$

Откуда $\#C_G(h) = m(n-m)!$.
Очевидно, что $\{(i_1 \dots i_m)^k \sigma | \sigma \in S_{\{1,\dots,n\}-\{i_1,\dots,i_r\}} \leq S_n\} \subset C_G((i_1 \dots i_m))$. При чём $\#\{(i_1 \dots i_m)^k \sigma | \sigma \in S_{\{1,\dots,n\}-\{i_1,\dots,i_r\}} \leq S_n\} = m(n-m)!$ Откуда и получаем искомое равенство множеств. □

Утверждение 3. $Z_G = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$

Предварительная подготовка закончена, можно переходить собственно к доказательству утверждения в задаче.

По утверждению 3 $Z_{S_n} \subset \bigcap_{i=1}^n C_{S_n}((ii+1))$

$$C_{S_n}(12) = \{(12)\sigma \mid \sigma \in S_{\{1,\dots,n\}-\{1,2\}}\}$$
$$C_{S_n}(23) = \{(23)\tau \mid \tau \in S_{\{1,\dots,n\}-\{2,3\}}\}$$
$$C_{S_n}(12) \cap C_{S_n}(23) = S_{\{1,\dots,n\}-\{1,2,3\}}$$

Продолжая аналогичным образом для $(ii+1)$ получаем $\bigcap_{i=1}^n C_{S_n}((ii+1)) = S_{\{1,\dots,n\}-1,\dots,n} = \{e\}$

Задача 3

Задача 3. *Постройте изоморфизмы* $\mathbb{S}^1 / \mu_n \simeq \mathbb{S}^1$ *и* $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \simeq \mathbb{S}^1/\mu$.

Утверждение 4. $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Доказательство. $\mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}$, при чём $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi)\}$. Заметим, что $e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1 + \phi_2 \mod 2\pi\mathbb{Z})}$ и $\forall \phi \in \mathbb{R}$ $e^{i\phi} = e^{i(\phi \mod 2\pi\mathbb{Z})}$. Тогда отображение $e^{i\phi} \mapsto \phi$ является гомоморфизмом и биекцией, то есть изоморфизмом. □

Следствие 2. $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Доказательство. $2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ □

Утверждение 5. $\mu_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Утверждение 6. $A/B \simeq (A/C)/(B/C)$

Таким образом, $\mathbb{S}^1/\mu_n \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{R}/n\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$
Теперь, $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{S}^1/(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Утверждение 7. $\overline{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *лежит в* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *iff* $\exists n \in \mathbb{Z} \mid nx \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Необходимость: Пусть $\overline{x} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, тогда $x = \frac{p}{q}$, а значит $qx \in \mathbb{Z}$. Достаточность: Пусть $nx = k$, $k \in \mathbb{Z}$, тогда $x = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. □

Теперь воспользовавшись изоморфизмом из следствия 2, с помощью его сужения на μ мы получаем изоморфизм μ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, что завершает доказательство второй части.

Задача 4

Задача 4. *Докажите, что группа перестановок* S_n *порождена транспозициями вида* $(ii+1)$, *где* $i = 1, \dots, n-1$.

По индукции:

Для $n = 2$ очевидно утверждение выполняется.

Пусть выполняется для S_k. Тогда заметим, что $S_{k+1} = \langle S_{\{1,\ldots,k\}}, S_{\{2,\ldots,k+1\}}\rangle$. В свою очередь, по предположению индукции

$$S_{\{1,\ldots,k\}} = \langle \{(ii+1)\ |i \in \{1,\ldots,k-1\}\}\rangle$$
$$S_{\{2,\ldots,k+1\}} = \langle \{(ii+1)\ |i \in \{2,\ldots,k\}\}\rangle$$

что и доказывает шаг индукции.

Задача 5

Задача 5. *Докажите, что при $n \geq 3$ группа S_n порождена элементами (12) и $(12\ldots n)$.*

$$(12\ldots n)(ii+1)(12\ldots n)^{-1} = (i+2i+3).$$

Отсюда получаем, что $\forall i \in \{1,\ldots,n-1\}$ $(ii+1) \in \langle (12),(12\ldots n)\rangle$. А значит по результату предыдущей задачи $\langle (12),(12\ldots n)\rangle = S_n$.

Задача 6

Задача 6. *Пусть $n \geq 3$. Докажите, что для любого $k = 2,\ldots,n-1$ в группе S_n найдётся минимальная система из k образующих.*

По результату предыдущей задачи $S_{1,\ldots,n-1} = \langle (12),(12\ldots n-1)\rangle$. Тогда $\langle (12),(12\ldots n-1),(1n)\rangle = S_n$, причём это минимальная система образующих по построению. То есть мы выполнили задачу для $k = 2, 3$. Таким же образом, конструкция распространяется на остальные k: $S_n = \langle (12),(12\ldots n-(k-2)),(1n-(k-1)),\ldots,(1n)\rangle$ и это минимальная система образующих.

Задача 7

Задача 7. *Постройте эпиморфизм $S_4 \to S_3$ и найдите его ядро.*

Утверждение 8. *Пусть $f : G_1 \to G_2$*