Содержание

1 Лекция 1

Конспект первой лекции Шабата по Алгебре из курса 2015 года.

1.1 Системы линейных уравнений

Запишем систему линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1}$$

Её можно решать оперируя с уравнениями

$$b_2(1) - b_1(2) : (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - b_1c_2$$
$$a_2(1) - a_1(2) : (a_2b_1 - a_1b_2)y = c_1a_2 - c_1a_1$$

Обозначим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \overset{df}{=} a_1b_2 - a_2b_1$$

что называется **определителем 2-го порядка**.
Теперь, при $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, получаем единственное решение

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{3}$$

1.2 Полиномиальные уравнения: решение уравнения третьей степени

Рассмотрим кубическое уравнение от одной переменной

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Заменой $x = u + \frac{a_2}{3}$ уравнение сводится к виду

$$x^3 + mx + n = 0$$

Дальше можно использовать замену $x = u + v$ и получить

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + m) + n = 0$$

Таким образом один из корней можно найти с помощью решения системы:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -n \\ u^3v^3 = \frac{m}{27} \end{cases}$$

Решение которой равносильно решению квадратного уравнения(по теореме Виетта):

$$(\lambda - u^3)(\lambda - v^3) = 0$$
$$\lambda^2 + n\lambda + \frac{m}{27} = 0$$

Откуда получаем

$$u^3 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}$$
$$v^3 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}$$

Откуда

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}$$

Что, опуская формальности, можно назвать **формулой Кардано**.

1.3 Отступление к общему случаю

Рассмотрим более общую систему

$$\begin{cases} f_1(x_0, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_0, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

где все f_i - многочлены. Множество решений такой системы называется **аффинным алгебраическим многообразием**. Алгебраические многообразия изучает наука под названием **Алгебраическая геометрия**.

Другой важный случай: решение уравнений с целыми коэффициентами в целых числах. Этим занимается наука **Диофантова геометрия**. С каждой системой диофантовых уравнений связан вопрос об алгоритмической разрешимости. Который и называется **10-ой проблемой Гильберта**. J. Robinson, M.Davis, Ю.В. Матиясевич доказали, что не существует алгоритма для решения системы диофантовых уравнений в общем виде.

Другим замечательным результатом являеется то, что проблема останова для конкретного алгоритма может быть сведена к вопросу о разрешимости системы диофантовых уравнений.

Вопрос о разрешимости системы полиномиальных уравнений над $\mathbb{Q}$ остаётся открытым.