1 Maßtheorie

Algebra und Maß

- Eine *Algebra* $\mathscr{A}$ auf A ist ein Mengensystem, das A enthält und abgeschlossen/stabil ist bzgl. paarweiser Vereinigung und Komplementbildung.
- Ein *Prämaß* auf $\mathscr{A}$ ist eine Funktion $\mu_A : \mathscr{A} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, für die $\mu(\emptyset) = 0$ und σ-Additivität gilt.
- Eine σ-*Algebra* $\mathscr{B}$ auf B ist ein Mengensystem, das B entäkt und abgeschlossen/stabil ist bzgl. abzählbar unendlicher Vereinigung und Komplementbildung.
- Ein *Maß* auf $\mathscr{B}$ ist eine Funktion $\mu_B : \mathscr{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, für die $\mu(\emptyset) = 0$ und σ-Additivität gilt.

Eigenschaften

Sei $\mathscr{F}$ σ-Algebra auf Ω, $A \in \mathscr{F}$, (A_n) Folge von Teilmengen von Ω (d.h. $A_n \in \mathscr{F}$) und μ Maß.

Messbarer Raum	$(\Omega, \mathscr{F})$
σ-Additivität	$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
σ-Stetigkeit	$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$, wobei $A_n \nearrow A$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup_n A_n = A$

Endliches Maß	$\mu(\Omega) < \infty$
σ-endliches Maß	$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$
W-Maß	$\mu(\Omega) = 1$ und σ-Additivität für paarweise disjunkte $A_n \in \mathscr{F}$ (Kolmogorov Axiome)

Messbare Abbildungen

Seien $(\Omega, \mathscr{F})$ und $(S, \mathscr{S})$ messbare Räume und $f : \Omega \to \mathscr{F}$ eine Abbildung.

$(\mathscr{F}, \mathscr{S})$-messbare Abbildung	$f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ für alle $B \in \mathscr{S}$
Borel-messbare Abbildung	$(S, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$

Alle stetigen Funktionen sind Borel-messbar.

2 Wahrscheinlichkeitsräume

2.1 Grundlagen

Ω	*Ergebnismenge*, wobei $\omega_i \in \Omega$ *Ergebnis* (Grundmenge)
$\mathscr{F}$	*Ereignissystem*, wobei $A \in \mathscr{F}$ *Ereignis* (σ-Algebra über der Grundmenge Ω, d.h. $\mathscr{F} = \sigma(\Omega)$)
$(\Omega, \mathscr{F})$	*Ereignisraum* (Messraum, messbarer Raum)
$\mathbb{P}$	*Wahrscheinlichkeitsmaß* (Maß)
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$	*Wahrscheinlichkeitsraum* (Maßraum)

X	$(S, \mathscr{S})$-wertige *Zufallsvariable*, wobei $X : \Omega \to S$ (Abbidung)
$(S, \mathscr{S})$	Messraum mit Grundmenge S und σ-Algebra $\mathscr{S} = \sigma(S)$
$\mathbb{P}^{\mathbb{X}}$	*Wahrscheinlichkeitsverteilung* (von $\mathbb{P}$ induziertes Maß)
$(S, \mathscr{S}, \mathbb{P}^X)$	Maßraum, wobei das enthaltene Maß der Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht

Für eine Zufallsvariable X und die σ-Algebren $\mathscr{F}$ und $\mathscr{S}$ gilt:

Für	$A \in \mathscr{F}$	gilt $X(A) \in \mathscr{S}$
Für	$B \in \mathscr{S}$	gilt $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$, wobei $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$

Für das Wahrscheinlichkitsmaß $\mathbb{P}$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}^X$ gilt:

Für	$A \in \mathscr{F}$	gilt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^X \circ X(A) = \mathbb{P}^X(X(A))$
Für	$B \in \mathscr{S}$	gilt $\mathbb{P}^{\mathbb{X}}(B) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(\{X \in B\}) \overset{kurz}{=} \mathbb{P}(X \in B)$

Zusammengefasst gilt:

$[0,1] \xleftarrow{\mathbb{P}} (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \xleftarrow{X^{-1}} (S, \mathscr{S}, \mathbb{P}^X) \xrightarrow{\mathbb{P}^X} [0,1]$

2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung, -dichte und Verteilungsfunktion

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, falls Ω endlich oder abzählbar unendlich.

Sei $\omega \in \Omega$ und $s \in S$, sowie $A \in \mathscr{F}$ und $B \in \mathscr{S}$ dann gilt mit einer *Wahrscheinlickeitsdichtefunktion*, auch kurz Wahrscheinlichkeitsdichte p bzw. p^X (entspricht *Zähldichte* im diskreten Fall):

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = p(\omega)$	Zähldichte $p(\omega)$ bestimmt $\mathbb{P}$ eindeutig bzgl. diskretem Wahrscheinlichkeitsraum
$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)$	Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit Zähldichte $p(\omega)$ und Zählmaß $\mathbb{1}_A(\omega)$
$\mathbb{P}^X(\{s\}) = p^X(s)$	Zähldichte $p^X(s)$ bestimmt $\mathbb{P}^X$ eindeutig bzgl. diskret verteilter $(S, \mathscr{S})$-wertiger ZV
$\mathbb{P}^X(B) = \sum_{s \in S} p^X(s) \mathbb{1}_A(s)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}^X$ mit Zähldichte $p^X(s)$ und Zählmaß $\mathbb{1}_A(s)$

dabei gilt $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ und $\mathbb{P}^X(S) = \sum_{s \in S} p(s) = 1$

Für eine Zufallsvariable X gilt für die *Verteilungsfunktion* F:

$F(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{P}(\{X = k\})$

Stetiger Wahrscheinlichkeitsraum

Stetiger Wahrscheinlichkeitsraum, falls Ω überabzählbar.

$A \in \mathscr{F}$ und $B \in \mathscr{S}$ dann gilt mit einer *Wahrscheinlickeitsdichtefunktion* p bzw. p^X:

$\mathbb{P}(A) = \int_A p(\omega)\, \lambda(d\omega)$	Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit W-Dichtefkt. $p(\omega)$ und Lebesque-Maß λ
$\mathbb{P}^X(B) = \int_B p^X(s)\, \lambda(ds)$	Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}^X$ mit W-Dichtefkt. $p^X(s)$ und Lebesque-Maß λ

dabei gilt $\mathbb{P}(\Omega) = \int_\Omega p(\omega)\lambda(d\omega) = 1$ und $\mathbb{P}^X(S) = \int_S p(s)\lambda(ds) = 1$

Stetiger reeller Wahrscheinlichkeitsraum

Spezialfall $(\Omega, \mathscr{F}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$:

$(a_1, a_2] \in \mathscr{F}$ und $(b_1, b_2] \in \mathscr{S}$ dann gilt mit einer *Wahrscheinlickeitsdichtefunktion* f bzw. f^X:

$\mathbb{P}((a_1, a_2]) = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\, dx$	Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ mit W-Dichtefkt. $f(x)$
$\mathbb{P}^X((b_1, b_2]) = \int_{b_1}^{b_2} f^X(x)\, dx$	Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}^X$ mit W-Dichtefkt. $f^X(x)$

Für eine Zufallsvariable $X \in \mathbb{R}$ gilt für die *Verteilungsfunktion* F:

$F(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \mathbb{P}^X((-\infty, x]) = \int_{(-\infty,x]} d\mathbb{P}^X = \int_{(-\infty,x]} d(\mathbb{P} \circ X^{-1}) = \int_{(-\infty,x]} f^X(x)\, \lambda(dx) = \int_{-\infty}^{x} f^X(x)\, dx$

2.3 Häufige W-Dichten, W-Verteilungen und Verteilungsfunktionen

Diskrete Gleichverteilung

Wahrscheinlichkeitsmaß	$\mathbb{P}(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert S\rvert}$
Wahrscheinlichkeitsdichte	$p_{U(S)}(k) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{1}{\lvert S\rvert}$
Verteilungsfunktion	$F_{U(S)}(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \frac{\lvert\{i\colon k_i \leq x\}\rvert}{\lvert S\rvert}$

Bernoulli-Schema

Wahrscheinlichkeitsdichte	$p_{B(p)}(k) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = p^k\,(1-p)^{n-k}$

Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte	$p_{B(n,p)}(k) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = \binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$
Verteilungsfunktion	$F_{B(n,p)}(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$

Geometrische Verteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte	$p_{G(n,p)}(k) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = p\,(1-p)^{n-1}$
Verteilungsfunktion	$F_{G(n,p)}(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = p\,\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}(1-p)^{n-1} \overset{x \text{ diskret}}{=} 1-(1-p)^n$

Poissonverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte	$p_{P(\lambda)}(k) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$
Verteilungsfunktion	$F_{P(\lambda)}(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = e^{-\lambda}\,\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\lambda^k}{k!}$

Stetige Gleichverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte	$f_{U(A)}(x) = \mathbb{P}(\{X \in A\}) = \frac{1}{\lambda(A)}\,\mathbb{1}_A(x),\; A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$
W-Dichte für Intervalle	$f_{U([a,b])}(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x),\; a < b \in \mathbb{R}$
Verteilungsfunktion	$F_{U([a,b])}(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \frac{x-a}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{(b,\infty)}(x)$

Expoentialverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte	$f_{E(\lambda)}(x) = \lambda\,e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$
Verteilungsfunktion	$F_{E(\lambda)}(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \int_0^\infty \lambda\,e^{-\lambda x}\,dx = (1-e^{-\lambda x})\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

Normalverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte	$f_{N(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
Verteilungsfunktion	$F_{N(\mu,\sigma)}(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

3 Unabhängigkeit

Seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ Ereignisräume, sowie $(S_1, \mathscr{S}_1)$ und $(S_2, \mathscr{S}_2)$ messbare Räume, $X_1 : \Omega_1 \longrightarrow S_1$ und $X_2 : \Omega_2 \longrightarrow S_2$ Zufallsvariablen.

Ereignisse	A_1 und A_2 unabhängig, wenn	$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$ für $A_1, A_2 \in \mathscr{F}_1$
σ-Algebren	$\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ unabhängig, wenn	$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ für alle $A \in \mathscr{F}_1$, $B \in \mathscr{F}_2$
Zufallsvariablen	X_1 und X_2 unabhängig, wenn	σ-Algebren $X_1^{-1}(\mathscr{S}_1)$ und $X_2^{-1}(\mathscr{S}_2)$ unabhängig

4 Konvergenzen

Fast sichere Konvergenz	$X_n \xrightarrow{f.s.} X$	$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$
Konvergenz im p-ten Mittel	$X_n \xrightarrow{L_p} X$	$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\lvert X_n - X\rvert^p] = 0$
Konvergenz im quadr. Mittel	$X_n \xrightarrow{L_2} X$	$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$ (Spezialfall)
Stochastische Konvergenz	$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$	$\forall\, \epsilon > 0 :\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\lvert X_n - X\rvert > \epsilon\}) = 0$
Konvergenz in Verteilung	$X_n \xrightarrow{d} X$	$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X)]$
Schwache Konvergenz	$\mathbb{P}^{X^n} \xrightarrow{w} \mathbb{P}$	$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \mathbb{P}_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \mathbb{P}(dx)$

Stochastische Konvergenz wird auch als Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

Beziehungen

Konvergenz in Verteilung $\Leftrightarrow$ Schwache Konvergenz

Fast sicher $\Rightarrow$ Stochastisch $\Rightarrow$ In Verteilung

Im p-ten Mittel $\Rightarrow$ Stochastisch $\Rightarrow$ In Verteilung

Fast sicher $\not\Leftrightarrow$ Im p-ten Mittel

5 Formeln

Vandermondesche Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k} \binom{N}{n-k} = \binom{M+N}{n}$$

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n\, y^{n-k}$$

Gauß-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$$

Imaginäres Exponential-Integral

$$\int_{-a}^{a} e^{iux}\, dx = \frac{2\,\sin(au)}{u}$$

Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \text{(Exponentialreihe)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ |x| < 1 \qquad \text{(Geometrische Reihe)}$$

Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

Es gilt: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(x+1) = x!, \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1$

Dreiecksungleichung

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \left| \int_I f(x)\, dx \right| \leq \int_I |f(x)|$$