



בחינות

שם הקורס: מבוא להסתברות
קוד הקורס: 90911

בחינת סמסטר קיץ:**השנה: 2016****מועד: א'****תאריך הבחינה: 25.10.2016****שעת הבחינה: 17:00****משך הבחינה: 3 שעות****השאלון לא ייבדק בתום הבחינה ע"י המרצה****הוראות לנבחן:**

- חומר עזר שימושי לבחינה
4 דפי נוסחאות...

- אין לכתוב בעפרון
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
- אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:**יש לפתור את כל השאלות.****יש להסביר, לנמק, לפרט, את כל הפתרונות בכל אחת****מהשאלות ובכל אחד מהסעיפים.****חישובים יש לבצע בדיוק של 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית,****חישובי הסתברויות בדיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית,****בהצלחה****רקע לשאלות 1 עד 4**

במחסן חברה יש מספר גדול מאוד של רכיבים, וידוע כי 20% מן הרכיבים הם תוצרת ספק א',
30% הם תוצרת ספק ב', והיתר תוצרת ספק ג'.

רכיבים תוצרת ספק א' הם בעלי אורך חיים ממוצע של 80 ימים וסטית תקן של 25 ימים, רכיבים
תוצרת ספק ב' הם בעלי אורך חיים ממוצע של 60 ימים וסטית תקן של 20 ימים, ורכיבים תוצרת
ספק ג' הם בעלי אורך חיים ממוצע של 50 ימים וסטית תקן של 18 ימים.

שאלה מס' 1

אם נבחר רכיב באקראי מן הרכיבים שבמחסן, מהי תוחלת אורך חייו?

שאלה מס' 2

אם נבחר רכיב באקראי מן הרכיבים שבמחסן, מהי סטיית התקן של אורך חייו?

שאלה מס' 3

אם נבחר רכיב באקראי מן הרכיבים שבמחסן, מה ניתן לומר על ההסתברות לכך שהוא יחיה
לפחות 100 ימים, על סמך אישויין מרקוב ועל סמך אישויין טשבישף?

שאלה מס' 4

אם נבחרים באקראי 200 רכיבים מן הרכיבים שבמחסן, מהי ההסתברות לכך שלפחות 150
מתוכם אינם מתוצרת ספק ב'?

רקע לשאלות 5 עד 10

תכולתו של מיכל דלק ברכב היא 50 ליטר, יהי X משתנה מקרי המתאר את כמות הדלק (בליטרים) שנהג ממלא בעת תדלוק. פונקציית הצפיפות של X היא:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 & 0 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

מחירו של ליטר דלק הוא 6 ש"ח, ובעת תדלוק יש לשלם סכום קבוע של 5 ש"ח למתדלק ללא תלות בכמות הדלק,

שאלה מס' 5

מהו הערך של הקבוע a ?

שאלה מס' 6

מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ?

שאלה מס' 7

אם ידוע שנהג תדלק את מכוניתו ביותר מ 25 ליטר, מהי ההסתברות לכך שעלות התדלוק היתה פחות מ 275 ש"ח?

שאלה מס' 8

מהי תוחלת עלות תדלוק?

(אם תזדקקו לתוצאה זו בהמשך, יש להניח כי התוחלת היא 240...)

שאלה מס' 9

מהי שונות עלות תדלוק?

(אם תזדקקו לתוצאה זו בהמשך, יש להניח כי השונות היא 3600...)

שאלה מס' 10

אם לתחנת דלק נכנסו 225 מכוניות לשם תדלוק, מהי ההסתברות לכך שההכנסה הממוצעת של בעל תחנת הדלק מתדלוק מכונית תהא גבוהה מ 240 ש"ח?

רקע לשאלות 11 עד 13

נתונה קופסא ובה 8 כדורים שחורים ו 2 כדורים לבנים.

שאלה מס' 11

מן הקופסא מוציאים 5 כדורים עם החזרה, מהי ההסתברות לכך שלפחות 2 מן הכדורים המוצאים יהיו לבנים? מהם תוחלת ושונות מספר הכדורים הלבנים המוצאים?

שאלה מס' 12

מן הקופסא מוציאים 5 כדורים ללא החזרה, מהי ההסתברות לכך שלפחות 2 מן הכדורים המוצאים יהיו לבנים? מהם תוחלת ושונות מספר הכדורים הלבנים המוצאים?

שאלה מס' 13

מן הקופסא מוציאים כדורים, עם החזרה, עד שיתקבל כדור לבן, ולאחר מכן מוציאים שוב כדורים, עם החזרה, עד לקבלת כדור שחור, מהי תוחלת סך מספר הכדורים המוצאים?

פתרון

פתרון
381N

מבוא להסתברות (90911)

פתרון בחינת סמסטר קיץ מועד א' 25/10/2016

רקע לשאלות 1 עד 4

במחסן חברה יש מספר גדול מאוד של רכיבים, וידוע כי 20% מן הרכיבים הם תוצרת ספק א', 30% הם תוצרת ספק ב', והיתר תוצרת ספק ג'. רכיבים תוצרת ספק א' הם בעלי אורך חיים ממוצע של 80 ימים וסטיות תקן של 25 ימים, רכיבים תוצרת ספק ב' הם בעלי אורך חיים ממוצע של 60 ימים וסטיות תקן של 20 ימים, ורכיבים תוצרת ספק ג' הם בעלי אורך חיים ממוצע של 50 ימים וסטיות תקן של 18 ימים.

שאלה מס' 1

אם נבחר רכיב באקראי מן הרכיבים שבמחסן, מהי תוחלת אורך חייו?

תשובה: $E[X] = 0.2 \cdot 80 + 0.3 \cdot 60 + 0.5 \cdot 50 = 59$

שאלה מס' 2

אם נבחר רכיב באקראי מן הרכיבים שבמחסן, מהי סטיית התקן של אורך חייו?

תשובה: $E[X^2] = 0.2 \cdot (80^2 + 25^2) + 0.3 \cdot (60^2 + 20^2) + 0.5 \cdot (50^2 + 15^2) = 4017$

$V[X] = 4017 - 59^2 = 536 = 23.15^2$

שאלה מס' 3

אם נבחר רכיב באקראי מן הרכיבים שבמחסן, מה ניתן לומר על ההסתברות לכך שהוא יחיה לפחות 100 ימים, על סמך אישיון מרקוב ועל סמך אישיון טשבישף?

תשובה: אי שוויון מרקוב - $P\{X \geq 100\} \leq \frac{59}{100} = 0.59$

אי שוויון טשבישף - $P\{X \geq 100\} = P\{|X - 59| \geq 41\} \leq \frac{536}{41^2} = 0.3189$

שאלה מס' 4

אם נבחרים באקראי 200 רכיבים מן הרכיבים שבמחסן, מהי ההסתברות לכך שלפחות 150 מתוכם אינם מתוצרת ספק ב'?

$Y \sim \text{Bin}(200, 0.7) \sim N(140, 42 = 6.48^2)$

תשובה:

$P\{Y \geq 150\} = 1 - \Phi\left(\frac{150 - 0.5 - 140}{6.48}\right) = 1 - \Phi(1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

רקע לשאלות 5 עד 10

תכולתו של מיכל דלק ברכב היא 50 ליטר, יהי X משתנה מקרי המתאר את כמות הדלק (בליטרים) שנהג ממלא בעת תדלוק. פונקציית הצפיפות של X היא:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 & 0 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

מחירו של ליטר דלק הוא 6 ש"ח, ובעת תדלוק יש לשלם סכום קבוע של 5 ש"ח למתדלק ללא תלות בכמות הדלק,

שאלה מס' 5

מהו הערך של הקבוע a?

תשובה: - $1 = \int_0^{50} ax^2 dx = a \frac{50^3}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{50^3} = \frac{3}{125000^3}$

שאלה מס' 6

מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של X?

תשובה: - $F(t) = \int_0^t \frac{3}{50^3} x^2 dx = \left(\frac{t}{50}\right)^3$

$$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \left(\frac{t}{50}\right)^3 & 0 \leq t \leq 50 \\ 1 & 50 \leq t \end{cases}$$

שאלה מס' 7

אם ידוע שנהג תדלק את מכוניתו ביותר מ 25 ליטר, מהי ההסתברות לכך שעלות התדלוק היתה פחות מ 275 ש"ח?

תשובה: - עלות תדלוק היא $Y=6X+5$

$$P\{Y < 275\} = P\{6X + 5 < 275\} = P\{X < 45\}$$

$$P\{X < 45 / X > 25\} = \frac{P\{X < 45 \cap X > 25\}}{P\{X > 25\}} = \frac{F(45) - F(25)}{1 - F(25)} = \frac{(45/50)^3 - (25/50)^3}{1 - (25/50)^3} = 0.6903$$

שאלה מס' 8

מהי תוחלת עלות תדלוק? (אם תזדקקו לתוצאה זו בהמשך, יש להניח כי התוחלת היא 240...)

$$E[X] = \int_0^{50} x \cdot \frac{3}{50^3} x^2 dx = \dots = 37.5 \Rightarrow E[6X + 5] = 6 \cdot 37.5 + 5 = 230$$

שאלה מס' 9

מהי שונות עלות תדלוק? (אם תזדקקו לתוצאה זו בהמשך, יש להניח כי השונות היא 3600...)

$$E[X^2] = \int_0^{50} x^2 \cdot \frac{3}{50^3} x^2 dx = \dots = 1500$$

$$\Rightarrow V[X] = 1500 - 37.5^2 = 93.75 \Rightarrow V[Y] = V[6X + 5] = 6^2 \cdot 93.75 = 3375$$

שאלה מס' 10

אם לתחנת דלק נכנסו 225 מכוניות לשם תדלוק, מהי ההסתברות לכך שההכנסה הממוצעת של בעל תחנת הדלק מתדלוק מכונית תהא גבוהה מ 240 ש"ח?

$$\bar{X}_{225} \sim N\left(240, \frac{3375}{225}\right) \Rightarrow P\{\bar{X}_{225} > 240\} = 0.5$$

רקע לשאלות 11 עד 13

נתונה קופסא ובה 8 כדורים שחורים ו 2 כדורים לבנים.

שאלה מס' 11

מן הקופסא מוציאים 5 כדורים עם החזרה, מהי ההסתברות לכך שלפחות 2 מן הכדורים המוצאים יהיו לבנים? מהם תוחלת ושונות מספר הכדורים הלבנים המוצאים?

$$V[X] = 5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8; E[X] = 5 \cdot 0.2 = 1 \Leftarrow X \sim \text{Bin}(5, 0.2)$$

$$P\{X \geq 2\} = 1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 1\}) = 1 - [0.8^5 + 5 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2] = 0.2627$$

שאלה מס' 12

מן הקופסא מוציאים 5 כדורים ללא החזרה, מהי ההסתברות לכך שלפחות 2 מן הכדורים המוצאים יהיו לבנים? מהם תוחלת ושונות מספר הכדורים הלבנים המוצאים?

$$V[X] = 5 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{(10-5)}{(10-1)} = 0.44; E[X] = 5 \cdot \frac{2}{10} = 1 \Leftarrow X \sim \text{HG}(10, 2, 5)$$

$$P\{X \geq 2\} = 1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 1\}) = 1 - [0.8^5 + 5 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2] = 0.2627$$

שאלה מס' 13

מן הקופסא מוציאים כדורים, עם החזרה, עד שיתקבל כדור לבן, ולאחר מכן מוציאים שוב כדורים, עם החזרה, עד לקבלת כדור שחור, מהי תוחלת סך מספר הכדורים המוצאים?

$$X_B \sim G(0.8); X_W \sim G(0.2) \quad X = X_W + X_B$$

$$E[X] = E[X_W] + E[X_B] = \frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.8} = 6.25$$