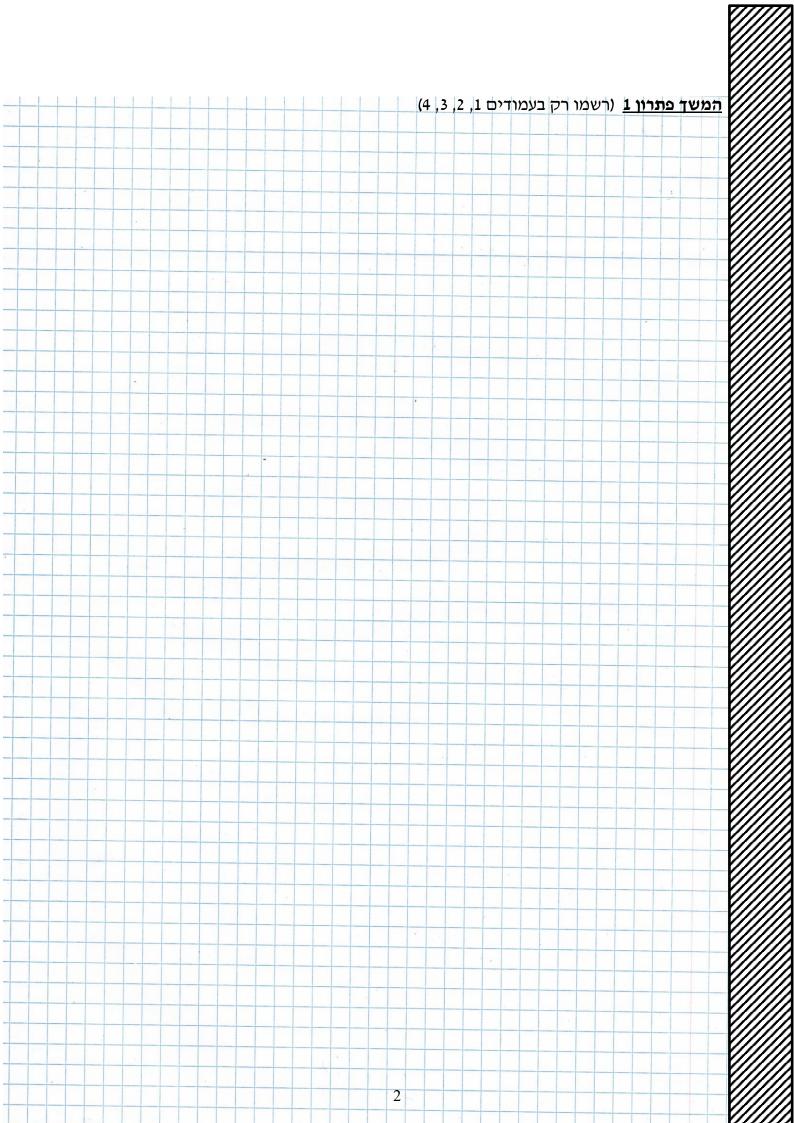
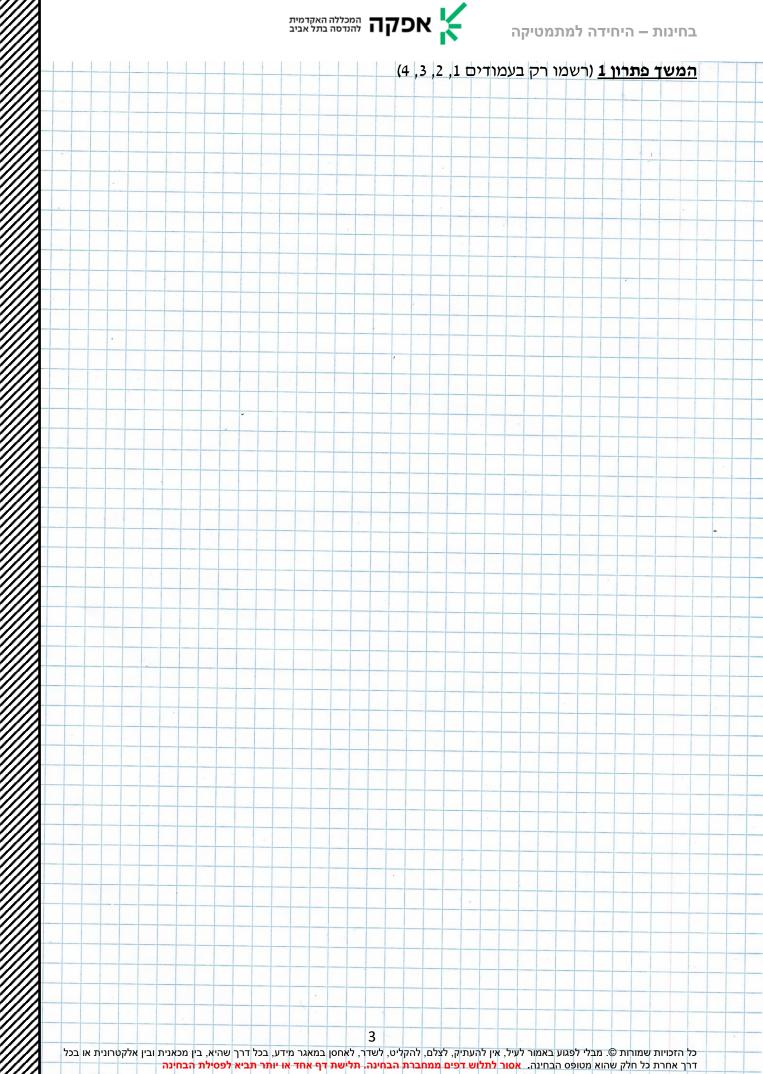


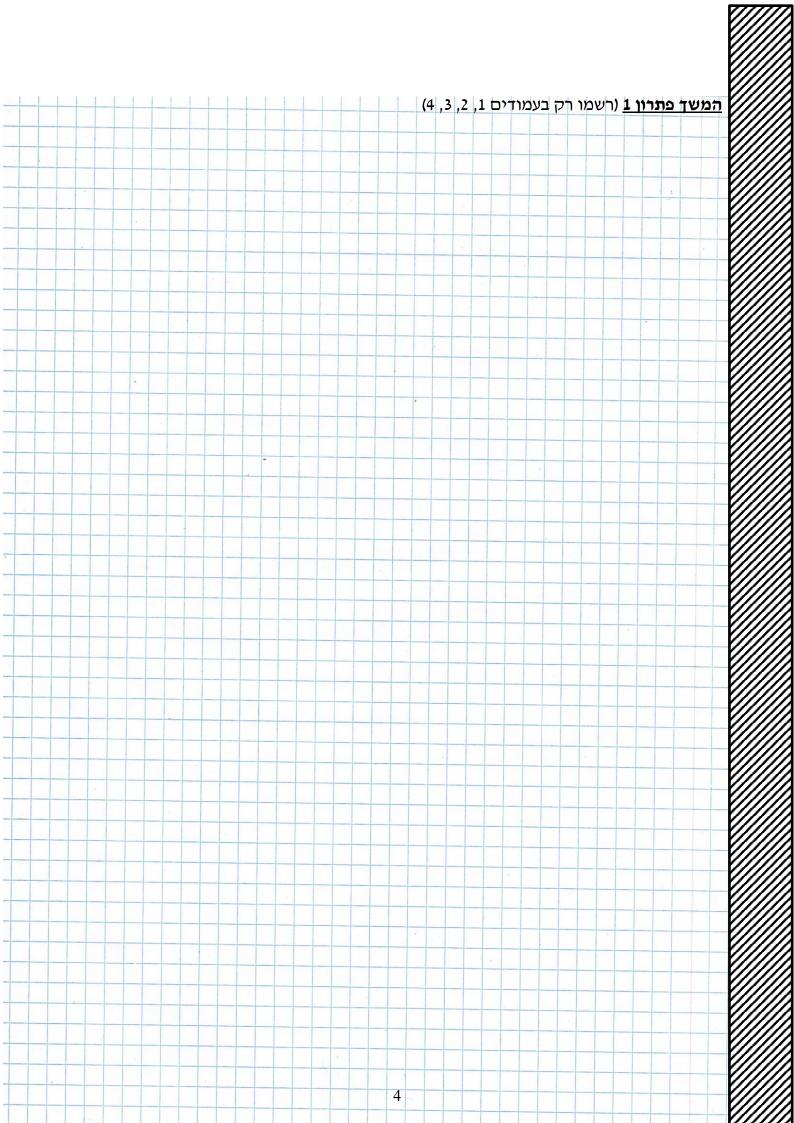


A = (1, 1, 1) מה מוספר האפשרויות לפור 20 לדורים לבנים ב-6 תאים כך שבכל אחד משלושת התאים הראשונים יהיו לכל היפחות 10 כדורים בל תא ובשלושת התאים האחרונים יהי לכל הפחות 10 כדורים בל תא ובשלושת התאים האחרונים יהי יהיו לכל הפחות 10 כדורים $A = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$							t					,	וב׳	'N	ים	יפ	סע	ביון	רו	ש <del>ו</del> ,	7 );	×		<u>()</u>	דות	נקו	20	) 1	<u>. 17</u> !	צאל	<u>,                                     </u>	+
הראשונים יהיו לכל היותר 4 כדורים בכל תא ובשלושת התאים האחרונים יחד יהיו לכל הפחות 10 כדורים . $I$																								+					-			+
.I הציגו את הבעיה באמצעות פונקציה יוצרת. I פתרו את הבעיה באמצעות וווו פתרו את הבעיה באמצעות $A$ חחייע מקבוצה $A$ לקבוצה $B$ כאשר $  A  = n,   B  = m,  m \geq n $	D222	72.10	תאיו	שת ה	משלו זיי לי	וד כ ביר	אר	בכל	י שו	ם כן	איכ	אם 6 ת	ים ני מים	בנים	לו רועו	רינ אנ	בדוו	20	77	ב לפ דור	יות מ	שרו	אפ הנו	יכבר זכבר	מספ	אה נ	היי) כ	בני 12 באניי	<u>')</u>	א		-
I פתרו את הבעיה באמצעות $I$ פתרו את הבעיה באמצעות $I$ פתרו את הבעיה מספר חפונקציות ש <b>איגן</b> חחייע מקבוצה $I$ לקבוצה $I$ כאשר $I$ ב. $I$ ( $I$ נקי) מהו מספר חפונקציות ש <b>איגן</b> חחייע מקבוצה $I$	וויט	טו כו	ווונ		ויו כו		11 17	۔'ن	, , ,,	16×1	, 0,	(43)	1121	101.																		+
$ A =n,   B =m,  m\geq n$											1	1 2					Ť		-												+	+
$ A =n,   B =m,  m\geq n$																															+	+
								ור	באש	В	צה	קבו	לי A	בה ו	ובוצ	מק	וייע	חר	ויכן	שא	יות	קצי	זפר	יר ר	מסמ	הו	י) מ	3 נק	3)	<u>_</u>	+	+
																ı	41-	n	-	$ _{\mathbf{R}} $	- 1	n	m	> n					+	_	-	+
פתרון ( ורשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 3, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 3, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 3, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון ב ורשמו רק בעמודים 1, 4) ( א פתרון 1, 4) ( א																-	Α -	- n,		D		π,	III	211							+	+
																		(4	,:	3 ,2	2,1	. 0	ודי	עמ:	קב	ור	שמ	<u> </u>	<u>1 )</u>	<u>תרו</u>	<u>១</u>	+
																					H							-	-		+	+
																						-							-		+	-
																													+		-	+
																,																-
																													+			-
								-																					-			-
																														-	+	-
	-						T																				-			-	-	-
																												-			-	-
																													+			-
																											_	-	_		-	-
															-													_	_			-
																													_			_
				3										-	+	-		-							-			-	_			
																		-			-								_	_		
														-	+			+								_			-	4		
							, 1						-	-				-	_						_		_			-		
														-	+	-		-						_								
																		-								-						
													-					+						_					_			
														-	-			-						_		_		_				
																		+		-				_	4							
														-	+			4					_					_				
									-						-			-		-												
												-			-				-		-											
									-			+																				
								fi .			-		-		-																	
									-		-		-						-				_									
									-						-	-																
									-	+					-					,												
										-					-											7	4					
													- 1																			
																								14								
		-																														
					-																											





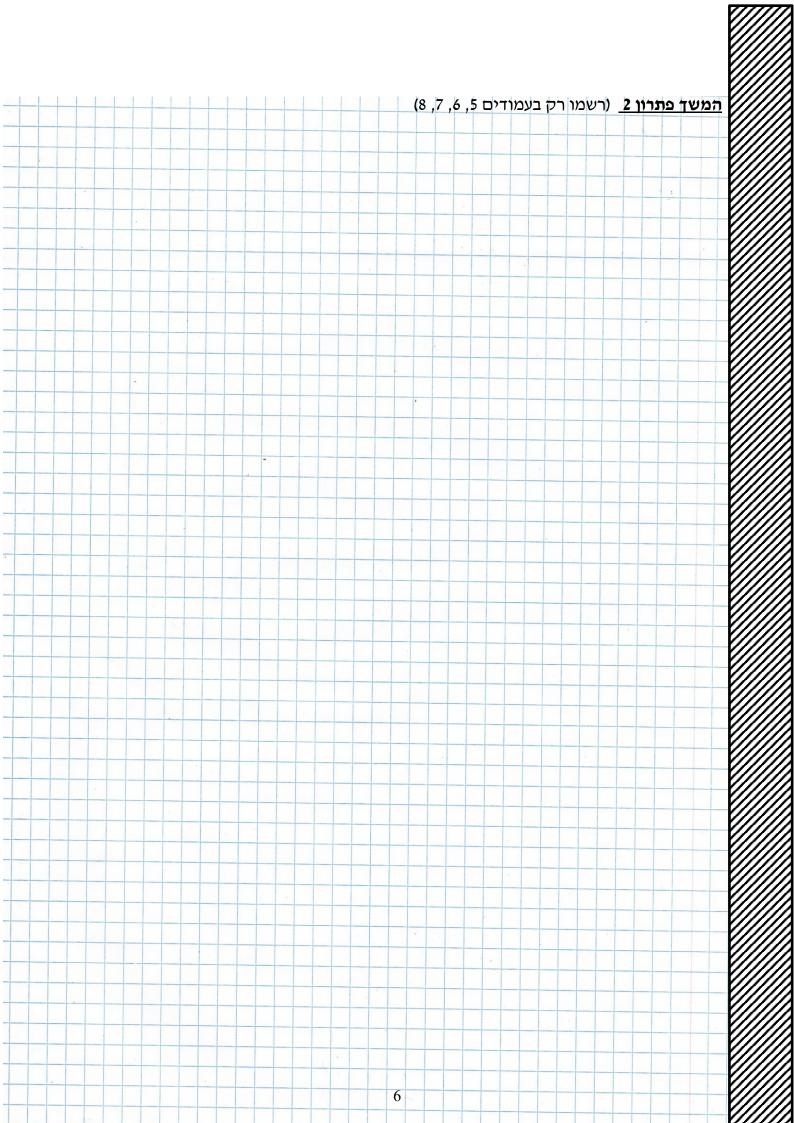




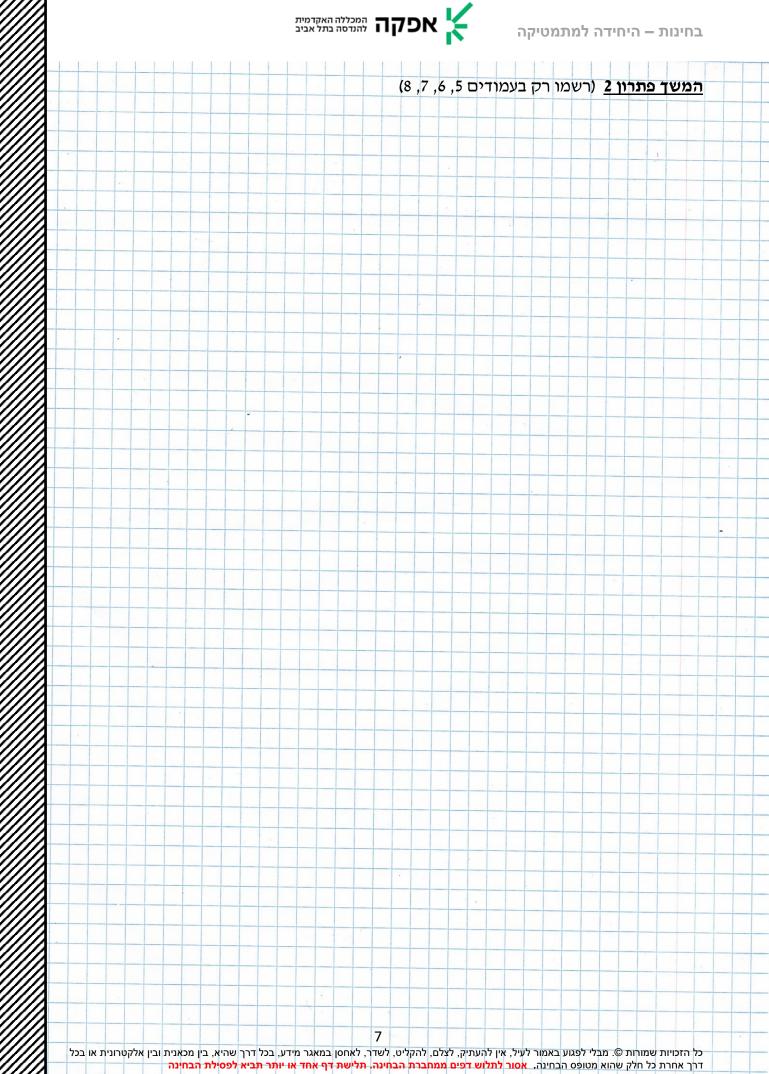


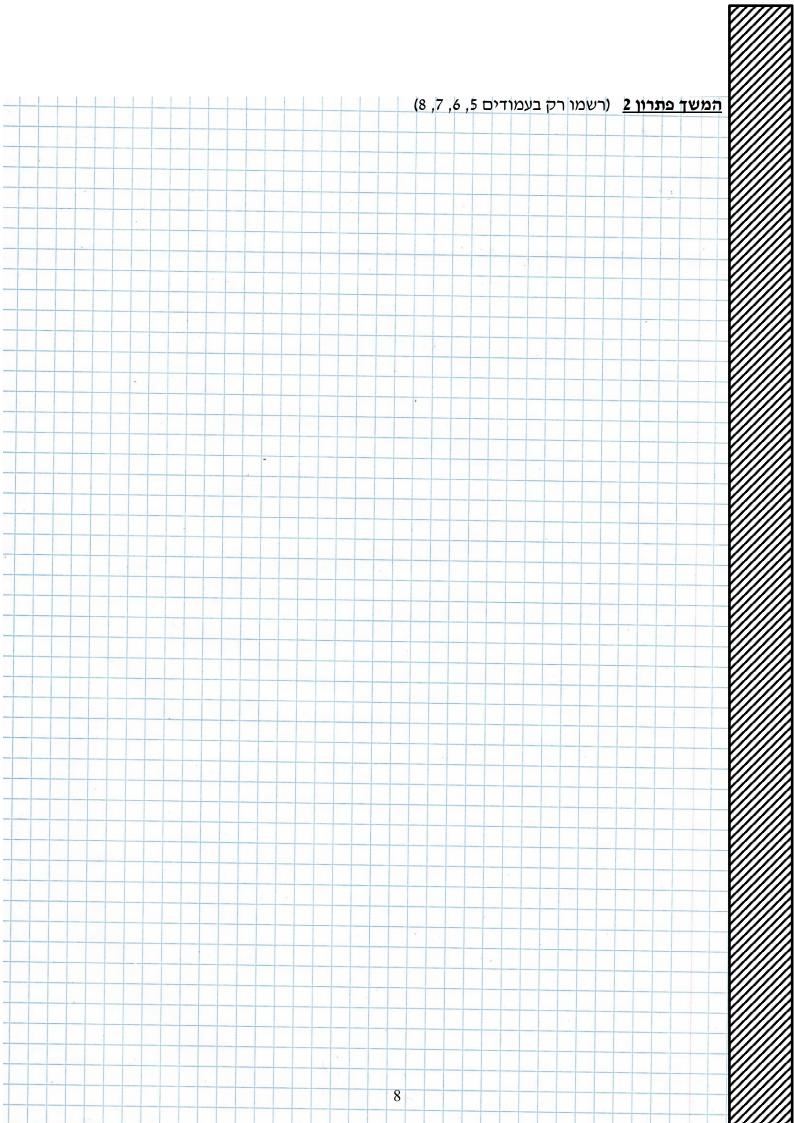
# שאלה 2 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב' $(Aackslash B) \cup (A \cap B) \subseteq A$ מתקיים A,B מתקיים לכל שתי קבוצות (10) . האם בהכרח מתקיים $A \cap B \cup (A \cap B)$ י נמקו ב. (10 נקי) מהו מספר האפשרויות לסדר את האותיות a,b,c,d,e,f,g,h כך שלא יופיע רצף של 6 אותיות עוקבות לפי הסדר האלפביתיי היעורו בעקרון ההכלה וההדחה. <u>פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8) כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל

דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה<mark>. אסור לתלוש דפים ממחברת הבחינה. תלישת דף אחד או יותר תביא לפסילת הבחי</mark>נה



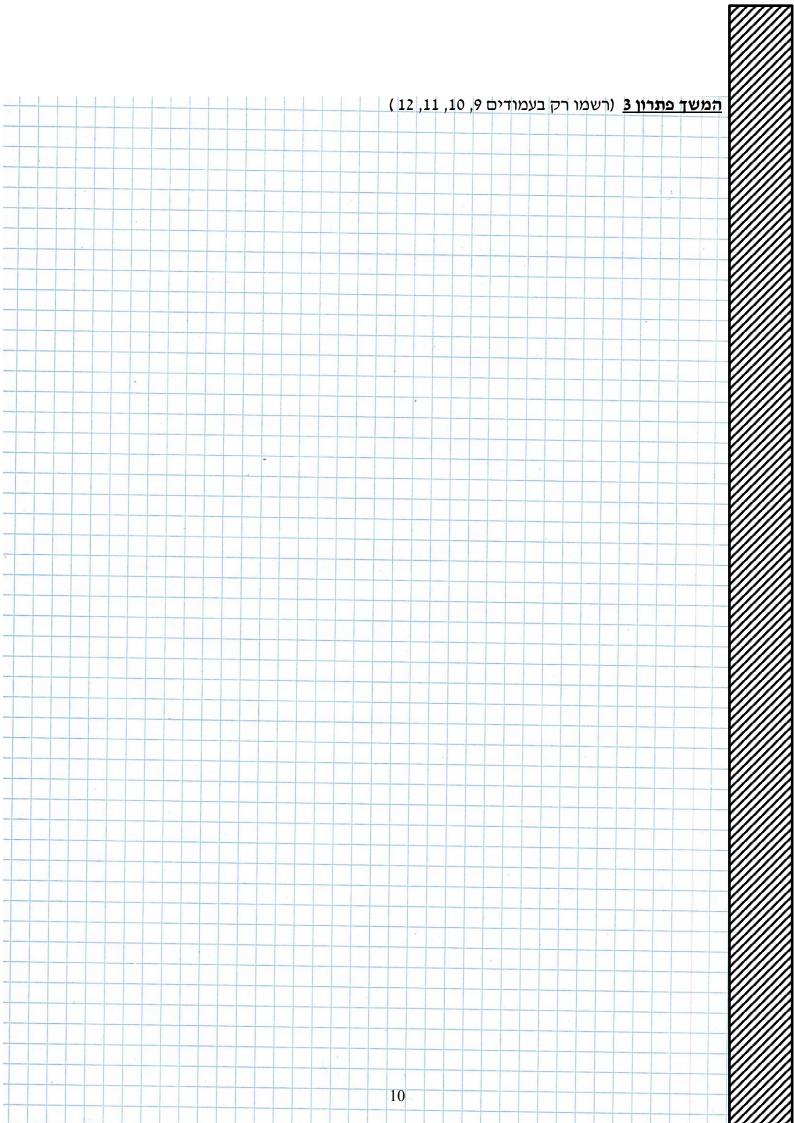






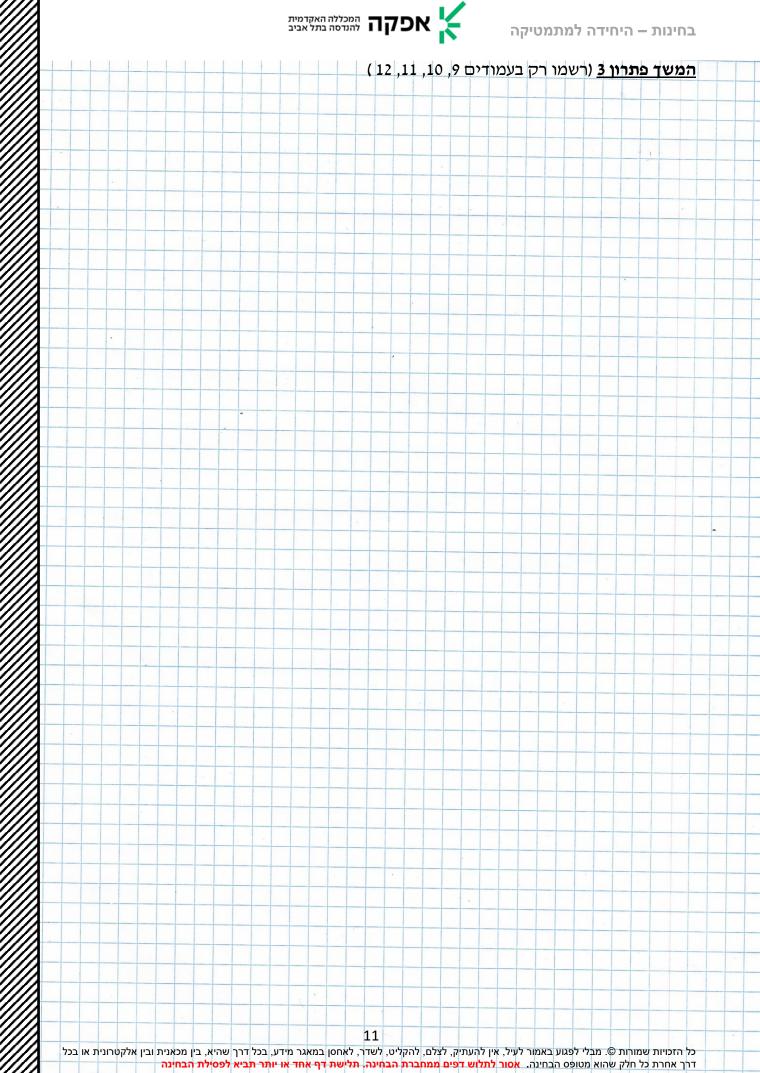


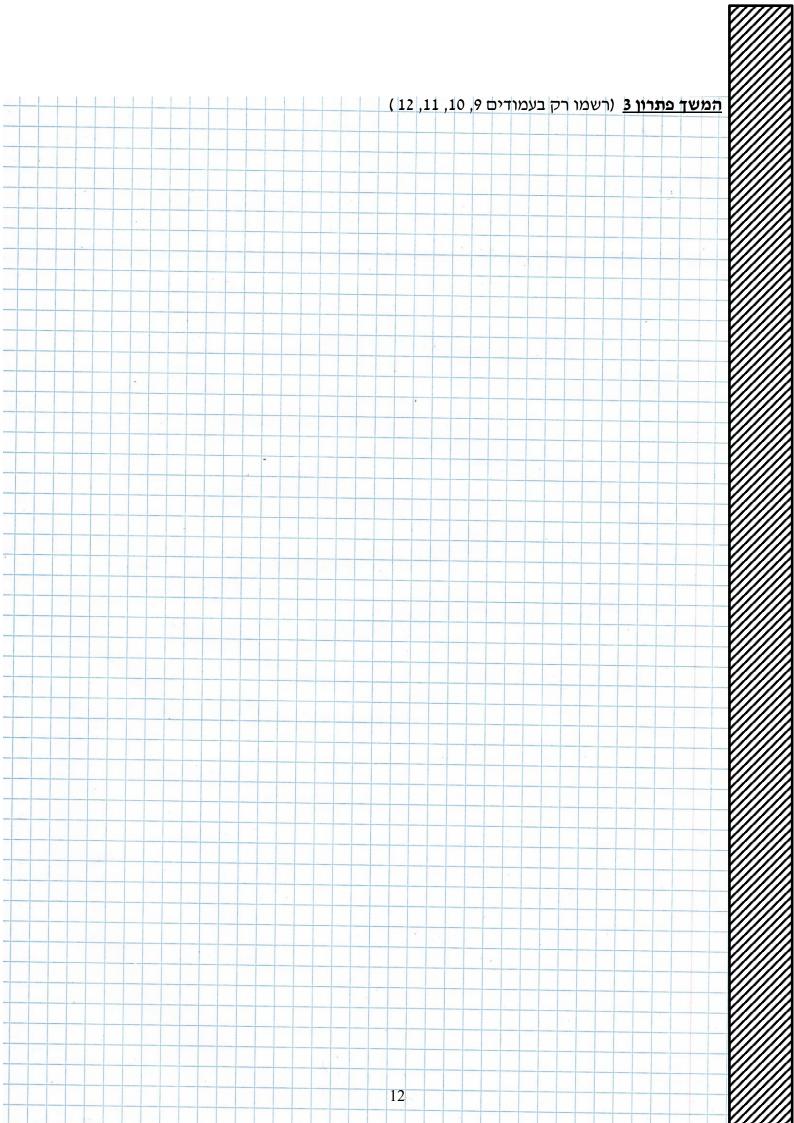
שאלה 3 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב' עבור 2 קבוצות  $A_{\scriptscriptstyle \parallel},A_{\scriptscriptstyle \parallel}$  וקבוצה נוספת B ראינו את חוק הפילוג (10 נקי)  $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ : מתקיים B וקבוצה אוקבור כל  $A_1,A_2,...A_n$  קבוצות אוקבוצה וקבוצה מתקיים  $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$ . ב.  $(P o R) o \left((Q o R) o \left((P ext{$\lor$}Q) o R
ight)
ight)$  הינו טאוטולוגיה. הוכיחו בדרך השלילה כי הפסוק פתרון <u>3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)





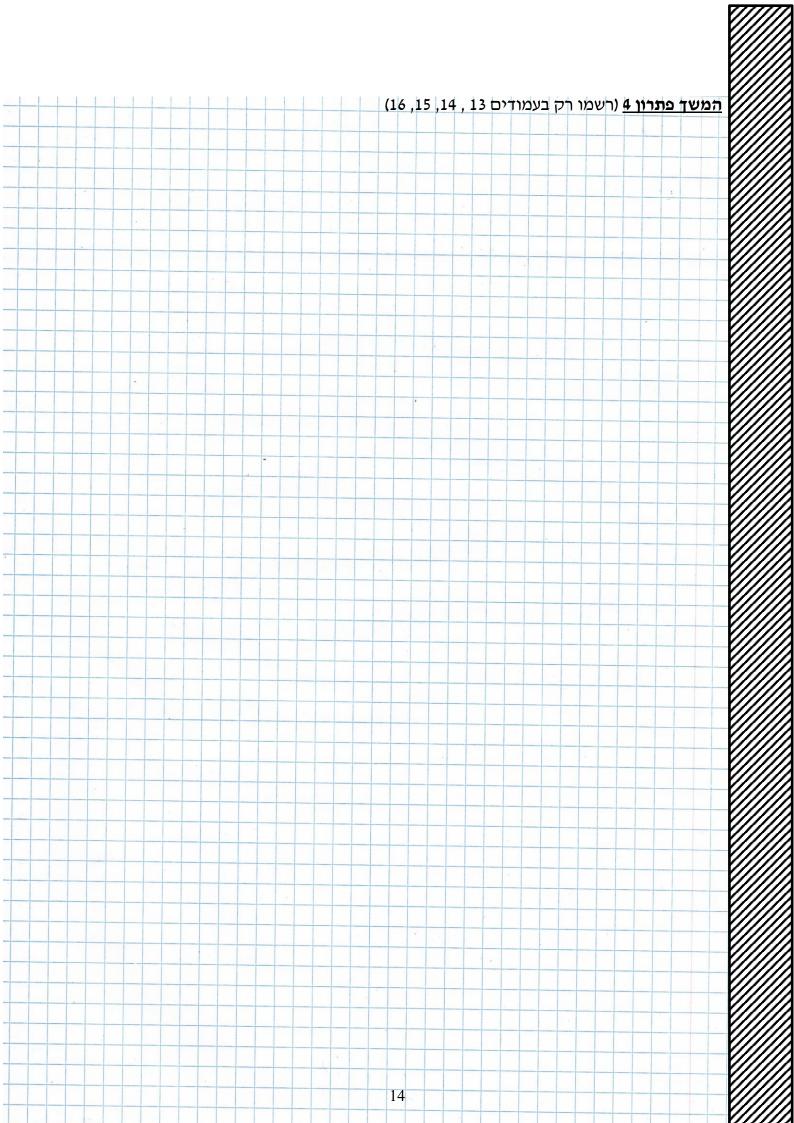






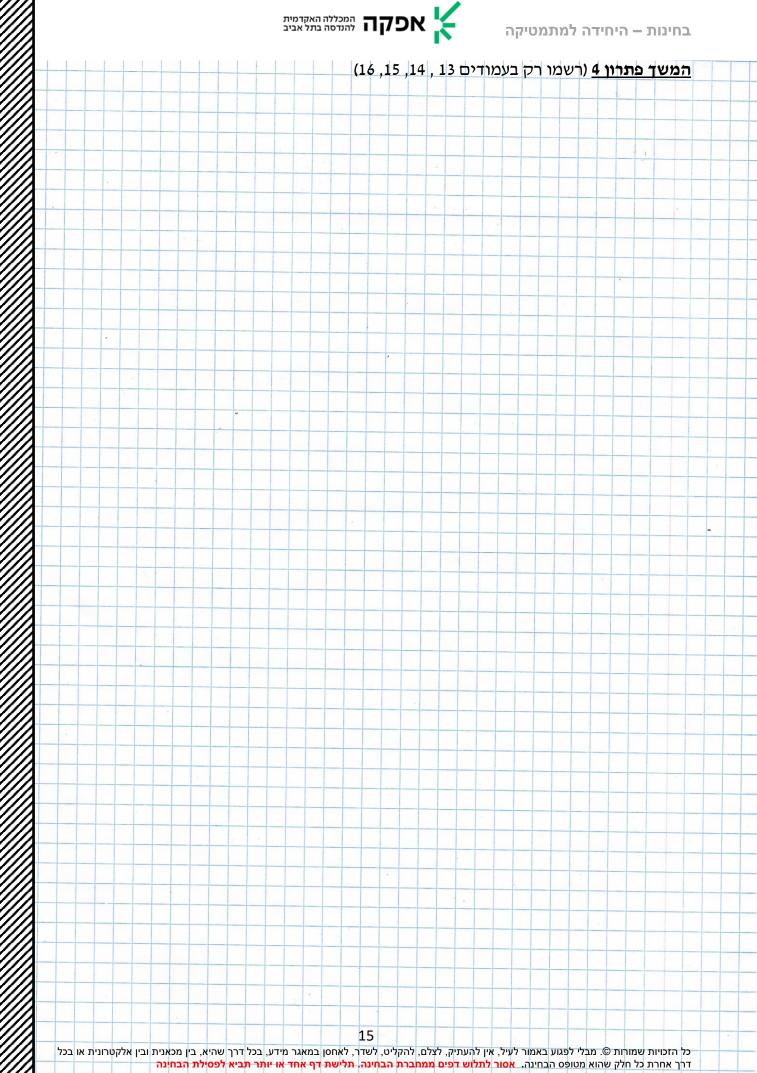


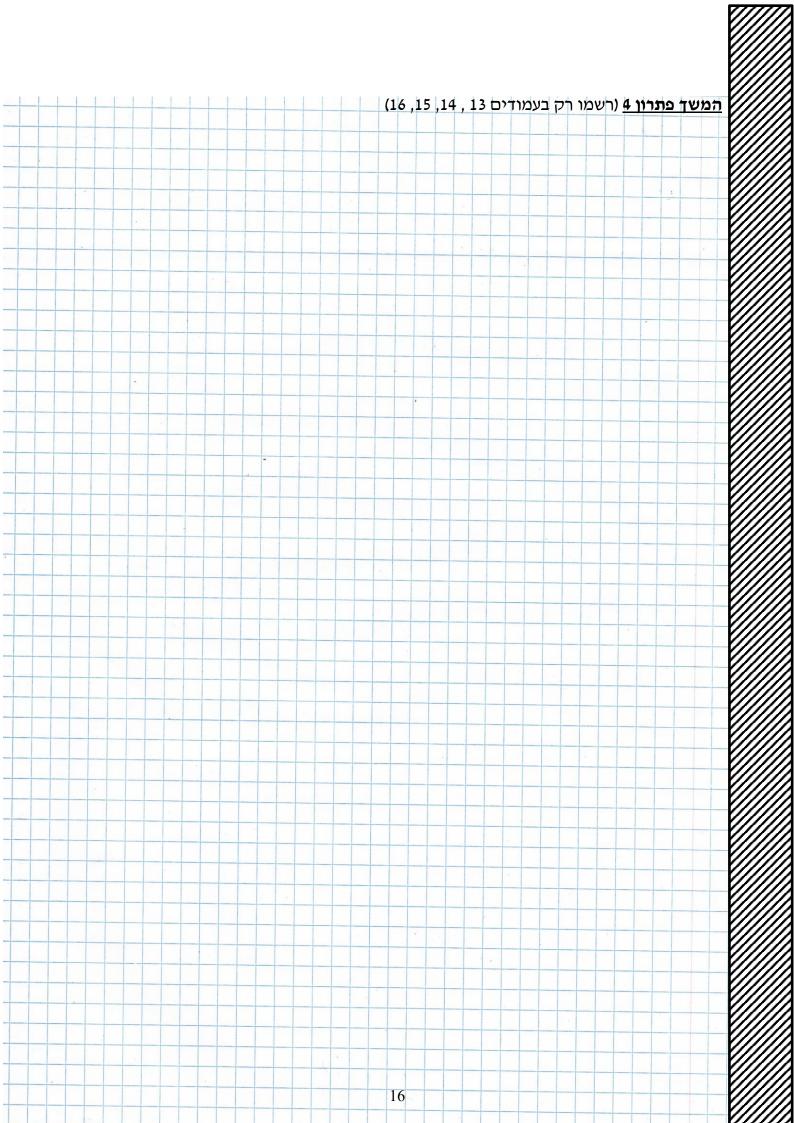
														ובי	אי	0	יפי	סעי	בינו	רו	זש	ין כ	N		(1	דוח	קו	2	0)	4 1	אלה	שא	
-								. []	חסי	, <sub>S</sub>	- 1	$B \times$	C -								-						-					א.	
								T			T																		_	-			
													•	(K	0.7	)	-	$S^{-1}$	o K			נכונ	. הר	אח	רות	ישיו	רוניי	וכי	П		-		-
-															-								-				1			1			_
וללן	ח 1	פרה	וסו	פכל ו	שלנ	ΤÞ	$\{0,$	, 1, 2	} 5	פרוו	והס	ר מ	ליצו	٦٦	שניו	'n	ורך	בא	יזות	חרו	המו	פרו	מסו	את	$\langle a_i$	711	ן ע	:סמ	('ī	1 נכ	.2)	ב.	
	-							-		-		1 -			-																ופיע		
						-				+	1	-					a	$a_2$ i	חלר	הת	י הו	ננא	ת ר	ו וא	זיגר	ל נכ	כל	את	מו	רש	Ţ		
				_		_											17	2				1	1		ת ה								
																									באו באו								
																											,	-					
																		(16	.15	1	4	13	ח	ודי	ทง	ה ר	רי	אמו	ורני	4	ורון	פת	+
												1							,	, -	,				,_,	- 17			- '/		1//-		
			T							+				_																			
							V																			-							
				-						-	-						,																
-																									-								
_																																	
																											-	-		-		_	-
																			-	-								-	-	-			+
								+	+					-					-	-							4		_				
+					-										*				1	_													-
+	-		+	-		-	-	-	+																								
+	-		+	_		-	-																										
_			-																									-					
																-																	
																											T				1		-
								1																1	_		1						+
																							_		+		+	+	-	+		_	+
							1		T						+					-	-		-	+	-	+			-				-
						1			+						-						-		-		_		-		-	_	_		_
+			+	+			+		-					-	-	-				-	_	_			_								1
			+		+		+		-					-		-			_	4				_									
+			+	+		-	-		-					_																			
-	-		-			-	-																										
							47																										
																																	T
									1	-																							-
																								-					-	-			-
														1						+						-		+	-	_			-
														-		-	+	-		+	-		-					_					-
			-		-																												
+					-	-										-											7.						
+				-										74																			
+																									-		-						T
																														-			
						1.										-				+		+		-					-		-		
														-	1	2						-						-					-
			-		נית ונ	-										J	- 1						1										





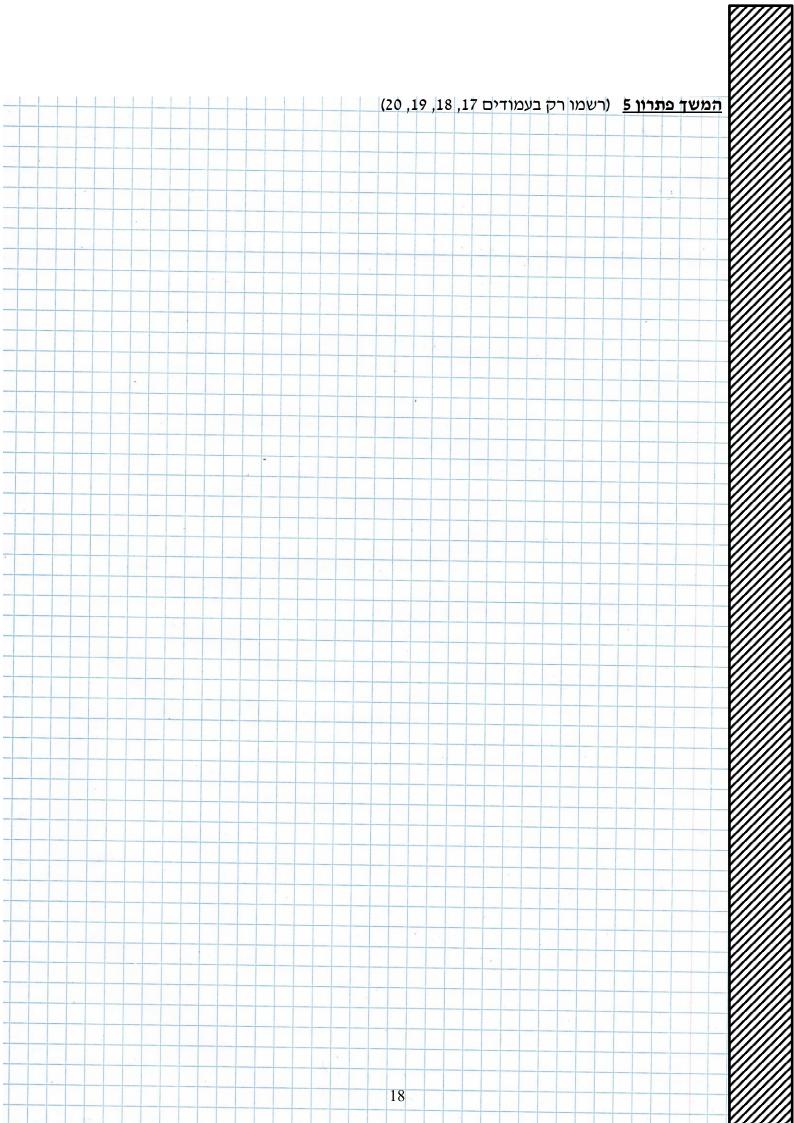






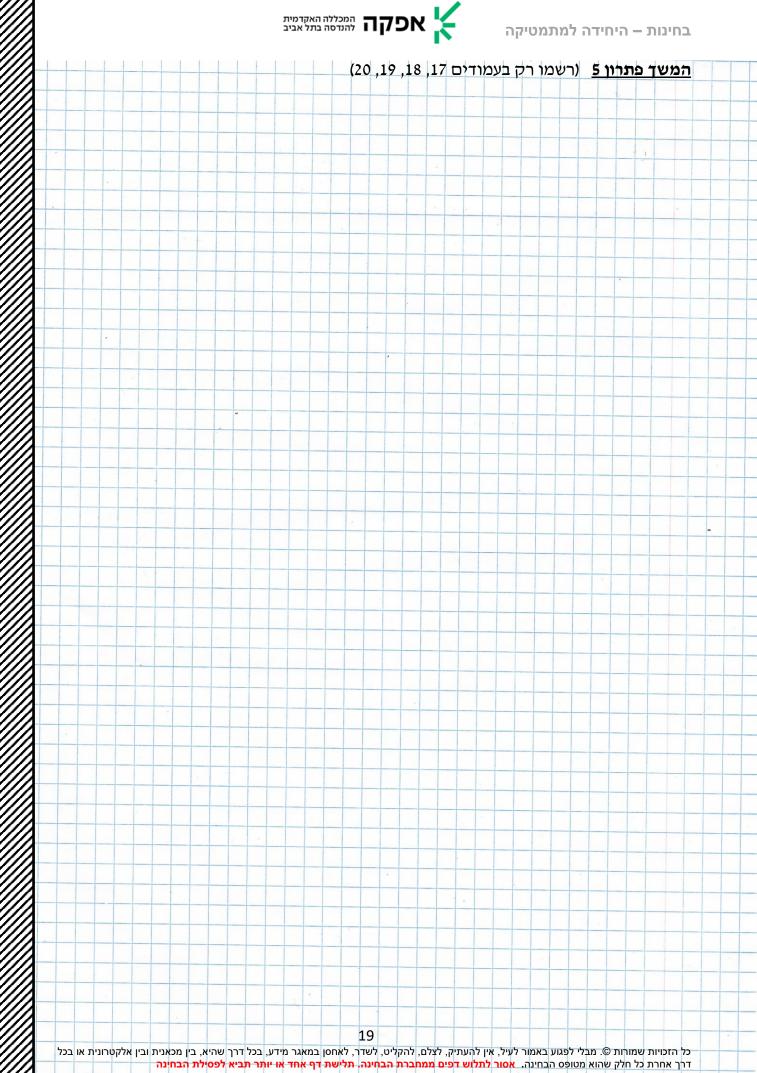


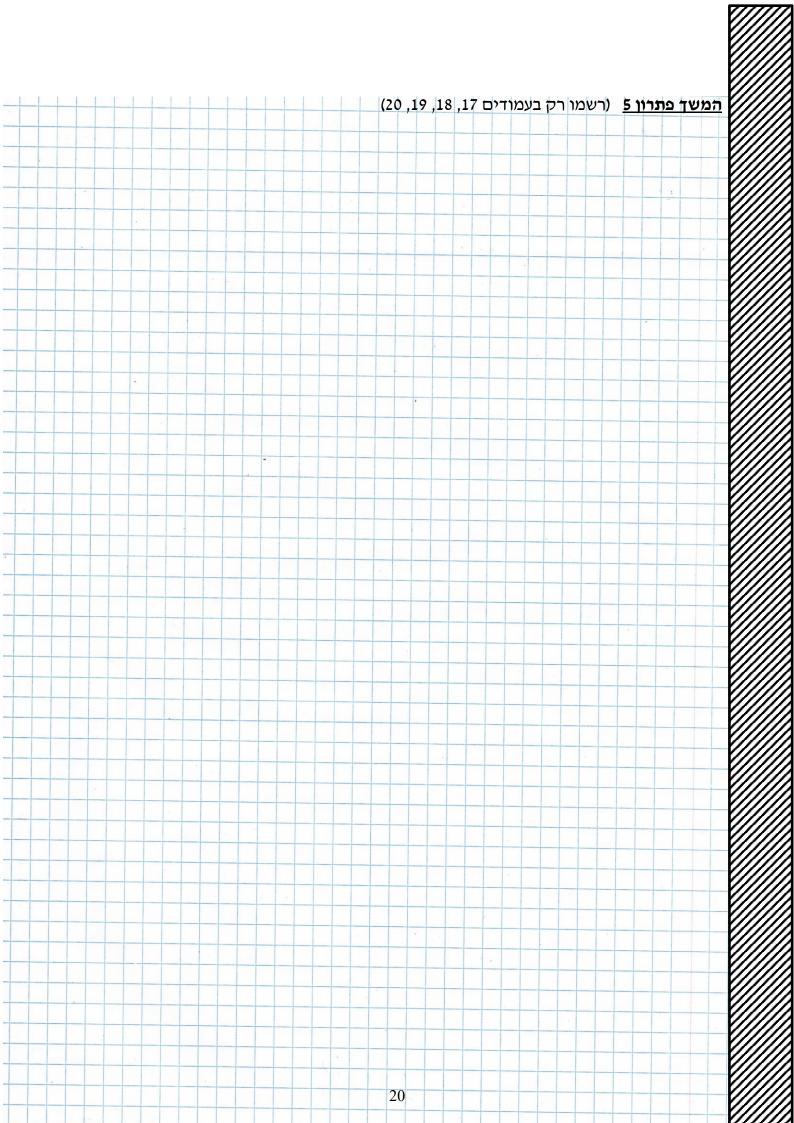
																											Ĺ				אלה	ń
												. (	0 2	ללא	ים	בעי	הטו	ים	זפר	זמכ	כל ו	מ כ	ובוצ	ת ק	ĸΝ	1-:	אן ב	נסנ	קי)	1 ני	0)	א.
	_ D	לקי	מחי	ה -	ספו	ת מי	היו	d	(n)	ת	ר א																					6
																												.n		ים	בעיי	הט
	2	2 7	א רי	y> 5	5	בי ל	, a	l(5)	= 2	2 γ	מוכ	٠. د	1, 2	, 3,	6 :	יים	זלק	מו	4 x	י רע	6 -	ל -	, c <sup>ر</sup>	$d(\epsilon$	j) =	4	של	למ		1		
																T													1,5	: 🗅	לקי	מח
								T		T									1	-	יחי	יררי	יד נ	<b>1</b> – <b>*</b>	tn	d t	זאר		,-			
										T												1		A second				1				
														-							-	-						• • • •				
. R	={(	1,1	),(1	,3)	,(2	2,1),	(2,	2),	(2,	3),	(3,3	3),(	4,3	3),(	4,4	4)}	סר	ין יו	נתו	A:	= {	1, 2	.3.4	4} i	וצו	וקב זקב	ל ר	מע	(קי	1 ני	0)	ב.
	התא													_	-	+ -	-	-	-	-	-		-	1								
-0,	ווונא.	1 /	1 )	U L	, ۱۱۰	רבוו	ונוכ	ט ונ	וכיו	ניני	ווכוי	,	11,	CX I I	נכל	210	( 12	دري.	IA	נכ	בזע	110	וט כ	1 <sup>1</sup> I	\ '.	וו כ	ביו		ו הז	חם	לי	
		T			? Dî	– מר	- כן	אם	ר?	יות	ול ב	זגד	בר ו	איו	ם ה	, קייו	ום ל	הא	? 72	יוח:	ון ב	זקכ	ברו	זאיו	ם ו	קיי	אם			,		
								-		-						Ė			-										_			
										-						-	,													-		
					+												()	20	,19	,1	8,	17	יים	מוד	בעו	ק'	וו ר	שכ	(ר	5	נרון	20
		-		-	-	-	-																									
		-	-	-		-			-																-							
			-																				*			-						
					-	-		-																								
-		-	+	-	-																											
-		-	-	-	+																											
			-	_	-																											
				1	_																											
_				-																												
				1																					7			-				
																														-		-
																											1	寸			-	-
																									+	+	-	+			-	
																												+		+	- 1	
															7										-	-	-		+	+	-	
																									+				-	+	_	
																									+							
														-											-							
														-														-				
								- 1				-							-						-							-
															-	-			-											_		
															+				-	-					+			1	-	1		
																	-	-	-	-										1		
									6	-		-				-		+	-	-										_		
														-	-																	
														-																		
					-																*											
-																-											7.	4				
-								_						-																		
-																									-							
		-																														
												1				1															-	-





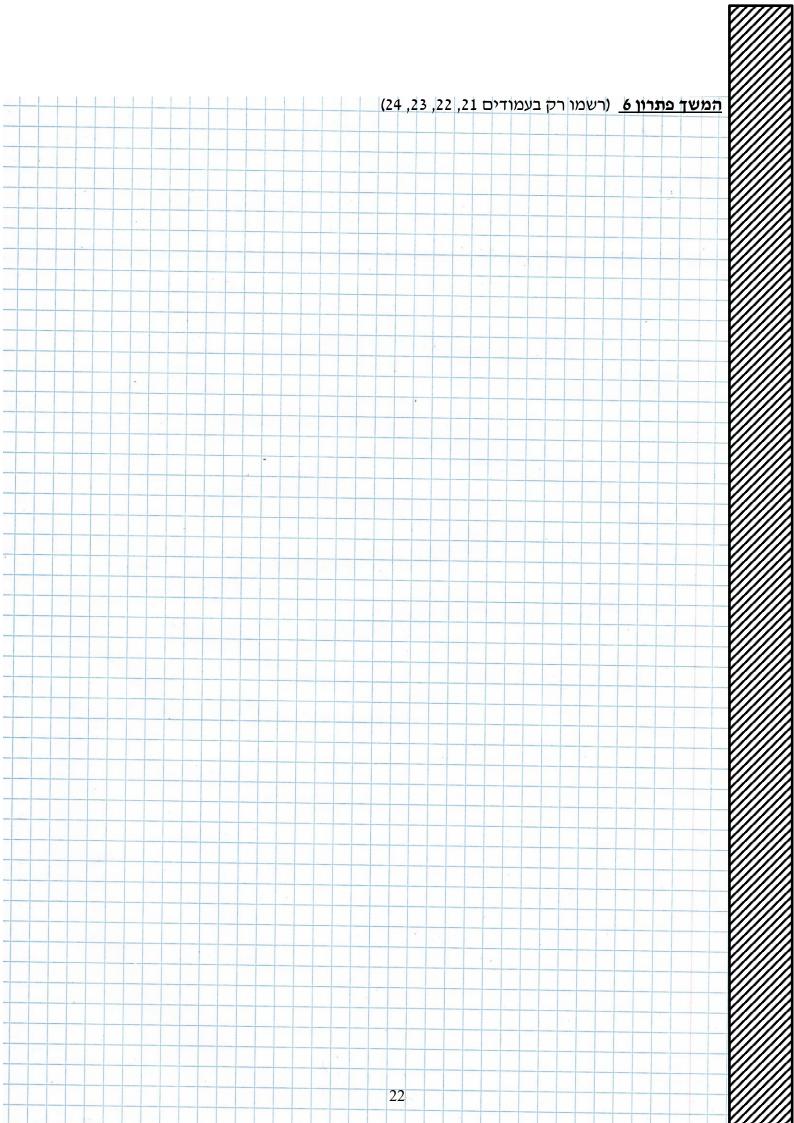






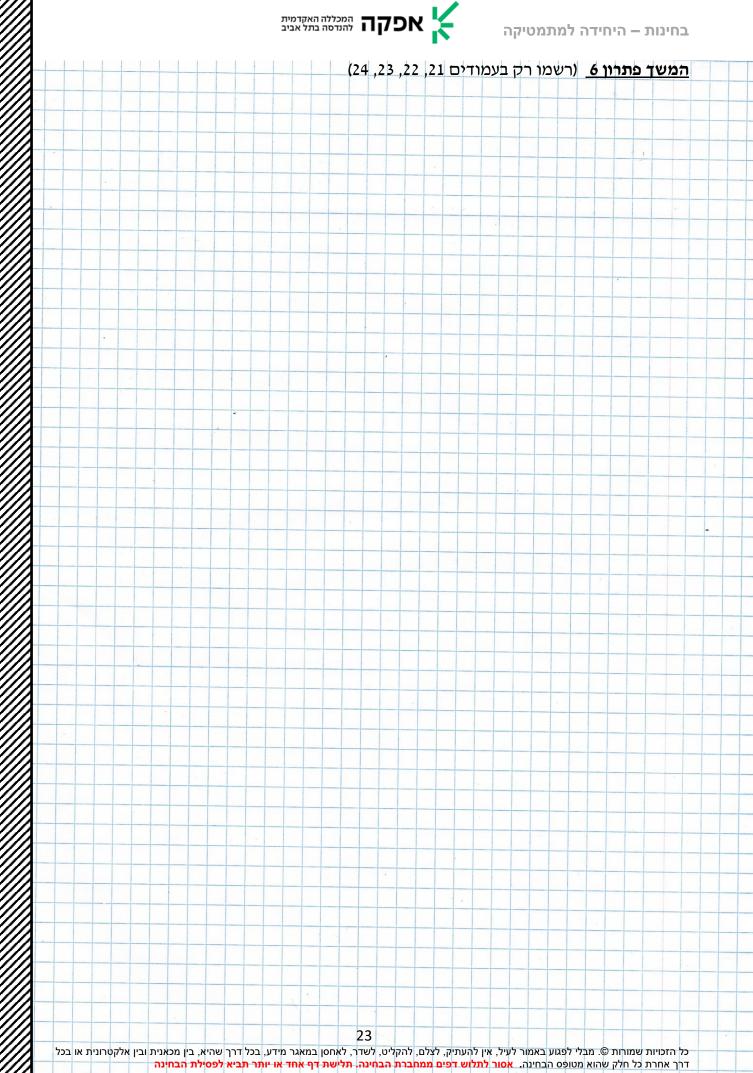


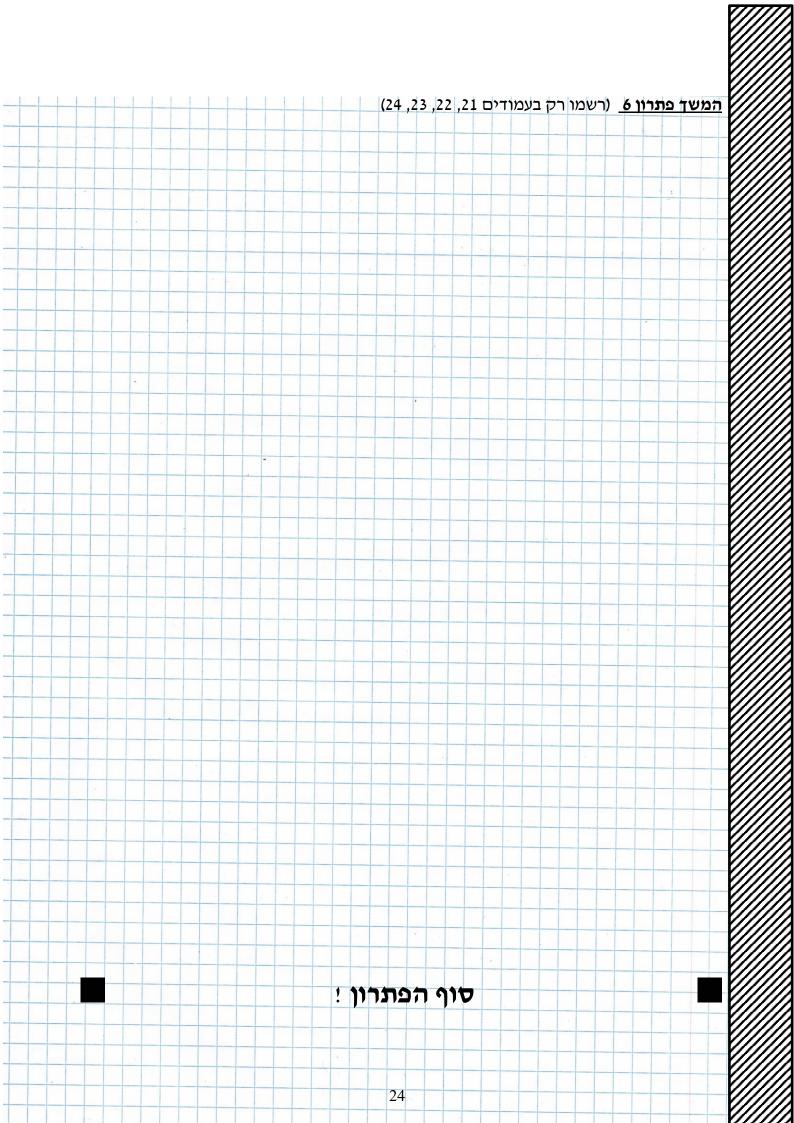
															/ 11/	טע	1/	<u> </u>	را ب	1/2			1/3	,,,,	1/2	-	<del>"</del>	0 1	אלר	.0	
												,45	731		33 h	_	<b>N</b> 1 1		(h)	) 🗸	41_	11	ıl			_ T	-	(1-)	12)	<b>N</b>	
																								الع	K I	11.1	+	נכןי	12)	۸.	
																		עוצו							+	-	-		-		
																		יש:										1 1	-		
	בעי.	ιυ k	, d	eg(	$(v_i)$	= k		קיי	מתי	+	$V_i \in$	$\mathbf{V}$	TI	フゴ						1								קי)	( 8 נ	ב.	
		-		-			-					-	-	+	1	תי	לעו	7 צי	נעל	רי ב	גול	7-3	97	ם ג	קיי	אם	ťΠ				
									.7	כזו	רף	ם ג	קיי	לא	מה	רו ל	ביו	הס	לא,	70	ה. א	למו	ירו	סב	ן, ה	<b>&gt;</b> 🗆	או				
				-						-						(2.4															
		_														(24	, 2	3,	22	,21	ים	ודי	עמ:	1 1-	רי	שכמו	רי,	6	רון	<u>פת</u>	
																											*				
										1														1							
																											-				
															,												-	-			
																											-				
								The second																			_				
							-						-																		
						-					-	-		-				-			-			-							
												-			-			-													
						-					-	-	-																		
+-		-										-																			
-					-																										
																										-					
																-															
																											1000	2-2			+
																															+
																							-							-	-
				T																											-
																															-
			-																	-					-						4
						1		-													-	-	_								_
				+	-								1										-							1	
						(+				444																					
							+	-																							
							-	-																							
																				.5											
						1		100																							T
																															T
																									1						Ť
																			,												+
																									7						+
												14														+					+
																	1					+				-	-				+
																	-								-		-			- 18	
																						-					-				
				+				-		1	1		-					-		-		-									-
1 1										- 1				- 1	- 1																





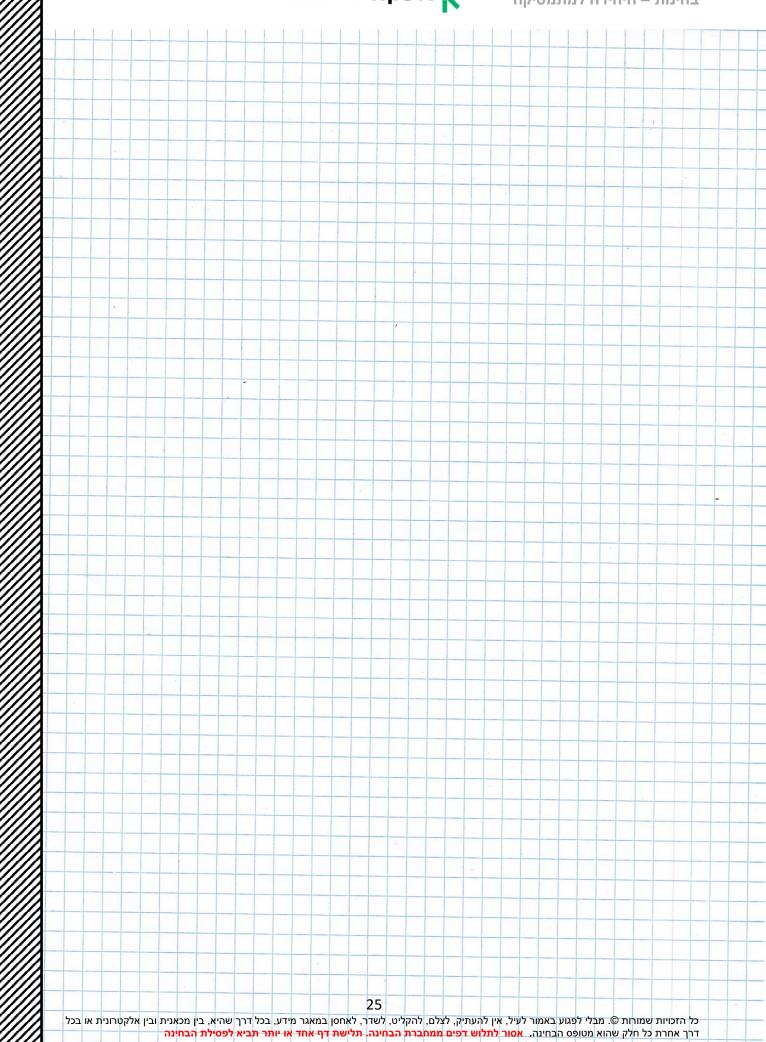


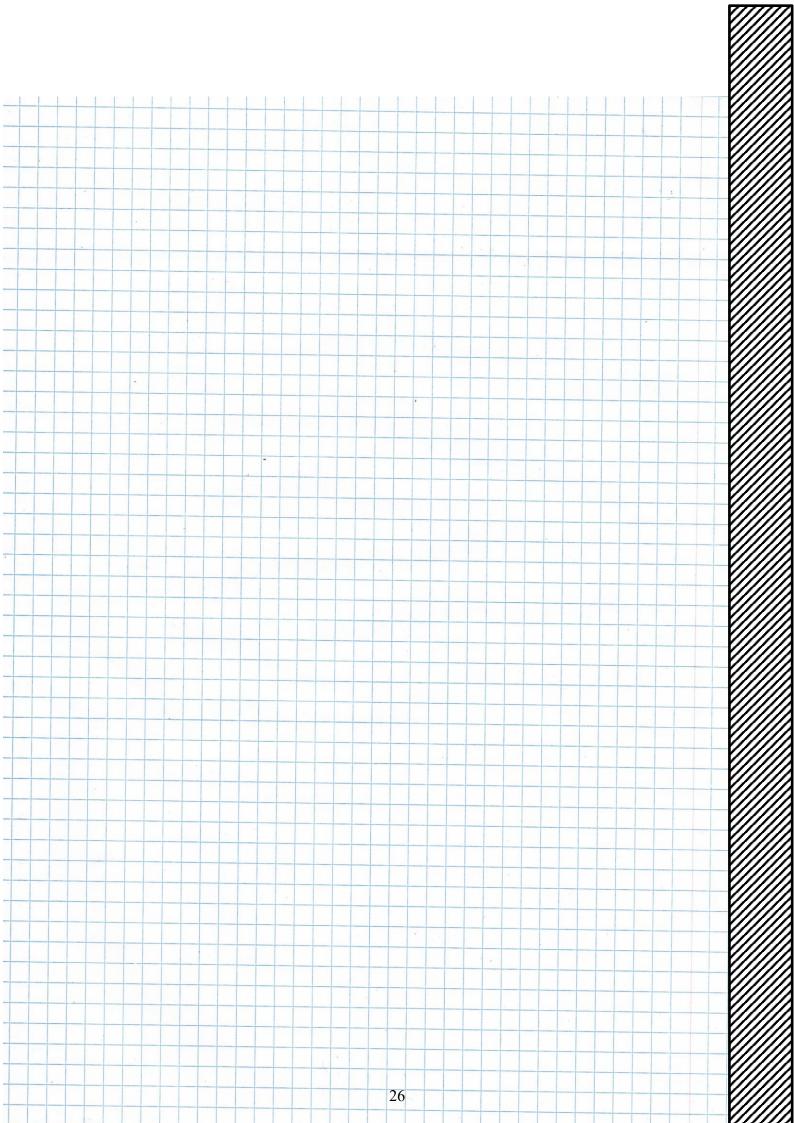






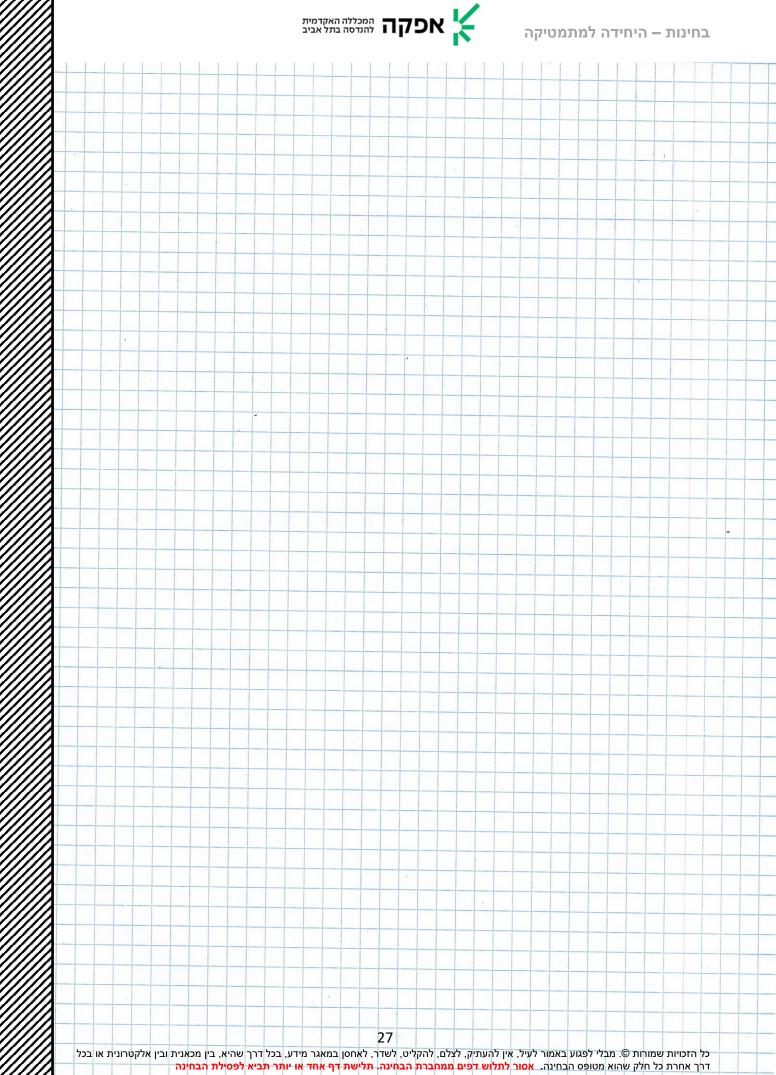


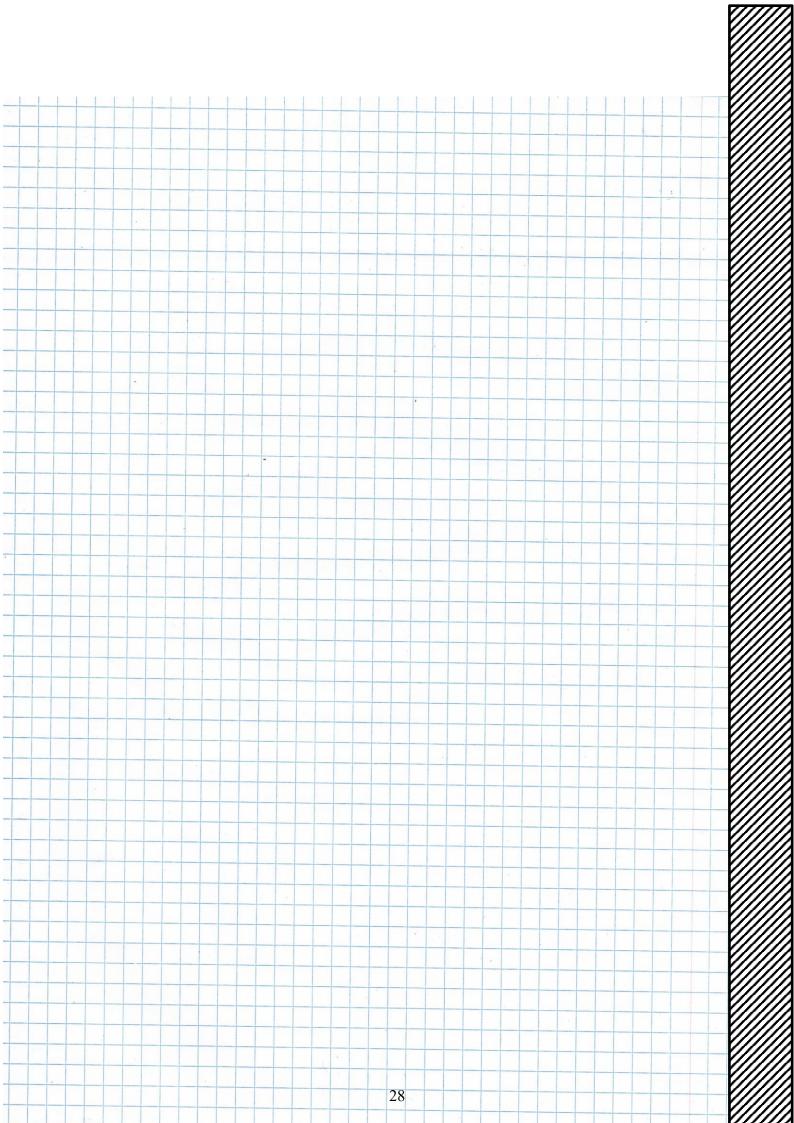












# Y פתרון שאלון

# שאלה 1 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'

- א. ( 12 נקי) מה מספר האפשרויות לפזר 20 כדורים לבנים ב-6 תאים כך שבכל אחד משלושת התאים הראשונים יהיו לכל היותר 4 כדורים בכל תא ובשלושת התאים האחרונים יחד יהיו לכל הפחות 10 כדורים?
  - .I הציגו את הבעיה באמצעות פונקציה יוצרת.
    - II. פתרו את הבעיה באמצעות
  - ב. (8) מהו מספר הפונקציות שאינן חחייע מקבוצה B לקבוצה B כאשר

$$|A|=n, \quad |B|=m, \quad m\geq n$$

### פתרון שאלה 1

 $D(3,10) = \binom{12}{2}$ א. ראשית נשים 10 כדורים בשלושת התאים האחרונים. מספר האפשרויות לפיזור כזה הוא

 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$  : שנית, נחשב את מספר הפתרונות הטבעיים למשוואה

 $x_i \le 4$ , i = 1, 2, 3 : תחת האילוצים

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right)^3 \cdot \left(1 + x + x^2 + \cdots\right)^3 = \left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{1 - x}\right)^3 :$$
הפונקציה היוצרת תהיה

 $f(x) = \left(1 - 3x^5 + 3x^{10} - x^{15}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} D(6,k) x^k$  בפונקציה:  $x^{10}$  בפונקציה

$$D(6,10) - 3D(6,5) + 3D(6,0) = {15 \choose 5} - 3 \cdot {10 \choose 5} + 3 \cdot {5 \choose 5}$$
 הוא

$$\left( \binom{15}{5} - 3 \cdot \binom{10}{5} + 3 \cdot \binom{5}{5} \right) \cdot \binom{12}{2}$$
 : מספר הסידורים האפשריים

 $m^n$  ב. סך הפונקציות מ-A ל-B

B-ל A כחשב את מספר הפונקציות שהן חחע מ

נבחר את קבוצת אברי הטווח ונכפול בסידורים הפנימיים כדי לקבל את כל הפונקציות לטווח זה נבחר את הבוצת אברי הטווח ו

$$\binom{m}{n} \cdot n!$$
 ומספר הפונקציות החחייע:

$$m^n - \binom{m}{n} \cdot n!$$
 התשובה היא

# שאלה 2 ( 20 נקודות ) אין קשר בין סעיפים א' וב'

- $A(A \setminus B) \cup (A \cap B) \subseteq A$  מתקיים A,B מתקיים לכל שתי לכל אוני ווניחו כי לכל אוני ווניחו האם בהכרח מתקיים  $A(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$
- ב. (10 נקי) מהו מספר האפשרויות לסדר את האותיות a,b,c,d,e,f,g,h כך שלא יופיע רצף של 6 אותיות עוקבות לפי הסדר האלפביתי! לפי הסדר האלפביתי! היעזרו בעקרון ההכלה וההדחה.

### פתרון שאלה 2

x
otin A-yא. נניח בשלילה כי ההכלה לא מתקיימת, כלומר קיים  $(A\cap B)\cup (A\cap B)$ , כך ש

מההנחה נובע כי  $x\in A\land B$  או  $x\in A\land B$ , כלומר  $x\in A\land x\notin B$  מההנחה נובע כי  $x\in A\land B$  או  $x\in A\land B$ , כלומר  $x\in A\land B$ , כלומר  $x\in A\land B$ , קיבלנו סתירה, לכן ההנחה אינה נכונה וההכלה כן מתקיימת.  $x\in A\land C$ 

 $A \setminus B \cup (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\overline{B} \cup B) = A \cap U = A$ השוויון מתקיים כי

|U|=8! את קבוצת כל אפשרויות הסידור של 8 האותיות אז U - ב.

מופיע. abcdef מופיע ב את אפשרויות הסידור של את אפשרויות מסידור את אפשרויות מסידור את  $A_{\scriptscriptstyle 1}$ 

מופיע. bcdefg מופיע אחתיות פך אחתיות אפשרויות אפשרויות אסידור של אחתיות ב $A_2$ 

מופיע. cdefgh נסמן ב $A_3$  את אפשרויות הסידור של

: אז מספר הסידורים של האותיות כך שאין 6 אותיות עוקבות ברצף הוא

: ולפי עקרון וההכלה וההדחה וחשב את  $\left|A_{_{\! 1}}^{\ C} \cup A_{_{\! 2}}^{\ C} \cup A_{_{\! 3}}^{\ C} 
ight|$ 

$$\begin{aligned} & \left| A_1^{\ C} \cup A_2^{\ C} \cup A_3^{\ C} \right| = \\ & \left| U \right| - \left( \left| A_1 \right| + \left| A_2 \right| + \left| A_3 \right| \right) + \left( \left| A_1 \cap A_2 \right| + \left| A_1 \cap A_3 \right| + \left| A_2 \cap A_3 \right| \right) - \left| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \right| \end{aligned}$$

מספר האפשרויות מספר האריות מספר מופיע. לכן, נתייחס אליו כאות מחת מספר מופיע. לכן, נתייחס אליו מספר האריות מספר האפשרויות g h abcdef : "אותיותיי מספר אותיותיי  $|A_1|=3!$  באופן דומה:  $|A_2|=3!$ 

. מופיע נתייחס אליו מbcdefg הרצף הרצף abcdefg הרצף  $\left|A_{\rm l} \cap A_2\right| = 2!$ 

abcdefgh מופיע וגם הרצף abcdef מופיע מופיע מופיע abcdef הרצף אהרצף  $\left|A_{1} \cap A_{3}\right| = 1!$ 

bcdefgh מופיע וגם הרצף bcdefg מופיע הרצף bcdefg הרצף  $|A_2 \cap A_3| = 2!$ 

. כל האותיות מופיעות ברצף  $\left|A_{1} \cap A_{2} \cap A_{3}\right| = 1! = 1$ 

$$|A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C| = |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8! - (3! + 3! + 3!) + (2! + 1! + 2!) - 1! = 40306$$

# שאלה 3 ( 20 נקודות ) אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. א חוק את חוק ראינו מוספת B וקבוצה וחקה את חוק הפילוג (10 נקי) עבור 2 קבוצות את חוק הפילוג

$$(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$$

: מתקיים B מתקיים אינדוקציה כי עבור כל  $n \geq 2$ , קבוצות  $A_1, A_2, ... A_n$ 

$$(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$$

. ב.  $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \lor Q) \to R))$  הינו טאוטולוגיה. הפסוק הוכיחו בדרך השלילה כי הפסוק

### פתרון שאלה 3

א. בסיס האינדוקציה: עבור 2+1 קבוצות חוק הפילוג מתקיים.

### צעד האינדוקציה:

:B אוקבוצה (נניח כי הטענה נכונה עבור ת קבוצות האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור האינדוקציה: ווקבוצה

$$(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$$

. B קבוצה  $A_1,A_2,...,A_n,A_{n+1}$  קבוצות ח+1 וקבוצה מוכיח את נוכיח את נוכיח

:כלומר יש להוכיח ש

$$(A_{1} \cup A_{2} \cup ... \cup A_{n} \cup A_{n+1}) \cap B = (A_{1} \cap B) \cup (A_{2} \cap B) \cup ... \cup (A_{n} \cap B) \cup (A_{n+1} \cap B)$$

$$((A_{1} \cup A_{2} \cup \cdots \cup A_{n} \cup A_{n+1}) \cap B) = ((A_{1} \cup A_{2} \cup \cdots \cup A_{n}) \cup A_{n+1}) \cap B)$$

$$= ((A_{1} \cup A_{2} \cup \cdots \cup A_{n}) \cap B) \cup (A_{n+1} \cap B)$$

$$= (A_{1} \cap B) \cup (A_{2} \cap B) \cup .... \cup (A_{n} \cap B) \cup (A_{n+1} \cap B)$$

### נימוקים:

שלב ראשון – אסוציאטיביות האיחוד

 $A_{n+1}$  -ו $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ קבוצות 2 שלב שני-שימוש בפילוג של

שלב שלישי- הנחת האינדוקציה

 $n \geq 2$  טבעי, מסקנה: לכן, הטענה נכונה לכל n מסקנה:

- ב. נניח בשלילה כי הפסוק  $(P \to R) \to ((P \lor Q) \to R)$  אינו טאוטולוגיה, ב. נניח בשלילה כי הפסוק P,Q,Q,R, כך שעבורם
  - (1) אמיתי  $P \rightarrow R$
  - (2) שקרי  $(Q \to R) \to ((P \lor Q) \to R)$

מ – (2) וערך אמת של גרירה מקבלים כי

- (3) אמיתי  $O \rightarrow R$
- (4) שקרי  $(P \lor Q) \to R$
- מ (4) וערך אמת של גרירה מקבלים כי
- אמיתי (5) אמיתי  $P \lor Q$
- (6) שקרי R
- (7) שקרי P שקרי (1) וערך אמת של גרירה מקבלים כי
- (8) שקרי Q שקרי Q שקרי (5) וערך אמת של גרירה מקבלים כי Q .
- מ (7) (8) וערך אמת של "או"  $P \vee Q$  שקרי פסתירה ל (5).

זה מראה כי ההנחה שהפסוק אינו טאוטולוגיה אינה נכונה, משמע הפסוק כן טאוטולוגיה.

# שאלה 4 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'

. יחסים  $S \subseteq B \times C - 1$   $R \subseteq A \times B$  יחסים שלוש קבוצות אינה  $A, \overline{B, C}$  יחסים.

.  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$  : הוכיחו את התכונה

- 0 שניתן חייב הספרה מספר קיינסמן עייי (12 נקי) מספר את מספר המחרוזות באורך חn באורך מספר מספר עייר (12 נקי) מספר וולפני הספרה (1 חייב להופיע (1. פרה (1. באורך (1. באורך (1. באורך (1. באורף (1. באורך (1. באורך (1. באורף (1.
  - $a_1, a_2$  רשמו סדרה רקורסיבית ותנאי התחלה .I
    - II. רשמו סדרה מפורשת.
    - III. כמה מחרוזות באורך 7 ניתן ליצור!

### פתרוו שאלה 4

- $(z,x)\in S$  ו  $(y,z)\in R$  ע  $(z,y)\in R$  אם ורק אם קיים  $(z,y)\in R\circ S$  אם ורק אם ורק אם ורק אם  $(x,y)\in (R\circ S)^{-1}$  .  $(x,y)\in S^{-1}\circ R^{-1}$  אם ורק אם ורק אם  $(x,y)\in S^{-1}\circ R^{-1}$  כך ע  $(z,y)\in R^{-1}$  כך ע  $(z,y)\in R^{-1}$  אם ורק אם ורק אם הנדרש.
  - ב. I.

 $a_{\rm i}=1$  כלבד לכן 0 המחרוזת באורך התחלה: התחלה תנאי ההתחלה נחשב ישירות את הנאי

 $a_2 = 3$  באורך 2 המחרוזות 00,01,02 לכן

1,2 שמסתיימת בספרה n שמסתיימת בספרה n ניתן ליצור מכל מחרוזת באורך n, מחרוזת באורך n שמסתיימת בספרות ניתן ליצור מכל מחרוזת באורך n שאחריה הוסיפו n.

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$
 : הסדרה הרקורסיבית

 $a_0=1 \Longleftarrow 3=2+a_0 \Longleftarrow a_2=a_1+2a_0$  : ההתחלה ותנאי הסדרה לפי לפי לפי מצא את מצא

$$r^2 - r - 2 = 0$$
: המשוואה האופיינית. II

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1,2$$
 : השורשים

$$a_n = A \cdot \left(-1\right)^n + B \cdot \left(2\right)^n$$
 : הסדרה

: מתנאי ההתחלה

$$1 = A + B$$
$$1 = A \cdot (-1) + B \cdot (2)$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}$$
 : המקדמים

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot (2)^n :$$

$$a_7 = \frac{1}{3} \cdot \left(-1\right)^7 + \frac{2}{3} \cdot \left(2\right)^7 = \frac{-1 + 256}{3} = 85$$
 :7 מספר המחרוזות באורך.

# שאלה 5 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'

. 0 את הטבעיים הטבעיים ללא  $\mathbb{N}-\mathbb{N}$  את המספרים הטבעיים ללא  $\mathbb{N}$ 

 $d: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$  הוא מספר המחלקים הטבעיים של  $d: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$  הוא מספר המחלקים הטבעיים של

1,5: מחלקים 2 יש רק , d(5)=2 כמו כן 1,2,3,6: מחלקים 4 יש ל 1,5: מחלקים , d(6)=4

 $\cdot$ חד ערכית. חד שרכית.

על! d האם.II

 $R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}$  נתון יחס  $A = \{1,2,3,4\}$  מעל הקבוצה  $A = \{1,2,3,4\}$  מעל הקבוצה להקבוצה און יחס

הוכיחו כי R יחס סדר מעל A ומצאו את כל האיברים המינימליים ומקסימליים של A בהתאם ליחס הזה. האם קיים האיבר הקטן ביותר? האם קיים האיבר הגדול ביותר? אם כן – מהם?

### פתרון שאלה 5

 $d(2^{n-1})$  מתקיים  $n\in\mathbb{N}$  מתקיים על, כי לכל  $n\in\mathbb{N}$  הפונקציה הינה לכל מספר אשוני p לכל מספר אשוני  $n\in\mathbb{N}$ 

זה נובע מכך שכל מחלק של חזקה של 2 הוא בעצמו חזקה של 2. ויש בדיוק n אפשרויות לבחור חזקה של בין (n-1)-1.

. ב. מתקיים  $R \cap R^{-1} = I_{\scriptscriptstyle A}$  לכן היחס גם לכן לכן  $I_{\scriptscriptstyle A} = \big\{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \big\} \subseteq R$  ב. מתקיים ב

. בנוסף  $R^2=R\circ R=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}=R$  בנוסף

. רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי לכן R יחס סדר R

 $(x,A) \in R$  ב -  $(x,A) \in R$ 

 $.\,(3,x)\in R$  – כך המקסימלי ב- א קיים 3 ביים  $x\neq 3$  הינו 3, כי הינו המקסימלי הינו

האיבר הקטן ביותר לא קיים, כי יש שני איברים מינימליים.

 $(x,3) \in R$  מתקיים  $x \in A$  מתקיים 5, כי לכל

# שאלה 6 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'

. A יחבוצה כלשהי  $b\in\mathbb{Z}$  לכל וקבוצה כלשהי I. הראו ש|a|=|A| הראו ש.

היעזרו בהגדרת עוצמות על ידי פונקציות מתאימות.

. א עוצמת הרצף.  $|\mathbb{R} imes \mathbb{Z}| = |\mathcal{K}|$  ש: א  $|\mathcal{I}|$  א עוצמת הרצף. II. הראו באמצעות סעיף

טבעי. k ,  $\deg(v_i)=k$  מתקיים עינ מתקיים לכל קדקוד אם 'k נקרא 'קב (8 נקי') גרף 'G=(V,E) גרף (8 נקי') גרף ב. (8 נקי') גרף אם יינ

האם קיים גרף 3-רגולרי בעל 7 צלעות!

אם כן, הסבירו למה. אם לא, הסבירו למה לא קיים גרף כזה.

### פתרון שאלה 6:

א. I. נתבונן בפונקציה:

$$f: \{b\} \times A \to A$$
$$f((b,a)) = a \quad a \in A$$

נראה שהפונקציה חחייע ועל ולכן מהגדרת עוצמות נקבל את הנדרש.

: הפונקציה חחייע

$$f((b,a_1)) = f((b,a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow (b,a_1) = (b,a_2)$$

: A הפונקציה על

$$(b,a) \in \{b\} \times A$$
 קיים מקור  $a \in A$  לכל

ולכן העוצמות של הקבוצות שוות.

II.

: לכך 
$$\{0\} \times R \subseteq Z \times R \subseteq R \times R$$
 (1)

$$|\{0\} \times R| \le |Z \times R| \le |R \times R|$$
 (2)

.I לפי סעיף 
$$\left| \{0\} \times R \right| = \left| R \times R \right| = 3$$

$$\left|Z \times R \right| = \aleph$$
: לכן מ (1) ו- (2) ומשפט קשייב

$$|V| \cdot 3 = 2 \cdot 7 = 14$$

. קבלנו שמספר הקדקודים אינו שלם ולכן לא קיים גרף כזה