פתרונות לתרגיל בית 11 – פונקציות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. נתבונן בפונקציה הבאה

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases}3x-5 & x>0\\ -3x+1 & x\leq 0\end{cases}$$

(א) חשבו את הערכים הבאים של f: $f(0),f(1),f(-1),f(\frac{5}{3}),f(-\frac{5}{3})$

(ב) חשבו את התמונות ההפוכות הבאות: $f^{-1}(0),f^{-1}(1),f^{-1}(-1),f^{-1}(3),f^{-1}(-3),f^{-1}(6)$

(ג) חשבו את התמונות ההפוכות של הקטעים הבאים: $f^{-1}\left([-5,5]\right),\ f^{-1}\left([-6,5]\right)$

(ד) שרטטו את גרף הפונקציה f.

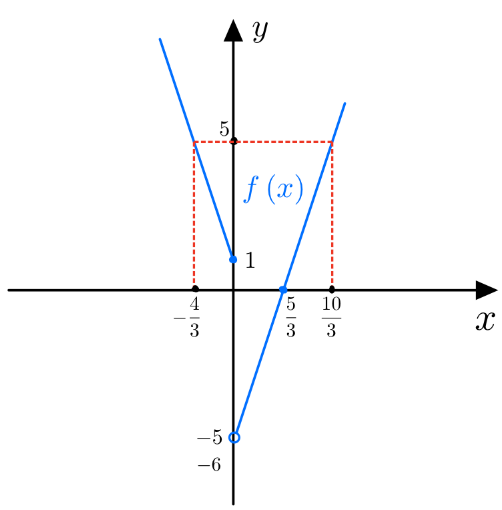
פתרון

(א) $f(0)=1\ ,f(1)=-2\ ,f(-1)=4\ ,f(\frac{5}{3})=0\ ,f(-\frac{5}{3})=6$

(ב) כדי לחשב את הערך של $f^{-1}(b)$ נצטרך לפתור את המשוואה $f(x)=b$.
$f^{-1}(0)$: פותרים את $f(x)=0$ ומקבלים $x=\frac{5}{3}$. לכן $f^{-1}(0)=\frac{5}{3}$.
$f^{-1}(1)$: פותרים את $f(x)=1$ ומקבלים $x=0,2$. לכן $f^{-1}(1)=\{0,2\}$.
$f^{-1}(-1)$: פותרים את $f(x)=-1$ ומקבלים $x=\frac{4}{3}$. לכן $f^{-1}(-1)=\frac{4}{3}$.
$f^{-1}(3)$: פותרים את $f(x)=3$ ומקבלים $x=\frac{8}{3},-\frac{2}{3}$. לכן $f^{-1}(3)=\left\{\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right\}$.
$f^{-1}(-3)$: פותרים את $f(x)=-3$ ומקבלים $x=\frac{2}{3}$. לכן $f^{-1}(-3)=\frac{2}{3}$.
$f^{-1}(6)$: פותרים את $f(x)=6$ ומקבלים $x=\frac{11}{3},-\frac{5}{3}$. לכן $f^{-1}(6)=\left\{\frac{11}{3},-\frac{5}{3}\right\}$.

(ג) נשים לב כי לכל $y\leq -5$ לא קיים ערך $x\in\mathbb{R}$, כך ש - $f(x)=y$.
לכן $f\left([-6,5]\right)=f^{-1}\left([-5,5]\right)=\left[-\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right]$ כפי שניתן לראות מהגרף.

(ד) הגרף המבוקש:



2. נגדיר שתי פונקציות f, g באופן הבא

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x - 1 \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ x & x > 3 \end{cases}$$

(א) האם הפונקציה g היא חח"ע? האם הפונקציה g היא על? אם כן הוכיחו, אם לא ־ מיצאו דוגמא נגדית.

(ב) רישמו נוסחא להרכבות $g \circ f$, $f \circ g$.

(ג) ציירו את הפונקציה $g \circ f$.

פתרון

(א) הפונקציה g לא חח"ע. למשל: $g(5) = 5$ וגם $g(3) = 5$.
הפונקציה g על: אם $y > 3$, אז עבור $x = y$ מקבלים $g(x) = y$. אם $y \leq 3$, אז עבור $x = \frac{y+1}{2} < 3$ מקבלים $g(x) = y$.

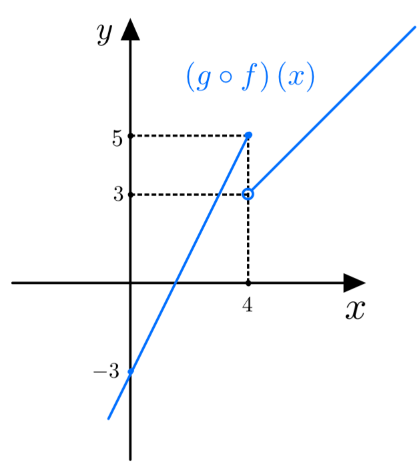
(ב) נרשום את הביטוי להרכבה $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \begin{cases} 2(x-1) - 1 & x - 1 \leq 3 \\ x - 1 & x - 1 > 3 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 3 & x \leq 4 \\ x - 1 & x > 4 \end{cases}$$

נרשום את הביטוי להרכבה $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 1 = \begin{cases} 2x - 1 - 1 & x \leq 3 \\ x - 1 & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 2 & x \leq 3 \\ x - 1 & x > 3 \end{cases}$$

(ג) הגרף המבוקש:



3. נתבונן בפונקציה הבאה

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = (y, x-1)$$

כאשר $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ היא המכפלה הקרטזית בין הממשיים עם עצמם.

(א) הוכיחו כי הפונקציה f היא פונקציה הפיכה.

(ב) מצאו נוסחא מפורשת לפונקציה ההופכית f^{-1}.

(ג) מצאו את $f^{-1}\left([0,1]\times[0,1]\right)$ כאשר $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ הוא הקטע הממשי הסגור. מומלץ לצייר את הפונקציה בכדי לקבל אינטואיציה.

פתרון

(א) כדי להוכיח הפיכות, נראה כי f חח"ע ועל.
חח"ע: נניח כי $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$, כלומר $(y_1, x_1-1) = (y_2, x_2-1)$.
מכאן $y_1 = y_2$ וגם $x_1 - 1 = x_2 - 1$. לכן $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. זה מוכיח כי f - חח"ע.
על: יהי $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. נבחר $(x,y) = (b+1,a)\in\mathbb{R}^2$ ונקבל
$f(x,y) = f(b+1,a) = (a,(b+1)-1) = (a,b)$. זה מוכיח כי f - על.
הפונקציה f חח"ע ועל, לכן f הפיכה.

(ב) בסעיף הקודם ראינו כי $f(b+1,a) = (a,b)$, לכן באופן כללי $f^{-1}(x,y) = (y+1,x)$.
ואכן לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$(f\circ f^{-1})(x,y) = f(f^{-1}(x,y)) = f(y+1,x) = (x,(y+1)-1) = (x,y)$$
$$(f^{-1}\circ f)(x,y) = f^{-1}(f(x,y)) = f^{-1}(y,x-1) = ((x-1)+1,y) = (x,y)$$

(ג) מהנוסחה $f^{-1}(x,y) = (y+1,x)$ מקבלים: $f^{-1}\left([0,1]\times[0,1]\right) = [1,2]\times[0,1]$.

4. יהיו A,B,C שלוש קבוצות. ויהיו f,g שתי פונקציות כאשר

$$f:A\longrightarrow B,\ g:B\longrightarrow C$$

(א) הוכיחו כי אם הפונקציות f,g הן שתיהן חח"ע אז גם ההרכבה $g\circ f$ היא פונקציה חח"ע.

(ב) הוכיחו כי אם הפונקציות f,g הן שתיהן פונקציות על אז גם ההרכבה $g\circ f$ היא פונקציה על.

(ג) הוכיחו כי אם הפונקציות f,g הן שתיהן פונקציות הפיכות אז גם ההרכבה $g\circ f$ היא פונקציה הפיכה ומתקיים

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$$

פתרון

(א) נניח כי מתקיים $(g\circ f)(a_1) = (g\circ f)(a_2)$, כלומר $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. לפי הנתון g פונקציה חח"ע, לכן $f(a_1) = f(a_2)$. גם הפונקציה f חח"ע, לכן $a_1 = a_2$. זה מוכיח כי $g\circ f$ חח"ע.

(ב) יהי $c\in C$. לפי הנתון g פונקציה על, לכן קיים $b\in B$, כך ש - $g(b) = c$. גם הפונקציה f על, לכן קיים $a\in A$, כך ש - $f(a) = b$. קיבלנו $g(f(a)) = c$, כלומר $(g\circ f)(a) = c$. זה מוכיח כי $g\circ f$ על.

(ג) אם f,g הן פונקציות הפיכות, אז שתיהן חח"ע ועל, לכן לפי הסעיפים הקודמים גם ההרכבה $g\circ f$ חח"ע ועל, כלומר $g\circ f$ הפיכה. בנוסף

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})(c) = (g\circ\underbrace{(f\circ f^{-1})}_{I}\circ g^{-1})(c) = \underbrace{(g\circ g^{-1})}_{I}(c) = c$$
$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)(a) = (f^{-1}\circ\underbrace{(g^{-1}\circ g)}_{I}\circ f)(a) = \underbrace{(f^{-1}\circ f)}_{I}(a) = a$$

כלומר $f^{-1}\circ g^{-1}$ הינה פונקציה הפוכה ל - $g\circ f$, משמע $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

5. יהיו A,B,C שלוש קבוצות. ויהיו f,g שתי פונקציות כאשר

$$f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות קיבעו האם היא אמיתית או שיקרית. אם הטענה אמיתית יש להוכיח, אם הטענה שיקרית יש למצוא דוגמא נגדית.

(א) אם הפונקציה $g \circ f$ היא חח"ע אז g חח"ע.

(ב) אם הפונקציה $g \circ f$ היא חח"ע והפונקציה f היא על אז g חח"ע.

(ג) אם הפונקציה $g \circ f$ היא על אז f על.

(ד) אם הפונקציה $g \circ f$ היא על והפונקציה g היא חח"ע אז f חח"ע.

פתרון

(א) **לא נכון.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.
מתקיים $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = e^{2x}$. הפונקציה e^{2x} חח"ע, ואילו $g(x) = x^2$ לא חח"ע.

(ב) **נכון.** נניח כי $g(b_1) = g(b_2)$.
לפי הנתון f על, לכן קיימים a_1 ו - a_2, כך ש - $f(a_1) = b_1$ ו - $f(a_2) = b_2$.
מכאן $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ ומכיוון ש - $g \circ f$ חח"ע, מקבלים $a_1 = a_2$ ולכן גם $b_1 = b_2$.

(ג) **לא נכון.**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ - לא על. $g : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $g(x) = \sin x$.
$g \circ f : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(x^2)$ פונקציה על.

(ד) **לא נכון.**
$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - לא חח"ע. $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$ - חח"ע.

$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ פונקציה על.

6. **פונקציות כיחס.** תהא A קבוצה ו - $f : A \longrightarrow A$ פונקציה.

(א) באמצעות הפונקציה f הגדירו **יחס** R על הקבוצה A.

(ב) אם נתון שהיחס R שמצאתם הוא רפלקסיבי, מה חייבת להיות הפונקציה f?

(ג) אם נתון שהיחס R שמצאתם הוא סימטרי וכי הזוג $(a,b) \in R$ הראו כי מתקיים

$$a = f(f(a)) = f(f(f(f(a)))) = \cdots = f^{2n}(a)$$

כאשר f^{2n} היא ההרכבה של הפונקציה f עם עצמה $2n$ פעמים.

(ד) האם ייתכן כי היחס R שמצאתם הוא טרנזיטיבי?

פתרון

(א) נגדיר יחס R באופן הבא: $R = \{(x,y) \in A \times A \mid f(x) = y\}$.

(ב) אם R רפלקסיבי, אז לכל $x \in A$ מתקיים $(x,x) \in R$, כלומר לכל $x \in A$ מתקיים $f(x) = x$. לכן הפונקציה חייבת להיות פונקצית הזהות על A.
שימו לב! לא ייתכן שקיימים זוגות נוספים ב - R, אחרת נקבל סתירה לתכונת חד - ערכיות של פונקציה.

(ג) אם $(a,b) \in R$, אז גם $(b,a) \in R$, כי R סימטרי. מהגדרת היחס R מסיקים כי $f(a) = b$ וגם $f(b) = a$.
מכאן $a = f(f(a))$. נפעיל f פעמיים על האגפים ונקבל $a = f(f(a)) = f(f(f(f(a))))$. נמשיך באופן דומה ונקבל שלכל מספר זוגי $2n$ של הפעלות f מתקיים $f^{2n}(a) = a$.

(ד) כן. היחס שמתאים לפונקצית זהות הינו טרנזיטיבי.
דוגמה נוספת: $A = \{1,2,3\}$. $R = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$ - יחס טרנזיטיבי שמתאים לפונקציה $f(x) = 2$ לכל $x \in A$.

7. נגדיר את הפונקציה הבאה

$$f : P(\mathbb{R}) \longrightarrow P(\mathbb{R})$$
$$f(X) = X \cup \mathbb{N}$$

(א) חשבו את $f(\emptyset), f(\mathbb{Q}), f(\mathbb{R})$.

(ב) האם הפונקציה f היא פונקציה חח"ע? אם כן הוכיחו, אם לא מיצאו דוגמא נגדית.

(ג) האם הפונקציה f היא פונקציה על? אם כן הוכיחו, אם לא מיצאו דוגמא נגדית.

(ד) הראו כי

$$Im(f) = \{A \in P(\mathbb{R}) \,|\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}\}$$

פתרון

(א) מכיוון ש - $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ מקבלים

$$f(\emptyset) = \emptyset \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$$
$$f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Q}$$
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$$

(ב) הפונקציה f לא חח"ע, כי למשל $f(\{1\}) = \{1\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ וגם $f(\{2\}) = \{2\} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

(ג) הפונקציה f לא על, כי לכל $X \in P(\mathbb{R})$ מתקיים $f(X) = X \cup \mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}$. זה אומר שלא נקבל בתמונה אף קבוצה שמוכלת ממש ב - $\mathbb{N}$.

(ד) לכל $\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $f(A) = A \cup \mathbb{N} = A$, לכן $A \in Im(f)$ וזה מבטיח כי $\{A \in P(\mathbb{R}) \,|\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}\} \subseteq Im(f)$.
אם $Y \in im(f)$, אז קיים $X \in P(\mathbb{R})$, כך ש - $Y = f(X) = X \cup \mathbb{N}$, כלומר $\mathbb{N} \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$. זה מוכיח כי $Im(f) \subseteq \{A \in P(\mathbb{R}) \,|\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}\}$.
שתי ההכלות הנ"ל מוכיחות את השוויון $Im(f) = \{A \in P(\mathbb{R}) \,|\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}\}$.

8. יהיו A, B שתי קבוצות ופונקציה

$$f : A \longrightarrow B$$

נגדיר פונקציה חדשה לקבוצות החזקה

$$F : P(A) \longrightarrow P(B)$$
$$F(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

(א) במקרה הפרטי בו

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\}$$
$$f : A \longrightarrow B$$
$$f(1) = a, f(2) = b, \ f(3) = c$$

מיצאו את $F(\{1\}), F(\{1, 2\}), F(\emptyset), F(A)$

(ב) נחזור למקרה הכללי כפי שתואר בתחילת השאלה. הוכיחו את הטענות הבאות:

i. הפונקציה f היא חח"ע אם ורק אם הפונקציה F היא חח"ע.

ii. הפונקציה f היא על אם ורק אם הפונקציה F היא על.

פתרון

(א) מתקיים:

$$
\begin{aligned}
F(\{1\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1\}\} = \{f(1)\} = \{a\} \\
F(\{1,2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1,2\}\} = \{f(1), f(2)\} = \{a,b\} \\
F(\emptyset) &= \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset \\
F(A) &= \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a,b,c\} = B
\end{aligned}
$$

(ב) נוכיח את הטענות

i. תהי f חח"ע.
נניח כי $F(X_1) = F(X_2)$.
יהי $x_1 \in X_1$, אז $y = f(x_1) \in F(X_1)$ ולכן גם $y \in F(X_2)$, כלומר $y = f(x_2)$ עבור $x_2 \in X_2$.
קיבלנו $f(x_1) = f(x_2)$. לכן $x_1 = x_2$, כי f חח"ע. זה מוכיח כי $x_1 \in X_2$ ומכאן $X_1 \subseteq X_2$.
באופו דומה מראים כי $X_2 \subseteq X_1$ ומסיכים כי $X_1 = X_2$. זה מוכיח כי F חח"ע.

תהי F חח"ע.
נניח כי $f(x_1) = f(x_2)$. מכאן $F(\{x_1\}) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} = F(\{x_2\})$.
הפונקציה F חח"ע, לכן $\{x_1\} = \{x_2\}$ ומכאן $x_1 = x_2$. זה מוכיח כי f חח"ע.

ii. תהי f על.
תהי $Y \in P(B)$. לכל $y \in Y$ קיים $x \in A$, כך ש - $f(x) = y$, כי f על. נגדיר

$$X = \{x \in X \mid \exists y \in Y . y = f(x)\}$$

כלומר X היא קבוצה של כל ערכי x המתאימים לערכי $y \in Y$. מתקיים

$$F(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \mid y \in Y\} = Y$$

מצאנו מקור ל - Y, לכן F על.

תהי F על.
יהי $y \in B$. לקבוצה $Y = \{y\}$ קיימת קבוצה $X \in P(A)$, כך ש - $F(X) = Y$, כלומר

$$F(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y\} = Y$$

כלומר קיים $x \in X \subseteq A$, כך ש - $f(x) = y$. זה מוכיח כי f על.