שאלון X

שאלה 1.א (10 נקודות)

נגדיר סדרה $\left(a_n\right)_{n\geq1}$ על ידי כלל הנסיגה: $a_1=\frac{7}{4}$ ו- $a_{n+1}=2-\sqrt{2-a_n}$, לכל $n\geq1$.

1. הוכיחו ש- $a_n>1$, לכל $n\geq1$.

2. מצאו את a_2 ; הוכיחו שהסדרה $\left(a_n\right)_{n\geq1}$ מתכנסת לגבול סופי מצאו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

פתרון 1.א (רשום רק בעמודים 1 ו- 2)

<u>המשך פתרון 1.א</u>

שאלה 1.ב (10 נקודות)

חשבו את $\int \cos^2 x \cdot \sin^5 x\, dx$. הוכיחו שכל פונקציה קדומה של $f(x)=\cos^2 x \cdot \sin^5 x$ היא בהכרח חסומה בתחום $D=\mathbf{R}$.

פתרון 1.ב (רשום רק בעמודים 3 ו- 4)

המשך פתרון 1.ב

שאלה 2.א **(10 נקודות)**

יהי $m \in \mathbf{R}$. נגדיר פונקציה f על ידי: $|x|<1, \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{\sin(x^2)}, & x \neq 0 \\ m, & x=0 \end{cases}$.

מצאו את הגבול $L=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. האם קיים מספר m כך שהנקודה $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני של הפונקציה f ? נמקו !

פתרון 2.א (רשום רק בעמודים 5 ו- 6)

המשך פתרון 2.א

<u>שאלה 2.ב</u> (10 נקודות)

יהי $M=3+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^7}$. הוכיחו שהמספר M מקיים $0<\sqrt[3]{28}-M\le\frac{5}{3^{12}}$. נמקו !

<u>רמז</u>: מצאו קירוב של $\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.

<u>פתרון 2.ב</u> (רשום רק בעמודים 7 ו- 8)

המשך פתרון 2.ב

<u>שאלה 3.א</u> (10 נקודות)

1. האם הפונקציה $f(x)=x+\arctan(x-1)$ בעלת נקודות קיצון בתחום $D=\mathbf{R}$? נמקו !

2. יהי $m\in\mathbf{R}$. כמה פתרונות יש למשוואה : $\arctan(x-1)=m-x$ בתחום $x\in(-\infty,\infty)$?

<u>רמז</u> : אפשר לנמק את הסעיף על ידי חקירה של פונקציה מתאימה.

<u>פתרון 3.א</u> (רשום רק בעמודים 9 ו- 10)

המשך פתרון 3.א

<u>שאלה 3.ב</u> (10 נקודות)

חשבו את האינטגרל $I = \int \frac{6x}{(x+1)(x^2-4)}\,dx$.

<u>פתרון 3.ב</u> (רשום רק בעמודים 11 ו- 12)

המשך פתרון 3.ב

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. נסמן ב- $L: y=mx+n$ קו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\sqrt{e}$.

א. (10 נק') מצאו את משוואת הקו המשיק L והוכיחו ש- $f(x)\le f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2e}$, לכל $1\le x\le e$.

ב. (10 נק') מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

- גרף הפונקציה $y=f(x)$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\sqrt{e}$;
- שני הקווים $x=1$ ו- $x=e$.

<u>פתרון 4.א</u> (רשום רק בעמודים 13 ו- 14)

המשך פתרון 4.א

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$. נסמן ב- $L: y=mx+n$ קו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\sqrt{e}$.

א. (10 נק') מצאו את משוואת הקו המשיק L והוכיחו ש- $f(x)\le f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2e}$, לכל $1\le x\le e$.

ב. (10 נק') מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

- גרף הפונקציה $y=f(x)$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\sqrt{e}$;
- שני הקווים $x=1$ ו- $x=e$.

פתרון 4.ב (רשום רק בעמודים 15 ו- 16)

המשך פתרון 4.ב

<u>שאלה 5.א</u> (10 נקודות)

הוכיחו ש- $-3 \le 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} \le 1$, לכל $x \in [-1,8]$. נמקו !

<u>פתרון 5.א</u> (רשום רק בעמודים 17 ו- 18)

<u>המשך פתרון 5.א</u>

שאלה 5.ב (10 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)|<8+\frac{1}{x^2+1}$, לכל $x\in\mathbf{R}$.

הוכיחו כי f פונקציה חסומה והגרף של f חותך את הקו הישר $L: y=g(x)=3-2x$ בנקודה אחת לפחות.

פתרון 5.ב (רשום רק בעמודים 19 ו- 20)

המשך פתרון 5.ב

<u>שאלה 6.א</u> (10 נקודות)

הוכיחו שהפונקציה $G(x)=\int_{0}^{5x} e^{2\sin t}dt$ עולה וקמורה בתחום $D=\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$.

<u>פתרון 6.א</u> (רשום רק בעמודים 21 ו- 22)

המשך פתרון 6.א

<u>שאלה 6.ב</u> (10 נקודות)

האם הטענה הבא נכונה :
"אם $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציות בעלות אי רציפות מסוג ראשון בנקודה $a=0$, אז פונקציית הסכום $s(x)=f(x)+g(x)$ בעלת אי רציפות מסוג ראשון בנקודה $a=0$".
אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת. אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

<u>פתרון 6.ב</u> (רשום רק בעמודים 23 ו- 24)

<u>המשך פתרון 6.ב</u>

סוף הפתרון !

פתרון X מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פתרון שאלה 1.א (10 נקודות)

1. נוכיח באינדוקציה ש- $\boxed{1<a_n<2 \text{, לכל } n\in\mathbf{N}}$. עבור $n=1$ מתקיים: $1<a_1=\frac{7}{4}<2$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח שעבור $n=k$ הטענה נכונה, כלומר מתקיים ש- $1<a_k<2$.

נוכיח שגם עבור $n=k+1$ הטענה נכונה:

$$1<a_k<2 \quad\Rightarrow\quad -2<-a_k<-1 \quad\Rightarrow 0<2-a_k<1 \quad\Rightarrow 0<\sqrt{2-a_k}<1 \quad\Rightarrow$$

$$0>-\sqrt{2-a_k}>-1 \quad\underset{+2}{\Rightarrow}\quad 2>\underbrace{2-\sqrt{2-a_k}}_{a_{k+1}}>1\Rightarrow 1<a_{k+1}<2$$

2. <u>נוכיח כי הסדרה היא מונוטונית יורדת ואז יהיה לה גבול סופי כי היא חסומה (מלמטה).</u>

נוכיח באינדוקציה ש $\boxed{a_{n+1}<a_n \text{, לכל } n\in\mathbf{N}}$. עבור $n=1$ מתקיים: $a_2=\frac{3}{2}=2-\sqrt{2-\frac{7}{4}}<a_1=\frac{7}{4}$.

<u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח שעבור $n=k$ הטענה נכונה, כלומר מתקיים ש- $\boxed{a_{k+1}<a_k}$.

נוכיח שטענת האינדוקציה נכונה גם עבור $n=k+1$:

$$a_{k+1}<a_k \quad\Rightarrow\quad -a_{k+1}>-a_k \quad\Rightarrow\quad 2-a_{k+1}>2-a_k \quad\Rightarrow \sqrt{2-a_{k+1}}>\sqrt{2-a_k} \quad\Rightarrow$$

$$\underbrace{2-\sqrt{2-a_{k+1}}}_{a_{k+2}}<\underbrace{2-\sqrt{2-a_k}}_{a_{k+1}} \quad\Rightarrow\quad a_{k+2}<a_{k+1}$$

נסמן ב- L את הגבול. נעבור לגבול בעזרת כלל הנסיגה: $a_{n+1}=2-\sqrt{2-a_n}$, לכל n:

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\sqrt{2-a_n}\right) \quad\Rightarrow L=2-\sqrt{2-L}\Rightarrow\sqrt{2-L}=2-L \quad\Rightarrow 2-L=(2-L)^2$$

$$\Rightarrow L=1 \quad or \quad L=2$$

מסיקים שהגבול שווה ל $L=1$ (פוסלים את האפשרות $L=2$ כי $a_1=\frac{7}{4}$ והסדרה יורדת ממש.)

פתרון שאלה 1.ב (10 נקודות)

$$F(x)=\int\left(\cos^2 x\cdot\sin^5 x\right)dx=\int\cos^2 x\cdot\sin^4 x\cdot\sin x dx=\int\cos^2 x\cdot(1-\cos^2 x)^2\cdot\sin x dx$$
$$=\left\{\cos x=t,\quad -\sin x dx=dt,\ \ \cos^2 x+\sin^2 x=1,\quad \sin^2 x=1-t^2\right\}$$
$$=-\int t^2(1-t^2)^2dt=-\int t^2(1-2t^2+t^4)dt=-\int(t^2-2t^4+t^6)dt=-\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=$$
$$=-\frac{(\cos x)^3}{3}+\frac{2(\cos x)^5}{5}-\frac{(\cos x)^7}{7}+C$$

מסיקים ש-

$$|F(x)|=\left|-\frac{(\cos x)^3}{3}+\frac{2(\cos x)^5}{5}-\frac{(\cos x)^7}{7}+C\right|\le\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+|C|$$

לכל $x\in\mathbf{R}$, ולכן כל פונקציה קדומה $y=F(x)$ היא פונקציה חסומה בתחום $D=\mathbf{R}$.

<u>פתרון שאלה 2.א</u> (10 נקודות)

נוכיח שהגבול $L=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ קיים וסופי.

נשתמש פעמיים בכלל L'Hôpital :

$$L=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x^2}{\sin x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\sin x-x\cos x+\sin x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-x\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2e^{x^2}+4x^2e^{x^2})-(\cos x-x\sin x)}{2}=\frac{(2\cdot 1+0)-(1-0)}{2}=\frac{1}{2}$$

<u>הערה:</u> אפשר גם להשתמש רק פעם אחד בכלל L'Hôpital :

$$L=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x^2}{\sin x^2}}_{\to 1}\cdot\frac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-\sin x-x\cos x+\sin x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-x\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}e^{x^2}-\frac{\cos x}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

לכן הגבול $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.5$. מסיקים ש-

1. אם $m=0.5$, אז הפונקציה f רציפה בנקודה $x=0$
2. אם $m\neq 0.5$, אז הפונקציה f בעלת נקודת אי-רציפות סליקה בנקודה $x=0$.

<u>מסקנה</u> : לא קיים מספר m כך שהנקודה $x=0$ היא נקודת אי-רציפות מסוג שני של הפונקציה f .

<u>פתרון שאלה 2.ב</u> (10 נקודות)

נגדיר $f(x)=\sqrt[3]{x}$. ברור ש- $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$.

נשתמש בנוסחת $Taylor$ ממעלה $n=2$ של הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ סביב הנקודה $a=27$.

$$f(x)=f(27)+\frac{f'(27)}{1!}(x-27)+\frac{f''(27)}{2!}(x-27)^2+error\,,$$

כאשר $x=28$. לכן :

$$\sqrt[3]{28}=f(28)=f(27)+\frac{f'(27)}{1!}(28-27)+\frac{f''(27)}{2!}(28-27)^2+error$$

ז"א :

$$\sqrt[3]{28}=f(27)+\frac{f'(27)}{1!}+\frac{f''(27)}{2!}+error=3+\frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}\right)(27)^{-\frac{5}{3}}+error$$

<u>מסקנה</u> :

מצאנו קירוב למספר $\sqrt[3]{28}$ ששווה ל-

$$3+\frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}}+\left(-\frac{1}{9}\right)(27)^{-\frac{5}{3}}=3+\frac{1}{3}3^{-2}-\frac{1}{9}3^{-5}=3+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^7}=M\ .$$

אפשר לחשב את השגיאה לפי נוסחת $Lagrange$: קיים $27\le c\le 28$ כך ש-

$$Error_2=\frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3=\frac{1}{6}\cdot\frac{10}{27}c^{-\frac{8}{3}}(28-27)^3=\frac{10}{2\cdot 3^4}c^{-\frac{8}{3}}\ .$$

האי שוויון $27\le c\le 28$ גורר $28^{-\frac{8}{3}}\le c^{-\frac{8}{3}}\le 27^{-\frac{8}{3}}=3^{-8}$, לכן

$$0<\sqrt[3]{28}-M=Error_2=\frac{10}{2\cdot 3^4}c^{-\frac{8}{3}}\le\frac{10}{2\cdot 3^4}3^{-8}=\frac{10}{2\cdot 3^{12}}=\frac{5}{3^{12}}\ .$$

פתרון שאלה 3.א (10 נקודות)

1. נגדיר $f(x)=\arctan(x-1)+x$ ונחקור את הנגזרת הראשונה $f'(x)$ בתחום $D=\mathbf{R}$.

$y'=f'(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2}+1=\frac{2+(x-1)^2}{1+(x-1)^2}$, לכל $x\in\mathbf{R}$. ברור שאין נקודות קריטיות בגלל ש-

$f'(x)>0$, לכל $x\in\mathbf{R}$. משפט Fermat גורר שלפונקציה f <u>אין נקודות קיצון</u> בתחום $D=\mathbf{R}$.

2. נחקור את המשוואה $f(x)=m$ בתחום $D=\mathbf{R}$. הנגזרת הראשונה $f'(x)$ רציפה ושומרת את הסימן החיובי שלה לכל $x\in\mathbf{R}$. לכן: **(I)** f פונקציה עולה ממש ב- $\mathbf{R}$.

הפונקציה f רציפה ב- $\mathbf{R}$. על מנת למצוא את התמונה של f מספיק למצוא את שני הגבולות הבאים:

$$n_+=\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan(x-1)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\arctan(x-1)+\lim_{x\to+\infty}x=\frac{\pi}{2}+\infty=+\infty$$

$$n_-=\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan(x-1)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\arctan(x-1)+\lim_{x\to-\infty}x=-\frac{\pi}{2}-\infty=-\infty$$

מסיקים שהתמונה של f שווה ל- $\text{Image}\left(f\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$ ולכן טענה **(I)** גוררת שלמשוואה $f(x)=m$ יש פתרון יחיד לכל $m\in\mathbf{R}$.

<u>פתרון שאלה 3.ב</u> (10 נקודות)

נמצא את הפונקציה הקדומה של הפונקציה הרציונלית:

$$f(x)=\frac{6x}{(x+1)(x^2-4)}=\frac{6x}{(x+1)(x-2)(x+2)}.$$

נבצע את הפרוק לשברים חלקיים פשוטים לפי:

$$\frac{6x}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

המונים בשני האגפים שווים:

$$6x=A(x-2)(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-2)$$

נציב:

$$\begin{cases} x=-1\Rightarrow\ -6=-3A\Rightarrow A=2 \\ x=2\ \Rightarrow\ \ 12=12B\Rightarrow B=1 \\ x=-2\Rightarrow -12=4C\ \ \Rightarrow C=-3 \end{cases}$$

לכן:

$$I=\int\frac{6x}{(x+1)(x^2-4)}dx=2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=2\ln|x+1|+\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

<u>פתרון 4.א</u>

תחום ההגדרה שווה ל- $D_f : x>0$.

ברור ש- $f'(x)=\frac{(1/x)x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

משוואת המשיק L בנקודה $x=\sqrt{e}$ נתונה על ידי:

$$f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e},\quad f'(\sqrt{e})=0,\quad y=f(\sqrt{e})+f'(\sqrt{e})x \quad\Rightarrow\quad L: y=\frac{1}{2e}$$

בנוסף, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$. מתקיים:

1. $1\le x\le\sqrt{e} \;\Leftarrow\; f'(x)\ge 0$ ולכן הפונקציה f עולה בקטע $\left[1,\sqrt{e}\right]$.
2. $\sqrt{e}\le x\le e \;\Leftarrow\; f'(x)\le 0$ ולכן הפונקציה f יורדת בקטע $\left[\sqrt{e},e\right]$.

מסיקים שהנקודה $x=\sqrt{e}$ נקודה מקסימום מוחלט של הפונקציה f בקטע הנתון $1\le x\le e$
וזה גורר ש-

$f(x)\le f\left(\sqrt{e}\right)=\frac{1}{2e}$, לכל $1\le x\le e$.

פתרון 4.ב

לפי סעיף הקודם, הקו $L: y=\frac{1}{2e}=f(\sqrt{e})$ נמצא מעל גרף הפונקציה f בכל הקטע $1\le x\le e$
ולכן שטח התחום הנתון שווה ל-

$$S=\int_1^e\left(\frac{1}{2e}-f(x)\right)dx=\frac{1}{2e}(e-1)-\int_1^e f(x)dx=\frac{e-1}{2e}-\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx\,.$$

נמצא את הפונקציה הקדומה בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$F(x)=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int\left(-1/x\right)'\cdot\ln x dx=\left(-1/x\right)\cdot\ln x-\int\left(-1/x\right)\left(1/x\right)dx=$$

$$=-\frac{\ln x}{x}-\int\left(-1/x^2\right)dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\left(1+\ln x\right)$$

ונסיים את החישוב בעזרת משפט היסודי של Newton-Leibniz:

$$S=\frac{e-1}{2e}-\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{e-1}{2e}-\left(F(e)-F(1)\right)=\frac{e-1}{2e}+\frac{1}{e}\left(1+\ln e\right)-\frac{1}{1}\left(1+\ln 1\right)=\frac{3-e}{2e}.$$

פתרון שאלה 5.א (10 נקודות)

מספיק להראות שהפונקציה $f(x):=2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$ מקיימת: $-3\le f(x)\le 1$, לכל $x\in[-1,8]$.

לפי משפט Weierstrass הפונקציה הרציפה f בעלת נקודות קיצון מוחלטות בקטע $D=[-1,8]$.

אם $-1\le x^*\le 8$ היא אחת מנקות הקיצון המוחלטות של f , אז x^* מקיימת אחד מהתנאים הבאים:

1. $x^*=-1$ או $x^*=8$.
2. הפונקציה f לא גזירה בנקודה x^* .
3. הפונקציה f גזירה בנקודה פנימית $-1<x^*<8$ והנגזרת מתאפסת בנקודה הזאת (לפי משפט Fermat).

חישוב הנגזרת: $y'=f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(1-\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}$, לכל $x\ne 0$.

הנגזרת מתאפסת רק כאשר $\sqrt[3]{x}=1$ ז"א רק עבור הנקודה $x=1$.

בנוסף, f לא גזירה בנקודה $x=0$ (נמקו) .

קיבלנו 4 נקודות חשודות לקיצון מוחלט: $x^*\in\{-1,0,1,8\}$. נשאר רק להשוות את הערכים של הפונקציה $y=f(x)=2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$ בנקודות החשודות:

$$f(-1)=-3,\quad f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f(8)=0.$$

לכן ערכי הקיצון המוחלט של f שווים ל-

$$y_{\max}=f(1)=1,\quad y_{\min}=f(-1)=-3.$$

מסקנה:

$-3\le f(-1)=f(x)=2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}\le f(1)=1$. מ.ש.ל.

<u>פתרון שאלה 5.ב</u> (10 נקודות)

הפונקציה f חסומה כי $|f(x)|<8+\frac{1}{x^2+1}\le 8+1=9$ גורר ש- $-9<f(x)<9$, לכל $x\in\mathbf{R}$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)+2x-3$. צריכים להראות שלמשוואה $g(x)=0$ יש פתרון.
נשתמש במשפט Cauchy.

נתון כי f פונקציה רציפה ב- $\mathbf{R}$. לכן גם g פונקציה רציפה ב- $\mathbf{R}$.

[<u>הערה</u>: מתקיים $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+2x-3\right)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x-3\right)=-\infty$]

נשתמש בחסימות של f: $-8-\frac{1}{x^2+1}<f(x)<8+\frac{1}{x^2+1}$, לכל $x\in\mathbf{R}$.
יכולים לבחור שתי נקודות $x_1<x_2$ כך ש- $g(x_1)<0<g(x_2)$:

$$\begin{cases} x_1=-3\Rightarrow g(-3)=f(-3)-9<8+\frac{1}{(-3)^2+1}-9=\frac{1}{10}-1<0 \\ x_2=6\ \Rightarrow g(6)=f(6)+9>-8-\frac{1}{6^2+1}+9=1-\frac{1}{37}>0 \end{cases}$$

לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c\in\left(x_1,x_2\right)=\left(-3,6\right)$ שעבורה מתקיים: $g(c)=0$,
כלומר בנקודה הזו מתקיים $f(c)+2c-3=0 \Leftrightarrow f(c)+2c=3$.

<u>שאלה 6.א</u> (10 נקודות)

הוכיחו שהפונקציה $G(x)=\int_0^{5x} e^{2\sin t}dt$ עולה וקמורה בתחום $D=\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$.

<u>פתרון</u>

הפונקציה $f(t)=e^{2\sin t}$ רציפה ב- $\mathbf{R}$ ולכן היא בעלת פונקציה קדומה ב- $\mathbf{R}$.

תהי $F(t)=\int e^{2\sin t}dt$ פונקציה קדומה של $f(t)=e^{2\sin t}$, ז"א: $\frac{dF}{dt}=F'(t)=e^{2\sin t}$.

לפי משפט Newton-Leibniz מקבלים ש-

$$G(x)=\int_0^{5x} e^{2\sin t}dt=F(5x)-F(0)$$

גוזרים את G לפי כלל השרשרת:

$$G'(x)=F'(5x)\cdot 5=5e^{2\sin(5x)}$$

נחשב גם את הנגזרת השנייה של G:

$$G''(x)=5e^{2\sin(5x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(2\sin(5x)\right)=50\cos(5x)e^{2\sin(5x)}$$

ברור ש-

1. $G'(x)=5e^{2\sin(5x)}>0$ בקטע $(0,\pi/10)$. לכן שהפונקציה G עולה ממש בתחום $D=\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$.

בנוסף, $0<x<\frac{\pi}{10}$ גורר ש- $0<5x<\frac{\pi}{2}$. לכן:

2. $G''(x)=50\cos(5x)e^{2\sin(5x)}>0$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$. לכן שהפונקציה G קמורה ממש בתחום הנתון $D=\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$.

<u>שאלה 6.ב</u> (10 נקודות)

האם הטענה הבא נכונה:
" אם $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציות בעלות אי רציפות מסוג ראשון בנקודה $a=0$, אז פונקציית הסכום $s(x)=f(x)+g(x)$ בעלת אי רציפות מסוג ראשון בנקודה $a=0$".
אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת. אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

<u>פתרון</u>

נוכיח שהטענה לא בהכרח נכונה, בעזרת דוגמה נגדית:

$$g(x)=\begin{cases}0, x\ge 0\\ 1, x<0\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}.$$

שתי הפונקציות הנ"ל בעלות אי רציפות מסוג ראשון בנקודה $a=0$ בגלל ש-
$\lim_{x\to 0-} f(x)=0\ne 1=\lim_{x\to 0+} f(x)$ ו- $\lim_{x\to 0-} g(x)=1\ne 0=\lim_{x\to 0+} g(x)$

מתקיים:
$s(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}1+0=1, x\ge 0\\ 0+1=1, x<0\end{cases}$, ז"א $s(x)=f(x)+g(x)=1$, לכל $x\in\mathbf{R}$.

מסיקים ש- s פונקציה קבועה ב- $\mathbf{R}$ ולכן <u>רציפה</u> ב- $a=0$.

בהצלחה!