דף תרגילים 1:

תרגילים - 1(א,ב,ג); 2(א,ב,ה); 5(א-ה)

דף תרגילים 2:

תרגילים - 6(א,ב,ג)

בהצלחה!

אלינה

תרגיל 1 - הגדרת הגבול

הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות לגבולות הנתונים, לפי הגדרת הגבול.

ניתן להשתמש בכך שכל מספר חיובי x חסום בין שני מספרים טבעיים $[x] \le x < [x]+1$.

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (אפשר להעזר באי השיוויון $\frac{n}{1} < \frac{2^n}{1}$) $\quad \frac{1}{n} > \frac{1}{2^n}$

ג. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$

א) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 = |a_n - L| < \varepsilon_{(\varepsilon>0)} \rightarrow \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$

$\frac{+}{+} \frac{1}{n^2} > 0 \rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{1} \rightarrow \underbrace{n^2}_{\text{מעלה שנייה}} > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\text{שבר}} \Big/ \sqrt{\ } \rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

$\rightarrow N_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1$

סכח הביטוי חיובי

ב) $\lim \frac{1}{2^n} = 0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon_{(\varepsilon>0)} \rightarrow \left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$\rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \; ; \; \frac{1}{n} > \frac{1}{2^n} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}}_{n>0} < \underbrace{\varepsilon}_{\varepsilon>0} \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

ג) $|a_n - L| < \varepsilon \rightarrow \left|\overset{A}{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right| < \varepsilon$ מונה > מכנה: $A > 1 \rightarrow a_n - L > 0$ $\rightarrow \frac{n+2}{n+1} - 1 < \varepsilon$

$\frac{n+2-n-1}{n+1} < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \rightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{n>0} < \underbrace{\frac{1}{n}}_{n>0} < \underbrace{\varepsilon}_{\varepsilon>0} \rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

תרגיל 2 - אריתמטיקה של גבולות

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-1}{n^2+1}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-n}{n^2+1}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-9^n}{3^n+3^{2n}}$ ✗

ד. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{2n}-9^n}{3^n+3^{2n}}$ ✗

ה. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

ו. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{4n^2+5}-n}$ ✗

א) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-1}{n^2+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}5n-1}{\lim\limits_{n\to\infty}n^2+1\neq 0}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\cancel{n^2}\left(\frac{5}{n}-\cancel{\frac{1}{n^2}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\cancel{n^2}\left(1+\cancel{\frac{1}{n^2}}\right)}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1}\ \frac{0}{1} = \frac{0}{1} = 0$

$L=0$

ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-n}{n^2+1}\ \frac{\infty}{\infty}\ \Big/ :n^2 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(5n-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}5n-\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{1}{n^2}}\ \frac{\infty}{1+0} = \frac{\infty}{1} = L=+\infty$

ה) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}+1}$

$\overset{(3)}{=} \frac{\lim 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}+1\right)} \overset{(1)}{=} \frac{\lim 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}+\lim 1} = \frac{\lim 1}{\lim\sqrt{1}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}+\lim 1}$

④ $= \dfrac{\lim 1}{\sqrt{\lim 1}+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}+\lim 1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = L$

תרגיל 5 - הוכח או הפרך

לכל אחת מהטענות הבאות יש לקבוע אם הטענה נכונה או לא. אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה.
אם הטענה איננה נכונה, יש לרשום דוגמא של סדרות שעבורן הטענה איננה מתקיימת.
(ניתן להעזר בדוגמאות של הסדרות ממהתרגיל הקודם).

א. כל סדרה חסומה היא מתכנסת.
ב. כל סדרה מתכנסת היא חסומה.
ג. מכפלת סדרה מתכנסת לגבול חיובי בסדרה מתבדרת היא בהכרח מתבדרת.
ד. מכפלת 2 סדרות מתבדרות (לא מתכנסות) היא בהכרח מתבדרת.
ה. מכפלת סדרה מתכנסת בסדרה חסומה היא בהכרח מתכנסת.

א) $a_n = (-1)^n = \{-1,1,-1,1\ldots\}$ לא נכון! דוגמא נגדית:

חסומה אבל לא מתכנסת

ב) נכון! **הוכחה:** נניח a_n מתכנסת כלומר קיים מספר סופי L המהווה גבול לסדרה. לפי הגדרת הגבול, לכל $\varepsilon > 0$, קיים מספר טבעי N_ε, כך שלכל מספר טבעי n, המקיים $n \ge N_\varepsilon$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.

ג) $\lim a_n \cdot b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$ נכון! הוכחה:

$a_n \to L>0$, b_n: $L \notin \mathbb{R}$

לפי אריתמטיקה של גבולות: $a \cdot \pm\infty = \pm\infty$ ($a>0$) או $a \cdot$ לא קיים L = ביטוי חסר משמעות

ד) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$ נכון! הוכחה:

$L \notin \mathbb{R}$, $L \notin \mathbb{R}$ $\to$ $L = \pm\infty$ או $L =$ לא מוגדר

לפי אריתמטיקה של גבולות: $\infty \cdot \infty = \infty$ או $\infty \cdot$ לא מוגדר L = ביטוי חסר משמעות

ה) לא נכון! לפי סעיפים א' ו-ג'. חסומה לא בהכרח מתכנסת,
לכן ניתן דוגמה של חסומה מתבדרת, ואז יש לנו מתכנסת·מתבדרת
כמו מסעיף ג' ומקבלים סדרה מתבדרת.

$\lim \frac{1}{n}\cdot(-1)^n = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim (-1)^n = 0 \cdot L \notin \mathbb{R}$

דוגמה נגדית:

L לא קיים כלל	או	$L=\pm\infty$
נקבל ביטוי חסר משמעות		מקרה לא מוגדר $=0\cdot\infty$ כלומר לא בהכרח מתקבל גבול ממשי

דוגמה נגדית:

$a_n = (-1)^n$

$b_n = (-1)^n$

$\lim (-1)^n\cdot(-1)^n = \lim -1\cdot -1 = \lim 1$

$\lim (-1)^{a}\cdot(-1)^{a} = \lim 1$

$\lim(-1)^n \cdot \lim(-1)^n =$

תרגיל 6

חשבו את הגבולות הבאים.

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{\sqrt{n(n+1)}}$ ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+n+1}\right)^{\sqrt[n]{n}}$ ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{n+8}\right)^{\frac{n}{2n+2}}$

א) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n+3}\right]^{\sqrt{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n+3}\right]^{\sqrt{n^2+n}} = \lim\left[\frac{2n}{n+3}\right]^{n+\frac{1}{n}}$

$\overset{5}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n+3}\right]\right)^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}(n+\frac{1}{n})\right)^{\alpha}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\infty + \lim\limits_{n\to\infty} 0 \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\alpha = \infty$

β

$\lim\limits_{n\to\infty}\beta \overset{3}{=} \frac{2n}{n+3} \;/:n \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\beta = \frac{\cancel{n}(2)}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\beta = \frac{2}{1+\frac{3}{n}}$

$\overset{3}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\beta = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})} \overset{1}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}} = \frac{2}{1+0} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\beta = 2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\beta^{\lim\limits_{n\to\infty}\alpha} = 2^{\infty} \longrightarrow$ מקרה מוגדר, סבבה $\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{\sqrt{n(n+1)}} = \infty$

ק) $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{n^2+1}{n^3+n+1}\right)}_{\alpha}{}^{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\beta}}$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha = \frac{n^2+1}{n^3+n+1} \Big/ :n^3 \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\alpha = \frac{\cancel{n^3}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(n+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{n+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}} \overset{③}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)} \overset{①}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} n+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{0+0}{\infty+0+0}$$

$$= \frac{0}{\infty} = 0 \; ; \; \lim_{n\to\infty}\alpha = 0$$

~~$\lim_{n\to\infty}\beta = \sqrt[n]{n} \overset{⑩}{=} 1 \; ; \; \lim_{n\to\infty}\beta = 1$~~ $\Longleftarrow$ אין גב

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+n+1}\right)^{\sqrt[n]{n}} \overset{⑤}{=} \left[\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n+1}\right]^{\overset{(=1)}{\sqrt[n]{n}}} = 0^1 = 0$$

ר) $\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{4n-1}{n+8}\right)}_{\alpha}{}^{\overbrace{\frac{n}{2n+2}}^{\beta}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{\beta} \overset{⑦}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\alpha^{\lim\limits_{n\to\infty}\beta}$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha = \left[\frac{4n-1}{n+8}\right] \Big/ :n \longrightarrow = \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{8}{n}\right)} \overset{③}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n}\right)}$$

$$\overset{①}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n}} = \frac{4-0}{1+0} \; ; \; \lim_{n\to\infty}\alpha = 4$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta = \frac{n}{2n+2} \Big/ :n \longrightarrow = \frac{\cancel{n}\cdot(1)}{\cancel{n}\left(2+\frac{2}{n}\right)} \overset{③}{=} \lim_{n\to\infty}\beta = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)} \overset{①}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{1}{2+0} \; ; \; \lim_{n\to\infty}\beta = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{n+8}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2n+2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$