פתרון

Y

שאלה 1 (21 נקודות)

הסתברות להצלחה בניסוי שווה ל-0.4. כל יום חוקר מבצע חמישה ניסויים בלתי תלויים. ניסוי מוצלח נמשך שלוש שעות וניסוי לא מוצלח נמשך שעה אחת.

א. ידוע שאתמול היו שני ניסוים מוצלחים. מהי ההסתברות שהצלחות היו בשני ניסוים הראשונים?

ב. החוקר מחליט לבצע חמישה ניסוים בכל יום עד שביום אחד הוא יקבל חמישה כשלנות. מהי התוחלת של מספר ימי ביצוע ניסוים?

ג. מהי שונות זמן ביצוע יומי של חמישה ניסוים?

פתרון:

א. נגדיר מאורע *A* – הצלחות היו בשני ניסוים הראשונים. נגדיר משתנה מקרי X – מספר ניסוים מוצלחים מתוך חמישה ניסוים. מתקיים: $X \sim \text{Bin}(5,0.4)$. נחשב את ההסתברות המותנית:

$$P(A \mid X=2)=\frac{P(A\cap X=2)}{P(X=2)}=\frac{0.4^2\cdot 0.6^3}{\binom{5}{2}\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3}=0.1$$

ב. נגדיר משתנה מקרי Y – מספר ימים עד יום עם חמישה כשלנות. מתקיים $Y \sim \text{G}(0.6^5)$.

לכן התוחלת שווה ל- $E(X)=\frac{1}{0.6^5}=12.86$.

ד. נגדיר משתנה מקרי Y – זמן ביצוע יומי של חמישה ניסוים. מתקיים: $Y=3X+(5-X)=2X+5$

נחשב את השונות של Y:

$$V(Y)=V(2X+5)=4V(X)=4\cdot 5\cdot 0.4\cdot 0.6=4.8$$

שאלה 2 (16 נקודות)

מנהל חברה מעוניין לשכור 5 עובדים. הוא מראיין מועמדים מתאימים אחד אחר השני. בסיכוי 0.3 ,ראיון מסתיים בקבלת המרואיין לעבודה בחברה, אחרת בסיכוי 0.7 המועמד לא יתקבל לעבודה בחברה ובאופן בבלתי תלוי במועמדים הקודמים. המנהל מפסיק את הראיונות ברגע בו לראשונה סיים קבלת 5 עובדים לחברה.

א. מהי ההסתברות כי מנהל החברה יראיין בדיוק 10 מועמדים?

ב. לראיון הגיעו 10 מועמדים. אסף וגילי היו בין המועמדים. כל מועמד קיבל מספר הנבחר באופן אקראי שלפיו הוא יכנס להתראיין. עד שעה 12:00 מנהל החברה יכול להספיק לראיין 7 אנשים לכל היותר. מהי ההסתברות שאסף וגילי שובצו להתראיין לפני שעה 12:00?

פתרון:

א.

$$\binom{9}{4} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^5 \cdot 0.3 = 0.0514$$

ב. אסף וגילי ישובצו להתראיין לפני שעה 12:00 אם אסף יקבל מספר קטן מ-7 וגם גילי תקבל מספר קטן מ-7. לכן ההסתברות תחושב באופן הבא:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0.4667$$

שאלה 3 (24 נקודות)

מפעל מייצר מצברים לרכב. מספר הקילומטרים שכל מצבר יכול לעבור מתפלג מעריכית. ידוע שהמפעל מייצר מצבר טוב בהסתברות *p*, ומצבר מצוין בהסתברות 1-*p*. תוחלת מספר הקילומטרים שמצבר טוב יכול לעבור היא 20000 ק"מ ותוחלת מספר הקילומטרים שמצבר מצוין יכול לעבור היא 30000 ק"מ.

א. ידוע שההסתברות לכך שמצבר אקראי יוכל לעבור לפחות 25000 ק"מ היא 0.3. מצאו את *p*.

ב. נניח *p*=0.9. נסמן ב- X את מספר הקילומטרים שמצבר אקראי יכול לעבור. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

ג. חנות רכשה 100 מצברים **מצוינים**. חשבו את ההסתברות לכך שממוצע מספר הקילומטרים שהם יעברו יהיה לפחות 25000 ק"ם.

פתרון:

א. נסמן ב- X את מספר הקילומטרים שמצבר אקראי יכול לעבור.

עבור מצבר טוב מתקיים: $X|good \sim exp(1/20000)$.

עבור מצבר מצוין מתקיים: $X|excellent \sim exp(1/30000)$. מנוסחת ההסתברות השלמה נקבל:

$$P(X \geq 25000) = p \cdot P(X|good \geq 25000) + (1-p) \cdot P(X|excellent \geq 25000)$$
$$= pe^{-\frac{25000}{20000}} + (1-p)e^{-\frac{25000}{30000}} = 0.3$$

מכאן נקבל $p = 0.9088$.

ב.

$$F_X(t) = P(X \leq t) = 0.9 \cdot P(X \mid good \leq t) + 0.1 \cdot P(X \mid excellent \leq t)$$
$$F_X(t) = 0.9 \cdot (1 - e^{-t/20000}) + 0.1 \cdot (1 - e^{-t/30000})$$

ג. לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$\bar{X}_{100} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{100} \sim N(30000, 30000^2/100)$$

$$P\left(\bar{X}_{100} \geq 25000\right) = 1 - \Phi\left(\frac{25000-30000}{9000000}\right) = 1 - \Phi(0) = 0.5$$

שאלה 4 (18 נקודות)

בגמר תחרות "הנואם הצעיר" נותרו 3 משתתפים אחרונים. כל אחד מהם הטיל מטבע הוגן באופן בלתי תלוי במשתתפים האחרים. לאחר מכן, נדרשו המשתתפים האחד אחר השני לנאום "בעד" או "נגד" דעה מסוימת, בהתאם לתוצאות ההטלה שלהם. משתתף שקבל עץ - נאם "בעד" הדעה, ואילו מי שקיבל פלי- נאם "נגד" הדעה. נגדיר:

X – מספר המתנגדים.

Y – אורך הרצף הגדול ביותר של מתנגדים.

למשל: אם הנאומים היו "נגד, נגד, בעד" (הסדר הכרונולוגי מימין לשמאל) אזי $X=2, Y=2$ ואם הנאומים היו "נגד, בעד, נגד" אז $X=2, Y=1$. אם אף משתתף לא נעם "נגד" אז $X=0, Y=0$.

א. (12 נקודות) מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים X, Y.

ב. (6 נקודות) חשבו את ההסתברות $P(X=2 \mid Y>1)$.

פתרון:

א.

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	$0.5^3=0.125$	0	0	0
1	0	$3\cdot 0.5^3=0.375$	0	0
2	0	$0.5^3=0.125$	$2\cdot 0.5^3=0.25$	0
3	0	0	0	$0.5^3=0.125$

ב.

$$P(X=2 \mid Y>1)=\frac{P(X=2, Y>1)}{P(Y>1)}=\frac{P(X=2, Y=2)}{P(Y=2)+P(Y=3)}=\frac{0.25}{0.25+0.125}=\frac{2}{3}$$

שאלה 5 (21 נקודות)

משקל של תפוז הוא משתנה מקרי בעל תוחלת 80 גרם וסטיית תקן 20 גרם. שיטת השקיה חדישה (שאינה משפיעה על סטיית התקן של משקל תפוז) אמורה להגדיל את תוחלת המשקל התפוזים. כדי לבדוק את יעילות השיטה נלקח מדגם של 100 תפוזים שהושקו בשיטה החדשה, והוחלט להכניס את השיטה לשימוש אם ממוצע המדגם שיתקבל יהיה גדול מ-83 גרם.

א. מה רמת המובהקות של המבחן המוצג?

ב. אם אמנם תוחלת המשקל התפוזים שהושקו בשיטה החדשה גבוהה יותר ושווה ל- 84 גרם, מה ההסתברות שנצליח לגלות זאת על סמך המבחן? כיצד נקראת הסתברות זו?

ג. אם נלקח מדגם של 100 תפוזים שהושקו בשיטה החדשה, ונמצא כי משקל הממוצע במדגם הוא 81 גרם, מהו רווח לתוחלת המשקל התפוזים שהושקו בשיטה החדשה ברמת סמך ?90%

פתרון:

א. נתון: $\mu_0 = 80$, $\sigma = 20$, $n = 100$

ננסח את ההשערות:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 80$$
$$\mathrm{H}_1 : \mu > 80$$

מבחן: נדחה את H_0 אם $\overline{X}_{20} > 83$.

$$\alpha = P_{H_0}(\overline{X}_{20} > 83) = 1 - \Phi\left(\frac{83-80}{20/\sqrt{100}}\right) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

ב. ההסתברות המבוקשת נקראת עוצמת המבחן. נחשב אותה:

$$\pi = P_{H1}(\overline{X} > 83) = 1 - \Phi\left(\frac{83-84}{20/\sqrt{100}}\right) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) = 0.6915$$

ג. $$1-\alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.645$$

רווח בר סמך עבור התוחלת ברמת סמך 90% הוא:

$$\left[81 - 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}, 81 + 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right]$$

$$\left[81 - 3.29, 81 + 3.29\right]$$

$$\left[77.71, 84.29\right]$$