

תרגיל בית 6 – פעולות בין קבוצות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. יהיו A, B, C שלוש קבוצות במצב כללי. ציירו את הדיאגרמות המתאימות וציבעו את האיזורים המתאימים לקבוצות הבאות:

(א) $A \cap (B \setminus C)$

(ב) $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$

(ג) $A \setminus (B \cap C)$

(ד) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(ה) $(A \oplus B) \cap C$

2. יהיו A, B, C שלוש קבוצות. הפריכו את הטענות הבאות ע"י מציאת דוגמאות נגדיות:

(א) $(A \setminus B = C \setminus B) \longrightarrow (A = C)$

(ב) $(A \setminus B = \emptyset) \longrightarrow (A = B)$

(ג) $(A \setminus B = A) \longrightarrow (B = \emptyset)$

(ד) $P(A \oplus B) = P(A) \oplus P(B)$

3. יהיו A, B, C שלוש קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות (שימו לב! בהוכחת שיוון יש להראות הכלה דו-כיוונית!!!): מומלץ להעזר בדיאגרמות שציירתם בשאלה קודמת על מנת לקבל אינטואיציה.

(א) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(ב) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

(ג) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(ד) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$

(ה) $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$

(ו) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(ז) $P(A \oplus B) \neq P(A) \oplus P(B)$

4. חיתוכים ואיחודים אינסופיים לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את הקבוצות

$$A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid n-1 \leq x \leq 2(n-1)\}$$

$$B_n = A_{n+1} \setminus A_n$$

(א) מציאו את A_0

(ב) חשבו את האיחוד $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ואת החיתוך $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכיחו את תשובתכם!

(ג) חשבו את הקבוצות B_0, B_1, B_2, B_n

(ד) חשבו את האיחוד $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ואת החיתוך $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. הוכיחו את תשובתכם!

5. חיתוכים ואיחודים אינסופיים לכל $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n \neq 0$ נגדיר את הקבוצות

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{(-1)^n}{n} \leq x \leq 2 - \frac{1}{n} \right\} = \left[\frac{(-1)^n}{n}, 2 - \frac{1}{n} \right]$$

(א) רישמו במפורש את הקבוצות A_1, A_2, A_3

(ב) חשבו את האיחוד $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ואת החיתוך $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכיחו את תשובתכם!