יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 11

אינטגרל משולש בקואורדינטות כדוריות
אינטגרל קווי מסוג ראשון, שני

אינטגרל משולש בקואורדינטות כדוריות

.1

לחשב מסת כדור ברדיוס 5, כאשר צפיפות המסה ליחידת נפח נתונה ע"י
$\rho(x,y,z)=(5-\sqrt{x^2+y^2+z^2})e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

מסת הגוף G נתונה ע"י

$$\text{mass}(G)=\iiint_G \rho(x,y,z)dV=\iiint_G (5-\sqrt{x^2+y^2+z^2})e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$$

הגוף G הוא כדור ברדיוס 5, איפיון הגוף בקואורדינטות כדוריות הוא

$$0\le\theta\le 2\pi$$
$$0\le\varphi\le\pi$$
$$0\le r\le 5$$

ולכן

$$\text{mass}(G)=\iiint_G (5-\sqrt{x^2+y^2+z^2})e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{\varphi=0}^{\pi}d\varphi\int_{r=0}^{5}(5-r)e^{-r}\cdot\underbrace{r^2\sin\varphi}_{J}dr=$$
$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}1d\theta\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_{r=0}^{5}(5r^2-r^3)e^{-r}dr$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים בנפרד :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}1d\theta=2\pi$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi d\varphi=-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=-(-1)+1=2$$

ע"י 3 אינטגרציות בחלקים מתקבל

$$\int(5r^2-r^3)e^{-r}dr=(r^3-2r^2-4r-4)e^{-r}+c$$

ולכן

$$\int_{r=0}^{5}(5r^2-r^3)e^{-r}dr=(r^3-2r^2-4r-4)e^{-r}\Big|_0^5=$$
$$=\left((5^3-2\cdot5^2-4\cdot5-4)e^{-5}\right)-(-4)e^0=51e^{-5}+4$$

ולכן

$$\text{mass}(G)=\int_{\theta=0}^{2\pi}1d\theta\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int_{r=0}^{5}(5r^2-r^3)e^{-r}dr=$$
$$=2\pi\cdot2\cdot(51e^{-5}+4)=4\pi(51e^{-5}+4)$$

.2

לחשב מסת ונפח הגוף G החסום בין $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ לבין החרוט $z^2=k^2(x^2+y^2)$, $z\geq 0$

ומעל החרוט, כאשר צפיפות המסה ליחידת נפח נתונה ע״י $\rho=x^2+y^2+z^2$. $a,k>0$ פרמטרים.

מסת הגוף G נתונה ע״י

$$\text{mass}(G)=\iiint_G \rho(x,y,z)dV=\iiint_G (x^2+y^2+z^2)dV$$

הגוף G :

משוואת הספירה :

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$
$$x^2+y^2+z^2-2az+a^2=a^2$$
$$x^2+y^2+z^2=2az$$

בקואורדינטות כדוריות :

$$r^2=2ar\cos\varphi$$
$$r^2-2ar\cos\varphi=0$$
$$r(r-2a\cos\varphi)=0 \quad\Rightarrow\quad r=0 \ , \ r=2a\cos\varphi$$

משוואת החרוט :

$$z^2=k^2(x^2+y^2)$$

בקואורדינטות כדוריות :

$$(r\cos\varphi)^2=k^2\left((r\sin\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2\right)$$
$$r^2\cos^2\varphi=k^2r^2\sin^2\varphi$$
$$\cos^2\varphi=k^2\sin^2\varphi$$
$$\cot^2\varphi=k^2$$

$0\leq\varphi\leq\pi$ ולכן $\cot\varphi\geq 0$, ולכן

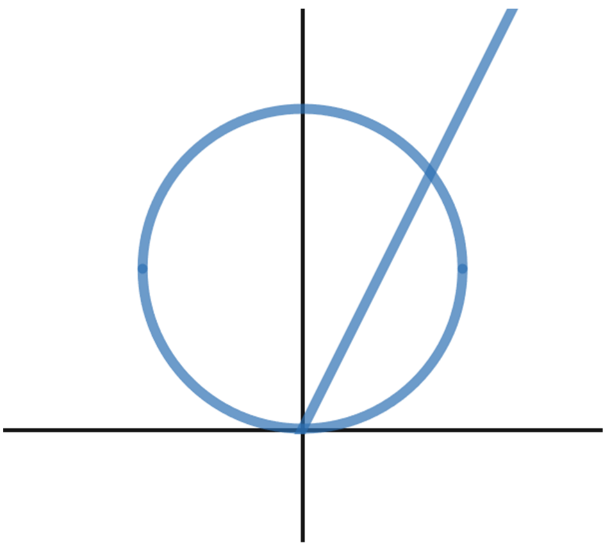
$$\cot\varphi=k \quad\Rightarrow\quad \varphi=\text{arccot}(k)$$

לשם נוחות נסמן $\beta=\text{arccot}(k)$, זהו קבוע $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, ואז משוואת החרוט היא

$$\varphi=\beta$$

כעת איפיון התחום G בקואורדינטות כדוריות :

נסתכל על חתך דרך ציר z (בכוון כלשהו).



לגוף G יש סימטריה סיבובית סביב ציר z . כלומר לגוף 'אותה צורה' בכל כוון θ מציר z .

ולכן

$$0\leq\theta\leq 2\pi$$

תחום האינטגרציה הוא מעל החרוט ולכן

$0 \le \varphi \le \beta$

תחום האינטגרציה הוא בתוך הספירה ולכן

$0 \le r \le 2a\cos\varphi$

לסיכום איפיון התחום G בקואורדינטות כדוריות הוא

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \varphi \le \beta$

$0 \le r \le 2a\cos\varphi$

ולכן מסת הגוף G נתונה ע"י

$$\text{mass}(G) = \iiint_G (x^2+y^2+z^2)dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\beta} d\varphi \int_{r=0}^{2a\cos\varphi} r^2 \cdot \underbrace{r^2\sin\varphi}_{J} dr =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_{\varphi=0}^{\beta} d\varphi \int_{r=0}^{2a\cos\varphi} r^4 \cdot \sin\varphi dr = 2\pi \cdot \int_{\varphi=0}^{\beta} d\varphi \frac{r^5}{5}\sin\varphi \Bigg|_{r=0}^{2a\cos\varphi} =$$

$$= 2\pi \int_{\varphi=0}^{\beta} \frac{(2a\cos\varphi)^5}{5}\sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi \cdot 32a^5}{5} \int_{\varphi=0}^{\beta} \cos^5\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

ע"י החלפת משתנה

$t = \cos\varphi$

$dt = -\sin\varphi d\varphi \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi d\varphi = -dt$

$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \cos 0 = 1$

$t = \beta \quad \Rightarrow \quad t = \cos\beta$

נקבל

$$\text{mass}(G) = \frac{64a^5\pi}{5} \int_{t=1}^{\cos\beta} t^5(-1)dt = \frac{64a^5\pi}{5}\left(-\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_{t=1}^{\cos\beta} = \frac{32a^5\pi}{15}(1-\cos^6\beta)$$

נפח הגוף G נתון ע"י

$$\text{volume}(G) = \iiint_G 1 dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{\beta} d\varphi \int_{r=0}^{2a\cos\varphi} 1 \cdot \underbrace{r^2\sin\varphi}_{J} dr =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_{\varphi=0}^{\beta} d\varphi \int_{r=0}^{2a\cos\varphi} r^2 \cdot \sin\varphi dr = 2\pi \cdot \int_{\varphi=0}^{\beta} d\varphi \frac{r^3}{3}\sin\varphi \Bigg|_{r=0}^{2a\cos\varphi} =$$

$$= 2\pi \int_{\varphi=0}^{\beta} \frac{(2a\cos\varphi)^3}{3}\sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi \cdot 8a^3}{3} \int_{\varphi=0}^{\beta} \cos^3\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{16a^3\pi}{3} \int_{t=1}^{\cos\beta} t^3(-1)dt = \frac{16a^3\pi}{3}\left(-\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{t=1}^{\cos\beta} = \frac{4a^3\pi}{3}(1-\cos^4\beta)$$

.3

לחשב מסת הגוף G שהינו שמינית מקליפה כדורית שמרכזה בראשית הצירים, רדיוסה הפנימי 1 ורדיוסה החיצוני 2, שמינית הקליפה הכדורית המוגדרת ע״י $z \le 0$, $y \ge 0$, $x \le 0$, כאשר צפיפות המסה ליחידת נפח נתונה ע״י $\rho(x,y,z)=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}$.

מסת הגוף G נתונה ע״י

$$\text{mass}(G)=\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dV=\iiint\limits_G \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}dV$$

כעת איפיון התחום G בקואורדינטות כדוריות:

הגוף G הוא חלק מקליפה כדורית שמרכזה בראשית הצירים, רדיוסה הפנימי 1 ורדיוסה החיצוני 2, כלומר

$$1^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 2^2$$
$$1 \le r \le 2$$

שמינית הקליפה הכדורית מוגדרת ע״י $z \le 0$, $y \ge 0$, $x \le 0$.

התנאים $y \ge 0$, $x \le 0$ מגדירים את רבע הכדור ברביע השני, בקואורדינטות כדוריות

$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

התנאי $z \le 0$ מגדיר את חצי הכדור התחתון, בקואורדינטות כדוריות

$$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$$

לסיכום איפיון התחום G בקואורדינטות כדוריות הוא

$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$
$$\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$$
$$1 \le r \le 2$$

ולכן מסת הגוף G נתונה ע״י

$$\text{mass}(G)=\iiint\limits_G \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}dV=\int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi}d\theta\int\limits_{\varphi=\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{r=1}^{2}\frac{\sqrt{r^2}}{1+(r^2)^2}\cdot\underbrace{r^2\sin\varphi}_{J}dr=$$

$$=\int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi}d\theta\int\limits_{\varphi=\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_{r=1}^{2}\frac{r^3}{1+r^4}\sin\varphi dr=$$

$$=\int\limits_{\theta=\pi/2}^{\pi}1d\theta\cdot\int\limits_{\varphi=\pi/2}^{\pi}\sin\varphi d\varphi\cdot\int\limits_{r=1}^{2}\frac{r^3}{1+r^4}dr=$$

$$=\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-\cos\varphi)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\cdot\frac{\ln(1+r^4)}{4}\Bigg|_{r=1}^{2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\ln 17-\ln 2}{4}=\frac{\pi}{2}\cdot(-(-1)+0)\cdot\frac{1}{4}\ln\frac{17}{2}=\frac{1}{8}\pi\ln\frac{17}{2}$$

אינטגרל קווי מסוג שני

.1

לחשב עבודת השדה $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\hat{i}+(x+y)\hat{j}+z^2\hat{k}$ לאורך מסילת הסליל γ שציר האורך שלה הוא ציר z, הרדיוס a, הפסיעה $2\pi b$, $0\le z\le 6\pi b$ ומתחיל בנקודה $(a,0,0)$ (a,b פרמטרים חיוביים).

עבודת השדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ נתונה ע"י

$$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

פרמטריזציה של המסילה:

במישור xy ('במבט מלמעלה') המסילה היא מעגל שמרכזו הראשית ורדיוסו a, ולכן

$$x=a\cos t\ ,\ y=a\sin t$$

נקודת ההתחלה היא $(a,0)$ וזה מתאים ל $t=0$.

המסילה היא סליל ולכן z גדל בקצב קבוע כלומר $z(t)$ היא פונקציה לינארית.

המסילה מתחילה בנקודה $(a,0,0)$ כלומר ב $z=0$. הפרמטר מתחיל ב $t=0$ ולכן $z(0)=0$.

הפסיעה היא $2\pi b$ כלומר בכל סיבוב של הסליל (t גדל ב 2π), z גדל ב $2\pi b$, ומכאן ש

$$z=bt$$

נתון ש $0\le z\le 6\pi b$ כלומר

$$0\le bt\le 6\pi b \quad\Rightarrow\quad 0\le t\le 6\pi$$

כלומר 'בסליל יש 3 סיבובים'.

לסיכום, פרמטריזציה של מסילת הסליל נתונה ע"י

$$x=a\cos t\ ,\ y=a\sin t\ ,\ z=bt\ \ ,\ \ t:0\to 6\pi$$

ולכן עבודת השדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ נתונה ע"י

$$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=$$

$$=\int_{t=0}^{6\pi}\left[\underbrace{(a\cos t+a\sin t)}_{P}\cdot\underbrace{(-a\sin t)}_{x'}+\underbrace{(a\cos t+a\sin t)}_{Q}\cdot\underbrace{(a\cos t)}_{y'}+\underbrace{(bt)^2}_{R}\cdot\underbrace{b}_{z'}\right]dt=$$

$$=\int_{t=0}^{6\pi}\left[a^2(\cos^2 t-\sin^2 t)+b^3t^2\right]dt=\int_{t=0}^{6\pi}\left[a^2\cos 2t+b^3t^2\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\sin 2t+\frac{1}{3}b^3t^3\Big|_{t=0}^{6\pi}=\frac{1}{2}a^2(\sin 12\pi-\sin 0)+\frac{1}{3}b^3(6\pi)^3=72b^3\pi^3$$

.2

לחשב עבודת השדה $\vec{F}(x,y)=(x-2y)\hat{i}+(x+2y)\hat{j}$ לאורך המסילה γ שהינה החצי העליון של המעגל שמרכזו $(0,0)$ ורדיוסו 3, עם כוון השעון.

עבודת השדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ נתונה ע"י

$$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

פרמטריזציה של המסילה:

המסילה γ היא (חלק מ) המעגל שמרכזו $(0,0)$ ורדיוסו 3, ולכן פרמטריזציה שלה נתונה ע"י

$$x=3\cos t\ ,\ y=3\sin t$$

המסילה γ היא החצי העליון של המעגל עם כוון השעון, כלומר מתחילה בנקודה $(-3,0)$ (המתאימה ל $t=\pi$) ומסתיימת בנקודה $(3,0)$ (המתאימה ל $t=0$), ולכן

$$t:\pi\to 0$$

ולכן עבודת השדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ נתונה ע"י

$$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=$$

$$=\int_{t=\pi}^{0}\left[\underbrace{(3\cos t-2\cdot 3\sin t)}_{P}\cdot\underbrace{(-3\sin t)}_{x'}+\underbrace{(3\cos t+2\cdot 3\sin t)}_{Q}\cdot\underbrace{(3\cos t)}_{y'}\right]dt=$$

$$=\int_{t=\pi}^{0}\left[18\sin^2 t+9\cos^2 t+9\sin t\cos t\right]dt=\int_{t=\pi}^{0}\left[9+9\sin^2 t+9\sin t\cos t\right]dt=$$

$$=\int_{t=\pi}^{0}\left[9+9\frac{1-\cos 2t}{2}+9\frac{\sin 2t}{2}\right]dt=\int_{t=\pi}^{0}\left[\frac{27}{2}-\frac{9}{2}\cos 2t+\frac{9}{2}\sin 2t\right]dt=$$

$$=\frac{27}{2}t-\frac{9}{4}\sin 2t-\frac{9}{4}\cos 2t\Big|_{t=\pi}^{0}=\frac{27}{2}(0-\pi)-\frac{9}{4}(\sin 0-\sin 2\pi)-\frac{9}{4}(\cos 0-\cos 2\pi)=-\frac{27}{2}\pi$$

אינטגרל קווי מסוג ראשון

1.

לחשב $\int_\gamma (x-3y^2)ds$ כאשר המסילה γ היא הקטע הישר בין הנקודות $(0,0)$ ו $(2,2)$.

המסילה γ היא הקטע הישר בין הנקודות $(0,0)$ ו $(2,2)$, זהו חלק מהישר $y=x$.

פרמטריזציה של המסילה:

$$x=t\ ,\ y=t\ \ ,\ t:0\to 2$$

ולכן

$$\int_\gamma (x-3y^2)ds=\int_{t=0}^{2}(t-3t^2)\sqrt{1^2+1^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{2}(t-3t^2)dt=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}t^2-t^3\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}2^2-2^3\right)-0=-6\sqrt{2}$$

2.

מסילה γ מונחת על העקומה במישור המתוארת ע״י המשוואה $y^2 = x^3$, בין הנקודות $(0,0)$ ו $(1,1)$.

צפיפות המסה הקווית היא $\rho(x,y) = \sqrt{4x+9y^{4/3}}$. לחשב את המסה של המסילה.

מסת המסילה γ נתונה ע״י

$$\text{mass}(\gamma) = \int_\gamma \rho(x,y)ds = \int_\gamma \sqrt{4x+9y^{4/3}}ds$$

פרמטריזציה אפשרית למסילה: $x = t^2 \ , \ y = t^3 \ , \ 0 \le t \le 1$.

הסבר: לכל $t \in \mathbb{R}$ הפונקציות $x = t^2 \ , \ y = t^3$ מקיימות את המשוואה $y^2 = x^3$, כלומר הנקודה $(x,y) = (t^2, t^3)$ אכן נמצאת על העקומה.

עבור $t = 0$ מתקבלת הנקודה $(0,0)$, עבור $t = 1$ מתקבלת הנקודה $(0,0)$.

ולכן

$$\text{mass}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{4x+9y^{4/3}}ds = \int_0^1 \sqrt{4t^2+9(t^3)^{4/3}}\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2+9t^4}\sqrt{4t^2+9t^4}dt = \int_0^1 (4t^2+9t^4)dt = \frac{4}{3}t^3 + \frac{9}{5}t^5\Big|_0^1 = \frac{4}{3}+\frac{9}{5}-0 = \frac{4}{3}+\frac{9}{5} = \frac{47}{15}$$