פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - שאלון Y

פתרון שאלה 1.א

נסמן $z=x^4$. הטור שווה ל-

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{4n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}.....\right)=\frac{1}{2}\ln(1+z)=\frac{1}{2}\ln(1+x^4),$$

כאשר $z=x^4$ מקיים את התנאי $-1<z=x^4\le 1$.

לכן תחום ההתכנסות שווה ל- $D:-1\le x\le 1$.

בקצוות $x=\pm 1$, הטור שווה ל-

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.....\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

וזה מתכנס רק בתנאי (לפי סכום של טור הרמוני מתחלף) .

פתרון שאלה 1. ב

$$I=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^8}{4}+\frac{x^{12}}{6}-...\right)dx=\left(\frac{x^5}{2\cdot 5}-\frac{x^9}{4\cdot 9}+\frac{x^{13}}{6\cdot 13}-...\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 13}-...$$

קיבלנו טור Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n(4n+1)}$ שמתכנס לערך האינטגרל S .

<u>פתרון שאלה 2.א</u>

נסמן את המישור הנתון ב: $3x+4y+z=D$. נסמן את הגליל הנתון ב: $x^2+y^2=R^2$.
המישור $3x+4y+z=D$ חותך את הגליל: $x^2+y^2=R^2$ במרחב $\mathbf{R}^3$.
רוצים למצוא נקודות קיצון של הגובה $z=z(x,y)$ של המישור כשהוא נחתך עם הגליל.
לפיכך נחפש נקודות קריטיות של פונקציית Lagrange לגרנז׳: $L=D-3x-4y-\lambda\left(x^2+y^2-R^2\right)$:

$$\begin{cases} L_x=-3-2\lambda x=0 \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow -\lambda=\dfrac{3}{2x} \\ L_y=-4-2\lambda y=0 \Rightarrow y\neq 0 \Rightarrow -\lambda=\dfrac{2}{y} \Rightarrow 4x=3y \Rightarrow \dfrac{25}{9}x^2=R^2 \\ L_\lambda=0 \Rightarrow x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

ונקבל: $A=\left(\frac{3R}{5},\frac{4R}{5}\right), B=-\left(\frac{3R}{5},\frac{4R}{5}\right)$.
עפ״י משפט ויירשטראס כיוון שפונקציית המישור רציפה מעל לתחום האילוץ שהוא קומפקטי, אחת מהנקודות הללו מקסימום מוחלט והשניה מינימום מוחלט. ע״י הצבה נראה ש A מינימום ו- B מקסימום. לפיכך הנקודות המבוקשות הן: $\left(-\frac{3R}{5},-\frac{4R}{5},D+5R\right),\left(\frac{3R}{5},\frac{4R}{5},D-5R\right)$, ז״א $(3,4,-24),(-3,-4,26)$.

<u>פתרון שאלה 2.ב</u>

ברור ש- $0 \xrightarrow{x\to 0} \frac{2xm^2}{4+m^4x^2} \underset{:x^2}{=} \frac{2x(mx)^2}{4x^2+(mx)^4} = F(x,mx)$, לכל m ממשי.
אף על פי שהגבול לא תלוי ב- m <u>לא יכולים</u> להסיק עדיין ש- F רציפה בנקודה $(0,0)$!
מתברר ש- $F(y^2,y)=\frac{2y^2y^2}{4\left(y^2\right)^2+y^4}=\frac{2}{5}\underset{y\to 0}{\to}\frac{2}{5}$ ולכן $\lim_{x\to 0}F(x,mx)\neq\lim_{y\to 0}F(y^2,y)$. מסיקים שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}F(x,y)$ לא קיים ולכן f לא רציפה בנקודה $\mathbf{0}=(0,0)$.

פתרון שאלה 3

נתון כי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות, ולכן היא דיפרנציאבילית ובפרט מתקיים כי

$$g(x,y)=D_u(f)(x,y)=\frac{\partial f}{\partial u}(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot u=af_x(x,y)+bf_y(x,y)\ .$$

א. מהנתון ידוע כי הנגזרות החלקיות של $f(x,y)$ בעלות נגזרות חלקיות רציפות, ולכן גם $g(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות (כסכום של פונקציות כאלה), בפרט היא דיפרנציאבילית, ומתקיים

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(g(x,y))a+\frac{\partial}{\partial y}(g(x,y))b=\frac{\partial}{\partial x}\left(af_x(x,y)+bf_y(x,y)\right)a+\frac{\partial}{\partial y}\left(af_x(x,y)+bf_y(x,y)\right)b=$$

$$=a^2f_{xx}(x,y)+abf_{xy}(x,y)+abf_{yx}(x,y)+b^2f_{yy}(x,y)=a^2f_{xx}(x,y)+2abf_{xy}(x,y)+b^2f_{yy}(x,y)$$

כמו כן, חישוב ישיר מראה כי

$$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}af_{xx}(x,y)+bf_{xy}(x,y)\\ af_{xy}(x,y)+bf_{yy}(x,y)\end{pmatrix}=$$

$$a\left(af_{xx}(x,y)+bf_{xy}(x,y)\right)+b\left(af_{xy}(x,y)+bf_{yy}(x,y)\right)=a^2f_{xx}(x,y)+2abf_{xy}(x,y)+b^2f_{yy}(x,y)$$

ולכן הביטויים שווים.

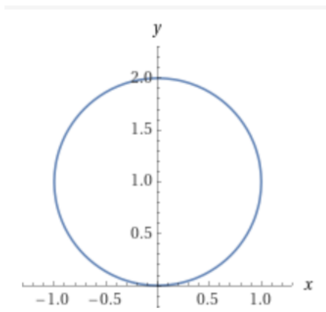
ב. **הטענה לא נכונה**: כדוגמה נגדית ניקח את $f(x,y)=x^2y$. הנגזרת של $g(x,y)$ לפי הסעיף הקודם היא $\frac{\partial g}{\partial u}(x,y)=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2y & 2x\\ 2x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. עבור $(x,y)=(1,0)$, מתקיים כי $\nabla f(1,0)=(0,1)$, ו- $\frac{\partial g}{\partial u}(1,0)=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=4ab$ כלומר עבור $u=(0,1)$ בכיוון הגרדיאנט מתקיים כי $\frac{\partial g}{\partial u}(1,0)=0$, ובכיוון $u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ מתקיים כי, $\frac{\partial g}{\partial u}(1,0)=2>0$ כלומר המקסימום לא מתקבל בכיוון הגרדיאנט.

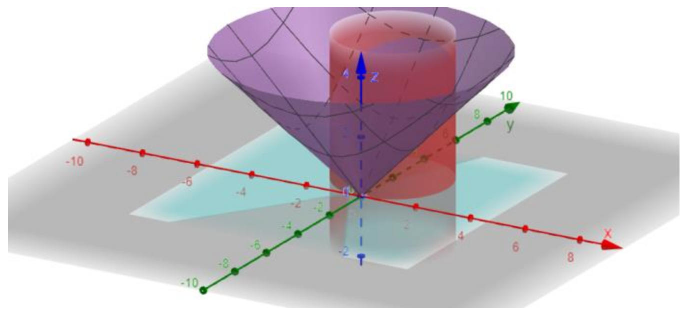
פתרון שאלה 4

קודם כל נצייר את הגוף הנתון. הגוף הנתון הוא חלק של הגליל $x^2+y^2=2y$

$$x^2+y^2=2y \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$$

החסום מלמטה על ידי המישור $z=0$ ומלמלה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$





ההיטל של הגוף על המישור $z=0$ הוא העיגול $x^2+y^2\le 2y$ $z=0: D_{xy}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2\le 1\right\}$

נעבור לקואורדינטות גליליות : $\left\{x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta,\ \ z=z\right\}$. ידוע ש- $J=r$.

מתקיים :

$$\begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ x^2+y^2\le 2y \Leftrightarrow r^2\le 2r\sin\theta \Leftrightarrow r\le 2\sin\theta \ \ and\ \ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 0\le z\le r \end{cases}$$

$$G_{xyz}\to G_{\theta rz}=\left\{(\theta,r,z)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, (\theta,r)\in D, 0\le z\le r\right\}, D=\left\{(\theta,r)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, 0\le\theta\le\pi, 0\le r\le 2\sin\theta\right\}$$

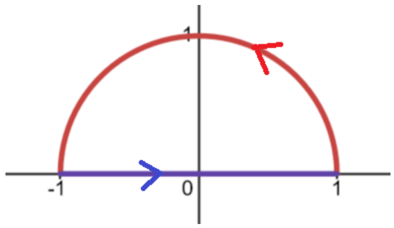
ולכן :

$$m(G)=\iiint\limits_{G_{xyz}} z\sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y,z)=\iiint\limits_{G_{\theta rz}} zr\cdot r\,d(\theta,r,z)=\int_0^{\pi}(\int_0^{2\sin\theta}(\int_0^{r} zr^2dz)dr)d\theta=\int_0^{\pi}(\int_0^{2\sin\theta} r^2\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^r dr)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(\int_0^{2\sin\theta}\frac{r^4}{2}dr)d\theta=\int_0^{\pi}\left.\frac{r^5}{10}\right|_0^{2\sin\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\frac{32}{10}\sin^5\theta d\theta=[*]=\frac{16}{5}\left(-\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{5}\cos^5\theta\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{16}{5}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{16}{5}\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{5}\frac{16}{15}=\frac{256}{75}\ \ because:$$

$$[*]\ \int\sin^5\theta d\theta=\int\left(1-\cos^2\theta\right)^2\sin\theta d\theta=-\int\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\cdot\left(\cos\theta\right)'d\theta=-\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\right)$$



פתרון שאלה 5 המסילה γ הנתונה בשאלה אינה סגורה. נפתור התרגיל ע"י סגירתה ושימוש במשפט Green.

נגדיר מסילה γ_0, זהו הקטע הישר מהנקודה $(-1,0)$ לנקודה $(1,0)$.

נגדיר מסילה $\gamma_* = \gamma + \gamma_0$, אז γ_* הינה מסילה סגורה. הכוון הנתון על γ (החלק ה"עליון") הוא מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(-1,0)$ (מימין לשמאל), והכוון שהגדרנו על γ_0 (החלק ה"תחתון") הוא מהנקודה $(-1,0)$ לנקודה $(1,0)$ (משמאל לימין), ומתקבל שהכוון על המסילה הסגורה γ_* הוא נגד כוון השעון.

נשים לב שהמסילות γ, γ_0 הינן חלקות ולכן γ_* מסילה חלקה למקוטעין.

נסמן ב D את התחום הסגור בתוך γ_*. γ_* הינה השפה של התחום D והכוון על γ_* הוא הכוון החיובי במובן משפט Green.

רכיבי השדה הן הפונקציות $P(x,y) = x + \cos x \sin y$, $Q(x,y) = xy + \sin x \cos y$, ואלו פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^2$.

לסיכום: $\vec{F}$ שדה וקטורי שרכיביו בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום $\mathbb{R}^2$ המכיל בתוכו את D, שפת D היא המסילה החלקה למקוטעין γ_* עם הכוון החיובי, מתקיימות כל דרישות משפט Green ולכן:

$$\oint_{\gamma_*} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA$$

$$Q_x = y + \cos x \cos y \,,\; P_y = \cos x \cos y \quad \Rightarrow \quad Q_x - P_y = y$$

התחום D הוא החצי העליון של המעגל שמרכזו הראשית ורדיוסו 1 ולכן בקואורדינטות פולריות $D = \{0 \le \theta \le \pi \,,\, 0 \le r \le 1\}$ ולכן

$$\oint_{\gamma_*} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y)\,dA = \iint_D y\,dA = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r\sin\theta \cdot r\,dr = \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 r^2 dr =$$

$$= (-\cos\theta)\Big|_0^\pi \cdot \frac{1}{3} r^3\Big|_0^1 = (-\cos\pi + \cos 0) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

נחשב את האינטגרל של השדה $\vec{F}$ על המסילה γ_0.

פרמטריזציה למסילה γ_0 נתונה ע"י $t : -1 \to 1$, $x = t \,,\, y = 0$ ולכן

$$\int_{\gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \left[(t + \cos t \sin 0)\cdot 1 + (t \cdot 0 + \sin t \cos 0)\cdot 0\right] dt = \int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{1}{2} t^2\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ולכן:

$$\oint_{\gamma_*} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma_*} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

<u>פתרון שאלה 6</u> נשתמש במשפט Gauss גאוס. המשטח הנתון S אינו סגור (S חצי ספירה).
כדי לחשב את השטף הדרוש נסגור את המשטח S.

נבמן $D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le 9\right\}$. נסמן $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 9, z\ge 0\right\}$.

נסמן את הבסיס של G ב- $S_1=\left\{(x,y,z): z=0,(x,y)\in D\right\}$.

שפת הגוף G שווה לאיחוד $\mathbf{\Sigma}=Bd\left(G\right)=S\cup S_1$.

רכיבי השדה $\vec{F}$ הם בעלי נגזרות חלקיות רציפות, המשטח $\mathbf{\Sigma}$ סגור ובוחרים וקטור נורמל יחידה כלפי חוץ.
הגוף G שווה לתחום הכלוא בתוך המשטח הסגור $\mathbf{\Sigma}$, ולכן השפה של G עם הכוון הנכון במובן משפט Gauss.
$\mathbf{\Sigma}$ הוא משטח חלק למקוטעין ולכן מתקיימות דרישות משפט Gauss. מסיקים ש-

$$\phi_{total}=\phi_{\Sigma}\left(\vec{F}\right)=\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS=\iiint\limits_{G} div\vec{F}dV$$

נחשב את הדיברגנץ של השדה:

$$div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=ye^{xy}+y^2+x^2+0+z^2-ye^{xy}=x^2+y^2+z^2$$

נשתמש בקואורדינטות כדוריות כדי לחשב את האינטגרל עבור השטף הכולל

$$\phi_{total}=\phi_{\Sigma}\left(\vec{F}\right)=\iiint\limits_{G} div\vec{F}dV=\iiint\limits_{G}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=[spherical\;\; coordinates\;\; and\;\; Fubini]=$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\phi d\phi\right)\left(\int_0^{3}\rho^4 d\rho\right)=2\pi\cdot 1\cdot\frac{3^5}{5}=\frac{486\pi}{5}$$

<u>על הבסיס התחתון</u> S_1, מכיוון שהנורמל החיצוני הוא בכיוון ציר z השלילי $\vec{n}=(0,0,-1)$, נקבל כי

$$\phi_{S_1}=\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot(0,0,-1)dS=-\iint\limits_{S_1}\left(\frac{z^3}{3}-zye^{xy}+x^2+y\right)dS=-\iint\limits_{S_1}\left(x^2+y\right)dS=0$$

נשתמש בקואורדינטות פולריות. מתקיים: $x^2+y=r^2\cos^2\theta+r\sin\theta, J=r$ לכן:

$$\phi_{S_1}=-\iint\limits_{S_1}\left(x^2+y\right)dS=-\iint\limits_{\substack{0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 3}}\left(r^2\cos^2\theta+r\sin\theta\right)rd(\theta,r)$$

$$\phi_{S_1}=-\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\right)\left(\int_0^{3}r^3dr\right)-\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{3}r^2dr\right)=-\pi\frac{3^4}{4}-0=-\frac{81\pi}{4}$$

השטף דרך המשטח S מתקבל על-ידי

$$\phi_{total}=\phi_S+\phi_{S_1}\Rightarrow\frac{486\pi}{5}=\phi_S-\frac{81\pi}{4}\Rightarrow\phi_S=\frac{486\pi}{5}+\frac{81\pi}{4}=\frac{2349\pi}{20}=117.45\pi$$

בהצלחה!