מבחן סוף סמסטר בקורס "אלגברה לינארית"

מועד Y

בהצלחה!

שאלה 1

(20 נק.) נתונה המערכת הבאה:
$$\begin{cases} x+ay-z=1 \\ x+y-az=a \\ 2x-4y+2az=-2 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר.

מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת

א) פתרון יחיד

ב) אינסוף פתרונות

ג) אין פתרון.

ד) במקרה ולמערכת יש אינסוף פתרונות, מצא אותם

שאלה 2

תהי $V=M_{2\times2}(\mathbb{R})$ (אוסף המטריצות הריבועיות מסדר 2). יהי U תת מרחב של V המוגדר באופן הבא: $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

תהי W תת קבוצה של V המוגדרת כך: $W=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

א. (5 נק.) מצא בסיס ומימד של W.

ב. (8 נק.) מצא בסיס ומימד של $U+W$.

ג. (4 נק.) מצא מימד של $U\cap W$

ד. (3 נק.) יהי W' תת מרחב של V ממימד 3 כך ש- $W'\neq W$. האם יתכן ש- $W+W'\neq V$? נמק.

שאלה 3

א) יהי $V=P_2(x)$ (מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2) ויהי $W=\mathbb{R}^3$

תהי נתונה $T: V\to W$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי:
$$T(p(x))=\begin{pmatrix}p(1)-p(0)\\p'(1)\\p'(0)\end{pmatrix}$$

א1) (6 נק.) מצא בסיס ל- $\ker(T)$

א2) (6 נק.) מצא בסיס ל- $\operatorname{Im}(T)$ ואמת את משפט המימדים המתאים.

ב) (8 נק.) בדוק האם קיימת העתקה לינארית $T: \mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^5$ כך ש- $\dim(Im(T))=4$? אם כן, בנה אותה, אם לא, הסבר למה.

שאלה 4

נתונה ההעתקה הליניארית $T: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-7y-4z\\3x+y+4z\\6x-8y+z\end{pmatrix}$$

א) (5 נק.) מצא את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הרגיל.

ב) (5 נק.) בדוק שהקבוצה

$$S=\{\boldsymbol{u_1}=(1,1,0),\boldsymbol{u_2}=(1,2,3),\boldsymbol{u_3}=(1,3,5)\}$$

מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

ג) (10 נק.) מצא את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס:

$$S=\{\boldsymbol{u_1}=(1,1,0),\boldsymbol{u_2}=(1,2,3),\boldsymbol{u_3}=(1,3,5)\}$$

(**הערה**: בסעיף זה אין צורך לעשות חישוב סופי. אפשר להציג רק כי מכפלה של מטריצות)

שאלה 5

יהי $V=P_2[x]$ מרחב פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2. ונתונה קבוצת הפולינומים
$B=\{1,1-x,1+x^2\}$

א. (5 נק.) הוכח כי B מהווה בסיס ל- $P_2[x]$

ב. (5 נק.) נתון פולינום $p(x)=5-x+4x^2$ בבסיס הסטנדרטי. מצא הצגה של פולינום $p(x)$ (קואורדינאטות שלו) לפי הבסיס B

ג. (10 נק.) מצא מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס סטנדרטי של V

שאלה 6

נתונה המטריצה. $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$

א) (6 נק.)חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .

ב) (6 נק.) מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A .

ג) (8 נק.) בדוק האם המטריצה לכסינה. במידה וכן, מצא את המטריצה המלכסנת. במידה ולא, הסבר למה היא לא לכסינה

מבחן סוף סמסטר בקורס "אלגברה לינארית"

מועד Y

בהצלחה !

שאלה 1

תהי נתונה המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ x + y - az = a \\ 2x - 4y + 2az = -2 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר.

מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת

א1) פתרון יחיד

א2) אינסוף פתרונות

א3) אין פתרון.

א4) במקרה ויש למערכת אינסוף פתרונות, מצא אותם

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a & a \\ 2 & -4 & 2a & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-a & -a+1 & a-1 \\ 0 & -4-2a & 2a+2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2/(1-a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4-2a & 2a+2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - (-4-2a)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4a+6 & -8-2a \end{array}\right)$$

אם $a = -1.5$, למערכת אין פתרון.

נבדוק את המערכת עבור $a = 1$ (במהלך הדירוג נעשתה חלוקה ב a-1). נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

כלומר למערכת יש אינסוף פתרונות. כאשר $a \neq 1, -1.5$ יש פתרון יחיד למערכת.

עבור $a = 1$ נקבל:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -6y + 4z = -4 \\ z = t \end{cases}$$

ופתרון כללי הוא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

<u>שאלה 2</u>

תהי $V = M_{2\times2}(R)$ (אוסף המטריצות הריבועיות מסדר 2). יהי U תת מרחב של V המוגדר באופן הבא: $U = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

תהי W תת קבוצה של V המוגדרת כך: $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathrm{R} \right\}$.

א. (5 נק.) מצא בסיס ומימד של W .

ב. (12 נק.) מצא בסיס ומימד של תתי המרחב $U+W$ של V ומצא את המימד של $U \cap W$

ג. (3 נק.) יהי W' תת מרחב של V ממימד 3 כך ש- $W' \neq W$. האם יתכן ש- $W + W' \neq V$? נמק.

פתרון:

כיון שהרכיבים השונים מ-0 בכל מטריצה הם במקומות שונים – אנו יודעים שהמטריצות בלתי-תלויות לינארית, ולכן קבלנו בסיס ל- W.

$$W = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ב. נחשב את $U+W$:

קבוצה פורשת ל- $U+W$ היא איחוד הבסיסים שלהם. לכן:

$$U + W = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim(U+W) = 4$ ולכן ניתן לבחור את הבסיס הסטנדרטי הוא:

$$U + W = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נחשב את $U \cap W$: על פי משפט המימדים:

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 3 + 2 - 4 = 1$$

ג. לא ייתכן. נראה שתמיד מתקיים $W + W' = V$.

ראינו ש- W הוא תת-מרחב ממימד 3. כעת גם W' הוא ממימד 3. כיון שנתון ש- W, W' שונים, מתקיים בוודאי $W \subset W + W'$ (הכלה אמיתית), שכן אילו היה מתקיים שוויון $W = W + W'$, בהכרח נובע מכך ש- $W' \subseteq W$, ומכיוון שמימדי W, W' שווים, נקבל ש- $W = W'$, בסתירה לנתון שהמרחבים W, W' שונים.

<u>שאלה 3</u>

יהי $V = P_2(x)$ (מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2 ויהי $W = R^3$

תהי נתונה $T: V \to W$ העתקה ליניארית המוגדרת על ידי:

$$T\big(p(x)\big) = \begin{pmatrix} p(1) - p(0) \\ p'(1) \\ p'(0) \end{pmatrix}$$

א. (6 נק.) מצא בסיס ל- $\ker(T)$

ב. (6 נק.) מצא בסיס ל- $\mathrm{Im}(T)$ ואמת את משפט המימדים המתאים.

ג. (8 נק.) בדוק האם קיימת העתקה לינארית $T: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^5$ כך ש- $\dim\big(Im(T)\big) = 4$? אם כן, בנה אותה, אם לא, הסבר למה.

כדי למצוא את הגרעין של העתקה נשווה את

$$T(p(x) = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכאן:

$$ker(T) = Sp\{1\}$$

$$Im(T) = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$dim(ker(T)) + \dim(Im(T)) = 1 + 2 = 3$$

ג) לא קיימת. לפי משפט הממדים

$$3 = dim(ker(T)) + \dim\big(Im(T)\big) = dim(ker(T)) + 4$$

מיימד לא יכול להיות שלילי

<u>שאלה 4</u>

נתונה ההעתקה הליניארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 7y - 4z \\ 3x + y + 4z \\ 6x - 8y + z \end{pmatrix}$$

א) (5 נק.) מצא את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הרגיל.

ב) (5 נק.) בדוק שהקבוצה

$$S = \{\boldsymbol{u_1} = (1,1,0), \boldsymbol{u_2} = (1,2,3), \boldsymbol{u_3} = (1,3,5)\}$$

מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

ג) (10 נק.) מצא את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס:

$$S = \{\boldsymbol{u_1} = (1,1,0), \boldsymbol{u_2} = (1,2,3), \boldsymbol{u_3} = (1,3,5)\}$$

(הערה: אין צורך לעשות חישוב סופי, אפשר רק להציג כמכפלה של מטריצות)

פתרון:

א. המטריצה המייצגת לפי הבסיס הרגיל היא:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. הקבוצה בת"ל, לכן מהווה בסיס $\mathbb{R}^3$

ג. כדי לחשב את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס:

$$S=\{\vec{u}_1=(1,1,0),\ \vec{u}_2=(1,2,3),\ \vec{u}_3=(1,3,5)\}$$

נחשב את מטריצות המעבר:

$$.\,P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&3&5\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\5&-5&2\\-3&3&-1\end{pmatrix}$$

ואז על פי משפט, נוכל לחשב את המטריצה המייצגת בבסיס החדש:

$$[T]_s=P^{-1}[T]_EP=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\5&-5&2\\-3&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-7&-4\\3&1&4\\6&-8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&3&5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}15&65&104\\-49&-219&-351\\29&130&208\end{pmatrix}$$

שאלה 5

יהי $V=P_2[x]$ מרחב פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-2. ונתונה קבוצת הפולינומים
$$B=\{1,1-x,1+x^2\}$$

א. (5 נק.) הוכח כי B מהווה בסיס ל- $P_2[x]$

ב. (5 נק.) נתון פולינום $p(x)=5-x+4x^2$ בבסיס הסטנדרטי. מצא הצגה של פולינום $p(\text{x})$ (קואורדינאטות שלו) לפי הבסיס B

ג. (10 נק.) מצא מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס סטנדרטי של V

א. הקבוצה בת"ל, לכן מהווה בסיס ל-V.

ב.

$$p(x)=5-x+4x^2=0\cdot1+1(1-x)+4(1+x^2)$$
$$p(x)=5-x+4x^2=(0,1,4)_B$$

ג.

$$[I]_E^B=\ ([I]_B^e)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

שאלה 6

א) נתונה המטריצה. $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}0-\lambda&0&-2\\1&2-\lambda&1\\1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$$

$$|A-1I|==\begin{bmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{\lambda=1}=\left\{\begin{bmatrix}-2t\\t\\t\end{bmatrix},t\in\text{R}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$|A-2I|=\begin{bmatrix}-2&0&-2\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ניתן לראות שקיימים שני וקטורים עצמיים בת"ל ו:

$$\boldsymbol{V}_{\lambda=2} = Sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

מכאן נובע ש- A לכסינה והמטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$