שאלות: 1 , 4 , 5 ,
6ב , 8 , 9א,ב

שאלה 1 **(טור טלסקופי וטור גיאומטרי).**
בדוק האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים. במקרה של התכנסות מצאו את הסכום של הטור.

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{n+1} - e^{n}\right)$ ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$ ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}5^n}{2^{n+1}}$

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$; $S_n = \left(\frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{2}} - \cancel{\frac{2}{3}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+1}\right)$

טלסקופי.

$S_n = 2 - \frac{2}{n+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \cancel{\frac{2}{n+1}}^{\to 0} = 2$

הטור מתכנס לסכום 2.

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{n+1} - e^{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^n(e-1) = (e-1)\sum_{n=1}^{\infty} e^n$

$a_n = e^n$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty \neq 0$

לפי מתק"מ התנאי ההכרחי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftarrow$ הטור מתבדר.

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{n+1}{n}\right] - \ln\left[\frac{n+2}{n+1}\right]$

טור טלסקופי.

$S_n = \ln 2 - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\ln 2 - \cancel{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}^{\to 0}\right] = \ln 2$

הטור מתכנס לסכום $\ln 2$.

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 2^3}{3^n} = 2^3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

נבצע את מבחן השורש של קושי.

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

התקבל ש: $L = \frac{2}{3} < 1 \Longleftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

$8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ טור הנדסי. ; $S_n = 8 \cdot \frac{2/3}{1-2/3}$

$$S = 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2/3}{1-2/3} = 8 \cdot \frac{6}{3} = 8 \cdot 2 = 16$$

מתכנס.

ה) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^n}{2^{n+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^{n+1}}$

נבדוק התכנסות בהחלט.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

נבצע את מבחן השורש של קושי.

$$L = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4} > 1$$

התקבל שהגבול גדול מ-1, לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

נצטרך לבדוק התכנסות הטור לפי קריטריון לייבניץ. הטור מתכנס בקיום 3 תנאים:

1) $U_n \geq 0$; $U_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n \geq 0$ ✓

2) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n = \infty$ ✗

3) $U_{n+1} \leq U_n$

לא מתקיים תנאי הכרחי $\lim_{n\to\infty} U_n = 0 \Longleftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

שאלה 4 (מבחן השוואה הראשון).
חקרו את התכנסות הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\sin^2 n}{\sqrt{n^7+\cos^2 n}}$ ג. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^2 n+n^2}{n\ln^3 n+n^4}$

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln(n)\geq\frac{1}{n}\cdot\ln(n)\overset{\forall n\geq 3}{>}\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln(n)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln(n)>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

הטור ההרמוני, מתבדר. לכן ממבחן ההשוואה I מתקבל לנו

שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\ln(n)$, שאותו מחנו, מתבדר.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\sin^2 n}{\sqrt{n^7+\cos^2 n}}$; $a_n=\frac{n^2-\overbrace{\sin^2 n}^{\geq 0}}{\sqrt{n^7+\cos^2 n}}<\frac{n^2}{\sqrt{n^7+\cos^2 n}}$

$$<\frac{n^2}{\sqrt{n^7}}=\frac{n^2}{(n^7)^{1/2}}=\frac{n^2}{n^{3.5}}\overset{/:n^2}{=}\frac{1}{n^{1.5}}$$

קיבלנו $power=p=1.5>1$, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס.

$\Longleftarrow$ ממבחן ההשוואה הראשון נובע כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\sin^2 n}{\sqrt{n^7+\cos^2 n}}$ מתכנס.

(6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+\sin^2 n}{n^4+n\ln^3 n}$; $a_n=\frac{n^2+\sin^2 n}{n^4+\underbrace{n\ln^3 n}_{\geq 0}} < \frac{n^2+\sin^2 n}{n^4} = \frac{n^2}{n^4}+\frac{\overbrace{\sin^2 n}^{\leq 1}}{n^4}$

$\leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}$

ולכן מתקבל אי-שוויון הטורים:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+\sin^2 n}{n^4+n\ln^3 n} < \sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 1/n^4$$

טורים ידועים, מתכנסים לגבולות S_1, S_2,

לפי אריתמטיקה של גבולות: $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2 + 1/n^4$

סכום של גבולות סופיים שווה לגבול סופי. $S=S_1+S_2$

$\Longleftarrow$ מכאן מתקבל (ממבחן ההשוואה I) שגם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+\sin^2 n}{n^4+n\ln^3 n}$ מתכנס.

<u>שאלה 5</u> (מבחן השוואה השני)

בדוק את התכנסות של הטורים :

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ב) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n^3}}-1)$ ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\left(\frac{n+\sin^4(n)}{n^3}\right)$

(1א) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

נבנה טור מפס $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$

נבדוק את מבחן ההשוואה II. נבדוק הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} \xRightarrow{\text{נכון גם עבור } x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}} \;;\; t=1/\sqrt{x}$$

נציב: $x\to\infty \Rightarrow 1/\sqrt{x}\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \boxed{1} \Longrightarrow 0<1<\infty \Longrightarrow$$

לפי מבחן המנה II, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ באותו אופי.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - טור ידוע מתבדר $(p<1)$, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

ב $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n^3}-1\right)$; $a_n=\left(e^{1/n^3}-1\right)$

נבנה טור מפש $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; $b_n=\frac{1}{n^3}$

נבצע את מבחן ההשוואה II. נבדוק הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1/n^3}-1}{1/n^3}\ ;\ t=1/n^3\ \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}\ \overset{\text{נב׳ב}}{1/n^3\to 0}\ \Longrightarrow\ \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\underset{0<\quad<\infty}{\boxed{1}}$$

לפי מבחן המנה II, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ בעלי אותו אופי.

ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור ידוע מתכנס $(p>1)$, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\left(\frac{n+\sin^4 n}{n^3}\right)$; $a_n=n^{1/n}\left(\frac{n+\sin^4 n}{n^3}\right)$

נבנה טור מפש $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; $b_n=\frac{1}{n^2}$

נבצע את מבחן ההשוואה II. נבדוק הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}n^{1/n}\left(\frac{n+\sin^4 n}{n^3}\right)\cdot n^2=\lim_{n\to\infty}n^{1/n}\left(\frac{n}{n^3}+\overset{\text{אפסה·חסומה}\ \to 0}{\cancel{\sin^4 n\cdot\frac{1}{n^3}}}\right)\cdot n^2$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}\left(\frac{n}{n^3}\right)\cdot n^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1+1/n}}{n^3}\right)\cdot n^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1+1/n}}{n^3}\right)\cdot n^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{3+1/n}}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^3}\cdot n^{1/n}}{\cancel{n^3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\overset{\text{גבול ידוע}}{=}\underset{0<\quad<\infty}{\boxed{1}}$$

לפי מבחן המנה II, הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ בעלי אותו אופי.

ו-$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור ידוע מתכנס $(p>1)$, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

שאלה 8

נתון טור מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ וטור מתבדר $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. הוכיחו שטור הסכומים $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ הוא טור מתבדר.

$S_a = \lim_{n\to\infty} S_{n_a} =$ $0 <$ גבול סופי חיובי $< \infty$

$S_b = \lim_{n\to\infty} S_{n_b} = +\infty$ או $-\infty$

1) $S_b = "-\infty" \Rightarrow S_{a+b} = -\infty + S_a = -\infty \Rightarrow$ מתבדר

1) $S_b = "+\infty" \Rightarrow S_{a+b} = +\infty + S_a = +\infty \Rightarrow$ מתבדר

שאלה 9 **(תנאי הכרחי להתכנסות, טור של סכום הטורים).**

חקרו את התכנסות הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+(n-1)!}{(n+1)!}$ ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+n!}{(n+1)!}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$.

א)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+(n-1)!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+(n-1)!}{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)} + \frac{\cancel{n}}{(n-1)!\cdot \cancel{n}\cdot(n+1)} + \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot n\cdot(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!\cdot(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$= S_1$ מתכנס, מבחן השוואה I

$= S_2$ מתכנס, מבחן השוואה I

$= S_3$ מתכנס, מבחן השוואה I עם $\frac{1}{n^2}$

$S_1+S_2+S_3 = S_n$ סכום הטורים שווה לכל הסכומים. הטור מתכנס.

ב

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+n!}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+n!}{n!\cdot(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\cdot(n+1)} + \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}!\,(n+1)} + \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n-1)!\,(n+1)} + \frac{1}{n+1} > \sum_{n=0} \frac{1}{n}$$

טור הרמוני // מתבדר

$\Longleftarrow$ לכן מתקבל ממבחן ההשוואה I, שהטור המקורי מתבדר

שאלה 10

הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ מתכנס. האם אפשר להשתמש במבחן המנה של D'Alembert ?
האם אפשר להשתמש במבחן השורש של Cauchy ?

נשתמש במבחן השורש של קושי:

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{=1})^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty} 1^2 = \underline{\frac{1}{2} < 1} \Longrightarrow$$

מתקבל שלפי מבחן השורש של קושי,

הטור מתכנס.

שאלה 11

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n}}{3^n}2^n$ מתכנס ? האם אפשר להשתמש במבחן המנה של D'Alembert ?
האם אפשר להשתמש במבחן השורש של Cauchy ?

נשתמש במבחן השורש של קושי:

$$a_n=\frac{\sqrt{3n}}{3^n}\cdot 2^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{3n}}{3^n}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(3n)^{1/2}}}{\sqrt[n]{3^n}}\cdot\sqrt[n]{2^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(3n)^{1/2}}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\cancelto{1}{\sqrt[n]{3}}\cdot\cancelto{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{1/2}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}(1\cdot 1)^{1/2}=\underline{\frac{2}{3}<1}$$

מתקבל שלפי מבחן השורש של קושי, הטור מתכנס.

שאלה 13

נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a)^n}{\sqrt{n+1}}$, כאשר a מספר ממשי חיובי. עבור איזה $a>0$ הטור מתכנס ?

נשתמש במבחן השורש של קושי.

$$a_n=\frac{2^n\cdot a^n}{\sqrt{n+1}}\geq 0\Longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n a^n}{\sqrt{n+1}}=\frac{2a}{1}+\frac{4a^2}{\sqrt{2}}+\frac{8a^3}{\sqrt{3}}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n\cdot a^n}{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n}\cdot\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{(n+1)^{1/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a}{\cancel{(n+1)^{1/2n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1}$$

$$=\underline{\lim_{n\to\infty}2a}\Longrightarrow$$

מתקבל שהטור מתכנס, לפי מבחן השורש של קושי,

עבור $2a<1$ $\Longleftarrow$ כלומר עבור $0<a<1/2$

שאלה 14

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \quad ; \quad f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

נציב כך:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}\,dx \quad ; \quad t = \ln(x+1), \quad dt = \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \int_2^{\infty} t^{-2}\,dt = \left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_2^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_2^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[\cancelto{0}{\frac{1}{-3b^3}} - \frac{1}{-3\cdot(2^3)}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{24} = \frac{1}{24} \implies$$

קיבלנו שהאינטגרל מתכנס, ולכן גם הטור המקורי מתכנס.