

סיכום 5

משתנה מקרי בדיד. התפלגויות בדידות מיוחדות

משתנים מקריים

הגדרה: משתנה מיקרי (מ"מ) הוא פונקציה המתאימה לכל תוצאה אפשרית במרחב המדגם ערך ממשי. מסמנים ב- X, Y, Z, \dots

משתנה מקרי בדיד

הגדרה: פונקציית ההסתברות (התפלגות) של מ"מ בדיד נותנת לכל ערך שהמ"מ יכול לקבל את ההסתברות שהמ"מ יקבל את הערך הזה. מסמנים: $P_X(x) = P(X = x)$.
תכונות:

$$1. \quad 0 \leq P_X(x) \leq 1$$

2. נניח כי הערכים שמקבל X הם x_1, x_2, \dots, x_n אזי $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$, כלומר סכום

ההסתברויות הוא 1.

תיאור גרפי של ההתפלגות:

דיאגרמת מקלות- מעל כל ערך x_i ש- X מקבל בהסתברות חיובית מציירים מקל שגובהו הוא ההסתברות $P(X = x_i)$.

הגדרה: פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ X מתאימה לכל מספר ממשי t , את ההסתברות $P(X \leq t)$. מסמנים: $F_X(t)$.

הגדרה: ערך שכיח הוא הערך שהמ"מ מקבל בהסתברות הגבוהה ביותר, כלומר $Mo(X) = x_0$ אם $P(X = x_0)$ היא המקסימלית. מסמנים $Mo(X)$.

הגדרה: תוחלת של מ"מ היא ממוצע משוקלל של הערכים שהמ"מ מקבל ומחושבת ע"י:

$$E[X] = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_n P(X = x_n)$$

תכונות התוחלת:

$$1. \quad \text{חיבוריות- עבור כל שני מ"מ } X, Y \text{ מתקיים: } E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$(\text{עבור } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ אוסף של מ"מ מתקיים } E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i])$$

$$2. \quad \text{לינאריות- עבור כל שני מספרים ממשיים } a, b \text{ מתקיים } E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$3. \quad \text{תוחלת של פונקציה- יהיו } X \text{ מ"מ ו- } g(x) \text{ פונקציה אזי}$$

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i)$$

הגדרה: השונות של מ"מ X נתונה ע"י $V(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$ כאשר $\mu = E[X]$. למעשה השונות היא מדד פיזור, בעזרת השונות ניתן להעריך עד כמה הערכים שהמ"מ X מקבל מרוחקים (מפוזרים) מהתוחלת שלו.

תכונות השונות:

$$1. \quad V(X) \geq 0, \quad V(X) = 0 \text{ אם } X \text{ הוא מ"מ קבוע.}$$

$$2. \quad \text{לכל } a, b \text{ ממשיים } V(aX + b) = a^2 V(X).$$

סטיית התקן של X נתונה ע"י $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. סטיית התקן מקיימת:

$$1. \quad \sigma(X) \geq 0 \quad (\sigma(X) = 0 \text{ אם } V(X) = 0).$$

$$2. \quad \text{לכל } a, b \text{ ממשיים } \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

התפלגויות מיוחדות של משתנים מקריים בדידים

הגדרה: X מתפלג **אחיד (בדיד)**: $X \sim U(N)$, מתאר משתמה המקבל את הערכים $1, 2, \dots, N$ בהסתברויות שוות.

$$P(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

הגדרה: X מתפלג **בינומי**, $X \sim B(n, p)$

בסדרה של n ניסויי ברנולי ב"ת עם הסתברות p להצלחה בכל ניסוי, X סופר את מס' ההצלחות.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$E[X] = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

הגדרה: X מתפלג **גיאומטרי**, $X \sim G(p)$

בסדרה של ניסויי ברנולי ב"ת, כאשר ההסתברות להצלחה בכל ניסוי היא p , X סופר את מס' הניסויים עד להצלחה הראשונה.

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, k = 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

תכונות-

$$P(X > n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} P(X = i) = (1 - p)^n \quad 1.$$

2. המ"מ הגיאומטרי הוא בעל תכונת חוסר זיכרון והוא היחיד מבין כל המ"מ הבדידים שהוא בעל תכונה זו. כלומר,

$$P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$$

הגדרה: $X \sim HG(N, D, n)$, היפרגיאומטרי

מתוך אוכלוסיה בגודל N , שבה D פריטים "מיוחדים", מוצאים באקראי בזה אחר זה ללא החזרה n פריטים. X סופר את מס' הפריטים ה"מיוחדים" שהוצאו.

$$P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E[X] = n \frac{D}{N}$$

$$V(X) = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = n \frac{D}{N} \left(\frac{N-D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

הגדרה: $X \sim P(\lambda)$, פואסוני

X סופר את מס' האירועים ביחידת זמן כלשהי כאשר ממוצע מס' האירועים ביחידת זמן הוא λ .

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

שאלות לתרגול:

1) תיבה מכילה כרטיסים ועליהם המספרים $0, 1, 2, \dots, N$. מוציאים באקראי כרטיס. יהא Y המספר על הכרטיס שהוצא.

א) מהי פונקציית ההסתברות של Y ?

ב) מהן התוחלת והשונות של Y ?

- (2) אדם מטיל שתי קוביות. יהי X מ"מ המונה את מספר הניסיונות עד לקבלת "שש כפול".
- מה ההתפלגות של X ?
 - מה ההסתברות שיידרשו יותר מ-20 ניסיונות עד לקבלת "שש כפול"?
 - מהי תוחלת מספר הניסיונות שיידרשו? וסטיית התקן?
 - ידוע כי 34 ניסיונות הסתיימו בכישלון. מהי ההסתברות לקבל לראשונה "שש כפול" בניסיון ה-36?
 - מטילים את הקוביות 60 פעמים. מהי תוחלת מספר הפעמים שהתקבל "שש כפול"?
- (3) הנח כי הסיכוי להולדת בן שווה לזה של הולדת בת. במשפחה יש שמונה ילדים, חשב את ההסתברויות:
- בדיוק שלושה בנים.
 - לפחות בן אחד.
 - לכל היותר בן אחד.
 - ידוע כי יש שני בנות לפחות. מה ההסתברות לשבע בנות?
- (4) במבחן 10 שאלות, בכל שאלה יש לבחור אחת מבין חמש תשובות מוצעות, שרק אחת מהן נכונה. תלמיד ניגש לבחינה ללא הכנה. חשב את ההסתברות
- שינחש נכון לכל היותר תשובה אחת?
 - שינחש נכון לפחות תשובה אחת?
 - שינחש נכון לפחות שתי תשובות?
 - שינחש נכון לפחות 9 תשובות?
 - מה תוחלת ושונות מספר התשובות הנכונות?
- (5) מטבע הוגנת מוטלת 100 פעמים. בכל פעם שהמטבע מראה "עץ" שמעון משלם לאבי 5 ₪, ובכל פעם שהיא מראה "פלי" אבי משלם לשמעון 3 ₪. נגדיר מ"מ X המונה את מספר הפעמים שיצא "עץ".
- מה ההתפלגות, התוחלת והשונות של X ?
 - מה תוחלת ושונות הרווח של שמעון?
- (6) במבחן 40 שאלות, מתוכן 30 קלות שכולם יודעים לפתור ו-10 שאלות קשות שאף אחד לא יודע לפתור. אופן הבחינה הוא כזה: תלמיד ניגש ושולף באקראי 5 שאלות. כדי לעבור את הבחינה הוא צריך לענות לפחות על 4 מתוכן.
- מה הסיכוי של תלמיד כלשהו לעבור את הבחינה?
 - מה הסיכוי שבין 8 תלמידים שנגשים לבחינה באופן בלתי תלוי ייכשלו יותר מ-2?
 - מהי תוחלת ושונות מספר התלמידים שיעברו את הבחינה (מבין ה-8 שניגשו)?
- (7) מכוניות מגיעות לתחנת דלק לפי התפלגות פואסונית. בממוצע מגיעות לתחנה 30 מכוניות לשעה.
- מה ההסתברות כי בדקה מסוימת לא תגיע לתחנה אף מכונית? תגיע מכונית אחת? תגיענה שתי מכוניות?
 - מה תוחלת מספר המכוניות שמגיעות במשך 5 דקות? מהי סטיית התקן?
 - מה ההסתברות שבדקה מסוימת מגיעות בדיוק שתי מכוניות אם ידוע שהגיעה לפחות מכונית אחת?
- (8) שיחות טלפון מגיעות למרכזיה לפי התפלגות פואסונית. בממוצע מגיעות למרכזיה 2.3 שיחות לדקה. חשב את ההסתברות
- שבמשך דקה לא תגיע אף שיחה?
 - שבמשך חמש דקות לא תגיע אף שיחה?
 - שבמשך דקה תגיענה לפחות שתי שיחות?