מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X

שאלה 1 (20 נקודות)

א. (10 נק') נתונה הסדרה $a_n = \frac{3^{n+2}-3^{-n}}{3^{n+1}}$, $n \geq 1$.

1. חשבו את $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ בעזרת משפטי אריתמטיקה של גבולות. נמקו !

2. בדקו ש- $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ בעזרת הגדרת הגבול של סדרה. נמקו !

ב. (10 נק') תהי $F(t)$ פונקציה קדומה של $f(t) = \frac{e^t}{e^{2t}+5e^t+6}$. מצאו את $F(t)$.
האם $F(t)$ בעלת נקודות קיצון מקומיות בתחום $D=\mathbf{R}$? נמקו !

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (10 נק') נגדיר פונקציה f על ידי:
$$f(x) = \begin{cases} (2x+3)^{\frac{1}{x^2+3x+2}} & , x > -1 \\ -0.75 & , x = -1 \\ \frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+5}}{x+1} & , -5 \leq x < -1 \end{cases}$$.

האם הגבול $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ קיים ? האם הפונקציה f רציפה בנקודה -1 ? נמקו !

ב. (10 נק') מצאו את הפולינום Taylor מסדר $n=3$ של $f(x)=\ln(2x)$ בנקודה $a=0.5$
והראו כי $\left|\ln(1.5)-\frac{5}{12}\right| \leq \frac{1}{64}$. נמקו !

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו שלמשוואה $x^5-5x+4=0$ יש <u>בדיוק</u> שני פתרונות ממשיים. נמקו !

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל המסוים $I = \int_0^1 x\ln(x^2+1)dx$. נמקו!

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x)=\sqrt{3x}$. נסמן ב- $L: y=mx+n$ קו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=3$.

א. (10 נק') מצאו את משוואת הקו המשיק L והוכיחו ש- $f(x) \leq mx+n$, לכל $x \geq 0$. נמקו!

ב. (10 נק') מצאו את השטח הכלוא בין שלושת הקווים הבאים: ציר ה- y , *גרף הפונקציה* $y=\sqrt{3x}$, *והמשיק* $L: y=mx+n$. נמקו !

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו ש- $e\sqrt{x+1} \le e^{\sqrt{x+1}}$, לכל $x > -1$. נמקו !

ב. (10 נק') חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{-2t^2}dt - \sin x + x^2}{\cos^2 x - 1 + x - \sin x}$. נמקו !

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות)

א. (10 נק') תהי $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $3\sin x + 2\cos x \le g(x) \le 7 + \arctan x$,
לכל $x \in \mathbf{R}$. הוכיחו כי g פונקציה חסומה והגרף של g חותך את הקו הישר
$L: y = l(x) = 2 + 0.1x$ בנקודה אחת לפחות. נמקו !

ב. (10 נק') האם הטענה הבא נכונה:
" אם $f, g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציות בעלות אי רציפות מסוג שני (ז"א אי רציפות עקרית)
בנקודה $a = 0$, אז פונקציית המכפלה $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ בעלת אי רציפות בנקודה $a = 0$ ".
אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת.
אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

בהצלחה!

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X

פתרון 1א:

1. הסדרה הנתונה שווה ל- $a_n=\frac{3^{n+2}-3^{-n}}{3^{n+1}}\underset{\cdot 3^n}{\overset{\cdot 3^n}{=}}\frac{3^{2n+2}-1}{3^{2n+1}}=3-\frac{1}{3^{2n+1}}=3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{2n}}$.

לכן לפי כלל ההפרש וכלל המכפלה נקבל :

$l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{2n}}=3-\frac{1}{3}\cdot 0=3$.

2. נבדוק ש- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$ לפי הגדרת הגבול של סידרה.

יהי $\varepsilon>0$. ברור ש-

$$|a_n-3|=\left|\left(3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{2n}}\right)-3\right|=\left|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{2n}}\right|=\frac{1}{3^{2n+1}}$$

לכן $|a_n-3|<\varepsilon$ אם ורק אם $\frac{1}{3^{2n+1}}<\varepsilon$.

אי-שוויון זה שקול ל-

$n>0.5\left(-1+\log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\Leftrightarrow 2n+1>\log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\Leftrightarrow 3^{2n+1}>\frac{1}{\varepsilon}$.

<u>מסקנה:</u>

מצאנו מספר $N=N_\varepsilon=0.5\left(-1+\log_3\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ כך ש- $|a_n-3|<\varepsilon$, לכל אינדקס $n>N$.

זאת בדיוק ההגדרה של הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

פתרון 1ב:

נחשב פונקציה קדומה של $f(t)=\dfrac{e^t}{e^{2t}+5e^t+6}$:

$$F(t)=\int\frac{e^t}{e^{2t}+5e^t+6}\,dt=\begin{bmatrix} y=e^t \\ dy=e^t dt\end{bmatrix}=\int\frac{1}{y^2+5y+6}dy=\int\frac{1}{(y+3)(y+2)}dy=$$

$$=\left(\int-\frac{1}{y+3}+\frac{1}{y+2}\right)dy=\ln(|y+2|)-\ln(|y+3|)=\ln\frac{|y+2|}{|y+3|}=\left[\,y=e^t\,\right]=\ln\frac{e^t+2}{e^t+3}.$$

לכל פונקציה קדומה

$$.\ F(t)=\ln\frac{e^t+2}{e^t+3}+const.$$

ברור שהנגזרת שווה ל-

$$F'(t)=\frac{e^t}{e^{2t}+5e^t+6}$$

וזה ביטוי חיובי לכל t ממשי.

לכן

$$F'(t)\neq 0$$

לכל t ממשי.

משפט Fermat גורר שאין נקודות קיצון מקומיות בקטע הפתוח $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$.

<u>פתרון 2א:</u>

נחשב שני גבולות חד-צדדים $l_1=\lim_{x\to(-1)^+} f(x),\ l_2=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$.

-

עבור $x>-1$ מתקיים:

$$(2x+3)^{\frac{1}{x^2+3x+2}}=(1+2x+2)^{\frac{1}{2x+2}\cdot\frac{2x+2}{(x+1)(x+2)}}=\left(1+(2x+2)\right)^{\frac{1}{2x+2}\cdot\frac{2}{(x+2)}}$$

לכן :

$$l_1=\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\left(1+(2x+2)\right)^{\frac{1}{2x+2}\cdot\frac{2}{(x+2)}}=e^{\left(\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{2}{(x+2)}\right)}=e^{\frac{2}{1}}=e^2$$

-

עבור $x<-1$ מתקיים:

$$\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+5}}{x+1}=\frac{\left(x^2+3\right)-\left(x+5\right)}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+5}\right)}=\frac{x^2-x-2}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+5}\right)}=\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+5}\right)}$$

(הערה: פתרנו את הגבול השני בעזרת כפל בצמוד)

לכן:

$$l_2=\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+5}}=\frac{-1-2}{2+2}=-0.75=f(-1)\ .$$

<u>מסקנות</u>:

הגבול $\lim_{x\to -1} f(x)$ <u>לא קיים</u> כי $l_1\neq l_2$.

ברור ש- $e^2\neq -0.75$ ולכן f <u>לא רציפה</u> בנקודה -1 מפני ש- $l_1\neq l_2=f(-1)$.

פתרון 2ב:

נתון ש-

$$f\left(x\right)=\ln\left(2x\right)$$

לכן

$$f'\left(x\right)=\frac{2}{2x},\ f''\left(x\right)=-\frac{4}{\left(2x\right)^{2}},\ f'''\left(x\right)=\frac{16}{\left(2x\right)^{3}},\ f^{(4)}\left(x\right)=\frac{-96}{\left(2x\right)^{4}}$$

נתון ש- $a=0.5$. מציבים ומקבלים:

$$f(0.5)=0,\ f'\left(0.5\right)=2,\ f''\left(0.5\right)=-4,\ f'''\left(0.5\right)=16$$

לכן הפולינום Taylor מסדר $n=3$ של $f(x)=\ln(2x)$ בנקודה $a=0.5$ שווה ל-

$$T_3(x)=0+\frac{2}{1!}\left(x-0.5\right)-\frac{4}{2!}\left(x-0.5\right)^{2}+\frac{16}{3!}\left(x-0.5\right)^{3}=2\left(x-0.5\right)-2\left(x-0.5\right)^{2}+\frac{8}{3}\left(x-0.5\right)^{3}$$

בפרט, עבור $x=0.75$ מקבלים:

$$f(0.75)=\ln\left(1.5\right)\approx T_3(0.75)=2\left(0.25\right)-2\left(0.25\right)^{2}+\frac{8}{3}\left(0.25\right)^{3}=\frac{2}{4}-\frac{2}{16}+\frac{8}{3\cdot 64}=\frac{12-3+1}{24}=\frac{5}{12}$$

השגיאה שווה ל-

$$\left|R_3(0.75)\right|=\left|f(0.75)-T_3(0.75)\right|=[Lagrange]=\frac{1}{4!}\cdot\left|f^{(4)}(c)\right|\cdot\left(0.75-0.5\right)^{4}$$

כאשר $a=0.5\le c\le x=0.75$.

מציבים את c בנוסחה $f^{(4)}\left(x\right)=\frac{-96}{\left(2x\right)^{4}}$ ומקבלים:

$$\left|R_3(0.75)\right|=\frac{1}{4!}\cdot\left|f^{(4)}(c)\right|\cdot\left(0.25\right)^{4}=\frac{1}{4!}\cdot\left|\frac{-96}{\left(2c\right)^{4}}\right|\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{4}\underset{\substack{0.5\le c\le 0.75\\ \Rightarrow 2c\ge 1}}{\le}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}96\frac{1}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}=\frac{1}{64}$$

מסיקים ש-

$$\left|\ln\left(1.5\right)-\frac{5}{12}\right|=\left|f(0.75)-T_3(0.75)\right|=\left|R_3(0.75)\right|\le\frac{1}{64}$$

פתרון 3א:

תהי $f(x)=x^5-5x+4$, פונקציה ממשית מוגדרת לכל $x\in \mathbf{R}$.

לפי חישוב הנגזרת

$$f'(x)=5x^4-5=5(x^2-1)(x^2+1)$$

מקבלים ש-
$f'(x)<0$ אם ורק אם $x^2<1$, ז"א $-1<x<1$.
נובע ש-
1. בקטע $[-1,1]$ הפונקציה f יורדת ממש
2. בקטע $[1,+\infty)$ הפונקציה f עולה ממש.
3. בקטע $(-\infty,-1]$ הפונקציה f עולה ממש.

ברור ש-

$$f(1)=0,\ f(-1)=8>0,\ f(-2)=-18<0$$

מסיקים ש-

- אם $x>1$, אז $f(x)>f(1)=0$ ולכן אין שורשים בקטע $(1,\infty)$.
- אם $x=1$, אז $f(1)=0$.
- אם $-1\le x<1$, אז $f(x)>f(1)=0$ ולכן אין שורשים בקטע $(-1,1)$.
- אם $x<-2$, אז $f(x)<f(-2)<0$ ולכן אין שורשים בקטע $(-\infty,2)$.

נשאר לבדוק את השורשים של f בקטע $[-2,-1]$.

נשתמש במשפט ערך הביניים.

בקטע $[-2,-1]$ הפונקציה f עולה ממש , f רציפה ומתקיים $f(-1)f(-2)<0$.
לכן יש שורש יחיד $x^{\#}$ בקטע זה.
בסה"כ הוכחנו שיש רק שני שורשים : $x_1=1$ ו- $-2<x_2=x^{\#}<-1$, מ.ש.ל.

פתרון 3ב:

נמצא את הפונקציה הקדומה:

$$F(x)=\int x\ln(x^2+1)dx=\begin{bmatrix} y=x^2 \\ dy=2xdx \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)2xdx=\frac{1}{2}\int \ln(y+1)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int (y)'\cdot\ln(y+1)dy=\frac{1}{2}\left(y\ln(y+1)-\int\frac{y}{y+1}dy\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(y\ln(y+1)-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy\right)=\frac{1}{2}\left(y\ln(y+1)-y+\ln|y+1|\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(x^2+1)-x^2+\ln(x^2+1)\right)$$

פונקציה $y=x\ln(x^2+1)$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי משפט Newton-Leibniz :

$$\int_0^1 x\ln(x^2+1)dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{2}(2\ln 2-1).$$

הערה:

הפתרון יהיה קצר יותר אם נציב $y=x^2+1$:

$$\int x\ln(x^2+1)dx=\begin{bmatrix} y=x^2+1 \\ dy=2x\cdot dx \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)2x\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \ln y\cdot dy=\frac{1}{2}\int (y)'\ln y\cdot dy=\frac{1}{2}(y\ln y-\int 1\cdot dy)=\frac{1}{2}\ \ y\ln y-y$$

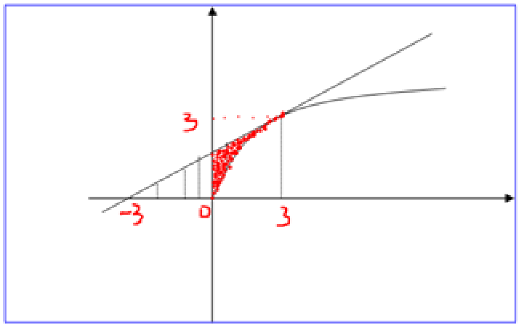
$$=\frac{1}{2}((x^2+1)\ln(x^2+1)-(x^2+1)).$$

<u>פתרון 4:</u>

<u>4.א</u>

$$f(x)=\sqrt{3x}\Rightarrow f(3)=3$$
$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}\Rightarrow f'(3)=\frac{3}{2\sqrt{3\cdot 3}}=\frac{1}{2}$$

משוואת המשיק היא: $y=f(3)+f'(3)(x-3)=3+\frac{1}{2}(x-3)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$



קו המשיק נמצא מעל הגרף של הפונקציה מפני ש- f פונקציה קעורה בקטע $x>0$:

$$f''(x)=\left(1.5(3x)^{-0.5}\right)'=(-0.5)\cdot 4.5(3x)^{-1.5}<0$$

<u>4.ב</u> לפי הציור הקודם:

$$S=\int_0^3\left(0.5x+1.5-\sqrt{3x}\right)dx=0.5\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=3}+1.5x\Big|_{x=0}^{x=3}-\left[\frac{(3x)^{1.5}}{1.5}\frac{1}{3}\right]_{x=0}^{x=3}=$$
$$=0.5\frac{9}{2}+4.5-\frac{(3\cdot 3)^{1.5}}{1.5}\frac{1}{3}=\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-6=2.25+4.5-6=0.75.$$

<u>הערה:</u>
ניתן לחשב על ידי הפחתת השטח מתחת לעקום הנתון משטח הטרפז החוסם אותו.

שטח הטרפז :

$$S_1=\frac{(1.5+3)3}{2}=(4.5)\cdot(1.5)=6.75$$

השטח מתחת לעקום $y=\sqrt{3x}$ בין 0 ל-3 :

$$S_2=\int_0^3\sqrt{3x}dx=F(3)-F(0)=\left[\frac{(3x)^{1.5}}{1.5}\frac{1}{3}\right]_{x=0}^{x=3}=\frac{(3\cdot 3)^{1.5}}{1.5}\frac{1}{3}=6$$

ולכן:

$$S=S_1-S_2=6.75-6=0.75.$$

פתרון 5א:

נוכיחו ש- $e^{\sqrt{x+1}}-e\sqrt{x+1}\ge 0$, לכל $x>-1$.
נגדיר פונקציה

$$f(x)=e^{\sqrt{x+1}}-e\sqrt{x+1},\ f:(-1,\infty)\to\mathbf{R}$$

נמצא את תחומי העליה ואת תחומי הירידה של f .
מתקיים

$$f'(x)=e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-e\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(e^{\sqrt{x+1}}-e\right),$$

לכל $x>-1$.

נובע ש-

1. עבור $x\ge 0$ מתקיים $e^{\sqrt{x+1}}\ge e$ ולכן $f'(x)\ge 0$; מסיקים שהפונקציה f עולה בקטע $x\ge 0$.
   לכן $f(x)\ge f(0)=e-e=0$ עבור כל $x\ge 0$.

2. עבור $-1<x\le 0$ מתקיים $e^{\sqrt{x+1}}\le e$ ולכן $f'(x)\le 0$; מסיקים שהפונקציה f יורדת בקטע $-1<x\le 0$.
   לכן $f(x)\ge f(0)=e-e=0$ עבור כל $-1<x\le 0$.

מסיקים ש- $x=0$ נקודת מינימום מוחלט, והערך המינימלי שווה ל- $\min f=m=f(0)=0$.

מכיוון שכל ערך של הפונקציה גדול או שווה לערך המינימלי נקבל:
$f(x)=e^{\sqrt{x+1}}-e\sqrt{x+1}\ge f(0)=0$, לכל $x>-1$, מ.ש.ל.

פתרון 5ב:

לפי משפט היסודי Newton-Leibniz מקבלים שהפונקציה $\int_0^x e^{-2t^2}dt$ היא פונקציה גזירה ב $\mathbf{R}$

(כי $y=e^{-2x^2}$ היא רציפה ב $\mathbf{R}$) ומתקיים $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-2t^2}dt\right)=e^{-2x^2}$.

ולכן גם היא רציפה ולכן $0=\int_0^0 e^{-2t^2}=\lim_{x\to 0}\int_0^x e^{-2t^2}dt$. אז אנחנו במקרה של כלל L'Hôpital :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\int_0^x e^{-2t^2}dt-\sin x+x^2=0-0+0=0, \qquad \lim_{x\to 0}(\cos^2 x-1+x-\sin x)=0}$$

המונה והמכנה גזירות בסביבה נקובה של 0 , עם נגזרת של המכנה שונה מ 0 בסביבה הנקובה.
ולכן :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-2t^2}dt-\sin x+x^2}{\cos^2 x-1+x-\sin x} \underset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\cos x+2x}{2\cos x(-\sin x)+1-\cos x}=$$

$$\underset{\substack{L'Hospital \\ 2\cos x\sin x=\sin(2x) \\ \text{again we have problem } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}(-4x)+\sin x+2}{-2\cos(2x)+\sin x}=\frac{2}{-2}=-1$$

פתרון 6א:

הפונקציה g חסומה כי $\frac{\pi}{2}+7 > x \arctan + 7 \ge g(x) \ge$ — $-5=-3-2\le 3\sin x+2\cos x\le g(x)\le 7+\arctan x<7+\frac{\pi}{2}$, לכל $x\in\mathbf{R}$.

נגדיר פונקציה חדשה:

$$D(x)=g(x)-l(x)=g(x)-\left(2+0.1x\right)$$

צריכים להראות שלמשוואה $D(x)=0$ יש פתרון.

נשתמש במשפט ערך הביניים Cauchy .

נתון כי g פונקציה רציפה ב- $\mathbf{R}$. לכן גם D פונקציה רציפה ב- $\mathbf{R}$.

נשתמש בחסימות של g : $-5\le g(x)<7+\frac{\pi}{2}$, לכל $x\in\mathbf{R}$.

יכולים לבחור שתי נקודות $x_1<x_2$ כך ש- $D(x_2)<0<D(x_1)$:

$$\begin{cases} x_1=-100\Rightarrow D(-100)=g(-100)-\left(2+0.1\cdot(-100)\right)\ge -5-(-8)=3>0 \\ x_2=100 \quad\Rightarrow D(100)=g(100)-\left(2+0.1\cdot 100\right)=g(100)-12<7+\frac{\pi}{2}-12<0 \end{cases}$$

לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה $c\in\left(x_1,x_2\right)=\left(-100,100\right)$ שעבורה מתקיים: $D(c)=0$,

כלומר בנקודה הזו מתקיים $g(c)-l(c)=g(c)-\left(2+0.1c\right)=0 \Leftrightarrow g(c)=\left(2+0.1c\right)$. מ.ש.ל.

פתרון 6ב:

נוכיח ש**הטענה לא בהכרח נכונה**, בעזרת דוגמה נגדית.

נגדיר :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x<0\\ 0, \quad x\ge 0\end{cases}.$$

שתי הפונקציות הנ"ל בעלות אי רציפות מסוג שני בנקודה $a=0$ בגלל ש-

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$ ו- $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=-\infty$.

מתקיים :

$$p(0)=f(0)\cdot g(0)=0, \quad p(x)=f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cdot 0=0, \;\; x>0\\ 0\cdot\frac{1}{x}=0, \;\; x<0\end{cases},$$

ז"א

$p(x)=f(x)\cdot g(x)=0$ לכל $x\in\mathbf{R}$.

מסיקים שהפונקצית המכפלה p רציפה בנקודה $a=0$.