

מבוא להסתברות - תרגיל מס' 3

הסתברות מותנית

1. בקופסה יש 3 כדורים שחורים, 4 כדורים לבנים, 5 אדומים ו-6 כחולים, מן הקופסה מוציאים שוב ושוב כדורים עם החזרה. אם אדם מהמר שבהוצאות אלה יוצא כדור שחור לפני שיוצא כדור כחול, מהי ההסתברות לכך שיזכה בהתערבות? $\{0.333\}$
2. (שאלת הכד של פוליה) בכד יש 5 כדורים לבנים ו-10 שחורים. מוציאים כדור, בודקים את צבעו, ומחזירים אותו לכד עם עוד 5 כדורים באותו הצבע. עתה מוציאים כדור נוסף, מהי ההסתברות לכך שהכדור הנוסף יהיה לבן?
נסה להכליל את הפתרון עבור W לבנים, B שחורים, ו-1 A כדורים נוספים. $\{1/3\}$
3. (החידה של לואיס קרול) נתון כד ובו כדור בודד שצבעו שחור או לבן בהסתברות חצי. איש פלאי בא ומכניס לכד כדור לבן. כעת מוציאים מהכד כדור, ומסתבר שהוא לבן. מהי ההסתברות לכך שהכדור שנותר בכד הוא לבן?
4. נעדר מטוס, ומשערים שהוא נמצא באחד משלושה אזורים אפשריים, בהסתברות b_i באזור i . ההסתברות שימצאו את המטוס תוך חיפוש באזור i , אם המטוס אכן שם, היא $1 - \alpha_i$, (הקבועים α_i נקראים overlook probabilities שכן הם מייצגים את ההסתברות "לפספס" את המטוס בחיפוש באזור i כאשר הוא שם, והם נובעים מתנאי השטח בכל אזור).
נניח כי המטוס נמצא באזור 1 בהסתברות 0.2, באזור 2 בהסתברות 0.3, ואחרת באזור 3, נניח גם כי $\alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.3, \alpha_3 = 0.6$, וכי ניתן לחפש בכל פעם רק באזור אחד, הצע היכן לחפש את המטוס בחיפוש הראשון, ואם חיפוש זה יכשל היכן לחפש אותו עתה.
 $\{P=0.21, 2, P=0.253, 3, \text{חיפוש שני ב } 3\}$
5. אדם בוחר באופן מקרי לבקר באחת משלוש ערים C, B, A. ההסתברות שב A ירד גשם היא $1/3$, ההסתברות לגשם ב B היא $1/4$, וההסתברות לגשם ב C היא $1/6$. הוא חוזר כשמונייתו רטובה. מהי ההסתברות שביקר בעיר C?
 $\{0.222\}$
6. משחקים במשחק הבא, לפניך קופסה ובה 7 כדורים שחורים ו-3 כדורים לבנים. מן הקופסה מוציאים, בזה אחר זה ועם החזרה, כדורים. תחילה מוציאים שני כדורים, ואז אם שני הכדורים שהוצאו לבנים מוציאים כדור נוסף (שוב, עם החזרה).
א. מהי ההסתברות לכך שהכדור האחרון יהיה שחור? $\{0.763\}$
ב. אם הכדור האחרון שהוצא הוא שחור, מהי ההסתברות לכך שהכדור הראשון שהוצא היה לבן? $\{0.3578\}$
ג. אם הוצא כדור שחור (לפחות אחד), מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא היה שחור? $\{0.7194\}$
ד. ידוע כי הכדור האחרון שהוצא היה כדור לבן, מהי ההסתברות לכך שבהוצאות הקודמות התקבל כדור שחור (לפחות אחד) $\{0.8861\}$
7. לפניך 101 קופסאות, מסופרות מ 0 ועד 100, כך שבקופסה מס' k יש k כדורים לבנים ו-100-k שחורים, בוחרים באקראי קופסה ומוציאים ממנה כדור אחד, מה ההסתברות לכך שהכדור שהוצא שחור?
 $\{0.5\}$
8. במפעל מסוים 3 סוגי עובדים: הטכנאים מהווים 80% מכלל העובדים, ההנדסאים מהווים 15% והמהנדסים מהווים 5%. ההסתברות שטכנאי יישבות היא 0.1, ההסתברות שהנדסאי יישבות היא 0.2 ושהמהנדס יישבות היא 0.3. אחד מעובדי המפעל נבחר באופן מקרי ומתברר שהוא שובת. מה ההסתברות שהוא מהנדס?
9. "מכונת אמת" מגלה סטודנט שהעתיק בבחינה בהסתברות של 90%. אם הוא לא העתיק, המכונה "תסכים" לכך בהסתברות של 95%. ההערכה היא ש 20% מהסטודנטים מעתיקים בבחינות. בוחרים סטודנט באקראי, המכונה טענה שהוא העתיק. מה הסיכוי שהסטודנט אכן העתיק?
10. הסתברות המעבר בבי"ס תלת שנתי הן: משנה ראשונה לשנייה 0.75, משנה שנייה לשלישית 0.8 ולסיים בהצלחה שנה שלישית : 0.9.
א. מה ההסתברות שתלמיד שהתקבל לבי"ס מסוים יסיים את לימודיו?
ב. מה ההסתברות שתלמיד שהתקבל לבית ספר מסוים למד בו לכל היותר שנתיים?
ג. אם ידוע שתלמיד לא הצליח לסיים לימודיו, מה הסיכוי שהוא לא עבר משנה שנייה לשנה שלישית?
ד. אם ידוע שהתלמיד לא הצליח לסיים את לימודיו, מה הסיכוי שהוא עבר משנה ראשונה לשנה שנייה?