מבחן במתמטיקה בדידה תשפ"א סמסטר ב
פתרון Y

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות בכדי לקבל ניקוד מלא. אלא אם כתוב אחרת, יש לנמק את תשובתכם באופן מלא וברור. יש לציין באופן מפורש וברור באילו משפטים, טענות או נוסחאות ידועות אתם משתמשים. תשובות חלקיות, גם אם נכונות, לא ייזכו אותכם בניקוד מלא.

1 **(20 נקודות)** אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)**

(א) **(5 נק)** האם זה נכון שמספר האנשים החיים כרגע בעולם שיש להם מספר אי-זוגי של אחיות ואחים הוא זוגי? רמז: השתמשו בתורת הגרפים.
פתרון: הטענה נכונה. נחשוב על האנשים בעולם שיש להם מספר אי זוגי של אחים ואחיותכעל קודקודים. שני קודקודים יהיו מחוברים בקשת אם האנשים המתאימים הם אחים או אחיות. נסמן ב d_i את הדרגה של קודקוד i, כלומר, d_i מסמן את מספר האחים או אחיות שיש לאדם i. ממשפט לחיצות הידיים נובע כי

$$\sum_i d_i = 2|E|$$

מכיוון שזהו סכום של מספרים **אי זוגיים** השווה למספר **זוגי**, חייב להיות מספר זוגי של אנשים שיש להם מספר אי זוגי של אחים או אחיות.

(ב) **(5 נק)** ציירו,אם אפשר גרף 4-רגולרי בעל 6 קודקודים. אם אי אפשר -הוכיחו שלא קיים גרף כזה.

2. **(10 נק)** נתבונן בקבוצות הבאות:

$$A = \{(x, y) \mid -1 < x, y < 1\} \qquad B = \{(x, y) \mid 0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}$$

(א) **(5 נק)** מיצאו פונקציה חח"ע ועל בין A ו B.
פתרון: נשים לב כי

$$A = (-1,1) \times (-1,1)$$

$$B = (0,2) \times (0,1)$$

נגדיר פונקציה f באופן הבא:

$$f : A \longrightarrow B$$

$$f\left((x,y\right) = \left(x+1, \frac{1}{2}(x+1)\right)$$

(ב) **(5 נק)** הוכיחו כי $|A| = \aleph$.
פתרון: מתקיים כי

$$|A| = |(-1,1) \times (-1,1)| = |(-1,1)| \cdot |(-1,1)| = \aleph \cdot \aleph = \aleph$$

2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** סוכן נוסע צריך לבקר ב 4 ערים שונות כאשר בכל עיר הוא צריך לבקר 5 פעמים. בכמה דרכים הוא יכול לעשות זאת אם אסור לו להתחיל ולסיים באותה העיר?
פתרון: נשים לב שבסה"כ הסוכן צריך לעשות 20 ביקורים.
מספר האפשרויות לבקר בעיר הראשונה: $\binom{4}{1}$
לאחר שהעיר הראשונה נבחרה, נבחר עוד 4 פעמים בהן נבקר בעיר שנבחרה ראשונה.
נשים לב שאנחנו לא יכולים לבחור לבקר בה בסוף. ולכן: $\binom{18}{4}$
כעת, נבחר את מועדי הביקור בערים הנוספות. סהכ נקבל:

$$\binom{4}{1}\binom{18}{4}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5} = 9262693440$$

2. **(10 נק)** הוכיחו כי לכל מספר טבעי $n > 1$ מתקיימת הזהות הבינומית

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

פתרון:

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n = (2+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}2^n\binom{n}{k} = 2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(12 נק)** מהו מספר הסדרות באורך n המורכבות מהמספרים $\{0,1,2\}$ בהן הספרה הראשונה והאחרונה **אינן** 0 ובנוסף אין בהן זוג איברים עוקבים זהים?

(א) **(2 נק)** כיתבו את תנאי ההתחלה עבור $n = 1$ ועבור $n = 2$.
פתרון: מתקיים כי $a_1 = 2$ ו $a_2 = 2$.

(ב) **(5 נק)** כיתבו את נוסחת הנסיגה. הסבירו היטב איך הגעתם לנוסחא זה.
פתרון: סדרה חוקית באורך $n-1$ מסתיימת במספר 1 או במספר 2. בכל מקרה, ישנה רק דרך אחת להשלים סדרה כזו לסדרה חוקית באורך n, ולכן התרומה היא a_{n-1}.
כעת, נתבונן בסדרה באורך $n-1$ אשר מסתיימת במספר 0. לפניה חייבת להיות סדרה חוקית באורך $n-2$. סדרה כזו אפשר להשלים לסדרה חוקית באורך n בשתי דרכים. ולכן התרומה היא $2a_{n-2}$.
ולכן סה"כ

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

(ג) **(5 נק)** פיתרו את נוסחת הנסיגה כאשר נתון כי $a_0 = 0$.
פתרון: שלב א: משוואה אופיינית של הבעיה

$$\begin{aligned} &\iff && x^n = x^{n-1} + 2x^{n-2} \\ &\iff && x^{n-2}(x^2 - x - 2) = 0 \\ &\iff && (x-2)(x+1) = 0 \\ & && \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1 \end{aligned}$$

שלב ב: מתקיים כי

$$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n$$

עבור $n=0$:

$$a_0 = 0 = A_1 + A_2 \Longrightarrow A_2 = -A_1$$
$$a_1 = 2 = 2A_1 - A_2 \Longrightarrow A_1 = \frac{2}{3},\ A_2 = -\frac{2}{3}$$

ובסה"כ נקבל:

$$a_n = \frac{2}{3}\cdot 2^n - \frac{2}{3}(-1)^n$$

2. **(8 נק)** הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל $n>0$ כאשר n טבעי זוגי מתקיים כי

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \cdots + (2n-3)^2 - (2n-1)^2 = -2n^2$$

פתרון: תנאי התחלה: עבור $n=2$ מתקיים כי $2n-1=4-1=3$ ולכן

$$1^2 - 3^2 = -8 = -2\cdot 2^2$$

הנחה האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור n ונוכיח עבור $n+2$. עבור $n+2$ צריך להוכיח כי

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - \cdots + (2(2+n)-3)^2 - (2(2+n)-1)^2 = -2(2+n)^2$$

כעת,

$$\begin{aligned}
1^2 - 3^2 + 5^2 - \cdots + (2n-3)^2 - (2n-1)^2 + (2(2+n)-3)^2 - (2(2+n)-1)^2 &= \\
-2n^2 + (2n+1)^2 - (2n+3)^2 &= \\
-2n^2 + (4n^2+4n+1) - (4n^2+12n+9) &= \\
-2n^2 - 8n - 8 &= \\
-2(n+2)^2 \circ
\end{aligned}$$

4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** כל תלמיד שנה א לומד לפחות אחד מבין הקורסים הבאים: מחשבים, אנגלית ומתמטיקה. רישום התלמידים נעשה לפי הטבלה הבאה:

שמות הקורסים	מספר תלמידים רשומים
מחשבים	25
אנגלית	20
מתמטיקה	33
מחשבים ואנגלית	15
מחשבים ומתמטיקה	25
מתמטיקה ואנגלית	20
מחשבים,אנגלית ומתמטיקה	15

כמה תלמידים יש בשנה א?

פתרון: נשתמש בעקרון הכלה הפרדה. נסמן

$$A_1 = \text{סטודנטים הלומדים מחשבים}$$
$$A_2 = \text{סטודנטים הלומדים אנגלית}$$
$$A_3 = \text{סטודנטים הלומדים מתמטיקה}$$

אנחנו מעוניינים בגודל הקבוצה $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. לפי המספרים בטבלה ולפי עקרון הכלה הפרדה מתקיים כי

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$(25 + 20 + 33) - (15 + 25 + 20) + 15 = 33$$

ולכן בשנה א יש 33 סטודנטים.

2. **(10 נק)** צלף קולע 5 חיצים למטרה שצורתה משולש שווה צלעות שאורך צלעו 2 מטרים. הראו כי אם כל החיצים פוגעים במטרה אז בהכרח יש 2 חיצים שיפגעו במטרה במרחק של מטר אחד לכל היותר זה מזה.

פתרון: נחלק את המשולש לארבעה משולשים שווי צלעות כך שאורך כל צלע היא 1 מטרים. מכיוון שיש 4 משולשים ו 5 חיצים, לפי עקרון שובך היונים יהיו שני חיצים באותו משולש קטן. המרחק המקסימלי בין שתי נקודות במשולש קטן הוא 1 ולכן בהכרח יש שני חיצים שיפגעו במטרה במרחק של מטר אחד לכל היותר זה מזה.

5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו שאם

$$A \times B = A \times (C - B)$$

אז בהכרח

$$A \times (B \cup C) = \emptyset$$

פתרון: נניח בשלילה כי קיים $x \in A\times(B\cup C)$ ונגיע לסתירה. אם $x \in A\times(B\cup C)$ אז $x = (a,b)$ כאשר $a \in A$ ו $b \in B \cup C$. אם $b \in B$ אז $(a,b) \in A \times B$ ומהנתון מתקיים כי $b \in (C - B)$, כלומר $b \notin B$ וסתירה. אם $b \in (C - B)$ אז $(a,b) \in A \times (C - B)$ ומהנתון מתקיים כי $b \in B$ ושוב סתירה. ולכן לא קיים x כזה ולכן $A \times (B \cup C) = \emptyset$ כנדרש.

2. **(10 נק)** ישנה כמות בלתי מוגבלת של כדורים מארבעה צבעים שונים. מה מספר האפשרויות לבחור 6 כדורים כאשר אסור לבחור יותר משני כדורים מאותו הצבע?
פתרון: נפתור את המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$i = 1,2,3,4 \; 0 \leq x_i \leq 2$$

נכתוב את הפונקציה היוצרת

$$f(x) = (1 + x + x^2)^4$$

ואנחנו מתעניינים במקדם של x^6. כלומר,

$$D(4,6) = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$$

6 (20 נקודות)

תהא C הקבוצה $C = \{1,2,...,20\}$ ו $S = P(C) - \emptyset$. נגדיר יחס T על הקבוצה S באופן הבא:

$$(A,B) \in T \iff (A = B) \vee (\max A < \max B)$$

כאשר $\max A$ הוא המספר הטבעי הגדול ביותר ששיך לקבוצה A.

1. **(10 נק)** הוכיחו כי T הוא יחס סדר חלקי על הקבוצה S.

2. **(5 נק)** האם T הוא יחס סדר מלא? אם כן - הוכיחו, אם לא - הביאו דוגמא נגדית. בכל מקרה יש לנמק היטב את תשובתכם. **פתרון:** זהו אינו יחס סדר מלא כי למשל הקבוצות $\{1,3\}$ ו $\{2,3\}$ אינן ניתנות להשוואה.

3. **(2 נק)** מיצאו איבר מינימלי אם יש. הסבירו את תשובתכם. **פתרון:** איבר מינימלי צריך לקיים שהמספר הטבעי הגדול ביותר בו יהיה הקטן ביותר האפשרי, כלומר 1. ולכן איבר מינימלי הוא $\{1\}$.

4. **(3 נק)** מיצאו איבר מקסימלי אם יש. הסבירו את תשובתכם. **פתרון:** איבר מקסימלי צריך לקיים שהמספר הטבעי הגדול ביותר בו יהיה הגדול ביותר האפשרי, כלומר 20. ולכן כל קבוצה המכילה את המספר 20 היא איבר מקסימלי, למשל $\{1,20\}$.