



## חדו"א 1 – דף תרגילים מספר 2

### סדרה מונוטונית חסומה, הגבול של אוילר

**תרגיל 1** נתונה סדרה רקורסיבית  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את הגבול.

א.  $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

ב.  $a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

ג.  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

ד.  $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

### תרגיל 2

עבור כל אחת מהסדרות הרקורסיביות הבאות

- הניחו כי הגבול קיים ומצאו אותו.
- רשמו 3 איברים ראשונים של הסדרה.
- האם הסדרה מתכנסת לגבול שמצאתם? הסבירו.

(1)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 - a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

(2)  $a_1 = -5, \quad a_{n+1} = \sqrt{-2a_n - 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

### תרגיל 3

נתונה סדרה רקורסיבית:  $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$

- הניחו כי הגבול קיים ומצאו אותו.
- רשמו 4 איברים ראשונים של הסדרה.
- האם הסדרה חסומה? האם הסדרה מונוטונית?
- האם הסדרה מתכנסת לגבול שמצאתם? הסבירו.

**תרגיל 4**

קבעו האם הטענות הבאות נכונות או לא. לטענה לא נכונה יש להציג דוגמא נגדית.  
**נדגיש:** סדרה נקראת מתכנסת, אם קיים לסדרה גבול סופי. סדרה נקראת חסומה אם היא חסומה מלמעלה ומלמטה.

- א. כל סדרה רקורסיבית מתכנסת היא חסומה.
- ב. כל סדרה רקורסיבית חסומה היא מתכנסת.
- ג. כל סדרה רקורסיבית מתכנסת היא מונוטונית.
- ד. כל סדרה רקורסיבית מונוטונית היא מתכנסת.
- ה. כל סדרה רקורסיבית מונוטונית וחסומה היא מתכנסת.
- ו. כל סדרה רקורסיבית מתכנסת היא מונוטונית וחסומה.

**תרגיל 5**

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n-1}{4n+8} \right)^{\frac{n^2}{2n+2}} & \text{ב.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+3} \right)^{\sqrt{n(n+1)}} \\ \text{ג.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+1}{n^2+n+1} \right)^n & \text{ד.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2+5}{3n^2-1} \right)^{\sqrt{n^4+1}} \\ & & \text{ה.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \end{array}$$

**תרגיל 6**

חשבו את הגבולות הבאים.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{n+3} \right)^{\sqrt{n(n+1)}} & \text{ב.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+1}{n^3+n+1} \right)^{\sqrt[n]{n}} \\ \text{ג.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n-1}{n+8} \right)^{\frac{n}{2n+2}} & \end{array}$$

**תרגיל 7**

נתונה הסדרה  $a_n = n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

- א. האם הסדרה חסומה?
- ב. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרה הנתונה (גבול חלקי = גבול של תת-סדרה).
- ג. האם הסדרה מתכנסת? הסברו את תשובתכם.
- ד. האם הסדרה מונוטונית?