# פתרון שאלון X

## שאלה 1 ( 20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א.   (12 נק') חשבו את $\Phi(315)$. כלומר, את כל המספרים הטבעיים החיוביים הקטנים מ- 315 וזרים לו.
נזכיר כי 2 מספרים טבעים הם זרים זה לזה אם המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1.

ב.   (8 נק') נתונות 2 טענות . לכל טענה רשמו אם היא נכונה או אינה נכונה **ללא נימוק.**
( העתיקו את הטענה למחברת הבחינה ורשמו נכון או לא נכון)

I.   טענה 1: תהיינה $f : A \to B, \quad g : B \to C$ פונקציות ו- $g \circ f : A \to C$ פונקציית ההרכבה.
אם $g \circ f$ חח"ע אז $f$ חח"ע.

II.   טענה 2: אם $R$ הוא היחס מעל $\{1,2,3,...\}$ המוגדר על ידי:

$$\left(y \mid x \; or \quad x \mid y \quad\right) \Leftrightarrow \left( \quad (x,y) \in R\right)$$

אז היחס $R$ הוא יחס סדר חלקי.

( הסימון $x \mid y$ פירושו $\frac{y}{x}$ שלם)

## פתרון שאלה 1

א.   נחשב את מספר כל המספרים הטבעיים הזרים ל-315 וקטנים ממנו.
פתרון:. $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
הגורמים הראשוניים של 315 הם: 3,5,7
נפתור על ידי שימוש בעקרון ההכלה וההדחה
נגדיר : $A_3$ -כל הטבעיים הקטנים או שווים ל- 315 ומתחלקים ב-3
$A_5$ -כל הטבעיים הקטנים או שווים ל- 315 ומתחלקים ב-5
$A_7$ -כל הטבעיים הקטנים או שווים ל- 315 ומתחלקים ב-7

$$|A_7| = \frac{315}{7} = 45 \text{ - } \quad |A_5| = \frac{315}{5} = 63 \, , \; |A_3| = \frac{315}{3} = 105$$

$|A_3 \cap A_5| = \frac{315}{3 \cdot 5} = 21$ -כל הטבעיים הקטנים או שווים ל-315 ומתחלקים ב-3 ו-5

$|A_3 \cap A_7| = \frac{315}{3 \cdot 7} = 15$ -כל הטבעיים הקטנים או שווים ל-315 ומתחלקים ב-3 ו-7

$|A_5 \cap A_7| = \frac{315}{5 \cdot 7} = 9$ -כל הטבעיים הקטנים או שווים ל-315 ומתחלקים ב- 5ו -7

$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \frac{315}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 3$ -כל הטבעיים הקטנים או שווים ל-315 ומתחלקים ב-3,5,7

$$\left|A_3^C \cap A_5^C \cap A_7^C\right| = |U| - s_1 + s_2 - s_3$$

$$315 - (105 + 63 + 45) + (21 + 15 + 9) - 3 = 144$$

ב.I. **טענה 1 נכונה**

נניח $f(x)=f(y)$ כאשר $x,y\in A$ ונוכיח ש $x=y$. מכיוון ש $f(x)=f(y)\in B$ ו- $g:B\to C$ פונקציה נסיק ש $g\big(f(x)\big)=g\big(f(y)\big)$. כלומר, $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$. אבל $g\circ f$ חח״ע ולכן $x=y$.

ב.II. **הטענה 2 אינה נכונה**.

היחס אינו טרנזיטיבי כי למשל: $(2,6)\in R$ וגם $(6,3)\in R$ אבל $(2,3)\notin R$

## <u>שאלה 2 ( 20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. ( 10 נק') מהי עוצמת קבוצת כל **תתי הקבוצות** בנות 3 איברים של הטבעיים?

ב.( 10 נק') יהיו $A,B,C,D$ פסוקים. נסמן ב- $\gamma$ את הפסוק הבא:

$$\gamma=\forall A\big(\exists B((A\wedge B\vee C)\to(\sim D))\big)$$

באמצעות שקילויות רשמו פסוק $\varphi$ כך: $\sim\gamma\equiv\varphi$ כך שבפסוק $\varphi$ לא יופיע קשר השלילה.

## <u>פתרון שאלה 2:</u>

א. נסמן ב -A את קבוצת תתי הקבוצות של הטבעיים בגודל 3.

B- קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של הטבעיים.

ברור ש: $A\subseteq B$ ועוצמת B בת מניה. לכן עוצמת A לכל היותר בת מניה.

כמו כן: נתבונן בקבוצה האינסופית של הקבוצות הבאות שכל אחת בת 5 איברים:

$$C_0=\{0,1,2\},C_1=\{1,2,3\},C_2=\{2,3,4\}...C_n=\{n,n+1,n+2\}$$

ברור שהקבוצה $C=\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ בת מניה והיא מוכלת בקבוצה B. לכן עוצמת A אינה פחות מ- $\aleph_0$.

$C\subseteq A\subseteq B$ , ממשפט קש״ב נקבל שעוצמת A בת מניה.

ב.

$$\sim\gamma=\sim\Big[\forall A\big(\exists B((A\wedge B\vee C)\to(\sim D))\big)\Big]\underset{(1)}{\equiv}$$

$$\exists A\Big[\sim\big(\exists B((A\wedge B\vee C)\to(\sim D))\big)\Big]\underset{(1)}{\equiv}$$

$$\exists A\forall B\Big[\sim((A\wedge B\vee C)\to(\sim D))\Big]\underset{(2)}{\equiv}$$

$$\exists A\forall B\Big[\sim(\sim(A\wedge B\vee C)\vee(\sim D))\Big]\underset{(3)}{\equiv}$$

$$\exists A\forall B\Big[(\sim\sim(A\wedge B\vee C)\wedge\sim(\sim D))\Big]\underset{(4)}{\equiv}$$

$$\exists A\forall B\Big[((A\wedge B\vee C)\wedge(D))\Big]=\varphi$$

(1) דה מורגן לכמתים (2) שקילות בסיסית $P\to Q\equiv\sim P\vee Q$ (3) דה מורגן לקשרים (4) שלילה כפולה

## <u>שאלה 3 ( 20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (10 נק') הוכיחו שעבור כל 2 קבוצות A,B וקבוצות החזקה שלהן $P(A),P(B)$ מתקיים:

I. $A\subseteq B \Leftarrow P(A)\subseteq P(B)$

II. אם $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$ אז $A$ אינה תת קבוצה של $B$ וגם $B$ אינה תת קבוצה של $A$.

( הדרכה: דרך השלילה)

ב.( 10 נק') יובל מתכונן לפתיחת שנת הלימודים האקדמית ( כולל סמסטר קיץ ותקופת בחינות). בין מרכיבי התקציב לשנת הלימודים נמצא תקציב עטים של 600 ש"ח לשנה. כל עט עולה 6 ₪.
על יובל לחלק את התקציב על פני השנה (52 שבועות), כאשר עליו לקנות לפחות עט אחד לפחות בכל שבוע.
הוכיחו כי יש תקופה של מספר שבועות ברצף בה ההוצאות של יובל היו 18 ש"ח בדיוק.

## <u>פתרון שאלה 3</u>

א.I. תהי $X\in P(A) \overset{(1)}{\Rightarrow} X\subseteq A \overset{(2)}{\Rightarrow} X\subseteq B \overset{(1)}{\Rightarrow} X\in P(B)$

(1) הגדרת קבוצת חזקה. (2) מהנתון $A\subseteq B$

II. נניח בשלילה שהמסקנה אינה נכונה כלומר, $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

אם $A\subseteq B$ אז $P(A)\subseteq P(B)$ ואז $P(A)\cup P(B)=P(B)$

כמו כן: $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B$ ואז: $P(A\cup B)=P(B)$ לכן מתקיים: $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$ בסתירה לכך שבנתון מופיעה הכלה ממש.

באופן דומה ( סימטריות של A וB) נראה את המקרה השני ש: $B\subseteq A$.

ב.נתבונן בסדרה $\{x_i\}$ המתארת את הוצאותיו של יובל על עטים עד לשבוע ה- i (כולל).

$$6\le x_1<x_2<...<x_{52}\le 600$$

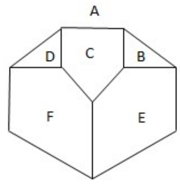
כעת, נבנה סדרה חדשה בת 52 איברים:

$$x_1+18<x_2+18<...<x_{52}+18\le 600+18$$

סה"כ יש 2 סדרות שכל אחת עולה ממש.
2 הסדרות המונות 104 איברים יחדיו מקבלות ערכים שהם כפולות של 6 בתחום [6,618].סה"כ 103 ערכים אפשריים.
כלומר,יש 104 איברים המקבלים ערכים מתוך 103 אפשרויות,
לכן לפי עקרון שובך היונים קיימים בין $x_1,x_2,...,x_{52},x_1+18,x_2+18,...,x_{52}+18$ שני איברים שווים.
כיוון שכל אחת משתי תתי הסדרות עולה ממש, בהכרח קיימים i,j כך ש - $x_i=x_j+18$.
בשבועות j+1, j+2, … , i הוצאותיו של יובל בדיוק 18 ₪.

## **שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'**

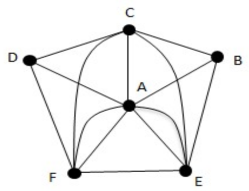
א. ( 10 נק') לפניכם מפה של ספארי. קטעים במפה מסמנים גדרות בין מתחמי חיות מסוגים שונים וגדרות חיצוניות בין הפארק לסביבה A של הפארק.
בכל גדר שער אחד בלבד. בתחומים אלו ניתן לטייל ברכב בלבד.
האם אפשר לטייל בפארק ובסביבה שלו A, כך שעוברים בכל שער בגדר בדיוק פעם אחת?




ב. ( 10 נק') בביטוי $\left(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{x}\right)^{18}$ חשבו את המחובר שלא מכיל $x$ .

## **פתרון שאלה 4**

א. נסמן כל אזור בפארק ואת הסביבה שלו באות (ראה ציור). נבנה גרף, כך שלכל אזור מתאים קודקוד .מספר הקשתות בין זוג הקודקודים שווה למספר קטעי גדר משותפים.




השאלה המקורית שקולה לשאלה האם קיים בגרף שהתקבל מסלול (או מעגל) של אוילר.
מכיוון שבגרף כל קדקוד בעל דרגה אי זוגית (לא 2 ולא 0 קדקודים כאלה), לא קיים בגרף מסלול אוילר ולא קיים בגרף מעגל אוילר. לכן לא קיימת אפשרות לטייל בפארק ובסביבה שלו, כך שעוברים כל גדר בדיוק פעם אחת.

ב. לפי נוסחת הבינום של ניוטון

$$\left(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{x}\right)^{18}=(x^{1/5}+x^{-1})^{18}=\sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}(x^{1/5})^{k}\cdot(x^{-1})^{18-k}=\sum_{k=0}^{16}\binom{18}{k}x^{\frac{6k}{5}-18}$$

כדי שהמחובר לא יכיל $x$ החזקה אמורה להיות אפס, כלומר $\frac{6k}{5}-18=0$ , משמע $k=15$ . לכן המחובר המבוקש הינו $\binom{18}{15}=\frac{18!}{15!\cdot 3!}$ .

**<u>שאלה 5 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>**

א. ( 8 נק') נתונים $k \geq 0$ כדורים לבנים ו- $m \geq 0$ כדורים צבעוניים שונים.

I. בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה את כל הכדורים?

II. בכמה דרכים ניתן לחלק את כל הכדורים ל n תאים שונים?

ב. (12 נק') תהי A קבוצת יחסי השקילות מעל הקבוצה $\{1,2,3\}$ נגדיר יחס S מעל קבוצה A :

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (X,Y) \in S$$

I. מהו $|A|$ ? ( מספר אברי A)

II. S הינו יחס סדר חלקי ( אין צורך להוכיח זאת).

שרטטו את דיאגרמת הסה של היחס S.

האם קיים איבר קטן ביותר? האם קיים איבר גדול ביותר?

האם היחס S הוא יחס סדר מלא?

**<u>פתרון שאלה 5</u>**

א. I. תחילה נבחר מקומות לכדורים לבנים – $\binom{m+k}{k}$ אפשרויות. בשאר המקומות נסדר את הכדורים הצבעוניים – $m!$ אפשרויות. סה"כ : $\binom{m+k}{k} \cdot m! = \frac{(m+k)!}{k!}$ אפשרויות.

II. חלוקת k כדורים לבנים ל –n תאים. $\binom{n-1+k}{n-1}$

חלוקת m כדורים צבעוניים ל –n תאים $n^m$. סה"כ אפשרויות החלוקה :

$$\binom{n-1+k}{n-1} \cdot n^m$$

ב. I מספר יחסי השקילות כמספר החלוקות. סה"כ יש 5 חלוקות :

$\big(\{1\},\{2\},\{3\}\big)$ והיחס המתאים $R_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$

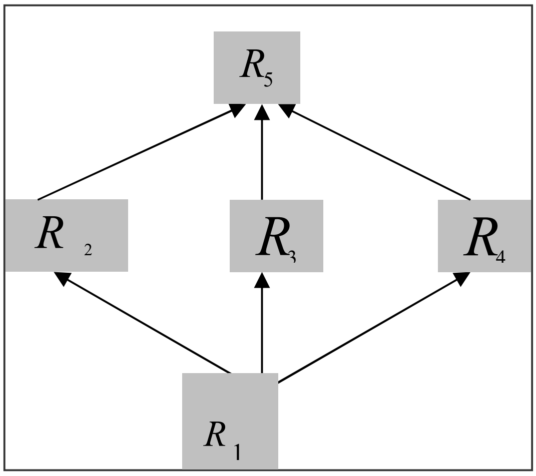
$\big(\{2\},\{1,3\}\big)$ והיחס המתאים $R_2 = \begin{pmatrix} 2\,3\,3\,1\,1 \\ 2\,3\,1\,1\,3 \end{pmatrix}$

$\big(\{3\},\{1,2\}\big)$ והיחס המתאים $R_3 = \begin{pmatrix} 3\,1\,1\,2\,2 \\ 3\,1\,2\,2\,1 \end{pmatrix}$

$\big(\{1\},\{2,3\}\big)$ והיחס המתאים $R_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,2\,3\,3 \\ 1\,2\,3\,2\,3 \end{pmatrix}$

$\big(\{1,2,3\}\big)$ והיחס המתאים $R_5 = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,3 \\ 1\,2\,3\,1\,2\,3\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$

אז יש 5 יחסי שקילות.

II. 


האיבר הקטן ביותר הוא $R_1$ כי: $R_1 \subseteq R$ לכל יחס R, כי יחס הסדר החלקי הוא רפלקסיבי.

כמו כן $R \subseteq R_5$ : לכל R. כי כל יחס מוכל במכפלה הקרטזית .( לפי הגדרת יחס) לכן $R_5$ הינו האיבר הגדול ביותר.

היחס אינו יחס סדר מלא כי לא כל 2 קבוצות ניתנות להשוואה על ידי יחס ההכלה. למשל: $R_3 \not\subset R_2$ וגם $R_3 \not\subset R_2$

**<u>שאלה 6 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>**

א. (10 נק') יעקב התעורר מהחלום ומיד התחיל לטפס על הסולם. הוא יכול לטפס בכל פעם שלב אחד או שני שלבים בבת אחת. יהי $a_n$ מספר האפשרויות לטפס על סולם שבו $n$ שלבים עד לקצהו.

I. מצאו את $a_1, a_2$ וכלל נסיגה עבור $a_n$.

II. מצאו נוסחה מפורשת עבור $a_n$.

ב. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה:

I. $n^2+n$ זוגי לכל $n \in \mathbb{N}$ .

II. $n^3-n$ מתחלק ב - 6 לכל $n \in \mathbb{N}$ .

**<u>פתרון שאלה 6</u>**

א. יש דרך אחת לעלות על סולם בן שלב אחד ושתי דרכים לעלות על סולם בן שני שלבים (שלב אחד ואז עוד שלב אחד או שני שלבים בבת אחת). מכאן, $a_1=1, a_2=2$ .

למציאת נוסחת נסיגה נתבונן בשני המקרים האפשריים הבאים:

I. בפעם הראשונה יעקב עלה שלב אחד ולכן מספר הדרכים שלו לעלות על $n-1$ השלבים הנותרים הוא $a_{n-1}$.

II. בפעם הראשונה יעקב עלה שני שלבים בבת אחת ולכן מספר הדרכים שלו לעלות על $n-2$ השלבים הנותרים הוא $a_{n-2}$. מכאן, $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ .

ב. השורשים של המשוואה האופיינית $x^2-x-1$ הם $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ . לכן הפתרון המבוקש הוא מהצורה

$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. למציאת ערכי $A, B$ ניעזר בתנאי ההתחלה.

לשם נוחות נמצא תחילה את $a_0$ המקיים $a_2 = a_1 + a_0$ .

מכיוון ש $a_1=1, a_2=2$ נקבל ש $a_0=1$ . כעת ע"י הצבת שני ערכי ההתחלה נקבל את מערכת המשוואות הליניארית

$$\begin{cases} 1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A+B \end{cases}.$$

פתרון המערכת הוא $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, B = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ .

מכאן,

$$a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

שימו לב: זוהי סדרת פיבונאצ׳י.

ב. הוכחה באינדוקציה על $n$.

I. בסיס האינדוקציה: $n=0$, ואכן $0^2+0=0$ זוגי.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n \ge 0$ מסויים, כלומר ש $n^2+n$ זוגי ונוכיח את הטענה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש $(n+1)^2+n+1$ זוגי.

מתקיים עפ״י הבינום של ניוטון $(n+1)^2+n+1 = n^2+2n+1+n+1 = \left(n^2+n\right)+2(n+1)$. כעת, $n^2+n$ זוגי מהנחת האינדוקציה וכמובן $2(n+1)$ זוגי. לכן, $(n+1)^2+n+1 = \left(n^2+n\right)+2(n+1)$ זוגי כסכום של שני מספרים זוגיים.

II. בסיס האינדוקציה: $n=0$, ואכן $0^3-0=0$ מתחלק ב - 6.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n \ge 0$ מסויים. כלומר ש $n^3-n$ מתחלק ב - 6 ונוכיח את הטענה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש $(n+1)^3-(n+1)$ מתחלק ב - 6.

עפ״י הבינום של ניוטון מתקיים:

$$\left(n+1\right)^3-(n+1) = n^3+3n^2+3n+1-n-1 = n^3-n+3n(n+1) = n^3-n+3(n^2+n)$$

כעת, $n^3-n$ מתחלק ב - 6 מהנחת האינדוקציה ו - $3(n^2+n)$ מתחלק ב - 6 מסעיף א׳ ומכאן $\left(n+1\right)^3-(n+1) = n^3-n+3(n^2+n)$ מתחלק ב - 6.

הערה: הוכחה אלטרנטיבית (ללא אינדוקציה) לשני הסעיפים:

$n^2+n = n(n+1)$ זוגי כמכפלת שני טבעיים עוקבים (אחד מהמספרים העוקבים חייב להיות זוגי).

$n^3-n = n\left(n^2-1\right) = \left(n-1\right)n\left(n+1\right)$ מתחלק ב - 6 כמכפלת שלושה שלמים עוקבים (אחד המספרים חייב להתחלק ב - 2 ואחד המספרים, יתכן שאותו המספר, חייב להתחלק ב- 3).

# שאלון X

## שאלה 1 ( 20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (12 נק') חשבו את $\Phi(315)$. כלומר, את מספר הטבעיים החיוביים הקטנים מ- 315 וזרים לו.

נזכיר כי 2 מספרים טבעיים הם זרים זה לזה אם המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1.

ב. (8 נק') נתונות 2 טענות . לכל טענה רשמו אם היא נכונה או אינה נכונה **ללא נימוק.**
( העתיקו את הטענה למחברת הבחינה ורשמו נכון או לא נכון)

I. טענה 1 : תהיינה $f:A\to B,\quad g:B\to C$ פונקציות ו- $g\circ f:A\to C$ פונקציית ההרכבה.

אם $g\circ f$ חח"ע אז $f$ חח"ע.

II. טענה 2 : אם $R$ הוא היחס מעל $\{1,2,3,...\}$ המוגדר על ידי :

$$\left(y\,|\,x \;or\; \quad x\,|\,y \quad\right)\Leftrightarrow\left(\quad (x,y)\in R\right)$$

אז היחס $R$ הוא יחס סדר חלקי.

( הסימון $x\,|\,y$ פירושו $\frac{y}{x}$ שלם)

## שאלה 2 ( 20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. ( 10 נק') מהי עוצמת קבוצת כל **תתי הקבוצות** בנות 3 איברים של הטבעיים?

ב. ( 10 נק') יהיו $A,B,C,D$ פסוקים. נסמן ב- $\gamma$ את הפסוק הבא :

$$\gamma=\forall A\Big(\exists B\big(\left(A\wedge B\vee C\right)\to\left(\sim D\right)\big)\Big)$$

באמצעות שקילויות רשמו פסוק $\varphi$ כך : $\varphi\equiv\sim\gamma$ כך שבפסוק $\varphi$ לא יופיע קשר השלילה.

## שאלה 3 ( 20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (10 נק') הוכיחו שעבור כל 2 קבוצות A,B וקבוצות החזקה שלהן $P(A),P(B)$ מתקיים :

I. $P(A)\subseteq P(B)\Leftarrow A\subseteq B$

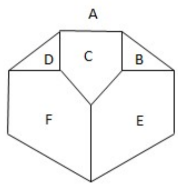
II. אם $P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$ אז $A$ אינה תת קבוצה של $B$ וגם $B$ אינה תת קבוצה של $A$ .

( הדרכה : דרך השלילה)

ב.( 10 נק') יובל מתכונן לפתיחת שנת הלימודים האקדמית ( כולל סמסטר קיץ ותקופת בחינות). בין מרכיבי התקציב לשנת הלימודים נמצא תקציב עטים של 600 ש"ח לשנה. כל עט עולה 6 ₪.
על יובל לחלק את התקציב על פני השנה (52 שבועות), כאשר עליו לקנות לפחות עט אחד לפחות בכל שבוע.
הוכיחו כי יש תקופה של מספר שבועות ברצף בה ההוצאות של יובל היו 18 ש"ח בדיוק.

**<u>שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>**

א. ( 10 נק') לפניכם מפה של ספארי. קטעים במפה מסמנים גדרות בין מתחמי חיות מסוגים שונים וגדרות חיצוניות בין הפארק לסביבה A של הפארק.
בכל גדר שער אחד בלבד. בתחומים אלו ניתן לטייל ברכב בלבד.
האם אפשר לטייל בפארק ובסביבה שלו A, כך שעוברים בכל שער בגדר בדיוק פעם אחת?




ב. ( 10 נק') בביטוי $\left(\sqrt[5]{x}+\frac{1}{x}\right)^{18}$ חשבו את המחובר שלא מכיל $x$.

**<u>שאלה 5 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>**

א. ( 8 נק') נתונים $k \geq 0$ כדורים לבנים ו- $m \geq 0$ כדורים צבעוניים שונים.

I. בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה את כל הכדורים?

II. בכמה דרכים ניתן לחלק את כל הכדורים ל n תאים שונים?

ב. (12 נק') תהי A קבוצת יחסי השקילות מעל הקבוצה $\{1,2,3\}$ נגדיר יחס S מעל קבוצה A:

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (X,Y) \in S$$

I. מהו $|A|$? ( מספר אברי A)

II. S הינו יחס סדר חלקי ( אין צורך להוכיח זאת).
שרטטו את דיאגרמת הסה של היחס S.
האם קיים איבר קטן ביותר?
האם קיים איבר גדול ביותר?
האם היחס S הוא יחס סדר מלא?

**<u>שאלה 6 ( 20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>**

א. (10 נק') יעקב התעורר מהחלום ומיד התחיל לטפס על הסולם. הוא יכול לטפס בכל פעם שלב אחד או שני שלבים בבת אחת. יהי $a_n$ מספר האפשרויות לטפס על סולם שבו $n$ שלבים עד לקצהו.

I. מצאו את $a_1, a_2$ וכלל נסיגה עבור $a_n$.

II. מצאו נוסחה מפורשת עבור $a_n$.

ב. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה:

I. $n^2+n$ זוגי לכל $n \in \mathbb{N}$.

II. $n^3-n$ מתחלק ב - 6 לכל $n \in \mathbb{N}$.