יונתן כהן

אלגברה לינארית

תרגול מספר 13

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים לכסון

<u>לכסון</u>

.1

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$.

למצוא את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים של A והריבויים האלגבריים והגאומטריים שלהם.
לקבוע האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן למצוא את המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P כך שמתקיים $P^{-1}AP=D$.

חישוב הפולינום האופייני:

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -3\\ -3 & \lambda+5 & -3\\ -6 & 6 & \lambda-4\end{vmatrix}\overset{C_2\to C_2+C_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1 & \lambda+2 & -3\\ -3 & \lambda+2 & -3\\ -6 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}\overset{C_2\to C_2/(\lambda+2)}{=}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -3\\ -3 & 1 & -3\\ -6 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}\overset{R_1\to R_1-R_2}{=}(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -3\\ -6 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}\overset{\text{COLUMN 2}}{=}$$

$$=(\lambda+2)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0\\ -6 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)\cdot(\lambda+2)(\lambda-4)=(\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

הפולינום האופייני $p(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda+2)^2=\lambda^3-12\lambda-16$

הערכים העצמיים: $\lambda_1=4$ ריבוי אלגברי $n_1=1$ => ריבוי גיאומטרי $m_1=1$.
$\lambda_2=-2$ ריבוי אלגברי $n_2=2$

$$A-\lambda_1 I=A-4I=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac12\\ 0 & 1 & -\frac12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}x=\frac12 z\\ y=\frac12 z\\ (x,y,z)=z(\frac12,\frac12,1)\end{array}$$

בסיס למרחב העצמי V_1 של $\lambda_1=4$: $\{(1,1,2)\}$ ריבוי גיאומטרי $m_1=1$.

$$A-\lambda_2 I=A+2I=\begin{bmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}x=y-z\\ (x,y,z)=(y-z,y,z)=\\ =y(1,1,0)+z(-1,0,1)\end{array}$$

בסיס למרחב העצמי V_2 של $\lambda_2=-2$: $\{(1,1,0),\ (-1,0,1)\}$
ריבוי גיאומטרי $m_2=2$

המטריצה ניתנת ללכסון, מטריצה מלכסנת:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & & \\ & -2 & \\ & & -2\end{bmatrix}$$

.2

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}$.

למצוא את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים של A והריבויים האלגבריים והגאומטריים שלהם.
לקבוע האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן למצוא את המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P כך שמתקיים $P^{-1}AP=D$.

חישוב הפולינום האופייני:

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda+2\end{vmatrix}\overset{R_2\to R_2-R_1}{=}\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 4-\lambda & \lambda-4 & 0\\ 6 & -6 & \lambda+2\end{vmatrix}\overset{C_1\to C_1+C_2}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ 0 & \lambda-4 & 0\\ 0 & -6 & \lambda+2\end{vmatrix}\overset{\text{ROW }2}{=}(\lambda-4)\cdot\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1\\ 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

הפולינום האופייני: $p(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=\lambda^3-12\lambda-16$

ערכים עצמיים: $\lambda_1=4$ ריבוי אלגברי $n_1=1$ $\Leftarrow$ ריבוי גיאומטרי $m_1=1$

$\lambda_2=-2$ ריבוי אלגברי $n_2=2$

$$A-\lambda_1 I=A-4I=\begin{bmatrix}-7 & 1 & -1\\ -7 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}x=0,\ y=z\\ (x,y,z)=z(0,1,1)\end{array}$$

בסיס למרחב העצמי V_1 של $\lambda_1=4$: $\{(0,1,1)\}$ ריבוי גיאומטרי $m_1=1$

$$A-\lambda_2 I=A+2I=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -7 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}x=y,\ z=0\\ (x,y,z)=(y,y,0)=\\ =y(1,1,0)\end{array}$$

בסיס למרחב העצמי V_2 של $\lambda_2=-2$: $\{(1,1,0)\}$ ריבוי גיאומטרי $m_2=1$

המטריצה אינה לכסינה כי $m_2<n_2$, כי $m_1+m_2=2<3=n$.

הערה:
למטריצה זו פולינום אופייני זהה לזה של המטריצה בדוגמא מס׳ 1.
עקב כך לשתי המטריצות יש אותם ערכים עצמיים ואותם ריבויים אלגבריים.
אך בכל זאת המטריצה בדוגמא מס׳ 1 ניתנת ללכסון, המטריצה בדוגמא מס׳ 2 אינה ניתנת ללכסון.

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

א. למצוא את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים של A והריבויים האלגבריים והגאומטריים שלהם. לקבוע האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן למצוא את המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P כך שמתקיים $P^{-1}AP=D$.

ב. לחשב את A^{10}.

הפולינום האופייני: $p(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

הערכים העצמיים: $\lambda_1=0$ ריבוי אלגברי $n_1=1 \Rightarrow$ ריבוי גיאומטרי $m_1=1$

$\lambda_2=1$ $\quad n_2=1$ $\quad m_2=1$

$\lambda_3=2$ $\quad n_3=1$ $\quad m_3=1$

המטריצה לכסינה כי לכל ע"ע $m_\lambda=n_\lambda$, כי $m_1+m_2+m_3=3=n$.

כי כל הע"ע שונים בריבוי אלגברי 1.

$$A-\lambda_1 I=A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=-z,\ y=0\\(x,y,z)=z(-1,0,1)\end{matrix}$$

בסיס למרחב העצמי V_1 של $\lambda_1=0$: $\{(-1,0,1)\}$ הריבוי הגיאומטרי $m_1=1$.

$$A-\lambda_2 I=A-I=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=0\quad z=0\\(x,y,z)=y(0,1,0)\end{matrix}$$

בסיס למרחב העצמי V_2 של $\lambda_2=1$: $\{(0,1,0)\}$ הריבוי הגיאומטרי $m_2=1$.

$$A-\lambda_3 I=A-2I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=z,\ y=0\\(x,y,z)=z(1,0,1)\end{matrix}$$

בסיס למרחב העצמי V_3 של $\lambda_3=2$: $\{(1,0,1)\}$ ריבוי גיאומטרי $m_3=1$.

מטריצה מלכסנת: $P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$

אם A מטריצה ניתנת ללכסון, P היא מטריצה מלכסנת ו D צורה אלכסונית של A:

$$P^{-1}AP=D \quad\Leftrightarrow\quad A=PDP^{-1}$$

ואז לכל k טבעי:

$$A^k=(PDP^{-1})^k=(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})=$$
$$=PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^kP^{-1}$$

נחשב את A^{10}:

$$A^{10}=PD^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}^{10}\cdot\begin{bmatrix}-\frac12&0&\frac12\\0&1&0\\\frac12&0&\frac12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0^{10}&&\\&1^{10}&\\&&2^{10}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac12&0&\frac12\\0&1&0\\\frac12&0&\frac12\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1024\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac12&0&\frac12\\0&1&0\\\frac12&0&\frac12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}512&0&512\\0&1&0\\512&0&512\end{bmatrix}$$

.4

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

א. למצוא את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים של A והריבויים האלגבריים והגאומטריים שלהם. לקבוע האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן למצוא את המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P כך שמתקיים $P^{-1}AP=D$.

ב. לחשב את A^k עבור k אי-זוגי.

הפולינום האופייני: $p(\lambda)=\lambda^3-\lambda=\lambda(\lambda^2-1)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$

הערכים העצמיים: $\lambda_1=0$ ריבוי אלגברי $n_1=1 \Rightarrow$ ריבוי גיאומטרי $m_1=1$

$\lambda_2=1$ $n_2=1$ $m_2=1$

$\lambda_3=-1$ $n_3=1$ $m_3=1$

המטריצה לכסינה כי יש לה 3 ערכים עצמיים שונים

כי לכל ערך עצמי ריבוי אלגברי $=1 \Rightarrow$ ריבוי גיאומטרי $=1$

כי לכל ערך עצמי $m_\lambda=n_\lambda$, כי $m_1+m_2+m_3=3$.

$$A-\lambda_1 I=A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=z=0\\(x,y,z)=y(0,1,0)\end{matrix}$$

בסיס למרחב העצמי V_1 של $\lambda_1=0$: $\{(0,1,0)\}$ ריבוי גיאומטרי $m_1=1$.

$$A-\lambda_2 I=A-I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=z,\ y=0\\(x,y,z)=z(1,0,1)\end{matrix}$$

בסיס למרחב העצמי V_2 של $\lambda_2=1$: $\{(1,0,1)\}$ ריבוי גיאומטרי $m_2=1$.

$$A-\lambda_3 I=A+I=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=-z,\ y=0\\(x,y,z)=z(-1,0,1)\end{matrix}$$

בסיס למרחב העצמי V_3 של $\lambda_3=-1$: $\{(-1,0,1)\}$ ריבוי גיאומטרי $m_3=1$.

מטריצה מלכסנת $P=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$

נחשב את A^k עבור k טבעי איזוגי.

לכל k טבעי איזוגי:

$$D^k=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}0^k&&\\&1^k&\\&&(-1)^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}=D$$

ולכן

$A^k=PD^kP^{-1}=PDP^{-1}=A$.

.5

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

למצוא את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים של A והריבויים האלגבריים והגאומטריים שלהם.
לקבוע האם המטריצה ניתנת ללכסון, אם כן למצוא את המטריצה האלכסונית D והמטריצה המלכסנת P כך שמתקיים $P^{-1}AP=D$.

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\1&\lambda&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\cdot(\lambda\cdot\lambda-1\cdot(-1))=(\lambda-2)(\lambda^2+1)$$

הפולינום האופייני של A לא מתפרק למכפלת גורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$
$\Leftarrow$ A לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$

$$p_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-i)(\lambda+i)$$

מעל $\mathbb{C}$ יש לפולינום 3 שורשים שונים
$\Leftarrow$ ל-A יש 3 ע"ע שונים $\Leftarrow$ A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$ לכולם ריבוי אלגברי $=1$ $\Leftarrow$ ריבוי גיאומטרי $=1$

$$\lambda_1 I-A=2I-A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

פתרון כללי $(0,0,z)$

בסיס למרחב עצמי של λ_1: $\{(0,0,1)\}$

$$\lambda_2 I-A=iI-A=\begin{bmatrix}i&-1&0\\1&i&0\\0&0&i-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&i&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

פתרון כללי $(-iy,y,0)$

בסיס למרחב עצמי של λ_2: $\{(-i,1,0)\}$

$$\lambda_3 I-A=-iI-A=\begin{bmatrix}-i&-1&0\\1&-i&0\\0&0&-i-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-i&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

פתרון כללי $(iy,y,0)$

בסיס למרחב עצמי של λ_3: $\{(i,1,0)\}$

$$P=\begin{bmatrix}0&-i&i\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{bmatrix}$$

.6

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&a\\1&4a&0\end{bmatrix}$.

א. למצוא עבור אילו ערכים של הפרמטר a המטריצה A לכסינה.

ב. עבור $a=0$ למצוא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$.

ג. להראות שעבור $a=0$ מתקיים $A^k=2^{k-1}A$ לכל k טבעי.

א.

נמצא את הפולינום האופייני של A.

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda&-a\\-1&-4a&\lambda\end{vmatrix}\overset{ROW\ 1}{=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda&-a\\-4a&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-4a^2)=$$
$$=(\lambda-2)(\lambda-2a)(\lambda+2a)$$

עבור $a\neq 0,\pm1$ למטריצה יש שלושה ערכים עצמיים שונים והם $2,2a,-2a$, ולכן היא לכסינה.

כאשר $a=0$, הפולינום האופייני הוא $p(\lambda)=(\lambda-2)\lambda^2$.

$\lambda=2$ הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי $m_A(\lambda=2)=1$ ולכן גם ריבוי גיאומטרי $m_G(\lambda=2)=1$.

$\lambda=0$ הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי $m_A(\lambda=0)=2$, נמצא הריבוי הגיאומטרי שלו

$$A-0I=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ולכן הריבוי הגיאומטרי של $\lambda=0$ הוא

$$m_G(\lambda=0)=\dim\mathrm{Ker}(A-0I)=3-\mathrm{rank}(A-0I)=3-1=2$$

לכל אחד מהערכים העצמיים הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי, ולכן A ניתנת ללכסון.

נימוק אחר: סכום הריבויים הגיאומטריים הוא

$$m_G(\lambda=2)+m_G(\lambda=0)=1+2=3=n$$

ולכן A ניתנת ללכסון.

כאשר $a=1$, הפולינום האופייני הוא $p(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+2)$.

$\lambda=2$ הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי $m_A(\lambda=2)=2$, נמצא הריבוי הגיאומטרי שלו

$$A-2I=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-2&1\\1&4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&6&-3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ולכן הריבוי הגיאומטרי של $\lambda=2$ הוא

$$m_G(\lambda=2)=\dim\mathrm{Ker}(A-2I)=3-\mathrm{rank}(A-2I)=3-2=1$$

והוא שונה מהריבוי האלגברי שהוא $m_A(\lambda=2)=2$, ולכן המטריצה אינה לכסינה.

כאשר $a=-1$, הפולינום האופייני הוא $p(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+2)$.

$\lambda=2$ הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי $m_A(\lambda=2)=2$, נמצא הריבוי הגיאומטרי שלו

$$A-2I=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-2&-1\\1&-4&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&-2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ולכן הריבוי הגיאומטרי של $\lambda=2$ הוא

$m_G(\lambda=2)=\dim \operatorname{Ker}(A-2I)=3-\operatorname{rank}(A-2I)=3-2=1$

והוא שונה מהריבוי האלגברי שהוא $m_A(\lambda=2)=2$, ולכן המטריצה אינה לכסינה.

לסיכום, המטריצה לכסינה לכל $a\neq\pm1$.

ב.

כבר מצאנו שכאשר $a=0$ המטריצה ניתנת ללכסון,

$\lambda=2$ הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי $m_A(\lambda=2)=m_G(\lambda=2)=1$,

$\lambda=0$ הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי $m_A(\lambda=0)=m_G(\lambda=0)=2$.

נמצא בסיסים של המרחבים העצמיים.

עבור הערך העצמי $\lambda=0$

$$A-0I=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

x משתנה קשור, y,z משתנים חופשיים.

משורה הראשונה של המטריצה נובע $x=0$ ולכן הוקטור הכללי במרחב האפס של המטריצה הוא

$(0,y,z)=y(0,1,0)+z(0,0,1)$

ולכן בסיס למרחב העצמי של $\lambda=0$ הוא $\{(0,1,0)\,,\,(0,0,1)\}$

עבור הערך העצמי $\lambda=2$

$$A-2I=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-2&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

x,y משתנים קשורים, z משתנה חופשי.

משורה הראשונה של המטריצה נובע $x=2z$ ומהשורה השניה של המטריצה נובע $y=z$, ולכן הוקטור הכללי במרחב האפס של המטריצה הוא

$(2z,z,z)=z(2,1,1)$

ולכן בסיס למרחב העצמי של $\lambda=2$ הוא $\{(2,1,1)\}$

ולכן המטריצה המלכסנת P והמטריצה האלכסונית D הן

$$P=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

ג.

פתרון I :

$D=P^{-1}AP$ ולכן $A=PDP^{-1}$ ולכן

$$A^k=(PDP^{-1})^k=PD^kP^{-1}=P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}^kP^{-1}=P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2^k\end{bmatrix}P^{-1}=P2^{k-1}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}P^{-1}=$$

$$=2^{k-1}\cdot P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}P^{-1}=2^{k-1}\cdot PDP^{-1}=2^{k-1}\cdot A$$

פתרון II :

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^k P^{-1} = P\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$2^{k-1}\cdot A = 2^{k-1}\cdot PDP^{-1} = 2^{k-1}\cdot P\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1} = P2^{k-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1} = P\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A^k = 2^{k-1}\cdot A$$

לכסון – תרגילים מופשטים

.1

A מטריצה מסדר 4×4 המקיימת:

$$\mathrm{Ker}(A-5I)=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}\ ;\ A\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\10\\14\end{bmatrix}\ ;$$

$\begin{bmatrix}5\\6\\7\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ הם פתרונות של מערכת המשוואות $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

א. להוכיח ש A ניתנת ללכסון.

ב. למצוא את הפולינום האופייני של A.

ג. למצוא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$.

א.

הנתון $\mathrm{Ker}(A-5I)=\mathrm{span}\{(0,1,1,1)\}$ אומר ש $\lambda_1=5$ הוא ערך עצמי של A. כמו כן $\mathrm{span}\{(0,1,1,1)\}$ הוא תת מרחב חד מימדי של $\mathbb{R}^4$ ולכן ל $\lambda_1=5$ יש ריבוי גיאומטרי $m_G(\lambda_1)=\dim\mathrm{Ker}(A-5I)=1$, ו $v_1=(0,1,1,1)$ הוא וקטור עצמי של $\lambda_1=5$.

הנתון $A\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\10\\14\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\3\\5\\7\end{bmatrix}$ אומר ש $\lambda_2=2$ הוא ערך עצמי של A, ש $v_2=(1,3,5,7)$ הוא וקטור עצמי של $\lambda_2=2$. הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_2=2$ מקיים כמובן $m_G(\lambda_2)\geq 1$.

הנתון שהוקטורים $v_3=(1,2,3,4)$, $v_4=(5,6,7,8)$ הם פתרונות של המערכת ההומוגנית $A\vec{x}=\vec{0}$ אומרת שהם מקיימים $A\vec{v}=0\vec{v}$, כלומר $\lambda_3=0$ הוא ערך עצמי של A, ו v_3,v_4 הם וקטורים עצמיים של $\lambda_3=0$. מכיוון ש v_3,v_4 בת"ל (הם לא פרופורציוניים) נובע שמימד המרחב העצמי של $\lambda_3=0$ הוא לפחות 2, כלומר הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_3=0$ מקיים $m_G(\lambda_3)\geq 2$.

סכום הריבויים הגיאומטריים של המטריצה A מקיים

$$\underbrace{m_G(\lambda_1)}_{=1}+\underbrace{m_G(\lambda_2)}_{\geq 1}+\underbrace{m_G(\lambda_3)}_{\geq 2}\geq 1+1+2=4$$

אבל סכום הריבויים הגיאומטריים של מטריצה תמיד מקיים

$$m_G(\lambda_1)+m_G(\lambda_2)+m_G(\lambda_3)\leq n=4$$

ביחד מתקבל $m_G(\lambda_1)+m_G(\lambda_2)+m_G(\lambda_3)=4=n$, וזה אומר שהמטריצה ניתנת ללכסון.

ב.

כמו כן זה אומר בהכרח שאי השוויונים $m_G(\lambda_2)\geq 1$, $m_G(\lambda_3)\geq 2$ הם למעשה שוויונים, ולכן $m_G(\lambda_1)=1$, $m_G(\lambda_2)=1$, $m_G(\lambda_3)=2$. כמו כן, מכיוון שכבר הוכחנו שהמטריצה ניתנת ללכסון נובע שלכל ערך עצמי הריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים ולכן הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים הם $m_A(\lambda_1)=1$, $m_A(\lambda_2)=1$, $m_A(\lambda_3)=2$.

כמסקנה מכך הפולינום האופייני של A הוא

$$p_A(\lambda)=(\lambda-5)(\lambda-2)\lambda^2$$

ג.

מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$:

P היא מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של A , D מטריצה אלכסונית שאברי האלכסון שלה הם הערכים העצמיים של A בהתאמה, למשל:

$$P=\begin{bmatrix}0&1&1&5\\1&3&2&6\\1&5&3&7\\1&7&4&8\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}5&&&\\&2&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$$

.2

תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת $\operatorname{rank}(A-I)<\operatorname{rank}(A-2I)<\operatorname{rank}(A-3I)$.

א. להוכיח ש A ניתנת ללכסון.

ב. למצוא את כל המטריצות האלכסוניות שיכולות להיות דומות ל A .

ג. לחשב את הפולינום האופייני של A^4 , $\det A^4$, $\operatorname{trace} A^4$.

א.

קיימות שתי אפשרויות: $\operatorname{rank}(A-I)=0$ או $\operatorname{rank}(A-I)=1$.

כי אילו $\operatorname{rank}(A-I)\ge 2$ (או יותר) אז מהנתון נובע $\operatorname{rank}(A-3I)\ge 4$, שאינו אפשרי כי המטריצה מסדר 3×3 .

במקרה הראשון $\operatorname{rank}(A-I)=0$ ולכן $A-I=0$ ולכן $A=I$, ואז מתקבל

$$\operatorname{rank}(A-2I)=\operatorname{rank}(I-2I)=\operatorname{rank}(-I)=3$$
$$\operatorname{rank}(A-3I)=\operatorname{rank}(I-3I)=\operatorname{rank}(-2I)=3$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{rank}(A-2I)=\operatorname{rank}(A-3I)$$

בסתירה לנתון.

במקרה השני $\operatorname{rank}(A-I)=1$, כל המטריצות הן מסדר 3×3 ולכן הדרגה שלהן לכל היותר 3 , ואז מהנתון $1=\operatorname{rank}(A-I)<\operatorname{rank}(A-2I)<\operatorname{rank}(A-3I)$ מתחייב שיתקיים

$$\operatorname{rank}(A-2I)=2 \;,\; \operatorname{rank}(A-3I)=3$$

מהנתון $\operatorname{rank}(A-I)=1$ נובע ש $\lambda_1=1$ הוא ערך עצמי של A עם ריבוי גיאומטרי

$$m_G(\lambda_1)=\dim\operatorname{Ker}(A-I)=3-\operatorname{rank}(A-I)=2$$

מהנתון $\operatorname{rank}(A-2I)=2$ נובע ש $\lambda_2=2$ הוא ערך עצמי של A עם ריבוי גיאומטרי

$$m_G(\lambda_2)=\dim\operatorname{Ker}(A-2I)=3-\operatorname{rank}(A-2I)=1$$

הערה: מהנתון $\operatorname{rank}(A-3I)=3$ נובע $\dim\operatorname{Ker}(A-3I)=3-\operatorname{rank}(A-3I)=0$, וזה אומר ש 3 <u>אינו</u> ערך עצמי של A .

סכום הריבויים הגיאומטריים הוא $m_G(\lambda_1)+m_G(\lambda_2)=2+1=3=n$ ולכן המטריצה ניתנת ללכסון.

ב.

המטריצות האלכסוניות ש A יכולה להיות דומה להן הן

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \;,\; \begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ג.

נשתמש בטענה שאם λ ערך עצמי של המטריצה A אז λ^k ערך עצמי של המטריצה A^k .

ולכן הערכים העצמיים של A^4 הם $\lambda_1^4=1^4=1$ עם ריבוי 2 , $\lambda_2^4=2^4=16$ עם ריבוי 1.

ולכן הפולינום האופייני של A^4 הוא

$$p_{A^4}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-16)$$

הדטרמיננטה של A^4 היא מכפלת הערכים העצמיים

$$\det A^4=1\cdot 1\cdot 16=16$$

העקבה של A^4 היא סכום הערכים העצמיים

$$\operatorname{trace} A^4=1+1+16=18$$

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

.1

A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 = 3A - 2I$, מה יכולים להיות הערכים העצמיים של A ?

טענה :
A מטריצה ריבועית, λ ערך עצמי של A , $\underline{v}$ וקטור עצמי של A המשויך לערך העצמי λ .
אז לכל k טבעי, λ^k הינו ערך עצמי של A^k , $\underline{v}$ וקטור עצמי של A^k המשויך לערך העצמי λ^k .

נניח ש λ ערך עצמי של A , $\underline{v}$ וקטור עצמי של A המשויך לערך העצמי λ .

$A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

מהטענה נובע ש λ^2 הינו ערך עצמי של A^2 , $\underline{v}$ וקטור עצמי של A^2 המשויך לערך העצמי λ^2 .

$A^2\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$

כעת

$A^2 = 3A - 2I$

$A^2 - 3A + 2I = 0$

נכפול מימין בוקטור $\underline{v}$

$(A^2 - 3A + 2I)\underline{v} = 0\underline{v}$

$A^2\underline{v} - 3A\underline{v} + 2I\underline{v} = \underline{0}$

על סמך התוצאות הקודמות

$\lambda^2\underline{v} - 3\lambda\underline{v} + 2\underline{v} = \underline{0}$

$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\underline{v} = \underline{0}$

טענה בסיסית במרחבים וקטוריים :

אם $\alpha\underline{v} = \underline{0}$ אז $\alpha = 0$ או $\underline{v} = \underline{0}$.

אך מכיוון ש $\underline{v}$ הוא וקטור עצמי אז הוא שונה מ $\underline{0}$, ולכן

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \text{ or } \lambda = 2$

כלומר הערכים העצמיים האפשריים של A הוא $\lambda = 1 , \lambda = 2$.