פתרון

Y

שאלה 1 (24 נקודות)

רוני כותב תסריט עבור שני פרקים ראשונים בסדרה קומית חדשה. הוא צריך לכתוב 20 בדיחות. מתוך 20 בדיחות 10 ייבחרו באופן אקראי ויופיעו בפרק הראשון ושאר הבדיחות יופיעו בפרק השני. ההסתברות לכתוב בדיחה מצחיקה שווה ל-0.7 וזה באופן בלתי תלוי בבדיחות אחרות.

א. על בדיחה מצחיקה משלמים 100 ₪ ועל בדיחה לא מצחיקה משלמים 50 ₪. מהי תוחלת התשלום?

ב. מהי ההסתברות שרוני יכתוב לפחות 10 בדיחות מצחיקות?

ג. רוני כתב 15 בדיחות מצחיקות. מהי ההסתברות שכל הבדיחות בפרק הראשון יהיו מצחיקות?

<u>פתרון:</u>

א. נגדיר משתנה מקרי: X - מספר בדיחות מצחיקות מתוך 20. מתקיים: $X\sim$ Bin(20,0.7).

נגדיר משתנה מקרי נוסף: S - תשלום. קיים קשר בין המשתנים מקריים:

$$S = 100 \cdot X + 50 \cdot (20 - X) = 50 \cdot X + 1000$$

נחשב את התוחלת של התשלום:

$$E(S) = E(50 \cdot X + 1000) = 50E(X) + 1000 = 50 \cdot 20 \cdot 0.7 + 1000 = 1700$$

ב. ההסתברות המבוקשת היא: $P(X \geq 10)$. לחישוב ההסתברות נשתמש בקירוב נורמלי. נבדוק את התנאים:

$$20 \cdot 0.7 = 14 > 5$$
$$20 \cdot 0.3 = 6 > 5$$

נעבור לקירוב: $X\sim$ Bin(14,4.2). נחשב את ההסתברות:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - \Phi\left(\frac{9 + 0.5 - 14}{\sqrt{4.2}}\right) = 1 - \Phi(-2.2) = \Phi(2.2) = 0.9861$$

ג. נגדיר משתנה מקרי: Y - מספר בדיחות מצחיקות מתוך 10 בדיחות שנבחרו באקראי עבור פרק הראשון.

מתקיים: $Y\sim$ HG(20,15,10). נחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P(Y=10)=\frac{\binom{15}{10}\binom{5}{0}}{\binom{20}{10}}=0.0163$$

שאלה 2 (16 נקודות)

באזור מסוים מספר הפסקות חשמל מתפלג לפי התפלגות פואסון עם ממוצע של תקלה אחת ביום. הפסקת חשמל גורמת לתקלות והפסדים כספיים למפעל הנמצא באזור. אם ביום כלשהו תתרחש תקלה אחת, חברת החשמל תשלם 1000 ₪ לבעלי המפעל ואם תתרחש יותר מתקלה אחת ביום, חברת החשמל תשלם 5000 ₪ לבעלי המפעל. נניח אי תלות בין מספרי תקלות בימים שונים.

א. מהי תוחלת הסכום שחברת חשמל תשלם למפעל עבור 7 ימי עבודה?

ב. בשעה 9:00 התרחשה הפסקת חשמל. מהי ההסתברות לכך שיעברו לפחות 12 שעות עד להפסקת החשמל הבאה?

<u>פתרון:</u>

א. נגדיר משתנה מקרי: X - מספר הפסקות חשמל ביום. מתקיים: *X*~Pois(1).

נגדיר משתנה מקרי נוסף: Y- תשלום ביום אחד. נחשב את התוחלת של Y:

$$E(Y)=1000\cdot P(X=1)+5000\cdot P(X>1)=1000\cdot P(X=1)+5000\cdot(1-P(X=0)-P(X=1))=$$
$$1000\cdot e^{-1}+5000\cdot(1-e^{-1}-e^{-1})=1689$$

נגדיר משתנים מקריים: Y_i- תשלום ביום ה- i ‏(i=1,2,…,7), צריך לחשב את התוחלת $E\left(\sum_{i=1}^{7}Y_i\right)$.

$$E\left(\sum_{i=1}^{7}Y_i\right)=\sum_{i=1}^{7}E(Y_i)=7\cdot 1689=11823$$

ב. נגדיר: T - זמן בימים בין שתי הפסקות חשמל עוקבות. מתקיים: *T*~exp(1). נחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P(T\geq 0.5)=e^{-0.5}=0.6065$$

שאלה 3 (16 נקודות)

ברכיב מסוים מורכבות שתי סוללות. הרכיב מפסיק לעבוד אם לפחות אחת הסוללות המורכבות בו מתרוקנת. אורך חיים של סוללה מתפלג לפי התפלגות נורמלית עם ממוצע 10 שעות וסטיית התקן שעה. אורכי חיים של סוללות בלתי תלויים. משה קנה 3 רכיבים כאלה.

א. ידוע שסוללה מסוימת שרדה כבר 5 שעות. מהי ההסתברות שהיא לא תתרוקן במשך 5 שעות הבאות?

ב. מהי ההסתברות שכל אחד משלושת הרכיבים שמשה קנה יעבוד יותר מ-10 שעות?

<u>פתרון:</u>

א. נגדיר משתנה מקרי: X : - אורך חיים של סוללה. מתקיים: $X\sim N(10,1)$. נחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P(X>10\mid X>5)=\frac{P(X>10)}{P(X>5)}=\frac{1-\Phi\left(\frac{10-10}{1}\right)}{1-\Phi\left(\frac{5-10}{1}\right)}=\frac{1-0.5}{\Phi(5)}=0.5$$

ב. נחשב סיכוי של רכיב אחד לעבוד יותר מ-10 שעות. רכיב יעבוד יותר מ-10 שעות אם ורק אם כל אחת משתי הסוללות בו תשרוד יותר מ-10 שעות.

$$P(X_1>10, X_2>10)=P(X_1>10)\cdot P(X_2>10)=0.5^2=0.25$$

לכן הסיכוי שכל אחד משלושה רכיבים שמשה קנה יעבוד יותר מ-10 שעות שווה ל:

$$0.25^3=0.0156$$

שאלה 4 (20 נקודות)

בחנות בגדים נמכרות 3 חולצות אדומות כאשר אחת מהן עם לוגו של MARVEL, 2 חולצות לבנות כאשר אחת מהן עם לוגו של MARVEL ו-2 חולצות שחורות. אסף בחר שלוש חולצות באקראי וקנה אותן. נגדיר:

X – מספר חולצות אדומות שאסף קנה.

Y – מספר חולצות לבנות שאסף קנה.

א. (12 נקודות) מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים X,Y.

ב. (8 נקודות) חולצה עם לוגו של MARVEL עולה 100 ₪ וחולצה בלי לוגו עולה 50 ₪. מהי ההסתברות שאלון ישלם לפחות 200 ₪ עבור שלוש החולצות שהוא קנה?

<u>פתרון:</u>

א.

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0	$\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{2}{35}$	$\frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{2}{35}$
1	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{3}{35}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{3}{35}$
2	$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{6}{35}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{6}{35}$	0
3	$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35}$	0	0

ב. נגדיר משתנה מקרי: Z - מספר חולצות עם לוגו מתוך שלוש שנבחרו באקראי.

מתקיים: $Z\sim$ HG(7,2,3). תשלום עבור חולצות שווה ל: $100Z+50(3-Z)=50Z+150$. נחשב את ההסתברות לשלם לפחות 200 ₪.

$$P(50Z+150\geq 200)=P(Z\geq 1)=1-P(Z=0)=1-\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{25}{35}$$

שאלה 5 (24 נקודות)

הציון במבחן בקורס "מבוא להסתברות" הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ אינה ידועה, ושסטיית התקן שלו ידועה ושווה ל 5. כדי לאמוד את התוחלת יילקח מדגם של 4 סטודנטים, ויבדקו ציונים של הסטודנטים. מוצעים שני אומדים לתוחלת על סמך המדגם:

$$T_1=\frac{X_1+\ldots+X_4}{4},\qquad T_2=\frac{2X_1-X_2+2X_3+X_4}{4}$$

א. מהו האומד המועדף?
ב. ציוני הסטודנטים היו: 75, 54, 90, 81. מצאו רווח בר סמך עבור התוחלת של הציון ברמת סמך של 90%.
ג. כמה סטודנטים היה צריך לדגום אם מעוניינים עבור אותה רמת הסמך שאורכו של רווח בר סמך לא יעלה על 4?

<u>פתרון:</u>

א.

$$E(T_1)=E\left(\frac{X_1+\ldots+X_4}{4}\right)=\frac{E(X_1)+\cdots+E(X_4)}{4}=\frac{4\mu}{4}=\mu$$

$$E(T_2)=E\left(\frac{2X_1-X_2+2X_3+X_4}{4}\right)=\frac{2E(X_1)-E(X_2)+2E(X_3)+E(X_4)}{4}=\frac{4\mu}{4}=\mu$$

שני האומדים הם חסרי הטיה, לכן נחשב את השונויות שלהם ונבחר את האומד בעל שונות מינימלית.

$$V(T_1)=V\left(\frac{X_1+...+X_4}{4}\right)=\frac{V(X_1)+\cdots+V(X_4)}{4^2}=\frac{4\sigma^2}{4^2}=\frac{\sigma^2}{4}=\frac{25}{4}=6.25$$

$$V(T_2)=V\left(\frac{2X_1-X_2+2X_3+X_4}{4}\right)=\frac{4V(X)_1+V(X_2)+4V(X_3)+V(X_4)}{4^2}=\frac{10\sigma^2}{4^2}=\frac{10\cdot 25}{16}=15.625$$

לאומד ראשון (ממוצע המדגם) שונות קטנה יותר, לכן נעדיף אותו.

ב. נחשב אומדן עבור ממוצע המדגם:

$$\overline{X}=\frac{X_1+...+X_4}{4}=\frac{81+90+54+75}{4}=75$$

רווה סמך עבור μ ברמת סמך 0.9:

$$\overline{X}\pm z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$75\pm z_{0.95}\cdot\frac{5}{\sqrt{4}}$$

$$75\pm 1.645\cdot\frac{5}{\sqrt{4}}$$

$$75\pm 4.1125$$

$$[70.8875;79.1125]$$

ג.

$$n\geq\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{\varepsilon}\right)^2=\left(\frac{1.645\cdot 5}{2}\right)^2=16.91$$

לפחות 17 סטודנטים.