פתרון במתמטיקה בדידה תשפ"א סמסטר ב
שאלון Y

26 ביוני 2021

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות בכדי לקבל ניקוד מלא. אלא אם כתוב אחרת, יש לנמק את תשובתכם באופן מלא וברור. יש לציין באופן מפורש וברור באילו משפטים, טענות או נוסחאות ידועות אתם משתמשים. תשובות חלקיות, גם אם נכונות, לא ייזכו אותכם בניקוד מלא.

1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** קיבעו האם הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה.

$$((P \wedge R) \longrightarrow Q) \leftrightarrow (P \longrightarrow (R \longrightarrow Q))$$

פתרון:

$$\begin{aligned} &((P \wedge R) \longrightarrow Q) \leftrightarrow (P \longrightarrow (R \longrightarrow Q)) \equiv \\ &\left(\overline{(P \wedge R)} \vee Q\right) \leftrightarrow (\overline{P} \vee (\overline{R} \vee Q)) \equiv \\ &(\overline{P} \vee \overline{R} \vee Q) \leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{R} \vee Q) \equiv T \end{aligned}$$

2. **(10 נק)** הראו כי אוסף כל המעגלים במישור ($\mathbb{R}^2$) עם מרכז בעל קורדינטות רציונליות ורדיוס רציונלי הוא בן מנייה.

פתרון: כל מעגל מוגדר באופן יחיד ע"י המרכז שלו וע"י הרדיוס שלו, ובכיוון ההפוך, כל שלושה מספרים רציונליים $((P_1, P_2), R) \in (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\times\mathbb{Q}$ מגדירים מעגל במישור שמרכזו הוא (P_1, P_2) ורדיוסו הוא R. באופן מפורש, יהא

$$C_{P,R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x - P_1)^2 + (y - P_2)^2 = R^2\}$$

מעגל שמרכזו בנקודה $P = (P_1, P_2)$ ורדיוסו R ותהא

$$\mathcal{C} = \{C_{P,R} | P \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, R \in \mathbb{Q}\}$$

קבוצת כל המעגלים במישור עם מרכז בעל קורדינטות רציונליות ורדיוס רציונלי. נגדיר פונקציה

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$F(C_{P,R}) = (P_1, P_2, R)$$

הפונקציה F היא חח"ע: נניח כי $F(C_{P,R}) = F(C_{S,T})$ צריך להראות כי $C_{P,R} = C_{S,T}$. אכן,

$$\begin{aligned} F(C_{P,R}) = F(C_{S,T}) &\iff \\ (P_1, P_2, R) = (S_1, S_2, T) &\iff \\ P_1 = S_1, \quad P_2 = S_2 \quad R = T &\iff \\ C_{P,R} = C_{S,T} & \end{aligned}$$

הפונקציה F היא על: תהא $(P_1, P_2, R) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ שלשה סדורה כלשהיא. אז

$$F(C_{P,R}) = (P_1, P_2, R)$$

כאשר $P = (P_1, P_2)$. כלומר, לכל שלשה של מספריים רציונליים יש מקור תחת F ולכן הפונקציה F היא על.
ולכן בסה"כ,

$$|\mathcal{C}| = |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$$

והקבוצה $\mathcal{C}$ היא בת מנייה כנדרש.

2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** כמה דרכים יש לסדר את המספרים $1, 2, ..., 8$ בשורה כך שאף מספר זוגי אינו נמצא במקומו?
(לדוגמא: 18365472 עונה על הדרישה ואילו 12876543אינו עונה על הדרישה)

פתרון: נשתמש בעקרון הכלה-הפרדה. נגדיר:

A_i - קבוצת כל האפשרויות לסידור בהן מספר זוגי i נמצא במקום i בסדרה כאשר $i = 2, 4, 6, 8$

U - קבוצת כל הסידורים האפשריים.

מה שאנחנו מחפשים זה את המשלים של איחוד את הקבוצות A_i, כלומר

$$|U| - |A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup A_8|$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} |A_i| &= 7! \\ |A_i \cap A_j| &= 6! \\ |A_i \cap A_j \cap A_k| &= 5! \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 4! \\ |U| &= 8! \end{aligned}$$

ולכן סה"כ נקבל:

$$\begin{aligned} |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |U| - \binom{4}{1}|A_1| + \binom{4}{2}|A_1 \cap A_2| - \binom{4}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &+ \binom{4}{4}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 8! - 4 \cdot 7! + 6 \cdot 6! - 4 \cdot 5! + 1 \cdot 4! \\ &= 24024 \end{aligned}$$

2. **(10 נק)** הוכיחו כי קיימים מספרים טבעיים n, m כך ש $m < n < 2023$ ו

$$2021 \mid (5^n - 5^m)$$

כאן הכוונה לחלוקה ללא שארית.

פתרון: נשתמש בעקרון שובך היונים. ראשית, נסמן ב α_k את השארית של 5^k בחלוקה ל 2021. נתבונן בקבוצה $\{\alpha_k\}_{k=0}^{2023}$. כעת נגדיר:
תאים: שאריות אפשריות בחלוקה ל 2021. יש סה"כ 2021 תאים.
יונים: האיברים α_k כאשר $0 \leq k \leq 2023$. יש סהכ 2024 יונים.
לכן, מכיוון שיש יותר יונים מתאים, לפי עקרון שובך היונים יש לפחות שתי יונים הנמצאות באותו תא. כלומר, קיימים שני איברים $\alpha_n = \alpha_m$. כלומר, עבור n, m הנ"ל מתקיים כי השאריות בחלוקה ל 2021 של המספרים 5^n ו 5^m שוות. ולכן

$$2021|(5^n - 5^m)$$

כנדרש.

3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(12 נק)** אפרת מסדרת בשורה חרוזים בצורת כוכב וחרוזים עגולים בצבעים שונים. חרוז בצורת כוכב יכול להיות ירוק אדום או צהוב. חרוז עגול יכול להיות ורוד, סגול, תכלת ושחור. בכמה דרכים היא יכולה לעשות לסדר שורה באורך n כאשר אסור לה לשים שני חרוזים בצורת כוכב אחד ליד השני?

   (א) **(1 נק)** כיתבו את תנאי ההתחלה עבור $n = 1$ ו $n = 2$.

   (ב) **(5 נק)** כיתבו את נוסחת הנסיגה.

   (ג) **(4 נק)** פיתרו את נוסחת הנסיגה כאשר נתון כי $a_0 = 1$.

פתרון: עבור נסמן ב a_n את מספר האפשרויות לסדרות חוקיות של חרוזים. עבור $n = 1$ מתקיים כי $a_1 = 7$. עבור $n = 2$ אם החרוז השני הוא חרוז עגול הרי שאין הגבלה על החרוז הראשון ולכן יש $4 \cdot 7 = 28$ אפשרויות. אם החרוז השני הוא בצורת כוכב, הרי שהחרוז הראשון יכול להיות רק חרוז עגול. מכיוון שיש 3 צבעים לחרוז בצורת כוכב ו 4 אפשרויות לחרוז עגול נקבל $4 \cdot 3 = 12$. ולכן סה"כ $a_2 = 40$.

באופן דומה נמצא את כלל הנסיגה. אם החרוז ה-nי בסדרה הוא עגול (ויש 4 אפשרויות כאלו) הרי שלפניו יש סדרה חוקית באורך $n-1$ ולכן אפשרות זו תורמת $4\cdot a_{n-1}$. אם החרוז ה-nי בסדרה הוא בצורת כוכב (ויש 3 אפשרויות כאלו) הרי שהחרוז ה $n-1$ הוא עגול (ויש 4 אפשרויות כאלו) ולפניו יש סדרה חוקית באורך $n-2$. לכן אפשרות זו תורמת $3\cdot 4\cdot a_{n-2}$ ובסה"כ

$$a_n = 4a_{n-1} + 12a_{n-2}$$

הפולינום האופייני הוא

$$x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$$

לכן האיבר הכללי הוא מהצורה

$$a_n = A_1 6^n + A_2(-2)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה $a_0 = 1, a_1 = 7$:

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 7 = 6A_1 - 2A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{9}{8} \\ A_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

ונקבל

$$a_n = \frac{1}{8}\left(9\cdot 6^n - (-2)^n\right)$$

2. **(8 נק)** הוכיחו כי לכל שני מספרים טבעיים n,m כך ש $2 \le m \le n$ ו $n-m > 2$ מתקיים כי

$$\binom{n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n-m}{2} + m(n-m)$$

פתרון: נפתח את אגף ימין במשוואה בכדי להגיע לביטוי באגף שמאל.

$$\binom{m}{2} + \binom{n-m}{2} + m(n-m) = \frac{m!}{(m-2)!2!} + \frac{(n-m)!}{(n-m-2)!2!} + m(n-m)$$

$$= \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} + m(n-m)$$

$$= \frac{m(m-1) + (n-m)(n-m-1) + 2m(n-m)}{2}$$

$$= \frac{m^2 - m + n^2 - 2mn + m^2 - n + m + 2mn - 2m^2}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$= \binom{n}{2}$$

דרך נוספת: $\binom{n}{2}$ זהו מספר האפשרויות לבחירת שני איברים שונים מתוך הקבוצה $\{1,\dots,n\}$.
נחלק את הקבוצה לשתי תתי קבוצות, $A = \{1,\dots,m\}$ - קבוצה בגודל m ו-$B = \{m+1,\dots,n\}$ - קבוצה בגודל $n-m$. נחלק את האפשרויות לבחירת שני איברים שונים מתוך הקבוצה $\{1,\dots,n\}$ לשלושה מקרים שונים:

1. ששני האיברים נבחרו מ-A: יש לכך $\binom{m}{2}$ אפשרויות.
2. ששני האיברים נבחרו מ-B: יש לכך $\binom{n-m}{2}$ אפשרויות.
3. שאיבר אחד נבחר מ-A ואיבר אחד נבחר מ-B: יש לכך $m(n-m)$ אפשרויות.

4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** סטודנטית לפיזיקה צריכה להיות 5 ימים במעבדה במהלך הסמסטר. לאחר כל יום במעבדה היא חייבת לנוח במשך לפחות 6 ימים. **רק לאחר** היום האחרון במעבדה, הסטודנטית צריכה לכתוב דו"ח מסכם בבית שלוקח 10 ימים לכתוב. הסטודנטית

חייבת להגיש את הדו"ח עד היום האחרון של הסמסטר.
בכמה דרכים היא יכולה לעשות זאת אם בסמסטר יש 105 ימים?

פתרון: לאחר כל יום במעבדה הסטונדטית חייבת לנוח במשך 6 ימים לפחות. כלומר, יש $4\cdot 6=24$ ימים בסמסטר בהם הסטודנטית **לא** יכולה יהיות במעבדה. בנוסף לזאת, יש עוד 10 ימים בהם הסטודנטית לא יכולה להיות במעבדה. אלו הם הימים בהם היא כותבת את הדו"ח המסכם. ולכן, סה"כ הסטודנטית לא יכולה להיות במעבדה ב 34 ימים במהלך הסמסטר. כלומר, היא צריכה לבחור 5 ימי מעבדה מבין

$$105-34=71$$

לכן מספר הדרכים לבחור את ימי המעבדה הוא

$$\binom{71}{5}=13019909$$

דרך נוספת לחשוב על הפתרון: נמספר את הימים במסמטר מ 1 ועד 105 ואת הימים בהם הסטודנטית במעבדה ב $a_1,\cdots,a_5$. מכיוון שהסטודנטית צריכה לכתוב את הדוח הסופי במשך 10 ימים, ומכיוון שחייב להיות רווח של לפחות 6 ימים בין מעבדה למעבדה נקבל כי

$$a_1<a_2-6\leq a_3-12\leq a_4-18\leq a_5-24\leq 105-10=95$$

נסמן

$$b_1=a_1,\ b_2=a_2-6,\ b_3=a_3-12,\ b_4=a_4-18,\ b_5=a_5-24$$

מהגדרה זו, אם נדע את הערכים של ה b_i נוכל לדעת את הערכים של a_i. כמו כן, נשים לב כי $b_5\leq 95-24=71$. אין עוד דרישות על ה b_i חוץ מהדרישה ש

$$b_1<b_2<\cdots<b_5$$

ולכן יש $\binom{71}{5}$ אפשרויות לסטודנטית לקבוע את ימי המעבדה שלה.

2. **(10 נק)** בכמה דרכים ניתן לחלק 10 כדורים לבנים זהים ו 10 כדורים צבעוניים שונים זה מזה, ל 6 תאים כך שבכל תא יהיה מספר שווה של כדורים לבנים וכדורים צבעוניים?

פתרון: מספר האפשרויות לחלק 10 כדורים צבעוניים ל 6 תאים הוא 6^{10}. החלוקה של הכדורים הלבים נקבעת ע"י החלוקה של הכדורים הצבעוניים (כי צריך להיות מספר שווה בכל תא). לכן התשובה היא 6^{10}.

5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** מצאו את מספר הפתרונות במספרים טבעיים חיוביים (לא כולל 0) של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$$

כאשר

$$x_1, x_2 \geq 5, \quad 5 \leq x_3 \leq 10 \quad , x_5 \leq 10$$

פתרון: הפתרון הוא המקדם של x^{30} בפונקציה היוצרת שהיא

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^5 + x^6 + \ldots\right)^2 \cdot \left(x^5 + x^6 + \ldots + x^{10}\right) \cdot \left(x + x^2 + \ldots\right) \cdot \left(x + x^2 + \ldots + x^{10}\right) \\ &= x^{17}\left(1 + x + x^2 + \ldots\right)^3 \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^5\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^9\right) \\ &= \frac{x^{17}\left(1-x^6\right)\cdot\left(1-x^{10}\right)}{(1-x)^5} = x^{17}\left(1 - x^6 - x^{10} + x^{16}\right)\sum_{n=0}^{\infty} D\left(5,n\right)x^n \end{aligned}$$

המקדם של x^{30} הוא אפוא

$$\boldsymbol{D\left(5,13\right) - D\left(5,7\right) - D\left(5,3\right) = \frac{17\cdot16\cdot15\cdot14 - 11\cdot10\cdot9\cdot8 - 7\cdot6\cdot5\cdot4}{24} = 17\cdot10\cdot14 - 11\cdot10\cdot3 - 7\cdot5 = 2015}$$

1. **(10 נק)** תהיינה A ו B קבוצות לא ריקות. ופונקציות $f : A \longrightarrow B$ ו $g : B \longrightarrow A$.
נתון כי הפונקציות f ו g מקיימות כי לכל $a \in A$

$$g \circ f(a) = a$$

הראו כי הפונקציה f היא חח"ע והפונקציה g היא על.

פתרון: נראה כי f חחע: יהיו $a_1, a_2 \in A$ כך ש-$f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$. נקבל כי

$$a_1 \overset{(1)}{=} g \circ f\left(a_1\right) \overset{(2)}{=} g\left(f\left(a_1\right)\right) \overset{(3)}{=} g\left(f\left(a_2\right)\right) \overset{(2)}{=} g \circ f\left(a_2\right) \overset{(1)}{=} a_2$$

כאשר השוויונות המסומנים (1) נובעים מהנתון בשאלה, השוויונות המסומנים (2) נובעים מהגדרת פונקציית ההרכבה והשוויון המסומן (3) נובע מההנחה כי $f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$. הראנו כי עבור $a_1, a_2 \in A$ המקיימים $f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$, מתקיים כי $a_1 = a_2$ ולכן f חחע.

נראה כי g על: יהי $a \in A$ אזי עבור $b = f\left(a\right) \in B$ מתקיים כי $g\left(b\right) = g\left(f\left(a\right)\right) \overset{(2)}{=} g \circ f\left(a\right) \overset{(1)}{=} a$ כאשר השוויונות (1) ו-(2) נובעים מאותם הסברים כמקודם. הראנו כי לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש-$g\left(b\right) = a$ ולכן g על.

6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(5 נק)** האם זה נכון שמספר האנשים החיים כרגע בעולם שיש להם מספר אי-זוגי של אחיות ואחים הוא זוגי? נמקו היטב את תשובתכם. רמז: השתמשו בתורת הגרפים.

פתרון: הטענה נכונה. נחשוב על האנשים בעולם כעל קודקודים ושני קודקודים יהיו מחוברים בקשת אם האנשים המתאימים הם אחים או אחיות. נסמן ב d_i את הדרגה של קודקוד i, כלומר, d_i מסמן את מספר האחים או אחיות שיש לאדם i. ממשפט לחיצות הידיים נובע כי

$$\sum_i d_i = 2|E|$$

ולכן חייב להיות מספר זוגי של אנשים שיש להם מספר אי זוגי של אחים או אחיות.

2. **(15 נק)** תהא A קבוצה לא ריקה ויהא R יחס סדר על A. נתבונן ביחס S על A:

$$xSy \iff xRy \vee yRx$$

בידקו האם S הוא יחס סדר, יחס שקילות או אף אחד משניהם.

פתרון: רפלקסיביות: לכל $x \in A$ מתקיים $xSx \iff xRx \vee xRx$. מכיוון שהיחס R הוא יחס סדר, בפרט הוא רפלקסיבי ולכן לכל $x \in A$ מתקיים כי xRx ולכן xSx.
סימטריות: נניח כי עבור $x, y \in A$ מתקיים כי xSy. צריך לבדוק האם ySx. אכן,

$$xSy \iff xRy \vee yRx \iff yRx \vee xRy \iff ySx$$

טרנזיטיביות: נניח כי xSy וגם ySz. צריך לבדוק האם xSz. מתקיים

$$\begin{aligned} 1.xSy &\iff xRy \vee yRx \\ 2.ySz &\iff yRz \vee zRy \end{aligned}$$

אם xRy וגם zRy אז לא נוכל לומר כלום על קיום היחס בין x ל z ולכן היחס S אינו טרנזיטיבי. לכן, **היחס S אינו יחס שקילות ואינו יחס סדר**.