

פתרון

X

שאלה 1 (24 נקודות)

בדרך לבית הספר דוד פוגש שלושה חברים וכל אחד מהם מספר לדוד בדיחות. אסף מספר בדיחה אחת והיא מצחיקה בסיכוי 0.6. בני מספר שלוש בדיחות וכל אחת מצחיקה בסיכוי 0.3 באופן בלתי תלוי בבדיחות אחרות. גיל מספר בדיחה אחת שהיא מצחיקה תמיד. כל הבדיחות בלתי תלויות.

- א. מהי ההסתברות שדוד שמע מחברים שלו לפחות שתי בדיחות מצחיקות?
ב. על כל בדיחה מצחיקה דוד נותן פרס: שני ממתקים. מהי התוחלת של מספר הממתקים שדוד ייתן לחבריו?
ג. יום שבו דוד שמע רק בדיחה מצחיקה אחת נחשב ליום "עצוב". מהי ההסתברות לכך שמתוך 40 ימי הלימודים הבאים לפחות 10 ימים יהיו עצובים?

פתרון:

- א. נגדיר מאורע A - דוד שמע לפחות שתי בדיחות מצחיקות. המאורע המשלים של A - רק בדיחה שלי גיל הייתה מצחיקה. נחשב את ההסתברות של A :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.4 \cdot 0.7^3 \cdot 1 = 1 - 0.1372 = 0.8628$$

- ב. נגדיר משתנים מקריים:

X - מספר בדיחות מצחיקות של אסף.

Y - מספר בדיחות מצחיקות של בני. מתקיים $Y \sim \text{Bin}(3, 0.3)$.

לכן מספר ממתקים שילדים יקבלו שווה ל $2X + 2Y + 2$. נחשב את התוחלת:

$$E(2X + 2Y + 2) = 2E(X) + 2E(Y) + 2 = 2 \cdot 0.6 + 2 \cdot 3 \cdot 0.3 + 2 = 5$$

- ג. נגדיר משתנה מקרי Z מספר ימים עצובים מתוך 40 ימים. מתקיים $Z \sim \text{Bin}(40, 0.1372)$.

נבדוק את התנאים:

$$40 \cdot 0.1372 = 5.488 > 5$$

$$40 \cdot 0.8628 = 34.512 > 5$$

נעבור לקירוב נורמלי $Z \sim N(5.488, 4.735)$. נחשב את ההסתברות:

$$P(Z \geq 10) = 1 - P(Z \leq 9) = 1 - \Phi\left(\frac{9 + 0.5 - 5.488}{\sqrt{4.735}}\right) = 1 - \Phi(1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$$

שאלה 2 (16 נקודות)

X משתנה מקרי רציף עם פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.125, & 1 \leq x < 5 \\ 0.25x - 1.25, & 5 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. חשבו את ההסתברות $P(X < 6 | X > 2)$.

פתרון:

א. עבור $1 \leq t < 5$

$$F(t) = \int_1^t 0.125 dx = 0.125t - 0.125$$

א. עבור $5 \leq t < 7$

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^5 0.125 dx + \int_5^t (0.25x - 1.25) dx = 0.50 + 0.125t^2 - 1.25t - (0.125 \cdot 25 - 1.25 \cdot 5) \\ &= 0.125t^2 - 1.25t + 3.625 \end{aligned}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 0.125t - 0.125, & 1 \leq t < 5 \\ 0.125t^2 - 1.25t + 3.625, & 5 \leq t \leq 7 \\ 1, & t > 7 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{aligned} P(X < 6 | X > 2) &= \frac{P(2 < X < 6)}{P(X > 2)} = \frac{F_X(6) - F_X(2)}{1 - F_X(2)} = \\ &= \frac{0.125 \cdot 6^2 - 1.25 \cdot 6 + 3.625 - 0.125 \cdot 2 + 0.125}{1 - 0.125 \cdot 2 + 0.125} = 0.667 \end{aligned}$$

שאלה 3 (16 נקודות)

מנהל סטרטאפ רוצה לגייס משקיעים לפרויקט חדש.

- א. ביום ראשון הבא הוא מתכנן להתקשר ל 30 המשקיעים הפוטנציאליים מארצות הברית. זמן שיחה בדקות עם כל אחד מהם מתפלג לפי התפלגות אחידה בקטע $(0,30)$. משכי זמן של השיחות ב"ת. מהי ההסתברות שסך זמני השיחות יהיה לפחות 7 שעות?
- ב. ביום שני הבא מנהל החברה מתכנן להתקשר ל 10 משקיעים מישראל. זמן שיחה בדקות עם כל אחד מהם מתפלג מעריכית עם סטית התקן 20 דקות. משכי זמן של השיחות ב"ת. מנהל החברה מחליט להמשיך לדבר עם המשקיעים עד השיחה שתמשך יותר מרבע שעה. מהי ההסתברות שהוא ידבר עם 7 אנשים בדיוק?

פתרון:

א. נגדיר משתנים מקריים.

X_i – משך זמן שיחה בדקות עם משקיע ה- i בארצות הברית $(i=1,...,30)$. $X_1, ..., X_{30}$ ב"ת ושוי התפלגות, כולם מתפלגים לפי התפלגות אחידה עם ערכי תוחלת ושונות הבאים:

$$E(X_i) = \frac{0+30}{2} = 15, \quad V(X_i) = \frac{30^2}{12} = 75$$

לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים: $\sum_{i=1}^{30} X_i \sim N(30 \cdot 15, 30 \cdot 75)$

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 432\right) = 1 - \Phi\left(\frac{420 - 450}{\sqrt{75 \cdot 30}}\right) = 1 - \Phi(-0.63) = \Phi(0.63) = 0.7357$$

ב. נגדיר משתנה מקרי Y – משך זמן שיחה בדקות עם משקיע ישראלי. בהתפלגות מעריכית

$$Y \sim \exp(1/20) \text{ לכן } \sigma = \frac{1}{\lambda} = 20.$$

נסמן ב- p את ההסתברות לכך ששיחה תמשך לכל יותר רבע שעה. נחשב את p :

$$p = F_Y(Y \leq 15) = 1 - e^{-\frac{15}{20}} = 0.528$$

לכן ההסתברות המבוקשת בסעיף שווה ל:

$$p^6(1-p) = 0.528^6 \cdot 0.472 = 0.01$$

שאלה 4 (20 נקודות)

כל יום שישי מתקיימת הגרלה בקניון. הסיכוי לזכות בפרס בהגרלה שווה ל-0.6 וכרטיס השתתפות עולה שקל אחד. לרוני יש ארבעה שקלים והוא מחליט לקנות כרטיס אחד בכל יום שישי עד שהוא יזכה בשני פרסים (לא בהכרח ברצף) או עד שיגמר לו הכסף. נגדיר:

X – מספר פרסים שרוני יזכה בהם.

Y – סכום שרוני ישלם עבור כל הכרטיסים שיקנה.

א. (12 נקודות) מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים X, Y .

ב. (8 נקודות) ידוע שרוני זכה בשני פרסים. מהי ההסתברות שהוא קנה שני כרטיסים בדיוק?

פתרון:

א.

$X \setminus Y$	2	3	4
0	0	0	$0.4^4 = 0.0256$
1	0	0	$4 \cdot 0.6 \cdot 0.4^3 = 0.1536$
2	$0.6^2 = 0.36$	$2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.288$	$\binom{3}{2} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^2 = 0.1728$

ב.

$$P(Y = 2 | X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 2)}{P(X = 2)} = \frac{0.36}{0.36 + 0.288 + 0.1728} = 0.4386$$

שאלה 5 (24 נקודות)

בחברת קייטרינג מציעים שני סוגים של מגשי אירוח המבורגרים: מגש "רגיל" עם 40 המבורגרים טבעוניים ו-60 רגילים ומגש "טבעוני" עם 80 המבורגרים טבעוניים ו-20 רגילים. אלון הזמין למסיבה מגש "רגיל". המבורגרים הגיעו בלי מדבקות ואלון לא בטוח שקיבל סוג מגש שהוא הזמין. אלון מחליט לדגום (לטעום) 7 המבורגרים ואם הוא ימצא לפחות שישה המבורגרים טבעוניים הוא יחליט שהמגש טבעוני (השערה אלטרנטיבית) וישלח את המגש בחזרה לקייטרינג.

א. מהי ההסתברות של טעות מסוג I?

ב. מהי עוצמת המבחן?

ג. מה צריך להיות הערך הקריטי c כך שהמבחן המתואר בשאלה יתאים לרמת המובהקות 0.01? בלי לערוך חישוב הסבירו למה עוצמת המבחן החדש תקטן.

פתרון:

ננסה את ההשערות:

H_0 - משלוח רגיל

H_1 - משלוח טבעוני

סטטיסטי המבחן: X - מספר המבורגרים טבעוניים במדגם של 7 המבורגרים שאלון בחר.

אזור דחיית השערת האפס: $C = \{X \geq 6\}$.

אם H_0 נכונה אז מתקיים: $X \sim \text{HG}(100, 40, 7)$,

אם H_1 נכונה אז מתקיים: $X \sim \text{HG}(100, 80, 7)$.

א. נחשב את ההסתברות של טעות מסוג I:

$$\alpha = P_{H_0}(C) = P_{H_0}(X \geq 6) = P_{H_0}(X = 6) + P_{H_0}(X = 7) = \frac{\binom{40}{6} \binom{60}{1}}{\binom{100}{7}} + \frac{\binom{40}{7}}{\binom{100}{7}} = 0.016$$

ב. נחשב את העוצמה של המבחן:

$$\pi = P_{H_1}(C) = P_{H_1}(X \geq 6) = P_{H_1}(X = 6) + P_{H_1}(X = 7) = \frac{\binom{80}{6} \binom{20}{1}}{\binom{100}{7}} + \frac{\binom{80}{7}}{\binom{100}{7}} = 0.5738$$

ג. נחשב את ההסתברות של טעות מסוג II עבור $c = 7$:

$$\alpha = P_{H_0}(C) = P_{H_0}(X \geq 7) = P_{H_0}(X = 7) = \frac{\binom{40}{7}}{\binom{100}{7}} = 0.0012 < 0.01$$

לכן הערך הקריטי החדש $c = 7$ מתאים לרמת המובהקות 0.01.

העוצמה של המבחן החדש תקטן כוון שהקטנו את אזור דחייה C .