פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"א סמסטר א שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא (אלא אם כתוב במפורש שלא צריך)

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (15 נקודות) נתונה מערכת המשוואות
$$\begin{cases} x - 2y + z = b \\ 2x + (a-4)y + 14z = 8-4b \\ 3x + (a-6)y + (2a+21)z = 9-6b \end{cases}$$

(i) מצאו את הערכים של הפרמטרים a,b עבורם יש למערכת פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרון.

(ii) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b וקטור העמודה $\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (5 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) תהי A מטריצה ריבועית. אם למערכת המשוואות משוואה $Ax=b$ יש אינסוף פתרונות, אז A הפיכה.

(ii) תהי A מטריצה מסדר 3×4. אם למערכת המשוואות $Ax=b$ יש פתרון, אז למשוואה $Ax=0$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון

א. נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת של המערכת:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a-4 & 14 \\ 3 & a-6 & 2a+21 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & a & 12 \\ 0 & a & 2a+18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 12 \\ a & 2a+18 \end{vmatrix} = a(2a+6) = 2a(a+3)$$

(i) קיבלנו כי המטריצה המצומצמת הפיכה כאשר $a \neq 0,-3$ ולכן למערכת יש פתרון יחיד אם"ם $a \neq 0,-3$.
נבדוק את המקרים הנותרים ע"י הצבה:

- עבור $a=0$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 2 & -4 & 14 & 8-4b \\ 3 & -6 & 21 & 9-6b \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 12 & 8-6b \\ 0 & 0 & 18 & 9-9b \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2\to \frac{1}{2}R_2 \\ R_3\to \frac{1}{9}R_3}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 6 & 4-3b \\ 0 & 0 & 2 & 1-b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה, כלומר דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת אין פתרונות.

- עבור $a=-3$ נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 2 & -7 & 14 & 8-4b \\ 3 & -9 & 15 & 9-6b \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & -3 & 12 & 8-6b \\ 0 & -3 & 12 & 9-9b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b \\ 0 & -3 & 12 & 4-3b \\ 0 & 0 & 0 & 1-3b \end{array}\right)$$

קיבלנו אם כן, כי דרגת המטריצה המצומצמת שווה ל-2, ודרגת המטריצה המורחבת שווה ל-2 אם"ם $1-3b=0 \Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$, כלומר למערכת יש אינסוף פתרונות אם"ם $a=-3, b=\frac{1}{3}$.

(ii) נציב את העמודה כפתרון ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} (-6) & - & 2\cdot(-2) & + & 1 & = & b \\ 2(-6) & + & (a-4)(-2) & + & 14\cdot 1 & = & 8-4b \\ 3(-6) & + & (a-6)(-2) & + & (2a+21)\cdot 1 & = & 9-6b \end{cases}$$

כלומר

$$-1=b, 6-2a=8-4b, 15=9-6b$$

ונקבל כי $b=-1, a=-1$.

ב. לפי משפט המבנה של קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית, אם למערכת משוואות יש פתרון, אז מספר הפתרונות של המערכת שווה למספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה, ולכן

(i) הטענה לא נכונה

(ii) הטענה לא נכונה

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) נסמן $U=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x+2y-3z=0 \\ x+y-2z=0\end{array}\right\}, W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 | x-2y+z=0\right\}$

(i) מצאו בסיס ל-U

(ii) הוכיחו כי $U\subseteq W$.

(iii) הוכיחו כי $U\neq W$.

ב. (8 נקודות) יהי V מרחב וקטורי, U,W תתי מרחבים של V. הראו כי אם $\dim U+\dim W>\dim V$ אז $U\cap W\neq\{0\}$.

פתרון

א. פתרון סעיף א:

(i) יהי $v=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. $v\in U$ אם ורק אם $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x+y-2z=0\end{cases}$ נפתור את המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

מכאן $U=Span\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$, ולכן $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של U, כי זו קבוצה פורסת של U ובת"ל.

(ii) מסעיף קודם מתקיים כל הוקטורים ב־U הם מהצורה $\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$. כמו כן מתקיים כי $t - 2 \cdot t + t = 0$ ולכן $U \subseteq W$.

(iii) **נשים לב, כי** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$ **כי** $1 - 2 \cdot 2 + 3 = 0$ **, אבל** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin U$ **, כלומר** $U \neq W$.

ב. תת המרחב $U + W$ **הוא תת מרחב של** V**, ולכן** $\dim(U + W) \leq \dim V$**. ממשפט המימד נקבל כי**

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq \dim U + \dim W - \dim(U + W) > 0$$

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (15 **נקודות) נסמן** $U = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$**,** $V = \mathbb{R}_2[x] = P_2(\mathbb{R})$**. נסמן** $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$**,** $C = \{1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2\}$ **בסיסים של** V, U **בהתאמה. תהי** $T : U \to V$ **העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת של** T **לפי הבסיסים** B, C **היא** $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

מצאו בסיסים ומימדים של $\mathrm{Ker}T, \mathrm{Im}T$ **וקבעו האם** T **חח"ע, ואם היא על.**

ב. (5 **נקודות) תהי** $T : W \to W$ **העתקה לינארית. הראו כי אם** $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Im}T$**, אזי** $\dim W$ **זוגי.**

פתרון

א. כדי למצוא את הגרעין ואת התמונה נדרג את המטריצה המייצגת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב הפתרונות של המטריצה הם וקטורי קואורדינטות של איברי הגרעין, ולכן בסיס למרחב הפתרונות מורכב מוקטורי קואורדינטות של בסיס לגרעין. בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן בסיס לגרעין הוא

$$\left\{ (-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב העמודות של המטריצה הם וקטורי קואורדינטות של איברי התמונה, ולכן בסיס של מרחב העמודות הם וקטורי קואורדינטות של בסיס לתמונה. מהדירוג, ומכך שפעולות אלמנטריות על שורות שומרות על תלויות

לינאריות של העמודות, נקבל כי בסיס למרחב העמודות הוא העמודות הראשונה והשלישית של המטריצה המייצגת, כי במטריצה המדורגת ניתן לראות שהעמודות המתאימות הן קבוצה בת"ל ששאר העמודות תלויות לינארית בה. בסיס למרחב העמודות הוא, אם כן

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן בסיס לתמונה הוא

$$\left\{(1+x)+(1-x)+2(1+x+x^2),3(1+x)+(1-x)+2(1+x+x^2)\right\}=\left\{4+2x+2x^2,6+4x+2x^2\right\}$$

כמו כן, קיבלנו כי $\dim\mathbf{Ker}T=\dim\mathbf{Im}T=2$. T לא חח"ע כי $\dim\mathbf{Ker}T\neq 0$, והיא לא על כי $\dim\mathbf{Im}T=2<3$

ב. נתון כי $\mathbf{Ker}T=\mathbf{Im}T$, ולכן $\dim\mathbf{Ker}T=\dim\mathbf{Im}T$. לפי משפט המימד מתקיים כי

$$\dim W=\dim\mathbf{Ker}T+\dim\mathbf{Im}T=2\dim\mathbf{Im}T$$

כלומר $\dim W$ זוגי.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) תהיינה $A,B\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ מטריצות ריבועיות מסדר 3×3. נתון כי B הפיכה, ומתקיים כי

$$\begin{cases}A^2-2B=0\\B^4+5B^3-A^6=0\end{cases}$$

חשבו את $|B+I_3|$, (I_3 היא מטריצת היחידה מסדר 3×3).

ב. (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור כל טענה, אם היא נכונה הוכיחו אותה, ואם היא לא נכונה מצאו דוגמה נגדית שמפריכה אותה

(i) לכל שתי מטריצות ריבועיות מאותו הסדר מתקיים כי $|A+B|=|A|+|B|$

(ii) לכל שתי מטריצות סימטריות A,B המטריצה $AB+BA$ סימטרית.

פתרון

א. מהמשוואה הראשונה נקבל כי $A^2=2B$, ולכן $|A|^2=|2B|=8|B|$. כעת מהמשוואה השנייה נקבל כי $B^3(B+5I)=A^6$, ולכן

$$|B|^3|B+5I|=|A|^6=8^3|B|^3\Rightarrow|B+5I|=8^3$$

כאשר מותר לצמצם ב-$|B|^3$ כי B מטריצה הפיכה.

ב. (i) הטענה לא נכונה: לדוגמה עבור n זוגי $A=I_n,B=-I_n$ מתקיים כי $0=|0|=|A+B|\neq|A|+|B|=1+1=2$

(ii) הטענה נכונה כי

$$(AB+BA)^T=(AB)^T+(BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=BA+AB=AB+BA$$

שאלה 5. (20 **נקודות**) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

א. מצאו את ערכי הפרמטר הממשי a עבורם המטריצה A לכסינה.

ב. מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a העמודה $v=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ היא וקטור עצמי של A.

פתרון

א. נמצא תחילה את הערכים העצמיים:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -4 & 8 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-a)(\lambda-4)(\lambda+4)=0\Leftrightarrow \lambda=a,4,-4$$

כלומר הערכים העצמיים הם $a,4,-4$. נחלק למקרים:

(i) מקרה ראשון: $a\neq\pm4$ למטריצה קיימים 3 ערכים עצמים שונים והיא מסדר 3 על 3 לכן היא לכסינה.

(ii) מקרה שני: $a=4$: במקרה הזה הפולינום האופייני הוא :

$$|A-\lambda I|=-(\lambda-4)^2(\lambda+4)$$

עבור הערך העצמי -4 הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי שהוא 1, כי הריבוי האלגברי שווה ל1.
נבדוק את הערך העצמי 4 :

$$\dim(Ker(A-4I))=3-rank(A-4I)=3-rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}=3-1=2$$

ולכן גם במקרה של הערך העצמי 4 הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי שווה ל־ 2. בסיכום : עבור $a=4$ הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים והריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי שווים ביניהם , ולכן A לכסינה.

(iii) מקרה שלישי: $a=-4$ במקרה הזה הפולינום האופייני הוא :

$$|A-\lambda I|=-(\lambda+4)^2(\lambda-4)$$

עבור הערך העצמי 4 הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי שהוא 1, כי הריבוי האלגברי שווה ל1.
נבדוק את הערך העצמי -4 :

$$\dim(Ker(A+4I)) = 3 - rank(A+4I) = 3 - rank\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

ובמקרה זה A לא לכסינה : הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי -4 קטן מהאלגברי.
בסיכום : A לכסינה לכל $a \neq -4$.

ב. וקטור כלשהו הוא וקטור עצמי של A אם קיים λ כך ש-$Av = \lambda v$

$$Av = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

כלומר כדי שהוקטור יהיה וקטור עצמי צריך להתקיים כי $3a = 3\lambda, 2 = \lambda, -4 = -2\lambda$. ולכן $\lambda = 2$ משתי המשוואות האחרונות, ולכן עבור $a = 2$ מתקיים כי הוקטור הוא וקטור עצמי, עם ע"ע $\lambda = 2$.

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. נתון כי $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a & -7 \\ -7 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$.

(i) מצאו עבור איזה ערכים של הפרמטר a הנורמה (לפי המכפלה הפנימית הנתונה) של הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ שווה $\sqrt{2}$, כלומר $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$.

(ii) עבור $a = 6$ מצאו וקטור שונה מאפס אורתוגונלי לוקטור $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. הראו כי אם $\{u, v\}$ שני וקטורים שונים מאפס, כך ש-$\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2$, אז u, v אורתוגונליים.

פתרון

א. תהי $A = \begin{pmatrix} 2a & -7 \\ -7 & a \end{pmatrix}$.

(i) נחשב את הנורמה של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a & -7 \\ -7 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6a - 28 = 2 \Leftrightarrow 6a = 30 \Leftrightarrow a = 5$$

(ii) וקטור $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ אורתוגונלי ל- $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ אמ"ם

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = (3 \quad 4) \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8x + 3y$$

למשל הוקטור $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

ב. נתון כי $\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2$, כלומר

$$\langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2, \quad \langle u-v, u-v \rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$$

שווים. לכן

$$\|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$$

$$4\langle u,v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u,v \rangle = 0$$

בהצלחה