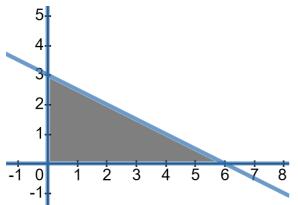
יונתן כהן חדו"א 2 תרגול מספר 8

קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה קיצון תחת אילוץ, שיטת כופלי Lagrange אינטגרל כפול, שימושי אינטגרל כפול (נפח)

קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

.1

למצוא את ערכי ונקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ בתחום הסגור המוחלט של הפונקציה $x=0\,,\,y=0\,,\,x+2y=6$



מימין , y=0 הישר שמעל הישר המשולש היא הקבוצה הקבוצה . x+2y=6 ומתחת הישר הישר אישר הישר הישר הישר

הקבוצה $\,D\,$ חסומה, למשל מוכלת בעיגול שמכרזו הראשית ורדיוסו $\,R=10\,$ הראשית נתונה).

נשים לב f רציפה בכל f וזהו פולינום בשני משתנים ולכן f רציפה בכל בפרט f והו פולינום בשני משפט לבי שפט שפט ל שפט ל שמקסימום ומינימום מוחלטים ב' f Weierstrass רציפה ב' f . ולכן לפי משפט

D = f ב ל בקודות בקיצון של ב

ראשית נמצא הנקודות החשודות כקיצון מקומי של f ב D הנמצאות בפנים D. אלו הנקודות האטרות נמצא הקריטיות של f_y שהן פנימיות לקבוצה D, כלומר נקודות פנימיות בהן f_x ולכן הנקודות הקריטיות של f_y פולינום בשני משתנים ולכן f_x , f_y קיימות בכל f_y , ולכן הנקודות הקריטיות של f_y הנקודות הפנימיות בהן f_y בחן בהן f_y בחן הנקודות החלקיות מסדר f_y

$$f_x = 2 - 2x$$
$$f_y = 2 - 2y$$

ולכן נקבל

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

(1,1) למערכת המשוואות ישנו פתרון יחיד

נוודא שהנקודה הזו אכן נקודה פנימית של D. התנאים המגדירים את D הם $x \ge 0$, $y \ge 0$, $y \ge 0$, $y \le 3 - \frac{1}{2}x$ ולכן נקודות פנימיות של $x \ge 0$, y = 1 < 0, y = 1 < 0, y = 1 < 0, מקיימת $x \ge 0$, y = 1 < 0, y = 1 < 0, y = 1 < 0 מקיימת הנקודה אכן נקודה פנימית.

D ב D הנמצאות על השפה של כעת נמצא הנקודות החשודות כקיצון של ב ל הנמצאות על השפה של נפריד הטיפול בשפה לשלושת חלקי השפה.

. y = 0 , $0 \le x \le 6$ חלק 1 של השפה: הצלע

ניתן להציב האילוץ y=0 בתוך הפונקציה f כלומר ערכי f בחלק בתוך בתוך בתוך בתוך בתוך $x\in[0,6]$ עבור $h(x)=f(x,0)=2+2x-x^2$

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע h בקטע h הנקודות הפנימיות של הקטע h בקטע h בקטע h בחן הנקודות החשודות כנקודות h בקטע h בקטע h בחן וכן שני הקצוות h בקטע h בקטע הקצוות h בקטע הקצוות h בקטע הקצוות הקצ

$$h'(x) = 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

. x=0 , x=6 אכן נקודה פנימית של הקטע [0,6], ונוסיף הקצוות x=1

. (0,0) , (1,0) , (6,0) המפה של 1 הנמצאות בחלק D ב ב f של החשודות כקיצון של הנקודות החשודות בחלק בחלק ו

 $x = 0, 0 \le y \le 3$ חלק 2 של השפה: הצלע

ניתן להציב האילוץ x=0 בתוך הפונקציה x=0 כלומר ערכי בחלק 2 של השפה נתונים ע"י הנוסחא ניתן להציב האילוץ

.
$$y \in [0,3]$$
 עבור $h(y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2$

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע [0,3] הן הנקודות הפנימיות של הקטע 0 < y < 3 בהן הנקודות החשודות החשודות y = 0 , y = 0 , y = 0 וכן שני הקצוות h'(y) = 0

$$h'(y) = 2 - 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$$

. y = 0, y = 3 אכן נקודה פנימית של הקטע [0,3], ונוסיף הקצוות y = 1

(0,0) , (0,1) , (0,3) הנקודות החשודות בחלק ב f ב f ב f של החשודות החשודות וולכן הנקודות החשודות בחלק ב

x + 2y = 6, $0 \le x \le 6$, $0 \le y \le 3$ חלק 3 של השפה: הצלע

ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ x=6-2y ולהציב בתוך הפונקציה , f כלומר ערכי x=6-2y ולהציב בתוך לחלץ ממשוואת האילוץ $y\in[0,3]$ עבור $y\in[0,3]$ עבור עייי הנוסחא

הערה : כמובן ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ $y=3-\frac{1}{2}x$ ולקבל שערכי $y=3-\frac{1}{2}$ של השפה נתונים עייי $x\in [0,6]$ עבור $h(x)=f(x,3-\frac{1}{2}x)$

$$h(y) = f(6-2y, y) = 2 + 2(6-2y) + 2y - (6-2y)^2 - y^2 = -5y^2 + 22y - 22$$

הנקודות הפנימיות ל0 < y < 3 של הקטע הקטודות הפנימיות הנקודות בקטע בקטע בקטע א בקטע בקטודות החשודות הענימיות היען א בקטע בקטע בקטודות בקטוד

$$h'(y) = -10y + 22 = 0 \Leftrightarrow 10y = 22 \Leftrightarrow y = \frac{11}{5} = 2.2$$

. y = 0 , y = 3 אכן נקודה פנימית של הקטע [0,3], ונוסיף אכן נקודה פנימית של הקטע

$$y = 0$$
 \Rightarrow $x = 6 - 2y = 6$

$$y = 3$$
 \Rightarrow $x = 6 - 2y = 0$

$$y = 2.2 \implies x = 6 - 2y = 6 - 2 \cdot 2.2 = 1.6$$

ולכן הנקודות החשודות כקיצון של f ב f של השפה הע

f ב f ב קודות החשודות כקיצון של

$$(0,0)$$
, $(1,0)$, $(0,1)$, $(6,0)$, $(0,3)$, $(1.6,2.2)$, $(1,1)$

. בנקודות החשודות f בנקודות החשודות.

$$f(0,0) = 2$$

$$f(1,0) = f(0,1) = 3$$

$$f(6,0) = -22$$

$$f(0,3) = -1$$

$$f(1.6, 2.2) = 2.2$$

$$f(1,1) = 4$$

ולכן:

. (1,1) המקסימום אל, מתקבל בנקודה Dב בf של

.(6,0) בנקודה מתקבל המינימום של הוא בDבf בנקודה המינימום המינימום ה

Dבקבוצה $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)+11$ הפונקציה של הפותלט הקיצון הקיצון הקיצון את גערכי בקבוצה המשולש הסגור הקיצון הם הסגור הם הסגור שקודקודיו הם A=(0,0) , B=(6,0) , C=(0,6)

: שרטוט של התחום

2 0 -2 0 2 4 6

. y = 0 היא AB משוואת הצלע

x=0 משוואת הצלע היא

משוואת הצלע BC זו משוואת הישר העובר דרך הנקודות

. y = 6 - x או x + y = 6 המשוואה היא , B = (6,0) , C = (0,6)

ולכן אפיון אחר לקבוצה D הוא

$$D = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \ge 0, y \le 6 - x\}$$

הקבוצה D הקבוצה . R=10 בברור חסומה, למשל מוכלת בעיגול שמכרזו הראשית ורדיוסו R=10 הקבוצה D סגורה לכד היא נתונה).

נשים לב לב לב $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)+11=6x^2y^3-x^3y^3-x^2y^4+11$ ל שמקטימום ומינימום f יש מקסימום ומינימום f ולכן לפי משפט f ולכן לפי משפט בכל f ובפרט רציפה בf ובפרט רציפה בf ולכן לפי משפט ביש הארטים בf ווהו פולינום בשני משתנים ומינימום f יש מקסימום ומינימום מוחלטים ב

.D ב f של כקיצון החשודות נמצא הנקודות נמצא

ראשית נמצא הנקודות החשודות כקיצון מקומי של f ב D הנמצאות בפנים D. אלו הנקודות האטית נמצא הנקודות שהן פנימיות לקבוצה f כלומר נקודות פנימיות בהן f או בהן f א קיימות של f שהן פנימיות של נמשתנים ולכן f קיימות בכל f ולכן הנקודות הקריטיות של f הנקודות הפנימיות בהן f באור בהן f בחן הנקודות החלקיות מסדר f:

$$f_x = 12xy^3 - 3x^2y^3 - 2xy^4 = xy^3(12 - 3x - 2y)$$

$$f_y = 18x^2y^2 - 3x^3y^2 - 4x^2y^3 = x^2y^2(18 - 3x - 4y)$$

ולכן נקבל

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^3 (12 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2 y^2 (18 - 3x - 4y) = 0 \end{cases}$$

 $x \ge 0, y \ge 0, y \le 6-x$ הם D התנאים המגדירים של D. התנאים פנימיות פנימיות קריטיות פנימיות של D הן נקודות המקיימות המקיימות x > 0, y > 0, y < 6-x, ובפרט D הולכן ניתן פנימיות של D הולכן ניתן D הולכן ניתן D לחלק המשוואה הראשונה ב D והשניה ב D ונקבל

$$\begin{cases} 12 - 3x - 2y = 0 \\ 18 - 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

זו מערכת משוואות לינארית ויש לה פתרון יחיד. אפשר למשל לחסר המשוואה הראשונה מהשניה ולקבל מערכת משוואות לינארית ויש לה פתרון יחיד. אפשר למשל לחסר ב $x=2 \Rightarrow x=2 \Rightarrow x=3$. כלומר למערכת המשוואות ישנו פתרון יחיד (2,3).

נוודא שהנקודה הזו אכן נקודה פנימית של x=2>0, y=3>0, y=3<4=6-x. ולכן הנקודה פנימית.

D כעת נמצא הנקודות החשודות כקיצון של f ב f הנמצאות על השפה של נפריד הטיפול בשפה לשלושת חלקי השפה.

. y = 0 , $0 \le x \le 6$ חלק 1 של השפה: הצלע

ניתן להציב האילוץ y=0 בתוך הפונקציה f כלומר ערכי f בחלק בתוך בתוך בתוך בתוך בתוך בתוך הפונקציה $x\in[0,6]$ עבור h(x)=f(x,0)

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע [0,6] הן הנקודות הפנימיות של הקטע 0 < x < 6 בהן הנקודות החשודות נקדות שני הקצוות x = 0, x = 0, אך x = 0, או פונקציה קבועה והנגזרת שלה a < 0 וכן שני הקצוות a < 0 ולכן כל a < 0 נקודות חשודות כנקודות קיצון מקומי של a < 0 בקטע a < 0 ולכן כל a < 0 ונקבל שכל a < 0 הן נקודות חשודות כנקודות קיצון של a < 0 בקטע a < 0 ולכן הנקודות a < 0 עבור כל a < 0 הן הנקודות החשודות כקיצון של a < 0 הנמצאות בחלק a < 0 של השפה (כלומר: כל חלק a < 0 של השפה הוא נקודות חשודות).

x=0 , $0 \le y \le 6$ חלק 2 של השפה: הצלע

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע [0,6] הן הנקודות הפנימיות של הקטע 0 < y < 6 בהן הנגזרת החשודות החשודות כנקודות קיצון של h'(y) = f(0,y) = 11 אך y = 0, y = 0, y = 6 ווכן שני הקצוות h'(y) = 0 מתאפסת לכל 0 < y < 6 ולכן כל 0 < y < 6 נקודות חשודות כנקודות קיצון מקומי של y = 0 נוסיף הקצוות y = 0 ונקבל שכל y = 0 הן נקודות חשודות כנקודות קיצון של y = 0 הנמצאות y = 0 ולכן הנקודות y = 0 עבור כל y = 0 הן הנקודות החשודות כקיצון של y = 0 הנמצאות בחלק y = 0 של השפה (כלומר: כל חלק y = 0 של השפה הוא נקודות חשודות).

 $x + y = 6, 0 \le x, y \le 6$ חלק 3 של השפה: הצלע BC חלק 3 של השפה

ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ y=6-x ולהציב בתוך הפונקציה , f כלומר ערכי y=6-x ולהציב בחלק 3 ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ h(x)=f(x,6-x) עבור h(x)=f(x,6-x)

הערה : כמובן ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ x=6-y ולקבל שערכי f בחלק 3 של השפה נתונים עייי $y\in [0,6]$ עבור h(y)=f(6-y,y) הנוסחה

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע [0,6] הן הנקודות הפנימיות של הקטע 0 < x < 6 בהן הנקודות החשודות כנקודות x = 0, x = 0, אך וכן שני הקצוות x = 0, x = 0, אר

תאפסת שלה מתאפסת והנגזרת שלה מתאפסת $h(x)=f(x,6-x)=x^2(6-x)^3(6-x-(6-x))+11=11$ לכל 0< x<6 ולכן כל 0< x<6 נקודות חשודות כנקודות קיצון מקומי של 1 בקטע 1 בקטע 1. נוסיף 1 בקטע 1 ונקבל שכל 1 בקטע 1 הן נקודות חשודות כנקודות קיצון של 1 בקטע 1 בור כל 1 ב1 ב1 הנקודות החשודות כקיצון של 1 ב 1 הנמצאות בחלק 1 של השפה (כלומר: כל חלק 1 של השפה הוא נקודות חשודות).

:לסיכום, הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הן

$$0 \le x \le 6$$
 $(x,0)$

$$0 \le y \le 6$$
 (0, y)

$$0 \le x \le 6 \quad (x, 6 - x)$$

. כעת נחשב את ערך הפונקציה f בנקודות החשודות

$$f(2,3) = 2^{2} \cdot 3^{3} \cdot (6-2-3) + 11 = 119$$

$$0 \le x \le 6 \quad f(x,0) = 11$$

$$0 \le y \le 6 \quad f(0,y) = 11$$

$$0 \le x \le 6 \quad f(x,6-x) = 11$$

ולכן:

. (2,3) המקסימום של f ב D הוא 119, מתקבל בנקודה (2,3) המקסימום של f ב f הוא 1 (0, y) , $0 \le y \le 6$, (x,0) , $0 \le x \le 6$ המינימום של f ב f הוא 11, מתקבל בנקודות f ב f הוא 12.

ביצון תחת אילוץ, שיטת כופלי Lagrange

.1

מבין כל המלבנים בעלי אלכסון באורך p>0 (פרמטר), למצוא את המלבן ששטחו מקסימלי.

A(x,y) = xy נסמן את רוחב המלבן ב x וגובה המלבן ב נסמן את רוחב המלבן ב עייי

 $x^2 + y^2 = p^2$ נתון עייי נוסחת פיתגורס x,y והאלכסון אורכי הצלעות בין אורכי הצלעות אורכי והאלכסון

x > 0, y > 0 אורכי הצלעות הם מספרים חיוביים

: לסיכום

אר המקטימום את אילוץ $x^2+y^2=p^2$ תחת האילוץ A(x,y)=xy הפונקציה של הפונקציה את את את את בלות גי את המקטימום את הפונקציה את המקטימום את הפונקציה א

קבוצת הנקודות המקיימת את האילוץ $y^2=p^2$ והמגבלות הגילוע המקיימת את האילוץ קברביע המעגל, זו קבוצה חסומה אבל אינה סגורה כי אינה כוללת את כל הראשון) לא כולל נקודות הקצה של רבע המעגל, זו קבוצה חסומה אבל אינה סגורה כי אינה כוללת את כל נקודות השפה שלה – את הקצוות של רבע המעגל (p,0) ו (p,0)

נשנה מעט את התרגיל: נוסיף את נקודות הקצה ((p,0)) ו ((p,0)), כלומר נשנה את התרגיל

והו $x^2+y^2=p^2$ והמגבלות המקיימת את המקיימת המקיימת המקודות ואז קבוצת הנקודות המקיימת את האילוץ $x^2+y^2=p^2$ והמגבלות הקצה המקורה כי היא כוללת ברביע הראשון) כולל נקודות הקצה של רבע המעגל, זו קבוצה חסומה וגם סגורה כי היא כוללת את כל נקודות השפה שלה.

ו x=p , y=0 הם הוספנו כאן לאוסף המלבנים שבודקים את שני היימלבנים שצלעותיהם הם x=p , y=0 , אבל זה לא ישנה את המקסימום של שטחי המלבנים, כי בברור עבור שני יימלבנים אלה . x=0 , y=p . השטח הוא x=0 , ושם לא יהיה המקסימום כי עבור כל שאר המלבנים x>0 , y>0 ולכן השטח חיובי. לסיכום :

והמגבלות $x^2+y^2=p^2$ תחת האילוץ A(x,y)=xy הפונקציה של המקסימום את את צריך למצוא את גבלות . $x\geq 0\,,\,y\geq 0$

כפי שהוסבר, קבוצת הנקודות המקיימת את האילוץ והמגבלות היא קבוצה סגורה וחסומה. הפונקציה כפי שהוסבר, קבוצת הנקודות המקיימת את האילוץ ושמט לפי משפט Weierstrass לA(x,y) יש מקסימום ומינימום מוחלטים תחת האילוץ והמגבלות.

: נבנה את הלגרנזייאן המתאים לבעיית קיצון זו

$$L(x, y, \lambda) = A(x, y) - \lambda g(x, y) = xy - \lambda (x^{2} + y^{2} - p^{2})$$

:L של I נמצא הנקודות הקריטיות מסדר

$$\begin{cases} L_{x} = y - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L_{y} = x - \lambda \cdot 2y = 0 \\ L_{z} = -(x^{2} + y^{2} - p^{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\lambda x & (1) \\ x = 2\lambda y & (2) \\ x^{2} + y^{2} = p^{2} & (3) \end{cases}$$

צריך לפתור את מערכת משוואות זו.

(2) את משוואה (1) ב x וגם ממשוואה (2). לשם כך צריך לחלק את משוואה (1) ב x ואת משוואה (2). לחלץ את משוואה (3) ב $x,y\neq 0$, y=0 , x=0 ב x ולכן צריך להפריד ל x מקרים:

x = 0 : 1מקרה

במקרה זה ממשוואה (3) נקבל y=0 ולכן . y=0 ולכן . y=0 נקבל (1) לא מתקיימת. ולכן אין פתרונות במקרה זה.

y = 0:2 מקרה

 $\lambda = 0$ או x = 0, ולכן $\lambda = 0$, או (1) נקבל (2 במקרה זה ממשוואה

אם (3) אז x = y = 0 אז x = 0 אם

. אם (3) אז ממשוואה (3) ושוב x=y=0 ושוב x=0 נקבל (2) אז ממשוואה (3) אז ממשוואה אז מ

ולכן בכל מקרה משוואה (3) לא מתקיימת, אין פתרונות במקרה זה.

 $x, y \neq 0 : 3$ מקרה

נחלק משוואה y ב (2) ואת משוואה (1) ב x נחלק משוואה

$$y = 2\lambda x \implies 2\lambda = \frac{y}{x}$$

$$x = 2\lambda y \implies 2\lambda = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \implies y^2 = x^2 \implies y = \pm x$$

אם (3) נציב במשוואה (3) ונקבל , y = x

$$x^2 + x^2 = p^2$$
 \Rightarrow $2x^2 = p^2$ \Rightarrow $x^2 = \frac{p^2}{2}$ \Rightarrow $x = \pm \sqrt{\frac{p^2}{2}} = \pm \frac{p}{\sqrt{2}}$

$$x = \frac{p}{\sqrt{2}}$$
 \Rightarrow $y = x = \frac{p}{\sqrt{2}}$

$$x = -\frac{p}{\sqrt{2}}$$
 \Rightarrow $y = x = -\frac{p}{\sqrt{2}}$

אם (3) נציב במשוואה y = -x

$$x^{2} + (-x)^{2} = p^{2} \implies 2x^{2} = p^{2} \implies x^{2} = \frac{p^{2}}{2} \implies x = \pm \sqrt{\frac{p^{2}}{2}} = \pm \frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{p}{\sqrt{2}}$$
 \Rightarrow $y = -x = -\frac{p}{\sqrt{2}}$

$$x = -\frac{p}{\sqrt{2}}$$
 \Rightarrow $y = -x = \frac{p}{\sqrt{2}}$

לסיכום קיבלנו 4 פתרונות של המערכת

$$\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) , \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right) , \left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) , \left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$$

. $x \ge 0 \;,\; y \ge 0$ מקיימת את המגבלות ($\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}}$) מקיימת שרק כמובן שרק כמובן הנקודה

. (0,p) ו (p,0) ו מובן שצריך להוסיף את נקודות הקצה של רבע המעגל, הנקודות

 $x^2+y^2=p^2$ תחת האילוץ A(x,y)=xy הפונקציה של הפונקצות כנקודות כנקודות החשודות העודות אילוץ של הפונקציה אילוץ בלות $x\geq 0$, $y\geq 0$ הן

$$\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) , (p,0) , (0,p)$$

. בנקודות החשודות A(x,y) בנקודות החשודות כעת נחשב את ערך הפונקציה

$$A\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) = \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{2}} = \frac{p^2}{2}$$

$$A(p,0) = p \cdot 0 = 0$$

$$A(0, p) = 0 \cdot p = 0$$

הוא $x \geq 0$, $y \geq 0$ והמגבלות $x^2 + y^2 = p^2$ תחת האילוץ תחת A(x,y) = xy הפונקציה של ולכן המקסימום אילון

$$\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$$
 מתקבל בנקודה , $\frac{p^2}{2}$

מבין אורכי אלכסון שאורכי המלבן ששטחו הקסימלי , $p\,$ האורכי אלכסון באורכי כל מבין כל מבין מבין המלבן האורכי אלכסון האורכי אלכסון המלבן מבין המלבן האורכי אלכסון אלכסון האורכי אלכסון האורכי אלכסון האורכי אלכסון האורכי אלכסון הא

. p הוא אלכסונו שאורך אלכסונו כלומר כלומר כלומר כלומר $x=\frac{p}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{p}{\sqrt{2}}$

אינטגרל כפול, שימושי אינטגרל כפול (נפח)

.1

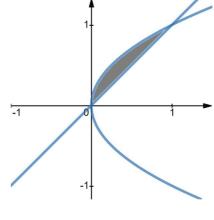
המוגדר D מעל התחום הגוף $f(x,y)=x^3y$ הפונקציה על גען מישור מישור בין מישור החסום בין מישור אוף xy החסום בין מישור עייי xy

התחום (x,y) החסום בין לכל נקודה $x=y^2$ ו y=x ו בתחום D התחום התחום $x=y^2$ ו y=x ו בתחום התחום $x=y^2$ ו בתחום $x=y^2$ בתחום $x=y^2$ ו בתחום $x=y^2$ בתחום בין מישור $x=y^2$ בתחום $x=y^2$ בתחום $x=y^2$ בתחום $x=y^2$ בתחום $x=y^2$ בתחום בין מישור $x=y^2$ בתחום $x=y^2$ בתחו

volume(G) =
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D x^3 y dA$$

:D איפיון התחום

 $\colon y = x \:,\: x = y^2$ העקומות של החיתוך החיתוד נמצא את נקודות



$$\begin{cases} y = x \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$x = x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x(1 - x) = 0 \implies x = 0 \text{ or } x = 1$$

$$x = 0 \implies y = x = 0$$

$$x = 1 \implies y = x = 1$$

:D ולכן איפיון הקבוצה איפיון ראשון (קבוצה x-פשוטה)

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1, x \le y \le \sqrt{x} \}$$

(קבוצה ע -פשוטה) איפיון שני

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y \}$$

ולכן נפח הגוף נתון עייי

volume(G) =
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D x^3 y dA = \int_{x=0}^1 dx \int_{y=x}^{\sqrt{x}} x^3 y dy$$

או עייי

volume(G) =
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D x^3 y dA = \int_{y=0}^1 dy \int_{x=y^2}^y x^3 y dx$$

:נחשב לפי האיפיון השני

$$volume(G) = \iint_{D} f(x, y) dA = \iint_{D} x^{3} y dA = \int_{y=0}^{1} dy \int_{x=y^{2}}^{y} x^{3} y dx = \int_{y=0}^{1} dy \frac{1}{4} x^{4} y \Big|_{x=y^{2}}^{y} =$$

$$= \int_{y=0}^{1} dy \left(\frac{1}{4} y^{4} \cdot y - \frac{1}{4} (y^{2})^{4} \cdot y \right) = \int_{y=0}^{1} \frac{1}{4} (y^{5} - y^{9}) dy = \frac{1}{4} \left(\frac{y^{6}}{6} - \frac{y^{10}}{10} \right) \Big|_{y=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{60}$$

לחשב נפח הגוף x=0 , x=1 , y=0 , y=1 המישורים בין החסום בין החסום לחשב נפח הגוף $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ כאשר $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ פרמטרים חיוביים. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ פרמטרים חיוביים.

xy ארבעת המישורים $x=0\,,\,x=1\,,\,y=0\,,\,y=1$ ניצבים למישור וחותכים אותו בריבוע

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \}$$

הגוף G יבנוי מעלי הקבוצה D, וחסום מלמעלה ומלמטה עייי משטחים מתאימים.

: מתקיים $(x, y) \in D$

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$

ולכן

$$0 \le x^{\alpha} \le 1$$
, $0 \le y^{\beta} \le 1 \implies 2 + x^{\alpha} + y^{\beta} \ge 2$
 $0 \le x^{\gamma} \le 1$, $0 \le y^{\delta} \le 1 \implies 0 \le x^{\gamma} y^{\delta} \le 1 \implies 1 + x^{\gamma} y^{\delta} \le 2$

 $h(x,y) \le g(x,y)$ מתקיים $(x,y) \in D$ כלומר לכל

ומלמעלה עייי המשטח z=h(x,y) יבנוי מעלי חסום וחסום , D וחסום מעלי מעלי יבנוי שהגוף יבנוי מעלי הקבוצה . z=g(x,y) המשטח

ייע נתון G נתון עייי

$$volume(G) = \iint_{D} [g(x, y) - h(x, y)] dA = \iint_{D} [(2 + x^{\alpha} + y^{\beta}) - (1 + x^{\gamma}y^{\delta})] dA =$$
$$= \iint_{D} [1 + x^{\alpha} + y^{\beta} - x^{\gamma}y^{\delta}] dA$$

איפיון הקבוצה D, שהינה ההיטל של הגוף D למישור איפיון

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \}$$

1.5

0.5

-0.5

ולכן

$$volume(G) = \iint_{D} \left[1 + x^{\alpha} + y^{\beta} - x^{\gamma} y^{\delta} \right] dA = \int_{x=0}^{1} dx \int_{y=0}^{1} (1 + x^{\alpha} + y^{\beta} - x^{\gamma} y^{\delta}) dy =$$

$$= \int_{x=0}^{1} dx \left(y + x^{\alpha} y + \frac{1}{\beta + 1} y^{\beta + 1} - x^{\gamma} \frac{1}{\delta + 1} y^{\delta + 1} \right) \Big|_{y=0}^{1} =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(1 + x^{\alpha} + \frac{1}{\beta + 1} - x^{\gamma} \frac{1}{\delta + 1} \right) dx =$$

$$= x + \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1} x - \frac{1}{\gamma + 1} \frac{1}{\delta + 1} x^{\gamma + 1} \Big|_{x=0}^{1} = 1 + \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1} - \frac{1}{(\gamma + 1)(\delta + 1)}$$