פתרון

Y

שאלה 3		שאלה 2		שאלה 1		
ג	ד	ד	ה	ד	ה	
						1
						2
						3
						4

שאלה 1 (35 נקודות)

שירי תסריטאית. היא צריכה לכתוב תסריט של 10 פרקים בסדרה חדשה. משך זמן כתיבת פרק אחד מתפלג נורמלית עם תוחלת 5 שעות וסטיית תקן של שעה אחת. אם זמן כתיבת פרק גדול מחמש שעות אז לפרק יהיה רייטינג גבוה בסיכוי 0.7 ואם זמן כתיבת פרק קטן או שווה לחמש שעות אז לפרק יהיה רייטינג גבוה בסיכוי 0.2. רמות הרייטינג של פרקים שונים ב"ת.

א. (9 נקודות) לפרק הראשון היה רייטינג גבוה. מהי ההסתברות לכך ששירי סיימה לכתוב את הפרק בפחות מחמש שעות?

ב. (8 נקודות) ערוץ משלם בונוס בשווי S ₪ עבור פרק עם רייטינג גבוה. בטאו שונות הבונוס עבור 10 פרקי הסדרה כפונקציה של S.

ג. (8 נקודות) שירי גם כותבת טקסטים לסטנדאפ. מספר בדיחות חדשות ששירי ממציאה בשעה מתפלג לפי התפלגות פואסון. שירי כרגע המציאה בדיחה חדשה. ההסתברות שתוך שעה היא תמציא בדיחה חדשה נוספת שווה ל-0.8. מצאו תוחלת של כמות בדיחות בשעה.

ד. מזכירה של שירי הדפיסה תסריט של 10 פרקים וכל פרק הכניסה למעטפה נפרדת. אחרי זה על כל מעטפה היא הדביקה מספרים באופן אקראי. מהי ההסתברות לכך שלפחות 9 פרקים נכנסו למעטפות עם מספרים תואמים?

1. $1/10!$
2. $9/10$
3. $1/10$
4. $1/90$

ה. (5 נקודות) לכתיבת חמשת פרקים הראשונים שירי הקדישה פחות מחמש שעות לכל פרק ולכתיבת חמשת פרקים האחרונים היא הקדישה יותר מחמש שעות לכל פרק. מצאו את התוחלת של מספר הפרקים עם רייטינג גבוה מתוך 10 פרקים.

1. 5.2
2. 4.7
3. 5
4. 4.5

פתרון:

א. נגדיר מאורעות:

A – שירי סיימה לכתוב את הפרק בפחות מ-5 שעות,

B – לפרק היה רייטינג גבוה.

בגלל ש-5 גם חציון של ההתפלגות זמן כתיבת פרק, נסיק שמתקיים $P(A)=0.5$.

נחשב את ההסתברות של B בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})=0.5\cdot 0.7+0.5\cdot 0.2=0.45$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.45}=\frac{7}{9}$$

ב. נגדיר משתנים מקריים:

X_i - בונוס עבור פרק ה-*i*, *i*=1,2,...,10 . נרשום את פונקציית ההסתברות של מ"ם X_i **:**

$$P(X_i=S)=P(B)=0.45,\quad P(X_i=0)=0.55$$

נחשב שונות הבונוס של פרק אחד:

$$V(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2=S^2\cdot 0.45+S^2\cdot 0.45^2=S^2\cdot 0.6525$$

נחשב עכשיו בונוס עבור 10 פרקים. מאי-תלות בין רמות רייטינג של פרקים שונים נקבל:

$$V\left(\sum_{i=1}^{10}X_i\right)=\sum_{i=1}^{10}V(X_i)=10\cdot S^2\cdot 0.6525=S^2\cdot 6.525$$

ג. זמן בשעות בין שתי בדיחות עוקבות מתפלג לפי התפלגות מעריכית $T\sim \exp(\lambda)$. נתונה הסתברות שזמן יהיה קטן משעה אחד. נמצא את הממוצע λ של כמות בדיחות בשעה מהמשוואה הבאה:

$$P(T<1)=0.8\Rightarrow e^{-\lambda}=0.2\Rightarrow \lambda=1.6$$

ד. נגדיר משתנה מקרי:

Y- מספר פרקים במעטפות עם מספרים התואמים.

נשים לב ש- $P(Y=9)=0$ כי זה מקרי לא אפשרי.

לכן ניתן לחשב את הסיכוי המבוקש באופן הבא:

$$P(Y\geq 9)=P(Y=10)=\frac{1}{10!}$$

ה. נגדיר משתנים מקריים:

Z_1 - מספר פרקים עם רייטינג גבוה מתוך חמישה פרקים הראשונים. מתקיים: $Z_1\sim Bin(5,0.7)$,

Z_2 - מספר פרקים עם רייטינג גבוה מתוך חמישה פרקים האחרונים. מתקיים: $Z_2\sim Bin(5,0.2)$.

נחשב ממוצע של מספר פרקים עם רייטינג גבוה מתוך עשרה פרקים.

$$E(Z_1+Z_2)=E(Z_1)+E(Z_2)=5\cdot 0.7+5\cdot 0.2=4.5$$

שאלה 2 (35 נקודות)

נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי רציף X :

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1\le x<2\\ a, & 3\le x<4\\ (x-5)^5, & 5\le x\le b\\ 0, & else\end{cases}$$

א. (9 נקודות) נתון שהחציון של ההתפלגות שווה ל- $\frac{10}{3}$. מצאו ערכי a,b .

ב. (8 נקודות) מצאו את $F_X\left(\frac{5+b}{2}\right)$.

ג. (8 נקודות) יהי Y משתנה מקרי רציף המתפלג כמו מ"מ מקרי X וב"ת ב- X . חשבו את $P(X>3\cup Y<3)$.

ד. (5 נקודות) העשירון התחתון של מ"מ X שווה ל:

1. 1.2
2. 1.1
3. 1.4
4. 1.3

ה. (5 נקודות) נגדיר מ"מ $Z=\frac{X-E(X)}{2\sigma(X)}$. קבעו מהי הטענה הנכונה:

1. $E(Z)=0,\quad V(Z)=0.5$
2. $E(Z)=0,\quad V(Z)=1$
3. $E(Z)=0,\quad V(Z)=0.25$
4. $Z\sim N(0,1)$

פתרון:

א. החציון מקיים את המשוואה: $F_X\left(\frac{10}{3}\right)=0.5$. כלומר שטח משמאל ל- $\frac{10}{3}$ שווה ל-0.5. לכן צריך לפתור את המשוואה הבאה: $\frac{1}{3}+\left(\frac{10}{3}-3\right)\cdot a=0.5$. לכן $a=0.5$.

כדי למצוא את b , נשתמש בתכונה שהשטח מתחת לפונקציית הצפיפות שווה לאחד:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\int_5^b (x-5)^5\,dx=1$$

נקבל $b=6$.

ב. השאלה שקולה למציאת שטח מתחת לפונקציית הצפיפות משמאל לערך 5.5:

$$F_X(5.5)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\int_5^{5.5}(x-5)^5\,dx=\frac{5}{6}+\frac{0.5^6}{6}=0.836$$

ג. נשים לב שמתקיים: $P(X<3)=P(Y<3)=\frac{1}{3}$. מאי-תלות ונוסחה להסתברות של איחוד נקבל:

$$P(X>3\cup Y<3)=P(X>3)+P(Y<3)-P(X>3)P(Y<3)=$$
$$1-P(X<3)+P(Y<3)-P(X>3)P(Y<3)=$$
$$1-(1-P(X<3))P(X<3)=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$$

ד. נמצא ערך כך ששטח משמאלו שווה ל-0.1, כלומר נפתור את המשוואה: $\frac{t-1}{3}=0.1$. לכן העשירון התחתון שווה ל-1.3.

ה. תשובה מספר 3 נכונה. נובע מתכונות של תוחלת ושונות.

שאלה 3 (30 נקודות)

בכד שלושה כדורים ירוקים ממוספרים בין 1 ל-3, ו- חמישה כדורים סגולים ממוספרים בין 1 ל-5.

א. (12 נקודות) מוצאים באקראי <u>ללא החזרה</u> 2 כדורים. נגדיר שני משתנים:

X – מספר הכדורים הירוקים שהוצאנו.

Y – המספר המינימלי שהוצאנו.

1. זהו את התפלגות של משתנה מקרי X.

2. חשבו את ההסתברות $P(X+Y\geq 4)$. (לא צריך לבנות את טבלת ההתפלגות המשותפת כדי לבצע את החישוב הזה).

3. האם X,Y בלתי תלויים?

ב. (8 נקודות) עכשיו נוציא כדורים עם החזרה עד שיצא מספר "3" בפעם הראשונה (לא חשוב באיזה צבע). אם ידוע שב-5 הכדורים הראשונים שהוצאנו לא יצא "3", מה ההסתברות שנצטרך להוציא לפחות 10 כדורים עד שנקבל "3" בפעם הראשונה?

ג. (5 נקודות) נוציא כדורים <u>ללא החזרה</u> עד שיצא הכדור הסגול עם מספר "5" רשום עליו. מה ההסתברות שהוא יצא בהוצאה השביעית?

1. $7\left(\frac{7}{8}\right)^6\left(\frac{1}{8}\right)$
2. $1/8$
3. $\left(\frac{7}{8}\right)^6\left(\frac{1}{8}\right)$
4. $1/7$

ד. (5 נקודות) מהו השכיח של המשתנה X המוגדר בסעיף הראשון?

1. $Mode(X)=0$
2. $Mode(X)=\{1,2\}$
3. $Mode(X)=2$
4. אף תשובה אינה נכונה

פתרון:

א. $X \approx HG(8,3,2)$.

הערכים האפשריים של X : 0,1,2

הערכים האפשריים של Y : 1,2,3,4

$$P(X+Y\geq 4)=P(X=0,Y=4)+P(X=1,Y=3)+P(X=1,Y=4)+$$
$$P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)+P(X=2,Y=4)=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot 2+0+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot 2+0+0=\frac{5}{28}$$

$P(X=2,Y=4)=0$ ולכן המשתנים תלויים.

ב. נגדיר משתנה מקרי: Z - מספר ההוצאות עד שיוצא מספר "3". מתוך ה-8 כדורים יש 2 בדיוק שעליהם רשום המספר "3". לכן $Z \sim G\left(\frac{1}{4}\right)$. רוצים לחשב $P\left(Z\geq 10 \mid Z>5\right)$.לפי תכונה חוסר הזיכרון של ההתפלגות גיאומטרית נקבל כי $P\left(Z\geq 10 \mid Z>5\right)=P\left(Z\geq 5\right)$. זה אומר ש-4 הפעמים הראשונות לא היו הצלחה.

$$P\left(Z\geq 5\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

ג. תשובה מספר 2 נכונה.

הסבר: כמות הכדורים עד שנוציא כדור סגול עם מספר 5 מתפלגת לפי התפלגות אחידה עם פרמטר 8.

ד. תשובה מספר 4 נכונה.

הסבר: כמות ירוקים מ"מ היפרגאומטרי. מחשבים הסתברויות וערך אפשרי עם סיכוי מקסימאלי הוא 1.