

## חדו"א 1 תרגיל 9 – חקירת פונקציות

### שאלה 1

לחקור חקירה מלאה של הפונקציות הבאות לפי הסעיפים:

- תחום הגדרה.
- תחום רציפות ותחום גזירות.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- זוגיות/אי-זוגיות.
- תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון מקומי.
- תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול.
- אסימפטוטות.
- שרטוט גרף הפונקציה.
- מספר פתרונות המשוואה  $f(x) = m$ .
- האם יש לפונקציה מקסימום או מינימום מוחלטים?
- האם הפונקציה  $f : D_f \rightarrow \mathbf{R}$  (הוא תחום ההגדרה) היא חח"ע? על? הפיכה?

א.  $f(x) = x^2 e^{-x}$

ב.  $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

ג.  $f(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$

ד.  $f(x) = (1 + \sin x) \cos x$

הדרכה: לנמק שהפונקציה מחזורית (ולמצוא מה המחזור שלה), ולנצל את זה בחקירה – למצוא נקודות חיתוך עם ציר  $x$ , תחומי עליה/ירידה, נקודות קיצון מקומי, תחומי קמירות/קעירות ונקודות פיתול, במחזור אחד בלבד, בקטע  $[-\pi, \pi]$ .

ה.  $f(x) = |x^2 + 5x + 6|$

### שאלה 2

א. לחקור את הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  חקירה מלאה לפי הסעיפים בשאלה 1.

ב. להוכיח שאם  $x^y = y^x$ ,  $x, y > 0$  אז  $f(x) = f(y)$ .

ג. להראות שאם  $m < n$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$  ו  $m^n = n^m$  אז  $m = 2$ ,  $n = 4$ .

ד. מי מהמספרים הבאים גדול יותר:  $e^\pi$  או  $\pi^e$ ? (בלי שימוש במחשבון כמובן!)

### שאלה 3

תהי  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  פונקציה.

האם הטענות הבאות נכונות? אם לא, למצוא דוגמה נגדית:

(1) אם  $f'(x_0) = 0$  אז נקודת קיצון מקומי של  $f$ .

(2) אם  $f'(x_0) = 0$  אז  $f$  מקומי של  $f$ .

(3) אם  $f''(x_0) = 0$  אז נקודת פיתול של  $f$ .

(4) אם  $f''(x_0) = 0$  אז נקודת פיתול של  $f$ .

**שאלה 4**

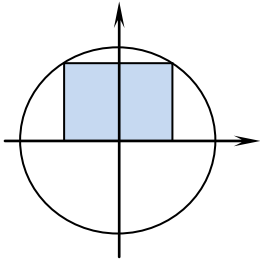
- א. האם לפונקציה  $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$  יש נקודת קיצון מקומי? האם ישנה נקודה בה  $f'(x) = 0$ ?
- ב. האם לפונקציה  $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$  יש נקודת קיצון מקומי? האם ישנה נקודה בה  $f'(x) = 0$ ?
- ג. האם לפונקציה  $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$  יש נקודת קיצון מקומי? האם ישנה נקודה בה  $f'(x) = 0$ ?

**שאלה 5**

למצוא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציות בקטעים הנתונים:

א.  $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$  בקטע  $[-1, 1]$ .

ב.  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  בקטע  $[-2, 2]$ .

**שאלה 6**

- א. מצוא שני מספרים חיוביים שמכפלתם 100 כך שסכומם מינימלי.
- ב. למצוא את מימדיו של מלבן סימטרי ביחס לציר  $y$  אשר נמצא בתוך חצי מעגל בעל רדיוס  $R$  (כמתואר בשרטוט), כך ששטח המלבן יהיה מקסימלי ( $R > 0$  פרמטר).
- ג. בטרפז שווה שוקיים אורך השוק ואורך הבסיס הקטן שווים ל 4. למצוא את אורך הבסיס הגדול, כך ששטח הטרפז יהיה מקסימלי. מהו השטח המקסימלי?

**שאלה 7**

א. להוכיח שלכל  $x \in \mathbf{R}$  מתקיים  $2x \arctan x \geq \ln(1+x^2)$ .

ב. להוכיח שלכל  $x \geq 1$  מתקיים  $1 + 2 \ln x \leq x^2$ .

**שאלה 8**

למצוא את מספר פתרונות המשוואה  $x^2 - \ln(x^2) = 2$  בקטע  $(0, \infty)$ . כמה פתרונות יש למשוואה בכל תחום הגדרתה?

**שאלה 9**

א. האם הישר  $x=1$  הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+15} - \sqrt{17-x}}{1-x^2}$ ?

ב. האם קיים פולינום  $p(x) = ax + b$  כך ש  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x^3 + 5x^2 + 7}{9x^2 - 12x - 1} - p(x) \right) = 0$ ?

**שאלה 10**

נתון שרטוט של גרף של פונקציה. לשרטט באופן איכותי את גרף הנגזרת של הפונקציה.

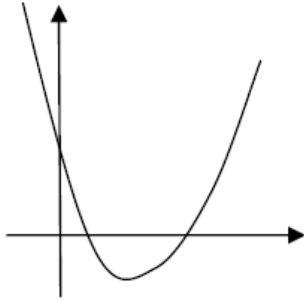
הדרכה:

להסתמך על הקשר בין תכונות הנגזרת הראשונה והשנייה לתכונות הפונקציה.

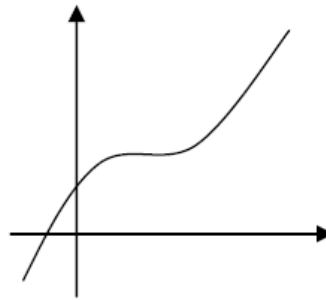
בקטע בו הפונקציה עולה הנגזרת חיובית, בקטע בו הפונקציה יורדת הנגזרת שלילית, בקטע בו הפונקציה קבועה הנגזרת אפס.

בקטע בו הפונקציה קמורה הנגזרת עולה, בקטע בו הפונקציה קעורה הנגזרת יורדת.

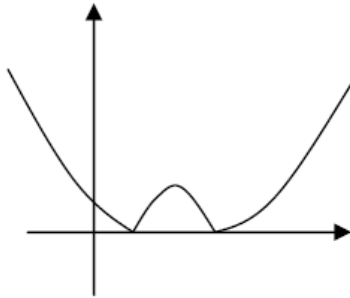
ב.



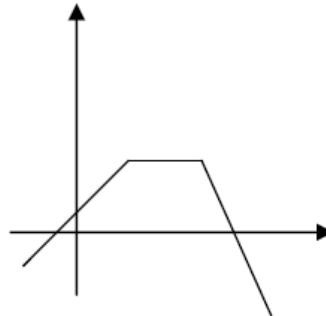
א.



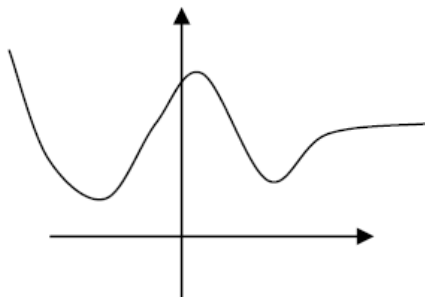
ד.



ג.



ו.



ה.

