פתרון חדו"א 1 מועד Y
סמסטר ב 2022

שאלה 1:

1. נתונה הסדרה a_n המוגדרת היטב ע"י נוסחת הנסיגה

$$a_1 = 3$$
$$a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:

- נוכיח באינדוקציה שהסדרה חסומה בין 2 ל-4:
  עבור $n=1$, $2 \le a_1 = 3 \le 4$, סיימנו.

  נשאר להוכיח כי עבור כל n טבעי מתקיים:

  אם $2 \le a_n \le 4$ (הנחה) אז בהכרח גם $2 \le a_{n+1} \le 4$

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{6\cdot 2 - 8} \le \underbrace{\sqrt{6a_n - 8}}_{a_{n+1}} \le \sqrt{6\cdot 4 - 8} = \sqrt{16} = 4$$

- נוכיח כי הסדרה עולה. לשם כך נוכיח כי עבור כל מספר טבעי n מתקיים $a_{n+1} \ge a_n$. ז"א

$$a_n \le a_{n+1} \Leftrightarrow a_n \le \sqrt{6a_n - 8} \Leftrightarrow a_n^2 \le 6a_n - 8 \Leftrightarrow a_n^2 - 6a_n + 8 \le 0$$

נגדיר פונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ כאשר $2 \le x \le 4$. ברור כי $f(a_n) \le 0$ לכל n.

- סדרה עולה וחסומה, מתכנסת. יהיה L גבולה.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{6a_n - 8} \Rightarrow L = \sqrt{6L - 8} \Rightarrow L^2 = 6L - 8 \Rightarrow L = 4$$

2. נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & x>0 \\ c & x=0 \\ 2-x & x<0 \end{cases}$$

עבור אלו ערכים של c יש לפונקציה נקודת קיצון מקומי ב-0? (מומלץ לצייר)

פתרון: אם $c<-2$ יהיה לנו מינימום מקומי ואם $c>2$ יהיה מקסימום מקומי. קל לראות בגרף.

שאלה 2:

1. תהיה $f(x)$ פונקציה רציפה ואי זוגית המוגדרת בכל $\mathbb{R}$. חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x\sin x}$$

פתרון:

במונה פונקציה רציפה וגזירה (המשפט היסודי הראשון) , וכשנציב $x=0$ הוא ייתאפס. גם במכנה פונקציה רציפה וגזירה, כמכפלה של פונקציות רציפות וגזירות, ומתאפס ב-0. לכן מדובר בגבול מהצורה $0/0$

ננסה להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x\sin x} \overset{??}{=}_{LH} \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2).2x}{x\cos x+\sin x}$$

קיבלנו שוב מצב של $0/0$. אבל לא נוכל להשתמש בכלל פעם שנייה כי לא ידוע לנו אם המונה גזיר. אז נסתדר אם משפט אריתמטיקה של גבולות ומשפטים נוספים.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{\cos x+\frac{\sin x}{x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{2f(0)}{1+1}=f(0)=0$$

$f(0)=0$ מכיוון שהפונקציה היא אי זוגית .

פתרון:

2. נסמן $a_n = \left(\frac{1+\cos^2 1}{n^4 - 1} + \frac{2+\cos^2 2}{n^4 - 2} + \ldots + \frac{n+\cos^2 n}{n^4 - n}\right)$.

מתקיים $0 \le n\frac{1}{n^4} \le a_n \le n\frac{n+\cos^2 n}{n^4 - n} \le n\frac{n+1}{n^4 - n}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^4 - n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2 - \frac{1}{n}} = 0$. לכן, לפי כלל סנדוויץ', גם גבול של הסדרה שווה ל- 0.

שאלה 3:

1. חשבו את האינטגרל

$$\int x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dt$$

פתרון:

$$\int x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx \underset{\substack{t=x^2\\ dt=2xdx}}{=} \frac{1}{2}\int \ln\left(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \int \ln\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \int \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 dt = \int 2\left(\ln\left(t+1\right)-\ln t\right)dt = 2\left[\int \ln(t+1)dt - \int \ln t dt\right]$$

את האינטגרל השני ניתן לפתור בקלות באינטגרציה בחלקים:

$$\int \underset{v'}{1}.\underset{u}{\ln t}\, dt \Rightarrow \begin{cases} u=\ln t & u'={}^{1}\!/_{t} \\ v'=1 & v=t \end{cases} \Rightarrow \int \ln t dt = t\ln t - \int 1.dt = t\ln t - t + C$$

תוך כדי שימוש באינטגרל השני ובעזרת הצבה פשוטה מאוד, נקבל כי

$$\int \ln(t+1)dt = (t+1)\ln(t+1) - (t+1) + K$$

ולכן האינטגרל הנתון יהיה

$$2\left[\int \ln(t+1)dt - \int \ln t dt\right] = 2t\ln t - 2t - 2(t+1)\ln(t+1) + 2(t+1) + C =$$

$$2t\ln t - 2(t+1)\ln(t+1) + 2 + C = 2x^2\ln(x^2) - 2(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2 + C$$

2. הוכיחו כי למשוואה $x^7+2e^{3x}=3$ יש בדיוק פתרון אחד ממשי.

פתרון:

נגדיר פונקצית עזר $f(x)=x^7+2e^{3x}-3$. הפונקציה היא רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות אלמנטריות רציפות וגזירות. הפונקציה מקיימת $f(0)<0,\ f(1)>0$ ולכן ממשפט ערך הביניים הפונקציה חייבת להתאפס לפחות פעם אחת בין שני הערכים האלה.

כדי להוכיח כי הפונקציה לא מתאפסת יותר מפעם אחת, נניח (בשלילה) כי יש לפונקציה שני שורשים שונים ונגיע לסתירה.

במקרה שלפונקציה יש שני שורשים שונים, הנגזרת מתאפסת בנקודות ביניים (משפט רול). אבל הנגזרת לא מתאפסת אף פעם כי $f'(x)=\underbrace{7x^6}_{\geq 0}+\underbrace{6e^{3x}}_{>0}>0$. סתירה זו מראה שההנחה הייתה שגויה. לכן אין יותר משורש אחד.

שאלה 4:

פתרון:

1.

$$f(2)=1\quad,\quad f'(x)=\tfrac{1}{2}(x-1)^{-1/2}\Rightarrow f'(2)=\tfrac{1}{2}\quad,\quad f''(x)=-\tfrac{1}{4}(x-1)^{-3/2}\Rightarrow f''(2)=-\tfrac{1}{4}\ ,$$

$$f^{(3)}(x)=\tfrac{3}{8}(x-1)^{-5/2}\Rightarrow f^{(3)}(2)=\tfrac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x)=-\tfrac{15}{16}(x-1)^{-7/2}$$

מכאן נקבל שנוסחת טיילור של $f(x)$ ממעלה 3 סביב הנקודה 2 היא:

$$f(x)=1+\tfrac{1}{2}(x-2)-\tfrac{1}{8}(x-2)^2+\tfrac{3}{48}(x-2)^3+R_3(x)$$

כאשר $R_3(x)$ היא השארית. הואיל ש- $f(3)=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$, נקבל את הקירוב הדרוש ע"י הצבת $x=3$ בנוסחה שקיבלנו, כלומר: $\sqrt{2}\cong 1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{48}=1\frac{21}{48}$.

השארית היא:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-2)^4=-\frac{15}{16\cdot 24}(c-1)^{-7/2}(x-2)^4$$

כאשר (בקירוב שחישבנו): $2<c<3$ וכן $x=3$. לכן, הערכה לשגיאה היא:

$$\left|R_3(3)\right| = \left|-\frac{15}{16\cdot 24}\cdot\frac{1}{\sqrt{c-1}^{7}}(3-2)^4\right| = \frac{15}{16\cdot 24}\frac{1}{\sqrt{c-1}} < \frac{15}{384}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-1}} = \frac{15}{384} < 0.04$$

פתרון:

2. הוכחה דרך השלילה: אם הפונקציה אינה פונקציה קבועה 0, ומפני שהפונקציה רציפה, אז היא מקבלת מקסימום ומינימום מוחלטים בקטע (משפט ויירשטרס), ולפחות אחד מהם אינו בקצוות. בה"כ נניח כי המקסימום המוחלט מתקבל בנקודה $x_0 \in (a,b)$. אז בנקודה יש בפרט מקסימום מקומי. ז"א הנגזרת מתאפסת בנקודה. לכן נקבל כי $f(x_0) = f''(x_0)$. מפני שערך המקסימום חייב להיות גדול מ-0, אז $f(x_0) = f''(x_0) > 0$. אבל אז זה אומר שיש בנקודה x_0 מינימום מקומי, סתירה.

שאלה 5:

פתרון:

1. נגדיר פונקצית עזר $f(x) = x^2 \ln x$. הפונקציה רציפה וגזירה בקטע $[u,v]$. לכן ממשפט לגרנג נקבל

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = \frac{v^2\ln v - u^2 \ln u}{v-u} = f'(c) = 2c\ln c + c\left(1 \le u < c < v < a\right)$$

את הנגזרת ניתן לחסום באופן הבא:

$$\underbrace{2\cdot 1\cdot \ln 1 + 1}_{1} \le 2c\ln c + c \le 2a\ln a + a$$

מפה נסיק כי

$$1 \le \frac{v^2\ln v - u^2\ln u}{v-u} \le 2a\ln a + a \Rightarrow (v-u) \le v^2\ln v - u^2 \ln u \le \left(2a\ln a + a\right)\left(v-u\right)$$

פתרון:

2. נשים לב כי עבור $x \ge e$ המכנה תמיד מוגדר וחיובי. לכן הפונקציה הנתונה היא רציפה (כמנה של פונקציות רציפות כאשר המכנה לא מתאפס) וחיובית. במקרה הזה השטח שווה לאינטגרל של הפונקציה בקטע הנתון.

$$A = \int_e^b \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \frac{3}{8}$$

אם נציב $t = \ln x, dt = \frac{1}{x}dx$ ונחליף את הקצוות בהתאם נקבל כי

$$A=\int_1^{\ln b}\frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{2t^2}\Big|_1^{\ln b}=\frac{-1}{2\ln^2 b}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\ln^2 b}=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}\Rightarrow\ln^2 b=4\Rightarrow\ln b=2\Rightarrow b=e^2$$

שאלה 6:

1. מצאו את כל הערכים הממשיים של x_0 עבורם הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2-2\ln x$ בנקודה x_0 מקביל לישר $y=7-3x$

פתרון:

מחפשים את כל הנקודות בהן הנגזרת שווה ל- 3-.

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=-3\Rightarrow\frac{2x^2-2+3x}{x}=0$$

השורשים של המשוואה הריבועית הם : $x_1=-2; x_2=1/2$. אבל רק השורש השני שייך לתחום.

התשובה: $x_0=\frac{1}{2}$

2. נתונה הפונקציה

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{4-x}}$$

חשבו את המקסימום **המוחלט** של הפונקציה.

פתרון:

שימו לב כי הפונקציה מוגדרת רק בקטע $[0,4]$ וכי הפונקציה רציפה בקטע הזה (המונה רציף, המכנה רציף, המכנה לא מתאפס). ולכן ממשפט ויירשטרס הפונקציה מקבלת מקסימום מוחלט בקטע.

בפנים הקטע ניתן לגזור

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{4-x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{4-x})^2}$$

נשים לב כי המכנה הוא תמיד חיובי, וגם המונה, כסכום של ביטויים חיוביים. נסיק מזה שהפונקציה עולה ולכן המקסומום שלה מתקבל ב- $x=4$ והוא $f(4)=2$

מבחן חדו"א 1 - סמסטר ב' - מבחן Y

שאלה 1 אין קשר בין הסעיפים 1 ו- 2

1. (15 נקי') נתונה הסדרה a_n המוגדרת היטב ע"י נוסחת הנסיגה

$$a_1 = 3$$
$$a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

הוכיחו כי $2 < a_n < 4$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

2. (05 נקי') יהיה $c \in \mathbf{R}$. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x>0 \\ c & x=0 \\ 2-x & x<0 \end{cases}$$

עבור אלו ערכים של c יש לפונקציה נקודת קיצון מקומי ב- 0? (מומלץ לצייר).

שאלה 2 אין קשר בין הסעיפים 1 ו- 2

1. (10 נקי') תהיה $f(x)$ פונקציה רציפה ואי זוגית המוגדרת בכל $\mathbf{R}$. חשבו את הגבול

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x \sin x} .$$

2. חשבו את הגבול $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+\cos^2 1}{n^4 - 1} + \frac{2+\cos^2 2}{n^4 - 2} + \ldots + \frac{n+\cos^2 n}{n^4 - n} \right)$.

שאלה 3 אין קשר בין הסעיפים 1 ו- 2

1. (10 נקי') חשבו את האינטגרל

$$\int x \ln\left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) dx .$$

2. (10 נקי') הוכיחו כי למשוואה $x^7 + 2e^{3x} = 3$ יש בדיוק פתרון אחד ממשי.

שאלה 4 אין קשר בין הסעיפים 1 ו- 2

1. (10 נק׳) מצאו קירוב למספר $\sqrt{2}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $n=3$ של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x-1}$ סביב הנקודה $a=2$. בדקו האם השגיאה לא עולה על 0.04.

2. (10 נק׳) הפונקציה $f(x)$ היא גזירה פעמיים ברציפות בקטע $[a,b]$. ידוע שהפונקציה מקיימת $f(a)=f(b)=0$ וגם $f(x)=f'(x)+f''(x)$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ בקטע הנתון.

שאלה 5 אין קשר בין הסעיפים 1 ו- 2

1. (10 נק׳) יהיה $a\in\mathbf{R}$. הוכיחו כי עבור כל $1\le u<v<a$ מתקיים

$$v-u<v^2\ln v-u^2\ln u<(2a\ln a+a)(v-u).$$

2. (10 נק׳) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^3 x}$ מצאו את הערך של $b\in\mathbf{R}$ עבורו השטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע $[e,b]$ הוא $3/8$.

שאלה 6 אין קשר בין הסעיפים 1 ו- 2

1. (10 נק׳) מצאו את כל הערכים $x_0\in\mathbf{R}$ עבורם הישר המשיק לפונקציה $f(x)=x^2-2\ln x$ בנקודה x_0 מקביל לישר $y=7-3x$.

2. (10 נק׳) נתונה הפונקציה

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{4-x}}.$$

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה וחשבו את המקסימום **המוחלט** של הפונקציה.

בהצלחה !

זהויות טריגונומטריות:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$

$\sin\alpha\cos\beta=1/2\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

$\sin\alpha\sin\beta=1/2\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

$\cos\alpha\cos\beta=1/2\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$

$\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha,\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$

$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$

$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

הבינום של Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k;\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,\ 0!=1$$

פונקציות- מבוא

פונקציה זוגית // אי-זוגית - $f(-x)=f(x)$ // $f(-x)=-f(x)$.

פונקציה מחזורית - $f(x+T)=f(x)$.

פונקציה חח"ע - אם לכל $x_1\neq x_2$ בתחום מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$.

פונקציה על - אם התמונה של f שווה לטווח של f .

נגזרות מיידיות:

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$arc\cot'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$

$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$

$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos' x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$\sin' x=\cos x$

$\cos' x=-\sin x$

$\sinh' x=\cosh x$

$\cosh' x=\sinh x$

אינטגרלים מיידים:

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$

$\int(x-a)^m dx=\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}+c,\quad m\neq -1$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

$\int\sin x dx=-\cos x+c$

$\int\cos x dx=\sin x+c$

$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c$

$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+c$

$\int\tan x dx=-\ln|\cos x|+c$

$\int\cot x dx=\ln|\sin x|+c$

סדרות והתכנסות $\{a_n\}_{n\geq 0}$

סדרה חשבונית: $a_n=a_0+n\cdot d,\quad S_n=a_0+...+a_n=(a_0+a_n)\cdot\frac{n+1}{2}$

סדרה הנדסית: $a_n=a_0\cdot q^n;\ S_n=a_0+...+a_n=a_0\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\ if\ q\neq 1$

סדרה מונוטונית:

1. **סדרה עולה** - קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים: $a_{n+1}-a_n\geq 0$.
2. **סדרה יורדת** - קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים: $a_{n+1}-a_n\leq 0$.
3. **עולה ממש // יורדת ממש** - קיום התנאים הנ"ל ללא ה"שווה" בהתאמה.

הגדרת הגבול של סדרה: מספר ממשי L הוא הגבול של סדרה $\{a_n\}_{n\geq 1}$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים n_ε כך שלכל $n\geq n_\varepsilon$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$.

התכנסות של סדרה ומונוטוניות:

1. כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת .
2. סדרה מונוטונית ולא חסומה שואפת ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

משפטי התכנסות של סדרה:

1. סדרה לא יכולה להתכנס ל- 2 גבולות שונים.
2. כל סדרה מתכנסת היא חסומה (אך לא להפך).
3. סדרות אינסופיות $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim_{n\to\infty}a_n=B$:

א. $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B,\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$.

ב. אם $B\neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n/\lim_{n\to\infty}b_n=A/B$.

4. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ו- $\{b_n\}$ סדרה חסומה, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$.
5. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.
6. אם $A>0$ אז $\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=A^B$.
7. $\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$; $a>1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0$; $-1<q<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}q^n=0$;
8. גבולו של **Euler** : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

משפט הסנדוויץ: אם $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$ ומתקיים $b_n\leq a_n\leq c_n$

עבור n מספיק גדול, אז הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

תת סדרה: $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}=\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

1. אם הסדרה המקורית מתכנסת אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול .
2. אם לסדרה קיימות לפחות 2 תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אז הסדרה המקורית מתבדרת.

גבול חלקי = גבול של תת-סדרה.

משפט בולזנו-ויישטרס: (Bolzano-Weierstrass)

אם סדרה חסומה, אז יש לה תת סדרה מתכנסת.

קריטריון קושי (Cauchy) להתכנסות סדרה:

סדרה אינסופית $\{a_n\}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים n_ε כך שעבור $n\geq n_\varepsilon$

ו- p טבעי כלשהו מתקיים: $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

גבולות פונקציות

הגדרת גבול פונקציה לפי Heine:

L הוא גבול של פונקציה F בנקודה a אם לכל סדרה $x_n\neq a$ שמתכנסת ל- a ,

אז מתקיים $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$.

הגדרת גבול פונקציה לפי Cauchy: הפונקציה f בעלת גבול L בנק' a

אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך ש: $|f(x)-L|<\varepsilon$,לכל $0<|x-a|<\delta$.

משפט:

$\lim_{x\to a}\alpha\cdot f(x)=\alpha\cdot L_f$; $\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=L_f\pm L_g$

$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=L_f\cdot L_g$; $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{L_f}{L_g}$, $L_g\neq 0$

גבול חד צדדי: $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x),\quad \lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$

משפט:

לפונקציה יש גבול בנקודה, אם ורק אם קיימים 2 גבולות חד צדדיים בנק', והם שווים.

חישובי גבולות: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

כלל הסנדוויץ:

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\leq g(x)\leq h(x)\\ \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=C\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to a}g(x)=C$$

גבול של הרכבה: אם $\lim_{x\to x_0}g(x)=a$ והפונקציה f רציפה בנקודה a ,

אז $\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0}g(x))=f(a)$.

רציפות פונקציות

<u>הגדרה</u>: תהי פונקציה מוגדרת בסביבת נקודה x_0 כולל הנקודה עצמה. אומרים שהפונקציה רציפה בנקודה x_0 אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים את $|x-x_0|<\delta$ יתקיים גם $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

משפט:

1. אם f,g רציפות אז $f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad f(x)/g(x)$ רציפות גם כן. (לגבי המנה, מניחים ש- $g(x)\neq 0$).
2. אם שתי פונקציות רציפות בנקודה מתאימות אז ההרכבה שלהן גם כן רציפה.
3. כל פונקציה אלאמנטרית רציפה. בפרט, כל פולינום או מנת פולינומים רציפים (בתחום ההגדרה) סינוס, קוסינוס ופונקצית המעריכית רציפים לכל x.
4. אם פונקציה f "חח"ע" ו-"על" ורציפה בנקודה x_0 אז הפונקציה הופכית g גם רציפה בנקודה y_0, כאשר $f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow g(y_0)=x_0$.

משפט: אם f פונקציה רציפה אז $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

<u>אי רציפות של פונקציה</u> <u>בנקודה ששייכת לתחום ההגדרה:</u>

אי רציפות סליקה: ערך הפונק' בנקודה שונה מערך הגבול של הפונק' בנקודה.
אי רציפות מסוג ראשון: לפונקציה יש 2 גבולות חד צדדיים אך הם שונים זה מזה.
אי רציפות מסוג שני: <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים או שווה ל- $\pm\infty$.

<u>תכונות של פונקציות רציפות:</u>

משפט ערך הביניים של Cauchy לגבי רציפות פונקציות:
אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ו- γ נמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחת c בקטע $[a,b]$ כך ש- $f(c)=\gamma$.

<u>מסקנה:</u> אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ מקיימת $f(a)\cdot f(b)<0$, אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=0$. (ז"א הגרף של f חותך את ציר ה- x.)

משפט Weierstrass

1. אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא גם חסומה בקטע זה.
2. אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא בעלת נקודות קיצון מוחלטות בקטע זה.

גזירת פונקציות

הפונקציה גזירה בנק' x אם הגבול $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ סופי.

<u>משוואת משיק</u>: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

<u>משוואת נורמל</u>: $x-x_0+f'(x_0)(y-y_0)=0$.

<u>דיפרנציאל:</u> $df=f'(x_0)dx$.

<u>קירוב לינארי ודיפרנציאל:</u>
$$f(x)=f(x_0+dx)\approx f(x_0)+df=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)\cdot dx=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

<u>משפט:</u> אם הפונקציה גזירה בנקודה אז היא גם רציפה בנקודה זו (לא להפך).

<u>אריתמטיקה של נגזרות, כלל Leibnitz , כלל השרשרת, נגזרת מסדר גבוה:</u>

$$(f\pm g)'=f'\pm g';\quad (fg)'=f'g+fg';\quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$
$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x);\quad [f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$$

<u>נגזרת של פונקציה הפוכה</u>

f היא פונקציה הפוכה של g ו- $g'(y)\neq 0$. אז $y'=f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$.

<u>משפט Fermat:</u>

אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של הפונקציה f ואם f גם גזירה בנקודה זו, אז הנגזרת של f שווה אפס בנק' זו, בתנאי ש- f מוגדרת בקטע פתוח שמכיל את x_0.

<u>משפט Rolle:</u>

אם $f(a)=f(b)$ עבור פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b), אז קיימת נקודה c בתחום (a,b) שבה הנגזרת מתאפסת: $f'(c)=0$.

<u>הוכחת שורש אחד ויחיד לפונקציה:</u>

מוצאים נקודה שבה הפונקציה חיובית, ונקודה שבה הפונקציה שלילית, ואז מוכיחים שהפונקציה מונוטונית יורדת / עולה ממש בקטע מתאים.

<u>משפט Lagrange (משפט הערך הממוצע):</u>

אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), אז קיימת לפחות נקודה אחת c בין a ל- b כך ש- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

<u>הגדרה פונקציה קמורה בקטע J (convex)</u>

אם לכל $x,x_0\in J$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

<u>הגדרה פונקציה קעורה בקטע J (concave)</u>

אם אם לכל $x,x_0\in J$ מתקיים $f(x)\le f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

<u>משפט:</u>

אם $f'(x)>0$ // $f'(x)<0$ בקטע, אז הפונקציה עולה // יורדת ממש בקטע זה.

אם $f''(x)>0$ // $f''(x)<0$ בקטע, אז הפונקציה קמורה // קעורה בקטע זה.

<u>משפט:</u>

אם $f'(a)=0$ ו- $f''(x)>0$ בקטע פתוח סביב a, אז a נק' מינימום מקומי.

אם $f'(a)=0$ ו- $f''(x)<0$ בקטע פתוח סביב a, אז a נק' מקסימום מקומי.

<u>חקירת פונקציה</u> $y=f(x)$ כאשר $x\in D_f$, D_f = תחום ההגדרה.

1. $x=a$ אסימפטוטה אנכית אם <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד צדדיים שווה ל- $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\pm\infty$ ו/או $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$.
2. אסימפטוטות משופעות ב- $\pm\infty$:
$$y=mx+n,\quad m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$$
3. תחום הגדרה של הנגזרת, תחומי עליה // ירידה+ נקודות קיצון .
4. תחום הגדרה של הנגזרת השנייה, תחומי קמירות // קעירות+נק' פיתול.
5. גרף (וחיתוך עם הצירים).

<u>כלל לופיטל L'Hopital</u> במצב לא מוגדר $\dfrac{0}{0},\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

אם $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ אז $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

<u>פולינום Taylor</u> $f(x)\cong T_{n,a}(x),\qquad f(x)=T_{n,a}(x)+R_n(x)$

$$T_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

שארית Lagrange: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, c בין a ל- x.

<u>דוגמאות:</u>

$$\frac{1}{1-x}\cong T_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n,\qquad e^x\cong T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},$$
$$\sin x\cong T_{2n+1}(x)=T_{2n+2}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\cos x\cong T_{2n}(x)=T_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$
$$\ln(1+x)\cong T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k},$$
$$\arctan x\cong T_{2n+1}(x)=T_{2n+2}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$
$$(1+x)^m\cong T_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!}x^k,$$
$$\arcsin x\cong T_{2n+1}(x)=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

אינטגרלים

סכומי Riemann של פונקציה $y=f(x)$, כאשר $x\in[a,b]$. נגדיר

$$\begin{cases} S_n = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n^*)\Delta x_n, \\ \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}); \quad x_{k-1} \le x_k^* \le x_k;\ a = x_0,\ b = x_n \end{cases}$$

אם f אינטגרבילית Riemann ב- $[a,b]$ ואם $\|\Delta\| = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

אז $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

1. כל פונקציה $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ אינטגרבילית לפי Riemann היא פונקציה חסומה.
2. **משפט** אם פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ אז היא אינטגרבילית Riemann ב-$[a,b]$.
3. **משפט** אם פונקציה חסומה ורציפה למקוטעין ב- $[a,b]$ (מס' סופי של נקודות אי רציפות), אז הפונקציה אינטגרבילית.

תכונות אינטגרל מסוים

1. $\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.
2. $\left(f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b] \right) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
3. $m \le f(x) \le M \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x) \le M(b-a)$.
4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.
5. אם f פונקציה זוגית, אז $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

   אם f פונקציה אי-זוגית, אז $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
6. אדיטיביות האינטגרל: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
7. קיימת נקודה c כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

משפט Newton-Leibniz: תהי $y=f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$.

1. אם $S(x) = \int_a^x f(t)dt$, אז $S'(x) = f(x)$, לכל $x\in[a,b]$.

   (כל פונקציה רציפה בעלת פונקציה קדומה).
2. אם F פונקציה קדומה של f, ז"א אם $F'(x) = f(x)$ לכל $x\in[a,b]$,

   אז $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

שימושים של אינטגרלים

1. שטח: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$
2. אורך עקומה: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$
3. נפח סיבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

אינטגרציה בחלקים: $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$

החלפת משתנים: אם $x = x(t)$, אז $\int f(x)dx = \int f\left(x(t)\right)x'(t)dt$

הצבה טריגונומטרית

$$u = \tan\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

חזקה אי-זוגית: $\int \sin^n x\cos^3 x dx = \int \sin^n x(1-\sin^2 x)\cos x dx$

רק חזקות זוגיות: שימוש בנוסחאות זווית כפולה פעמיים כדי להוריד חזקות:

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

פונקציה רציונאלית (פולינום/פולינום) דוגמא:

$$\frac{x^7}{x^2(x-4)(3x+1)(x^2+7)} = $$

$$= (mx+n) + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4} + \frac{D}{3x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+7}$$

השלמת מכנה לריבוע: ... $\int\frac{dx}{x^2+x+3} = \int\frac{dx}{(x+1/2)^2+11/4} = \ldots$

אינטגרל לא אמיתי סוג ראשון:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx\ ,\quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

אינטגרל לא אמיתי סוג שני:

a נקודה שבסביבתה הפונקציה f לא חסומה: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

b נקודה שבסביבתה הפונקקציה f לא חסומה: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

קריטריון ההשוואה: אם $0 \le |f(x)| \le g(x)$ בקטע (a,b) ואם

$\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

דוגמאות:

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $0<p<1$.

נוסחאות שימושיות $|a+b| \le |a|+|b|,\ |a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

לוגריתמים : יהי $0<a\ne1$, $y = f(x) = \log_a x$, $D_f: x>0$

$a^{\log_a x} = x,\ \log_a a^x = x\ ;\ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, 0<b\ne1;\ \ \ln x = \log_e x$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y\ ,\ \log_a x^k = k\log_a x,\ \log_a 1 = 0,$

אם a>1 // 0<a<1 , אז פונקציית הלוגריתם עולה ממש // יורדת ממש.

$$\lim_{x\to0+}\ln x = -\infty,\ \lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty$$