



בחינות

**שם הקורס: מבוא להסתברות**  
**קוד הקורס: 90911**

**הוראות לנבחן:**

- חומר עזר שימושי לבחינה
- 4 דפי נוסחאות,
- מחשבון אישי

**בחינת סמסטר: א'**

**השנה: תשע"ו / 2016**

**מועד** *א'*

**תאריך הבחינה:** 26.01.2016

**שעת הבחינה:** 17:00

**משך הבחינה:** 3 שעות

- אין לכתוב בעפרון או בצבע אדום
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי
- ו/או מכשיר מדיה אחר

**השאלון לא ייבדק בתום הבחינה ע"י המרצה**

**מרצים:** ד"ר חנה קלבנר, ד"ר מאיר אזור

**מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:**

- יש לפתור את כל השאלות.
- יש להתחיל פתרון כל שאלה בדף חדש!
- יש להסביר, לנמק, ולפרט, את כל הפתרונות בכל אחת מהשאלות!
- יש לדייק בחישובים!
- חישובי הסתברויות יש לבצע בדיוק של ארבע ספרות,
- ואת יתר החישובים בדיוק של שלוש ספרות משמעותיות.
- לכל הסעיפים משקל שווה.

## בהצלחה!

**שאלה מס' 1:**

מספר הנרשמים לקורס ביום מתפלג פואסונית. ידוע שההסתברות ל-0 נרשמים ביום היא 0.0183.

- א. מהו ממוצע מספר הנרשמים ביום? (לצורך ההמשך יש להניח כי המספר הוא 4).
- ב. אם ידוע שביום מסוים נרשמו לפחות 3 סטודנטים, מה ההסתברות שבאותו היום נרשמו בדיוק 5 סטודנטים?
- ג. מה ההסתברות שבמשך 30 ימים יירשמו לפחות 100 סטודנטים?



## שאלה מס' 2:

נתונה טבלת ההתפלגות המשותפת של שני משתנים בלתי תלויים  $Y, X$ :

$X / Y$	0	1	2	$P_X(x)$
-1	0.12			0.6
0			0.108	
1	0.008	0.02		
$P_Y(y)$		0.5		

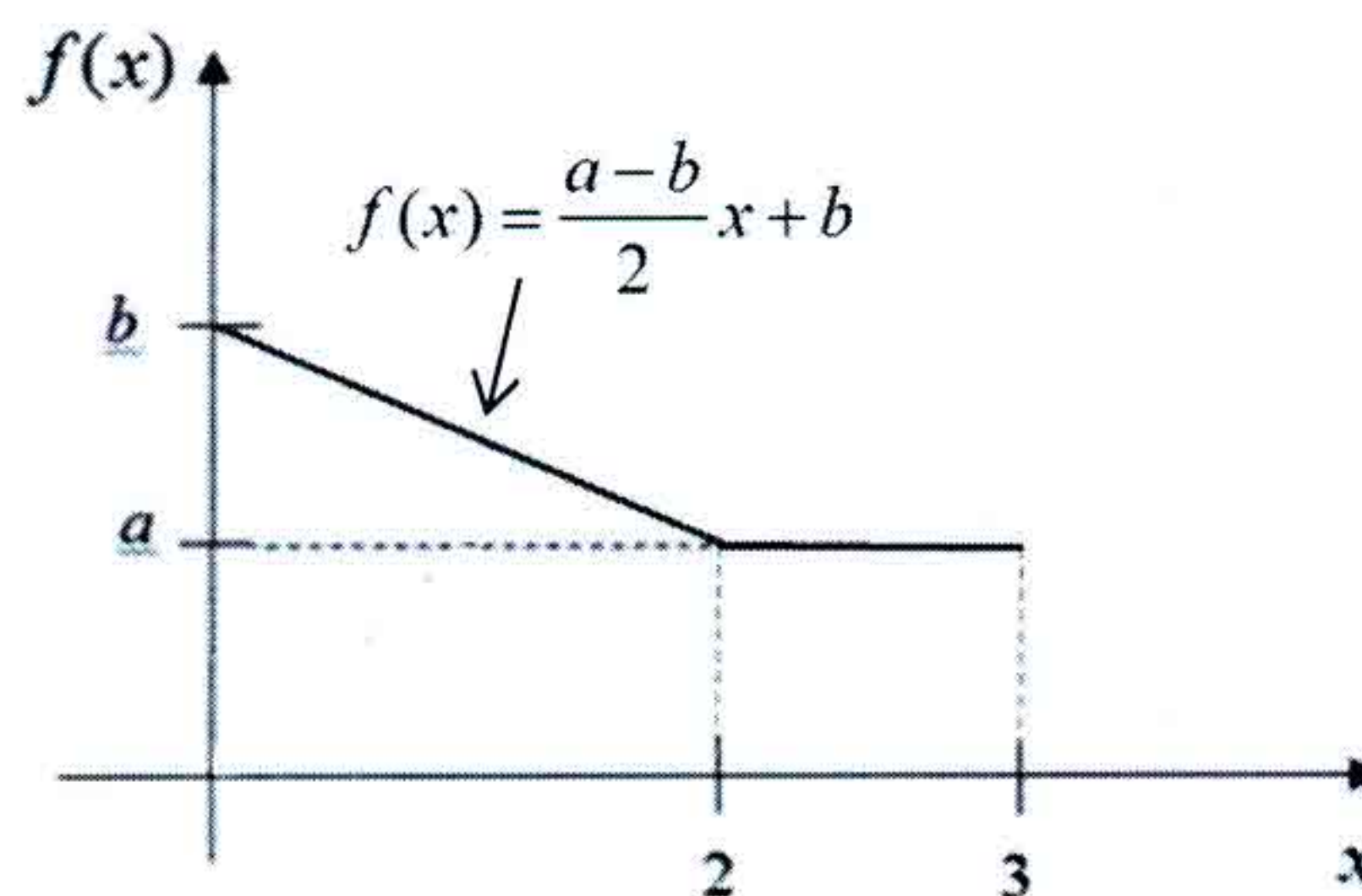
א. השלם את הטבלה (יש להעתיק אותה למחברת הבחינה).

ב. מהי התוחלת של  $X$  אם ידוע כי:  $Y = 1$ ?

ג. מהי תוחלת המשתנה:  $2X - Y$ ?

## שאלה מס' 3:

בתרשים מתוארת פונקציית הצפיפות  $f(x)$  של מ"מ רציף  $X$ :



כמו כן נתון כי:  $P(X < 2) = 4P(X \geq 2)$ .

א. מצאו את ערכי הקבועים  $a$  ו  $b$ .

ב. רשמו את פונקציית הצפיפות  $f(x)$  (לכל  $x$ ).

ג. מהי התוחלת של  $X$ ?

ד. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת  $F(x)$ .

ה. מצאו את ההסתברות:  $P(X > 1 / X < 2.5)$ .

## שאלה מס' 4:

מעבורת שמעבירה מכולות, יכולה לשאת בסך הכל עד 980 טון שהוא המשקל המותר. משקל מכולה מתפלג נורמלית עם תוחלת 2 טון וסטיית תקן 0.3 טון. בכל יום מגיעים למעבורת 480 מכולות.

א. מה ההסתברות שביום נתון משקל המכולות יעמד במשקל המותר?

ב. במשך השנה המעבורת מבצעת 250 העברות. מה ההסתברות שיהיו לכל היותר 30 ימים בהם

המשקל הכולל של המכולות יעבור את המשקל המותר?



פתרון



פתרון מלא  
26.01.2016

פתרון בחינה מס' 1 - מבוא להסתברות סמסטר א' 2016

90911

שאלה 1

- מספר הנרשמים לקורס ביום מתפלג פואסוני. ידוע שההסתברות ל-0 נרשמים ביום היא 0.0183.
- מהו ממוצע מספר הנרשמים ביום? (לצורך ההמשך השתמשו במספר 4).
  - אם ידוע שביום מסוים נרשמו לפחות 3 סטודנטים, מה ההסתברות שבאותו היום נרשמו בדיוק 5 סטודנטים.
  - מה ההסתברות שבמשך 30 ימים יירשמו לפחות 100 סטודנטים?

פתרון

- א.  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  מספר הנרשמים ביום
- $$P(X=0) = e^{-\lambda} = 0.0183 \Rightarrow -\lambda = \ln 0.0183 \Rightarrow \lambda = 4$$
- ב.  $P(X=5 / X \geq 3) = \frac{P(X=5)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X=5)}{1 - P(X \leq 2)}$
- $$1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-4} \left( 1 + 4 + \frac{4^2}{2!} \right) = 0.7619$$
- $$P(X=5) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = 0.1563$$
- $$P(X=5 / X \geq 3) = \frac{0.1563}{0.7619} = 0.2051$$
- ג.  $\sum_{i=1}^{30} X_i \sim N(120, 480)$  כאשר  $X_i$  מספר הנרשמים ביום  $i$ .
- $$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 100\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100-120}{\sqrt{480}}\right) = 1 - \Phi(-0.91) = \Phi(0.91) =$$

שאלה 2

נתונה טבלת התפלגות משותפת של משתנים בלתי תלויים  $Y, X$ :

X \ Y	0	1	2	$P_X(x)$
-1	0.12			0.6
0			0.108	
1	0.008	0.02		
$P_Y(y)$		0.5		

- השלימו את הטבלה (יש להעתיק אותה למחברת הבחינה).
- מהי התוחלת של  $X$  אם ידוע כי:  $Y = 1$ .
- מהי תוחלת המשתנה:  $2X - Y$ .

פתרון

א.

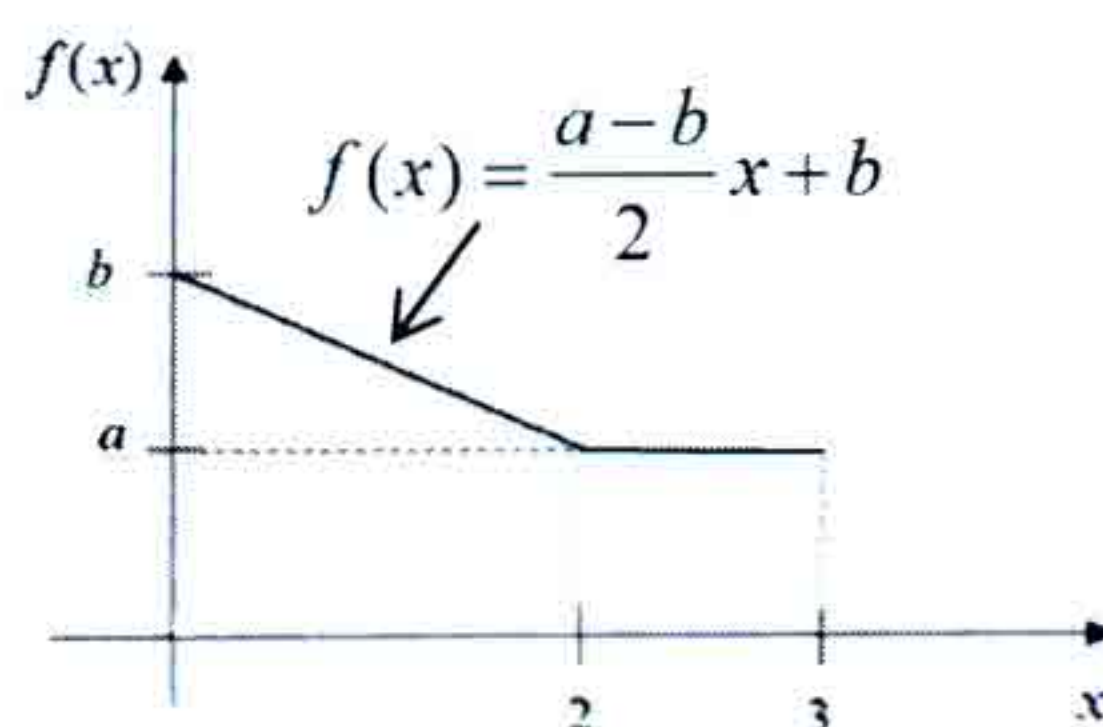
X \ Y	0	1	2	$P_X(x)$
-1	0.12	0.3	0.18	0.6
0	0.072	0.18	0.108	0.36
1	0.008	0.02	0.012	0.04
$P_Y(y)$	0.2	0.5	0.3	

- ב.  $E(X / Y=1) = E(X) = -0.6 + 0.04 = -0.56$   $Y, X$  בלתי תלויים ולכן:
- ג.  $E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = 2 \times (-0.56) - (0.5 + 2 \times 0.3) = -2.22$



### שאלה 3

נתונה פונקציית הצפיפות  $f(x)$  של מ"מ רציף  $X$ :



נתון:  $P(X < 2) = 4P(X \geq 2)$

- חשבו את הערכים של  $b, a$ .
- רשמו במדויק את פונקציית הצפיפות  $f(x)$  לכל  $x$ .
- חשבו את התוחלת של  $X$ .
- חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת  $F(x)$ .
- חשבו את ההסתברות:  $P(X > 1 / X < 2.5)$ .

פתרון

$$P(X \leq 2) = 2a + (b - a) \Rightarrow a + b = 4a \Rightarrow b = 3a$$

$$P(X \geq 2) = a$$

$$a + b + a = 1 \Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = 0.2, b = 0.6$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -0.2x + 0.6, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0.2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^2 x(-0.2x + 0.6) dx + \int_2^3 0.2x dx = \left( -0.2 \frac{x^3}{3} + 0.3x^2 \right) \Big|_0^2 + 0.1x^2 \Big|_2^3 = 1.167$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -0.1x^2 + 0.6x, & 0 \leq x < 2 \\ 0.4 + 0.2x, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \leq 3 \end{cases}$$

$$P(X > 1 / X < 2.5) = \frac{P(1 < X < 2.5)}{P(X < 2.5)} = \frac{F(2.5) - F(1)}{F(2.5)} = \frac{0.9 - 0.5}{0.9} = 0.4444$$

### שאלה 4

- מעבורת שמעבירה מכולות, יכולה לשאת עד 980 טון שהוא המשקל המותר. משקל מכולה מתפלג נורמלית עם תוחלת 2 טון וסטיית תקן 0.3 טון. בכל יום מגיעים למעבורת 480 מכולות.
- מה ההסתברות שביום נתון משקל המכולות יעמד במשקל המותר?
  - במשך השנה המעבורת מבצעת 250 העברות. מה ההסתברות שיהיו לכל היותר 30 ימים בהם המשקל הכולל של המכולות יעבור את המשקל המותר?

פתרון  $X \sim N(2, 0.3^2)$  משקל מכולה

$$P\left(\sum_{i=1}^{480} X_i \leq 980\right) = \Phi\left(\frac{980 - 960}{\sqrt{43.2}}\right) = \Phi(3.04) = 0.9988 \quad \sum_{i=1}^{480} X_i \sim N(960, 43.2)$$

$$Y \sim B(250, 0.0012) = \text{מספר הימים בשנה בהן משקל המכולות עובר את המשקל המותר.}$$

$$P(Y \leq 30) = ? \quad \text{קרוב נורמלי לבינומי: } Y \sim N(0.3, 0.3)$$

$$P(Y \leq 30) = \Phi\left(\frac{30 + 0.5 - 0.3}{\sqrt{0.3}}\right) = \Phi(55.12) = 1$$