חדו"א 1 –דף תרגילים מספר 7

משפט רול, משפט לגרנג', כלל לופיטל

משפט רול

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x)=x^{2/3}-2x^{1/3}$. בדוק האם הפונקציה מקיימת תנאיי משפט רול בקטע $[0,8]$?
ואם כן מצא את כל הערכים של c המקיימים את מסקנת המשפט.

תרגיל 2

נתונה פונקציה: $f(x)=\sqrt[5]{x^4}-2$. בדוק האם קיימת נקודה $-1<c<1$ כך ש- $f'(c)=0$.
האם יש פה סתירה למשפט רול? נמק!

תרגיל 3

הוכח בעזרת משפט רול שלמשוואה: $8x^7+5x-12=0$ יש רק פתרון אחד.

תרגיל 4

הראה כי למשוואה $6x^5-4x+1=0$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,1]$.
(רמז: למצוא פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(x)=6x^5-4x+1$ ולהשתמש במשפט רול.)

תרגיל 5

נתונים מספרים: a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 המקיימים $\frac{a_4}{5}+\frac{a_3}{4}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_1}{2}+a_0=0$.
הוכח שלמשוואה: $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,1]$.
(רמז: למצוא פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ולהשתמש במשפט רול.)

תרגיל 6 (תשע"ה, סמסטר ב', מועד ב')

הוכיחו כי למשוואה $e^x-\sqrt{2}\cdot x=5$ שי שני פתרונות בדיוק.

משפט לגרנז'

תרגיל 7

הוכח את הטענות הבאות בעזרת משפט לגרנג'.

א. $\frac{b-a}{2\sqrt{b}}\le\sqrt{b}-\sqrt{a}\le\frac{b-a}{2\sqrt{a}}$ לכל $0<a<b$.

ב. $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ לכל $x,y\in R$.

ג. $e^{b^3}-5b+5a<4(b-a)+e^{a^3}$ לכל $0<a<b\le1$ (תשע"ה, סמסטר ב', מועד א'.)

<u>תרגיל 8</u> (תשע"ה, סמסטר ב', מועד ב')

הוכיחו כי $\frac{1}{9} \le 2\ln 3 - 3\ln 2 \le \frac{1}{8}$

(הדרכה: הגדירו פונקציה $f(x) = \ln x$ והשתמשו בתכונות שלה).

<u>תרגיל 9 (תשע"ב, סמסטר ב', מועד ב')</u>

הוכח ע"י משפט לגראנז' או ע"י שיטה אחרת כי לכל $x > 0$ מתקיים $\frac{x}{x^2+1} < \arctan x < x$

<u>תרגיל 10 (תשע"ב, סמסטר א', מועד ב')</u>

הוכיחו כי לכל $1 \le a < b$ מתקיים: $e^{b^2} + b - e^{a^2} - a > 3(b-a)$.

<u>כלל לופיטל.</u>

<u>תרגיל 11</u>

חשב את הגבולות הבאים באמצעות כלל לופיטל או בדרך אחרת.
(בכל אחד מהסעיפים זכרו להצדיק את השימוש בכלל לופיטל)

א. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\ln(x+1) - \sin x}$

ב. $\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x + e^x}$

ג. $\lim_{x\to 0^+} x\ln(e^x - 1)$

ד. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

ה. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

ו. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

ז. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$

ח. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

ט. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$

י. $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \cos x}$

<u>תרגיל 12</u>

הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים:

א. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^n x}{x} = 0$ **ב.** $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)^n}{x^{2n}} = 2^n$ **ג.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^2}} = 0$