פתרון מבחן באלגברה ליניארית תשפ"ג סמסטר א שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & & & + & (b+2)\,z & = & b-1 \\ -2x & + & y & - & (4+3b)\,z & = & 9-b \\ b\,x & + & 2b\,y & + & 5bz & = & 4b^2+20b \end{cases}$$

(i) (9 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי b עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ii) (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר b (אם קיימים) וקטור העמודה $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) תהי A מטריצה ריבועית, ותהי B המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה הראשונה והשלישית. קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) אם למערכת הלא הומוגנית $Ax=b$ $(b\neq 0)$ יש פתרון אז גם למערכת $Bx=b$ יש פתרון.

(ii) למערכת $(A+B)\,x=0$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון

א. (i) נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & b+2 \\ -2 & 1 & -4-3b \\ b & 2b & 5b \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2+2R_1 \\ R_3\to \frac{1}{b}R_3}}{=} b\begin{vmatrix} 1 & 0 & b+2 \\ 0 & 1 & -b \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3-R_1}{=} b\begin{vmatrix} 1 & 0 & b+2 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 2 & 3-b \end{vmatrix} = b(3+b)$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שווה ל-$b(3+b)$. המטריצה הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן המטריצה הפיכה אם"ם $b\neq 0,-3$. ידוע כי למערכת עם מטריצה מצומצמת ריבועית יש פתרון יחיד אם"ם המטריצה הפיכה, כלומר למעררכת יש פתרון יחיד אם"ם $b\neq 0,-3$.נבדוק עבור שאר הערכים:

עבור $b=-3$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 & 12 \\ -3 & -6 & -15 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1\ R_3\to R_3+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -18 & -36 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת גדולה מדרגת המטריצה המצומצמת (ישנה שורת סתירה) ולכן למערכת אין פתרון.

עבור $b=0$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת והיא שווה ל-2 (כי במטריצה המדורגת יש רק שתי שורות שונות מאפס), כלומר הדרגה קטנה ממספר המשתנים 3, ולכן למערכת הזו יש אינסוף פתרונות.

נסכם:

עבור $b\neq 0,-3$ למערכת יש פתרון יחיד

עבור $b=-3$ למערכת אין פתרונות.

עבור $b=0$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ii) נציב את הערכים המתאימים $x=2, y=5, z=1$ במערכת ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} 2 & & & + & b+2 & = & b-1 \\ -4 & + & 5 & - & (4+3b) & = & 9-b \\ 2b & + & 10b & + & 5b & = & 4b^2+20b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 & = & -1 \\ -2b & = & 12 \\ 3b+4b^2 & = & 0 \end{cases}$$

ומהשורה הראשונה נקבל כי אין ערכים שעבורם מתקיים שוויון, כלומר אין ערך של b עבורו העמודה היא פתרון למערכת.

ב. (i) **לא נכון**. עבור $b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ למערכת $Ax=b$ יש פתרון, אבל למערכת $Bx=b$ אין פתרון.

(ii) **נכון**. למטריצה $A+B$ יש שתי שורות זהות, ולכן למערכת ההומוגנית יש אינסוף פתרונות.

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (14 נקודות) נסמן $U=M_{2\times2}(\mathbb{R})$, ויהיו

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של U, ו-C הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. תהי $T:U\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\-1&1&0&1\\3&-4&-1&-2\end{pmatrix}$$

(i) מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

(ii) מצאו, אם קיימים, $A_1,A_2\in U$ כך ש- $T(A_1)=T(A_2)$.

ב. (6 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 5, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T\circ T(v)=T(T(v))=0$ לכל $v\in V$. קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא (אין צורך להוכיח או להפריך)

(i) מתקיים כי $\mathrm{Im}T\subset\mathrm{Ker}T$.

(ii) מימד התמונה $\dim\mathrm{Im}T\le 2$.

פתרון

א. (i) כדי למצוא בסיס ומימד לגרעין נדרג תחילה את המטריצה המייצגת:

$$\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\-1&1&0&1\\3&-4&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0\\0&-1&-1&1\\0&2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&-1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מהדירוג נקבל כי בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה הוא

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

אילו הם וקטורי קואורדינטות של בסיס לגרעין לפי הבסיס B ולכן בסיס לגרעין הוא

$$\left\{2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&1\end{pmatrix},-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

(ii) כל מטריצה בגרעין מקיימת $T(A)=0$ ולכן עבור

$$A_1=\begin{pmatrix}4&2\\1&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

מתקיים $T(A_1)=T(A_2)$

ב. (i) **הטענה נכונה**: כל איבר בתמונה הוא מהצורה $u=T(v)$, ועבורו מתקיים (מהנתון) כי $T(u)=T(T(v))=0$ כלומר u בגרעין.

(ii) **הטענה נכונה**: ממשפט המימד נובע כי $\dim\mathrm{Ker}T+\dim\mathrm{Im}T=\dim V=5$. מהטענה הקודמת נובע כי $\dim\mathrm{Im}T\le\dim\mathrm{Ker}T$. ולכן אם $\dim\mathrm{Im}T>2$ נקבל כי $\dim\mathrm{Ker}T+\dim\mathrm{Im}T\ge 3+3=6>5$ בסתירה לנתון.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) נסמן

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3:\left\{\begin{array}{ccccc}3x&+&y&&=0\\x&&&+\ z&=0\end{array}\right.\right\},\quad V=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

(i) מצאו בסיסים ומימדים ל W,V.

(ii) קבעו (בצורה מנומקת) אם $W\subset V, V\subset W$ או שהם לא מוכלים אחד בשני.

ב. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי $\dim V = n$, ויהיו U, W תתי מרחבים כך ש $U \cap W = \{0\}$. כמו כן תהיינה B, C שתי קבוצות בת"ל כך ש-

$$B = \{w_1, \ldots, w_l\} \subset W, C = \{u_1, \ldots, u_r\} \subset U.$$

כלומר B מוכלת ב-W ומספר איבריה l, ו-C מוכלת ב-U ומספר איבריה r. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

(i) מתקיים כי $B \cap C = \emptyset$, כלומר החיתוך של B, C ריק.

(ii) מספר האיברים באיחוד הקבוצות B, C שווה למימד של V, כלומר $r + l = n$.

פתרון

א. (i) עבור בסיס של V, הקבוצה הנתונה היא קבוצה פורסת, והיא בת"ל כי הוקטורים לא פרופורציונליים, ולכן בסיס של V ומימדו הוא 2.
עבור בסיס של W, נפתור את מערכת המשוואות שמגדירה את W ע"י דירוג של המטריצה המתאימה למערכת:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

ולכן בסיס ל-W הוא $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ והמימד של W הוא 1.

(ii) V לא מוכל ב-W כי המימד שלו גדול מהמימד של W. $W \subset V$ אם ורק אם הבסיס של W הוא שייך ל-V כלומר הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס הנתון של V. ידוע כי עמודה כלשהי b היא צירוף לינארי של עמודות מטריצה A אם"ם למערכת $Ax = b$ יש פתרון. נבדוק אם כן אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון, כאשר A היא המטריצה שעמודותיה הן העמודות בבסיס הנתון של V, והעמודה b היא הבסיס הנתון של W ע"י דירוג המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & -6 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי למערכת יש פתרון כי דרגת המטריצה המצומצמת שווה לדרגת המורחבת, כלומר $W \subset V$.

ב. (i) **הטענה נכונה**: אם וקטור כלשהו נמצא ב $B \cap C$, אז הוא נמצא ב$U \cap W$. אבל בחיתוך יש רק את וקטור האפס, והוא לא יכול להימצא בקבוצה בת"ל.

(ii) **הטענה לא נכונה**: דוגמה נגדית היא למשל $V = \mathbb{R}^3, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, W = \text{Span}(B), C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, U = \text{Span}(C)$. עבור דוגמה זו מתקיים כי מספר האיברים באיחוד הוא 2, אבל המימד של V הוא 3.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. הוכיחו שהמטריצה לכסינה, ומצאו שתי מטריצות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש- $D = P^{-1}AP$.

ב. (5 נקודות) מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו הוקטור $\begin{pmatrix} 3a+1 \\ 1-2a \\ -1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -3 \\ 4 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ג. (5 נקודות) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות. הוכיחו שאם $\lambda = 0$ הוא ע"ע של AB אז הוא ע"ע של BA

פתרון

א. כדי להראות שהמטריצה לכסינה נמצא תחילה את הערכים העצמיים ע"י חישוב הפולינום האפייני:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 0 & 3 \\ 9 & \lambda + 2 & 3 \\ -18 & 0 & \lambda + 8 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)\left((\lambda - 7)(\lambda + 8) + 54\right) = (\lambda + 2)^2 (\lambda - 1)$$

נמצא כעת בסיסים שמורכבים מוקטורים עצמיים עבור כל ערך עצמי:

(i) עבור $\lambda = -2$: נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה $A+2I$:

$$A+2I = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -9 & 0 & 3 \\ 18 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאנו כי דרגת המטריצה היא 1, ובסיס למרחב הפתרונות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(ii) עבור $\lambda = 1$: נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה $A-I$:

$$A-I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -9 & -3 & 3 \\ 18 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 + \frac{3}{2}R_1} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -\frac{2}{3}R_3]{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאנו כי דרגת המטריצה היא 2, ובסיס למרחב הפתרונות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ מהווה בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מוקטורים עצמיים של A, ולכן המטריצה לכסינה. מטריצות P, D מתאימות הן

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. כדי לבדוק מתי העמודה הזו היא וקטור עצמי נכפול אותה במטריצה ונבדוק מתי היא כפולה של עצמה :

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & -3 \\ 4 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 1-2a \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a-9 \\ 11-6a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 1-2a \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a & -9 & = \lambda(3a+1) \\ -6a & +11 & = \lambda(1-2a) \\ & -1 & = \lambda \end{cases}$$

מהמשוואה השלישית נקבל כי $\lambda = -1$ ואז מהמשוואה הראשונה נקבל כי $a = \frac{8}{12}$ ומהמשוואה השנייה נקבל כי $a = \frac{12}{8}$ כלומר **לא קיים** ערך של a עבורו העמודה היא ערך עצמי.

ג. ידוע כי $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של מטריצה אם ורק אם המטריצה לא הפיכה. ולכן $\lambda = 0$ הוא ע"ע של AB אם ורק אם $|AB| = 0 = |A||B| = |B||A| = |BA|$ ולכן הוא ע"ע של AB אם ורק אם הוא ע"ע של BA.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) תהי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר $n \times n$

(i) הוכיחו כי אם n אי זוגי, אז A לא הפיכה.

(ii) הוכיחו כי אם A מקיימת $A^4 + 2A^2 + I = 0$ אז n זוגי.

ב. (6 נקודות) הוכיחו כי לא קיימות מטריצות ממשיות A, B מסדר 5×5 כך ש-B הפיכה ומתקיים השוויון

$$2B^TABA^T + 3B^2 = 0$$

פתרון

א. (i) נניח כי A מטריצה ממשית אנטיסינטרית, כלומר $A^T = -A$, ומכיוון ש-n אי-זוגי אז $(-1)^n = -1$ ולכן

$$|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n|A| \Rightarrow |A| = -|A| \Leftrightarrow 2|A| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$$

כלומר $|A| = 0$ כלומר המטריצה לא הפיכה.

(ii) נניח כי $A^4 + 2A^2 + I = 0$, כלומר $(A^3+2A)A = A(-A^3-2A) = I \Leftrightarrow (A^3+2A)A = A(A^3+2A) = -I$. מכאן ש-$A$ הפיכה, ולכן לא ייתכן ש-n אי זוגי (לפי הסעיף הקודם) כלומר n זוגי.

ב. נניח בשלילה כי קיימות A, B שמקיימות

$$2B^TABA^T+3B^2=0 \Leftrightarrow 2B^TABA^T=-3B^2 \Rightarrow |2B^TABA^T|=|-3B^2| \Rightarrow 2^5|B^T||A||B||A^T|=(-3)^5|B|^2$$

מכך שדטרמיננטה של מטריצה משוחלפת שווה לדטרמיננטה של המטריצה עצמה, נקבל שאם B הפיכה, מתקיים

$$2^5\cancel{|B^T|}|A|\cancel{|B|}|A^T|=(-3)^5\cancel{|B|^2} \Rightarrow |A|^2=-\frac{3^5}{2^5}<0$$

בסתירה לכך ש$|A|$ ממשי כי A ממשית.

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. נתון כי

$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$$

היא מכפלה פנימית על $V=\mathbb{R}^3$. מצאו $v \in V$ שמקיים את שני התנאים הבאים:

(i) הוקטור v אורתוגונלי לוקטורים $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

(ii) הנורמה של v שווה 1.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד $\dim V=2$, ויהיו $0 \neq u, v \in V$ שני וקטורים לא פרופורציונליים (אינם כפולה אחד של השני) המקיימים $\langle u,v\rangle = 6$, $\langle u,u\rangle = 3$.

(i) הראו כי $\{v-2u, u\}$ בסיס אורתוגונלי של V.

(ii) חשבו את הנורמה של v, כלומר $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ אם נתון בנוסף שהקבוצה $\{u-2v, v\}$ היא גם בסיס אורתוגונלי של V

פתרון

א. נמצא תחילה את כל הוקטורים שהם אורתוגונליים לשני הוקטורים הנתונים.

$$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \langle \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \rangle = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & & & - & 2z & = & 0\\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

כלומר זהו מרחב הפתרונות של המטריצה $\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\3 & 0 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & -3 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{3}\\0 & 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\}.$$

נחשב את הנורמה של האיבר בבסיס:

$$\left\| \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\|^2 = \langle \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 80 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{80}$$

ולכן וקטור עם נורמה 1 שאורתוגונלי לשני הוקטורים הנתונים הוא $\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{80}}\\\frac{1}{\sqrt{80}}\\\frac{3}{\sqrt{80}}\end{pmatrix}$.

ב. (i) מהנתון נובע כי גם u וגם $u-v$ שונים מאפס. ולכן הקבוצה אורתוגונלית אם המכפלה הפנימית שווה לאפס:

$$\langle u, v-2u\rangle = \langle u,v\rangle - 2\langle u,u\rangle = 0$$

הקבוצה אורתוגונלית, ולכן בת"ל ולכן בסיס אורתוגונלי (כי המימד של V הוא 2).

(ii) אם נתון שהקבוצה אורתוגונלית, אז

$$0 = \langle u-2v, v\rangle = \langle u,v\rangle - 2\langle v,v\rangle = 6 - 2\|v\|^2 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

בהצלחה

מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה
$$\begin{cases} x & & + & (b+2)z & = & b-1 \\ -2x & + & y & - & (4+3b)z & = & 9-b \\ bx & + & 2by & + & 5bz & = & 4b^2+20b \end{cases}$$

(i) (9 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי b עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ii) (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר b (אם קיימים) וקטור העמודה $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) תהי A מטריצה ריבועית, ותהי B המטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה הראשונה והשלישית. הבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) אם למערכת הלא הומוגנית $Ax = b$ ($b \neq 0$) יש פתרון אז גם למערכת $Bx = b$ יש פתרון.

(ii) למערכת $(A+B)x = 0$ יש אינסוף פתרונות.

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (14 נקודות) נסמן $U = M_{2\times2}(\mathbb{R})$, ויהיו $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של U, ו-C הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. תהי $T : U \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(i) מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

(ii) מצאו, אם קיימים, $A_1, A_2 \in U$ כך ש- $T(A_1) = T(A_2)$.

ב. (6 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 5, ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $T \circ T(v) = T(T(v)) = 0$ לכל $v \in V$. קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא (אין צורך להוכיח או להפריך)

(i) מתקיים כי $\mathrm{Im}T \subseteq \mathrm{Ker}T$.

(ii) מימד התמונה $\dim \mathrm{Im}T \leq 2$.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) נסמן
$$V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{cases} \right\}$$

(i) מצאו בסיסים ומימדים ל W, V.

(ii) קבעו (בצורה מנומקת) אם $W \subset V, V \subset W$ או שהם לא מוכלים אחד בשני.

ב. (8 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד $\dim V = n$, U, W תתי מרחבים כך ש $U \cap W = \{0\}$. תהיינה $B = \{w_1, \ldots, w_l\} \subset W, C = \{u_1, \ldots, u_r\} \subset U$
כלומר B מוכלת ב-W ומספר איבריה l, ו-C מוכלת ב-U ומספר איבריה r.
נתון כי B, C בת"ל. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

(i) מתקיים כי $B \cap C = \emptyset$, כלומר החיתוך של B, C ריק.

(ii) מספר האיברים באיחוד הקבוצות B, C שווה למימד של V, כלומר $r + l = n$.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. (10 נקודות) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}7&0&-3\\-9&-2&3\\18&0&-8\end{pmatrix}$. הוכיחו שהמטריצה לכסינה, ומצאו שתי מטריצות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש-$D=P^{-1}AP$.

ב. (5 נקודות) מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו הוקטור $\begin{pmatrix}3a+1\\1-2a\\-1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה $\begin{pmatrix}-3&-9&-3\\4&9&2\\2&3&4\end{pmatrix}$

ג. (5 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות. הוכיחו שאם $\lambda=0$ הוא ע"ע של AB אז הוא ע"ע של BA

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) תהי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר $n\times n$

(i) הוכיחו כי אם n אי זוגי, אז A לא הפיכה.

(ii) הוכיחו כי אם A מקיימת $A^4+2A^2+I=0$ אז n זוגי.

ב. (6 נקודות) הוכיחו כי לא קיימות מטריצות ממשיות A,B מסדר 5×5 כך ש-B הפיכה ומתקיים השוויון $2B^TABA^T+3B^2=0$

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (12 נקודות) נתון כי $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right\rangle=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&1&1\\1&1&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^3$.
מצאו $v\in\mathbb{R}^3$ שמקיים את שני התנאים הבאים:

(i) הוקטור v אורתוגונלי לוקטורים $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

(ii) הנורמה של v שווה 1.

ב. (8 נקודות)יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד $\dim V=2$, ויהיו $0\neq u,v\in V$ שני וקטורים לא פרופורציונליים (אינם כפולה אחד של השני) המקיימים $\langle u,v\rangle=6$, $\langle u,u\rangle=3$.

(i) הראו כי $\{v-2u,u\}$ בסיס אורתוגונלי של V.

(ii) חשבו את הנורמה של v, כלומר $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ אם נתון בנוסף שהקבוצה $\{u-2v,v\}$ היא גם בסיס אורתוגונלי של V

בהצלחה