

תרגיל בית 8 – יחסי שקילות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. נגדיר יחס T מעל הממשיים \mathbb{R} באופן הבא

$$xTy \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

(א) תנו דוגמא לשני איברים שאינם ביחס ולשני איברים הנמצאים ביחס.

(ב) בידקו כי היחס T הוא יחס שקילות.

(ג) מיצאו את מחלקות השקילות $[0]_T, [1.6]_T$

(ד) האם נכון כי $[0]_T \cap [1.6]_T = \emptyset$?

(ה) הראו כי הקטע הממשי $[0, 1)$ מהווה מערכת של נציגים עבור T .

(ו) האם קבוצת המנה שווה ל- $\{[x]_T \mid 2 \leq x < 3\}$?

2. תהא $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ונגדיר יחס שקילות S באופן הבא

$$(a_1, b_1)S(a_2, b_2) \iff a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$$

שימו לב כי הזוגות שביחס S הן נקודות במישור.

(א) תנו דוגמא לשני איברים שאינם ביחס ולשני איברים הנמצאים ביחס.

(ב) ציירו את מחלקות השקילות הבאות $[(1, 0)]_S, [(1, 1)]_S, [(3, 4)]_S$.

(ג) כיתבו במפורש את האיברים הנמצאים במחלקת השקילות $[(1, 0)]_S$.

(ד) מצאו מערכת של נציגים עבור S .

3. נגדיר יחס R מעל הטבעיים \mathbb{N} באופן הבא

$$(n, m) \in R \iff (4 \mid |n - m| \vee 2 \nmid nm)$$

כלומר, הזוג $(n, m) \in R$ אם ההפרש (בערך מוחלט) מתחלק במספר 4 ללא שארית או המספר nm אינו מתחלק ב-2 ללא שארית.

(א) תנו דוגמא לשני איברים שאינם ביחס ולשני איברים הנמצאים ביחס.

(ב) הראו כי R הוא יחס שקילות.

(ג) מצאו את מחלקות השקילות הבאות: $[4]_R, [1]_R, [2]_R$

(ד) כמה איברים יש בקבוצת המנה? כיתבו אותם.

4. תהא A קבוצה לא ריקה כלשהיא. יהא R יחס על A שהוא סימטרי וטרנזיטיבי. נניח כי בנוסף מתקיים הפסוק הבא

$$\forall a \in A \exists b \in A. (a, b) \in R$$

הוכיחו כי R הוא יחס שקילות על A .

5. תהא A קבוצה סופית לא ריקה. נגדיר יחס S על קבוצת החזקה $P(A)$ באופן הבא:

$$(X, Y) \in S \iff |X| = |Y|$$

ודאו כי S הוא יחס שקילות. כמה איברים יש בקבוצת המנה?

6. תהא $A = \mathbb{R}$. לכל $i \in \mathbb{Z}$ נגדיר את הקבוצה A_i באופן הבא

$$A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid i \leq x < i + 1\}$$

- (א) הראו כי אוסף הקבוצות $\{A_i\}$ מהווה חלוקה של A .
(ב) מיצאו יחס שקילות S על A כך שהקבוצות $\{A_i\}$ הן בדיוק מחלקות השקילות של S .
(ג) הסבירו את המשפט הבא: תהא A קבוצה סופית בת n איברים. אז מספר יחסי השקילות השונים על A שווה למספר הדרכים לחלק n איברים לקבוצות זרות ולא ריקות.