מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - שאלון X

שאלה 1 **(20 נקודות)**

נתון הטור $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{6^n n}x^n=\frac{1}{6}x-\frac{1}{72}x^2+\frac{1}{648}x^3-....$.

א. (10 נק') מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור. האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ? נמקו !

ב. (10 נק') מצאו את סכום הטור $S(x)$ עבור כל x ששיך לתחום ההתכנסות.

מצאו טור Leibniz שמתכנס לאינטגרל $I=\int_0^1 S(x)dx$. נמקו !

שאלה 2 **(20 נקודות)** **אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') מרחק נקודה $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ מנקודה (a,b,c) נתון על ידי הפונקציה:

$$d=d(x,y,z)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\ .$$

מצאו נקודה על הספירה $S:x^2+y^2+z^2-2z-8=0$ הקרובה ביותר לנקודה $(6,6,4)$. נמקו!

רמז: נקי' הקיצון של הפונקציה $d=d(x,y,z)$ מתלכדות עם נקי' הקיצון של $d^2=d^2(x,y,z)$.

ב. (10 נק') נגדיר פונקציה $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ על ידי:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3y^9+y^4x^2+x^5}{y^8+x^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\ .$$

האם קיים הגבול $L=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? האם f פונקציה רציפה בנקודה $\mathbf{0}=(0,0)$? נמקו !

שאלה 3 **(20 נקודות)**

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$. עבור $\theta\in[0,2\pi]$ נסמן $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ וקטור יחידה בזווית θ. נגדיר את הפונקציה הבאה: $g(\theta)=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{u}}(0,0)$, כלומר $g(\theta)$ היא הנגזרת הכיוונית של $f(x,y)$ בנקודה $O=(0,0)$ בכיוון $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\theta)$. נתון כי עבור שלושה ערכים $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in[0,2\pi]$ מתקיים $g(\theta_1)=1, g(\theta_2)=0, g(\theta_3)=-2$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. נמקו היטב את תשובתכם!

א. הוקטור $\mathbf{u}(\theta_2)$ הוא בכיוון הגרדיאנט $\nabla f(0,0)$.

ב. הוקטור $\mathbf{u}(\theta_2)$ מאונך לגרדיאנט $\nabla f(0,0)$.

ג. הזויות θ_1,θ_3 מקיימות $\theta_3=\theta_1+\pi$.

<u>שאלה 4</u>   (20 נקודות)

נתון הגוף $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ \ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

א. (10 נק') ציירו את *<u>היטל</u>* הגוף G על המישור (YZ) ובטאו את הגוף הנתון בקואורדינטות כדוריות.

ב. (10 נק') חשבו את מסת הגוף בהינתן פונקציית הצפיפות הנקודתית $\rho(x,y,z)=3z$.
נמקו היטב את כל השלבים !

<u>שאלה 5</u>   (20 נקודות)

נתון השדה $\vec{F}=(ye^{xy}+axy^3+4)\vec{\mathbf{i}}+(xe^{xy}+3x^2y^2+5)\vec{\mathbf{j}}$.

א. (10 נק') מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר a יהיה $\vec{F}$ שדה משמר ב $\mathbf{R}^2$. נמקו !

ב. (10 נק') עבור ערך הפרמטר שמצאתם בסעיף א, מצאו פוטנציאל לשדה וחשבו את עבודת השדה על המסילה γ הנתונה ע"י הפרמטריזציה: $x=\cos(\frac{1}{2}\pi t^6)$, $y=\sin(\frac{1}{2}\pi t^6)$, $t:0\to 1$. נמקו !

<u>שאלה 6</u>   (20 נקודות)

חשבו את השטף של השדה $\vec{F}=(2xz-x)\vec{\mathbf{i}}+yz\vec{\mathbf{j}}+(2z-z^2)\vec{\mathbf{k}}$ דרך המשטח הגלילי S הנתון על-ידי $S:\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ 0\le z\le h\end{cases}$, כאשר כיוון הנורמל הוא החוצה מהגליל ו- $a>0, h>0$.
<u>הערה</u>: המשטח הגלילי S לא סגור.

אסור לתלוש דפים ממחברת הבחינה. תלישת דף אחד או יותר תביא לפסילת הבחינה

בהצלחה!

טורים

תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים.

טור הוא הסכום האינסופי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$.

סדרת סכומים חלקיים היא הסכום הסופי $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

טור מתכנס אם קיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ לסדרת הסכומים החלקיים, ואז סכום הטור הוא $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. אם הגבול של S_n לא קיים או אינסופי זהו **טור מתבדר**.

תנאי הכרחי להתכנסות טור: אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

תכונות נוספות של טורים:

א. הורדת/הוספת מספר סופי של אברים אינה משפיעה על התכנסות/התבדרות הטור.

ב. אם $c \neq 0$ קבוע, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

ג. אם 2 טורים מתכנסים אז גם סכומם מתכנס: $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

טורים חיוביים

* המבחנים להלן מניחים שהטורים הם אי שליליים $a_n, b_n \ge 0$.
* עבור סדרה חיובית, סדרת הסכומים החלקיים S_n היא מונוטונית עולה.

מבחן השוואה ראשון: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים, המקיימים $a_n \le b_n$ החל ממקום מסוים.

- אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה שני: נסמן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$.

- אם $0 < k < \infty$, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד.
- אם $k = 0$, אז $a_n \le b_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.
- אם $k = \infty$, אז $b_n \le a_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.

מבחן דלמבר: נסמן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

- אם $L < 1$, אז הטור מתכנס.
- אם $L > 1$, אז הטור מתבדר.
- אם $L = 1$, לא ניתן לדעת.

מבחן קושי: נסמן $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$,

- אם $L < 1$, אז הטור מתכנס.
- אם $L > 1$, אז הטור מתבדר.
- אם $L = 1$, לא ניתן לדעת.

מבחן אינטגרלי: תהי $f(x)$ פונקציה חיובית יורדת בקטע $[k,\infty)$, כך ש - $a_n = f(n)$. אז הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_k^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

טורים כלליים

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט**, אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בתנאי**, אם הוא מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

משפט: טור מתכנס בהחלט הינו טור מתכנס.

טור מחליף סימן הוא טור שאיבריו מחליפים סימן לסירוגין: $a_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

משפט לייבניץ: תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה חיובית יורדת לאפס, אז:

1. הטור מחליף הסימן $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.
2. השארית $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ מקיימת: $|S - S_n| = |r_n| < a_{n+1}$.

סדרי גודל: $c \ll (\ln n)^b \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$

כאשר הקבועים מקיימים $b, c, p > 0$, $a > 1$.

נוסחת סטירלינג: $n! \approx \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n}$

טורי חזקות

טור חזקות הינו טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. וזהו טור חזקות סביב x_0.

תחום ההתכנסות: לכל טור קיים מספר $R \ge 0$ שנקרא רדיוס התכנסות הטור, עבורו:

- כאשר $|x - x_0| < R$ טור החזקות מתכנס (בהחלט).
- כאשר $|x - x_0| > R$ טור החזקות מתבדר.
- בקצוות $x_0 \pm R$ בודקים ישירות על ידי הצבה בטור.

משפט Cauchy – Hadamard: את רדיוס ההתכנסות של טור חזקות ניתן למצוא לפי כל אחת מהנוסחאות הבאות:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad\qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ הוא הגבול העליון של הסדרה.

משפט: בתחום ההתכנסות של טור חזקות ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר, גזירה איבר-איבר ולעבור לגבול בנקודה מסוימת איבר-איבר, כלומר:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n dx$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d(x - x_0)^n}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{x\to c} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c - x_0)^n$$

משפט: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ מתכנס בקטע מסוים לפונקציה $f(x)$, אז זהו טור טיילור של f בסביבות של x_0 , כלומר מתקיים: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

טורי טיילור יסודיים

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad x \in (-1,1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \qquad x \in (-1,1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \qquad x \in [-1,1]$$

פונקציות במספר משתנים

גבול: אומרים כי מספר L הינו גבול של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) ורושמים $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $0<\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|<\delta$, מתקיים $\left|f(x,y)-L\right|<\varepsilon$.

רציפות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

נגזרות חלקיות מוגדרות ע"י הגבולות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

גרדיאנט של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) הוא וקטור הנגזרות החלקיות של $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0): $\overrightarrow{grad}(f)=\vec\nabla f=(f_x,f_y)$

דיפרנציאביליות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אם

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=$$
$$=f(x_0,y_0)+A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+r(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

כאשר $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} r(\Delta x,\Delta y)=0$.

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה, אז בנקודה זו היא רציפה והנגזרות החלקיות שלה קיימות. נגזרות אלו הן הקבועים מההגדרה, ז"א:

$$A=f_x(x_0,y_0)\qquad B=f_y(x_0,y_0)$$

משפט: אם עבור פונקציה $f(x,y)$ הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת נקודה, אז $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה.

דיפרנציאל: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אז החלק הליניארי של שינוי הפונקציה נקרא דיפרנציאל, כלומר

$$df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

נגזרת כיוונית של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\vec s=(a,b)$, $\|\vec s\|=1$

(כלומר $\vec s$ וקטור יחידה) מוגדרת על ידי הגבול:

$$\frac{\partial f}{\partial\vec s}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+ah,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), ו $\|\vec s\|=1$ אז

$$\frac{\partial f}{\partial\vec s}(x_0,y_0)=\vec\nabla f\cdot\vec s$$

משפט: הנגזרת הכיוונית של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) היא מקסימלית בכיוון הגרדיאנט, ז"א בכיוון $\vec s=\vec\nabla f(x_0,y_0)$.

משפט: הגרדיאנט של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) מאונך לקו גובה של f בנקודה זו.

כלל השרשרת: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בסביבה של (x_0,y_0) ותהינה $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ פונקציות דיפרנציאביליות בסביבה של (u_0,v_0), כאשר $x_0=x(u_0,v_0),\ y_0=y(u_0,v_0)$. אז הפונקציה המורכבת $f(x(u,v),y(u,v))$ דיפרנציאבילית בסביבה של (u_0,v_0) ומתקיים:

$$f_u=f_x\cdot x_u+f_y\cdot y_u\qquad f_v=f_x\cdot x_v+f_y\cdot y_v$$

נגזרות מסדר גבוה הן נגזרות חלקיות של נגזרות חלקיות, למשל

$$f_{xx}=(f_x)_x\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

משפט: אם לפחות אחת מהנגזרות המעורבות מסדר גבוה f_{xy} או f_{yx} קיימת ורציפה בנקודה, אז גם הנגזרת המעורבת השנייה קיימת ורציפה ומתקיים $f_{xy}=f_{yx}$.

* תוצאה דומה נכונה עבור נגזרות מעורבות מסדר גבוה יותר.

קירוב טיילור: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית n פעמים בסביבה של (x_0,y_0), ויהיו $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, אז מתקיים

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!}+R_n(x_0,y_0)$$

כאשר

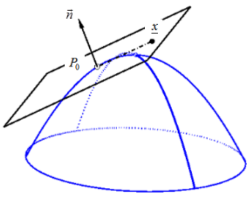
$$d^n f=d\left(d^{n-1}f\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x,y)$$

$$R_n(x_0,y_0)=d^{n+1}f(c,d)$$

עבור c בין x_0 לבין x – ו d בין y_0 לבין y –.

נורמל ומישור משיק למשטח

* משמעות דיפרנציאביליות – קיום מישור משיק בנקודה.



עבור נקודה P_0 על משטח כלשהו עם נורמל $\vec n$, נקודה $\underline{x}$ על המישור המשיק תקיים $\vec n\perp(\underline{x}-P_0)$.

ובפרט:

1. משטח נתון בצורה מפורשת $z=f(x,y)$, כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec n=(-f_x,-f_y,1)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$-f_x(P_0)\cdot(x-x_0)-f_y(P_0)\cdot(y-y_0)+z-f(x_0,y_0)=0$$

2. משטח נתון בצורה סתומה $F(x,y,z)=0$, כאשר F דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0,z_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec n=\vec\nabla F=(F_x,F_y,F_z)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$F_x(P_0)\cdot(x-x_0)+F_y(P_0)\cdot(y-y_0)+F_z(P_0)\cdot(z-z_0)=0$$

קיצון של פונקציות במספר משתנים

נקודת מינימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

נקודת קריטית (x_0,y_0) אם $\vec\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$ או לא קיים $\vec\nabla f(x_0,y_0)$.

משפט Fermat: אם (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי של פונקציה $f(x,y)$, אז היא נקודה קריטית.

סיווג נקודות קיצון מקומי:

תהי (x_0,y_0) נקודה חשודה לקיצון. נגדיר

$$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$

* אם $\Delta(x_0,y_0)>0$, אז (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי:
  * אם $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ זוהי נקודת מינימום מקומי.
  * אם $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ זוהי נקודת מקסימום מקומי.
* אם $\Delta(x_0,y_0)<0$, אז (x_0,y_0) נקודת אוכף (אין קיצון).

נקודת מינימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

תחום קומפקטי D הוא תחום חסום וסגור.

משפט Weierstrass: פונקציה רציפה $f(x,y)$ בתחום קומפקטי D מקבלת ערך מינימלי וערך מקסימלי בתוך D, או על השפה של D.

קיצון תחת אילוץ: נקודת קיצון מקומי (x_0,y_0) של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$, אם היא נקודת קיצון של f בקבוצת כל הנקודות המקיימות את תנאי האילוץ.

שיטת כופלי לגרנג': למציאת קיצון של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$ מגדירים פונקציית לגרנג': $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)$.
הנקודות החשודות לקיצון תחת אילוץ הינן נקודות קריטיות של F, ז"א נקודות בהן אחת הנגזרות החלקיות לא קיימת, או שמתקיים:

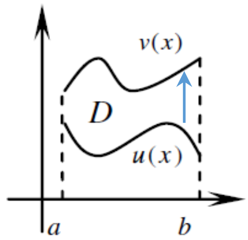
$$\vec{\nabla}F=0 \iff \begin{cases}F_x=0\\F_y=0\\F_\lambda=0\end{cases} \iff \begin{cases}f_x=\lambda g_x\\f_y=\lambda g_y\\g=0\end{cases}$$

* ניתן להרחיב את שיטת לגרנג' לפונקציות עם יותר משתנים ולבעיות קיצון עם יותר אילוצים, למשל $F(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y)-\lambda_1\cdot g_1(x,y)-\lambda_2\cdot g_2(x,y)$

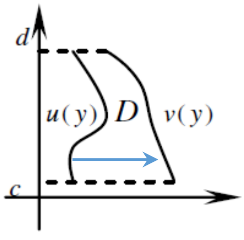
אינטגרל כפול ואינטגרל משולש

אינטגרל כפול של $f(x,y)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מישורי D הוא $\iint_D f(x,y)dA$.

משפט פוביני: ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים:



$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dydx$$



$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy$$

אינטגרל משולש של $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מרחבי G הוא $\iiint_G f(x,y,z)dV$.
ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים, למשל:

$$G:\begin{cases}a\le x\le b\\g(x)\le y\le h(x)\\m(x,y)\le z\le k(x,y)\end{cases}$$

אז

$$\iiint_G f(x,y,z)dV=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{m(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

יישומים של אינטגרל כפול ומשולש

שטח של תחום מישורי D: $Area(D)=\iint_D dA$

נפח של גוף מרחבי G: $Volume(G)=\iiint_G dV$

- בפרט עבור תחום $G=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D, g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$:

$$Volume(G)=\iint_D (f(x,y)-g(x,y))dA$$

מסה של לוחית מישורית D בעלת צפיפות $\rho(x,y)$: $m(D)=\iint_D \rho(x,y)dA$

מסה של גוף מרחבי G בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(G)=\iiint_G \rho(x,y,z)dV$

מרכז מסה של גוף מרחבי G:

$$x_{cm}=\frac{\iiint_G x\cdot\rho dV}{m(G)}\qquad y_{cm}=\frac{\iiint_G y\cdot\rho dV}{m(G)}\qquad z_{cm}=\frac{\iiint_G z\cdot\rho dV}{m(G)}$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

החלפת משתנים היא העתקה $(x,y)\to(u,v)$ המעתיקה את התחום $D_{xy}\mapsto D_{uv}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$

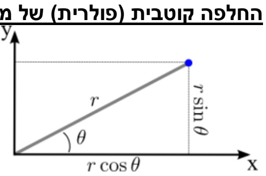
משפט: אם בהחלפת משתנים $J\neq 0$, אז קיימת העתקה הופכית $(u,v)\to(x,y)$ שהיעקוביאן שלה $J^{-1}=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$ מקיים $J^{-1}=\frac{1}{J}$.

משפט החלפת משתנים באינטגרל כפול:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\left[\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases},\ u,v\in D_{uv},\ J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]=\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

החלפה קוטבית (פולרית) של מעגל:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},\quad J=r,\quad \begin{matrix}0\le r\le R\\0\le\theta\le 2\pi\end{matrix}$$



החלפה קוטבית מוכללת של אליפסה:

$$\begin{cases}x=ra\cos\theta\\y=rb\sin\theta\end{cases},\quad J=abr,\quad \begin{matrix}0\le r\le 1\\0\le\theta\le 2\pi\end{matrix}$$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

החלפת משתנים היא העתקה $(x,y,z)\to(u,v,w)$ המעתיקה את התחום $G_{xyz}\mapsto G_{uvw}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$. אם $J\neq 0$ אז ההעתקה הפיכה, קיימת העתקה הופכית, ומתקיים:

$$J=\begin{vmatrix}x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{vmatrix},\quad J^{-1}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix},\quad J^{-1}=\frac{1}{J}$$

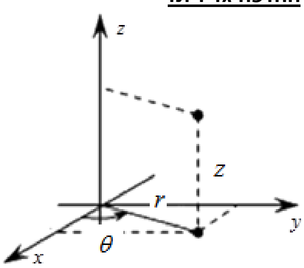
משפט החלפת משתנים באינטגרל משולש:

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x,y,z)dV_{xyz}=\left[\begin{cases}x=x(u,v,w)\\y=y(u,v,w),\\z=z(u,v,w)\end{cases}\ \begin{matrix}u,v,w\in G_{uvw}\\ J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\end{matrix}\right]=\iiint_{G_{uvw}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dV_{uvw}$$

החלפה גלילית:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases},\quad J=r$$

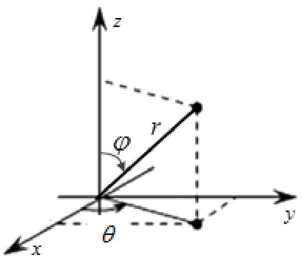
r - המרחק מציר Z.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר x.
Z - מרחק ממישור xy.
מתקיים $x^2+y^2=r^2$.



החלפה כדורית:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\y=r\sin\theta\sin\varphi\\z=r\cos\varphi\end{cases},\quad J=r^2\sin\varphi$$

r - המרחק מהראשית.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר x.
φ - זווית עם הכיוון החיובי של ציר Z.
מתקיים $x^2+y^2+z^2=r^2$.



אינטגרל קווי

פרמטריזציה של עקומה חלקה C במרחב היא העתקה $\vec{r}:[a,b]\to C$ הנתונה ע"י:

$$C:\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)\quad ,\quad t\in[a,b]$$

בפרמטריזציה נקודת ההתחלה היא $A=\vec{r}(a)$, ונקודת הסיום היא $B=\vec{r}(b)$.

אינטגרל קווי סוג I

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה מוגדרת לאורך C , אז

$$\int_C f(x,y,z)dl=\int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.

יישומים של אינטגרל קווי סוג I

אורך של עקומה C: $\quad length(C)=\int_C dl$

מסה של עקומה C בעלת צפיפות $\rho(x,y,z)$: $\quad m(C)=\int_C \rho(x,y,z)dl$

אינטגרל קווי סוג II

יהי $\vec{F}(x,y,z)=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$ **שדה במרחב** המוגדר לאורך C , ונסמן $d\vec{r}=\left(dx,dy,dz\right)$. אז

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)dt=$$

$$=\int_a^b \left(P\cdot x'+Q\cdot y'+R\cdot z'\right)dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.
* החישוב תלוי כיוון: $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{B\to A}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

יישומים של אינטגרל קווי סוג II

עבודה של שדה כוחות $\vec{F}$ במעבר חלקיק לאורך מסלול C , או **שטף** שדה $\vec{F}$ דרך עקומה C מחושבת ע"י $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

מסלול בכיוון חיובי הוא מסלול סגור שבמעבר לאורכו התחום החסום נמצא משמאלו.

משפט Green: יהי $\vec{F}=\left(P,Q\right)$ שדה מישורי בעל רכיבים גזירים ברציפות בתחום D בעל שפה חלקה למקוטעין C מכוונת בכיוון החיובי, אז

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)dxdy$$

* שפה C יכולה להיות מורכבת ממספר מסילות זרות.
* עבור תחום כנ"ל מתקיים: $Area\left(D\right)=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy$

שדה משמר $\vec{F}=\left(P,Q\right)$ בתחום D מישורי (או $\vec{F}=\left(P,Q,R\right)$ בתחום מרחבי), הוא שדה שקיימת לו **פונקציית פוטנציאל** φ דיפרנציאבילית ב- D , כך שמתקיים $\vec{\nabla}\varphi=\vec{F}$.

משפט שקילויות: עבור $\vec{F}$ שדה בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום D הטענות הבאות שקולות:

(1) $\vec{F}$ שדה משמר.

(2) קיימת פונקציית **פוטנציאל** φ רציפה ב D – , כך ש $\vec{\nabla}\varphi=\vec{F}$ – (כלומר $\varphi_x=P,\quad \varphi_y=Q$ במישור, או $\varphi_x=P,\quad \varphi_y=Q,\quad \varphi_z=R$ במרחב).

(3) לכל מסלול סגור γ בתוך D מתקיים $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

(4) לכל שתי נקודות A,B בתוך D , האינטגרל $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ לא תלוי במסלול המחבר בין A ל – B בתוך D , ומתקיים $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(B)-\varphi(A)$.

(5) אם בנוסף D הינו תחום פשוט קשר, אז $Q_x=P_y$ במישור, או $rot\vec{F}=\vec{0}$ במרחב, כאשר **הרוטור** מוגדר ע"י

$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

אינטגרל משטחי

פרמטריזציה של משטח חלק σ במרחב היא העתקה $\vec{r}:D\to\sigma$ הנתונה על ידי:

$$\sigma:\vec{r}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\quad ,\quad u,v\in D_{uv}$$

עם נורמל

$$\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}$$

אינטגרל משטחי סוג I

האינטגרל המשטחי סוג I של $f(x,y,z)$ על פני משטח פשוט σ , הוא

$$\iint_\sigma f\left(x,y,z\right)dS$$

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\|\vec{n}\|=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|$ ולכן:

$$\iint_\sigma f\left(x,y,z\right)dS=\iint_{D_{uv}} f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\|\vec{n}\|=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$ ולכן

$$\iint_\sigma f\left(x,y,z\right)dS=\iint_{D_{xy}} f\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy$$

ישומים של אינטגרל משטחי סוג I

שטח פנים של משטח σ: $\quad Area\left(\sigma\right)=\iint_\sigma dS$

מסה של משטח σ בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $\quad m\left(\sigma\right)=\iint_\sigma \rho(x,y,z)dS$

אינטגרל משטחי סוג II

האינטגרל המשטחי סוג II של שדה $\vec{F}=\left(P,Q,R\right)$ על פני משטח דו צדדי σ בעל נורמל יחידה בכיוון נתון $\hat{n}=\vec{n}/\|\vec{n}\|$, הוא $\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS$.

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ ולכן:

$$\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iint_{D_{uv}}\left(P(u,v),Q(u,v),R(u,v)\right)\cdot\left(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right)dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\vec{n}=\left(-z_x,-z_y,1\right)$ ולכן:

$$\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iint_{D_{xy}}\left(-P\cdot z_x-Q\cdot z_y+R\right)dxdy$$

* אם $\vec{F}$ ו - $\hat{n}$ ניצבים על פני σ , אז $\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=0$.
* אם נחליף את הכיוון של $\hat{n}$, אז האינטגרל יחליף את סימנו.

יישומים של אינטגרל משטחי סוג II

שטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ דרך משטח σ : $\quad \Phi_\sigma\left(\vec{F}\right)=\iint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS$

משפט הדיוורגנץ של Gauss: יהי $\vec{F}=\left(P,Q,R\right)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום קומפקטי פשוט קשר G בעל שפה חלקה למקוטעין σ , ויהי $\hat{n}$ נורמל יחידה חיצוני לשפה σ . אז

$$\oiint_\sigma\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS=\iiint_G div\vec{F}dV$$

כאשר $div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=P_x+Q_y+R_z$ הוא **הדיוורגנץ** של השדה.

משפט Stokes: יהי $\vec{F}=\left(P,Q,R\right)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים על פני משטח דו צדדי σ בעל שפה γ , כך שכיוון הנורמל $\hat{n}$ למשטח נבחר לפי כלל יד ימין ביחס לכיוון γ . אז

$$\oint_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_\sigma\left(rot\vec{F}\cdot\hat{n}\right)dS$$

נוסחאות כלליות

זהויות טריגונומטריות

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$$
$$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

גבולות מוכרים

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

כלל הסנדוויץ':
$$\left.\begin{matrix} f(x)\le g(x)\le h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to a}g(x)=L$$

כלל L'Hopital: במצב $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, אם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ אז $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

נגזרות יסודיות

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

$$(e^x)'=e^x \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

אינטגרלים יסודיים

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ \ (n\neq-1) \qquad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int\sin x dx=-\cos x+C \qquad \int\cos x dx=\sin x+C$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C \qquad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C \qquad \int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C$$

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים:
$$\int u\cdot v'dx=uv-\int u'\cdot vdx$$

החלפת משתנים: אם $x=x(t)$ אז $\int f(x)dx=\int f(x(t))x'(t)dt$

הצבות טריגונומטריות: בחישוב $\int\sin^n x\cos^m xdx$

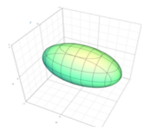
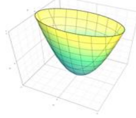
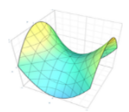
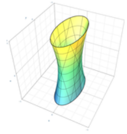
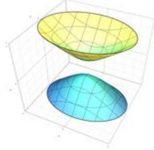
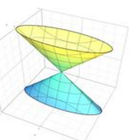
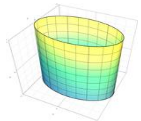
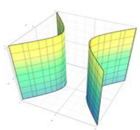
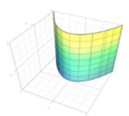
- אם n אי זוגי נציב $t=\cos x$
- אם m אי זוגי נציב $t=\sin x$
- אם שניהם זוגיים ניתן להוריד חזקה ע"י זווית כפולה.

שטחים ונפחים

מעגל ברדיוס r - שטח πr^2, היקף $2\pi r$.

כדור ברדיוס r - נפח $\frac{4\pi r^3}{3}$, שטח פנים $4\pi r^2$.

חרוט ברדיוס r וגובה h - נפח $\frac{\pi r^2 h}{3}$, שטח פנים $\pi r\left(\sqrt{r^2+h^2}+r\right)$.

Ellipsoid	**<u>אליפסויד</u>** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Elliptic paraboloid	**<u>פרבולויד אליפטי</u>** $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	
Hyperbolic paraboloid	**<u>פרבולויד היפרבולי</u>** $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	
Elliptic hyperboloid of one sheet	**<u>היפרבולויד אליפטי I</u>** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Elliptic hyperboloid of two sheets	**<u>היפרבולויד אליפטי II</u>** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Elliptic cone	**<u>חרוט אליפטי</u>** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
Elliptic cylinder	**<u>גליל אליפטי</u>** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z\in\mathbf{R}$	
Hyperbolic cylinder	**<u>גליל היפרבולי</u>** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, z\in\mathbf{R}$	
Parabolic cylinder	**<u>גליל פרבולי</u>** $x^2+2ay=0, z\in\mathbf{R}$	

From: https://en.wikipedia.org/wiki/User:Sam_Derbyshire/Gallery and https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric