

תרגיל בית 12 – עוצמות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = x + n$$

ונתבונן בקבוצה

$$\mathcal{A} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

(א) הראו כי הקבוצה \mathcal{A} שוות עוצמה למספרים הטבעיים.

(ב) תהא $(a_n)_{n=1}^\infty$ סדרה של מספרים ממשיים כאשר

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}} + 3$$

הראו כי הסדרה שוות עוצמה למספרים הטבעיים.

(ג) בסעיפים הקודמים, האם הייתה משמעות להגדרה של הפונקציות או של איברי הסדרה? כלומר, האם התשובות שלכם היו משתנות אם למשל

$$f_n(x) = x^2 + n^2, \quad a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

(ד) האם תוכלו לנסח איזושהי אמירה כללית לגבי קבוצות שוות עוצמה לטבעיים? מה מיוחד בקבוצות האלו?

2. **עוצמת ריבוע** במהלך התרגיל השתמשו בשיוויון הבא:

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

לא נוכיח שיוויון זה, אולם נוכל להשתמש בו. כמו כן, נסמן

$$|\mathbb{R}| := \aleph$$

(א) נתבונן במרובע במישור

$$B = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, | 0 \leq x, y \leq 1 \}$$

ציירו תחילה את הקבוצה B בכדי לשכנע את עצמכם שזהו מרובע. הראו כי $|B| = |\mathbb{R}|$.

(ב) נתבונן כעת במרובע כללי במישור המקביל לציר ה X :

$$D = [a, b] \times [c, d]$$

הראו כי $|D| = |\mathbb{R}|$.

(ג) נתבונן בהיקף של המרובע $D = [a, b] \times [c, d]$. הראו כי עוצמת ההיקף היא \aleph .

3. עוצמת עיגול ומעגל

(א) נתבונן בעיגול במישור

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

ובריבוע במישור

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y < 1\}$$

נתבונן בפונקציה

$$f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$f(x, y) = \left(x, y \cdot \sqrt{1 - x^2}\right)$$

i. הראו כי הפונקציה f מוגדרת היטב - כלומר וודאו כי אכן $f(x, y) \in \mathcal{C}$ לכל $(x, y) \in \mathcal{B}$.

ii. הראו כי f חח"ע.

iii. הראו כי f על.

iv. הסיקו כי $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$.

(ב) נתבונן במעגל במישור

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

הראו כי $|\mathcal{M}| = |[0, 2\pi)|$.