

פתרון

X

	שאלה 1		שאלה 2		שאלה 3	
	ה	ד	ה	ד	ד	ג
1						
2						
3						
4						

שאלה 1 (35 נקודות)

חברת לוגיסטיקה עוסקת בהפצה של חבילות ברחבי הארץ. החברה עוקבת אחרי מספר החבילות שמגיעות לנקודות ההפצה שלה, מספר התקלות בתהליך ההפצה, ומספר העובדים הזמנים לטיפול בחבילות. הנתונים נאספים ומנותחים במטרה לשפר את תהליך ההפצה.

א. (9 נקודות) מספר החבילות שמגיעות בכל יום לנקודת הפצה ביישוב קטן מתפלג לפי התפלגות פואסון עם ממוצע של 9 חבילות ביום. אין תלות בין ימים שונים.

1. מה ההסתברות שבשבוע עבודה (5 ימים) יגיעו למרכז ההפצה 50 חבילות?

2. ביום ה- i חברת לוגיסטיקה מרוויחה a_i שקלים לכל חבילה ($i = 1, \dots, 5$). מצאו ביטוי התלוי ב- a_i

($i = 1, \dots, 5$) עבור השונות של סך הרווח מהחבילות המגיעות למרכז הפצה בשבוע עבודה (5 ימים).

ב. (8 נקודות) לנקודת הפצה מסוימת הגיעו 20 חבילות. לאחר שהחבילות הגיעו התקבלה הודעה שאחת מבין 20 החבילות מיועדת לנקודת הפצה אחרת. החבילות נבדקות אחת אחת באופן אקראי עד שמוצאים את החבילה המסוימת הזו.

1. מה ההסתברות שהחבילה אותה מחפשים תמצא בבדיקה העשירית?

2. מה השונות של מספר הבדיקות עד למציאת החבילה אותה מחפשים?

ג. (8 נקודות) במהלך יום עבודה, נשלחות 80 חבילות. הסיכוי לטעות בהפצה (החבילה לא מגיעה ליעדה) הוא 0.2. אין תלות בין החבילות השונות. מה ההסתברות שיותר מ-65 חבילות יגיעו ליעדן ללא טעות? פרטו את כל השלבים בחישוב.

ד. (5 נקודות) במחסן של חברת הלוגיסטיקה ישנם שני סוגי מכונות: מכונה A ומכונה B, שמשמשות למיון החבילות והדבקת תווית של אזור החלוקה. לעיתים המכונות טועות במיון, וכתוצאה מכך מודבקת על החבילה תווית שגויה של אזור החלוקה. מכונה A טועה במיון ב-3% מהמקרים, ומכונה B טועה במיון ב-7% מהמקרים. הסיכוי שחבילה תעבור דרך מכונה A הוא 60% והסיכוי שהיא תעבור דרך מכונה B הוא 40%. מה ההסתברות שחבילה שעברה דרך אחת המכונות ונמצאה עם תווית נכונה של אזור החלוקה עברה דרך מכונה A?

1. 0.5820

2. 0.6101

3. 0.4101

4. 0.9504

ה. (5 נקודות) מספר החבילות שמגיעות בכל יום לנקודת הפצה ביישוב גדול הוא משתנה מקרי המקבל ערכים מ-100 עד 500 בקפיצות של 5, בהסתברויות שוות. מספר העובדים בכל יום משתנה בהתאם למספר החבילות שמגיעות לנקודת ההפצה. אם מספר החבילות המגיעות ביום מסוים קטן מ-250, אז יש 4 עובדים. אם מספר החבילות המגיעות ביום מסוים הוא 250 או יותר, אז יש 7 עובדים. מה תוחלת מספר העובדים?

1. 5

2. 5.5

3. 5.8519

4. 5.8889

פתרון שאלה 1:

א. נסמן X מספר החבילות שמגיעות ביום אחד. נתון ש $X \sim \text{Poiss}(9)$. מהטענה שנלמדה בהרצאות נקבל שמספר החבילות שמגיעות ב-5 ימים מתפלג באופן הבא: $N(5) \sim \text{Poiss}(5 \cdot 9)$.

$$1. \quad P(N(5) = 50) = \frac{e^{-45} 45^{50}}{50!} = 0.0431$$

2. נסמן X_i מספר החבילות שמגיעות ביום i . $i = 1, 2, \dots, 5$. מתקיים: $X_i \sim \text{Poiss}(9)$ והמשתנים בלתי תלויים.

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_5 X_5) &= a_1^2 V(X_1) + a_2^2 V(X_2) + \dots + a_5^2 V(X_5) \\ &= 9 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_5^2) \end{aligned}$$

ב. נסמן Y מספר הבדיקות עד למציאת החבילה אותה מחפשים. מתקיים: $Y \sim U(20)$.

$$1. \quad P(Y = 10) = \frac{1}{20}$$

$$2. \quad \text{Var}(Y) = \frac{20^2 - 1}{12} = 33.25$$

ג. נסמן W מספר החבילות שיגיעו ליעדן ללא טעות.

$$W \sim \text{Bin}(80, 0.8)$$

יש לחשב $P(W > 65)$.

נחשב לפי קירוב נורמלי להתפלגות בינומית.

$$\text{מתקיים: } np = 80 \cdot 0.8 = 64 > 5, nq = 80 \cdot 0.2 = 16 > 5$$

נחשב את הפרמטרים של קירוב נורמלי:

$$E(W) = np = 80 \cdot 0.8 = 64$$

$$\text{Var}(W) = npq = 80 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 12.8$$

$$\begin{aligned} P(W > 65) &= 1 - P(W \leq 65) = 1 - \Phi\left(\frac{65 + 0.5 - 64}{\sqrt{12.8}}\right) = 1 - \Phi(0.42) = \\ &= 1 - 0.6628 = 0.3372 \end{aligned}$$

ד. נגדיר מאורעות: A – חבילה עברה דרך מכונה B , A – החבילה קבלה מדבקה נכונה.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.97 \cdot 0.6}{0.97 \cdot 0.6 + 0.93 \cdot 0.4} = 0.6101$$

התשובה הנכונה היא 0.6101

ה. נגדיר משתנה מקרי Y מספר החבילות המגיעות ביום.

$$\text{אז, } Y = 5X + 95, \text{ כאשר, } X \sim U(81)$$

$$P(Y < 250) = P(5X + 95 < 250) = P(X < 31) = P(X \leq 30) = \frac{30}{81}$$

נגדיר, W מספר העובדים.

$$P(W = 4) = \frac{30}{81}$$

$$P(W = 7) = \frac{51}{81}$$

פתרון שאלה 1:

$$E(W) = 4 \cdot \frac{30}{81} + 7 \cdot \frac{51}{81} = 5.8889$$

התשובה הנכונה היא 5.8889

שאלה 2 (35 נקודות)

זמן ההמתנה לקבלת שירותי קופה בבנק הוא משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות. נניח שבמהלך יום נתון נכנסים לבנק 100 אנשים. זמן ההמתנה של כל אדם הוא בלתי תלוי בזמן ההמתנה של כל האחרים.

א. (9 נקודות) מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של זמן ההמתנה המקסימלי לקבלת שירותי קופה ביום נתון.

ב. (8 נקודות) מהי ההסתברות לכך שממוצע זמני ההמתנה ביום זה יהיה גדול מ 18 דקות?

ג. (8 נקודות) חיים ממתין כבר 5 דקות לקבלת שירות. חשבו את ההסתברות שלחיים נישאר להמתין לפחות 5 דקות עד שהוא יתחיל לקבל שירות.

נניח שחיים לא מרוצה מהשירות שקיבל, והוא מעוניין לדבר עם מנהל הסניף. זמן ההמתנה בדקות למנהל הסניף הוא משתנה מקרי X בעל פונקציית התפלגות מצטברת:

$$F_X(t) = \begin{cases} a - be^{-t^2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ד. (5 נקודות) ההסתברות לקבל שיחה עם המנהל תוך 2 דקות היא

1. $1 - e^{-4}$

2. e^{-4}

3. $2e^{-4}$

4. אף תשובה אינה נכונה.

ה. (5 נקודות) חציון זמן ההמתנה לשיחה עם המנהל הוא

1. $a - be^{-4}$

2. $\ln 2$

3. $\sqrt{\ln \frac{2b}{2a-1}}$

4. אף תשובה אינה נכונה.

פתרון שאלה 2:

א. נסמן ב $X_1, X_2, \dots, X_{100} \sim \exp(1/15)$ את זמני ההמתנה של כל אחד מהאנשים שנכנסים לבנק. נגדיר

$Z = \max\{X_1, X_2, \dots, X_{100}\}$ תהיה פונקציית ההתפלגות המצטברת של Z תהיה

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(X_1 \leq t)^{100} = \begin{cases} \left(1 - e^{-\frac{t}{15}}\right)^{100}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ב. לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים בקירוב $\bar{X}_{100} \sim N\left(15, \frac{15^2}{100}\right)$ ולכן ההסתברות המבוקשת היא

$$P(\bar{X}_{100} > 18) = 1 - \Phi\left(\frac{18-15}{1.5}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ג. לפי תכונת חוסר הזיכרון בהתפלגות מעריכית נקבל:

$$P(X > 5 + 5 | X > 5) = P(X > 5) = e^{-\frac{5}{15}} = 0.7165$$

ד. מרציפות נקבל $a = b$. גבול של פונקציית ההתפלגות המצטברת באינסוף שווה ל-1 ולכן $a = b = 1$.

נציב 2 ונקבל שההסתברות שווה ל- $1 - e^{-4}$.

ה. נשווה פונקציית ההתפלגות המצטברת ל-0.5. תשובה נכונה היא $\sqrt{\ln \frac{2b}{2a-1}}$.

שאלה 3 (30 נקודות)

בקופסא א' שני קלפים אדומים ושלושה שחורים, בקופסא ב' שני כדורים לבנים ושני כדורים שחורים, בקופסא ג' שלושה כדורים לבנים ושני כדורים שחורים. מוציאים ללא החזרה שני קלפים מקופסא א'. אם שניהם באותה צבע מוציאים כדורים עם החזרה מקופסא ב' עד שיצא כדור לבן. אם שני הקלפים בצבעים שונים, מוציאים כדורים עם החזרה מקופסא ג' עד שיצא כדור לבן.

נסמן:

X - מספר הקלפים האדומים שיצאו.

Y - מספר הכדורים שיצאו.

א.

1. (7 נקודות) חשבו את ההסתברות $P(X = 0 | Y = 2)$.

2. (7 נקודות) חשבו את השונות של X אם ידוע שהוצאו שני כדורים.

ב. (6 נקודות) חשבו את התוחלת המותנת $E(Y^2 | X = 1)$.

ג. (5 נקודות) נגדיר משתנה מקרי: Z - מספר הכדורים השחורים שיצאו. בחרו את הטענה הנכונה:

1. $COV(Y, Z - 10) < 0$

2. $\rho(Y, -Z) = 1$

3. $E(Y) \cdot E(Z) < E(Y \cdot Z)$

4. משתנים מקריים בלתי מתואמים

ד. (5 נקודות) בחרו את הטענה הנכונה:

1. $COV(X, -X + 1) = -V(X)$

2. $COV(X, 2X) > V(2X)$

3. $\rho(X, 0.1X) = 0.1$

4. $COV(X, -X + 1) < -V(X)$

פתרון שאלה 3:

א.1.

$$P(X = 0 | Y = 2) = \frac{P(X = 0, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 0.5^2}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 0.5^2 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.5^2 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \frac{0.075}{0.244} = 0.3074$$

א.2. נחשב את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y = 2$.

$$P(X = 0 | Y = 2) = \frac{P(X = 0, Y = 2)}{P(Y = 2)} = 0.3074$$

$$P(X = 1 | Y = 2) = \frac{P(X = 1, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 0.4 \cdot 0.6}{0.244} = 0.5901$$

$$P(X = 2 | Y = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0.5^2}{0.244} = 0.1025$$

$$E(X | Y = 2) = 1 \cdot 0.5901 + 2 \cdot 0.1025 = 0.7951$$

$$V(X | Y = 2) = 1 \cdot 0.5901 + 4 \cdot 0.1025 - 0.7951^2 = 0.3679$$

ב. מתקיים: $Y | X = 1 \sim G(0.6)$. לכן נקבל

$$E(Y^2 | X = 1) = V(Y | X = 1) + E(Y | X = 1)^2 = \frac{1-0.6}{0.6^2} + \frac{1}{0.6^2} = 3.89$$

ג. מתקיים: $Z = Y - 1$ ולכן קווריאנס חיובית. תשובה מספר 3 נכונה.

ד. הסבר: $COV(X, -X + 1) = -COV(X, X) = -V(X)$.