המחלקה למדעי היסוד- מתמטיקה
Department of Basic Sciences

חדו"א 2

תרגיל מספר 6
קיצון מקומי, קיצון מוחלט וקיצון תחת אילוצים של פונקצית במספר משתנים

<u>הערה חשובה :</u> כל הסעיפים המסומנים ב- * הם תרגילי רשות .

<u>שאלה 1</u>

עבור הפונקציות הבאות מצאו נקודות חשודות לקיצון מקומי, ועבור כל נקודה חשודה קבעו האם היא נקודת מינימום מקומי, נקודת מקסימום מקומי או נקודת אוכף.

א. $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$

ב. $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-6y^2$

ג. $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$

ד. $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

ה*. $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$

ו*. $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

ז. $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$

ח*. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$

<u>שאלה 2</u>

עבור הפונקציות הבאות מצאו נקודות קיצון מוחלט בתחום הנתון :

א. $f(x,y)=x^2y$ בתחום $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ בתחום $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x\le 0,\ y\le 0,\ x+y\ge -5\right\}$

ג. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ בתחום $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, -1\le y\le 2\right\}$

ד*. $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}(ax^2-by^2)$ $(a>0,b>0)$ בתחום $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\right\}$

ה*. $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ בתחום $D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1.5\pi\right\}$

שאלה 3

עבור הפונקציות הבאות מצאו נקודות קיצון מוחלט תחת האילוץ הנתון :

א. $f(x,y)=y-x^2-2x$ תחת האילוץ $y+x^2+6x=4$ (הערה : בדקו שהאילוץ מגדיר פרבולה).

ב. $f(x,y)=x^2-12x+y^2-16y$ תחת האילוץ $x^2+y^2=25$

ג. $f(x,y)=x^2+y^2$ תחת האילוץ $4x^2+9y^2=36$

ד.* $f(x,y,z)=x-2y+2z$ תחת האילוץ $x^2+y^2+z^2=9$

ה.* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ תחת האילוץ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$

ו.* $f(x,y,z)=xyz$ תחת האילוצים $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$

שאלה 4

מצאו מרחק מינימלי בין הנקודה $M(1,2,3)$ לישר $l:(x,y,z)=t\cdot(1,-3,2)$.

שאלה 5

מצאו את מימדיה של תיבה פתוחה מלמעלה, בעלת שטח פנים קבוע S ונפח מקסימלי.

שאלה 6

מצאו רדיוס וגובה של גליל, בעל שטח מעטפת מקסימלית (כולל בסיסים), שניתן למקם בתוך ספירה בעלת רדיוס R .

שאלה 7*

תהינה $l_1:x^2+y^2=4$ ו – $l_2:2x-y=8$ שתי עקומות במישור. מצאו שתי נקודות $A_1(x_1,y_1)\in l_1$ ו – $A_2(x_2,y_2)\in l_2$, כך שהמרחק ביניהן יהיה מינימלי.

שאלה 8*

תהינה $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ שלוש נקודות במישור בעלי מסות m_1,m_2,m_3 בהתאמה. מצאו קואורדינטות של נקודה $P(x,y)$, כך שמומנט אינרציה $m_1\left|\overrightarrow{P_1P}\right|^2+m_2\left|\overrightarrow{P_2P}\right|^2+m_3\left|\overrightarrow{P_3P}\right|^2$ של מערכת הנקודות P_1,P_2,P_3 סביב נקודה P יהיה מינימלי.

שאלה 9*

תהינה P_1,P_2,P_3 שלוש נקודות במישור, כך שכל הזוויות במשולש $\Delta P_1P_2P_3$ קטנות מ – 120°. תיארו את המקום של נקודה P , כך שסכום המרחקים ממנה לנקודות P_1,P_2,P_3 יהיה מינימלי.

שאלה 10*

נתונה אליפסה $5x^2+8xy+5y^2=9$ שמרכזה נמצא בראשית הצירים $O=(0,0)$. מצאו את כיווני הצירים של האליפסה, ואת אורך הצירים.

רמז: סמנו ב- Q,P נקודות על האליפסה בנות מרחק מקסימלי ומרחק מינימלי מנקודה $O=(0,0)$, ומצאו מהו המרחק המינימלי ומהו המרחק המקסימלי על האליפסה מראשית הצירים.

שאלה 11*

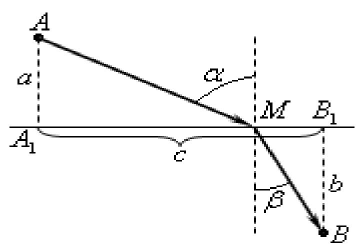
משולש חסום על ידי המעגל בעל רדיוס R. מצאו את הפרמטרים של המשולש, כך שהשטח שלו יהיה מקסימלי. ניתן להשתמש במשפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

כאשר a,b,c צלעות המשולש, α,β,γ זוויות מולהצלעות בהתאמה, ו $R-$ רדיוס של המעגל החוסם.

שאלה 12*

נקודות B,A נמצאות בסביבות אופטיות שונות, המופרדות אחת מהשניה על ידי קו ישר (ראו ציור).



מהירויות התפשטות האור בסביבות האלה הינן v_1 ו v_2- בהתאמה. חוק סנל (Snell) של שבירת קרן אור קובע כי $\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}$

הסיקו את חוק סנל, על סמך העיקרון שלפיו האור מתפשט לאורך מסלול AMB, בעל זמן ההתפשטות המינימלי.

שאלה 13*

Find a triangular-based pyramid with minimal surface area, given triangle as base and given volume $V=\frac{1}{3}S_{base}\cdot h$.

שאלה 14*

הוכיחו את אי שוויון הממוצעים:

$$(x_1,x_2,...,x_n\ge 0)\quad \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n}$$

הדרכה: פתור את השאלה עבור המקרים הפרטים $n=2,n=3$.

במצב הכללי מצאו מקסימום של הפונקציה $z=x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n$ תחת האילוץ $x_1+x_2+...+x_n=S$.