

## מבוא להסתברות - תרגיל מס' 6

1. הציון של סטודנט במבחן הוא מ"מ (רציף)  $X$  בעל פונקציית צפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} cx(100-x) & 0 < x < 100 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

א. מה ההסתברות להכשל במבחן (55 לכל היותר)?

ב. אם 5 סטודנטים (ב"ת) ניגשים למבחן, מה הסיכוי שרובם ייכשלו?

$$f(x) = \begin{cases} bx+b & -1 < x < 0 \\ -\frac{b}{3}x+b & 0 \leq x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{יהי } X \text{ מ"מ עם צפיפות}$$

א. מצאו את  $b$ .

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת  $F$ .

ג. חשבו  $P(X \leq 0), P(-0.5 \leq X \leq 1)$ .

ד. חשבו תוחלת ושונות  $X$ .

3. אורך הזמן שסטודנטים יושבים ליד מסוף מחשב ברציפות מתפלג מעריכית עם תוחלת 36 דקות.

א. מהי ההסתברות לכך שעבודת סטודנט תארך פחות מרבע שעה? בין רבע לחצי שעה?

ב. מהי ההסתברות לכך שסטודנט שהגיע למסוף תפוס יצטרך להמתין יותר משעה עד שהמסוף יתפנה?

ג. יונה הסטודנט החליט לנקוט במדיניות הבאה: הוא מגיע למסוף, ואם הסטודנט שעובד שם לא מסיים את עבודתו תוך 20 דקות – יונה הולך, ומנסה שוב למחרת. בהנחה שהניסיון הראשון של יונה מתבצע ביום א', מה הסיכוי שיצליח לעבוד לראשונה רק ביום ד'?

4. מערכת מורכבת מ- $N$  רכיבים. אורך החיים של רכיב מס'  $n$  מתפלג מעריכית עם פרמטר  $\lambda_n, n=1,2,\dots,N$ ; יהי  $X$  אורך חיי המערכת.

א. הרכיבים מסודרים בטור, איך מתפלג  $X$ ?

ב. הרכיבים מסודרים במקביל, איך מתפלג  $X$ ?

5. משקל נערים (בק"ג) בתיכון מתפלג  $N(50, 3^2)$ ;

א. משקלו של יואב 51.5 ק"ג, מה אחוז הנערים בתיכון שמשקלם נמוך משלו?

ב. משקלו של אסף 47 ק"ג, מה אחוז הנערים שמשקלם גבוה משלו?

ג. ההנהלה החליטה לצרף את 10% הנערים בעלי המשקל הנמוך ביותר לנבחרת השחייה, מהו המשקל המירבי של הנערים שיצורפו לנבחרת?

6. משך ההמתנה בתור לרופא שיניים מתפלג נורמלי עם ממוצע 15 דקות וסטיית תקן 5 דקות.

א. מה ההסתברות שבביקורך הבא אצל רופא שיניים תמתין יותר מ 12.5 דקות?

ב. מה ההסתברות שבביקורך הבא אצל רופא שיניים תמתין פחות מ 5 דקות?

ג. מהו הזמן שרק 15% מהבאים לרופא שיניים מחכים פחות ממנו?

7.  $X$  הינו משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

א.  $a$  הינו פרמטר קבוע, מהו ערכו?

ב. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת  $F(x)$  של  $X$ ?

ג. מהי תוחלת  $X$  ומהי סטיית התקן שלו?

ד. חשב את ההסתברות לכך ש  $X$  יהיה גדול מ  $a$  אם ידוע כי הוא היה קטן מהתוחלת שלו.

8. אורכה של הפסקת פרסומות בטלוויזיה,  $X$ , מתפלג אחיד בקטע בין 4 ל-6 דקות.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות ופונקציית ההתפלגות המצטברת של  $X$  ושרטטו אותן.

ב. חשבו את ההסתברויות הבאות:

1. הפסקת הפרסומות תמשך יותר מ-4.5 דקות.

2. הפסקת הפרסומות תמשך פחות מ-5 דקות.
3. הפסקת הפרסומות תמשך פחות מ-5.5 דקות, אם היו כבר 5 דקות של פרסומות.
4. הפסקת הפרסומות תמשך בדיוק 5 דקות.
- ג. חשבו את התוחלת ואת סטיית התקן של אורכה של הפסקת פרסומות בטלוויזיה.

9. משתנה מקרי  $X$  מתפלג אחיד, אך שכחנו באיזה קטע. אנו זוכרים שתוחלתו 17 וידוע ש- $X$  עולה על 30 בסיכוי 0.1. התוכלו לזהות את הקטע?

10. זמן הנסיעה מת"א לחיפה מתפלג אחיד בטווח  $[1, 1.5]$  שעות.
  - ד. רשמו את פונקציית הצפיפות ופונקציית ההתפלגות המצטברת של זמן הנסיעה ושרטטו אותן.
  - ה. חשבו את הסיכוי לכך שתגיעו תוך פחות משעה ועשר דקות.
  - ו. חשבו את הסיכוי שהדרך תיקח יותר משעה ועשרים דקות.
  - ז. מה הסיכוי שהדרך תיקח בדיוק שעה ועשר דקות?
  - ח. את/ה נוסע/ת כבר שעה ורבע, מה הסיכוי שתגיע/י תוך עשר דקות.
  - ט. מצאו את התוחלת וסטיית התקן של זמן הנסיעה.

11. משך זמן העמידה בתור לביקורת דרכונים בנתב"ג מתפלג מעריכית עם תוחלת 10 דקות.
  - י. מה הסיכוי שתצטרך/י לחכות יותר מ-10 דקות? בין 10 ל-20 דקות?
  - יא. אם את/ה מחכה כבר 20 דקות, מה ההסתברות שתוך 10 דקות תסיים/י?

12. נסיון העבר מלמד כי משקלם של אפרסקים (במאות גרמים) ניתן לתיאור טוב כמשתנה מקרי  $X$  שפונקציית הצפיפות שלו נתונה להלן:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax & 0 < x \leq 1 \\ ax & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מהו ערכו של הקבוע  $a$ ?
- ב. מהי התוחלת ומהי השונות של משקל האפרסק?
- ג. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של משקל האפרסק?
- ד. חשב  $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$

13. נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה המקרי  $X$ : משקל תפוח (במאות גר'):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ ax - x^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

- א. מהם ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ ?
- ב. מהי התוחלת של משקל התפוח?
- ג. מהי סטיית התקן של משקל התפוח?
- ד. מהו החציון של משקל התפוחים?