

מבוא להסתברות - תרגיל מס' 2

חישוב הסתברויות במרחב מדגם סימטרי, כללים קומבינטוריים

1. מטילים קוביה מאוזנת פעמיים, מהי ההסתברות להתרחשות המאורעות הבאים:
 - א. סכום המספרים הוא זוגי? $\{0.5\}$
 - ב. התקבלו שני מספרים שונים? $\{0.8333\}$
 - ג. המספר הקטן יותר מבין שני המספרים הוא 24? $\{0.1389\}$
2. קוביה בה הפאות 1, 2, 3, 4 צבועות בלבן והפאות 5, 6 צבועות בשחור הוטלה פעמיים, ונבדקו הצבעים שהתקבלו בשתי ההטלות, הצע מרחב מדגם לניסוי האמור וחלוקת הסתברויות מתאימה בו, וחשב את הסתברויות המאורעות:
 - א. בהטלה הראשונה התקבלה פאה לבנה; $\{0.6667\}$
 - ב. בשתי ההטלות התקבלו צבעים שונים. $\{0.4444\}$
3. יש 100 כדורים המסומנים במספרים מ 1 ועד 100, מן הקופסא מוציאים 2 כדורים ללא החזרה, מה ההסתברות לכך שסכום המספרים על הכדורים שהוצאו הוא זוגי? $\{0.4949\}$
4. בקופסא יש 10 כדורים המסומנים במספרים מ 1 עד 10. מן הקופסא מוציאים 4 כדורים באקראי עם החזרה,
 - א. מהי ההסתברות לכך שאותו מספר מופיע בכל ארבעת הכדורים שהוצאו? $\{0.001\}$
 - ב. מהי ההסתברות לכך שבכל ארבעת הכדורים שהוצאו מופיעים מספרים שונים? $\{0.504\}$
 - ג. מהי ההסתברות לכך שכל הכדורים שהוצאו הכילו מספרים שאינם עולים על 6? $\{0.1296\}$
 - ד. מהי ההסתברות לכך שהמספר המקסימלי מבין המספרים שעל הכדורים שהוצאו הוא בדיוק 6? $\{0.0671\}$
5. בקופסא יש 10 כדורים מסופררים מ 1 ועד 10, מן הקופסא מוציאים באקראי וללא החזרה 4 כדורים,
 - א. מהי ההסתברות לכך שכל הכדורים שהוצאו הכילו מספרים שאינם עולים על 6? $\{0.0714\}$
 - ב. מהי ההסתברות לכך שהמספר המקסימלי מבין המספרים שעל הכדורים שהוצאו הוא בדיוק 6? $\{0.0476\}$
6. ברשת מחשוב מקבל כל משתמש סיסמה בת 4 תווים, כאשר כל תו נבחר באקראי מבין $\{A,B,C,D\}$.

חשב את הסתברויות המאורעות הבאים:

 - א. בסיסמה מופיעים כל התווים. $\{0.09375\}$
 - ב. התו D מופיע לכל היותר פעם אחת. $\{0.7383\}$
 - ג. הסיסמה מתחילה או מסתיימת בתו C. $\{0.4375\}$
 - ד. מספר מופעי התו A גדול ממספר מופעי התו B. $\{0.3633\}$
7. הוכח משיקולים קומבינטוריים, את נכונות הנוסחא:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

(רמז: חשוב על בחירת n אנשים מתוך קבוצה של 2n אנשים שחצים גברים וחצים נשים)
8. חבילת רכיבים מכילה 20 רכיבים, מתוכם 5 פגומים ויתרם תקינים, מן החבילה מוציאים 4 רכיבים הנבחרים באקראי להרכבה במכשיר,
 - א. מהי ההסתברות לכך שהמכשיר יהיה תקין אם לשם כך נדרש שכל הרכיבים יהיו תקינים? $\{0.2817\}$
 - ב. מהי ההסתברות לכך שהמכשיר יהיה תקין אם לשם כך נדרש שלכל היותר רכיב אחד מבין הרכיבים המותקנים בו יהיה פגום? $\{0.7513\}$
9. בקופסא יש 4 כדורים שחורים ו 6 כדורים לבנים, מן הקופסא מוציאים כדור, ואז מחזירים לקופסא שני כדורים באותו הצבע של הכדור שהוצא, חוזרים על תהליך זה שלוש פעמים, מהי ההסתברות לכך שכל הכדורים שהוצאו שחורים? $\{0.0909\}$
10. בקופסא יש 4 כדורים שחורים ו 6 כדורים לבנים, מן הקופסא מוציאים שלושה כדורים ללא החזרה, מהן התוצאות האפשריות הנצפות בניסוי ומהן ההסתברויות להן? $\{P(0b)=0.1667, P(1b)=0.5, P(2b)=0.3, P(3b)=0.0333\}$
11. מקבוצה של 10 נשים ו 6 גברים נבחר ועד של 6 נבחרים, אם הבחירה נעשית באקראי:
 - א. מהי ההסתברות לכך שהועד מורכב כולו מנשים? $\{0.0262\}$
 - ב. מהי ההסתברות לכך שמחצית מחברי הועד נשים? $\{0.2997\}$

ג. מהי ההסתברות לכך שלפחות ארבעה מחברי הועד גברים? {0.0919}

12. גלידרייה מציעה 7 טעמים שונים של גלידה. שלושה לקוחות מגיעים, וכל אחד מהם מקבל כדור גלידה אחד שנבחר עבורו באופן אקראי. חשבו את הסיכויים של המאורעות הבאים:

- א. שני הכדורים שקיבלו שני הלקוחות הראשונים יהיו בטעמים שונים. $(6/7)$
- ב. ששני הראשונים קיבלו טעם שונה, אבל השלישי כבר קיבל טעם זהה לאחד משני הראשונים. $(12/49)$
- ג. לפחות שניים מבין שלושת הלקוחות קיבלו כדור באותו טעם. $(19/49)$

13. בכיתה שבה 30 תלמידים מחלקים בסיום שנת הלימודים פרסים ל-3 תלמידים: פרס על הצטיינות בלמודים, פרס על שקדנות והתמדה ופרס על תרומה חברתית בולטת.

א. בהנחה שתלמיד אינו יכול לזכות ביותר מפרס אחד, חשבו:

- א1. את ההסתברות שתמר, אחת התלמידות בכיתה, תזכה בפרס על הצטיינות בלימודים. $(1/30)$
- א2. את ההסתברות שתמר תזכה בפרס כלשהו. $(1/10)$
- ב. חזרו על החישובים כאשר תלמיד יכול לזכות ביותר מפרס אחד. ב1. $(1/30)$, ב2. (0.0967)

14. בוחרים באופן אקראי משלחת של ארבעה מדענים מתוך קבוצה של 7 נשים ו-4 גברים. חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

- א. במשלחת שנבחרה 3 נשים וגבר אחד
- ב. במשלחת שנבחרה מספר שווה של גברים ונשים
- ג. במשלחת שנבחרה לפחות שתי נשים
- ד. אחד מחברי המשלחת הוא מר ישראל
- ה. במשלחת שניים מכל מין. מר יעקב וגב' יעקב (שניהם) אינם במשלחת.
- ו. במשלחת שניים מכל מין, וכן גב' ישראל ומר ישראל שניהם במשלחת.
- ז. חשבו גם את הסתברות החיתוך של כל המאורעות ב'-ו'.