

**שם הקורס:** חשבון דיפרנציאלי אינטגרלי1

**קוד הקורס**: 90901

הוראות לנבחן:

• חומר עזר שימושי לבחינה:

3 דפי נוסחאות לכל הסטודנטים.

הרחבת דף נוסחאות למבחן בחדו"א 1 רק לזכאים.

• אין לכתוב בעפרון / עט מחיק

• אין להשתמש בטלפון סלולארי • גינו לבשתמש במחשב גינשו גיו נונ

• אין להשתמש במחשב אישי או נייד

• אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר

• אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

• אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

26/01/23

09:00

דקות

תאריך ושעת הבחינה:

**משך הבחינה:** 180

**שנה:** תשפ"ג

'סמסטר: א

מועד א

מרצי הקורס:

פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד״ר שלוסברג מנחם, ד״ר גבל מיקה, ד״ר רוזנצויג ליאור, ד״ר איילי נחשון, ד״ר אמיר ענת, ד״ר סגל אלכסנדר, ד״ר אולבסקי ויקטור, ד״ר ראיצ׳יק אירינה, ד״ר לייטנר אריאלה מירה, ד״ר בר לוקיאנוב ולדימיר, ד״ר מגנזיק אבלין, ד״ר מכורה מיכאל מרצין

#### \*\*\* שאלון הבחינה ייבדק על ידי המרצה

#### מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור 5 שאלות מתוך 6 השאלות שמספרן 1-6. שווי כל שאלה 20 נקודות. בקובץ התשובות שישלח לבדיקה הפתרונות חייבים להופיע לפי סדר העולה של מספר השאלות! יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל סעיף בדף חדש ורק במקום המיועד לכך.

\*\*\*\* תשובות שיכתבו במקום אחר לא יבדקו

השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך.

יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.

\*\*\*\*יש לתלוש רק את הדף האחרון (דף השאלות המרוכז). הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק\*

## בהצלחה!

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.



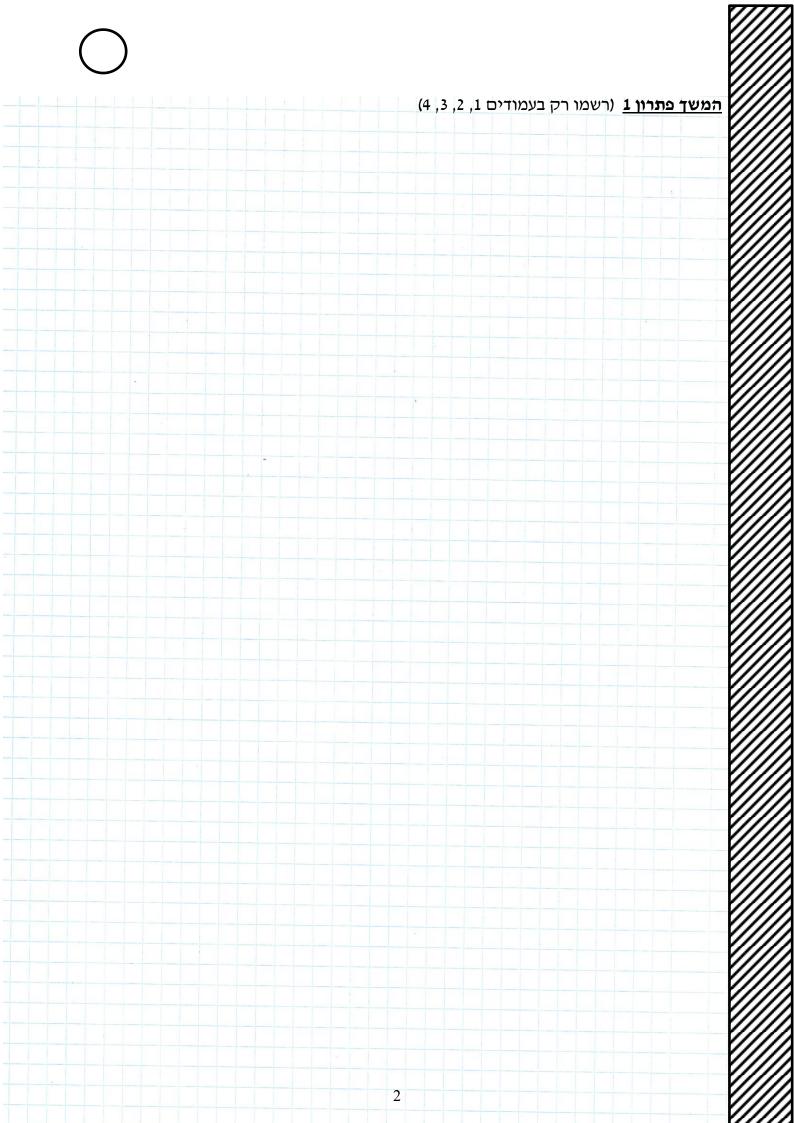


## שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

. 
$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{7n^2 + \sqrt{n^4 + n}}{\sqrt{16n^6 + 1}} + \frac{7n^2 + \sqrt{n^4 + n - 1}}{\sqrt{16n^6 + 2}} + \ldots + \frac{7n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}{\sqrt{16n^6 + n}} \right)$$
 א. (10 נקר !

,  $f(x) = 1 + 3x - x^3$  חשבו את השטח הכלוא בין העקומות הבאות: גרף הפונקציה את השטח הכלוא בין העקומות המקומי שלה. נמקו x = 4 ומשיק לגרף הפונקציה x = 4 בנקודת המקסימום המקומי שלה. נמקו !

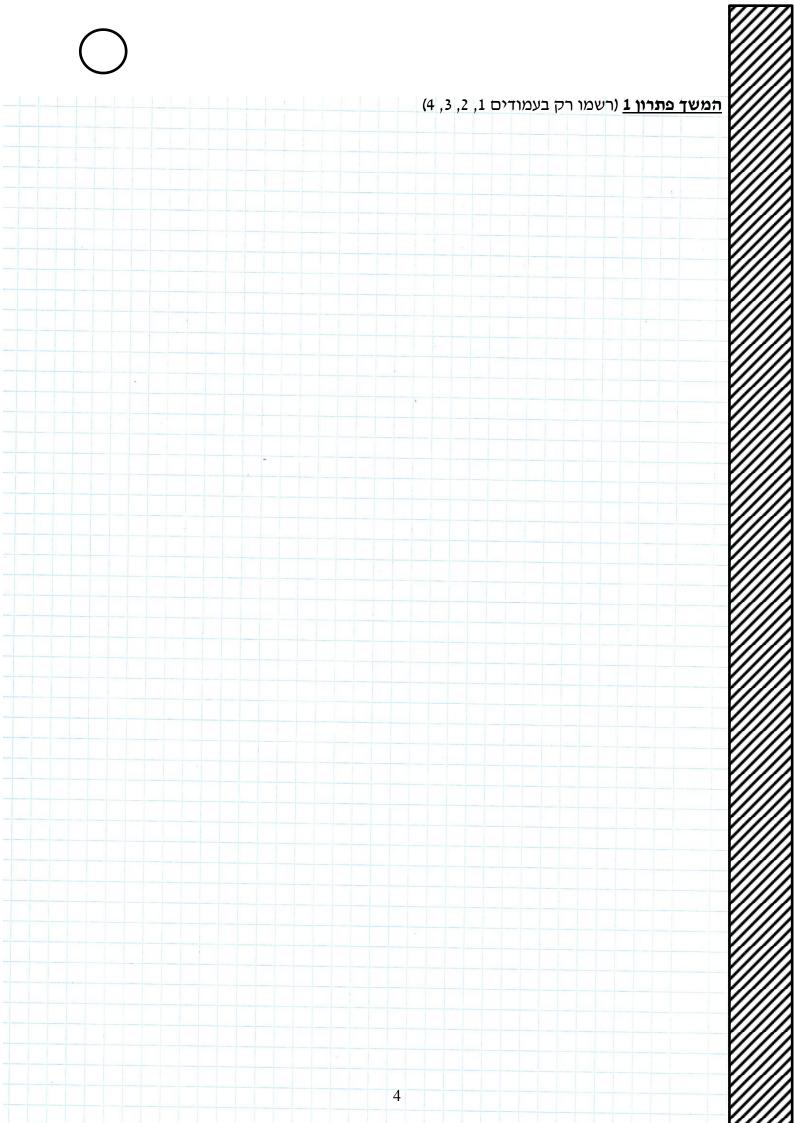
פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)







בחינות – היחידה למתמטיקה <u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)





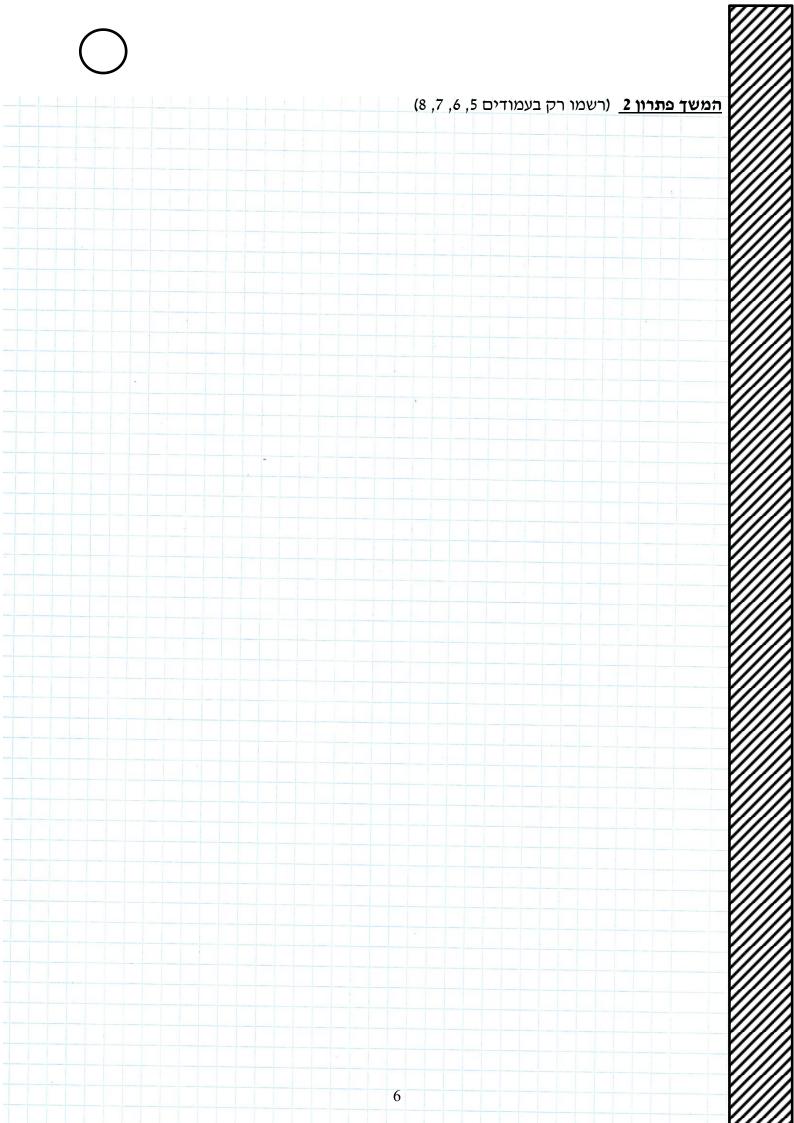


שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

! נמקו . 
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$$
 נמקו . נמקו !

ב. (10 נקי) תהיה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  פונקציה גזירה ברציפות (כלומר הנגזרת הראשונה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מוגדרת  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  תהיה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  פונקציה גזירה ברציפות (גיף הפונקציה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונך לקו המשיק לגרף הפונקציה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונך לקו המשיק לגרף הפונקציה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  נקודה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  ושני הישרים הנ״ל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת לגרף הפונקציה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מתאפסת לפחות פעם אחת ב- $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  (כלומר נגזרת הפונקציה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונכים אם ורק אם  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונכים אם ורק אם  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונכים אם ורק אם  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

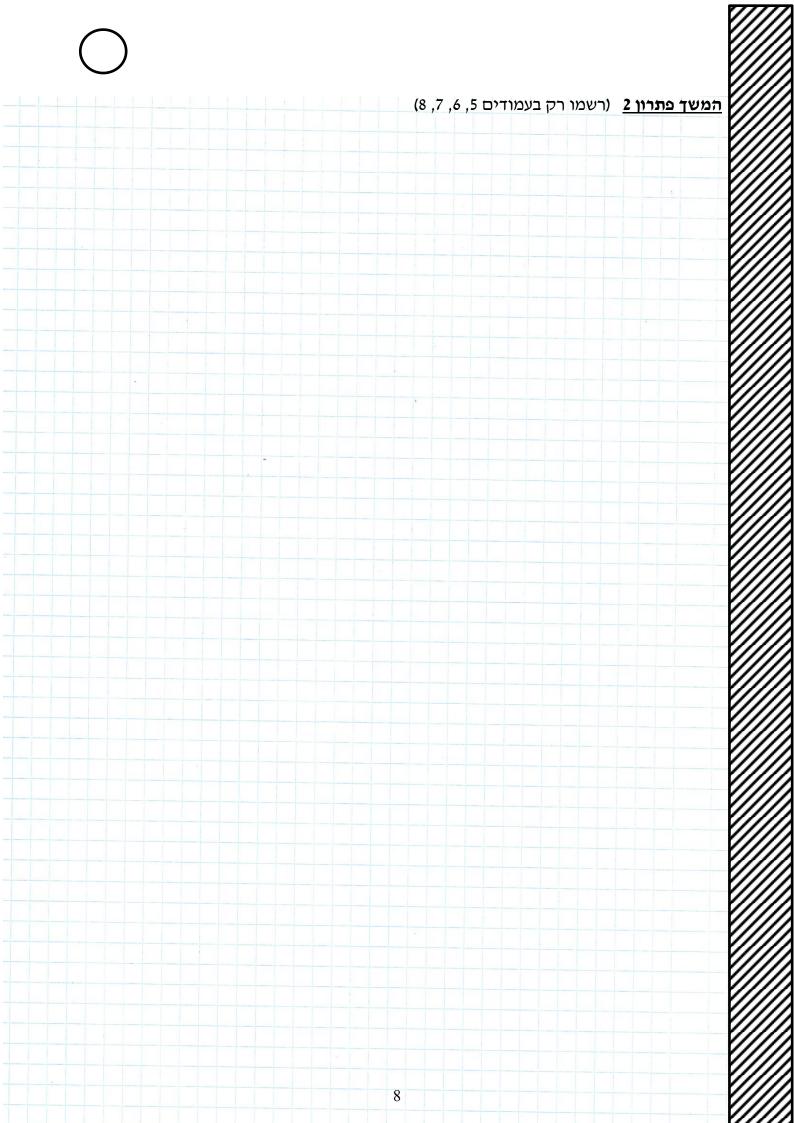
פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)







(רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8) <u>המשך פתרון 2</u>







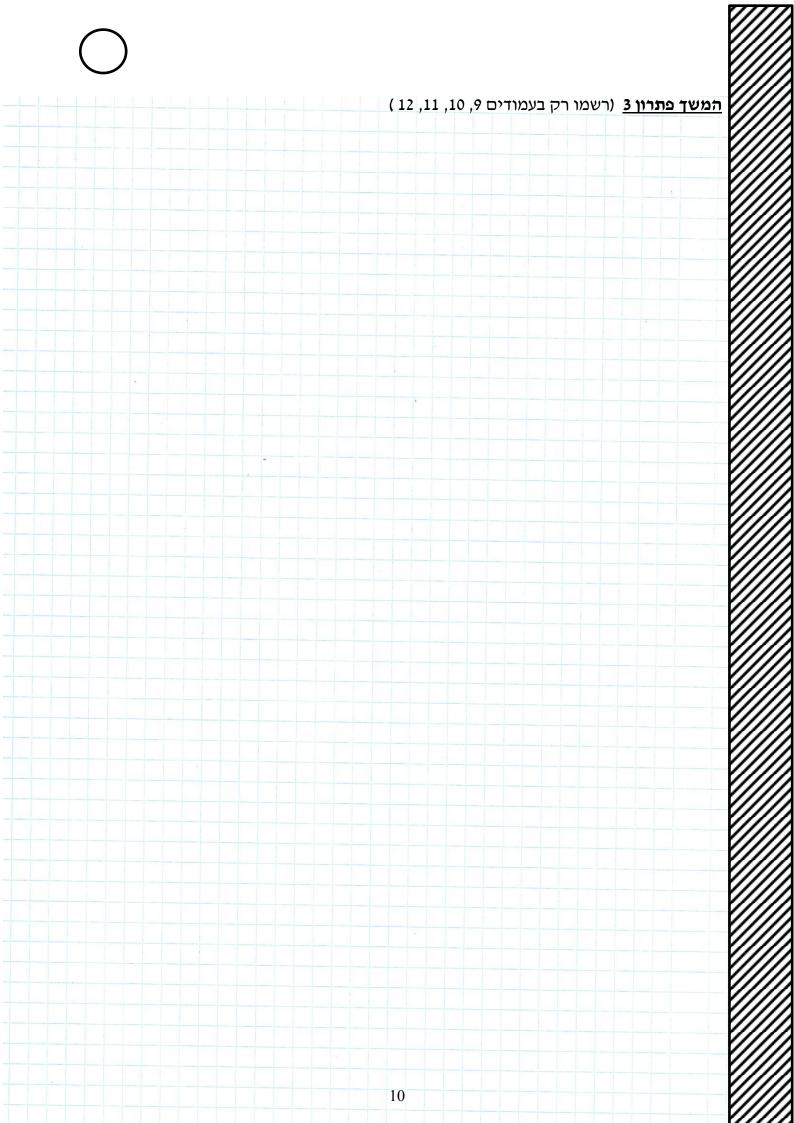
## שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{-x+1}{x-3}, & x \neq 3 \\ a, & x = 3 \end{cases}$$
 על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  נתונה פונקציה  $a \in \mathbf{R}$  על ידי  $a \in \mathbf{R}$ 

. נמקו f כך ש- f פונקציה הפיכה ומצאו את פונקצית ההופכית  $a\in \mathbf{R}$  מצאו מספר מצאו

ב. (10 נקי) הוכיחו כי לכל x > 0 מתקיים: x > 0 הוכיחו כי לכל

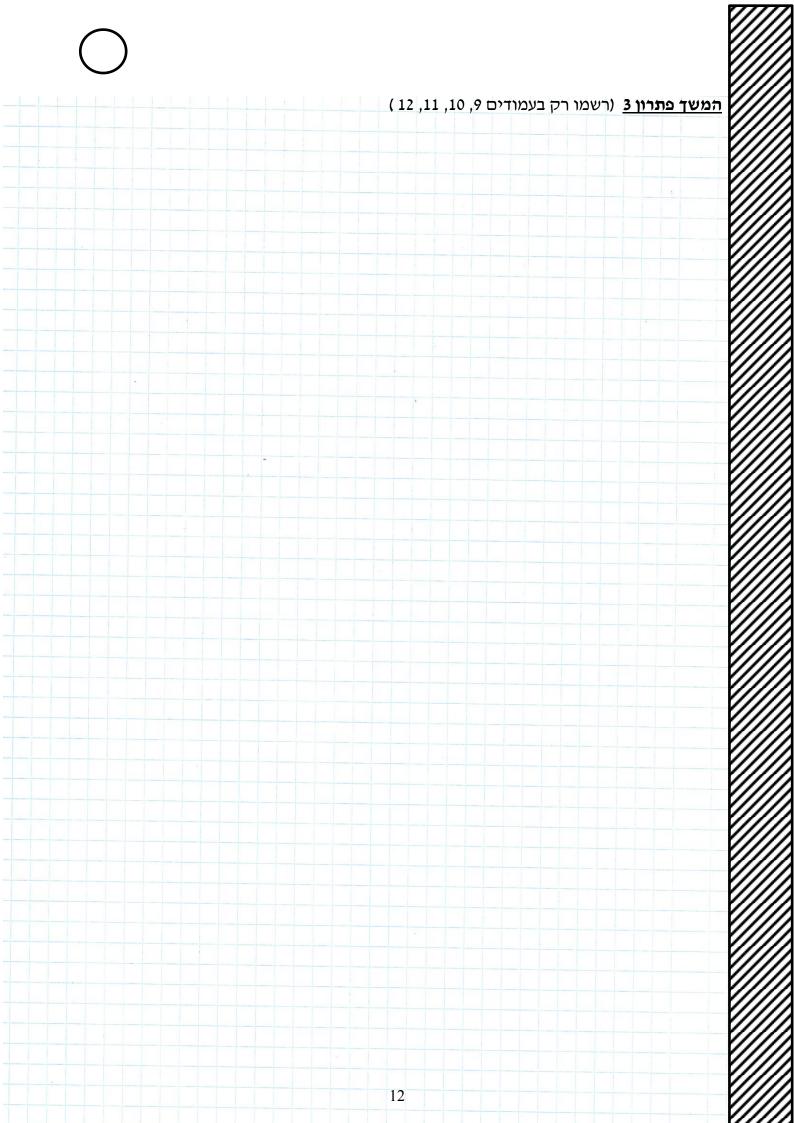
(12 ,11 ,10 ,9 בעמודים 9, 10, 11, 12 )







בחינות – היחידה למתמטיקה <u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12 )







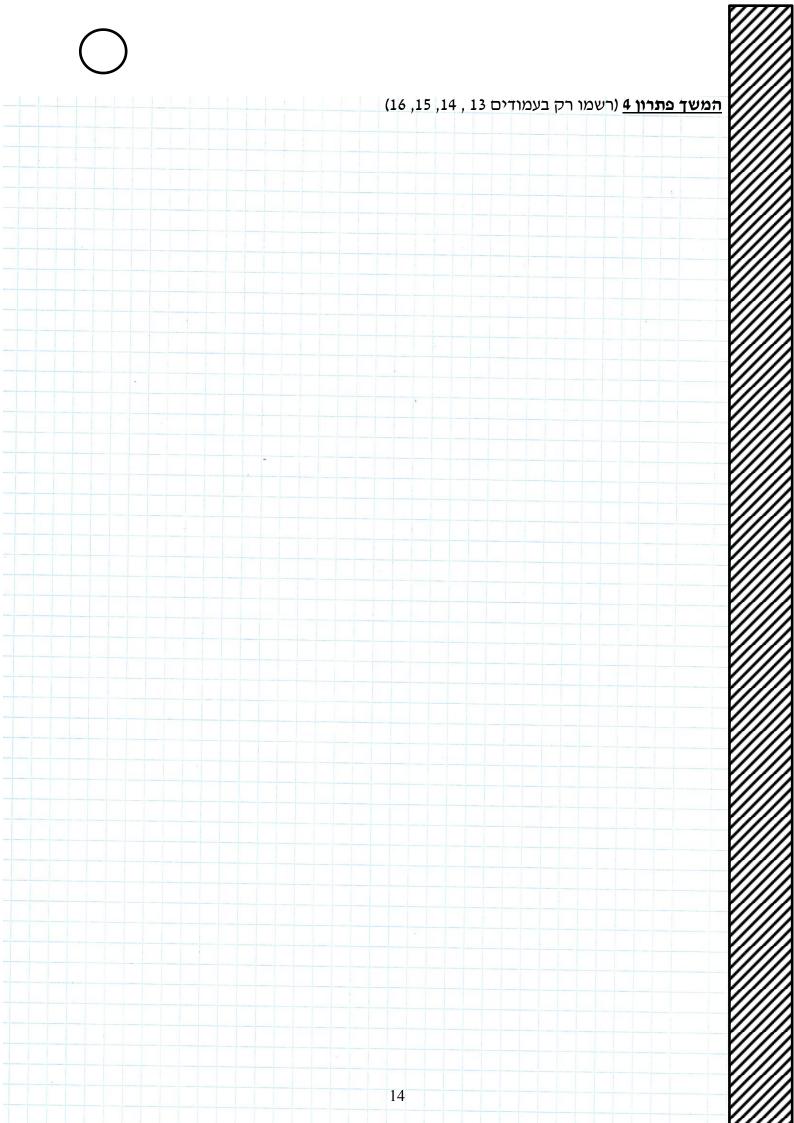
## בחינות – היחידה למתמטיקה <u>שאלה 4</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳</u>

$$f(x) = \left(1 + 8x\right)^{1/2}$$
 של  $n = 3$  מסדר Maclaurin א. (10 נקי) את פולינום

! נמקו 
$$x>-\frac{1}{8}$$
, לכל  $\sqrt{1+8x}-(1+4x-8x^2+32x^3)\leq 0$  . נמקו .2

$$\cos(2x) + x - 1 - \int\limits_0^x e^{3t^2} dt$$
י נמקו !  $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$  חשבו את הגבול:

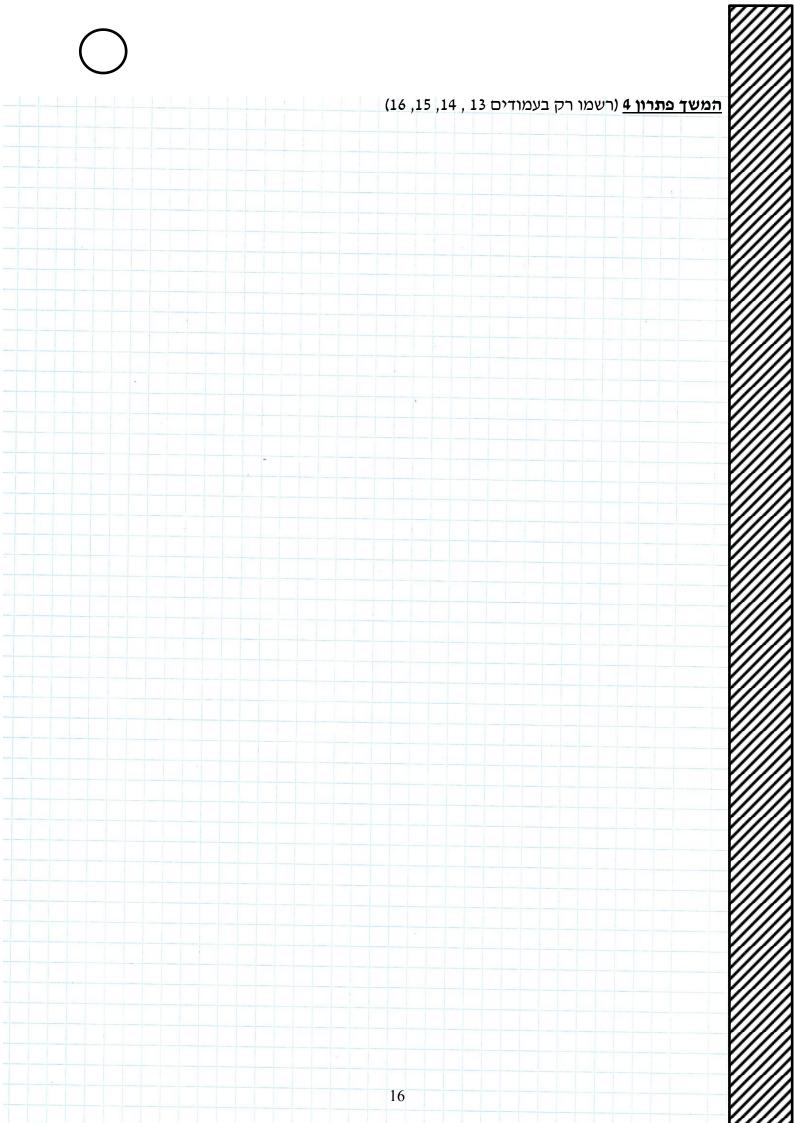
פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)







בחינות – היחידה למתמטיקה <u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)





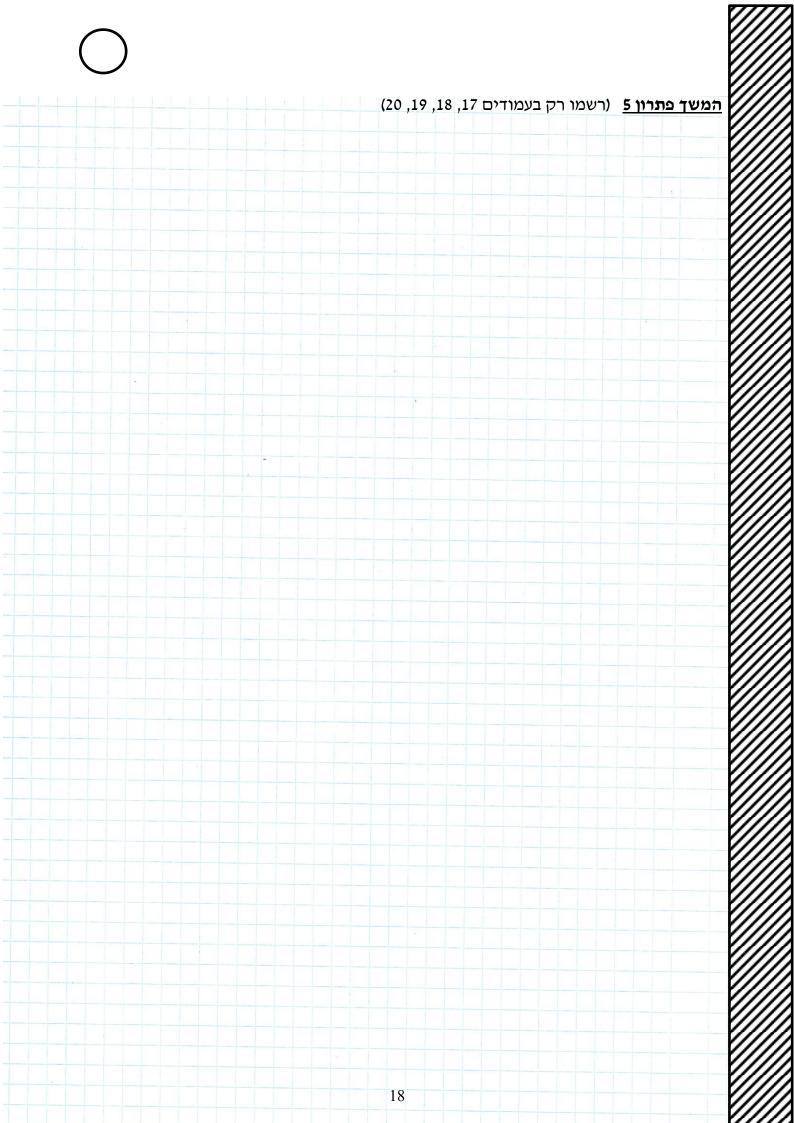


### שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

ינמקו !  $\sin\left(\sqrt{x+5}\right)dx$  א. (10 נקי) מצאו את את ואת את

! נמקו  $f(x) = (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$  אנכית של x = 0 אסימפטוטה אנכית אסימפטוטה אנכית אי

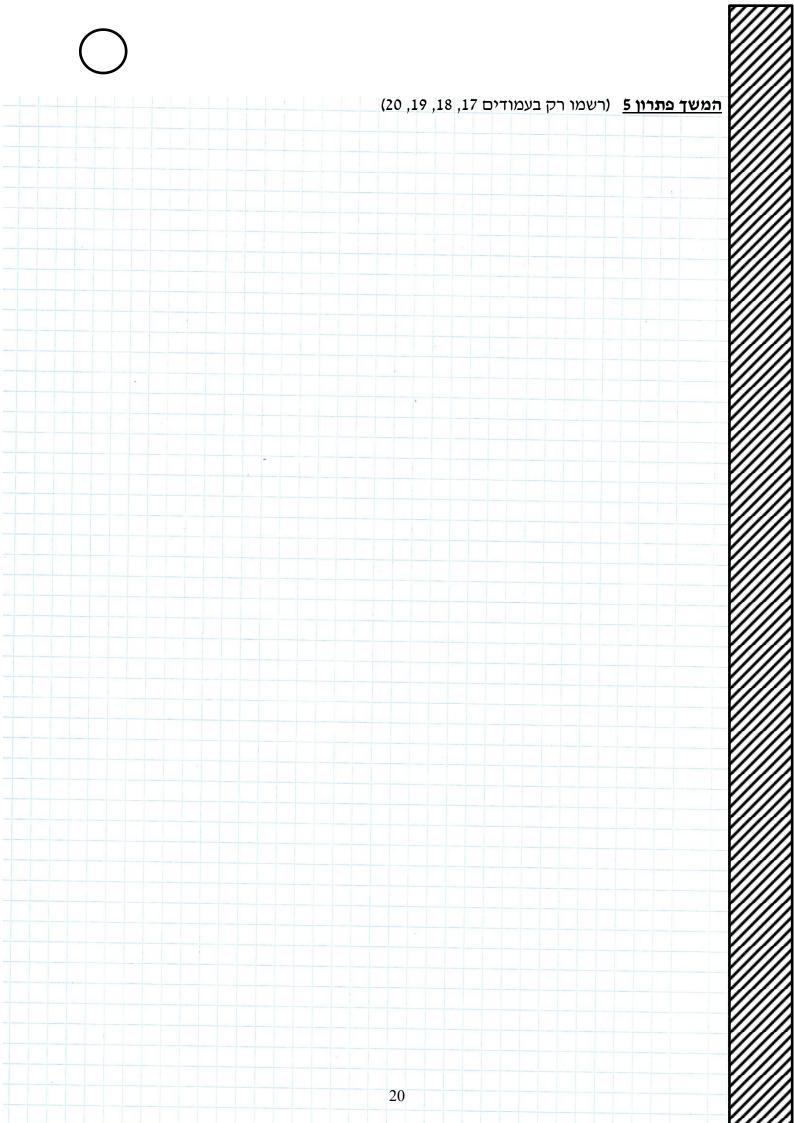
פתרון **5** (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)







בחינות – היחידה למתמטיקה <u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)







## שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

$$f(x) = \begin{cases} 10x-1 & , x \ge 1 \\ 13-4x & , x < 1 \end{cases}$$
 על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  על ידי נגדיר פונקציה רציפה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

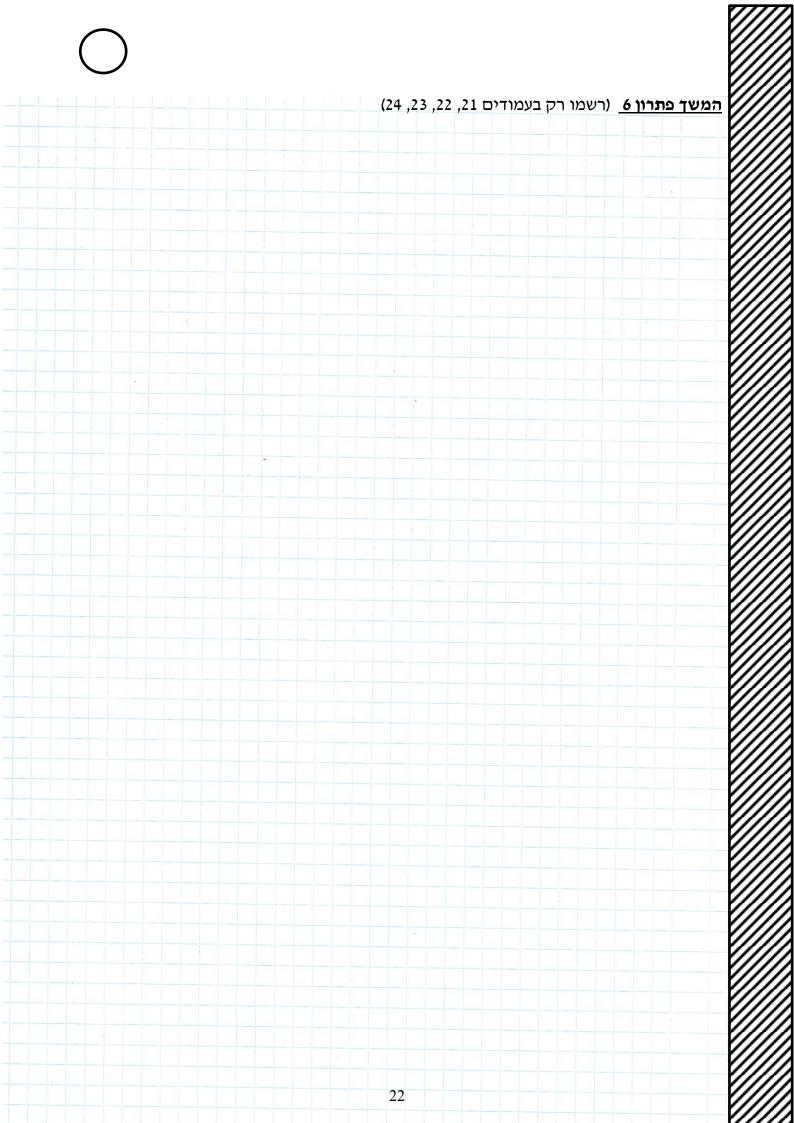
 $x \in \mathbf{R}$  מצאו פונקציה F'(x) = f(x) -- ו- F(0) = 0, ו- F'(x) = F(x), לכל  $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מצאו פונקציה  $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  כך ש-

$$I = (0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$$
 מוגדרת בקטע בקטע  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$  נתונה פונקציה (10 נקי) נתונה פונקציה

נקודות f בעלת נקודות מקסימום מוחלט בקטע I, אבל אין לפונקציה f נקודות בעימום מוחלט בקטע f. האם הטענה האחרונה סותרת את משפט Weierstrass מינימום מוחלט בקטע

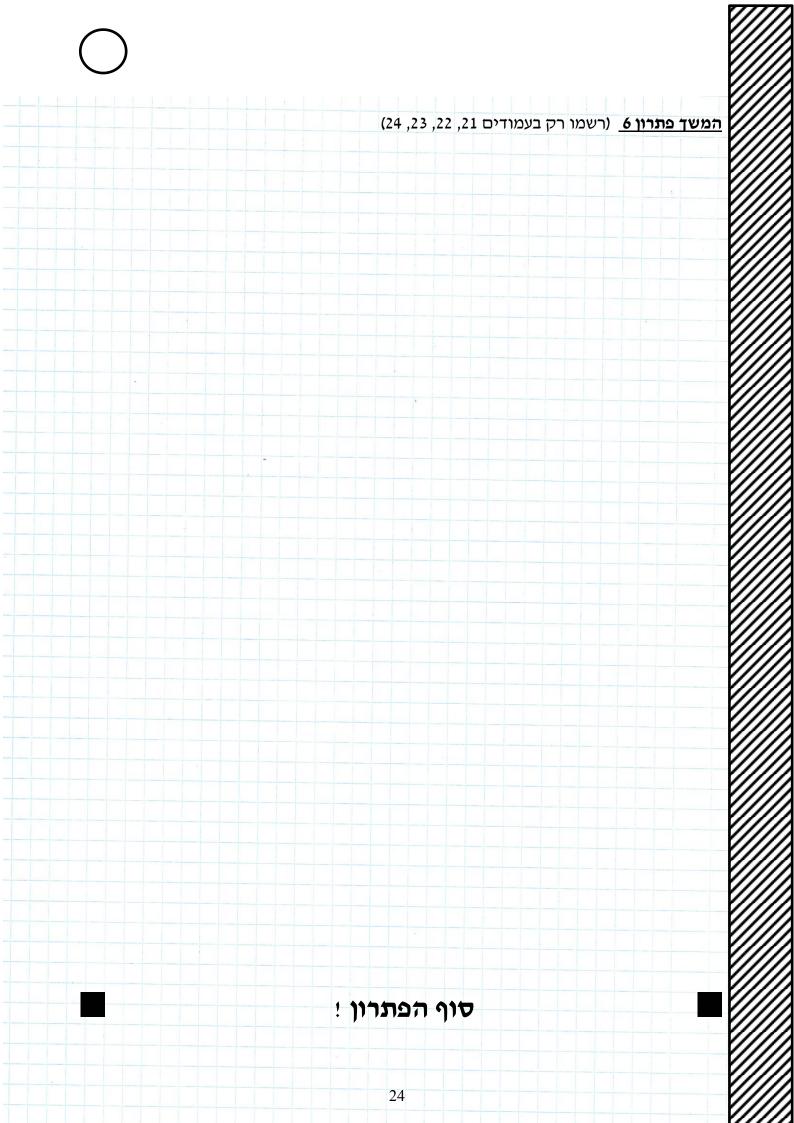
 $e^{-1/2} \le x \le e^3$  בקטע בקטימלי את הערך המינמלי של הפונקציה בקטימלי ואת הערך המקסימלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה בקטימלי ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה בקטימלי ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה ואת הערך המינמלי ואת הערך ואת הערך ואת הערך הערדה ואת הערך ואת הערך הערך ואת העדר ואת הערך ואת הערך ואת הערך ואת הערך ואת הערך ו

(24, 23, 22, 21, בעמודים 21, 22, 23, 24) **בתרון** 





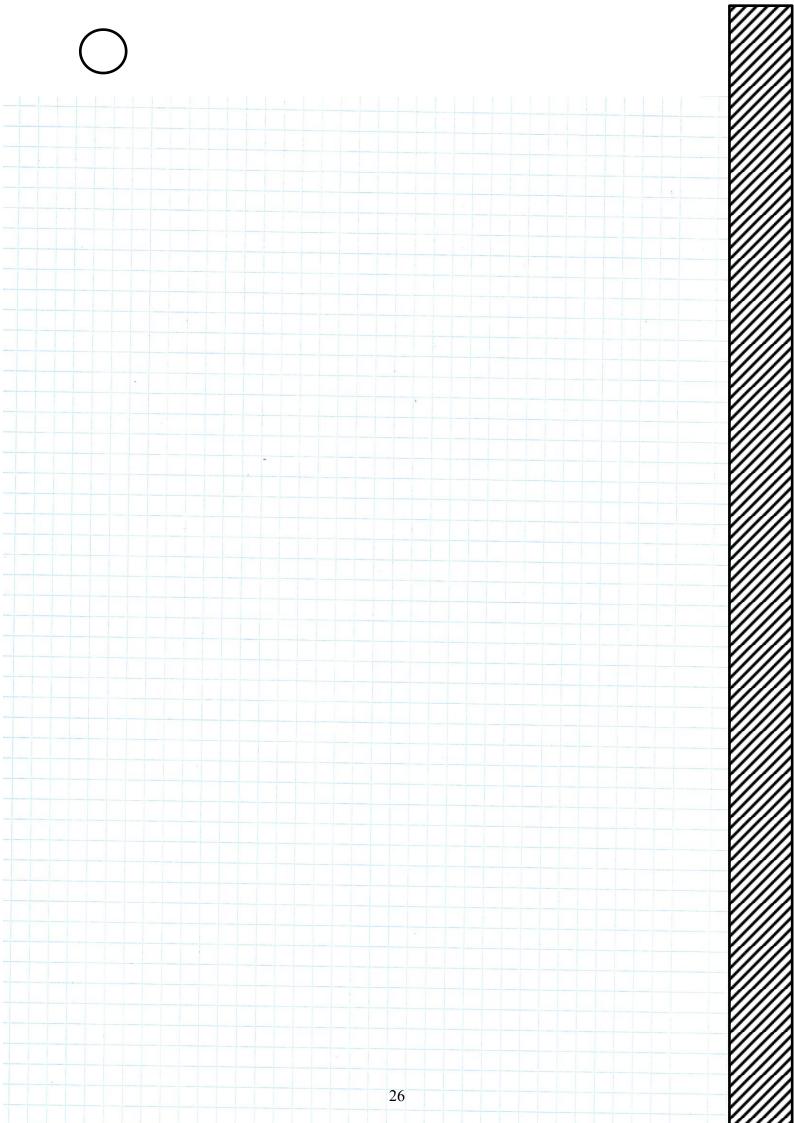






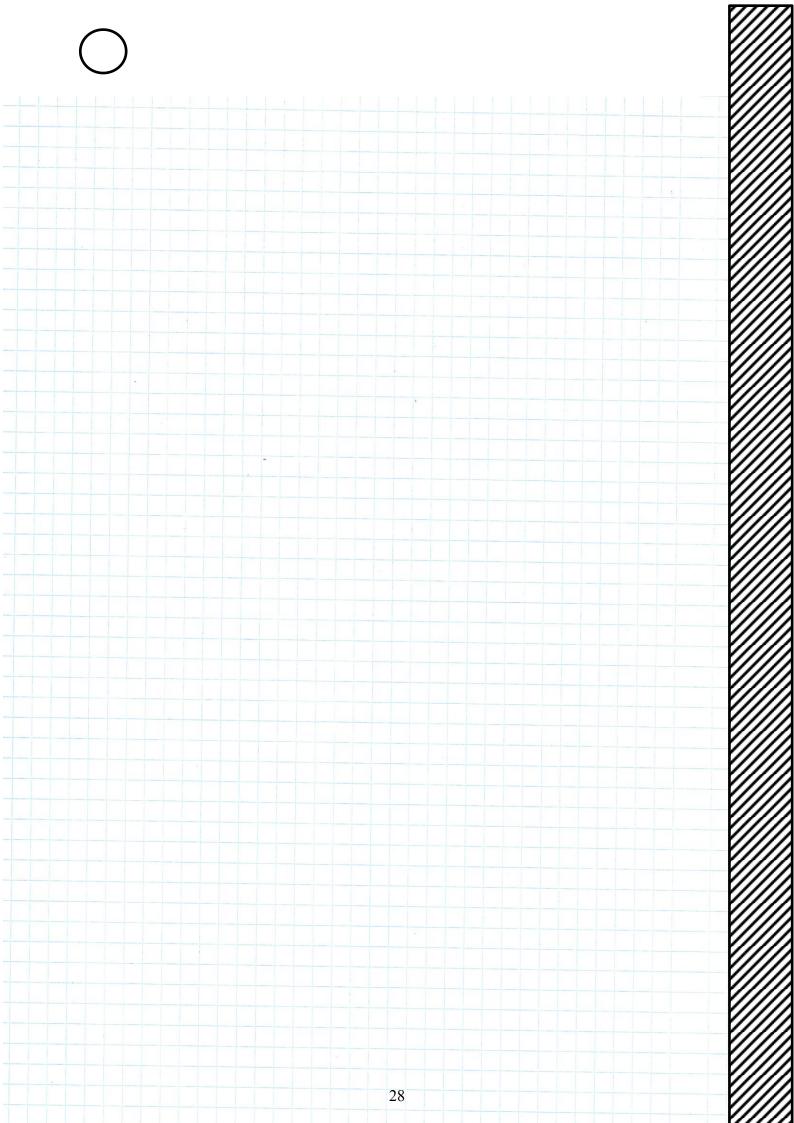


אסקה המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב בחינות – היחידה למתמטיקה









# אין לכתוב בעמוד זה



## מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X1

#### שאלה 1 (20 נקודות)

. 
$$\lim_{n\to\infty}\Biggl(\frac{7n^2+\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+(n-1)}}{\sqrt{16n^6+2}}+...+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}\Biggr)$$
 השבו את הגבול (100 נקי) איי וואס הגבול (200 נמקו !

,  $f(x) = 1 + 3x - x^3$  חשבו ארף הפונקציה בין העקומות הבאות: גרף הפונקציה את השטח הכלוא בין העקומות הבאות: x = 4 ומשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום המקומי שלה. נמקו והישרים x = 4

#### שאלה 2 (20 נקודות)

! נמקו . 
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$$
 נמקו . נמקו !

ב. (10 נקי) תהיה  ${f R} \to {f R}$  תהיה  ${f f}: {f R} \to {f R}$  מוגדרת (כלומר הנגזרת הראשונה  $f: {f R} \to {f R}$  מוגדרת  $f: {f R} \to {f R}$  תהיה  $f: {f R} \to {f R}$  פונקציה גזירה ברציפות (בעים הביל נקודה ב- ${f R}$ ). ידוע כי קו המשיק לגרף הפונקציה  $f: {f R}$  בנקודה  $f: {f R}$  במקודה  $f: {f R}$  שני הישרים הנייל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה  $f: {f C}$  בעם אחת ב- $f: {f R}$  (כלומר נגזרת הפונקציה  $f: {f R}$  מתאפסת לפחות פעם אחת ב- $f: {f R}$  (כלומר נגזרת הפונקציה  $f: {f R}$  מאונכים אם ורק אם  $f: {f R}$  הערה: ידוע ששני ישרים  $f: {f R}$  בי  $f: {f R}$  מאונכים אם ורק אם  $f: {f R}$ 

#### שאלה <u>3</u> (20 נקודות)

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{x-3}, & x \neq 3 \\ a, & x = 3 \end{cases}$$
 על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  נתונה פונקציה  $a \in \mathbf{R}$  על ידי  $a \in \mathbf{R}$ 

. נמקו פונקצית ההופכית הפיכה ומצאו את פונקציה f -ש כך  $a \in \mathbf{R}$  מצאו מספר מצאו מספר

ב. (10 נקי) הוכיחו כי לכל x > 0 מתקיים: x > 0 . נמקו!

#### שאלה 4 (20 נקודות)

.  $f(x)=\left(1+8x\right)^{1/2}$  של n=3 מסדר Maclaurin א. (10 נקי) א. את פולינום מסדר  $x>-\frac{1}{8}$ , לכל  $\sqrt{1+8x}-\left(1+4x-8x^2+32x^3\right)\leq 0$  . נמקו י

$$\cos(2x) + x - 1 - \int_0^x e^{3t^2} dt$$
 ב.  $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x) + x - 1 - \int_0^x e^{3t^2} dt}{x^2}$  נמקו !



#### שאלה <u>5</u> (20 נקודות)

- י נמקו (גמקו) א.  $\int \sin\left(\sqrt{x+5}\right) dx$  את את את 10) א.
- י נמקו !  $f(x) = (2 \cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$  ב. (10 נקי) האם הקו x = 0 מהווה אסימפטוטה אנכית של

#### <u>שאלה 6</u> (20 נקודות)

 $f(x) = \begin{cases} 10x - 1 & , x \ge 1 \\ 13 - 4x & , x < 1 \end{cases}$  על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  על ידי (10 נקי) נגדיר פונקציה רציפה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

F'(x)=f(x) ו- F(0)=0, ו- F(0)=0, לכל  $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$  מצאו פונקציה  $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$  כך ש-  $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$  לכל נמקו !

- $I = (0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$  מוגדרת בקטע  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$  מוגדרת בקטע נתונה פונקציה (10 נקי)
- נקודות אבל אין לפונקציה f בעלת נקודות מקסימום מוחלט בקטע בעלת נקודות בעלת נקודות .1 עלימום פוחלט בקטע אין אינימום מוחלט בקטע .I האם הטענה האחרונה סותרת את משפט יינימום מוחלט בקטע
- $e^{-1/2} \le x \le e^3$  בקטע בקטימלי את הערך המינמלי של הפונקציה בקטימלי ואת הערך המקסימלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה ישל נמקו !

## בהצלחה!

יש לתלוש את הדף הזה! הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק!



**שם הקורס:** חשבון דיפרנציאלי אינטגרלי1

**קוד הקורס**: 90901

הוראות לנבחן:

• חומר עזר שימושי לבחינה:

3 דפי נוסחאות לכל הסטודנטים.

הרחבת דף נוסחאות למבחן בחדו"א 1 רק לזכאים.

• אין לכתוב בעפרון / עט מחיק

• אין להשתמש בטלפון סלולארי • גינו לבשתמש במחשב גינשו גיו נונ

• אין להשתמש במחשב אישי או נייד

• אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר

• אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

• אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

26/01/23

09:00

דקות

תאריך ושעת הבחינה:

**משך הבחינה:** 180

**שנה:** תשפ"ג

'סמסטר: א

מועד א

מרצי הקורס:

פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד״ר שלוסברג מנחם, ד״ר גבל מיקה, ד״ר רוזנצויג ליאור, ד״ר איילי נחשון, ד״ר אמיר ענת, ד״ר סגל אלכסנדר, ד״ר אולבסקי ויקטור, ד״ר ראיצ׳יק אירינה, ד״ר לייטנר אריאלה מירה, ד״ר בר לוקיאנוב ולדימיר, ד״ר מגנזיק אבלין, ד״ר מכורה מיכאל מרצין

#### \*\*\* שאלון הבחינה ייבדק על ידי המרצה

#### מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור 5 שאלות מתוך 6 השאלות שמספרן 1-6. שווי כל שאלה 20 נקודות. בקובץ התשובות שישלח לבדיקה הפתרונות חייבים להופיע לפי סדר העולה של מספר השאלות! יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל סעיף בדף חדש ורק במקום המיועד לכך.

\*\*\*\* תשובות שיכתבו במקום אחר לא יבדקו

השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך.

יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.

\*\*\*\*יש לתלוש רק את הדף האחרון (דף השאלות המרוכז). הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק\*

## בהצלחה!

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.



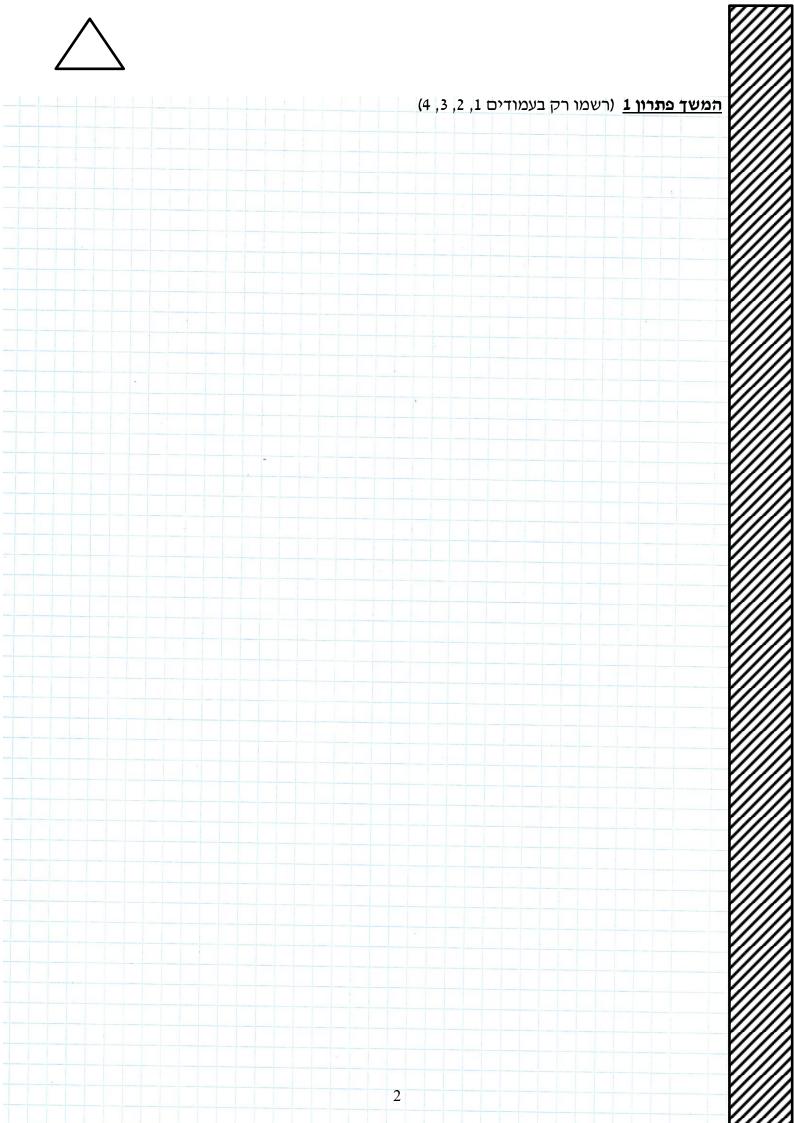


## שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

$$\lim_{n o\infty}igg(rac{\sqrt{n^4+1+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}+rac{\sqrt{n^4+2+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n-1}}+...+rac{\sqrt{n^4+n+\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}igg)$$
א. (10 נקי) חשבו את הגבול וואר הגבול

 $g(x) = 2 - x^3 + 3x$  חשבו את השטח הכלוא בין העקומות הבאות: גרף הפונקציה את חשבו את השטח הכלוא בין העקומות הבאות: x = 0 חשבים x = 0 ומשיק לגרף הפונקציה x = 0 בנקודת המקסימום המקומי שלה. נמקו ו

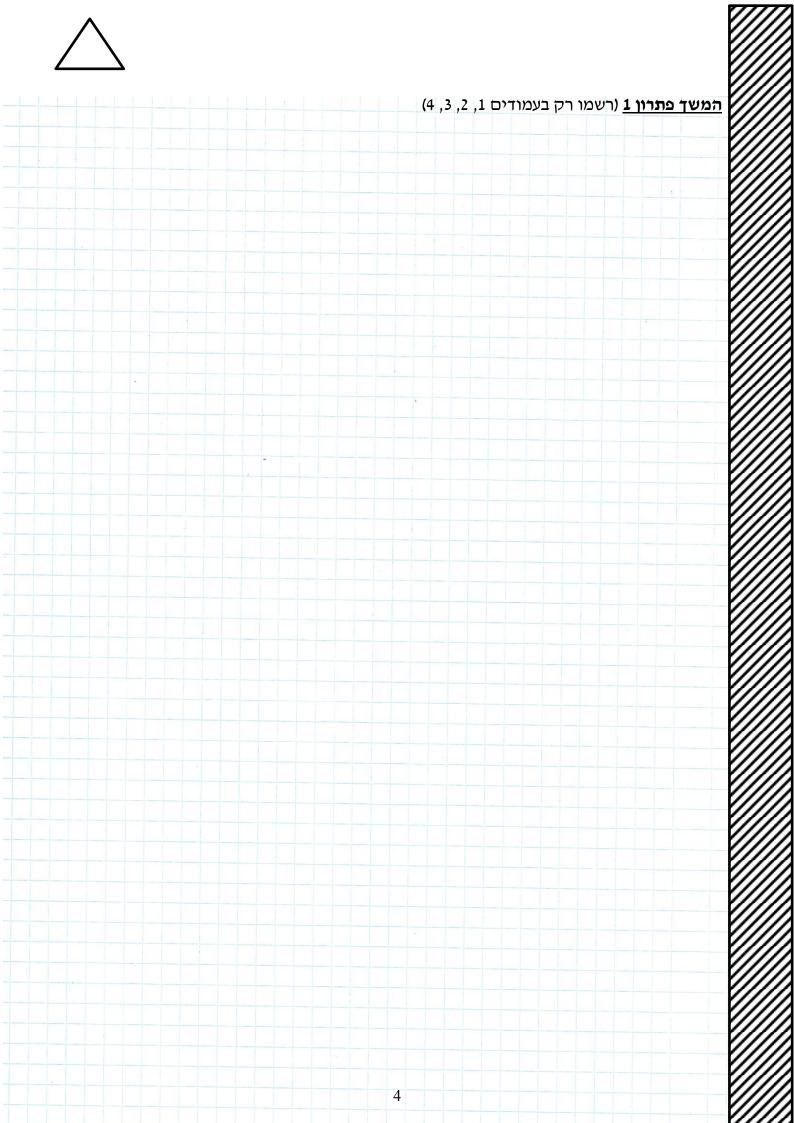
**פתרון 1** (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)







בחינות – היחידה למתמטיקה המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)





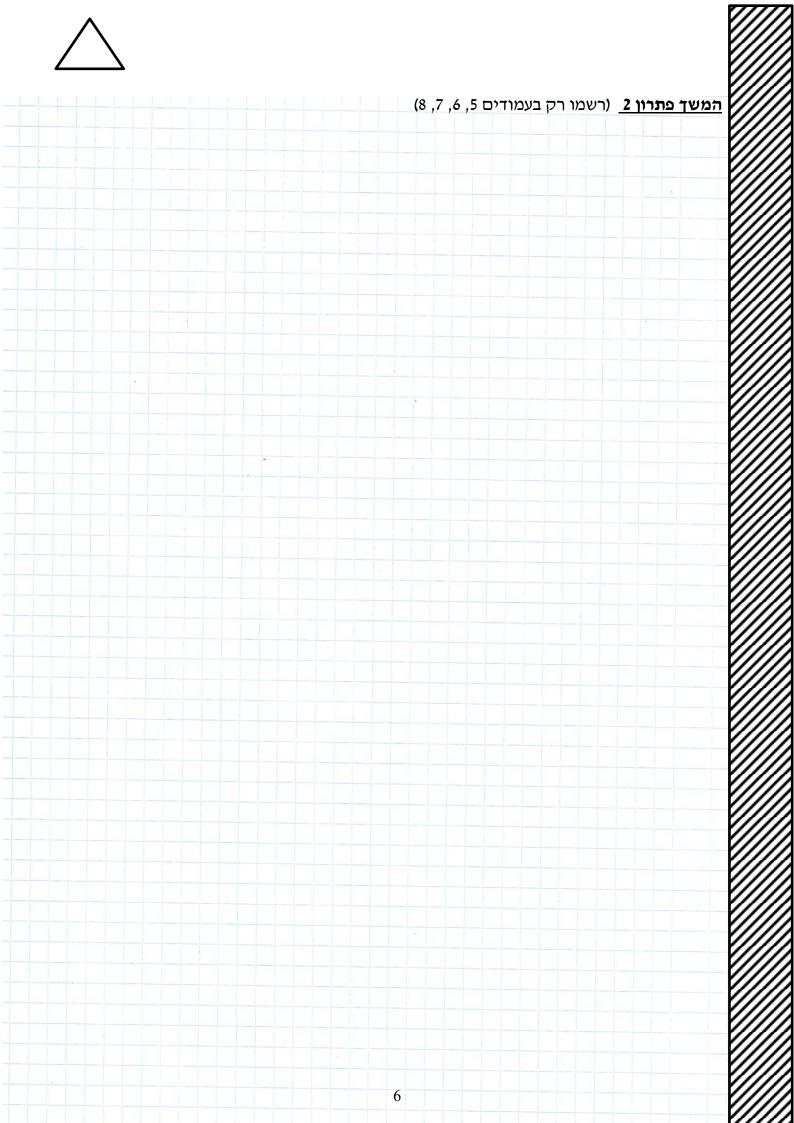


שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

! נמקו . 
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$$
 נמקו . נמקו !

ב. (10 נק") תהיה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  פונקציה גזירה ברציפות (כלומר הנגזרת הראשונה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מוגדרת  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונך לקו המשיק ורציפה בכל נקודה ב-  $g: \mathbf{R}$ . ידוע כי קו המשיק לגרף הפונקציה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונך לקו המשיק לגרף הפונקציה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ , ושני הישרים הנייל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  בנקודה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ , ושני הישרים הנייל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  (כלומר נגזרת הפונקציה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ). נמקו פעם אחת ב-  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונכים אם ורק אם  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מאונכים אם ורק אם  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

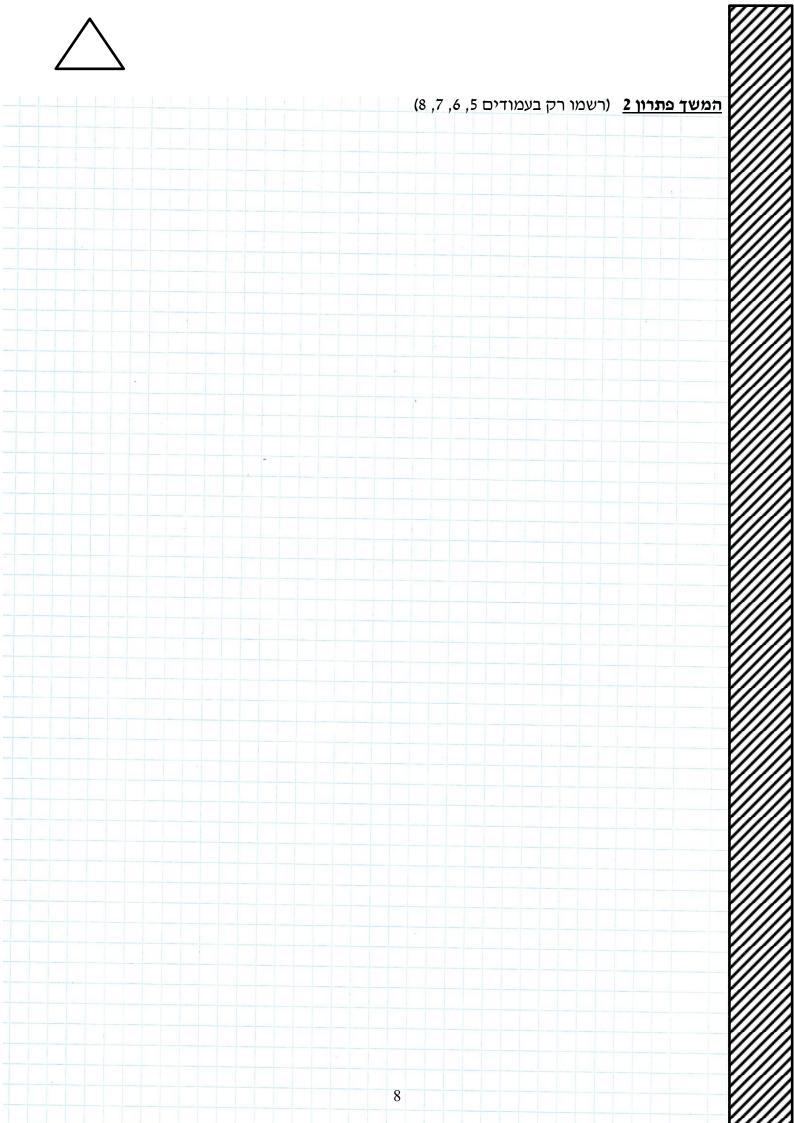
פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)







בחינות – היחידה למתמטיקה משך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)







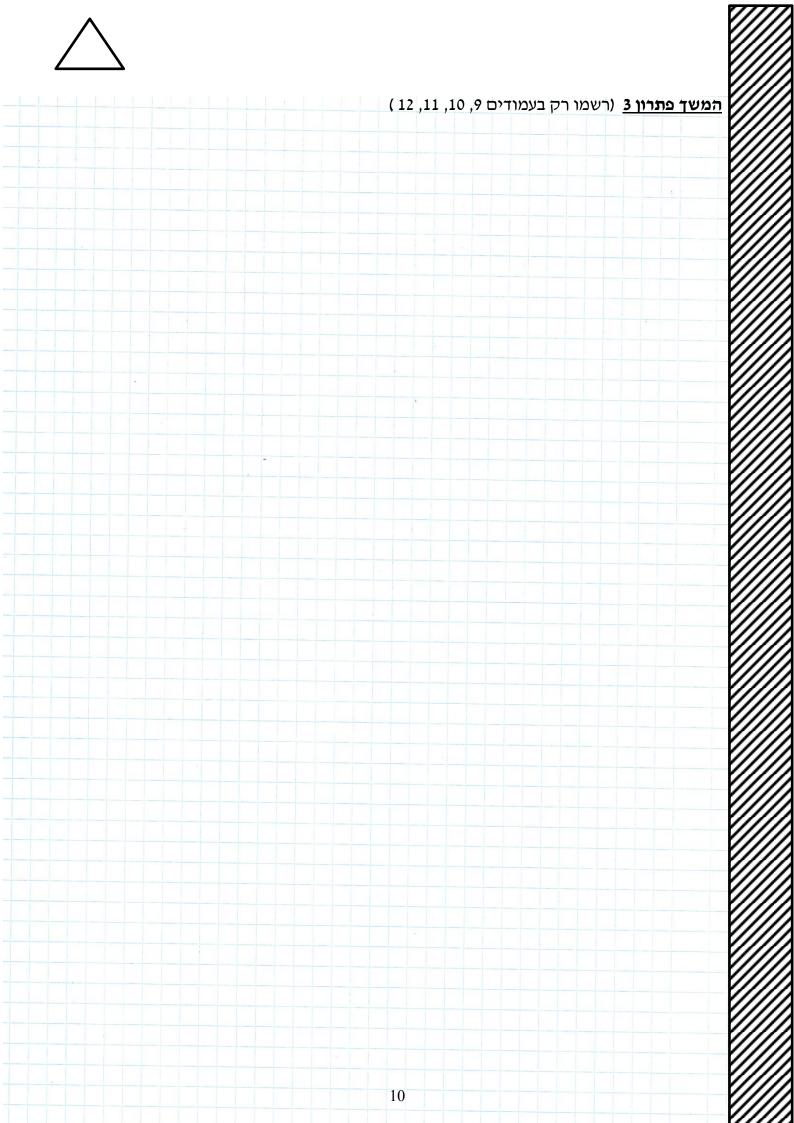
## שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב׳

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{-x+1}, & x \neq 1 \\ m, & x = 1 \end{cases}$$
על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  נתונה פונקציה  $m \in \mathbf{R}$  על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

. נמקו f כך ש- f פונקציה הפיכה ומצאו את פונקצית ההופכית f כך ש-  $m \in \mathbf{R}$ 

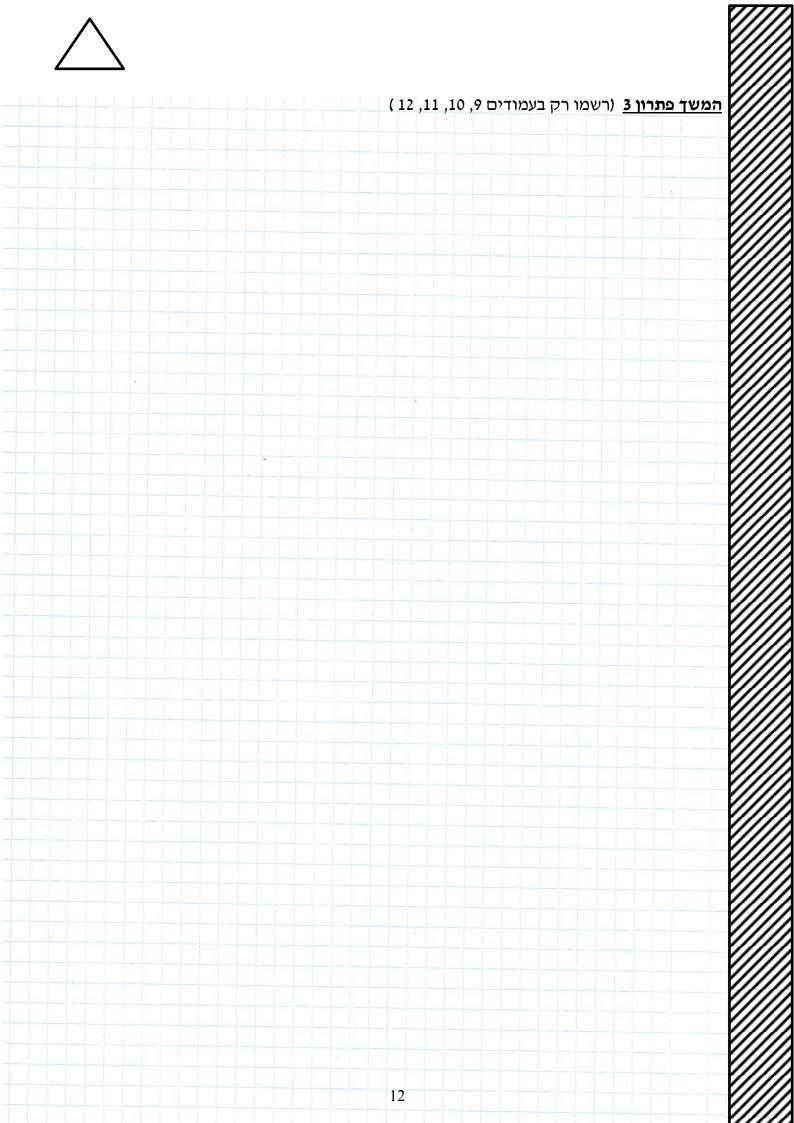
ב. (10 נקי) הוכיחו כי לכל x>0 מתקיים:  $(2x) + 2 \ln(2x)$ . נמקוי

פתרון <u>3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)













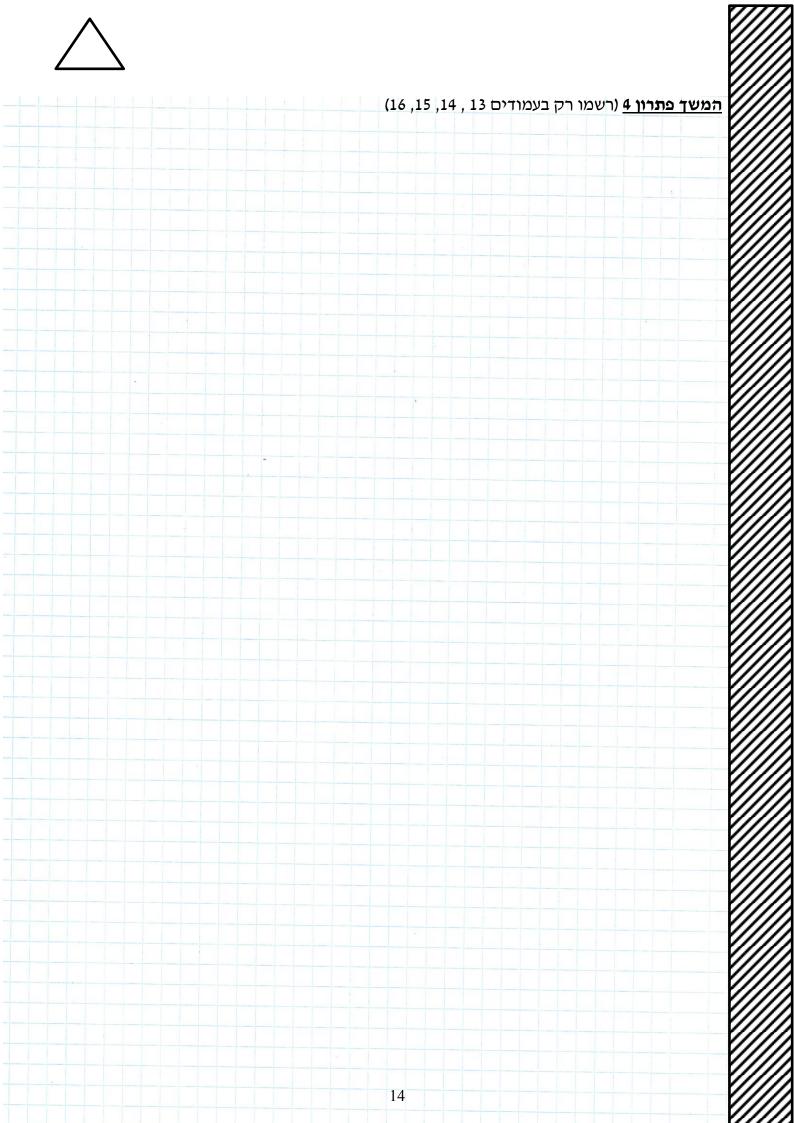
## בחינות – היחידה למתמטיקה <u>שאלה 4</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳</u>

$$f(x) = (1+4x)^{1/2}$$
 של  $n=3$  מסדר Maclaurin מסדר 1. מצאו את פולינום

! נמקו ש-
$$x>-rac{1}{4}$$
 לכל ,  $\sqrt{1+4x}-(1+2x-2x^2+4x^3)\leq 0$  . נמקו י

$$\cos(3x)-x-1+\int\limits_{0}^{x}e^{2t^{2}}dt$$
י נמקו ! נמקו את הגבול:  $\frac{10}{x^{2}}$ 

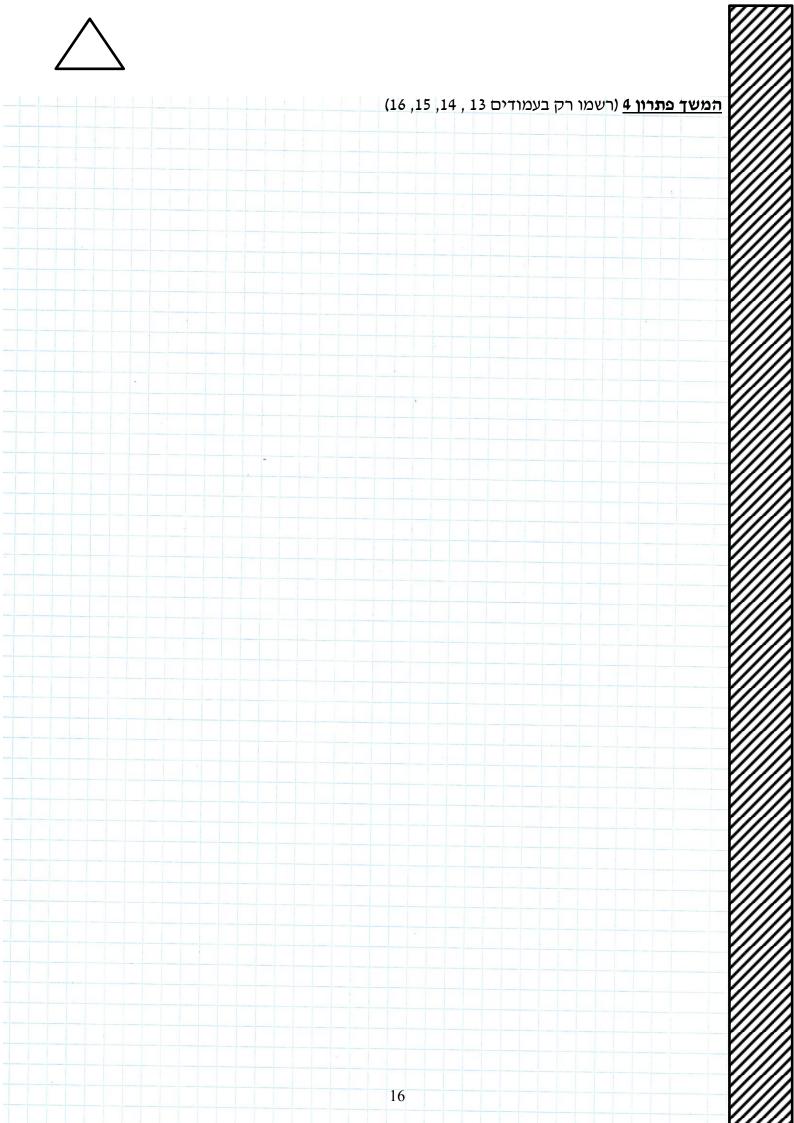
פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16, 16)







בחינות – היחידה למתמטיקה <u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)





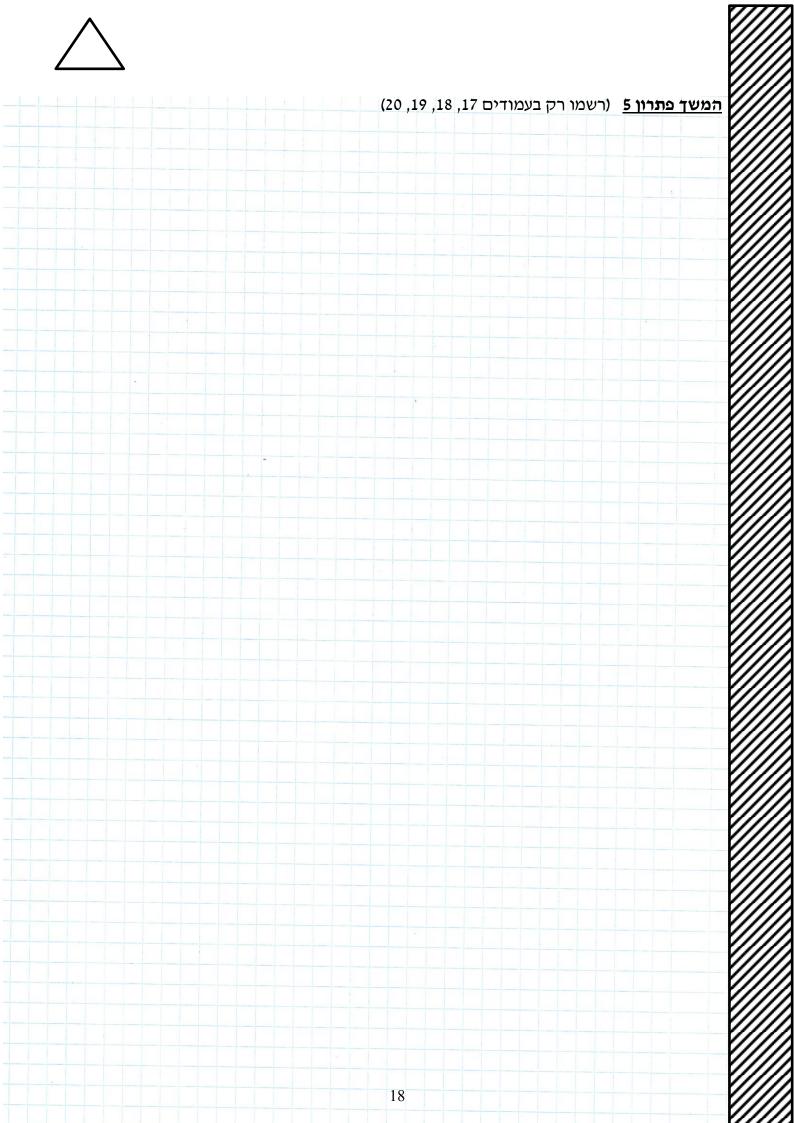


### שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

! נמקו
$$\int \cos\left(\sqrt{2x-8}\,
ight)dx$$
 נמקו.  $\int \cos\left(\sqrt{2x-8}\,
ight)$ 

י נמקו ! 
$$f(x) = \left[3 - 2\cos x\right]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$
 ב. (10 נקי) האם הקו $x = 0$  מהווה אסימפטוטה אנכית של

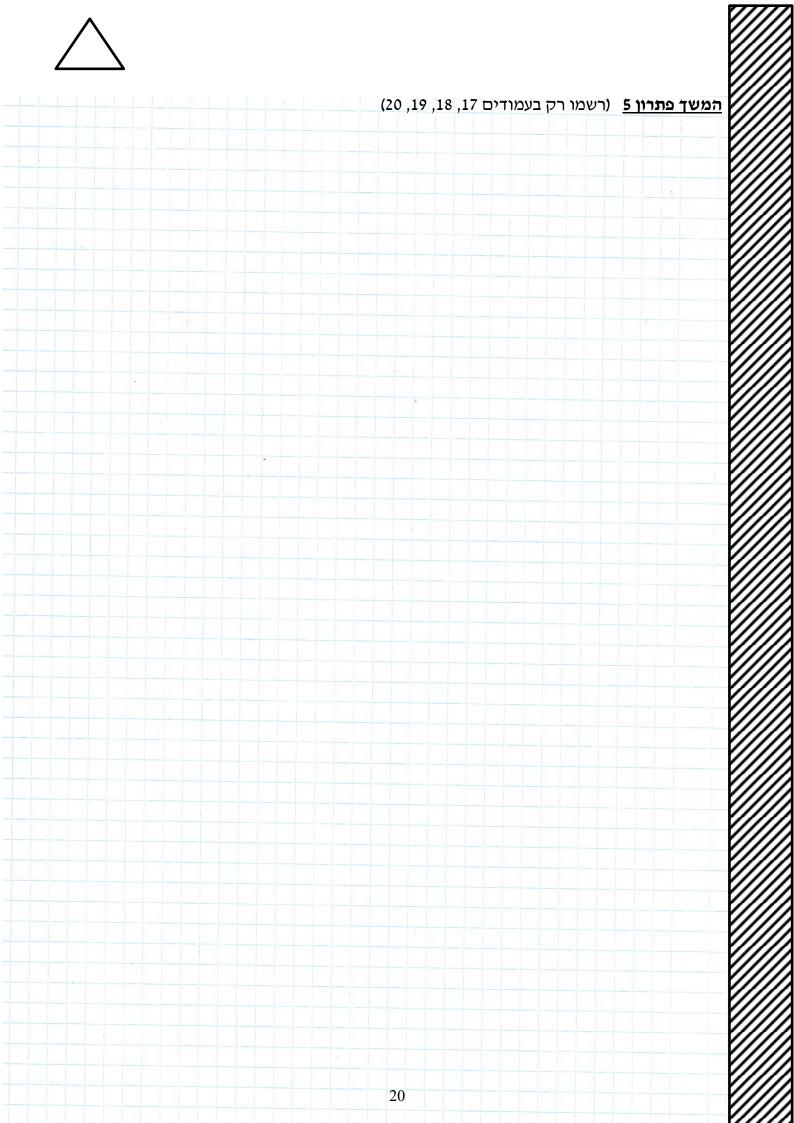
פתרון **5** (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)







בחינות – היחידה למתמטיקה <u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)







## שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

$$f(x) = \begin{cases} 8x+1 & , x \geq 2 \\ 21-2x & , x < 2 \end{cases}$$
 על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

.  $x \in \mathbf{R}$  כך ש- F'(x) = f(x) ו- F(0) = 0, ו- F(0) = 0, לכל לכל  $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  כך ש-  $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  ו- F(0) = 0, לכל מקאו פונקציה נמקו !

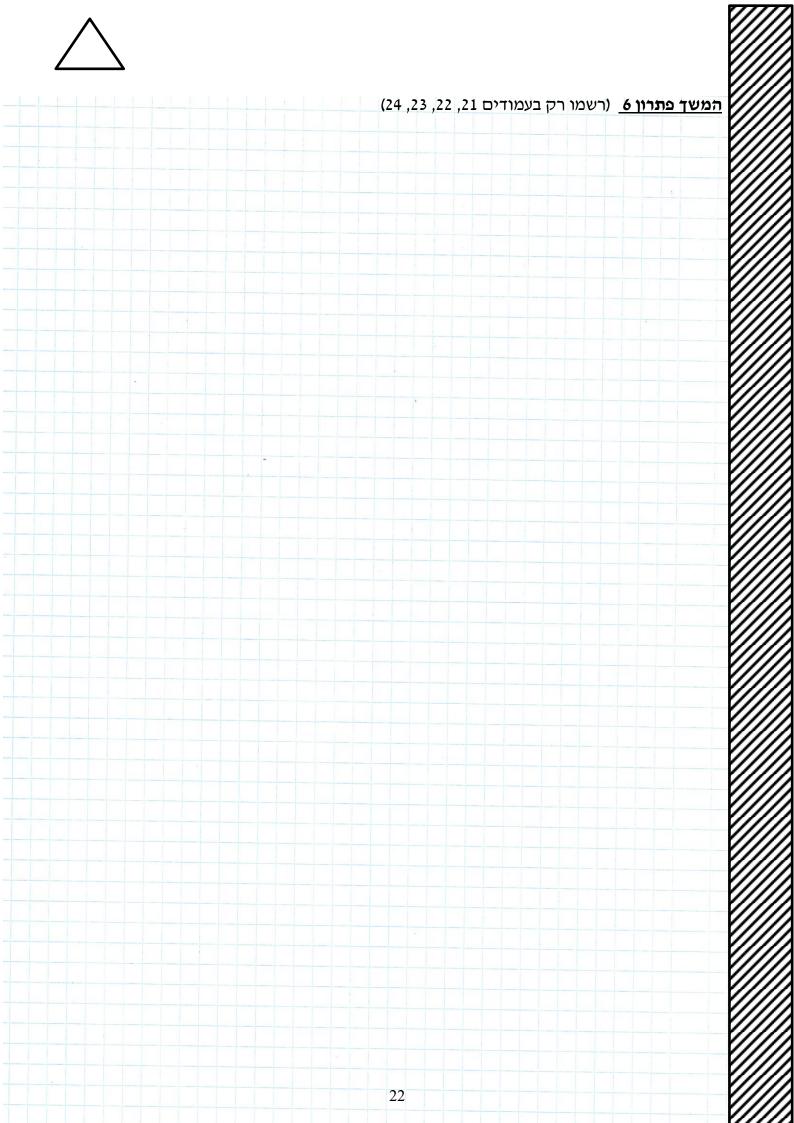
$$I = (0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$$
 מוגדרת בקטע  $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} + x^{-1}$  מוגדרת בקטע (10 נקי) נתונה פונקציה

נקודות קביחו שהפונקציה f בעלת נקודות מקסימום מוחלט בקטע f, אבל אין לפונקציה f נקודות מינימום מוחלט בקטע I. האם הטענה האחרונה סותרת את משפט Weierstrass י

בקטע 
$$f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} + x^{-1}$$
 מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינמלי של הפונקציה.

! נמקו .  $e^{-2} \le x \le e^2$ 

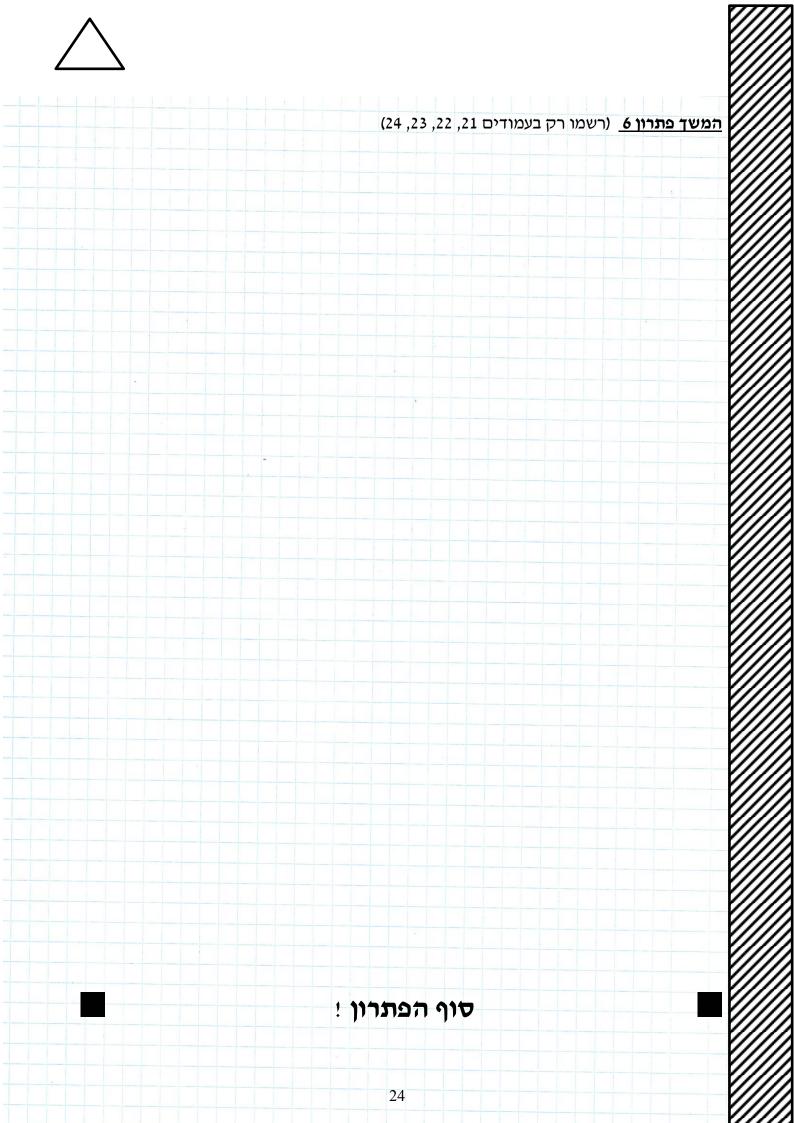
פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)





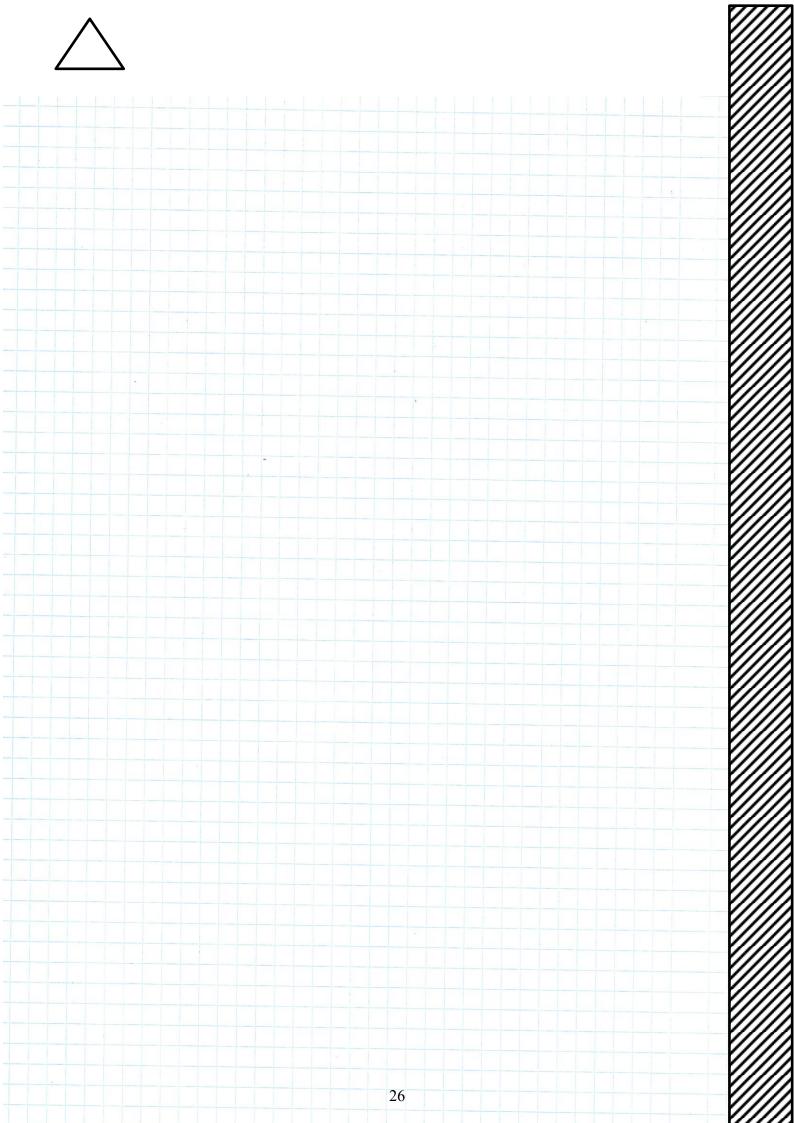


בחינות – היחידה למתמטיקה <u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)



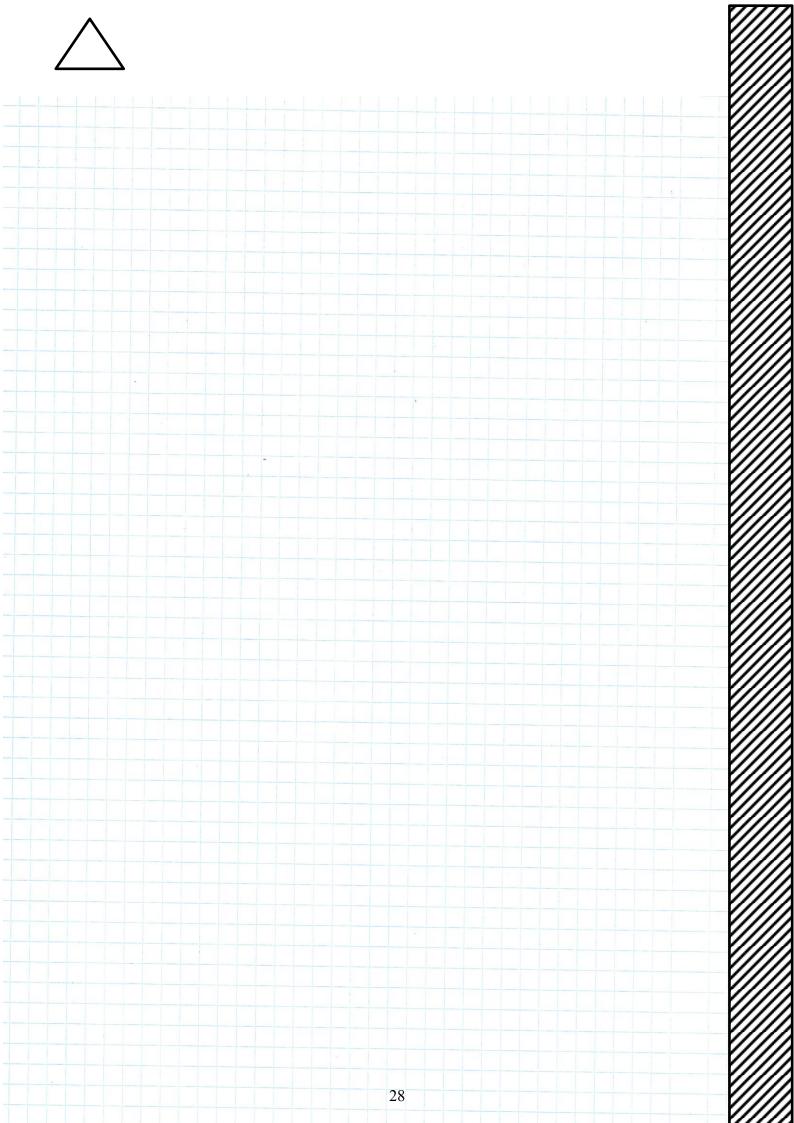












# אין לכתוב בעמוד זה



## מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X2

#### שאלה 1 (20 נקודות)

. 
$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + \frac{\sqrt{n^4 + 2 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + (n - 1)}} + ... + \frac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} \right)$$
 א. (10 נקי) חשבו את הגבול

 $g(x) = 2 - x^3 + 3x$  חשבו ארף הפונקציה בין העקומות הבאות: גרף הפונקציה את השטח הכלוא בין העקומות המקומי שלה. נמקו x = 5 ומשיק לגרף הפונקציה x = 6 בנקודת המקסימום המקומי שלה. נמקו !

#### שאלה <u>2</u> (20 נקודות)

! נמקו ו
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$$
 נמקו ואת הגבול

ב.  $g': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  תהיה  $g': \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  פונקציה גזירה ברציפות (כלומר הנגזרת הראשונה  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  מוגדרת ורציפה בכל נקודה ב- g). ידוע כי קו המשיק לגרף הפונקציה g בנקודה g בנקודה ב- g, ושני הישרים הנייל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת לגרף הפונקציה g בנקודה g בנקודה g, ושני הישרים הנייל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה g'(c)=0 - g'(c)=0 (כלומר נגזרת הפונקציה g מתאפסת לפחות פעם אחת ב- g). נמקו g'(c)=0 בתרה: ידוע ששני ישרים  $g'(c)=m_1$ 

#### <u>שאלה 3</u> (20 נקודות)

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{-x+1}, & x \neq 1 \\ m, & x = 1 \end{cases}$$
 על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  נתונה פונקציה  $m \in \mathbf{R}$  על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

. נמקו פונקצית ההופכית הרופכית הפיכה ומצאו את פונקציה הפיכה  $f^{-1}$  כך ש $m \in \mathbf{R}$  מצאו מספר

ב. (10 נקי) הוכיחו כי לכל x>0 מתקיים:  $4x^2 \ge 1+2 \ln(2x)$  מקוי.

#### שאלה 4 (20 נקודות)

.  $f(x) = (1+4x)^{1/2}$  של n=3 מסדר Maclaurin א. (10 נקי) מצאו את פולינום

! נמקו 
$$x>-\frac{1}{4}$$
 לכל  $\sqrt{1+4x}-\left(1+2x-2x^2+4x^3\right)\leq 0$  . נמקו .

$$\cos(3x) - x - 1 + \int_0^x e^{2t^2} dt$$
 ! נמקו  $\sin \frac{1}{x \to 0} - \frac{1}{x^2}$  ! נמקו ! פרן את הגבול את הגבול ו



#### שאלה <u>5</u> (20 נקודות)

- י נמקו (מקו) . $\int \cos\left(\sqrt{2x-8}\,\right)dx$  א. (10 נקי) מצאו את
- י נמקו :  $f(x) = \left[3 2\cos x\right]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$  ב. (10 נקי) האם הקוx = 0 מהווה אסימפטוטה אנכית של

#### שאלה 6 (20 נקודות)

 $f(x) = \begin{cases} 8x+1 & , x \geq 2 \\ 21-2x & , x < 2 \end{cases}$  על ידי  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$  על ידי (גדיר פונקציה רציפה  $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 

F'(x) = f(x) ו- F(0) = 0, ו- F(0) = 0, לכל ב- F(x) = 0, לכל ב- F(x) = 0, לכל ב- F(x) = 0, לכל מצאו פונקציה F(x) = 0, לכל מוקן !

- $I=\left(0,\infty\right)=\left\{x\in\mathbf{R}:x>0
  ight\}$  מוגדרת בקטע בקטע  $f\left(x
  ight)=1+rac{\ln x}{x}+x^{-1}$  מוגדרת בקטע
- נקודות אבל אין לפונקציה f אבל אין לפונקציה בקטע 1, הוכיחו בעלת נקודות בעלת נקודות בעלת לפונקציה לפונקציה ישפט ישפט פינימום מוחלט בקטע 1. האם הטענה האחרונה בעלת משפט ישפט ישפט בקטע וות
  - בקטע  $f(x)=1+rac{\ln x}{x}+x^{-1}$  בקטע של הפונקציה הערך המקסימלי ואת הערך המינמלי של .2 פונקציה .  $e^{-2}\leq x\leq e^2$

## בהצלחה!

יש לתלוש את הדף הזה! הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק!



## <u> צון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X1</u>

#### פתרון 1.א.

תהי 
$$a_n=\left(rac{7n^2+\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}+rac{7n^2+\sqrt{n^4+(n-1)}}{\sqrt{16n^6+2}}+\ldots+rac{7n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}
ight)$$
תהי תהי

$$\left\{ egin{align*} &7n^2 + \sqrt{n^4 + 1} \leq 7n^2 + \sqrt{n^4 + k} \leq 7n^2 + \sqrt{n^4 + n} \ & rac{1}{\sqrt{16n^6 + n}} \leq rac{1}{\sqrt{16n^6 + k}} \leq rac{1}{\sqrt{16n^6 + 1}} 
ight. \end{cases} :$$
 לכל  $1 \leq k \leq n$  לכל  $1 \leq k \leq n$ 

שתמש בכלל הסנדוויץי:

$$n \cdot \left[ \frac{7n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}{\sqrt{16n^6 + n}} \right] \le a_n \le n \cdot \left[ \frac{7n^2 + \sqrt{n^4 + n}}{\sqrt{16n^6 + 1}} \right]$$

גבולות החסמים הם:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{7n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}{\sqrt{16n^6 + n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 + n\sqrt{n^4 + 1}}{\sqrt{16n^6 + n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 + \sqrt{1 + \left(1/n^4\right)}}{\sqrt{16 + \left(1/n^5\right)}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{7n^2 + \sqrt{n^4 + n}}{\sqrt{16n^6 + 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 + n\sqrt{n^4 + n}}{\sqrt{16n^6 + 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 + \sqrt{1 + (1/n^3)}}{\sqrt{16 + (1/n^6)}} = \frac{8}{4} = 2$$

.  $\lim_{n\to\infty}a_n=2$  ולכן, לפי כלל הסנדוויץי, גם הגבול

#### <u>פתרון 1.ב.</u>

.  $-1 \le x \le 1$  אם ורק אם  $f'(x) = 3 - 3x^2 \ge 0$  נתונה f אי-שלילית של f אי-שלגזרת של  $f(x) = 1 + 3x - x^3$  נתונה f(0) = 1, f(1) = 3, f(4) = -51 , בנוסף בנוסף f יורדת בקטע בקטע f יורדת בקטע

.  $\begin{bmatrix} 0,4 \end{bmatrix}$  לכן, מתקיים:  $\underbrace{f(x) \leq f(1) = 3 = \mathit{Max}(f)}_{}$  לכן, מתקיים:

. x=1 שיפוע המשיק בנקודת המקסימום x=1 שיפוע המשיק בנקודת המקסימום . f'(1)=0 . לכן, f'(1)=0 שיפוע המשיק בנקודת המשיק y=3 נמצא מעל גרף הפונקציה y=3 בקטע y=3 אומר שהקו המשיק y=3 נמצא מעל גרף הפונקציה בקטע y=3

.  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 4, \ 1 + 3x - x^3 \le y \le 3 \right\}$  מסיקים שהתחום הנתון שווה ל-

ל-שווה D שווה ל- Newton-Leibniz משפט

$$S = Area(D) = \int_{0}^{4} \left[ 3 - \left( 1 + 3x - x^{3} \right) \right] dx = \int_{0}^{4} \left( 2 - 3x + x^{3} \right) dx = \left[ 2x - \frac{3x^{2}}{2} + \frac{x^{4}}{4} \right]_{0}^{4} = 8 - 24 + 64 = 48.$$



#### פתרון 2.א.

:L'Hôpital אפשר (אבל לא מומולץ) לפתור לפי כלל

$$L = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0+} \frac{\left(1/2\right)x^{-0.5} + 2\cdot\left(1/4\right)x^{-0.75}}{\left(1/4\right)\left(\sin x\right)^{-0.75}} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x^{-0.5}}{\left(\sin x\right)^{-0.75}} + \frac{2x^{-0.75}}{\left(\sin x\right)^{-0.75}}$$

$$=2\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\left(\sin x\right)^{0.75}}{x^{0.5}} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.75}\right) = 2\lim_{x\to 0+} \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.5} \left(\sin x\right)^{0.25} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.75}\right) = 2\left(1^{0.5} \cdot 0 + 1^{0.75}\right) = 2$$

#### פתרון יותר פשוט

 $\sqrt[4]{x}$  ונקבל: ונקבל:

$$L = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = [:\sqrt[4]{x}] = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{\lim_{x \to 0^{+}} \left(\frac{x^{\frac{1}{4}} + 2}{x}\right)}{\lim_{x \to 0^{+}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{1} = 2$$

 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$  ניתן לפתור את השאלה ישירות לפי הגבול את ניתן ניתן ניתן לפתור את השאלה ישירות לפי

$$. \ L = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} + \lim_{x \to 0+} \frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \lim_{x \to 0+} \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}} + 2\lim_{x \to 0+} \sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}} = 0 \cdot 1 + 2 = 2$$

#### פתרון 2.ב.

נפתור בעזרת <u>משפט ערך הביניים של Cauchy</u>.

 $.\,m_1 
eq 0$  את שיפוע המשיק בנקודה . a=-1 לפי הנתון את שיפוע את  $m_1=f'(-1)$  -ביסמן ב- $.\,m_2 
eq 0$  את שיפוע המשיק בנקודה b=8 לפי הנתון  $m_2=f'(8)$  -ביסמן ב-

 $, \frac{m_1 \cdot m_2 = -1}{a}$  -שקול ל-b = 8 שקול ל-a = -1 שקול ל-a = -1 התנאי ייקו המשיק בנקודה a = -1 מאייא  $m_1 \cdot m_2 = f'(-1) f'(8) = -1 < 0$ 

. שלילית. f'(-1)f'(8) < 0 והמכפלה [a,b] = [-1,8] שלילית. f'(-1)f'(8) < 0 הפונקציה הפינים של Cauchy גורר שקיים לכן, משפט ערך הביניים של לכן, משפט אורר שקיים לכן, משפט ערך הביניים של



#### פתרון 3.א.

. נתון ו-  $y \neq -1$  נתון  $y \neq -1$  כאשר המשוואה  $y \neq -1$  נתון ו-  $y \neq -1$  נתון ו-  $y \neq -1$  יהי

(! נמקו 
$$x = \frac{1+3y}{y+1} \neq 3$$
 ברור שהפתרון  $x = \frac{1+3y}{y+1}$  ולכן יש פתרון יחיד  $x = \frac{1+3y}{y+1}$  נמקו

, אייא 
$$a$$
 מקבלת את הערך  $a$  מקבלת את הערך  $f$  אייא  $a\neq -1$  מקבלת את הערך  $f$  אוייא  $a\neq -1$  מקבלת את הערך פעמיים,

עבור שתי נקודות שונות 
$$f = 1 + 3a$$
  $= 1 + 3a$  לכן  $a = -1$  לכן  $a = -1$  הפיכה.  $(x_1 = \frac{1+3a}{a+1} \neq 3 = x_2)$ 

-ל- שווה  $f^{-1}$  וההופכית f(3) = -1 במצב הזה a = -1

$$f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1+3y}{y+1}, & y \neq -1\\ 3, & y = -1 \end{cases}$$

#### פתרון 3.ב.

 $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \ge 0$  אי-שלילית, לכל  $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \ge 0$  אי-שלילית, לכל פתרון ראשון מספיק להראות שפונקצית העזר פתרון לא ניתן להשתמש במשפט (Weierstrass).

.  $g'(x) = 2x - (2/x) = 2(x^2 - 1)(1/x)$  -ש- ברור ש- x > 0 ברור עבור עבור רציפה וגזירה עבור פונקציה מוגדרת פונקציה ש- x > 0

X	0	< <i>x</i> ≤	1	1	≤ <i>x</i> <	8
סימן הנגזרת הראשונה $g'(x)$			0	0	+++++	
תחומי מונוטוניות $g(x)$		_			<b>→</b>	

: מתקיים x>0 לכן עבור כל x=1 מתקבל בנקודה מחקלט של מתקבל מתקיים

$$x > 0$$
 לכל  $x^2 \ge 1 + 2\ln x$  : מסקנה  $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \ge g(1) = 0$ 

עבור  $\frac{\text{Lagrange}}{a,b}$  עבור x>0 לכל x>0 לכל  $x^2-1-2\ln x \ge 0$  (\*\*\*) עבור a,b=[x,1] אם a,b=[x,1] עבור a,b=[x,1] (ממקו למה תנאי משפט Lagrange מתקיימים!) ברור ש- a,b=[x,1] לכן אי-שיוויון (\*\*\*) תקף עבור a,b=[x,1] יהי a,b=[x,1] לכן a,b=[x,1] משפט a,b=[x,1] (I) יהי a,b=[x,1] לכן את משפט בין a,b=[x,1] משפט a,b=[x,1] יהי a,b=[x,1] לכן את משפט a,b=[x,1] (I)

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 - 2\ln x}{x - 1} = [Lagrange] = f'(c) = 2c - \frac{2}{c} = 2\frac{c^2 - 1}{c} \ge 0$$

.ל. מ.ש.ל, x > 1 לכל  $x^2 - 1 - 2\ln x \ge 0$  מ.ש.ל, מ.ש.ל הנייל גורר שהמונה

-ש בין x ל- t בין בין בין גורר שקיים גורר (II) ביחרים קטע בין t ל- t בין בין t ל- t כך ש- נוער (ביחרים היי t

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{-(x^2 - 1 - 2\ln x)}{1 - x} = [Lagrange] = f'(c) = 2c - \frac{2}{c} = 2\frac{c^2 - 1}{c} \le 0$$

אי-שיוויון זה  $\underline{\textbf{wg1d}}$  ל:  $\frac{t-1 \ge \ln t}{t}$ , לכל t>0 (השקילות ברורה בגלל שינוי המשתנים t>0 אי-שיוויון זה  $\underline{\textbf{wg1d}}$  ל:  $\frac{t-1 \ge \ln t}{t}$ , לכל t>0, מ.ש.ל.



#### פתרון 4.א.

.  $f(x) = \sqrt{1+8x}$  הינו פולינום טיילור-מקלורן עבור פונקציה  $T_3(x) = 1+4x-8x^2+32x^3$  נראה כי (Taylor-Maclaurin ) נחשב את המקדמים של פולינום טיילור-מקלורן

$$\begin{cases} f(0) = 1, & f'(x) = \frac{8}{2\sqrt{1+8x}} = 4\left(1+8x\right)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = 4 \\ f''(x) = 4 \cdot \frac{-1}{2} \cdot \left(1+8x\right)^{-3/2} \cdot 8 = -16\left(1+8x\right)^{-3/2} & \Rightarrow f''(0) = -16 \\ f'''(x) = (-16) \cdot \frac{-3}{2} \cdot \left(1+8x\right)^{-5/2} \cdot 8 = 64 \cdot 3\left(1+8x\right)^{-5/2} & \Rightarrow f'''(0) = 64 \cdot 3 \\ & . T_3(x) = 1 + \frac{4}{1}x - \frac{16}{2}x^2 + \frac{64 \cdot 3}{6}x^3 = 1 + 4x - 8x^2 + 32x^3 \\ & . x > -\frac{1}{8} \text{ decays } , \sqrt{1+8x} - \left(1+4x - 8x^2 + 32x^3\right) \leq 0 \end{cases}$$

לפי סעיף (1) מקבלים שההפרש הנייל שווה ל-

$$.\sqrt{1+8x} - (1+4x-8x^2+32x^3) = f(x) - T_3(x) = R_3(x)$$

 $R_3(x) \leq 0$  ,  $R_3(x) \leq 0$  , אי-שלילי ,  $R_3(x) \leq 0$  , לכל אי-שלילי מסדר n=3

-ש גורר בצורה בצורה בצורה 
$$f^{(4)}(x) = \frac{-5}{2} \cdot \frac{64 \cdot 3}{\left(1+8x\right)^{7/2}} \cdot 8 = \frac{-15 \cdot 256}{\left(1+8x\right)^{7/2}}$$
 גורר אורר של

. 
$$c>-rac{1}{8}$$
 ולכן  $x>-rac{1}{8}$  -שור  $x>0$  בין  $x>0$  בין  $x>-rac{1}{4!(1+8c)^{7/2}}\cdot x^4$ 

. מש.ל. , 
$$x>-rac{1}{8}$$
 לכל ,  $R_3(x)\!\leq\!0$  : מש.ל.

#### פתרון 4.ב.

הפונקציה , Newton-Leibniz לפי משפט היסודי ( בי R -ב ב-  $f(t) = e^{3t^2}$ הפונקציה הפונקציה

: ומתקיים 
$$\mathbf{R}$$
 ב- גם רציפה ב-  $F'(x) = e^{3x^2}$  ו רב ב-  $F(x) = \int_0^x e^{3t^2} dt$ 

-ם מסיקים ער במצב לא מוגדר מסוג ווה לפי כלל . 
$$\lim_{x \to 0} F(x) = F(0) = \int\limits_0^0 e^{3t^2} dt = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x + x - 1 - \int_{0}^{x} e^{3t^{2}} dt}{x^{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\boxed{-2\sin 2x + 1 - e^{3x^{2}}}^{70}}{\boxed{2x}_{0}} = \lim_{x \to 0} \frac{\boxed{-4\cos 2x - e^{3x^{2}} 6x}^{7-2}}{\boxed{2}_{2}} = -2$$



#### <u>פתרון 5.א.</u>

: נבצע שינוי משתנים

$$\int \sin(\sqrt{x+5}) dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x+5} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} dx = \frac{1}{2t} dx \\ dx = 2t dt \end{bmatrix} = 2 \int \sin(t) \cdot t dt = \\ = 2 \int (-\cos(t))' \cdot t dt = \begin{bmatrix} f(t) = -\cos t & f'(t) = \sin t \\ g(t) = t & g'(t) = 1 \end{bmatrix} \\ = 2 \left( (-t\cos t) - \int (-\cos t) \cdot 1 dt \right) = 2 \left( -t\cos t \right) + 2\sin t + c = \\ = 2 \left( -\sqrt{x+5} \right) \cos(\sqrt{x+5}) + 2\sin(\sqrt{x+5}) + c$$

#### פתרון 5.ב.

: כי הגבול הבא סופי y=f(x) של של אסימפטוטה אסימפטוטה אסימפטוטה אסימפטוטה x=0

$$L = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[ 2 - \cos x \right]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \left[ 1 + (1 - \cos x) \right]^{\frac{1}{1 - \cos x}} = \lim_{x \to 0} \left[ \left[ 1 + (1 - \cos x) \right]^{\frac{1}{1 - \cos x}} \right]^{\frac{1 - \cos x}{\sin x}} = \left[ t = (1 - \cos x) \to 0 \right] = (***)$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x}} = e^{0} = 1$$

: עבור הביטוי Euler  $\left\lceil 1^{\infty} \right
ceil$  מסוג בגבול השתמשנו (\*\*\*) בשלב

$$. \lim_{x \to 0} \left[ \left[ 1 + (\underbrace{1 - \cos x}_{t}) \right]^{\frac{1}{1 - \cos x}} \right] = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t} = e$$



#### פתרון 6.א.

 $x \in \mathbf{R}$  לכל ,  $F'(x) = \begin{cases} 10x - 1 & , x \ge 1 \\ 13 - 4x & , x < 1 \end{cases}$  שקול ל-  $x \in \mathbf{R}$  לכל F'(x) = f(x) הנתון הנתון

-ט כך ר $C_{\scriptscriptstyle 2}$  -ו כן מסיקים מסיקים שני מספרים שני מספרים שקימים שני

, 
$$C_2=0$$
 גורר ש-  $F(0)=0$  הנתון הייא .  $F(x)=\begin{cases} 5x^2-x+C_1 & ,x>1 \\ 13x-2x^2+C_2 & ,x<1 \end{cases}$ 

$$F(x)=egin{cases} 5x^2-x+C_1 & x>1 \ 13x-2x^2+C_2 & x<1 \end{cases}$$
 גורר ש-  $F(x)=egin{cases} 5x^2-x+C_1 & x>1 \ 13x-2x^2+C_2 & x<1 \end{cases}$  .  $\mathbf{R}$  . Reitgy:  $F(x)=egin{cases} 5x^2-x+C_1 & x>1 \ 13x-2x^2 & x<1 \end{cases}$ 

F(1)=1 לכן  $F(1)=4+C_1=1$  זייא גייא, ווא היים ש-  $F(1)=\lim_{x\to 1^+}F(x)=\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^-}F(x)$  לכן פרט, מסיקים ש-

$$F(x) = \begin{cases} 5x^2 - x + 7, & x \ge 1 \\ 13x - 2x^2, & x \le 1 \end{cases}$$

קל לבדוק שהפתרון שמצאנו מהווה פונקציה גזירה ב-  ${f R}$  וכל הדרישות השאלה מתקיימות (נמקו !).

-שווה x=0 שווה x=0 הפונקציה הקדומה של Mewton-Leibniz פתרון שני: לפי משפט

!(\*\*\*) נמקו את החישוב 
$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = (***) = \begin{cases} 5x^2 - x + 7 & , x \ge 1 \\ 13x - 2x^2 & , x \le 1 \end{cases}$$

במשפט במשפט (לא ניתן להשתמש במשפט במשפט I בקטע בקודות בקיצון של בקטע להשתמש במשפט 1. נחקור בקיצון של ל

: לכן 
$$f'(x) = \frac{(1/x)x - (1 + \ln x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$
 גורר ש-  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$  -שכן (Weierstrass).

.  $0 < x \le 1$  אז  $0 < x \le 1$  ולכן הפונקציה f ולכן ולכן אז  $f'(x) \ge 0$  אז אם ו

 $x \ge 1$  ולכן הפונקציה f יורדת בקטע  $f'(x) \le 0$  אז  $x \ge 1$  ולכן הפונקציה ו

מסיקים ש-  $f(x) \leq f(1) = 1$  ולכן (0, $\infty$ ) בתחום של של מקסימום מוחלט של x = 1 מהווה מקסימום מחלט של מולט של מולט של מחלט של מולט של מחלט של מולט של

גורר שלא קיימות Fermat אורר בור x=1 עבור x=1 מתאפסת אפסת  $f'(x)=-\frac{\ln x}{r^2}$  ההגדרה x>0 ההגדרה

נקודות קיצון נוספות חוץ מנקודת המקסימום המוחלט שכבר מצאנו. זה לא סותר את משפט Weierstrass . מפני שהקטע ע $I=(0,\infty)$  לא קטע סגור וחסום

פפט (לפי מחלט קיצון קיצון נקודות בעלת הרציפה אפונקציה הפונקציה הפונקציה מוחלט לפי מחלט אור בקטע סגור וחסום וחסום  $J = \left[e^{-1/2}, e^3
ight]$ הערכים את הערכים (Weierstrass בקטע f הפונקציה f הפונקציה הערכים (שנקציה f הפונקציה הפונקציה ;

$$f(e^3) = rac{1 + \ln e^3}{e^3} = rac{4}{e^3} < f(e^{-1/2}) = rac{1 + \ln e^{-1/2}}{e^{-1/2}} = rac{\sqrt{e}}{2} < 1 = f(1)$$
 - לכן של  $f(e^3) = \frac{1 + \ln e^3}{e^3} = \frac{4}{e^3} < f(e^{-1/2}) = \frac{1 + \ln e^{-1/2}}{e^{-1/2}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$ 

. M=f(1)=1 - שווה ל- בקטע שוה הפונקציה ל הפונקציה של הערך המקסימלי

 $m=f(e^3)=rac{4}{e^3}$  -ל- שווה ל- בקטע f בתינמלי של הפונקציה ל- ב.

## בהצלחה!



## $\mathbf{X2}$ $\mathbf{CX}$ מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי שאלון

#### פתרון 1.א.

. (סכום של 
$$a_n=\left(\dfrac{\sqrt{n^4+1+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}+\dfrac{\sqrt{n^4+2+\cos n}}{\sqrt{4n^6+(n-1)}}+...+\dfrac{\sqrt{n^4+n+\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}\right)$$
תהי

$$a_n = \left | rac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + rac{\sqrt{n^4 + 2 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + (n - 1)}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} 
ight |$$
 תהי $a_n = \left | rac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} 
ight |$   $a_n = \left | rac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} 
ight |$   $a_n = \left | rac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} 
ight |$   $a_n = \left | rac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} 
ight |$   $a_n = \left | rac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + ... + rac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} + ..$ 

$$n \cdot \left\lceil \frac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} \right\rceil \le a_n \le n \cdot \left\lceil \frac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} \right\rceil$$

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{\sqrt{n^4 + 1 + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^2 + n^2 \cos n}}{\sqrt{4n^6 + n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{\cos n}{n^4}}{4 + \frac{1}{n^5}}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{\sqrt{n^4 + n + \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^3 + n^2 \cos n}}{\sqrt{4n^6 + 1}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{\cos n}{n^4}}{4 + \frac{1}{n^6}}} = \frac{1}{2}$$

.  $\lim_{n \to \infty} a_{\scriptscriptstyle n} = 1 \, / \, 2$  ולכן, לפי כלל הסנדוויץי, גם הגבול

 $|x-1| \le x \le 1$  אם ורק אם  $|g'(x)| = 3 - 3x^2 \ge 0$  אי-שלילית של ברור שהנגזרת של .  $|g(x)| = 2 - x^3 + 3x$ g(0) = 2, g(1) = 4, g(5) = -108 , בנוסף בקטע g(0) = 2, g(1) = 4, g(5) = -108 . בנוסף

. [0,5] לכן, מתקיים x לכן, מתקיים  $g(x) \leq g(1) = 4 = Max(g)$  לכן, מתקיים לכן, מתקיים

. x=1 שיפוע המשיק בנקודת המקסימום y=4 , לכן,  $\overline{g}'(1)=0$  . שיפוע המשיק בנקודת המקסימום x=1

. [0,5] אים אומר פקטע g בקטע (מצא מעל גרף הפונקציה y=4 בקטע אומר איי-שיוויון (\*\*\*)

 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 5, \ 2 - x^3 + 3x \le y \le 4\}$  מסיקים שהתחום הנתון שווה ל-

לוה ל- Newton-Leibniz גורר שהשטח של Newton-Leibniz משפט

$$S = Area(D) = \int_{0}^{5} \left[ 4 - \left( 2 - x^{3} + 3x \right) \right] dx = \int_{0}^{5} \left( 2 - 3x + x^{3} \right) dx = \left[ 2x - \frac{3x^{2}}{2} + \frac{x^{4}}{4} \right]_{0}^{5} = 128.75.$$



#### פתרון 2.א.

: L'Hôpital אפשר (אבל לא מומולץ) לפתור לפי כלל

$$L = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0+} \frac{\left(1/2\right) x^{-0.5} - 3 \cdot \left(1/4\right) x^{-0.75}}{\left(1/4\right) \left(\sin x\right)^{-0.75}} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x^{-0.5}}{\left(\sin x\right)^{-0.75}} - \frac{3x^{-0.75}}{\left(\sin x\right)^{-0.75}}$$

$$= \lim_{x \to 0+} \left( 2 \frac{(\sin x)^{0.75}}{x^{0.5}} - 3 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{0.75} \right) = \lim_{x \to 0+} \left( 2 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{0.5} (\sin x)^{0.25} - 3 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{0.75} \right) = \left( 2 \cdot 1^{0.5} \cdot 0 - 3 \cdot 1^{0.75} \right) = -3$$

#### פתרון יותר פשוט

:נחלק את המונה והמכנה ב- $\sqrt[4]{x}$  ונקבל

$$L = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = [:\sqrt[4]{x}] = \lim_{x \to 0+} \frac{x^{\frac{1}{4}} - 3}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{\lim_{x \to 0+} \left(\frac{x^{\frac{1}{4}} - 3}{x}\right)}{\lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{-3}{1} = -3$$

 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$  ניתן לפתור את השאלה ישירות לפי הגבול את ניתן ניתן ניתן לפתור את ניתן ניתן ניתן את השאלה ישירות לפי

$$. \ L = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} - 3 \cdot \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}} = \lim_{x \to 0+} \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}} - 3 \cdot \lim_{x \to 0+} \sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}} = 0 \cdot 1 - 3 = -3$$

#### פתרון 2.ב.

נפתור בעזרת משפט ערך הביניים של Cauchy.

 $.\,m_{_{1}}\neq 0\,$  לפי הנתון .  $u=-7\,$ בנקודה המשיק את שיפוע את  $m_{_{1}}=g\,'(-7)\,$ נסמן ב-

 $.\,m_{2}\neq0\,$ לפי הנתון .  $\nu=2\,$ בנקודה המשיק שיפוע שיפוע  $m_{2}=g\,{}^{\backprime}(2)$  -ב נסמן ב-

 $\frac{1}{m_1 \cdot m_2 = -1}$  -שקול ל-v = 2 שקול ל- $m_1 \cdot m_2 = -7$  שקול ל- $m_1 \cdot m_2 = -7$  שקול ל- $m_1 \cdot m_2 = g'(-7)g'(2) = -1 < 0$  אייא

. שלילית. g'(-7)g'(2) < 0 והמכפלה ו[u,v] = [-7,2] שלילית. g' רציפה בקטע בקטע (u,v) בקטע (u,v) בקטע (משפט ערך הביניים של Cauchy גורר שקיים ביניים של לכן, משפט ערך הביניים של



#### פתרון 3.א.

. נפתור את המשוואה  $y \neq -1$  כאשר  $y \neq -1$ , כאשר  $y \neq -1$  נתון ו-  $y \neq -1$  יהי

(! נמקו 
$$x = \frac{y+2}{y+1} \neq 1$$
 ברור שהפתרון  $x = \frac{y+2}{y+1}$  בתרון יחיד  $yx + y = x-2$  נמקו (!)

, או  $m \neq m$  מקבלת את הערך f אייא  $f\left(\frac{m+2}{m+1}\right)=m=f(1)$  פעמיים, f או f או

. אפיכה. 
$$f$$
 -ש תנאי הכרחי  $m=-1$  לכן  $x_1=\frac{m+2}{m+1}\neq 1=x_2$  אפיכה. עבור שתי נקודות שונות  $x_1=\frac{m+2}{m+1}\neq 1=x_2$ 

-ל- שווה  $f^{-1}$  וההופכית f(1)=-1 במצב הזה במצב . m=-1

$$f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+2}{y+1}, & y \neq -1\\ 1, & y = -1 \end{cases}$$

#### פתרון 3.ב.

. x>0 אי-שלילית, לכל  $g(x)=4x^2-1-2\ln\left(2x\right)\geq 0$  מספיק להראות שפונקצית העזר  $g(x)=4x^2-1-2\ln\left(2x\right)\geq 0$  מספיק להראות שפונקצית העזר g בעזרת תחומי עליה / ירידה (לא ניתן להשתמש במשפט (Weierstrass).  $g'(x)=8x-\left(2/x\right)=2\cdot\left(4x^2-1\right)\left(1/x\right)$  פונקציה מוגדרת רציפה וגזירה עבור כל  $g(x)=8x-\left(2/x\right)=2\cdot\left(4x^2-1\right)\left(1/x\right)$ 

X	0	< <i>x</i> ≤	1/2	1/2	≤ <i>x</i> <	8
סימן הנגזרת הראשונה $g'(x)$			0	0	+++++	
תחומי מונוטוניות $g(x)$		•				

:מתקיים x>0כל עבור לכן המינימום מתקבל בנקודה gשל של המינימום המינימום המינימו

|x| < 0 לכל  $|4x|^2 \ge 1 + 2\ln(2x)$  : מסקנה  $|g(x)| = 4x^2 - 1 - 2\ln(2x) \ge g(1/2) = 0$ 



#### פתרון 4.א.

.  $f(x) = \sqrt{1+4x}$  עבור פונקציה  $T_3(x) = 1+2x-2x^2+4x^3$  נראה כי  $T_3(x) = 1+2x-2x^2+4x^3$  נחשב את המקדמים של פולינום טיילור-מקלורן (Taylor-Maclaurin):

$$\begin{cases} f(0) = 1, & f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{1+4x}} = \frac{2}{\left(1+4x\right)^{1/2}} \Rightarrow f'(0) = 2 \\ f''(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{\left(1+4x\right)^{3/2}} \cdot 4 = \frac{-4}{\left(1+4x\right)^{3/2}} & \Rightarrow f''(0) = -4 \\ f'''(x) = \frac{-3}{2} \cdot \frac{\left(-4\right)}{\left(1+4x\right)^{5/2}} \cdot 4 = \frac{24}{\left(1+4x\right)^{5/2}} & \Rightarrow f'''(0) = 24 \end{cases}$$

$$.T_3(x) = 1 + \frac{2}{1!}x - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{24}{3!}x^3 = 1 + 2x - 2x^2 + 4x^3$$

$$.x > -\frac{1}{4} \cot \theta + \frac{1}{2} \cot \theta + \frac{1}{2}$$

-ש גורר בצורה בצורה בצורה ולכן משפט השארית 
$$f^{(4)}(x) = \frac{-5}{2} \cdot \frac{24}{\left(1+4x\right)^{7/2}} \cdot 4 = \frac{-240}{\left(1+4x\right)^{7/2}}$$

. 
$$c>-\frac{1}{4}$$
 נתון ש-  $x>-\frac{1}{4}$  פאשר  $x>0$  בין  $x>0$  בין  $x>-\frac{1}{4!}$  נתון ש-  $x>-\frac{1}{4!}$  נתון ש-  $x>-\frac{1}{4!}$ 

. מסקנה (
$$x>-rac{1}{4}$$
 לכל ( $R_{\scriptscriptstyle 3}(x)$  מ.ש.ל, מסקנה (מסקנה)

#### פתרוו 4.ב.

 $F(x)=\int\limits_0^x e^{2t^2}dt$  הפונקציה , Newton-Leibniz הפונקציה .  ${f R}$  . לפי משפט היסודי לפי הפונקציה , א

גזירה ב-  $\mathbf{R}$  ומתקיים ב-

-במצב לא מוגדר מסוג  $\left[rac{0}{0}
ight]$  מסיקים ש L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - x - 1 + \int_{0}^{x} e^{2t^{2}} dt}{x^{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\boxed{-3\sin 3x - 1 + e^{2x^{2}}}^{70}}{\boxed{2x}_{0}} = \lim_{x \to 0} \frac{\boxed{-9\cos 3x + e^{2x^{2}} \cdot 4x}^{7-9}}{\boxed{2}_{2}} = -4.5$$



#### <u>פתרון 5.א.</u>

: נבצע שינוי משתנים

$$\int \cos\left(\sqrt{2x-8}\right) dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{2x-8} \\ dt = \frac{2}{2\sqrt{2x-8}} dx \\ dx = tdt \end{bmatrix} = \int t\cos(t) dt = \int (\sin(t))' \cdot t dt = \begin{bmatrix} f(t) = \sin t & f'(t) = \cos t \\ g(t) = t & g'(t) = 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (t\sin t) - \int (\sin t) \cdot 1 dt = (t\sin t) + \cos t + c =$$

$$= (\sqrt{2x-8})\sin\left(\sqrt{2x-8}\right) + \cos\left(\sqrt{2x-8}\right) + c$$

#### פתרון 5.ב.

:הקו y = f(x) של מהווה אסימפטוטה אנכית של y = f(x) הקו

$$L = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[ 3 - 2\cos x \right]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \left[ 1 + (2 - 2\cos x) \right]^{\frac{1}{2 - 2\cos x}} \frac{2 - 2\cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[ \left[ 1 + (2 - 2\cos x) \right]^{\frac{1}{2 - 2\cos x}} \right]^{\frac{2 - 2\cos x}{x^2}} = \left[ t = (2 - 2\cos x) \to 0 \right] = (***)$$

$$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{2x}} = e^1 = e$$

: עבור הביטוי Euler  $\left[1^{\infty}\right]$  אסוג בגבול השתמשנו (\*\*\*) בשלב

$$\lim_{x \to 0} \left[ \left[ 1 + (2 - 2\cos x) \right]^{\frac{1}{2 - 2\cos x}} \right] = \lim_{t \to 0} \left( 1 + t \right)^{1/t} = e$$



#### פתרון 6.א.

 $x \in \mathbf{R}$  לכל ,  $F'(x) = \begin{cases} 8x+1 & , x \geq 2 \\ 21-2x & , x < 2 \end{cases}$  שקול ל- F'(x) = f(x) לכל + לכל F'(x) = f(x) לכל - שקול ל-

-ט כך ר $C_{\scriptscriptstyle 2}$ ו ר $C_{\scriptscriptstyle 1}$ ו מסיקים שני מספרים שני מסיקים שקימים שני מספרים

$$.\,F(x) = \begin{cases} 4x^2 + x + C_1 & ,x > 2 \\ 21x - x^2 & ,x < 2 \end{cases} \, \text{ אורר ש- } \, C_2 = 0 \, \text{ אורר ש- } \, F(0) = 0 \, \text{ .} \, F(x) = \begin{cases} 4x^2 + x + C_1 & ,x > 2 \\ 21x - x^2 + C_2 & ,x < 2 \end{cases}$$

.  ${f R}$  -ביפה F רציפה אולכן הפונקציה F רציפה ב-

 $F(2)=18+C_1=38$  נפרט, מסיקים ש-  $F(2)=\lim_{x\to 2+}F(x)=\lim_{x\to 2-}F(x)=\lim_{x\to 2-}F(x)=18+C_1=18+$ 

$$F(x) = \begin{cases} 4x^2 + x + 20 & , x \ge 2\\ 21x - x^2 & , x \le 2 \end{cases}$$

קל לבדוק שהפתרון שמצאנו מהווה פונקציה גזירה ב-  ${f R}$  וכל הדרישות השאלה מתקיימות (נמקו !).

-שווה x=0 שווה ל- Newton-Leibniz פתרון שני: לפי משפט Newton-Leibniz הפונקציה הקדומה של

!(\*\*\*) נמקו את החישוב 
$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = (***) = \begin{cases} 4x^2 + x + 20 & , x \ge 2 \\ 21x - x^2 & , x \le 2 \end{cases}$$

#### פתרון 6.ב.

.(Weierstrass במשפט לא ניתן להשתמש במשפט בעזרת תחומי עליה / ירידה I בקטע של בקטע לבקטרות בעזרת תחומי עליה / ירידה ולא ניתן להשתמש במשפט 1.

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - (1+\ln x)\cdot 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$
 גורר ש-  $f(x) = 1 + \frac{1+\ln x}{x}$  - לכן:

.  $0 < x \le 1$  אז  $0 < x \le 1$  ולכן הפונקציה f עולה בקטע ולכן  $f'(x) \ge 0$  אז אם  $0 < x \le 1$ 

 $x \ge 1$  אז  $f'(x) \le 0$  ולכן הפונקציה  $f'(x) \le 0$  אז  $x \ge 1$  ולכן הפונקציה

בתחום x לכל ,  $f(x) \leq f(1) = 2$  ולכן ולכן בתחום f של של מקסימום מהווה מקסימו של x = 1

גורר שלא קיימות נקודות Fermat אבור x=1 עבור עבור  $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$  ההגדרה . x>0 ההגדרה הגזרת

מפני שהקטע Weierstrass קיצון נוספות זה את משכבר מצאנו. את שכבר המוחלט שכבר המקסימום מפני שהקטע  $I=(0,\infty)$  את קטע סגור וחסום.

; (Weierstrass הפונקציה לפי מוחלט (קיצון מוחלט f הפונקציה הרציפה הפונקציה הרציפה  $J=\left[e^{-2},e^2\right]$  בקטע סגור וחסום.

: בקצוות הערכים את הערכים f הפונקציה בקטוע  $\left[1,e^2\right]$  הפונקציה עולה הפונקציה בקטע הפונקציה  $\left[e^{-2},1\right]$ 

: לכן: 
$$2 = f(1) > f(e^2) = 1 + \frac{1 + \ln e^2}{e^2} = 1 + \frac{3}{e^2} > f(e^{-2}) = 1 + \frac{1 + \ln e^{-2}}{e^{-2}} = 1 - e^2$$
 ברור ש-

. M=f(1)=2 - שווה ל- בקטע של הפונקציה א הפונקציה של הפונקציה א. א. הערך המקסימלי

 $m=f(e^{-2})=1-e^2$  -שווה ל- בקטע f בקטע של הפונקציה של הפונקציה f

## בהצלחה!