פתרון

X

שאלה 1 (24 נקודות)

בקופסא א' יש שלושה כדורים אדומים ושני כדורים לבנים. בקופסא ב' יש ארבעה כדורים אדומים וכדור לבן אחד. אלון ויוסי משחקים במשחק הבא: בכל סבב של המשחק אלון מוציא כדור אחד מקופסא א' ויוסי מוציא כדור אחד מקופסא ב'. אם הוצאו כדורים באותו צבע, אלון מנצח בסבב. אחרת, יוסי מנצח בסבב.

א. מהי ההסתברות לכך שבשלושה סבבים של המשחק אלון ינצח לפחות פעם אחת?

ב. ידוע שאלון ניצח לפחות פעם אחת בשלושה סבבים של המשחק. מהי ההסתברות שיוסי ניצח בשני סבבים בדיוק מתוך שלושה?

ג. ביום אחר אלון ויוסי החליטו לשחק במשחק עד שכל אחד מהם ינצח בלפחות סבב אחד. מהי ההסתברות שבמשחק יהיו לכל היותר שלושה סבבים?

<u>פתרון:</u>

א. אלון מנצח בסבוב אם הוא מוציא כדור אדום וגם יוסי מוציא כדור אדום או אם אלון מוציא כדור לבן וגם יוסי מוציא כדור לבן ולכן הסיכוי של אלון לנצח הוא:

$$0.6\cdot 0.8+0.4\cdot 0.2=0.56$$

נגדיר משתנה מקרי: X - מספר סבבים מתוך שלושה שאלון ינצח בהם. מתקיים: $X\sim \text{Bin}(3,0.56)$

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.44^3=0.9148$$

ב. המאורע "יוסי ניצח בשני סבבים מתוך לשלושה" שקול למאורע "אלון ניצח בדיוק בסבב אחד". נחשב את ההסתברות המותנית הבאה:

$$P(X=1\mid X\geq 1)=\frac{P(X=1\cap X\geq 1)}{P(X\geq 1)}=\frac{P(X=1)}{P(X\geq 1)}=\frac{3\cdot 0.56\cdot 0.44^2}{0.9148}=0.3555$$

ג. צריך לחשב את ההסתברות האיחוד של המאורעות הבאים:

A - אלון ינצח בסבב הראשון ויוסי בסבב השני,

B - יוסי ינצח בסבב הראשון ואלון בשני,

C - אלון ינצח בשני הסבבים הראשונים ויוסי בסבב השלישי,

D - יוסי ינצח בשני הסבבים הראשונים ואלון בסבב השלישי.

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=0.56\cdot 0.44\cdot 2+0.56^2\cdot 0.44+0.44^2\cdot 0.56=0.7392$$

שאלה 2 (16 נקודות)

X משתנה מקרי רציף עם פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.1, & 2 \le x < 4 \\ 0.2, & 4 \le x \le 8 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

א. מצאו תחום ערכי t המקיימים $F_X(t) \le 0.8$.

ב. יהיו X_1, X_2 שני משתנים מקריים רציפים בעלי פונקציית הצפיפות $f_X(x)$.

חשבו את $E(X_1 + X_2^2)$.

<u>פתרון:</u>

א. נמצא את האחוזון 0.8 של מ"מ X:

$$0.1 \cdot 2 + 0.2 \cdot (t-4) = 0.8 \Rightarrow t = x_{0.8} = 7$$

לכן התחום $t \le 7$.

ב. נחשב את התוחלת:

$$E(X_1 + X_2^2) = E(X_1) + E(X_2^2) = \int_2^8 x \cdot f_X(x)dx + \int_2^8 x^2 \cdot f_X(x)dx =$$

$$\int_2^4 x \cdot 0.1dx + \int_4^8 x \cdot 0.2dx + \int_2^4 x^2 \cdot 0.1dx + \int_4^8 x^2 \cdot 0.2dx =$$

$$0.05x^2\Big|_2^4 + 0.1x^2\Big|_4^8 + \frac{0.1}{3}x^3\Big|_2^4 + \frac{0.2}{3}x^3\Big|_4^8 = 5.4 + 31.7333 = 37.1333$$

שאלה 3 (16 נקודות)

רונית ומירי קבעו להיפגש מחר בשעה 9:00 בבוקר. זמן האיחור בדקות של רונית מתפלג לפי התפלגות אחידה בקטע (0,15) וזמן האיחור של מירי מתפלג לפי התפלגות מעריכית עם ממוצע של 10 דקות. זמני האיחור של רונית ומירי בלתי תלויים.

א. מהי ההסתברות שהן ייפגשו לפני שעה 9:10?

ב. רונית הגיעה לפגישה בשעה 9:00. היא ממתינה למירי כבר 10 דקות. מהי ההסתברות שרונית תמשיך להמתין למירי לפחות עוד 10 דקות נוספות?

<u>פתרון:</u>

נגדיר משתנים מקריים:

X - זמן האיחור של רונית. מתקיים $X\sim U(0,15)$.

Y - זמן האיחור של מירי. מתקיים $Y\sim exp(0.1)$.

א. הן יפגשו לפני 9:10 אם ורק אם כל אחת מהן תאחר בפחות מ-10 דקות ולכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$P(X<10,Y<10)=P(X<10)\cdot P(Y<10)=\frac{10-0}{15-0}\cdot\left(1-e^{-0.1\cdot10}\right)=0.42$$

ב. כלומר ידוע שמירי איחרה כבר ב-10 דקות וצריך לחשב את ההסתברות המותנית שהיא תאחר בלפחות 10 דקות נוספות. לפי תכונת חוסר הזיכרון נקבל:

$$P(Y>20\mid Y>10)=P(Y>10)=e^{-1}=0.3679$$

שאלה 4 (20 נקודות)

הסיכוי של מועמד כלשהו להיות מודח בשלב הראשון של התחרות שווה ל-0.2 וזה באופן בלתי תלוי במועמדים אחרים. אם מועמד יעבור בהצלחה את השלב הראשון, ההסתברות להיות מודח בשלב השני שווה ל-0.4 וזה גם באופן בלתי תלוי במועמדים אחרים. שני חברים, אלון ויוסי, משתתפים בתחרות. נגדיר:

X – מספר החברים מבין השניים שיעברו בהצלחה את השלב הראשון.

Y – מספר החברים מבין השניים שיעברו בהצלחה את השלב השני.

א. (12 נקודות) מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים X,Y.

ב. (8 נקודות) מצאו את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=1$.

פתרון:

א.

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$0.2^2=0.04$	0	0
1	$0.8\cdot 0.2\cdot 0.4\cdot 2=0.128$	$0.8\cdot 0.2\cdot 0.6\cdot 2=0.192$	0
2	$0.8^2\cdot 0.4^2=0.1024$	$0.8^2\cdot 0.6\cdot 0.4\cdot 2=0.3072$	$0.8^2\cdot 0.6^2=0.2304$

ב. נמצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $Y=1$:

$$P(X=1\,|\,Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0.192}{0.192+0.3072}=0.3846$$

$$P(X=2\,|\,Y=1)=1-0.3846=0.6154$$

שאלה 5 (24 נקודות)

בעבר זמן הרכבת מוצר מסוים במכונת הרכבה לקח בממוצע 5 דקות עם סטיית התקן של שתי דקות. בטיפול האחרון במכונה הוחלפו חלקים ומהנדס המפעל חושב שזה גרם להאטה בעבודתה (השערה אלטרנטיבית). כדי לבדוק את ההשערה המהנדס החליט לדגום 40 מוצרים ואם ממוצע זמני ההרכבה של המוצרים יהיה גדול מ-5.6 דקות הוא ימליץ למנהל המפעל להחליף את המכונה. המהנדס הניח שסטיית התקן לא השתנתה.

א. נסחו את ההשערות, סטטיסטי המבחן ואזור דחיית השערת האפס. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?

ב. הראו שסטטיסטי המבחן הנבחר על ידי המהנדס הינו אומד חסר הטיה עבור ממוצע זמן ההרכבה.

ג. נניח שממוצע המדגם היה שווה ל-5.8. מהי מובהקות של התוצאה?

<u>פתרון:</u>

א. נתון: $\mu_0=5$, $\sigma=2$, $n=40$

ננסח את ההשערות:

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_0:\mu=5\\&\mathrm{H}_1:\mu>5\end{aligned}$$

סטטיסטי המבחן: $\overline{X}_{40}=\dfrac{\sum_{i=1}^{40}X_i}{40}$

אזור דחיית H_0 : $C=\{\overline{X}_{40}>5.6\}$.

$$\alpha=P_{H_0}(\overline{X}_{40}>5.6)=1-\Phi\left(\frac{5.6-5}{2/\sqrt{40}}\right)=1-\Phi(1.9)=1-0.9713=0.0287$$

ב. נראה שסטטיסטי המבחן $\overline{X}_{40}=\dfrac{\sum_{i=1}^{40}X_i}{40}$ הינו אומד חסר הטיה עבור ממוצע זמן ההרכבה μ :

$$E(\overline{X}_{40})=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{40}X_i}{40}\right)=\mu$$

ג. נחשב את מובהקות התוצאה 5.8:

$$p\_value = P_{H_0}(\overline{X}_{40} > 5.8) = 1 - \Phi\left(\frac{5.8-5}{2/\sqrt{40}}\right) = 1 - \Phi(2.53) = 1 - 0.9943 = 0.0057$$