פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"א סמסטר ב שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא (אלא אם כתוב במפורש שלא צריך)

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (15 נקודות) נתונה מערכת המשוואות
$$\begin{cases} ax + ay + 3z = -1 \\ x + (2a-1)y + 3z = -a \\ ax + ay + (a+3)z = 2a+1 \end{cases}$$

(i) מצאו את הערכים של הפרמטר a עבורו יש למערכת פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרון.

(ii) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a וקטור העמודה $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (5 נקודות) תנו דוגמה למטריצה מסדר 5×4 המקיימת את הדרישות הבאות

(i) דרגת המטריצה שווה ל-**2**.

(ii) המטריצה מדורגת קנונית.

(iii) אין למטריצה עמודת אפסים.

פתרון

א. נדרג תחילה את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & 3 & -1 \\ 1 & 2a-1 & 3 & -a \\ a & a & a+3 & 2a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a-1 & 3 & -a \\ a & a & 3 & -1 \\ a & a & a+3 & 2a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a-1 & 3 & -a \\ a & a & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2a+2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a-1 & 3 & -a \\ 0 & 2a(1-a) & 3(1-a) & a^2-1 \\ 0 & 0 & a & 2(a+1) \end{array}\right)$$

(i) דרגת המטריצה שווה **3** אם"ם $2a(1-a), a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, 1$

- עבור $a=0$: נציב את הערך במטריצה המורחבת המדורגת ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a-1 & 3 & -a \\ 0 & 2a(1-a) & 3(1-a) & a^2-1 \\ 0 & 0 & a & 2(a+1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה, כלומר דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת אין פתרונות.

- עבור $a=1$ נציב את הערך במטריצה המורחבת המדורגת ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a-1 & 3 & -a \\ 0 & 2a(1-a) & 3(1-a) & a^2-1 \\ 0 & 0 & a & 2(a+1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו אם כן, כי דרגת המטריצה המצומצמת שווה ל2, ודרגת המטריצה המורחבת שווה ל2.

(ii) נציב את העמודה כפתרון ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} \frac{3a}{2} & + & \frac{a}{2} & + & 3 & = & -1 \\ \frac{3}{2} & + & \frac{(2a-1)}{2} & + & 3 & = & -a \\ \frac{3a}{2} & + & \frac{a}{2} & + & (a+3) & = & 2a+1 \end{cases}$$

כלומר

$$2a=-4, 2a=-4, a=-2$$

ונקבל כי $a=-2$.

ב. דוגמה למטריצה מתאימה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) נסמן

$$U=\textbf{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},\ W=\textbf{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בחרו באחת מבין האפשרויות הבאות

(i) מצאו בסיס ל-$U+W$ ומימד ל-$U\cap W$

(ii) הראו כי $U\neq W$

ב. (8 נקודות) הוכיחו או הפריכו **אחת** מבין הטענות הבאות

ג. אם $\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\}$ קבוצות בת"ל, אז $\{u,v,w\}$ בת"ל.

ד. אם $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של מרחב וקטורי V, אז גם $\{v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_1\}$ גם בסיס של V.

פתרון

א. פתרון סעיף א:

(i) נמצא בסיס ל-$U+W$: איחוד של קבוצות פורסות הוא קבוצה פורסת ולכן הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

היא קבוצה פורסת. נמצא תלויות לינאריות של איברי הקבוצה הזו לפי תלויות לינאריות של וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי הבסיס הסטנדרטי, כלומר נמצא תלויות לינאריות של עמודות המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. תלויות לינאריות נשמרות ע"י פעולות אלמנטריות, ולכן נסיק על תלויות לינאריות בעזרת דירוג המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי שלוש העמודות הראשונות הן קבוצה בת"ל, והעמודה האחרונה תלויה בהן, ולכן גם שלושת המטריצות הראשונות הם קבוצה בת"ל שהאחרונה תלויה בהן, ולכן הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

היא בסיס של $U+W$. ממשפט המימד נמצא כי המימד של החיתוך הוא

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 2+2-3 = 1$$

(ii) נראה כי $U \neq W$: איבר כללי ב־W הוא מהצורה

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ a & b \end{pmatrix}$$

כלומר בעמודה השניה האיבר העליון גדול פי 3 מהאיבר התחתון. שני האיברים בקבוצה הפורסת של U לא מקיימים זאת, ולכן לא נמצאים ב־ W, כלומר המרחבים שונים.

ב. פתרון לסעיף ב:

(i) הטענה לא נכונה: לדוגמה עבור $V = \mathbb{R}^2$ מתקיים כי

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\}$$

הן קבוצות בת"ל אבל $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ תלויה לינארית.

(ii) הטענה נכונה: נניח כי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של V, אזי לכל קבוצה S מתקיים כי S ת"ל אם ורק אם וקטורי הקואורדינטות של איברי הקבוצה לפי בסיס כלשהו מהווים קבוצה ת"ל. ולכן מספיק לבדוק אם הקבוצה

$$\{[v_1 - v_2]_B, [v_2 - v_3]_B, [v_3 - v_1]_B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, כלומר העמודות הן קבוצה ת"ל, ולכן גם הקבוצה הנתונה יא קבוצה ת"ל, ולכן אינה בסיס של המרחב.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (12 נקודות) נתונה ההעתקה הלינארית

$$\begin{aligned} T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= (3a-b)x^2 + (2b+d)x + 2c - a \end{aligned}$$

(i) מצאו בסיסים ומימדים לבסיס ולתמונה של T.

(ii) תנו דוגמה לאיבר ב$\ker T$ ולאיבר ב־$\mathrm{Im}T$.

ב. (8 נקודות) תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית בין שני מרחבים וקטורים ויהי $B = \{b_1, ..., b_n\}$ בסיס ל V. נתון כי הקבוצה $\{T(b_1), ..., T(b_n)\}$ פורשת את W. הוכיחו כי המימד של W קטן או שווה למימד של V.

פתרון

א. כדי למצוא את הגרעין ואת התמונה נמצא תחילה את המטריצה המייצגת לפי הבסיסים הסטנדרטיים של המרחבים:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \ \{x^2, x, 1\}$$

מהתנתון נקבל כי

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3x^2 - 1, T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = -x^2 + x, T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2, T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x$$

ולכן המטריצה המייצגת לפי בסיסים אלה היא

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

נדרג כעת את המטריצה מייצגת

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_+ 3R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

מהדירוג קיבלנו כי דרגת המטריצה מהייצגת היא 3, ולכן מימד התמונה הוא 3, ולכן ממשפט המימד נובע כי מימד הגרעין הוא 1. חישוב ישיר מאפשר לנו למצוא איבר שונה מאפס בגרעין ע"י $3a = b, d = -2b, 2c = a$, למשל המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}$, וזו דוגמה לבסיס לגרעין. התמונה ממימד 3 ולכן שווה לטווח ולכן בסיס לתמונה הוא למשל הבסיס הסטנדרטי $\{x^2, x, 1\}$. דוגמאות לאיברים בגרעין ובתמונה הם איברי הבסיסים של הגרעין והתמונה.

ב. ידוע כי אם במרחב וקטורי יש קבוצה פורסת עם n איברים אז המימד של המרחב הוא לכל היותר n. מהנתון ידוע שיש במרחב W קבוצה פורסת עם n איברים ולכן המימד של W הוא לכל היותר $n = \dim V$.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) תהיינה תהי A מטריצה מסדר 3×3 המקיימת כי $A^T A = I$. הוכיחו כי

(i) מתקיים כי $A^T (A - I) = -(A - I)^T$

(ii) הדטרמיננטה של A שווה ל± 1.

(iii) אם $\det A = 1$, אז $\det(A - I) = 0$ (רמז: העזרו בסעיפים קודמים)

ב. (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור כל טענה, אם היא נכונה הוכיחו אותה, ואם היא לא נכונה מצאו דוגמה נגדית שמפריכה אותה

(i) אם A, B לא הפיכות, אז $A + B$ לא הפיכה.

(ii) אם A מטריצה ממשית מסדר 5×5, אז $A^2 \neq -I_5$ (I_5 היא מטריצת היחידה מסדר 5×5)

פתרון

א. מהשוויון מתקבל כי $A^T(A_I) = A^TA - A^T = I - A^T = (I-A)^T = -(A-I)^T$

ב. מהשוויון $A^TA = I$ מתקיים שגם הדטרמיננטות של שני הצדדים שוות, כלומר $|A^TA| = |I| = 1$, ומכפליות הדטרמיננטה ומכך שהדטרמיננטה של A שווה לדטרמיננטה של A^T נקבל כי $|A|^2 = 1$ כלומר $\det A = \pm 1$/

ג. נניח כי $\det A = 1$, אזי מהסעיף הראשון נובע כי $\det(A^T)\det(A-I) = \det(-(A-I)^T)$ ומכך נובע כי $\det(A-I) = (-1)^3\det(A-I)$ כלומר $\det(A-I) = 0$.

(i) הטענה לא נכונה: לדוגמה עבור n זוגי $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מתקיים כי A,B לא הפיכות, אבל $A+B=I$ הפיכה.

(ii) הטענה נכונה כי אם $A^2 = -I$ אז $|A|^2 = (-1)^5 = -1$ אבל $|A|$ מספר ממשי ולכן זה לא ייתכן.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. תהי A מטריצה מסדר 3×3. ידוע כי הערכים העצמיים של A ווקטורים עצמיים המתאימים להם הם:

$$\lambda_1 = 3 \quad , \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4 \quad , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הראו כי A לכסינה ומצאו את A.

ב. תהי A מטריצה מסדר $n\times n$. נתון כי $(A-3I)^{2021} = 0$. הראו כי 3 הוא ערך עצמי של A.

ג. תהי A מטריצה מסדר $n\times n$. הראו כי אם α הוא ערך עצמי של A אז α הוא ערך עצמי של A^T.

פתרון

א. מכיוון שלמטריצה יש 3 ערכים עצמיים שונים היא לכסינה. ולכן,

$$A = PDP^{-1}$$

כאשר

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מחישוב ההפכית נקבל כי

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ב. מתקיים כי

$$(A-3I)^{2021} = 0 \iff |(A-3I)^{2021}| = 0 \iff |A-3I|^{2021} = 0 \iff |A-3I| = 0$$

ג. נניח כי α ערך עצמי של A, כלומר $|A-\alpha I| = 0$, אבל $(A-\alpha I)^T = A^T - \alpha I$, ולכן $|A^T - \alpha I| = |(A-\alpha I)^T| = |A - \alpha I| = 0$, כלומר α הוא ערך עצמי של A^T.

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. מצאו בסיס אורתוגונלי $\{v_1, v_2, v_3\}$ של $\mathbb{R}^3$ (ביחס למכפלה פנימית סטנדרטית), כך ש־v_1 שייך ל־$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$, ו־$v_2$ שייך לקבוצה

$$W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - 2z = 0\right\}$$

.

ב. נתונים 2 וקטורים $\{u, v\}$ במרחב מכפלה פנימית ממשי V בעל מימד $\dim V = 2$. ידוע ש־$\|v\| = 1, \langle u, v\rangle = 1$. מצאו את הנורמה של u כך שהוקטור $u - v$ אורתוגונאלי לווקטור $u + 3v$. האם הקבוצה $\{u - v, u + 3v\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של V?

פתרון

א. נגדיר $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. מתקיים: $v\in W$ אם ורק אם $v=\begin{pmatrix}-2y-2z\\y\\z\end{pmatrix}$ לכן, נבחר את הוקטור השני מהצורה זו כך שיהיה מאונך ל־v_1 , כלומר:

$$0=\langle u_1,u_2\rangle=2(-2y+2z)+y+2z=-3y+6z$$

מכאן $y=2z$, וניתן לבחור למשל $v_2=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$. הוקטור השלישי צריך להיות אורתוגונלי לשני הוקטורים האחרים כלומר מקיים $x+2y+2z=-2x+2y+z=0$, ופתרון למערכת המשוואות הזו הוא למשל $v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

ב. נסמן $\|u\|=a$. הוקטור $u+3v$ אורתוגונאלי לווקטור $u-v$ אם ורק אם

$$\langle \mathbf{u}+3\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle+\langle \mathbf{u},-\mathbf{v}\rangle+\langle 3\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle+\langle 3\mathbf{v},-\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+3\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle-3\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=a^2+1-3-3=a^2-5=$$

וזה גורר ש־$a=\sqrt{5}$. בנוסף,

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=\langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=5+2+1\neq 1$$

ולכן הקבוצה לא מהווה בסיס אורתונורמלי של V.

בהצלחה