תרגיל 1 שאלות 15-18, 20-21

תרגיל 2 שאלות 1, 2, 4

<u>שאלה 15</u>

הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n+(-6)^n}{n+4}\cdot\frac{1}{7^n}\right)$ מתכנס.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n\cdot 6^n}{n+4}\cdot\frac{1}{7^n}\ ;\quad a_n=\frac{2^n+(-1)^n\cdot 6^n}{n+4}\cdot\frac{1}{7^n}$$

נבדוק התכנסות בהחלט.

$$|a_n|=\frac{2^n+6^n}{n+4}\cdot\frac{1}{7^n}$$

$$\left.\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+6^n}{n+4}\cdot\frac{1}{7^n}\right\}$$

טור חיובי! $\Longrightarrow$ נבצע את מבחן השורש של קושי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+6^n}{n+4}\cdot\frac{1}{7^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+6^n}{n+4}}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{7^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n+6^n}}{\sqrt[n]{n+4}}\cdot\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{7^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n+(3\cdot 2)^n}}{\sqrt[n]{n+4}}\cdot\frac{1}{7}$$

$$=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n+4}}+\frac{\sqrt[n]{6^n}}{\sqrt[n]{n+4}}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\underbrace{\cancel{\sqrt[n]{n+4}}}_{\to 1}}+\frac{6}{\underbrace{\cancel{\sqrt[n]{n+4}}}_{\to 1}}$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\lim_{n\to\infty}8=\frac{8}{7}>1\Longrightarrow$$

הטור מתבדר בהחלט. אבל עוד לא...

נבדוק האם הטור המקורי הוא טור לייבניץ. זה מתקיים אמ"מ מקיים 3 תנאים:

1) $a_n>0$; 2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 3) $a_n\geq a_{n+1}$

$$a_n=\frac{2^n+(-6)^n}{n+4}\cdot\frac{1}{7^n}\Longrightarrow a_n=(-1)^n\overbrace{\frac{6^n}{7^n\cdot(n+4)}+\frac{2^n}{7^n\cdot(n+4)}}^{\alpha_n}$$

ניתן לראות בקלות כי תנאים 1+2 מתקיימים.

נוכיח ש- $a_n \geq a_{n+1}$

צ"ל:

$$\frac{6^n}{7^n\cdot(n+4)}+\frac{2^n}{7^n\cdot(n+4)} \geq \frac{6^{n+1}}{7^{n+1}(n+5)}+\frac{2^{n+1}}{7^{n+1}\cdot(n+5)}$$

$$\frac{6^n}{7^n\cdot(n+4)}+\frac{2^n}{7^n\cdot(n+4)} \geq \frac{6\cdot 6^n}{7\cdot 7^n(n+5)}+\frac{2\cdot 2^n}{7\cdot 7^n\cdot(n+5)} \quad /\cdot 7$$

$$\frac{7\cdot 6^n}{7^n\cdot(n+4)}+\frac{7\cdot 2^n}{7^n\cdot(n+4)} \geq \frac{6\cdot 6^n}{7^n(n+5)}+\frac{2\cdot 2^n}{7^n\cdot(n+5)}$$

✓ מתקיים

$\Longleftarrow$ הטור מקיים את 3 התנאים $\Longleftarrow$ לכן זהו טור לייבניץ, טור מתכנס.

שאלה 16

הוכיחו שהטורים הבאים מתכנסים בהחלט:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ (אפשר להעזר בשאלה 10)

1א

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(-1)^{n+1}|}{|n(2n-1)|} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$$

טור חיובי! ע"מ לבדוק את התכנסותו, נבדוק את מבחן ההשוואה I.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \overset{n\geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}b_n \Longrightarrow$$

טור מתכנס ידוע

וידוע לנו ש- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור מתכנס.

$\Longleftarrow$ לכן, ממבחן ההשוואה I, גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס,

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט.

$\Longleftarrow$ מכאן, לפי משפט התכנסות בהחלט, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

ב

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|(-1)^{n+1}\cdot n^2|}{|(2+\frac{1}{n})^n|} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$$

טור חיובי! ע"מ לבדוק את התכנסות, נבצע את מבחן השורש

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 1}{n^{2/n}}}{2+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$0<\frac{1}{2}<\infty$$

$\Leftarrow$ לכן, ממבחן השורש, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס,

כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט.

$\Leftarrow$ מכאן, לפי משפט התכנסות בהחלט, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>שאלה 17</u>

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ בשתי דרכים (אפשר להעזר בשאלה 14).

נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln^2(n+1)} \quad ; \quad |a_n| = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} =$$ טור חיובי! $\Longrightarrow$ נבדוק את התכנסותו באמצעות מבחן האינטגרל.

$$|a_n| = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \quad ; \quad f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

נגדיר טור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}\,dx \quad ; \quad t = \ln(x+1), \; dt = \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \int_{\ln(2)}^{\infty} t^{-2}\,dt = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{\ln(2)}^{\infty} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{t}\right]_{\ln(2)}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[\cancelto{0}{\frac{-1}{b}} - \frac{-1}{\ln(2)}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \Longrightarrow$$ קיבלנו שהאינטגרל מתכנס, לכן גם הטור המקורי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס,

לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, ולכן לפי משפט הוא מתכנס.

שאלה 18 (מבחן ליבניץ).

נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{3n+1}$. האם הטור מתכנס בתנאי / בהחלט / מתבדר ?

$$a_n=\frac{4}{3n+1}$$

1) $a_n>0$ ✓

2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3n+1}=0$ ✓

3) צ"ל: $a_n\geq a_{n+1} \Rightarrow \frac{4}{3n+1}\geq\frac{4}{3n+4} \Longleftrightarrow \frac{3n+1}{4}\leq\frac{3n+4}{4}$ $\Big|\cdot 4$

$\Longleftrightarrow 3n+1\leq 3n+4$ $\Big|-3n$ $\Longleftrightarrow 1\leq 4$ ✓ מתקיים $\Rightarrow$ לכן, משקילות לוגית,
גם הביטוי המקורי
הוא $a_n\geq a_{n+1}$ הוא פסוק אמת.

הטור מקיים את 3 התנאים של לייבניץ, לכן הטור מתכנס.

שאלה 20 (מבחן לייבניץ ומבחן האינטגרל).

נתון הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$. האם הטור מתכנס בתנאי / בהחלט /מתבדר ?

$$a_n=\frac{1}{n\ln n}$$

1) $a_n>0$ ✓ ; 2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=0$ ✓

3) צ"ל: $a_n\geq a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n\ln n}\geq\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \Longleftrightarrow n\ln n\leq(n+1)\ln(n+1)$

$\Longleftrightarrow n\ln n\leq n\cdot\ln(n+1)+\ln(n+1)$

$\Longleftrightarrow \underbrace{n\ln n\leq n\ln(n+1)}_{\text{מתקיים}}\leq n\cdot\ln(n+1)+\ln(n+1)$

$\Longleftrightarrow n\ln(n+1)\leq n\cdot\ln(n+1)+\ln(n+1)$ $\Big|-n\ln(n+1)$

$\Longleftrightarrow 0\leq\ln(n+1)$ ✓ מתקיים $\Longrightarrow$ לכן, משקילות לוגית,
גם הביטוי המקורי
הוא $a_n\geq a_{n+1}$ הוא פסוק אמת.

הטור מקיים את 3 התנאים של לייבניץ, לכן הטור מתכנס.

שאלה 21

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$. האם הטור מתכנס בתנאי / בהחלט / מתבדר ?

נבדוק התכנסות בהחלט.

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n^2+1} \quad ; \quad |a_n|=\frac{n}{n^2+1}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ הוא טור חיובי. נבדוק את מבחן ההשוואה II.

ניקח טור $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ = הטור ההרמוני.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1 \qquad 0<1<\infty$$

לכן, ממבחן ההשוואה II מתקבל שמתנהגים אותו דבר $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר.

נבדוק האם הטור המקורי הוא טור לייבניץ.

1) $a_n=\frac{n}{n^2+1}>0$ ✓

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$ ✓

3) $\frac{n}{n^2+1}\geq\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \Longleftrightarrow \frac{x}{x^2+1}\geq\frac{x+1}{(x+1)^2+1} \Longleftrightarrow f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ פונקציה יורדת

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{x^2+1}\overset{x\geq1}{\leq}0 \Longrightarrow$$ f יורדת עבור $x\geq1$ ✓

הטור הוא טור לייבניץ $\Leftarrow$ הטור מתכנס בתנאי.

<u>שאלה 1</u>

נתון טור חזקות : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$.

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות.)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot\sqrt{n}}\cdot(x+1)^n$$

למציאת רדיוס ההתכנסות, נשתמש בנוסחת C-H:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \Longrightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{3^n\cdot\sqrt{n}}}}$$

$$\Longrightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{3^n}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{n}}}} \Longrightarrow R=\lim_{n\to\infty}3\cdot\cancelto{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} \Longrightarrow \underline{\underline{R=3}}$$

$$R=3,\quad x_0=-1 \quad \begin{cases} x_0-R=-4 \\ x_0+R=2 \end{cases} \quad I=[-4,2)$$

<u>בדיקת הקצה השמאלי:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cancel{-3})^n}{\cancel{3^n}\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

מתכנס
לפי לייבניץ

<u>בדיקת הקצה הימני:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

מתבדר
לפי השוואה מול I ההרמוני

שאלה 2

נתון הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\ln n}$.

מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור. מצאו את התחום המקסימלי שבו הטור מתכנס בההחלט.

האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההיתכנסות ?

$$a_n = \frac{1}{\ln(n)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \Longrightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \Longrightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[n\cdot(1+1/n)]}{\ln(n)}$$

$$\Longrightarrow R = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} \Longrightarrow R = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\cancel{\ln(1+1/n)}^{\to 0 \to 0}}{\ln(n)} = \boxed{1}$$

$$R = 1 \quad ; \quad x_0 = -1 \quad \begin{cases} x_0 - R = -2 \\ x_0 + R = 0 \end{cases} \quad I = [-2, 0)$$

<u>בדיקת הקצה הימני:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\ln(n)} \Longrightarrow$$ מתבדר, לפי השוואה I
מול הטור ההרמוני

<u>בדיקת הקצה השמאלי:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \Longrightarrow$$ מתבדר בהחלט, אך מתכנס
בתנאי לפי לייבניץ.

שאלה 4

מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}(2x+1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot 3^n}(2x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\cdot 3^n}(x+1/2)^n \quad ; \quad a_n=\frac{2^n}{n^2\cdot 3^n}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} \Longrightarrow R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2\cdot 3^n}{2^n}} \Longrightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}\cdot\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{2^n}}$$

$$\Longrightarrow R=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2}=\boxed{1\tfrac{1}{2}} \quad ; \quad x_0=-1/2$$

$$\left.\begin{aligned} x_0-R&=-2\\ x_0+R&=1\end{aligned}\right\} \quad I=[-2,1]$$

בדיקת הקצה הימני:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2\cdot 3^n} \Longrightarrow$$ מתכנס בהחלט $(|a_n|=1/n^2)$. לכן מוכל

בדיקת הקצה השמאלי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2\cdot 3^n} \Longrightarrow$$ גם כן מתכנס.