שאלון X

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. בשאלה הזאת נתבונן בשלבי הוכחה באינדוקציה של הטענה: $1+3+...+(2n-1)=n^2$ לכל $n\geq 1$ טבעי.

(1) (4 נק') בסיס האינדוקציה (יש לבחור תשובה אחת בלבד):

A. $1+3+...+(2\cdot 1-1)=1^2$

B. $n=1 \Leftarrow 2n-1=1^2$

C. $1=1^2$

D. $1+3+...+(2\cdot 1-1)\neq 1^2$ לכן הטענה לא נכונה.

(2) (4 נק') הנחת האינדוקציה (יש לבחור תשובה אחת בלבד):

A. נניח כי עבור $k\geq 1$ כלשהו מתקיים $1+3+...+(2k-1)=k^2$.

B. נניח כי עבור כל $k\geq 1$ טבעי מתקיים $1+3+...+(2k-1)=k^2$.

C. נניח כי עבור $k\geq 1$ טבעי מסוים מתקיים $1+3+...+(2k-1)=k^2$.

D. הטענה אינה נכונה, לכן לא קיימת הנחת האינדוקציה.

(3) (4 נק') כדי להוכיח את מעבר (צעד) האינדוקציה צריך (יש לבחור תשובה אחת בלבד):

A. להוכיח בכל דרך אפשרית כי $1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$.

B. על סמך הנחת האינדוקציה להוכיח כי $1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$.

C. על סמך הנחת האינדוקציה להוכיח כי $1+3+...+(2n-1)=n^2$.

D. על סמך הנחת האינדוקציה להוכיח כי $1+3+...+(2k-1)=(k+1)^2$.

ב. (8 נק') כל איבר של מטריצה מסדר $m\times n$ הינו 0 או 1. מהו המספר של מטריצות שונות מהסוג הזה?

פתרון

א. (1) C. (2) C. (3) B.

ב. לכל איבר במטריצה יש 2 אפשרויות: 0 או 1. יש $m\cdot n$ איברים במטריצה, לכן מספר המטריצות 2^{mn}.

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') תהינה A,B קבוצות לא ריקות. הוכיחו **בדרך השלילה**: אם $A\setminus B=B\setminus A$, אז $A=B$.

ב. (10 נק') סטודנטית להנדסת תוכנה צריכה ללמוד בדיוק 160 נקודות אקדמיות בשבעה סמסטרים כדי להיות זכאית לתואר. בכל סמסטר יכולה הסטודנטית ללמוד קורסים השווים סך הכל בין 16 ל – 30 נקודות זכות כולל. בכמה אפשרויות יכולה הסטודנטית לחלק את הנקודות בין הסמסטרים?

פתרון

א. נניח בשלילה כי $A\setminus B=B\setminus A$ ו – $A\neq B$. זה אומר כי קיים $x\in A$, כך ש – $x\notin B$ או קיים $x\in B$, כך ש – $x\notin A$.

במקרה הראשון $x \in A \setminus B$, ומהנתון $A \setminus B = B \setminus A$ מסיקים כי $x \in B \setminus A$, כלומר $x \notin A$. סתירה.
במקרה השני $x \in B \setminus A$, ומהנתון $A \setminus B = B \setminus A$ מסיקים כי $x \in A \setminus B$, כלומר $x \notin B$. סתירה.
לכן ההנחה $A \neq B$ אינה נכונה, משמע $A = B$.

ב. צריכים למצוא את מספר הפתרונות של המשוואה $u_1 + u_2 + ... + u_7 = 160$, כאשר $16 \le u_k \le 30$ מספר שלם, $k = 1,2,...,7$. הפונקציה היוצרת המתאימה הינה $f(x) = (x^{16} + x^{17} + ... + x^{30})^7$. הפתרון לשאלה הנתונה הוא המקדם של x^{160}. מתקיים:

$$f(x) = (x^{16} + x^{17} + ... + x^{30})^7 = \left(x^{16}(1 + x + x^2 + ... + x^{14})\right)^7 = x^{112}(1 + x + x^2 + ... + x^{14})^7 =$$

$$= x^{112} \cdot \left(\frac{1 - x^{15}}{1 - x}\right)^7 = \frac{x^{112}(1 - x^{15})^7}{(1 - x)^7} = x^{112}(1 - x^{15})^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+6}{6} x^n =$$

$$= (1 - x^{15})^7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+6}{6} x^{n+112} = (1 - 7x^{15} + 21x^{30} - 35x^{45} + ...) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+6}{6} x^{n+112}$$

אפשר לקבל את x^{160} בדרכים הבאות:

$$1 \cdot x^{160} \xrightarrow{n=48} 1 \cdot \binom{54}{6}$$

$$x^{15} \cdot x^{145} \xrightarrow{n=33} -7 \cdot \binom{39}{6}$$

$$x^{30} \cdot x^{130} \xrightarrow{n=18} 21 \cdot \binom{24}{6}$$

$$x^{45} \cdot x^{115} \xrightarrow{n=3} -35 \cdot \binom{9}{6}$$

מכאן התשובה: $1 \cdot \binom{54}{6} - 7 \cdot \binom{39}{6} + 21 \cdot \binom{24}{6} - 35 \cdot \binom{9}{6}$.

<u>שאלה 3</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (12 נק') על ידי אינדוקציה מתמטית הוכיחו כי לכל $n \ge 1$ טבעי מתקיים $\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

ב. (8 נק') בדקו האם הפסוק $(P \to Q) \to \left((P \to \bar{Q}) \to \bar{P}\right)$ הינו טאוטולוגיה.

<u>פתרון</u>

א. בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים $\frac{1 \cdot (4 \cdot 1^2 - 1)}{3} = \sum_{j=1}^{1} (2j-1)^2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

נניח כי עבור $k\ge 1$ טבעי מסוים מתקיים $\sum_{j=1}^{k}(2j-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}$ ונוכיח על סמך זה כי השוויון המתאים מתקיים גם עבור $k+1$, כלומר $\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)^2=\frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}=\frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}$

ואכן

$$\sum_{j=1}^{k+1}(2j-1)^2=\sum_{j=1}^{k}(2j-1)^2+\left(2(k+1)-1\right)^2\underset{\substack{induction\\ assumption}}{=}\frac{k(4k^2-1)}{3}+\left(2(k+1)-1\right)^2=$$

$$=\frac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{k(4k^2-1)+3(2k+1)^2}{3}=\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

כמו כן $\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}=\frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}$ וזה מוכיח את מעבר האינדוקציה.

לפי עקרון האינדוקציה המתמטית השוויון הנתון מתקיים לכל $n\ge 1$ טבעי.

ב. מתקיים:

$$\left(P\to Q\right)\to\left((P\to\bar{Q})\to\bar{P}\right)=\left(\bar{P}\vee Q\right)\to\left((\bar{P}\vee\bar{Q})\to\bar{P}\right)=\left(\bar{P}\vee Q\right)\to\left(\overline{(\bar{P}\vee\bar{Q})}\vee\bar{P}\right)=$$

$$=\left(\bar{P}\vee Q\right)\to\left((P\wedge Q)\vee\bar{P}\right)=\left(\bar{P}\vee Q\right)\to\left(\underbrace{(P\vee\bar{P})}_{T}\wedge(Q\vee\bar{P})\right)=$$

$$=\left(\bar{P}\vee Q\right)\to\left(Q\vee\bar{P}\right)=\underbrace{\left(\bar{P}\vee Q\right)\to\left(\bar{P}\vee Q\right)}_{R\to R=T}=T$$

כלומר הפסוק הנתון כן טאוטולוגיה.

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

נסמן ב – a_n את מספר הסדרות באורך n , שאבריהן נבחרו מהקבוצה $\{0,1,2\}$ ולא מופיעים בסדרה הרצפים 22 , 21 , 12 , 11.

א. (8 נק') מצאו את כלל הנסיגה עבור a_n ומצאו את תנאי ההתחלה המתאימים.

ב. (8 נק') פתרו את כלל הנסיגה ומצאו ביטוי מפורש עבור a_n.

ג. (4 נק') חשבו את a_5.

<u>פתרון</u>

א. $a_1=3, a_2=5$. אם סדרה באורך n מתחילה ב – 0, אפשר להמשיך אותה בכל סדרה חוקית באורך $(n-1)$. אם סדרה באורך n מתחילה ב – 1 או 2, חייבים לשים אחריהם 0 ואפשר להמשיך בכל סדרה חוקית באורך $(n-2)$. לכן הכלל הנסיגה שמתקבל הינו: $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ לכל $n\ge 3$.

ב. המשוואה האופיינית: $x^2=x+2$. הפתרונות שלה $x=-1,2$ לכן $a_n=A\cdot(-1)^n+B\cdot 2^n$. נמצא את A ו – B על ידי שימוש בתנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} a_1 = -A+2B=3 \\ a_2 = A+4B=5 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=\frac{4}{3} \end{cases}$$

מכאן $a_n=\frac{4\cdot 2^n-(-1)^n}{3}$ לכל n טבעי.

ג. $a_5=\frac{4\cdot 2^5-(-1)^5}{3}=\frac{129}{3}=43$.

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק')

(1) הוכיחו כי $k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$ לכל $1\le k\le n$.

(2) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\cdot k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot 3^{n-1}$

ב. (10 נק') בהטלת $n\ge 6$ קוביות משחק שונות, מצאו את מספר האפשרויות שבהן מופיעה כל אחת מהספרות $1-6$ לפחות פעם אחת. יש להשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

<u>פתרון</u>

א. (1) לכל $1\le k\le n$ מתקיים

$$k\cdot\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$
$$n\cdot\binom{n-1}{k-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

וזה מוכיח את הנדרש.

(2) מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\cdot k\cdot\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\cdot n\cdot\binom{n-1}{k-1}=n\cdot\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\cdot\binom{n-1}{k-1}=$$
$$=n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}2^{k}\cdot\binom{n-1}{k}=n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot 2^k\cdot\underbrace{1^{(n-1)-k}}_{1}=n\cdot(2+1)^{n-1}=n\cdot 3^{n-1}$$

ב. נסמן ב – U את קבוצת כל האפשרויות בהטלה של n קוביות וב – A_k את קבוצת אפשרויות ההטלה, כך שמספר k לא מופיע. $k=1,2,...,6$. בסימונים האלה צריכים לחשב את $\left|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap...\cap\bar{A}_6\right|$.

מתקיים :

$|U| = 6^n$

$|A_k| = 5^n \qquad \times\binom{6}{1} = 6$

$|A_k \cap A_j| = 4^n \qquad \times\binom{6}{2} = 15$

$|A_k \cap A_j \cap A_m| = 3^n \qquad \times\binom{6}{3} = 20$

$\vdots$

$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6| = 0 \qquad \times\binom{6}{6} = 1$

לפי עקרון הכלה והדחה מקבלים: $\left|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_6\right| = 6^n - 6\cdot 5^n + 15\cdot 4^n - 20\cdot 3^n + 15\cdot 2^n - 6\cdot 1^n$.

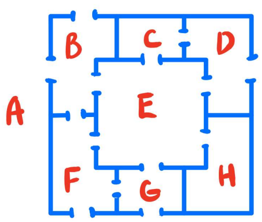
<u>שאלה 6</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. תהי $A = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. נגדיר מעל A יחס R באופן הבא: $(x,y)R(z,w)$ אם ורק אם $x^2 - y = z^2 - w$.

(1) (10 נקי) הוכיחו כי R יחס שקילות מעל A.

(2) (2 נקי) קבעו (בלי הוכחה) מהי העוצמה של מחלקת השקילות $[(0,0)]_R$.

ב. (8 נקי) במפה של בניין מסומנים 8 אזורים ומעברים ביניהם. האם קיים מסלול (רגיל או מעגלי) שעובר דרך כל מעבר במפה פעם אחת בדיוק? אם כן – תנו דוגמא למסלול כזה, אם לא – הסבירו היטב למה.



<u>פתרון</u>

א. (1) רפלקסיביות: לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $(x,y)R(x,y)$, כי $x^2 - y = x^2 - y$. לכן היחס רפלקסיבי.

סימטריות: נניח כי $(x,y)R(z,w)$, כלומר $x^2 - y = z^2 - w$. מכאן גם $z^2 - w = x^2 - y$ ולכן $(z,w)R(x,y)$. היחס סימטרי.

טרנזיטיביות: נניח כי $(x,y)R(z,w)$ ו – $(z,w)R(u,v)$, כלומר $x^2 - y = z^2 - w$ וגם $z^2 - w = u^2 - v$. מכאן $x^2 - y = u^2 - v$, כלומר $(x,y)R(u,v)$ וזה מוכיח שהיחס טרנזיטיבי.

הראנו כי היחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, לכן היחס הוא יחס שקילות.

(2) מתקיים: $[(0,0)]_R = \{(x,y)\in A \mid x^2 - y = 0\} = \{(x,y)\in A \mid y = x^2\}$, כלומר מחלקת השקילות הנתונה היא קבוצת כל הנקודות של פרבולה $y = x^2$. לכן $\left|[(0,0)]_R\right| = \aleph$, כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתאים זוג יחיד $(x,x^2)\in A$ ולהיפך.

ב. נתאים למפה הנתונה גרף, כך שכל אזור יסומן כקודקוד ומספר הקשתות בין זוג הקודקודים יהיה שווה למספר המעברים בין האזורים. למשל הקודקודים שמתאימים לאזורים A ו – B יחוברו על ידי 2 קשתות, כי יש 2 מעברים בין האזורים האלה. המסלול המבוקש קיים, אם הגרף שמתקבל הוא גרף אוילר או גרף חצי אוילר. נשים לב, כי לקודקודים A,D,G,H יש דרגה אי זוגית, לכן הגרף הוא לא גרף אוילר (מספר קודקודים עם דרגה אי זוגית גדול מ – 0) ולא גרף חצי אוילר (מספר קודקודים עם דרגה אי זוגית גדול מ – 2). זה מוכיח שלא קיים מסלול המבוקש עבור המפה הזאת.

שאלון X

שאלה 1 **(20 נקודות)** **אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'**

א. בשאלה הזאת נתבונן בשלבי הוכחה באינדוקציה של הטענה: $1+3+...+(2n-1)=n^2$ לכל $n\geq 1$ טבעי.

(1) (4 נק') בסיס האינדוקציה (יש לבחור תשובה אחת בלבד):

A. $1+3+...+(2\cdot 1-1)=1^2$

B. $n=1 \;\Leftarrow\; 2n-1=1^2$

C. $1=1^2$

D. $1+3+...+(2\cdot 1-1)\neq 1^2$ לכן הטענה לא נכונה.

(2) (4 נק') הנחת האינדוקציה (יש לבחור תשובה אחת בלבד):

A. נניח כי עבור $k\geq 1$ כלשהו מתקיים $1+3+...+(2k-1)=k^2$.

B. נניח כי עבור כל $k\geq 1$ טבעי מתקיים $1+3+...+(2k-1)=k^2$.

C. נניח כי עבור $k\geq 1$ טבעי מסוים מתקיים $1+3+...+(2k-1)=k^2$.

D. הטענה אינה נכונה, לכן לא קיימת הנחת האינדוקציה.

(3) (4 נק') כדי להוכיח את מעבר (צעד) האינדוקציה צריך (יש לבחור תשובה אחת בלבד):

A. להוכיח בכל דרך אפשרית כי $1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$.

B. על סמך הנחת האינדוקציה להוכיח כי $1+3+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$.

C. על סמך הנחת האינדוקציה להוכיח כי $1+3+...+(2n-1)=n^2$.

D. על סמך הנחת האינדוקציה להוכיח כי $1+3+...+(2k-1)=(k+1)^2$.

ב. (8 נק') כל איבר של מטריצה מסדר $m\times n$ הינו 0 או 1. מהו המספר של מטריצות שונות מהסוג הזה?

שאלה 2 **(20 נקודות)** **אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'**

א. (10 נק') תהינה A,B קבוצות לא ריקות. הוכיחו **בדרך השלילה**: אם $A\setminus B=B\setminus A$, אז $A=B$.

ב. (10 נק') סטודנטית להנדסת תוכנה צריכה ללמוד בדיוק 160 נקודות אקדמיות בשבעה סמסטרים כדי להיות זכאית לתואר. בכל סמסטר יכולה הסטודנטית ללמוד קורסים השווים סך הכל בין 16 ל – 30 נקודות זכות כולל. בכמה אפשרויות יכולה הסטודנטית לחלק את הנקודות בין הסמסטרים?

שאלה 3 **(20 נקודות)** **אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'**

א. (12 נק') על ידי אינדוקציה מתמטית הוכיחו כי לכל $n\geq 1$ טבעי מתקיים $\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

ב. (8 נק') בדקו האם הפסוק $(P\to Q)\to\left((P\to\bar{Q})\to\bar{P}\right)$ הינו טאוטולוגיה.

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

נסמן ב – a_n את מספר הסדרות באורך n , שאבריהן נבחרו מהקבוצה $\{0,1,2\}$ ולא מופיעים בסדרה הרצפים 22 , 21 , 12, 11.

א. (8 נק׳) מצאו את כלל הנסיגה עבור a_n ומצאו את תנאי ההתחלה המתאימים.

ב. (8 נק׳) פתרו את כלל הנסיגה ומצאו ביטוי מפורש עבור a_n .

ג. (4 נק׳) חשבו את a_5 .

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א׳ לסעיף ב׳

א. (10 נק׳)

(1) הוכיחו כי $n\cdot\binom{n-1}{k-1}=k\cdot\binom{n}{k}$ לכל $1\le k\le n$.

(2) הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}\cdot k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot 3^{n-1}$

ב. (10 נק׳) בהטלת $n\ge 6$ קוביות משחק שונות, מצאו את מספר האפשרויות שבהן מופיעה כל אחת מהספרות $1-6$ לפחות פעם אחת. יש להשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א׳ לסעיף ב׳

א. תהי $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. נגדיר מעל A יחס R באופן הבא: $(x,y)R(z,w)$ אם ורק אם $x^2-y=z^2-w$.

(1) (10 נק׳) הוכיחו כי R יחס שקילות מעל A .

(2) (2 נק׳) קבעו (בלי הוכחה) מהי העוצמה של מחלקת השקילות $\left[(0,0)\right]_R$.

ב. (8 נק׳) במפה של בניין מסומנים 8 אזורים ומעברים ביניהם. האם קיים מסלול (רגיל או מעגלי) שעובר דרך כל מעבר במפה פעם אחת בדיוק? אם כן – תנו דוגמא למסלול כזה, אם לא – הסבירו היטב למה.