תרגיל בית 10 – אינדוקציה

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. הוכיחו שלכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n \geq 1$ המספר $n^7 - n$ מתחלק ב – 7 ללא שארית.
2. הוכיחו שלכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n \geq 1$ המספר 13 מחלק את הביטוי $10^{2n-1} + 3^{2n-1}$ ללא שארית.
3. הוכיחו כי לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n > 1$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.
4. יהיו $x \neq y \in \mathbb{R}$ כלשהם. הוכיחו כי הביטוי $(x-y)$ מחלק את $x^{2n} - y^{2n}$ לכל מספר טבעי $n \geq 1$.
5. נסמן ב – P_n את הטענה

$$P_n : \ 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 + 3$$

(א) האם הטענה P_n נכונה לכל $n \geq 1$?

(ב) הוכיחו כי אם $P_k = True$ אז עבור מספר מסויים k אז גם $P_{k+1} = True$.

6. **כל החתולים בעולם הם מאותו צבע** בתרגיל זה נראה איך אפשר להוכיח באינדוקציה שכל החתולים בעולם הם מאותו צבע. מכיוון שברור שהטענה הזו אינה נכונה, **המשימה שלכם בתרגיל זה הוא למצוא את הטיעון השגוי ב"הוכחה" הבאה:**

(א) נוכיח באינדוקציה על מספר החתולים את הטענה הבאה: כל החתולים בעולם הם מאותו צבע.

(ב) **בסיס האינדוקציה:** נתבונן בקבוצה שיש בה חתול אחד. אז כל החתולים בקבוצה זו הם מאותו צבע.

(ג) **הנחת האינדוקציה:** נתבונן בקבוצה שיש בה n חתולים. אז כל החתולים בקבוצה הם מאותו צבע.

(ד) **צעד האינדוקציה:** נוכיח כי בקבוצה X שיש בה $n+1$ חתולים ־ כל החתולים הם מאותו צבע. אכן, נסמן את החתולים הקבוצה X באופן הבא

$$X = \{c_1, c_2 \ldots, c_n, c_{n+1}\}$$

כעת, נתבונן בתת הקבוצה A

$$A = \{c_1, c_2 \ldots, c_n\} = X \setminus \{c_{n+1}\}$$

זוהי קבוצה עם n חתולים מתוך הקבוצה X ולכן כל החתולים בקבוצה A הם מאותו צבע. נתבונן בתת קבוצה נוספת של X

$$B = \{c_2 \ldots, c_n, c_{n+1}\} = X \setminus \{c_1\}$$

גם הקבוצה B היא קבוצה עם n חתולים ולכן כל החתולים ב B הם מאותו צבע. מכיוון שהחתול c_2 נמצא גם ב A וגם ב B,

$$c_2 \in A \cap B$$

אז כל החתולים שבקבוצה A בצבע של החתול c_2 וגם כל החתולים בקבוצה B הם בצבע של החתול c_2 ולכן כל החתולים בקבוצה X הם באותו צבע.

(ה) **מסקנה:** כל החתולים בעולם הם מאותו צבע.

7. **אינדוקציה עם אובייקטיים גיאומטריים** נתבונן באוסף סופי של ישרים במישור. בתרגיל זה נוכיח באינדוקציה את הטענה הבאה: ניתן לצבוע את האזורים שבין הישרים בשני צבעים שחור ולבן, כך שאין שני חלקים צמודים (כלומר עם גבול משותף) שצבועים באותו צבע.

(א) ציירו ישר אחד במישור והסבירו למה הטענה נכונה.

(ב) ציירו ישר נוסף לציור שציירתם בסעיף הקודם והסבירו למה הטענה נשארת נכונה.

(ג) נניח כי הטענה נכונה עבור n ישרים. כלומר, נניח כי ניתן לצבוע את האזורים שבין כל n ישרים בשני צבעים שונים כך שאין חלקים צמודים הצבועים באותו צבע. התבוננו כעת ב $n+1$ ישרים. נשים בצד לרגע ישר אחד, ℓ. כעת, יש לנו n ישרים במישור ולכן ניתן לצבוע בשני צבעים. כעת, נחזיר את הישר שהוצאנו לציור. כל האזורים שמצד אחד של הישר ℓ ישארו בצביעה הקודמת וכל האזורים שמהצד השני של הישר יהפכו את הצבע שלהם) שחור ללבן ולהיפך(. הסבירו למה הצביעה הסופית שהתקבלה היא צביעה בה אין חלקים צמודים הצבועים באותו צבע.

8.

(א) הוכיחו כי הטענה הבאה נכונה לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(ב) נתבונן בסדרה

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

הראו כי הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה החסומה ע"י 2.

(ג) האם ניתן להוכיח **באינדוקציה** שהסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה ע"י 2?

9. נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת באופן הבא

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},\ n \geq 3$$
$$a_1 = 11$$
$$a_2 = 21$$

הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq 1$ מתקיים

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1$$