

תרגיל בית 7 – יחסים

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. הוכחות עם מכפלות קרטזיות יהיו A, B, C, D קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad (\text{א})$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \quad (\text{ב})$$

$$(\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}) \leftrightarrow ((a = c) \wedge (b = d)) \quad (\text{ג})$$

2. צורות גיאומטריות כמכפלות קרטזיות נתבונן במישור \mathbb{R}^2 . ציירו את המרחב \mathbb{R}^3 . בתוך המרחב, נתבונן במעגל C ובקטע D הבאים:

$$C = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$D = \{(0, 0, z) \mid 0 \leq z \leq 1\}$$

האם תוכלו לצייר את המכפלה הקרטזית $C \times D$? איזו צורה קיבלתם?

3. כמה יחסים יש: יהיו A, B שתי קבוצות.

$$(\text{א}) \text{ נניח כי } |A| = n, |B| = m. \text{ כמה יחסים שונים יש מ } A \text{ ל } B?$$

$$(\text{ב}) \text{ נניח כי } |A| = n. \text{ כמה יחסים שונים יש מהקבוצה } A \text{ לעצמה?}$$

4. תהא A קבוצה סופית ו- R יחס על A . הסבירו את הטענה הבאה: קיימים $N_2 > N_1$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $R^{N_2+n} = R^{N_1+n}$.

5. כפל יחסים נתבונן בקבוצות הבאות

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{i, j\} \quad C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

וביחסים

$$R = \{(1, i), (2, i), (3, j)\} \subseteq A \times B$$

$$S = \{(i, \alpha), (i, \gamma), (j, \beta), (j, \delta)\} \subseteq B \times C$$

(א) כיתבו במפורש את כפל היחסים RS . אפשר ורצוי להעזר בדיאגרמות בכדי להבין את הכפל. מה שכן, דיאגרמה לעולם אינה תשובה! רק כלי עזר.

(ב) כיתבו יחס משלכם T כאשר $T \subseteq C \times A$ וחשבו את הכפל ST .

6. תכונות יחסים בטבלה הבאה מתוארים מספר יחסים. עבור כל אחד מהיחסים בידקו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי. מלאו את הטבלה - אם היחס מקיים את התכונה הוכיחו, אם היחס לא מקיים את התכונה הביאו דוגמא.

טרנזיטיבי	אנטיסימטרי	סימטרי	רפלקסיבי	היחס	
				$a, b \in \mathbb{Z}. (a, b) \in R \iff (a - b)$ זוגי	א
				$a, b \in \mathbb{R}. (a, b) \in R \iff a + b > 6$	ב
				$A, B \subseteq \mathbb{R} (A, B) \in R \iff A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}$	ג
				$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (f, g) \in R \iff \forall a \in \mathbb{R}, f(a) \geq g(a)$	ד
				$a, b \in \mathbb{N} (a, b) \in R \iff a \leq b$	ה

7. תהא A קבוצה לא ריקה ו R, S יחסים על A . עבור כל אחת מהטענות הבאות קיבעו האם היא נכונה או שיקרית. אם הטענה נכונה יש להוכיח. אם הטענה שגויה יש למצוא דוגמא נגדית. כשאתם מחפשים דוגמאות נגדיות מומלץ להתבונן בקבוצה A קטנה ככל הניתן וביחסים R, S פשוטים ככל הניתן.

(א) נניח כי היחסים R, S הם שניהם יחסים רפלקסיביים. אז:

i. $R \cap S$ רפלקסיבי

ii. $R \cup S$ רפלקסיבי

iii. RS רפלקסיבי

iv. R^{-1} רפלקסיבי

(ב) נניח כי היחסים R, S שניהם יחסים סימטריים. אז:

i. $R \cap S$ סימטרי

ii. $R \cup S$ סימטרי

iii. RS סימטרי

iv. R^{-1} סימטרי

8. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קיבעו האם ייתכן יחס כזה. אם כן - הביאו דוגמא, אם לא - הוכיחו

(א) סימטרי ולא טרנזיטיבי

(ב) סימטרי ואנטי סימטרי

(ג) לא סימטרי ולא אנטי סימטרי

(ד) טרנזיטיבי, סימטרי ולא רפלקסיבי