

**אלגברה לינארית**  
**תרגיל מספר 3 - מטריצות**

**שאלה 1**

נתונות המטריצות הבאות :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

קבעו האם הפעולות הבאות מוגדרות? נמקו! אם כן, חשבו אותן.

- א.  $5C$  ב.  $E + D^T$  ג.  $D - E^T$  ד.  $C + 2E$  ה.  $ED - \frac{1}{2}I_{3 \times 3}$  ו.  $DE$  ז.  $C^2$  ח.  $A^2$  ט.  $A^T A$   
י.  $AA^T$  יא.  $B^3$  יב.  $A^T C$  יג.  $5DE - B^2$  יד.  $ED + 2C$  טו.  $DA - CA$  טז.  $E^T A + 2DA$  יז.  $BA$

**שאלה 2**

נתונות המטריצות הבאות :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = AB$$

חשבו את האיברים הבאים : א.  $c_{2,1}$  ב.  $c_{1,2}$  ג.  $c_{3,2}$  ד.  $c_{2,2}$ .

הערה:  $(C)_{i,j} = c_{i,j}$  הוא האיבר אשר נמצא בשורה ה- $i$  ובעמודה ה- $j$ .

**שאלה 3**

נתונות שלוש מטריצות  $A, B, P$  מסדר  $n \times n$ , בנוסף נתון כי  $A$  אנטי סימטרית,  $B$  סימטרית ו- $P$  כללית. מבין שמונת המטריצות הבאות קבעו מי בהכרח סימטרית או אנטי סימטרית ואם לא כך הדבר הציגו דוגמה נגדית.

- א.  $P^T + P - A$  ב.  $P^T - P + A$  ג.  $P^T - P - A$  ד.  $ABA$  ה.  $BAB$  ו.  $P^T + P - B$   
ז.  $P^T - P + B$  ח.  $P^T + P + B$

הערה: מטריצה ריבועית  $A$  נקראת סימטרית אם  $A^T = A$  ונקראת אנטי סימטרית אם  $A^T = -A$ .

**שאלה 4**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ תהי}$$

א. חשבו  $A^2, A^3$ .

ב. הוכיחו באינדוקציה כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## שאלה 5

נתונות מערכות המשוואות הלינאריות הבאות :

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y - z = -1 \end{cases} \quad \text{ג.} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

הציגו כל מערכת בצורה של  $A\underline{x} = \underline{b}$  (כאשר  $A$  מטריצה ו- $\underline{x}, \underline{b}$  מטריצות בעלות עמודה אחת)

## שאלה 6

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  אז המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות (כלומר

$$AB = BA).$$

ב. אם מטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  אז  $A$  אנטי סימטרית.

ג. נתון כי  $A$  מטריצה מסדר  $n \times n$  המקיימת  $(A - I_{n \times n})(A + I_{n \times n}) = O_{n \times n}$  אז מתקיים  $A = I$  או  $A = -I$ .

הערה:  $O_{n \times n}$  מטריצת האפס מסדר  $n \times n$ ,  $I_{n \times n}$  מטריצת היחידה מסדר  $n \times n$ .

ד. המטריצה  $AB$  היא סימטרית אז המטריצה  $A$  סימטרית וגם המטריצה  $B$  סימטרית.

## שאלה 7

נתונות המטריצות  $A$  ו- $B$  מסדר  $n \times n$ ,  $n \geq 4$ . נתון כי השורה השלישית של  $A$  היא שורת אפסים והעמודה הרביעית של  $B$  היא עמודת אפסים. מה תכלו להגיד בוודאות על המטריצות  $AB$  ו- $BA$ ?

## שאלה 8

תהי  $A$  מטריצה ממטית מסדר  $n \times n$  המקיימת  $AA^T = O_{n \times n}$  הוכיחו כי  $A = O_{n \times n}$ . האם הטענה נכונה גם כאשר אברי  $A$  מרוכבים? (אם כן להוכיח אם לא לתת דוגמה נגדית).