המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב אפקה

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

א. (10 נק׳) נגדיר סדרה על ידי : $a_1 = 1$ ו- $a_{n+1} = \dfrac{8}{6 - a_n}$, לכל $n \geq 1$ טבעי. בדקו ש- $a_n < 2$, לכל $n \geq 1$.

הוכיחו שהסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מתכנסת וחשבו את גבול הסדרה $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. נמקו !

ב. (10 נק׳) מצאו את שטח התחום הכלוא בין העקומות $y = e^{2x}$ ו- $y = e^{-x}$ בקטע $I : -\ln 4 \leq x \leq \ln 5$.
נמקו !

פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>שאלה 2</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>

א. (10 נק') חשבו את הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{4}{\ln(1+2x)}}$. נמקו !

ב. (10 נק') תהיה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות (כלומר הנגזרת השנייה $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה ב- $\mathbf{R}$). ידוע כי קיימות שתי נקודות $a\neq b$ כך שהישרים המשיקים לגרף הפונקציה f בנקודות האלה הם מקבילים. הוכיחו כי קיימת נקודה c בין a ל- b כך ש- $f''(c)=0$. נמקו !

<u>פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>שאלה 3</u> **(20 נקודות)** **<u>אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳</u>**

א. (10 נק׳) נתונה הפונקציה $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}\setminus\{1\},\ f(x)=\dfrac{x}{x-1}$. מצאו את ההרכבה $f\circ f$.

האם f פונקציה הפיכה ? נמקו ! <u>הערה</u>: מסמנים $\mathbf{R}\setminus\{1\}=\{x\in\mathbf{R}, x\neq 1\}$.

ב. (10 נק׳) הראו ש: $x^2\geq x\cos x-\sin x$, לכל $x\geq 0$ ממשי. נמקו!

<u>פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') 1. מצאו את הפולינום מקלורן (Maclaurin) מסדר $n=3$ של $f(x)=\tan(x)$. נמקו !

2. הראו כי $0\le \tan(x)-x\le \frac{4}{2!}x^2$, לכל $0\le x\le \frac{\pi}{4}$. נמקו !

ב. (10 נק') נגדיר $F(x)=\int_1^x \frac{t}{1+\ln t}dt$, לכל $x\ge 1$. נסמן ב- $L: y=mx+n$ את משוואת הקו המשיק לגרף של F בנקודה $x=1$. מצאו את המקדמים m,n והוכיחו שהקו L נמצא מתחת לגרף של F בקטע $I=[1,\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x\ge 1\}$. נמקו !

פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

שאלה 5 **(20 נקודות)** **אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. **(10 נק')** חשבו את $\int_2^4 xe^{x^2}\left(x^2+1\right)dx$. נמקו !

ב. **(10 נק')** **1.** האם קיים פולינום $y=P(x)=mx+n$ כך ש- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2+2\ln x}{2x}-P(x)\right)=0$?

2. תהי $x>0,\ f(x)=\frac{x^2+2+2\ln x}{2x}$.

האם האסיפטוטה המשופעת של הפונקציה f ב- $+\infty$ חותכת את גרף הפונקציה f ? נמקו!

פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>

א. (10 נק') תהיה $f:[0,1]\to[2,4]$ פונקציה רציפה. ידוע כי $f(0)=3$.

הוכיחו כי אם f *<u>פונקצית על</u>* (ז"א $\mathrm{Image}(f)=[2,4]$), אז f *<u>אינה פונקציה חח"ע</u>*
(ז"א קיימים שני מספרים ממשיים $0\le x_1\ne x_2\le 1$ כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$). נמקו !

<u>רמז</u>: האם למשוואה $f(x)=3$ יש פתרון יחיד? <u>הערה</u>: $[a,b]$ מסמן קטע חסום וסגור
$[a,b]=\{t\in\mathbf{R}: a\le t\le b\}$.

ב. (10 נק') יהי $m\in\mathbf{R}$ מספר ממשי נתון.
הוכיחו שלמשוואה $3x-x^3-m=0$ <u>יש</u> פתרון ממשי יחיד אם ורק אם $|m|>2$. נמקו !

<u>פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

סוף הפתרון !

אפקה המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב

בחינות – היחידה למתמטיקה

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון Y

פתרון 1.א.

נבדוק באינדוקציה את חסימות הסדרה. צ"ל: לכל $n \ge 1$ מתקיים $a_n < 2$.

שלב 1: נבדוק את האי-שיוויון עבור $n=1$: $a_1 = 1 < 2$.

שלב 2: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$: $a_k < 2$. צ"ל שהטענה נכונה עבור שלב הבא $n=k+1$: $a_{k+1} < 2$.

$$a_k < 2 \;\Rightarrow\; -a_k > -2 \;\Rightarrow\; 6-a_k > 6-2 = 4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{6-a_k} < \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{8}{6-a_k} < 2 \;\Rightarrow\; a_{k+1} < 2$$

לכן הסדרה $\{a_n\}_{n\ge1}$ חסומה מלמעלה ע"י מספר 2.

נבדוק באינדוקציה את מונוטוניות הסדרה: $\{a_n\}_{n\ge1}$ עולה ממש. צ"ל: לכל $n \ge 1$ מתקיים $a_{n+1} > a_n$.

שלב 1: נבדוק את האי-שיוויון עבור: $a_2 = \frac{8}{6-1} = 1.6 > 1 = a_1$ ולכן $a_2 > a_1$.

שלב 2: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ ז"א $a_{k+1} > a_k$. צ"ל שטענה נכונה עבור $n=k+1$: $a_{k+2} > a_{k+1}$

$$a_{k+1} > a_k \underset{a_n<2}{\Longrightarrow} 0 < 6-a_{k+1} < 6-a_k \Rightarrow \frac{1}{6-a_{k+1}} > \frac{1}{6-a_k} \Rightarrow \frac{8}{6-a_{k+1}} > \frac{8}{6-a_k} \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$$

לכן הסדרה מונוטונית עולה ממש. הסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה, לכן הסדרה מתכנסת, מ.ש.ל.

<u>חישוב הגבול:</u> $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{6-a_n} = \frac{8}{6-L}$ לכן $L^2 - 6L + 8 = 0$, ז"א $L_1 = 2$ or $L_2 = 4$. <u>התשובה:</u> $L = \lim_{n\to\infty} a_n = 2$ (כי $L_2 = 4$ סותר את $a_n < 2$).

פתרון 1.ב.

ברור ש-

$$\begin{cases} -\ln 4 \le x \le 0 & \Rightarrow e^{-3x} \ge 1 \quad \Rightarrow e^{-x} \ge e^{2x} \\ 0 \le x \le \ln 5 & \Rightarrow e^{3x} \ge 1 \quad \Rightarrow e^{2x} \ge e^{-x} \end{cases}.$$

לכן השטח הוא:

$$S = \int_{-\ln 4}^{0} \left(e^{-x} - e^{2x}\right)dx + \int_{0}^{\ln 5} \left(e^{2x} - e^{-x}\right)dx = \left(-e^{-x} - \frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_{-\ln 4}^{0} + \left(\frac{e^{2x}}{2} + e^{-x}\right)\Bigg|_{0}^{\ln 5} =$$

$$= \left(-1 - 0.5 + 4 + \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{25}{2} + \frac{1}{5} - 0.5 - 1\right) = 1 + \frac{1}{32} + \frac{25}{2} + \frac{1}{5} = 13.73125$$

פתרון 2.א.

נשתמש במשפט Euler עבור הגבול מסוג $[1^{\infty}]$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = [t=\sin x\to 0] = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

ונסיק ש-

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{4}{\ln(1+2x)}} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{4\sin x}{\ln(1+2x)}} \underset{EULER}{\overset{[1^{\infty}]}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin x}{\ln(1+2x)}} = (*) = e^{2}$$

בשיוויון האחרון (*) משתמשים בכלל L'Hôpital במצב לא מוגדר מסוג $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{\ln(1+2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'Hôpital}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\cos x}{2/(1+2x)} = 2$$

פתרון 2.ב.

נתון שהישרים המשיקים בנקודות $a\neq b$ מקבילים.
זה אומר שהשיפועים $f'(a)=f'(b)$ שווים .

ללא הגבלת הכלליות יכולים להניח ש- $a<b$.

נפעיל את משפט Rolle-Lagrange עבור הפונקציה $g(x)=f'(x)$ בקטע סגור וחסום $I: a\le x\le b$.
ניתן להשתמש במשפט הנ״ל מפני ש- g גזירה בכל נקודה של I , כולל שתי בקצוות a,b .

מסיקים שקיימת נקודה c בקטע I כך ש-

$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} = 0 \ .$$

זה שקול ל- $g'(c)=f''(c)=0$, מ.ש.ל.

<u>פתרון 3.א.</u>

<u>הערה</u>: הנתון $f : D \to D$ גורר ש- $f(x)=\frac{x}{x-1} \neq 1$, לכל $x \in \mathbf{R}, x \neq 1$.

לכן ניתן לבצע את ההרכבה $f \circ f$. יהיה $x \in \mathbf{R}, x \neq 1$. מתקיים

$$(f \circ f)(x)= f\left(f(x)\right)=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x-1)}{x-1}}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$$

קיבלנו שההרכבה שווה ל<u>פונקציית הזהות</u>, ז"א: $(f \circ f)(x)=x=id(x)$, לכל $x \in D=\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

זה שקול שההופכית של f קיימת ושווה לפונקציה f עצמה, ז"א $f^{-1}=f$.

בפרט, מסיקים שהפונקציה f חח"ע ועל.

<u>פתרון 3.ב.</u>

<u>פתרון ראשון</u>:

מספיק להראות שפונקציית העזר $f(x)=\sin x - x\cos x + x^2 \geq 0$, לכל $x \geq 0$,

(כלומר f אי- שלילית בקטע $x \geq 0$). נגדיר פונקציה רציפה $f(x)=\sin x - x\cos x + x^2$ בקטע $I=[0,\infty)$.

ברור ש- $f(0)=0$. לכל $x>0$ מתקיים:

(***) $f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x+2x=x\sin x+2x=x(2+\sin x)>0$.

מסיקים שהפונקציה f עולה ממש בקטע $I=[0,\infty)$ ו- $f(0)=0$.

לכן לכל $x>0$ מתקיים $f(x)>f(0)=0$, ז"א f חיובית ממש בתחום הנתון , מ.ש.ל.

<u>פתרון שני</u>:

מספיק להראות שפונקציית העזר $f(x)=\sin x - x\cos x + x^2 \geq 0$, לכל $x \geq 0$,

(כלומר f אי- שלילית בקטע $x \geq 0$). הטענה נכונה עבור $x=0$ כי $f(0)=0$.

<u>נפעיל את משפט Lagrange</u> עבור הפונקציה $f(x)=\sin x - x\cos x + x^2$, בקטע $[a,b]=[0,x]$, כאשר

$x>0$. נמקו למה תנאי משפט Lagrange תקפים! מתקיים $f'(x)=x(2+\sin x)$ (***).

יהי $x>0$. בוחרים קטע $[a,b]=[0,x]$. משפט Lagrange גורר שקיים $c \in (0,x)$ כל ש-

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\left[f(0)=0\right]=\frac{\sin x - x\cos x + x^2}{x}=[Lagrange]=f'(c)\underset{(***)}{=}c(2+\sin c)>0 .$$

האי-שיוויון הזה גורר שהמונה $\sin x - x\cos x + x^2>0$, לכל $x>0$, מ.ש.ל.

<u>פתרון שלישי</u>:

נשתמש בנוסחת Taylor-Maclaurin מסדר ראשון של $g(x)=\sin x$: מתקיים :

$$R_1(x)=\left|\sin x - T_1(x)\right|=\left|\sin x - x\right|=\left|\frac{g''(c)}{2}x^2\right|=\left|\frac{(-\sin c)}{2}x^2\right|\leq\frac{x^2}{2}$$ ולכן $-\frac{x^2}{2}\leq \sin x - x \leq \frac{x^2}{2}$.

מסיקים ש- $\sin x - x\cos x + x^2 \geq \left(x-\frac{x^2}{2}\right)-x\cos x+x^2 = x(1-\cos x)+\frac{x^2}{2}\geq 0$, לכל $x\geq 0$,

מ.ש.ל.

פתרון 4.א.

1. נראה כי $T_3(x)=x+\frac{x^3}{3}$ הינו פולינום טיילור-מקלורן מסדר $n=3$ עבור פונקציה $f(x)=\tan x$.

נחשב את המקדמים של פולינום טיילור-מקלורן על ידי הצבה של $a=0$ בנגזרות $f^{(k)}$, $0\le k\le 3$:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_1(x)=T_2(x)=x \\ T_3(x)=x+\frac{2}{6}x^3=x+\frac{x^3}{3}\end{array}} \Leftarrow \begin{cases} f(x)=\tan x\Rightarrow \underline{\mathbf{f(0)=0}}; \quad f'(x)=\cos^{-2}x\Rightarrow \underline{\mathbf{f'(0)=1}} \\ f''(x)=(-2)\cdot\cos^{-3}x\cdot(-\sin x)\Rightarrow \underline{\mathbf{f''(0)=0}} \\ f'''(x)=(-2)\cdot\left[\left(-3\cos^{-4}x\right)\left(\sin^2 x\right)-\cos^{-2}x\right]\Rightarrow \underline{\mathbf{f'''(0)=2}}\end{cases}.$$

2. נשאר להראות שמתקיים: $0\le(\tan x)-x\le 2x^2$, לכל $0\le x\le\frac{\pi}{4}$.

נשתמש בפולינום Maclaurin מסדר $n=1$ של $f(x)=\tan x$.

ברור ש- $T_1(x)=x$ (זה הקירוב הליניארי של f) לכן $\tan x-x=f(x)-T_1(x)=R_1(x)$.

ידוע שהשארית מסדר $n=1$ (error) שווה ל- $R_1(x)=\frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot x^2$, כאשר c בין 0 ל- x .

נתון ש- $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ ולכן $0\le c\le x<\frac{\pi}{4}$. הוכחנו ש- $f''(x)=(-2)\cdot\cos^{-3}x\cdot(-\sin x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

נמצא את החסמים של השארית $R_1(x)=\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$ עבור $0\le c\le x<\frac{\pi}{4}$:

$0\le R_1(x)=\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2\le\frac{\sin(\pi/4)}{\cos^3(\pi/4)}\cdot x^2=2x^2$, לכל $0\le c\le x<\frac{\pi}{4}$.

מסיקים ש- $0\le\tan x-x=f(x)-T_1(x)=R_1(x)\le 2x^2$, לכל $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, מ.ש.ל.

פתרון 4ב:

נתון ש- $F(x)=\int_1^x\frac{t}{1+\ln t}dt$, לכל $x\ge 1$. ברור ש- $F(1)=\int_1^1\frac{t}{1+\ln t}dt=0$.

הפונקציה $f(t)=\frac{t}{1+\ln t}$ רציפה לכל $t\ge 1$. לפי משפט היסודי של Newton-Leibniz מתקיים

$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_1^x\frac{t}{1+\ln t}dt\right)=\frac{x}{1+\ln x}$, לכל $x\ge 1$. לכן משוואת המשיק לגרף של F בנקודה $x=1$ שווה

ל- $y-F(1)=F'(1)(x-1)$, ז"א: $L: y-0=1\cdot(x-1)$ $\Leftrightarrow L: y=x-1$. מסיקים שהמקדמים של L הם $m=1, n=-1$.

בנוסף, $F''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+\ln x}\right)=\frac{1\cdot(1+\ln x)-x\cdot(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}=\frac{(1+\ln x)-1}{(1+\ln x)^2}=\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}\ge 0$,

לכל $x\ge 1$. לכן F <u>קמורה</u> (ממש) בקטע $[1,\infty)$ וזה גורר שהקו L נמצא <u>מתחת לגרף</u> של F בקטע $[1,\infty)$.

פתרון 5.א.

נחשב את הפונקציה הקדומה של הפונקציה הרציפה $f(x)=x\cdot e^{x^2}\cdot(x^2+1)$:

$$F(x)=\int x\cdot e^{x^2}\cdot(x^2+1)dx=\begin{bmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \\ \frac{1}{2}dt=xdx \end{bmatrix}=\int e^t\cdot(t+1)\cdot\frac{1}{2}dt=\begin{bmatrix} f'=e^t\to f=e^t \\ g=t+1\to g'=1 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^t\cdot(t+1)-\int e^t dt\right]=\frac{1}{2}\left[e^t\cdot(t+1)-e^t\right]+C=\frac{1}{2}e^t\cdot t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot x^2+C$$

לכן, לפי משפט Newton-Leibniz :

$$\int_2^4 xe^{x^2}(x^2+1)dx=F(4)-F(2)=\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot x^2\Big|_{x=2}^{x=4}=\frac{1}{2}\left(16e^{16}-4e^4\right)=8e^{16}-2e^4 .$$

פתרון 5.ב.

נמצא את האסימפטוטה המשופעת ב- $+\infty$ של $f(x)=\frac{x^2+2+2\ln x}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$, בעזרת כלל L'Hôpital:

$$\begin{cases} m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1+\ln x}{x^2}\right)=(l'Hôpital)=\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1/x}{2x}\right)=\frac{1}{2} \\ n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x}=(l'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0 \end{cases}$$

לכן קיימת אסימפטוטה משופעת : $y=\frac{x}{2}$ ב- $+\infty$. לפי ההגדרה , זה גורר שהפולינום $y=P(x)=\frac{x}{2}$

מקיים את הדרישה של השאלה: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2+2\ln x}{2x}-P(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2+2\ln x}{2x}-\frac{x}{2}\right)=0$.

על מנת לברר האם האסיפטוטה המשופעת של הפונקציה f ב- $+\infty$ חותכת את גרף הפונקציה f ,
נפתור את המשווה $f(x)=P(x)$, בתחום $x>0$:

$$f(x)=P(x)\Leftrightarrow\frac{x^2+2+2\ln x}{2x}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{1+\ln x}{x}=0\Leftrightarrow x=e^{-1} .$$

מסיקים שיש רק נקודת חיתוך אחת (ששווה ל- $A=(x,y)=\left(e^{-1},0.5e^{-1}\right)$).

<u>פתרון 6.א.</u>

<u>נוכיח שקיים</u> c <u>בקטע</u> $(0,1]$ <u>כך ש-</u> $f(c)=3$ ונסיק f <u>*אינה פונקציה חח״ע*</u> (מפני שגם $f(0)=3$).

נתון ש- $\text{Image}(f)=[2,4]$. קיימים $0\le u\ne v\le 1$ כך ש- $2=f(u)\le f(x)\le f(v)=4$, לכל $x\in D$,

ז״א $f(u)=2=\min(f),\ f(v)=4=\text{Max}(f)$.

בנוסף, הנתון $f(0)=3$ גורר ששתי נקודות הקיצון שמצאנו u,v <u>לא שוות</u> לקצה השמאלי של התחום הנתון D, ז״א $0<u\le 1, 0<v\le 1$.

לפי <u>משפט ערך הביניים של Cauchy</u> קיים c בין u ל- v כך ש- $f(c)=3$.

וודאי ש- $u>0, v>0$ גורר $c\ne 0$. קיבלנו $f(0)=3=f(c)$ ולכן f <u>*אינה פונקציה חח״ע*</u>, מ.ש.ל.

<u>נימוק נוסף</u>: נגדיר פונקצית עזר רציפה $g(x)=f(x)-3$ בקטע סגור וחסום I בעל קצוות $u\ne v$.

(יותר מדויק: מסמנים $I=[u,v]$, אם $u<v$ ומסמנים $I=[v,u]$, אם $u>v$.)

בקצה u מתקיים: $g(u)=f(u)-3=2-3<0$. בקצה v מתקיים: $g(v)=f(v)-3=4-3>0$.

לכן, <u>משפט ערך הביניים של Cauchy</u> גורר שקיים c בקטע I כך ש- $g(c)=f(c)-3=0 \Leftrightarrow f(c)=3$.

נשים לב ש- $0<u\le 1, 0<v\le 1$ גורר שהקטע I מוכל בקטע $(0,1]$ ולכן $\underline{c>0}$.

מסיקים שמצאנו שני מספרים שונים $x_1=0\ne x_2=c$ שמקימים $f(x_1)=f(0)=3,\ f(x_2)=f(c)=3$ וזה סותר את ההגדרה של פונקציה חח״ע.

<u>פתרון 6.ב.</u>

המשוואה הנתונה $3x-x^3-m=0$ שקולה למשוואה $3x-x^3=m$

נגדיר פונקציה גזירה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $f(x)=3x-x^3$ ונחקור את תחומי העליה / הירידה של f בעזרת סימן הנגזרת הראשונה. ברור ש- $f'(x)=3-3x^2$. לכן, הנגזרת מתאפסת רק עבור $x=\pm 1$ ומתקיים:

$\underline{f'(x)>0}$ אם ורק אם $-1<x<1$; $\underline{f'(x)<0}$ אם ורק אם $x>1\quad or\quad x<-1$.

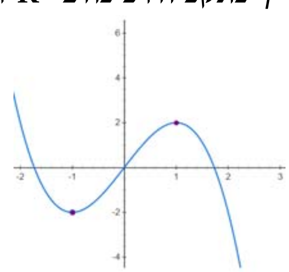
מסיקים ש-

I. f <u>עולה ממש</u> בקטע $[-1,1]$ **II.** f <u>יורדת ממש</u> בקטע $[1,\infty)$ **III.** f <u>יורדת ממש</u> בקטע $(-\infty,-1]$.

מתקיים $f(-1)=-2,\ f(1)=2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,

הנקודה $M=(1,2)$ מקסימום מקומי של f, הנקודה $m=(-1,-2)$ מינימום מקומי של f.

f פונקציה רציפה ב- $\mathbf{R}$ והגרף של f הוא:



נובע ש-

$$\{y\in\mathbf{R}: y=f(x), -1\le x\le 1\}=\{y\in\mathbf{R}: -2=f(-1)\le y\le f(1)=2\}$$
$$\{y\in\mathbf{R}: y=f(x), x\le -1\}=\{y\in\mathbf{R}: y\ge f(-1)=-2\}$$
$$\{y\in\mathbf{R}: y=f(x), x\ge 1\}=\{y\in\mathbf{R}: y\le f(1)=2\}$$

<u>מסקנה</u>:

- אם $|m|>2$ אז למשוואה $f(x)=3x-x^3=m$ יש פתרון יחיד.
- אם $|m|\le 2$ אז למשוואה $f(x)=3x-x^3=m$ יש לפחות 2 פתרונות, מ.ש.ל.

בהצלחה!