פתרון Y

מבוא להסתברות

שאלה 1 (28 נקודות)

א. במשחק חברתי כל משתתף מתבקש לבחור באופן אקראי מספר שלם בין 1 ל- 100. מהי התוחלת ומהי השונות של המספר שתבחר רונית?

ב. שישה אנשים מתבקשים לבחור מספר בין 1 ל- 100. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר גדול מ- 80?

ג. שמונה אנשים מתבקשים לבחור מספר בין 1 ל- 100. מהי התוחלת ומהי השונות של סכום המספרים שהאנשים יבחרו? אין תלות בין הבחירות של שמונה האנשים.

ד. 40 אנשים מתבקשים לבחור מספר בין 1 ל- 100. מה ההסתברות שלפחות 20 אנשים יבחרו מספר קטן שווה 80?

פתרון

א.

נגדיר X = המספר שרונית בוחרת. נתון: $X \sim U(100)$

$$E(X) = \frac{1+100}{2} = 50.5, \qquad V(X) = \frac{100^2-1}{12} = 833.25$$

ב.

נגדיר X = המספר שבוחר איש אחד. נתון: $X \sim U(100)$

$$P(X > 80) = 1 - P(X \le 80) = 1 - \frac{80}{100} = 0.2$$

ההסתברות ששלושה אנשים יבחרו מספר גדול מ- 80 היא: $\binom{6}{3} \times 0.2^3 \times 0.8^3 = 0.0819$

ג.

נגדיר Xi = המספר שבוחר איש i עבור i=1,2,3

$$E\left(\sum_{i=1}^{8} X_i\right) = \sum_{i=1}^{8} E\left(X_i\right) = 8 \times 50.5 = 404$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{8} X_i\right) = \sum_{i=1}^{8} V\left(X_i\right) = 8 \times 833.25 = 6,666$$

ד.

נגדיר Y = מספר האנשים שבחרו מספר קטן שווה 80: $Y \sim B(40,\ 0.8)$

$$P(Y \ge 20) = 1 - P(Y \le 19) = ?$$

$$np = 40\times 0.8 = 32 > 5$$
$$nq = 40\times 0.2 = 8 > 5$$

קרוב נורמלי לבינומי: $Y \sim N(32,\ 6.4)$

$$P(Y \geq 20) = 1 - P(Y \leq 19) = 1 - \Phi\left(\frac{19+0.5-32}{\sqrt{6.4}}\right) = 1 - \Phi\left(-4.94\right) = 1 - 0 = 1$$

שאלה 2 (23 נקודות)

אלון ורוני משחקים במשחק: הם מסובבים סביבון סימטרי (עליו רשומים המילים: נס גדול היה פה) שלוש פעמים. אם יוצא נס לכל היותר פעמיים, אלון ישלם לרוני שקל אחד, אחרת רוני ישלם שקל אחד לאלון. נגדיר משתנים מקריים:

X – מספר פעמים שהתקבל נס.

Y – רווח של אלון (רווח שלילי אם אלון משלם לרוני).

א. מצאו טבלת ההתפלגות המשותפת של משתנים מקריים Y,X. (8 נק')

ב. מצאו את התוחלת של X אם ידוע שאלון שילם שקל לרוני. (8 נק')

ג. חשבו $E(2X^2-1)$. (7 נק')

פתרון

א.

מתקיים: $X \sim B(3,\ 0.25)$

$X \setminus Y$	1	-1	$P_X(x)$
0	0	$0.75^3 = 0.4219$	0.4291
1	0	$3\cdot 0.25\cdot 0.75^2 = 0.4219$	0.4291
2	0	$3\cdot 0.25^2\cdot 0.75 = 0.1406$	0.1406
3	$0.25^3 = 0.0156$	0	0.0156
$P_Y(y)$	0.0156	0.9844	1

ב.

$$E(X\mid Y=-1) = 1\cdot P(X=1\mid Y=-1) + 2\cdot P(X=2\mid Y=-1) = 1\cdot\frac{P(X=1\cap Y=-1)}{P(Y=-1)} + 2\cdot\frac{P(X=2\cap Y=-1)}{P(Y=-1)}$$
$$= \frac{0.4219}{0.9844} + 2\cdot\frac{0.1406}{0.9844} = 0.7142$$

ג.

$$E(2X^2-1) = 2E(X^2)-1 = 2\left(V(X)+E(X)^2\right)-1 = 2\left(3\cdot 0.25\cdot 0.75+\left(3\cdot 0.25\right)^2\right)-1 = 1.25$$

שאלה 3 (21 נקודות)

יהי X אורך חיים של רכיב מסוים שמפעיל מכשיר. X הוא משתנה מקרי המתפלג אחיד בין חודש לשנה.

א. מהו החציון של X?

ב. חשבו את $E(X^2)$.

ג. כאשר הרכיב מתקלקל הוא מוחלף מיד ברכיב זהה. מה ההסתברות ש- 30 רכיבים יפעילו את המכשיר לפחות 15 שנים? אין תלות בין אורכי החיים של רכיבים שונים.

פתרון

$$X \sim U(1,12)$$

א.

יש למצוא m כך שמתקיים $F(m) = 0.5$

$$F(m) = \frac{m-1}{12-1} = 0.5 \Longrightarrow m = 6.5$$

ב.

מנוסחת השונות

$$Var(X^2) = E((X^2)^2) - [E(X^2)]^2$$

$$E(X^2) = Var(X) + (E(x))^2 = \frac{(12-1)^2}{12} + \frac{1+12}{2} = 16.5833$$

ג.

יהיו X_i אורך חיי רכיב i. X_i בלתי תלויים.

מהנתון: $X_i \sim U(1,12)$, $E(X_i) = 6.5$, $Var(X_i) = 10.08$,

X_i משתנים מקריים בלתי תלויים מאותה התפלגות, לכן, לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\sum_{i=1}^{30} X_i \sim N\left(30 \times 6.5,\ 30 \times 10.08\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \geq 15 \times 12\right) = 1 - \Phi\left(\frac{180-195}{17.39}\right) = 1 - \Phi\left(-0.86\right) = \Phi\left(0.86\right) = 0.8051$$

שאלה 4 (28 נקודות)

מפעל מקבל משלוחי פריטים. תוחלת מספר הפריטים הפגומים למשלוח היא μ עם סטיית תקן 0.76.

א. בבדיקה של 64 משלוחים, ממוצע מספר הפריטים הפגומים למשלוח היה 1.34. בנו רווח סמך ברמת בטחון של 90% לתוחלת μ .

מחליטים על המבחן הבא: בבדיקת מדגם של 36 משלוחים, מחליטים להחזיר את המשלוחים ליצרן אם ממוצע מספר הפריטים הפגומים במדגם גדול מ- 1.4.

ב. משערים $\mu_0 = 1.2$. חשבו את ההסתברות לטעות מסוג ראשון (רמת המובהקות של המבחן).

ג. אם ההשערה האלטרנטיבית היא $\mu_1 = 1.38$ חשבו את עוצמת המבחן.

ד. התקבלו 80 משלוחים בלתי תלויים. נניח $\mu = 1.1$. מה ההסתברות שהמספר הכולל של פריטים פגומים יהיה יותר מ- 70?

פתרון

א.

$$\left[\bar{X}_n - \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}_n + \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$1-\alpha = 0.9 \quad \Rightarrow \quad z_{0.05} = 1.645$$

$$\bar{X}_{64} = 1.34, \quad \sigma = 0.76$$

רווח בר סמך:

$$\left[1.34 - \frac{1.645 \times 0.76}{8},\ 1.34 + \frac{1.645 \times 0.76}{8}\right]$$

נקבל:

$$\left[1.18,\ 1.496\right]$$

ב.

$$\bar{X}_{36} \sim N\left(1.2,\ \frac{0.76^2}{36}\right)$$

$$\alpha = P_{\mu=1.2}\left(\bar{X}_{36} > 1.4\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.4-1.2}{0.76/6}\right) = 1 - \Phi\left(1.58\right) = 1 - 0.9429 = 0.0571$$

ג.

$$1-\beta = P_{\mu=1.38}\left(\bar{X}_{36} > 1.4\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.4-1.38}{0.76/6}\right) = 1 - \Phi\left(0.16\right) = 1 - 0.5636 = 0.4364$$

ד.

לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\sum_{i=1}^{80} X_i \sim N\left(80\times1.1,\ 80\times0.76^2\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{80} X_i > 70\right)=1-\Phi\left(\frac{70-88}{6.8}\right)=1-\Phi\left(-2.65\right)=\Phi\left(2.65\right)=0.996$$