

מבוא להסתברות - תרגיל מס' 1

חשבון מאורעות, חוקי הסתברות בסיסיים.

1. נניח ש- A, B, C קבוצות. לכל אחת מהטענות הבאות, הוכיחו אותה או הפריכו אותה על ידי דוגמה נגדית. ניתן להשתמש בתכונות הידועות או בדיאגרמות Venn.
 - א. $(A \cup B) \cap \bar{C} = A \cup (B \cap \bar{C})$
 - ב. $(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$
 - ג. אם $A \cap B = A \cap C$, אז $B = C$.
 - ד. יתכן ש- A, B, C זרים בזוגות אבל אינם זרים.
 - ה. יתכן ש- A, B, C זרים אבל אינם זרים בזוגות.
 - ו. אם A ו- B זרים, אזי גם המשלימים שלהם זרים בהכרח.
 - ז. אם A ו- B זרים, וכמו כן B ו- C זרים, אזי A ו- C בהכרח זרים.
 - ח. אם A ו- B זרים, וכמו כן B ו- C זרים, אזי בהכרח B זרה ל- $A \cup C$.
2. מתוך קופסה המכילה 100 כדורים המסופרים 1 עד 100 מוציאים שני כדורים ללא החזרה, ובודקים מה המספרים הרשומים עליהם. עתה מגדירים את המאורעות A ו- B כך:

$A =$ מכפלת התוצאות הינה מספר אי-זוגי;
 $B =$ סכום התוצאות הינו מספר אי-זוגי;

 - א. האם A ו- B הינם מאורעות זהים?
 - ב. האם אחד המאורעות מוכל בשני?
 - ג. האם A ו- B הינם מאורעות זרים?
 - ד. האם A ו- B הינם מאורעות משלימים?
3. בארץ 7 נחלים, שנקרא להם $1, 2, \dots, 7$. הנחלים $1, 2, 3$ זורמים ומתאחדים כולם לתוך נ4. אחר כך נ4 ממשיך, ואחר כך הוא מתפצל אל $5, 6, 7$. אחר כך $5, 6, 7$ זורמים כולם אל הים. כל נחל זורם אם ורק אם: הוא אינו חסום, ומגיעה אליו זרימה כלשהי מהנחלים שלפניו. לכל $j = 1, 2, \dots, 7$ נסמן ב- A_j את המאורע, שהנחל j אינו חסום. יש להציג בעזרת המאורעות A_j את המאורעות הבאים:
 - א. לפחות נחל אחד אינו חסום.
 - ב. יש זרימה בנחל נ4.
 - ג. יש זרימה בנחל נ5.
 - ד. יש זרימה אל הים.
 - ה. אין זרימה אל הים.
4. במכשיר מסוים יש שלושה סוגים של תקלות אפשריות, יהי A_i המאורע: התרחשה תקלה מסוג i , $i = 1, 2, 3$.
 - א. הבע באמצעות מאורעות אלה את המאורעות הבאים:
 $B =$ אירעו כל התקלות האפשריות, $C =$ לא אירעה אף תקלה, $D =$ אירעה רק תקלה מסוג שני,
 - ב. תאר מילולית את משמעות המאורעות: $E = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$, $F = A_1 \cap A_3$
5. מאוכלוסיית הסטודנטים בחוג לכלכלה נבחר סטודנט אחד. נגדיר את המאורעות:
 - A - הסטודנט קורא מעריב.
 - B - הסטודנט קורא ידיעות אחרונות.
 - C - הסטודנט קורא הארץ.
 השתמשו בפעולות אחוד, חתוך ומשלים בלבד לתיאור המאורעות הבאים:
 - (א) הסטודנט קורא את כל שלושת העיתונים.
 - (ב) הסטודנט קורא לפחות עיתון אחד מבין השלושה.
 - (ג) הסטודנט אינו קורא אף עיתון.
 - (ד) הסטודנט קורא בדיוק שני עיתונים מבין השלושה.
 - (ה) הסטודנט קורא לפחות שני עיתונים מבין השלושה.
 - (ו) הסטודנט קורא בדיוק אחד מבין שלושת העיתונים.
 - (ז) הסטודנט אינו קורא הארץ.
 - (ח) המשלים למאורע "הסטודנט קורא רק הארץ".

6. בנה מרחב מדגם ובו מאורעות A, B, C כך ש- $P(A)=1/2, P(B)=2/5, P(A \cap B)=1/10$.
 א. בנה את המרחב כך שב- Ω מספר האיברים המינימלי האפשרי.
 ב. בנה את המרחב כך שיוצר מרחב הסתברות סימטרי.

7. ידוע כי ההסתברות להתרחשות מאורע A היא 0.5, ההסתברות להתרחשות B היא 0.4, וההסתברות לכך שיתרחש A מבלי שיתרחש B היא 0.2, מהי ההסתברות לכך שיתרחשו A ו- B ?

8. שחקן כדורסל מנסה לקלוע לסל פעמיים. ההסתברות להצלחה בניסיון הראשון היא 0.7. ההסתברות להצלחה בניסיון השני היא 0.85. וההסתברות שיצליח בלפחות אחד מהם היא 0.9.
 א. מהי ההסתברות שיצליח בשני הניסויים גם יחד?
 ב. מה הסיכוי שיכשל לפחות באחד משני הניסויים?
 ג. מה הסיכוי שיכשל בדיוק בניסוי אחד?

9. בביקורת איכות של טלוויזיות מתייחסים לשלושה סוגי פגמים: פגם קריטי, פגם בינוני ופגם קל. הסיכויים הם: פגם קריטי בלבד 2%, פגם בינוני בלבד 4%, פגם קל בלבד 8%. פגמים קריטיים ובינוניים בלבד 3%, קריטיים וקלים בלבד 3%, בינוניים וקלים בלבד 2%, כל שלושת סוגי הפגמים 1%.

א. מהו אחוז הטלביזיות ללא פגמים כלשהם?

ב. מהו אחוז הטלוויזיות בעלות פגם בינוני?

ג. טלוויזיות בעלות פגם קריטי או בינוני (או שניהם) לא יוצאות את שערי המפעל. כמה אחוז הם מהווים?

10. בוחרים באקראי מספר מבין המספרים הטבעיים $\{1, 2, \dots\}$, כך שההסתברויות לערכים השונים יוצרות טור הנדסי, וההסתברות לערך 1 היא 0.1, כלומר שההסתברות לבחור במספר k היא $0.1q^{k-1}$, לכל $k=1, 2, \dots$.

א. מהו q ?

ב. מהי ההסתברות לכך שנבחר מספר זוגי?

ג. מה ההסתברות לכך שנבחר מספר גדול מ-10?

11. בוחרים באקראי מספר מבין המספרים השלמים הלא שליליים $\{0, 1, 2, \dots\}$, כך שההסתברות לערך k היא $ca^k/(k!)$.

א. מהו c (כפונקציה של a)?

ב. מה ההסתברות לכך שנבחר מספר גדול מ-1?

12. בתרשים להלן מתוארת מערכת ובה חמישה רכיבים, הבע באמצעות המאורעות A_k : רכיב מס' k תקין, $k=1, \dots, 5$, את תקינות המערכת (זרימה מ- S ל- D).

