

שאלה 1 (38 נקודות)

כל יום בערוץ ילדים משודרים 10 סרטי אנימציה שונים. מתוכם יש 5 סרטים על גיבורי על, 3 סרטים על דרקונים ו-2 סרטים על חתולים. אימא מרשה לאריאל לצפות בשלושה סרטים שונים ביום שאותם היא בוחרת באופן אקראי ובלי החזרה.

א. (8 נקודות) סרט על דרקונים נמשך 10 דקות וכל סרט אחר נמשך 12 דקות. מהי התוחלת זמן הצפייה היומית של אריאל?

ב. (8 נקודות) יום שבו אריאל רואה לפחות סרט אחד על גיבורי על הוא יום "נפלא". מהי ההסתברות שבמשך 70 ימים הבאים יהיו לפחות 60 ימים נפלאים?

ג. (7 נקודות) ידוע שאתמול לא נבחרו סרטים על דרקונים. מהי ההסתברות שנבחר סרט אחד על חתולים ושני סרטים על גיבורי על?

ד. (5 נקודות) חשבו את השונות של מספר סרטים על חתולים שיבחרו בשבוע הבא (7 ימים).

1. 2.61

2. 18.29

3. 0.48

4. 1.73

נסמן ב- X את מספר סרטים על דרקונים שאריאל יראה ביום אחד, ב- Y את מספר סרטים על חתולים ביום אחד וב- Z את מספר סרטים על גיבורי על ביום אחד.

ה. (5 נקודות) בחרו את התשובה הנכונה:

1. $E(X) - E(Y) + E(Z) = 3$

2. $V(X + Y + Z) = 0$

3. $V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z)$

4. $V(X + Y + Z) = 3V(X)$

ו. (5 נקודות) בחרו את התשובה הנכונה:

1. $COV(X, 3 - Y - Z) = V(X)$

2. $COV(X, 3 - Y - Z) > V(X)$

3. $COV(X, 3 - Y - Z) < V(X)$

4. אף תשובה לא נכונה

שאלה 2 (38 נקודות)

מפעל מייצר מצברים לרכב. מספר הקילומטרים שכל מצבר יכול לעבור מתפלג מעריכית. ידוע שהמפעל מייצר מצבר טוב בהסתברות p , ומצבר מצוין בהסתברות $1-p$. תוחלת מספר הקילומטרים שמצבר טוב יכול לעבור היא 20000 ק"מ ותוחלת מספר הקילומטרים שמצבר מצוין יכול לעבור היא 30000 ק"מ.

א. (8 נקודות) ידוע שההסתברות לכך שמצבר אקראי יוכל לעבור לפחות 25000 ק"מ היא 0.3. מצאו את p .

ב. (7 נקודות) נניח $p=0.9$. נסמן ב- X את מספר הקילומטרים שמצבר אקראי יכול לעבור. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X .

ג. (8 נקודות) חנות רכשה 100 מצברים **מצוינים**. חשבו את ההסתברות לכך שממוצע מספר הקילומטרים שהם יעברו יהיה לפחות 25000 ק"מ.

נניח אי תלות בין זמני עבודת מצברים.

ד. (5 נקודות) מפעל נותן אחראיות על מצברים: אם מצבר טוב יעבוד פחות מ-10000 ק"מ לקוח

יזוכה בסכום 500 ₪ ואם מצבר מצוין יעבוד פחות מ-10000 ₪ לקוח יזוכה בסכום 600 ₪. אביב

קנה שני מצברים: טוב ומצוין. ידוע שאביב קיבל זיכוי של לפחות 500 ₪. מהי ההסתברות ששני

המצברים עבדו פחות מ-10000 ק"מ?

$$1. \frac{(1 - e^{-1/2})(1 - e^{-1/3})}{1 - e^{-1/2}e^{-1/3}}$$

$$2. \frac{(1 - e^{-1/2})e^{-1/3}}{1 - e^{-1/2}e^{-1/3}}$$

$$3. \frac{(1 - e^{-1/2})(1 - e^{-1/3})}{e^{-1/2}e^{-1/3}}$$

$$4. \frac{1 - (1 - e^{-1/2})(1 - e^{-1/3})}{1 - e^{-1/2}e^{-1/3}}$$

ה. (5 נקודות) אסף קנה שלושה מצברים טובים. מהי ההסתברות שרק אחד מהם יספיק ללפחות 20000 ק"מ?

1. $3(1 - e^{-1})^3$

2. $3e^{-1}(1 - e^{-1})^2$

3. $2e^{-2}(1 - e^{-1})$

4. $2e^{-1}(1 - e^{-1})^2$

ו. (5 נקודות) מוסך הזמין ממפעל משלוח עם 3 מצברים טובים ו-7 מצוינים. המצברים הגיעו למוסך בלי מדבקות ובעלי המוסך הדביקו מדבקות על המצברים באקראי (השתמשו ב-7 מדבקות "מצוין" ו-3 מדבקות "טוב"). אלון רכש שלושה מצברים "טובים". מהי ההסתברות שאלון קנה שלושה מצברים מצוינים?

1. $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8}$

2. $1 - \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$

3. $3! \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8}$

4. $1 - 3! \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$

שאלה 3 (24 נקודות)

בעלי פיצרייה טוענים שממוצע של מספר זיתים בפיצה אחת שווה ל-10 עם סטיית התקן 2. נינה לומדת סטטיסטיקה במכללה ורוצה לבדוק את טענה של בעלי הפיצרייה (השערת האפס). לפי השערה האלטרנטיבית ממוצע מספר זיתים בפיצה יותר נמוך מ-10. לצורך הבדיקה נינה קנתה 49 פיצות ומצאה שממוצע של מספר זיתים בפיצה היה שווה ל-9.4.

א. (7 נקודות) מצאו אזור דחיית השערת האפס ברמת המובהקות של 0.05. האם תדחו את השארת האפס על סמך התוצאה שהתקבלה?

ב. (7 נקודות) מהי מובהקות התוצאה שהתקבלה? האם השערת האפס הייתה נדחית ברמת המובהקות 0.01?

ג. (5 נקודות) מהו אורך רווח בר סמך עבור תוחלת מספר זיתים בפיצה ברמת סמך 95%.

1. 1.12

2. 0.56

3. 0.94

4. 0.16

ד. (5 נקודות) נניח שתוחלת מספר זיתים בפיצה שווה ל-5. איך נקראת הסתברות לא לגלות זאת?

1. טעות מסוג ראשון

2. טעות מסוג שני

3. מובהקות התוצאה

4. עוצמת המבחן

פתרון שאלה 1:

א. נסמן ב- X את מספר סרטים על דרקונים בתוך מדגם של שלושה. מתקיים: $X \sim HG(10, 3, 3)$.

נסמן ב- Y את משך זמן הצפייה היומית. מתקיים:

$$Y = 10X + 12(3 - X) = 36 - 2X$$

לכן נקבל

$$E(Y) = 36 - 2E(X) = 36 - 2 \cdot 3 \cdot 0.3 = 34.2$$

ב. נסמן ב- W מספר ימים נפלאים במשך 70 ימים הבאים. מתקיים: $W \sim Bin(70, p)$, כאשר

p היא ההסתברות ליום נפלא ושווה ל:

$$p = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{110}{120}$$

בשאלה נדרש לחשב את ההסתברות הבאה: $P(W \geq 60)$.

נבדוק את התנאים:

$$np = 70 \cdot 0.9167 = 64.17 > 5$$

$$nq = 70 \cdot 0.0833 = 5.83 > 5$$

נעבור לקירוב נורמלי: $W \sim N(64.17, 5.35)$.

$$P(W \geq 60) = 1 - P(W \leq 59) = 1 - \Phi\left(\frac{59 + 0.5 - 64.17}{\sqrt{5.35}}\right) = \Phi(2.02) = 0.9783$$

ג. נחשב את ההסתברות המותנית:

$$\frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot 3}{\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8}} = 0.5714$$

ד. שואלים על שונות של 7 משתנים מקריים היפרגאומטריים $HG(10, 2, 3)$ וב"ת

ולכן החישוב הוא: $7 \cdot 3 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 7/9 = 2.61$

ה. מתקיים $X + Y + Z = 3$ ולכן נקבל $V(X + Y + Z) = 0$

ו. $COV(X, 3 - Y - Z) = V(X)$

פתרון שאלה 2:

א. נסמן ב- X את מספר הקילומטרים שמצבר אקראי יכול לעבור.

עבור מצבר טוב מתקיים: $X|good \sim \exp(1/20000)$.

עבור מצבר מצוין מתקיים: $X|excellent \sim \exp(1/30000)$. מנוסחת ההסתברות השלמה נקבל:

$$\begin{aligned} P(X \geq 25000) &= p \cdot P(X|good \geq 25000) + (1-p) \cdot P(X|excellent \geq 25000) \\ &= p e^{-\frac{25000}{20000}} + (1-p) e^{-\frac{25000}{30000}} = 0.3 \end{aligned}$$

מכאן נקבל $p = 0.9088$.

ב.

$$F_X(t) = P(X \leq t) = 0.9 \cdot P(X|good \leq t) + 0.1 \cdot P(X|excellent \leq t)$$

$$F_X(t) = 0.9 \cdot (1 - e^{-t/20000}) + 0.1 \cdot (1 - e^{-t/30000})$$

ג. לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$\bar{X}_{100} = \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100} \sim N(30000, 30000^2/100)$$

$$P(\bar{X}_{100} \geq 25000) = 1 - \Phi\left(\frac{25000 - 30000}{\sqrt{30000^2/100}}\right) = 1 - \Phi(-1.67) =$$

$$\frac{(1 - e^{-1/2})(1 - e^{-1/3})}{1 - e^{-1/2}e^{-1/3}}. \quad \text{ד.}$$

$$3e^{-1}(1 - e^{-1})^2. \quad \text{ה.}$$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8}. \quad \text{ו.}$$

פתרון שאלה 3:

ננסח את ההשערות:

$$H_0: \mu = 10$$

$$H_1: \mu < 10$$

סטטיסטי המבחן: \bar{X}_{49} - ממוצע מספר זיתים במדגם של 40 פיצות.

א. אזור דחיית השערת האפס ברמת המובהקות 0.05:

$$C = \left\{ \bar{X}_{49} < 10 - z_{0.95} \cdot \frac{2}{7} \right\} = \left\{ \bar{X}_{49} < 10 - 1.645 \cdot \frac{2}{7} \right\} = \left\{ \bar{X}_{49} < 9.53 \right\}$$

צריך לדחות את השערת האפס על סמך תוצאה שהתקבלה בניסוי.

ב. נחשב את המובהקות התוצאה 9.4:

$$p_value = P_{H_0}(\bar{X}_{49} \leq 9.4) = \Phi\left(\frac{9.4 - 10}{2/7}\right) = \Phi(-2.1) = 1 - \Phi(2.1) = 1 - 0.9821 = 0.0179 > 0.01$$

נסיק שברמת המובהקות 0.01 השערת האפס הייתה מתקבלת.

ג. 1.12

ד. טעות מסוג שני