המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב
הנדסה במרכז
המחלקה למדעי היסוד- מתמטיקה
Department of Basic Sciences

אלגברה לינארית

תרגיל מספר 10 - העתקות לינאריות

שאלה 1

לכל אחת מההעתקות הבאות בדקו אם היא לינארית:

א. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על-ידי $T(x_1,x_2)=(x_1,2x_2,x_1+2x_2)$

ב. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על-ידי $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+1,x_1+x_2+x_3)$

ג. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על-ידי $T(x_1,x_2)=(x_1,0)$

ד. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת על-ידי $T(x_1,x_2)=(x_1,\sin x_2)$

ה. $T:P_2[\mathbb{R}]\to P_3[\mathbb{R}]$ המוגדרת על-ידי $T(p(x))=x\cdot p(x)+2\cdot p'(x)+p''(x)$

ו. $T:P_2[\mathbb{R}]\to P_2[\mathbb{R}]$ המוגדרת על-ידי $T(p(x))=p(x)+2x$

ז. $T:M_{3\times3}[\mathbb{R}]\to M_{3\times3}[\mathbb{R}]$ המוגדרת על-ידי $T(X)=X+X^t$

שאלה 2

בחרו שתי העתקות לינאריות משאלה 1, ומצאו לכל אחת בסיס ומימד של הגרעין (KerT) והתמונה (ImT).

שאלה 3

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית, הנתונה על ידי

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+ay+bz\\ax+y+cz\\bx+cy+z\end{pmatrix}$$

א. מצאו ערכים של a,b,c, כך ש- $(1,1,1)\in\ker T$.

ב. יהי $a=0$. מצאו ערכים של b,c, כך ש- $(0,1,c)\in\operatorname{Im}T$.

ג. עבור $a=b=c=-\frac{1}{2}$ מצאו בסיס ל- $\operatorname{Im}T$ ול- $\operatorname{Ker}T$.

שאלה 4

יהי $V=M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ותהי: $T:V\to V$ נתונה על ידי: $T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a&b-c\\c-b&a\end{bmatrix}$.

א. מצאו בסיס לתמונה של T.

ב. מצאו בסיס לגרעין של T.

ג. מצאו מטריצה לא הפיכה שאינה מטריצת האפס, הנמצאת בתמונה של T.

ד. האם המטריצה $\begin{bmatrix}3&2\\2&-3\end{bmatrix}$ נמצאת בתמונה של T? אם כן, מצאו את כל קבוצת המקורות של מטריצה זו, וקבעו אם קבוצה זו מהווה תת מרחב וקטורי של V. אם לא, הסבירו מדוע.

שאלה 5

נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, כך ש: $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. מהי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי?

שאלה 6

נתונה העתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+2 & -1\\ -1 & -4 & a^2-3\\ 1 & a+2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

א. מצאו את המימד של $\operatorname{Ker}T$ כפונקציה של הפרמטר a.

ב. עבור אילו ערכים של a הווקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\a^2-7\end{pmatrix}$ שייך ל $-\operatorname{Im}T$?

שאלה 7

א. מצאו העתקה ליניארית: $T:P_3(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$, שתקיים:

$\operatorname{Im}T=Span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{Ker}T=Span\{t^3,t^2\}$.

ב. עבור ההעתקה שמצאתם, האם $\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}T$?

ג. עבור ההעתקה שמצאתם, האם $t^2+2t+1\in\operatorname{Ker}T$?

שאלה 8

נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

א. מצאו את $T\begin{bmatrix}4\\2\\0\\4\end{bmatrix}$. נמקו את התשובה.

ב. מהו המימד המקסימלי (בין כל ההעתקות המקיימות את התנאי) של $\operatorname{Ker}T$? נמקו את התשובה.