תרגיל בית 17 – המקדמים הבינומים , נוסחת הבינום של ניוטון והוכחות קומבינטוריות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. **שימוש בנגזרות להוכחת זהויות** בתרגיל זה נראה כיצד להשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון כאשר אחד המחוברים הוא משתנה. דרך זו תאפשר להוכיח זהויות בינומיות בעזרת נגזרות. נוסחת הבינום היא

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

כעת, במקום a נציב את המספר 1 ובמקום b נציב את המשתנה x. נקבל,

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

מכיוון שעכשיו x הוא משתנה, נוכל לגזור כל אחד מהאגפים ולקבל את הזהות

$$\frac{d}{dx}\left((1+x)^n\right) = n\,(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i x^{i-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)$$

השתמשו בנוסחא שלמעלה על מנת להוכיח את הזהויות הבאות:

(א)

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

(ב)

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{k-1} k\binom{n}{k} = n \cdot 4^{n-1}$$

(ג) השתמשו בסעיף הקודם על מנת להוכיח כי

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{k} k\binom{n}{k} = 3 \cdot n \cdot 4^{n-1}$$

2. הוכיחו את הזהויות הבאות

(א)

$$\sum_{i=0,\,\mathrm{i\ even}}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0,\,\mathrm{i\ odd}}^{n} \binom{n}{i} = 2^{n-1}$$

(ב)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

.3

(א) הוכיחו ישירות את הזהות

$$\binom{m}{k}\binom{k}{l}=\binom{m}{l}\binom{m-l}{k-l}$$

(ב) כיתבו סיפור קומבינטורי המתאים לזהות

$$\binom{m}{k}\binom{k}{l}=\binom{m}{l}\binom{m-l}{k-l}$$

(ג) חשבו את ערך הביטוי

$$\sum_{k=5}^{15}\binom{15}{k}\binom{k}{5}$$

4. הוכיחו את הנוסחא הבאה

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}(-3)^i\binom{k}{i}=(-1)^n$$

האם ניתן להוכיח את הנוסחא גם באינדוקציה? אם אתם חושבים שכן תנסו, אם לא – הסבירו למה לא.

5. בשאלה זו נמצא את הסכומים

$$S_n=\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots+\binom{n}{}$$
$$T_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots+\binom{n}{}$$

לשם כך עיקבו אחר השלבים הבאים.

(א) נתבונן במספר המרוכב i. זיכרו, מתקיים כי

$$i^2=-1,\ i^4=1$$

השתמשו בנוסחת הבינום על מנת לרשום במפורש (כסכום המתאים) את הביטויים

$$(1+i)^n,\ (1-i)^n$$

(ב) היזכרו בזהויות שכבר ראיתם בכיתה

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

(ג) הראו כי

$$S_n=\frac{1}{4}\left(2^n+(1+i)^n+(1-i)^n\right)$$

(ד) באופן דומה מצאו את הסכום T_n.