

מרצים : ד"ר דבורה קפלן, ד"ר רוני ביתן, פרופסור יוני סטאנצ'סקו.  
 מתרגלים : מר עמית בנגיאט, מר ולדימיר גלמן, מר שי כרמון .

## מבחן Y

### שאלה 1 : (20 נקודות)

- א. (10 נק') הוכיחו שלכל  $x \in (0, \infty)$  מתקיים אי השוויון :  $x^2 + \sin x > x \cos x$  .  
 ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל :  $\int e^{x^2+1} (x^3 + x) dx$  .

### שאלה 2 : (20 נקודות)

- א. (12 נק') מצאו את הגבול :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2+2n}{n^3+2n} \right)$  .  
 ב. (8 נק') טענה : אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  והסדרה  $\{b_n\}$  היא סדרה חיובית וחסומה אזי מתקיים :  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$  .  
 האם הטענה נכונה ?  
 אם התשובה היא "כן" אז נמקו היטב ואם היא "לא" אז הביאו דוגמה נגדית להפרכה של הטענה .

### שאלה 3 : (20 נקודות)

- א. (10 נק') מצאו כמה פתרונות ממשיים קיימים למשוואה :  $3^{2x} = 3^x + x \cdot \ln 3$  .  
 ב. (10 נק') על ידי שימוש בנוסחת טיילור עבור הפונקציה  $f(x) = \sqrt[5]{x}$  סביב  $x_0 = 1$  הוכיחו כי לכל  $x \geq 1$  מתקיים :

$$\sqrt[5]{x} \geq 1 + \frac{x-1}{5} - \frac{2(x-1)^2}{25}$$

**שאלה 4 (20 נקודות).**

א. (12 נק') מצאו נקודות מינימום/מקסימום מקומי ונקודות פיתול של הפונקציה:

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3.$$

ב. (8 נק') תהייה  $f$  ו  $g$  פונקציות גזירות ב-  $\mathbb{R}$ , כך שהנקודה  $x_0$  היא נקודה קריטית של כל אחת.

1. הוכיחו שהנקודה  $x_0$  היא גם נקודה קריטית של המכפלה  $f \cdot g$ .

2. אם לשתי הפונקציות יש בנקודה  $x_0$  מינימום מקומי, האם בהכרח למכפלה גם יש מינימום מקומי באותה נקודה? (הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית).

**שאלה 5 : (20 נקודות)**

א. (12 נק') נגדיר את הפונקציה  $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{5t^2} dt$ , לכל  $x \in [0, \infty)$ .

מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף של הפונקציה בנקודה  $(1, F(1))$ .

ב. (8 נק') מצאו את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \sin x)^x$ .

**שאלה 6 : (20 נקודות)**

א. (10 נק') נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}} & x \neq 1 \\ A & x = 1 \end{cases}$$

האם קיים ערך של הפרמטר  $A$  שעבורו הפונקציה רציפה בנקודה  $x_0 = 1$ ? אם כן, מצאו את הערך של  $A$ . אם לא, נמקו את התשובה.

ב. (10 נק') נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ .

מצאו את השטח הכלוא בין הגרף של הפונקציה  $f$  והישרים  $x = 1$ ,  $y = 0$  ו-  $x = e$ .

**בהצלחה!!**

## זהויות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin \alpha \\ \sin(\pi-\alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos \alpha \\ 1+\tan^2 \alpha &= 1/\cos^2 \alpha \\ 1+\cot^2 \alpha &= 1/\sin^2 \alpha \\ \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \cos(2\alpha) &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \cos(2\alpha) &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \sin(3\alpha) &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \\ \cos(3\alpha) &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha+\beta) &= (\tan \alpha + \tan \beta)/(1 - \tan \alpha \tan \beta) \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin(\alpha/2 + \beta/2) \cos(\alpha/2 - \beta/2) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin(\alpha/2 - \beta/2) \cos(\alpha/2 + \beta/2) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos(\alpha/2 + \beta/2) \cos(\alpha/2 - \beta/2) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin(\alpha/2 + \beta/2) \sin(\alpha/2 - \beta/2) \\ \sin \alpha \cos \beta &= 1/2 (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta &= 1/2 (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta &= 1/2 (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ \tan \alpha &= \sin \alpha / \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1\end{aligned}$$

## הבינום של Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0! = 1$$

## פונקציות-מבוא

פונקציה זוגית // אי-זוגית -  $f(-x) = f(x)$  //  $f(-x) = -f(x)$   
 פונקציה מחזורית -  $f(x+T) = f(x)$   
 פונקציה חח"ע - אם לכל  $x_1 \neq x_2$  בתחום מתקיים  $f(x_1) \neq f(x_2)$   
 פונקציה על - אם התמונה של  $f$  שווה לטווח של  $f$ .

## נגזרות מיידידות:

$\sin' x = \cos x$	$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	$(e^x)' = e^x$
$\cos' x = -\sin x$	$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\sinh' x = \cosh x$	$\cosh' x = \sinh x$	$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$(a^x)' = a^x \ln a$
			$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

## אינטגרלים מיידידים:

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x  + c$	$\int \cot x dx = \ln \sin x  + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x  + c$	$\int (x-a)^m dx = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + c, \quad m \neq -1$

## סדרות והתכנסות $\{a_n\}_{n \geq 0}$

**סדרה חשבונית:**  $a_n = a_0 + n \cdot d, \quad S_n = a_0 + \dots + a_n = (a_0 + a_n) \cdot \frac{n+1}{2}$

**סדרה הנדסית:**  $a_n = a_0 \cdot q^n; \quad S_n = a_0 + \dots + a_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{if } q \neq 1$

## סדרה מונוטונית:

- סדרה עולה - קיים  $n_0$  כך שלכל  $n \geq n_0$  מתקיים:  $a_{n+1} - a_n \geq 0$
- סדרה יורדת - קיים  $n_0$  כך שלכל  $n \geq n_0$  מתקיים:  $a_{n+1} - a_n \leq 0$
- עולה ממש // יורדת ממש - קיום התנאים הנ"ל ללא "שווה" בהתאמה.

## הגדרת הגבול של סדרה: מספר ממשי $L$ הוא הגבול של סדרה $\{a_n\}_{n \geq 1}$

אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $n_\varepsilon$  כך שלכל  $n \geq n_\varepsilon$  מתקיים:  $|a_n - L| < \varepsilon$

## התכנסות של סדרה ומונוטוניות:

- כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.
- סדרה מונוטונית ולא חסומה שואפת ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

## משפטי התכנסות של סדרה:

- סדרה לא יכולה להתכנס ל-2 גבולות שונים.
- כל סדרה מתכנסת היא חסומה (אך לא להפך).
- $\{a_n\}, \{b_n\}$  סדרות אינסופיות ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ :
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
  - אם  $B \neq 0$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A / B$
  - אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ו- $\{b_n\}$  סדרה חסומה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$
  - אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$
  - אם  $A > 0$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = A^B$
- $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0; \quad a > 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0; \quad -1 < q < 1$
- גבולו של Euler:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

## משפט הסנדוויץ': אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ ומתקיים $b_n \leq a_n \leq c_n$

עבור  $n$  מספיק גדול, אז הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  קיים ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

## תת סדרה: $\{b_k\}_{k=1}^\infty = \{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$

- אם הסדרה המקורית מתכנסת אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול.
- אם לסדרה קיימות לפחות 2 תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אז הסדרה המקורית מתבדרת.

## גבול חלקי = גבול של תת-סדרה.

## משפט בולדנו-ויישרסטרס (Bolzano-Weierstrass)

אם סדרה חסומה, אז יש לה תת סדרה מתכנסת.

## קריטריון קושי (Cauchy) להתכנסות סדרה:

סדרה אינסופית  $\{a_n\}$  מתכנסת אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $n_\varepsilon$  כך שעבור  $n \geq n_\varepsilon$  ו- $p$  טבעי כלשהו מתקיים:  $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

## גבולות פונקציות

### הגדרת גבול פונקציה לפי Heine:

$L$  הוא גבול של פונקציה  $f$  בנקודה  $a$  אם לכל סדרה  $x_n \neq a$  שמתכנסת ל- $a$ , אז מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$

### הגדרת גבול פונקציה לפי Cauchy:

אם לכל  $\varepsilon > 0$  יש  $\delta > 0$  כך ש:  $|f(x) - L| < \varepsilon$  ו- $|x - a| < \delta$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot L_f; \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_f \pm L_g$$

## משפט:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L_f \cdot L_g; \quad \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_f}{L_g}, \quad L_g \neq 0$$

## גבול חד צדדי:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$$

## משפט:

לפונקציה יש גבול בנקודה, אם ורק אם קיימים 2 גבולות חד צדדיים בנק', והם שווים.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

## חישובי גבולות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = C \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = C$$

## כלל הסנדוויץ':

**גבול של הרכבה:** אם  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$  והפונקציה  $f$  רציפה בנקודה  $a$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(a)$$

## רציפות פונקציות

הגדרה: תהי פונקציה מוגדרת בסביבת נקודה  $x_0$

כולל הנקודה עצמה. אומרים שהפונקציה רציפה בנקודה  $x_0$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך שלכל  $x$  המקיים את  $|x - x_0| < \delta$  יתקיים גם  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

### משפט:

1. אם  $f, g$  רציפות אז  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$  (לגבי המנה, מניחים ש-  $g(x) \neq 0$ ).

2. אם שתי פונקציות רציפות בנקודה מתאימות אז ההרכבה שלהן גם כן רציפה.  
3. כל פונקציה אלאמנטרית רציפה. בפרט, כל פולינום או מנת פולינומים רציפים (בתחום ההגדרה) סינוס, קוסינוס ופונקציות המעריכית רציפים לכל  $x$ .

4. אם פונקציה  $f$  "חח"ע ו-"על" רציפה בנקודה  $x_0$  אז הפונקציה הופכית  $g$  גם רציפה בנקודה  $y_0$  כאשר  $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow g(y_0) = x_0$ .

### משפט:

אם  $f$  פונקציה רציפה אז  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

### אי רציפות בפונקציות:

#### אי רציפות סליקה:

א. ערך הפונק' בנקודה שונה מערך הגבול של הפונק' בנקודה.  
ב. הפונק' לא מוגדרת בנקודה זו.

אי רציפות מסוג ראשון: לפונקציה יש 2 גבולות חד צדדיים אך הם שונים זה מזה.  
אי רציפות מסוג שני: לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים או שווה ל-  $\pm \infty$ .

### תכונות של פונקציות רציפות:

#### משפט ערך הביניים של Cauchy לגבי רציפות פונקציות:

אם פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  ו-  $\gamma$  נמצא בין  $f(a)$  ל-  $f(b)$ , אז קיימת לפחות נקודה אחת  $c$  בקטע  $[a, b]$  כך ש-  $f(c) = \gamma$ .

מסקנה: אם פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  מקיימת  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,

אז קיים  $c \in [a, b]$  כך ש-  $f(c) = 0$ . (ז"א הגרף של  $f$  חותך את ציר ה-  $x$ ).

### משפט Weierstrass

1. אם פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  אז היא גם חסומה בקטע זה.  
2. אם פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  אז היא בעלת נקודות קיצון מוחלטות בקטע זה.

### גזירת פונקציות

הפונקציה גזירה בנק'  $x$  אם הגבול  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  סופי.

משוואת משיק:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

משוואת נורמל:  $x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0$

דיפרנציאל:  $df = f'(x_0)dx$

קירוב לינארי ודיפרנציאל:  $f(x) = f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0) \cdot dx = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

משפט: אם הפונקציה גזירה בנקודה אז היא גם רציפה בנקודה זו (לא להפך).

### אריتمטיקה של נגזרות, כלל Leibnitz, נגזרת מסדר גבוה:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$ ;  $(fg)' = f'g + fg'$ ;  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$ ,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

### נגזרת של פונקציה הפוכה

אם  $f$  היא פונקציה הפוכה של  $g$  ו-  $g'(y) \neq 0$  אז  $y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ .

### משפט Fermat

אם  $x_0$  היא נקודת קיצון מקומי של הפונקציה  $f$  ואם  $f$  גם גזירה בנקודה זו, אז הנגזרת של  $f$  שווה אפס בנק' זו, בתנאי ש-  $f$  מוגדרת בקטע פתוח שמכיל את  $x_0$ .

### משפט Rolle

אם  $f(a) = f(b)$  עבור פונקציה רציפה ב-  $[a, b]$  וגזירה בקטע פתוח  $(a, b)$ , אז קיימת נקודה  $c$  בתחום  $(a, b)$  שבה הנגזרת מתאפסת:  $f'(c) = 0$ .

### הוכחת שורש אחד ויחיד לפונקציה:

מוצאים נקודה שבה הפונקציה חיובית, ונקודה שבה הפונקציה שלילית, ואז מוכיחים שהפונקציה מונוטונית יורדת / עולה ממש.

### משפט Lagrange (משפט הערך הממוצע):

אם פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$ , אז קיימת לפחות נקודה

אחת  $c \in [a, b]$  כך ש-  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

### הגדרה פונקציה קמורה בקטע J (convex)

אם לכל  $x, x_0 \in J$  מתקיים  $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

### הגדרה פונקציה קעורה בקטע J (concave)

אם לכל  $x, x_0 \in J$  מתקיים  $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

### משפט:

אם  $f'(x) > 0$  //  $f'(x) < 0$  בקטע אז הפונקציה עולה // יורדת ממש בקטע זה.

אם  $f''(x) > 0$  //  $f''(x) < 0$  בקטע פתוח אז הפונקציה קמורה // קעורה בקטע זה.

### משפט:

אם  $f'(a) = 0$  ו-  $f''(x) > 0$  בקטע פתוח סביב  $a$ , אז  $a$  נק' מינימום מקומי.

אם  $f'(a) = 0$  ו-  $f''(x) < 0$  בקטע פתוח סביב  $a$ , אז  $a$  נק' מקסימום מקומי.

חקירת פונקציה  $y = f(x)$  כאשר  $x \in D_f$ ,  $D_f =$  תחום ההגדרה.

1.  $x = a$  איסימפטוטה אנכית אם לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים שווה ל-

$\pm \infty$ :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$  ו/או  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ .

2. איסימפטוטות משופעות ב-  $\pm \infty$ :

$$y = mx + n, m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - mx)$$

3. תחום הגדרה של הנגזרת, תחומי עליה // ירידה נקודות קיצון.

4. תחום הגדרה של הנגזרת השנייה, תחומי קמירות // קעירות נק' פיתול.

5. גרף (וחיתוך עם הצירים).

כלל לופיטל L'Hopital במצב לא מוגדר  $\frac{0}{0}, \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

אם  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$  אז  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ .

פולינום Taylor  $f(x) \approx T_{n,a}(x) + R_n(x)$ ,  $f(x) \approx T_{n,a}(x)$

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

שאריית Lagrange:  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ ,  $c$  בין  $a$  ל-  $x$ .

### דוגמאות:

$$\frac{1}{1-x} \approx T_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n, \quad e^x \approx T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x \approx T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x \approx T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\ln(1+x) \approx T_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

$$\arctan x \approx T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$(1+x)^m \approx T_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} x^k,$$

$$\arcsin x \approx T_{2n+1}(x) = x + \sum_{k=1}^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

## אינטגרלים

**סכומי Riemann** של פונקציה  $y = f(x)$ , כאשר  $x \in [a, b]$ . נגדיר

$$\begin{cases} S_n = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \dots + f(x_n^*)\Delta x_n, \\ \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}); \quad x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k; \quad a = x_0, \quad b = x_n \end{cases}$$

אם  $f$  אינטגרלית Riemann ב-  $[a, b]$  ואם  $\|\Delta\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$$

1. כל פונקציה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  אינטגרלית לפי Riemann היא פונקציה חסומה.

2. **משפט** אם פונקציה רציפה ב-  $[a, b]$  אז היא אינטגרלית Riemann ב-  $[a, b]$ .

3. **משפט** אם פונקציה חסומה ורציפה למקוטעין ב-  $[a, b]$  (מס' סופי של נקודות אי רציפות), אז הפונקציה אינטגרלית.

## תכונות אינטגרל מסוים

$$1. \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$2. f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$3. m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq f(x) \leq M$$

$$4. \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$5. \text{אם } f \text{ פונקציה זוגית, אז } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{אם } f \text{ פונקציה אי-זוגית, אז } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$6. \text{אדיטיביות האינטגרל: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$7. \text{קיימת נקודה } c \text{ כך ש- } \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

**משפט Newton-Leibnitz**: תהי  $y = f(x)$  פונקציה רציפה ב-  $[a, b]$ .

$$1. \text{אם } S(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ אז } S'(x) = f(x) \text{ לכל } x \in [a, b]$$

(כל פונקציה רציפה בעלת פונקציה קדומה).

2. אם  $F$  פונקציה קדומה של  $f$ , אז  $F'(x) = f(x)$  לכל  $x \in [a, b]$ ,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ אז}$$

## שימושים של אינטגרלים

$$1. \text{שטח: } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$2. \text{אורך עקומה: } L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$3. \text{נפח סיבוב סביב ציר } x: V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\text{אינטגרציה בחלקים: } \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$\text{החלפת משתנים: } \int f(x(t)) x'(t) dt = \int f(x) dx, \text{ אז } x = x(t)$$

## הצבה טריגונומטרית

$$u = \tan \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\int \sin^n x \cos^3 x dx = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x) \cos x dx \quad \text{חזקה אי-זוגית:}$$

רק חזקות זוגיות: שימוש בנוסחאות זווית כפולה פעמיים כדי להוריד חזקות:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

**פונקציה רציונאלית (פולינום/פולינום)** דוגמא:

$$\frac{x^7}{x^2(x-4)(3x+1)(x^2+7)} =$$

$$= (mx+n) + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4} + \frac{D}{3x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+7}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+3} = \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 11/4} = \dots$$

## אינטגרל לא אמיתי סוג ראשון:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

## אינטגרל לא אמיתי סוג שני:

$$a \text{ נקודה שבסביבתה הפונקציה } f \text{ לא חסומה: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

$$b \text{ נקודה שבסביבתה הפונקציה } f \text{ לא חסומה: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

**קריטריון ההשוואה**: אם  $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$  בקטע  $(a, b)$  ואם

$$\int_a^b g(x) dx \text{ מתכנס אז גם } \int_a^b f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

## דוגמאות:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \text{ מתכנס אם ורק אם } p > 1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ מתכנס אם ורק אם } 0 < p < 1$$

**נוסחאות שימושיות**  $|a+b| \leq |a|+|b|, |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

**לוגריתמים**: יהי  $y = f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1$ ,  $x > 0$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x; \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad 0 < b \neq 1; \quad \ln x = \log_e x$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^k = k \log_a x, \quad \log_a 1 = 0,$$

אם  $a > 1 // 0 < a < 1$ , אז פונקציית הלוגריתם עולה ממש // יורדת ממש.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty$$