המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב
אפקה
הנדסה במרכז

המחלקה למדעי היסוד- מתמטיקה
Department of Basic Sciences

אלגברה לינארית

תרגיל מספר 9 - איחוד, חיתוך, קואורדינטות, משפטי מימד

שאלה 1

נתונים המרחבים הוקטורים $W=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $U=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

א. מצאו בסיס של $U+W$.

ב. מצאו בשתי דרכים בסיס של $U\cap W$.

1. מצאו את משוואת המישור של כל אחד מהמרחבים ופתרו את מערכת המשוואות.
2. השוו בין הצירופים הלינאריים של שני הבסיסים.

שאלה 2

במרחב וקטורי $V=P_3(\mathbb{R})$ נגדיר את הקבוצה $W=\{p(x)\in V \mid p(1)=p(-1)=p(0)\}$.

א. הוכיחו כי W תת מרחב וקטורי של V, ומצאו בסיס ומימד של W.

ב. יהי U תת מרחב של כל הפולינומים שסכום מקדמיהם שווה ל- 0 . הוכיחו כי $U+W=V$.

שאלה 3 (מבחן)

במרחב וקטורי $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נגדיר את הקבוצה $W=\{A\in V \mid A^TB=0\}$, כאשר $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&3\end{pmatrix}$.

א. הוכיחו כי W תת מרחב וקטורי של V, ומצאו בסיס ומימד של W.

ב. מצאו את המימדים של $U\cap W$ ושל $U+W$, כאשר U הוא תת מרחב של V המורכב מהמטריצות הסקלריות, כלומר $U=\left\{\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

שאלה 4

יהיו V,U תתי מרחבים של $P_4(\mathbb{R})$, כך ש- $\dim(U)=4$, $\dim(V)=3$.

א. למה יכול להיות שווה המימד של $V+U$?

ב. אם נתון כי $1\notin V+U$, חשבו את $\dim(V\cap U)$.

שאלה 5

א. הוכיחו כי $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ב. הוכיחו כי $C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ג. רשמו קואורדינטות של כל אחד מאיברי B לפי הבסיס C .

ד. נתונה מטריצה A המקיימת $[A]_B=(1,-1,0,1)$. חשבו את $[A]_C$.

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי, ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V . האם הקבוצה $\{v_1-v_2,v_2-v_3,v_3-v_1\}$ בסיס של V ?

שאלה 7 (מבחן)

יהי $U=\text{span}\left\{\begin{bmatrix} a \\ a \\ 2a \end{bmatrix},\begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ a+a^2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1-a \\ 1-a^2 \\ 2-2a \end{bmatrix}\right\}$ תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$, כאשר a פרמטר ממשי.

א. עבור אילו ערכי פרמטר a מתקיים $U=\mathbb{R}^3$?

ב. עבור אילו ערכים של הפרמטר a, הוקטור $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a+2 \end{bmatrix}$ שייך ל- U ?

שאלה 8

נתונים 2 תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$:

$$V=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$U=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\middle|\begin{cases} mx+m(m-1)y-mz=0 \\ m(m-1)y \qquad\quad =0 \end{cases}\right\}$$

א. מצאו את כל הערכים של הפרמטר m עבורם $V\subseteq U$.

ב. עבור $m=1$, מצאו את $\dim U$ והחליטו האם $V=U$.