

חזו"א 1 – דף תרגילים מספר 8

קירוב לינארי, פיתוח טיילור

תרגיל 1

חשב בקירוב ע"י קירוב לינארי :

א. $\sqrt{2016}$ (רמז: $45^2 = 2025$) ב. $\ln 1.1$

תרגיל 2 (תשע"ה, סמסטר ב', מועד א')

א. על ידי שימוש בפולינומי מקלורן עבור הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ השלימו את הטבלה :
כלומר מצאו פולינומי מקלורן $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ ממעלה ראשונה שניה ושלישית ואת הערכים שלהם
בנקודות $x=0$, $x=0.25$, ו- $x=0.5$

x		0	0.25	0.5
$f(x)$	$\sqrt[3]{1+x}$	1	1.0772	.1447
$T_1(x)$				
$T_2(x)$				
$T_3(x)$				

ב. העריכו את שגיאת החישוב המקסימלית עבור $x=0.5$ על ידי שימוש בנוסחת לגרנג' ורשמו את התוצאות בטבלה :

$ R_1(x) $	\leq	
$ R_2(x) $	\leq	
$ R_3(x) $	\leq	

תרגיל 3

רשמו פולינום מקלורן מסדר שני עבור $f(x) = \cos x$ כולל ביטוי השגיאה.
העזרו בפולינום זה וקבלו פולינום מקלורן מסדר שלישי עבור $g(x) = x \cos x$ כולל ביטוי השגיאה.

תרגיל 4

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו נוסחא כללית לנגזרת מסדר ה-n :

א. $f(x) = e^x$ ב. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ד. $f(x) = \ln x$

תרגיל 5

מצאו את הפולינום מקלורן מסדר 3 לפונקציה: $f(x) = e^{2x-x^2}$:
(ניתן להעזר בפיתוח לפונקציה $f(x) = e^x$).

תרגיל 6. (תשע"ו, סמסטר ב', מועד א')

הוכיחו כי עבור כל $0 < x$ מתקיים: $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

תרגיל 7. (תשע"ג, סמסטר ב', מועד א')

א. על ידי שימוש בנוסחת מקלורן עם שארית בצורה לגרנז' הוכיחו כי לכל $x > 0$

$$1 + x - \frac{1}{2}x^2 < \sqrt{1+2x} < 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

ב. הראו כי $1.37 < \sqrt{2} < 1.44$ (ניתן להשתמש בסעיף א).

תרגיל 8

הוכח שלכל $0 \leq x \leq \frac{1}{9}$ מתקיים: $|\sin 6x - (6x - 36x^3)| \leq \frac{6}{9^3}$

תרגיל 9. (תשע"ג, סמסטר ב', מועד ב')

על ידי שימוש בנוסחת טיילור מסדר 5 חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{x^2} - 7) + 6 \sin x}{x^5}$

תרגיל 10. (תשע"ד, סמסטר ב', מועד ב')

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x+a}$ כאשר a קבוע חיובי נתון.

א. רשמו פולינום מקלורן מסדר ראשון עבור $f(x)$ כולל ביטוי השגיאה.

ב. העזרו בסעיף הקודם כדי לקבל ביטוי עבור המנה: $\frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4}}{x}$ ורשמו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4}}{x}$$

ג. חשבו גבול זה בדרך אחרת.

תרגיל 11. (תשס"א, סמסטר ג', מועד ב')

חשבו ללא כלל לופיטל את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + (x-1)x(x+1)}{x^3}$

תרגיל 12

חשבו את הגבולות הבאים באמצעות נוסחאות טיילור:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \tan x - x^2}{x^4} \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \cos x + 1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \quad \text{ד. (רמז: להציב } y = \frac{1}{x} \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{x} \quad \text{ב.}$$