מרצים : ד"ר ליאת אבן דר מנדל, ד"ר מיקה גבל, ד"ר דבורה קפלן, ד"ר ליאור רוזנצויג.

מתרגלים : גב' רינת חסקי , מר ירון יגר , גב' אלינה קנדליס, מר רם קץ, מר חוזה פרס, מר איתן רוזן.

פתרון X

שאלה 1 - (20 נק')

א.(15 נק') מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{\ln(n)}}(3x-6)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

ב. (5 נק') נסמן $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{\ln(n)}}(3x-6)^n=S(x)$. מצאו טור מספרים המתכנס למספר $S'(2.5)$,

כלומר מצאו טור $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ כך ש : $\sum_{n=2}^{\infty}b_n=S'(2.5)$.

פתרון :

א. $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{\ln(n)}}(3x-6)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{3^n\sqrt{\ln(n)}}(x-2)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}(x-2)^n$$

מציאת הרדיוס :

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{ln(n)}}\right|}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sqrt[n]{ln(n)}}}=1\to R=1$$

(לפי : $1\le\sqrt[n]{ln(n)}\le\sqrt[n]{n}$ לכל $n\ge 3$ וכלל הסנדוויץ').

ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל x בקטע $(1,3)$ ומתבדר לכל $x\notin[1,3]$.

בקצוות : $\boxed{x=3}\leftarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}$. זהו טור מתבדר על פי מבחן השוואה עם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$:הרמוני מוכלל עבור p=0.5 :

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{\frac{1}{\ln(n)}}$$ לכל $n\ge 2$.

$\boxed{x=1}$ $\leftarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{\ln(n)}}$, זהו טור שמתכנס לפי משפט ליבניץ : הסדרה $b_n=\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}$ יורדת ושואפת

ל- 0 : $b_n=\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}<b_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}$ לכל $n\geq 2$.

אבל ההתכנסות היא **בתנאי** כי טור הערכים המוחלטים שווה ל- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}$ שמתבדר.

ב :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{\ln(n)}}(3x-6)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}(x-2)^n=S(x)\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}n(x-2)^{n-1}=S'(x)\\ x\in(1,3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n)}}n(2.5-2)^{n-1}=S'(2.5)\\ x=2.5\end{cases}\Rightarrow\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{\ln(n)}2^{n-1}}=S'(2.5)\right.$$

שאלה 2 - (20 נק')

נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל $t\in\mathbb{R}$. נגדיר את הקבוצה $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$

ואת הפונקציה $u:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u(x,y)=\frac{1}{x}f(x+y^2)$, דיפרנציאבילית ב-D.

א. (8 נק') הוכיחו שלכל $(x,y)\in D$ מתקיים : $xu_y(x,y)-2xyu_x(x,y)=2yu(x,y)$.

ב. (2 נק') תנו דוגמא לפונקציה $u(x,y)$.

ג. (10 נק') נתון גם ש : $f(10)=7$, $f'(10)=5$. האם קיים וקטור יחידה $\hat{v}$ כך שמתקיים :

$\frac{\partial u}{\partial\hat{v}}(1,3)=40$? אם כן – מצאו את $\hat{v}$. אם לא – הסבירו מדוע לא.

פתרון

א. $u(x,y)=\frac{1}{x}f(x+y^2)$ דיפרנציאבילית לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-R. לכן לפי כלל השרשרת: (מה שקובע פה קיום נגזרות חלקיות זה שהפונקציה f גזירה

ומורכבת עם פונקציה בעלת נגזרות חלקיות בכל נקודה , ומוכפלת בפונקציה גזירה לכל x חיובי) :

$$u_x(x,y)=-\frac{1}{x^2}f(x+y^2)+\frac{1}{x}f'(x+y^2)$$

$$u_y(x,y)=\frac{1}{x}\cdot 2y\,f'(x+y^2)$$

$$\Rightarrow x u_y(x,y)-2xy\,u_x(x,y)=x\cdot\frac{1}{x}\cdot 2y\,f'(x+y^2)-2xy\left(-\frac{1}{x^2}f(x+y^2)+\frac{1}{x}f'(x+y^2)\right)=$$

$$=2yf'(x+y^2)+\frac{2y}{x}f(x+y^2)-2yf'(x+y^2)=\frac{2y}{x}f(x+y^2)=2y(u(x,y)$$

ב. דוגמאות לפונקציה $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\frac{1}{x}f(x+y^2)$$

$$f(t)=\sin t\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{x}\sin(x+y^2)$$

$$f(t)=t^3\Rightarrow u(x,y)=\frac{1}{x}(x+y^2)^3$$

.

ג. בנקודה $(x,y)=(1,3)$ מתקיים $x+y^2=10$ לכן :

$$u_x(1,3)=-\frac{1}{1^2}f(10)+\frac{1}{1}f'(10)=-7+5=-2$$

$$u_y(1,3)=\frac{1}{1}\cdot 2\cdot 3f'(10)=6f'(10)=30$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}u(1,3)=(u_x(1,3),u_y(1,3))=(-2,30)$$

$$\Rightarrow\left\|\vec{\nabla}u(1,3)\right\|=\sqrt{(-2)^2+30^2}=\sqrt{904}$$

ערך הנגזרת הכיוונית המקסימלית של $u(x,y)$ בנקודה $(1,3)$ הינו : $\sqrt{904}$ לכן לא קיים כיוון שבו ערך הנגזרת הכיוונית של $u(x,y)$ בנקודה $(1,3)$ שווה 40.

שאלה 3 - (20 נק') (אין קשר בין הסעיפים)

א. (10 נק') נתון כי הנקודה $(1,1)$ היא נקודת קיצון מקומית של הפונקציה : $f(x,y)=Ax^2y+Bx^3y^2-4x-y$. מצאו את הערכים של A,B וקבעו איזה סוג נקודת קיצון הנקודה $(1,1)$.

ב. (10 נק') מצאו את נקודת הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2y+xy^2-3xy$ בתחום $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.

פתרון:

א. מכיוון שהפונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות, הפונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור, ולכן אם יש לה נקודת קיצון בנקודה כלשהי אזי הנגזרות החלקיות מתאפסות בנקודה זו. נמצא אם כן מהו התנאי כדי שהנגזרות החלקיות מתאפסות בנקודה $(1,1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2Axy + 3Bx^2y^2 - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Ax^2 + 2Bx^3y - 1 = 0 \end{cases}.$$

נציב את הערכים המתאימים ונקבל כי $\begin{cases} 2A + 3B = 4 \\ A + 2B = 1 \end{cases}$. הפתרון של מערכת משוואות זו הוא $A = 5, B = -2$. כדי למצוא איזה סוג נקודת קיצון זו נמצא את הנגזרות השניות בנקודה :

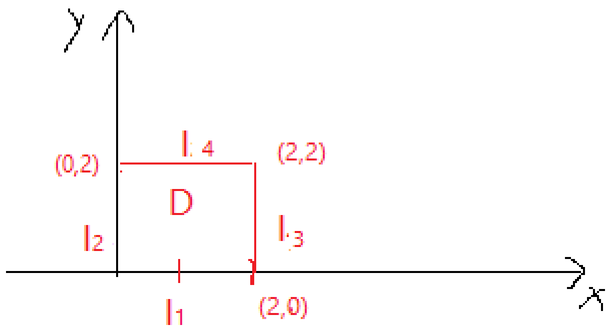
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10xy - 6x^2y^2 - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x^2 - 4x^3y - 1 = 0 \end{cases}$$ ולכן :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 10y - 12xy^2 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 10x - 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 10x - 12x^2y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4x^3$$

ולכן $H_f(1,1) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad -2 < 0$ כלומר לפי מבחן הנגזרות השניות הנקודה היא נקודת מקסימום מקומי.

ב. נציין תחילה כי לפונקציה אכן יש מינימום ומקסימום מוחלטים בתחום כי הפונקציה רציפה (שכן היא אלמנטרית), והתחום חסום וסגור, ולכן לפי משפט Weierstrass יש לפונקציה מינימום ומקסימום מוחלטים בתחום.



נמצא את כל הנקודות החשודות לקיצון בתחום, ואז נשווה ערכים. הערך הגדול ביותר הוא הערך המקסימלי, והערך הקטן ביותר הוא המינימלי.

נמצא תחילה נקודות חשודות לקיצון **בפנים התחום**, כלומר בקבוצה
$\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<2, 0<y<2\}$.
בקבוצה זו נקודה חשודה לקיצון היא נקודה שבה הנגזרות החלקיות מתאפסות, כלומר מתקיים כי

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy+y^2-3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+2xy-3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y(2x+y-3)=0\\ x(x+2y-3)=0\end{cases}$$

כלומר הנקודות שבהן שתי הנגזרות החלקיות מתאפסות הן כאשר

$$x=y=0\Rightarrow \text{not interior}$$

$$x=0,\ 2x+y-3=0\Rightarrow \cancel{x=0, y=3}$$

$$y=0,\ x+2y-3=0\Rightarrow \cancel{x=3, y=0}$$

$$\begin{cases}2x+y-3=0\\ x+2y-3=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{x=y=1}$$

ולכן נקודה חשודה לקיצון מוחלט **בפנים התחום** היא $(x,y)=(1,1)$.

נמצא כעת נקודות חשודות לקיצון מוחלט על שפת התחום.

נחלק את השפה לארבעה חלקים. החלק התחתון, כלומר הקבוצה $I_1=\{(x,0):0\le x\le 2\}$, החלק השמאלי $I_2=\{(0,y):0\le y\le 2\}$, החלק הימני $I_3=\{(2,y):0\le y\le 2\}$ והחלק העליון, כלומר הקבוצה $I_4=\{(x,2):0\le x\le 2\}$. לאורך הקבוצות I_1,I_2 הפונקציה שווה זהותית לאפס. לאורך הקבוצה I_4 הפונקציה שווה ל $g_4(x)=f(x,2)=2x^2+4x-6x=2x^2-2x$ שהנגזרת שלה, $g'_4(x)=4x-2$ מתאפסת עבור $x=\frac{1}{2}$, כלומר הנקודה $\left(\frac{1}{2},2\right)$ חשודה לקיצון , ונקודות הקצה של הקטע $(2,2)$, $(0,2)$.

לאורך הקבוצה I_3 הפונקציה שווה ל $g_3(y)=f(2,y)=2y^2+4y-6y=2y^2-2y$ שהנגזרת שלה, $g_3'(y)=4y-2$ מתאפסת עבור $y=\frac{1}{2}$, כלומר הנקודה $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ חשודה לקיצון מוחלט, ונקודות הקצה של הקטע $(2,2)$, $(2,0)$.

נשווה את הערכים של הפונקציה בנקודות החשודות:

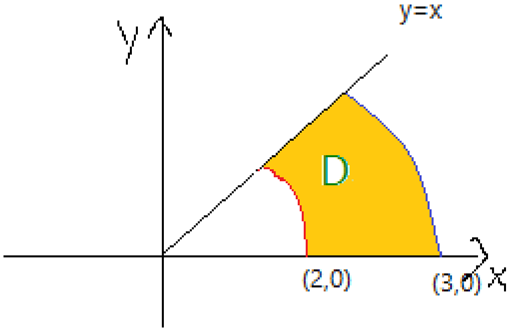
$$\left.\begin{array}{l} f(1,1)=-1 \\ f\left(\frac{1}{2},2\right)=f\left(2,\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2} \\ f(2,2)=4 \\ f(x,0)=f(y,0)=0 \end{array}\right\}$$

מכאן נובע כי הערך המינימלי הוא -1 שמתקבל ב- $(1,1)$ והערך המקסימלי הוא 4 שמתקבל ב$(2,2)$.

<u>שאלה 4 - (20 נק')</u>

בתחום D המוגדר על-ידי: $D=\{(x,y)\in R^2 : y\ge 0,\ y\le x,\ 4\le x^2+y^2\le 9\}$ מוגדרת פונקציית צפיפות מסה משטחית $\rho(x,y)=\dfrac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$. חשבו את המסה הכוללת בתחום.

<u>פתרון:</u>



במעבר לקואורדינטות פולריות נקבל כי התחום מוגדר על-ידי $2\le r\le 3$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ וכי פונקציית הצפיפות נתונה על-ידי $\dfrac{\cos\theta}{1+r^2}=\dfrac{r\cos\theta}{(1+r^2)r}=\rho(r,\theta)$, וכעת נוכל לחשב את האינטגרל בקואורדינטות פולריות:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$|J| = r$$

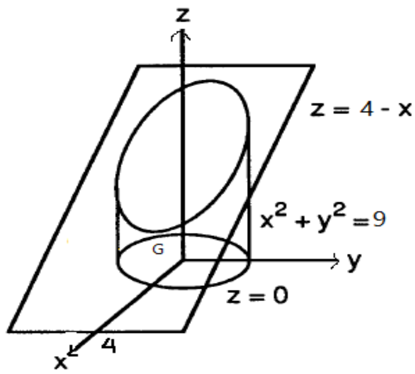
$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta \int_2^3 \frac{r}{1+r^2}dr = \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_2^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln 2$$

<u>שאלה 5 - (20 נק')</u>

חשבו את הנפח של הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=9$, בין המישורים $z=0$ ו- $z+x=4$.

<u>פתרון :</u>

נשתמש בקואורדינטות גליליות :
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \\ |J| &= r \end{aligned}\right\}$$



ההיטל של הגוף במישור x,y הוא העיגול : $x^2+y^2\le 9$. ואז הביטוי של הגוף בגליליות :

$$0\le\theta\le 2\pi \ , \ \ 0\le r\le 3 \ , \ \ 0\le z\le 4-x=4-r\cos\theta$$:

$$Volume = \iiint_G 1dv = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{4-r\cos\theta} r\,dz = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} (4r - r^2\cos\theta)d\theta = \int_0^3 (4r\theta - r^2\sin\theta)\Big|_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^3 8\pi r\,dr = 8\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^3 = 36\pi$$

<u>שאלה 6 - (20 נק')</u>

א. (6 נק') מצאו את הערך של הפרמטר α עבורו השדה הוקטורי $\vec{F}(x,y) = \left(1 + 4x^3y^3 + \alpha\sin y, 3x^4y^2\right)$ הוא שדה משמר ב- $\mathbb{R}^2$.

ב. (7 נק') עבור הערך של הפרמטר שקבלתם בסעיף א, מצאו פונקציה פוטנציאל של $\vec{F}$.

ג. (7 נק') חשבו את העבודה של השדה $\vec{F}$ על חלקיק הנע לאורך העקומה :

$$C: \begin{cases} \vec{r}(t) = \left(te^t, 1+t\right) \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

<u>פתרון :</u>

א. לרכיבי השדה יש נגזרות חלקיות רציפות ב- $\mathbb{R}^2$ (תחום פשוט קשר כמובן).

$$P(x,y) = 1 + 4x^3y^3 + \alpha\sin y; \quad Q(x,y) = 3x^4y^2$$

$$P_y(x,y) = 12x^3y^2 + \alpha\cos y$$

$$Q_x(x,y) = 12x^3y^2$$

$\vec{F}$ שדה וקטורי ולרכיביו יש נגזרות חלקיות רציפות בתחום פשוט קשר $D = \mathbb{R}^2$, אז הוא שדה משמר אם ורק אם : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ב- $D = \mathbb{R}^2$. וזה שקול ל- : $12x^3y^2 + \alpha\cos y = 12x^3y^2$ לכל נקודה.

נובע כי $\vec{F}$ הוא שדה משמר אם ורק אם $\alpha\cos y = 0$ לכל y וזה מתקיים אם ורק אם $\alpha = 0$.

ב. $\vec{F}(x,y)=\left(\underbrace{1+4x^3y^3}_{P(x,y)},\underbrace{3x^4y^2}_{Q(x,y)}\right)$.

נמצא פונקציית פוטנציאל $\varphi(x,y)$ המקיימת: $\vec{F}(x,y)=\vec{\nabla}\varphi(x,y)$ לכל נקודה ב- $\mathbb{R}^2$

כלומר: $\varphi_y=Q \quad \varphi_x=P$.

$$\varphi_x=P\Rightarrow\varphi(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)=\int\left(1+4x^3y^3\right)dx+C(y)=x+x^4y^3+C(y)$$

$$\varphi_y=Q\Rightarrow 3x^4y^2+C'(y)=3x^4y^2\Rightarrow C'(y)=0\Rightarrow C(y)=K$$

$$\varphi(x,y)=x+x^4y^3+K$$

ג. ניעזר בפונקציית פוטנציאל אחת (למשל עבור $K=0$)אשר חישבנו , כדי לחשב את האינטגרל הקווי:

$$W=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}\underset{\varphi(x,y)=x+x^4y^3}{=}\varphi(e,2)-\varphi(0,1)=\varphi(e,2)=e+8e^4\,.$$