<u>מבחן סוף סמסטר בקורס ״אלגברה לינארית ״</u>

X מועד

בהצלחה!

שאלה 1

$$\begin{cases} x+2ay=1 \\ 2x+y+(5a-1)z=3 \\ 2x+y+(a+3)z=5 \end{cases}$$
 :בק.) נתונה המערכת:

. כאשר a הוא פרמטר

מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת

- א) פתרון יחיד
- ב) אינסוף פתרונות
 - ג) אין פתרון.
- a=0 מצא את הפתרונות של המערכת עבור (ד

שאלה 2

.(3 -מרחב או שווה ממעלה ממעלה הפולינומים מרחב $V=P_3(x)$ יהי

 $W = Sp\{1+x, x-2x^2+x^3\}$ יהי על א המוגדר על א תת מרחב על א יהי על יהי

 $U = \{p(x) \in V] \ | p(1) = p(0) = 0\}$: מוגדרת כך מוגדרת על על תהי U

. U א. (6 נק.) מצא בסיס ומימד של

V של U+W ו- $U\cap W$ של תתי המרחבים של נק.) מצא בסיס ומימד של התי המרחבים

שאלה 3

יהי מסדר המטריצות הריבועיות (מרחב או שווה ל-3) ויהי (מרחב המטריצות הריבועיות ממעלה ממעלה או אווה ל-3) איי מרחב הפולינומים ממעלה מעלה מוגדרת ע"י העתקה המוגדרת ע"י העתקה המוגדרת ע"י

$$T(a+bx+cx^{2}+dx^{3}) = \begin{pmatrix} a-b & 2d-c \\ 0 & c-2d \end{pmatrix}$$

- T של על לגרעין של בסיס ומימד לגרעין של 8) א.
- ב. (10 נק.) מצא בסיס ומימד לתמונה של T ואמת את משפט המימדים
 - T הפיכה T הפיכה העתקה T הפיכה

שאלה 4

$$Tegin{pmatrix} 1 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 1 \ 0 \ 2 \end{bmatrix}, \quad Tegin{pmatrix} 0 \ 1 \ 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 2 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}, \quad Tegin{bmatrix} 1 \ 1 \ 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 3 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} :$$
העתקה ליניארית המקיימת: $T: R^3 o R^3$ תהי $T: R^3 o R^3$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3$$
 לכל $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ אצא (.8 נק.) אי. (8 נק.) מצא

Im(T) -ב. (8 נק.) מצא בסיס ומימד ל-

?.. (4 נק.) האם T חד-חד-ערכית

שאלה 5

- אינארית העתקה לינארית מרחבים וקטוריים. מרחבים לינארית א העתקה לינארית א מרחבים על א יהיו
- V של העתקה הוא תת-מרחב אינארית של אול אינארית של אוליי של אוריי של אוריי של אוכח כי גרעין (8 נק.) הוכח כי גרעין

.W של העתקה וקטורי היא תת-מרחב איז T היא העתקה לינארית של וקטורי של וקטורי של אונה (.W הוכח כי תמונה (.W הוכח כי תמו

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & a & a \\ 1+b & 2 & b & a \\ 1+c & 3 & c & a \\ 1+d & 4 & d & a \end{vmatrix}$$
 :: באה: (4) נק.) השב את הדטרמיננטה הבאה:

שאלה 6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
 א) נתונה המטריצה

- . A של העצמיים הערכים האופייני ואת הפולינום את הפולינום את (1 נק. 6)
 - A של העצמיים העצמיים של הבסיסים את אנה (26 נק.) א2 אנק.)
 - A של P של המלכסנת את את מצא (34) אונק.) אונק (34)
- עם של A^{-1} עם ע"ע של λ , אזי אזי אוי אוי ע"ע של אזי אוי של 4 מטריצה הפיכה ו- λ הוא ע"ע של אזי אוי של ההגדרה של ערך עצמי שאם אותו וקטור עצמי.

<u>יי אלגברה לינארית ייאלגברה לינארית יי</u>

בהצלחה!

<u>שאלה 1</u>

$$\begin{cases} x + 2ay = 1 \\ 2x + y + (5a - 1)z = 3 \\ 2x + y + (a + 3)z = 5 \end{cases}$$
 :20)

. כאשר a הוא פרמטר

מצא האם קיים ערך של פרמטר a שעבורו של למערכת

א1) פתרון יחיד

א2) אינסוף פתרונות

אין פתרון.

a=0 מצא את הפתרונות של המערכת עבור (4a=0

פתרון:

א. נעביר למטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5a - 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4a + 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5a - 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4a - 4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 & 1 \\ 0 & 1 - 4a & 5a - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4a - 4 & -2 \end{pmatrix}$$

לכן (על פי השורות 2,3):

. עבור אין פתרות למערכת למערכת עבור $a=rac{1}{4}$, אין פתרונות. עבור של מערכת ערך של מערכת מיים ערך של מערכת אינסוף פתרונות.

עבור יחיד מערכת למערכת $a \neq \frac{1}{4}, 1$ עבור

ב. נציב a=0 במטריצה שקבלנו לאחר הדירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

מכאן

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ z = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

.(3 -מרחב או שווה ממעלה ממעלה הפולינומים מרחב $V = P_3(x)$ יהי $W = Sp\{1 + x, x - 2x^2 + x^3\}$ יהי W המוגדר כך: W המוגדר כלי $U = \{p(x) \in V \mid |p(1) = p(0) = 0\}$: תהי על א מוגדרת על מוגדרת כך על מוגדרת על תח על תח U א. (6 נק.) מצא בסיס ומימד של

V של U+Wו- ו- ע $\cap W$ ב. (14 נק.) של של בסיס ומימד של תתי המרחבים

$$U = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : a + b + c + d = 0, d = 0\}$$

$$= \{ax^3 + bx^2 + (-a - b)x, \qquad a, b \in R\} = Sp\{x^3 - x, x^2 - x\}$$
כיון שהפולינומים בלתי-תלויים, זהו בסיס ל-U, ולכן מימד U הוא U, ולכן מימד U, ולכן מימד ע

:
$$W$$
 -בו בין איברים כלליים בין איברים נשווה, נשווה בסיס לחיתוך, ב. ב. כדי למצוא בסיס לחיתוך, בין איברים כלליים ב $a(1+x)+b(x-2x^2+x^3)=c(x^3-x)+d(x^2-x)$

a = 0, c = b, d = -2b על מנת שאיבר יהיה בחיתוך דרוש $U \cap W = \{b(x - 2x^2 + x^3) | b \in R\} =$ $= Sp\{x - 2x^2 + x^3\}$

$$\dim(U \cap W) = 1$$

$$U + W = Sp\{1 + x, x - 2x^2 + x^3, x^3 - x, x^2 - x\} = SpSp\{1 + x, x - 2x^2 + x^3, x^3 - x\}$$

$$\dim(U + W) = 3$$

שאלה 3

ע"י המוגדרת המוגדרת ד: $V \rightarrow W$ תהי .(2

$$T(a+bx+cx^{2}+dx^{3}) = \begin{pmatrix} a-b & 2d-c \\ 0 & c-2d \end{pmatrix}$$

- T א. (8 נק.) מצא בסיס ומימד לגרעין של
- ב. (10 נק.) מצא בסיס ומימד לתמונה של T ואמת את משפט המימדים
 - $(2 \, \text{נק.})$ האם העתקה T הפיכה?

:נחשב את הגרעין:

$$\ker(T) = \{a + bx + cx^{2} + dx^{3} \mid T(a + bx + cx^{2} + dx^{3}) = \vec{0}\} =$$

$$= \left\{ a + bx + cx^{2} + dx^{3} \mid \begin{pmatrix} a - b & 2d - c \\ 0 & c - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ a + bx + cx^{2} + dx^{3} \mid a - b = c - 2d = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ a + ax + 2dx^{2} + dx^{3} \mid a, d \in \Box \right\} =$$

$$= \left\{ a(1 + x) + d(2x^{2} + x^{3}) \mid a, d \in \Box \right\} = Sp\{1 + x, 2x^{2} + x^{3}\}$$

כיון שהקבוצה $\{1+x,2x^2+x^3\}$ אינה תלויה לינארית (כי וקטור אחד אינו כפולה של הוקטור השני), קבוצה זו מהווה בסיס $\dim(\ker(T)) = 2$ לגרעין, ולכן

נחשב את התמונה:

התמונה נפרשת על ידי תמונות של איברי בסיס, ולכן:

$$Im(T) = Sp\{T(1), T(x), T(x^{2}), T(x^{3})\} =$$

$$= Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

קל לראות שהמטריצות השניה והרביעית הן כפולה בסקלר של הראשונה והשלישית בהתאמה, ולכן הן תלויות לינארית וניתן לזרוק אותן. ולכן:

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כיון ששתי המטריצות הנותרות הן בלתי-תלויות (אחת אינה כפולה בסקלר של השניה), קבלנו בסיס לתמונה, ומכאן ש- $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$

dim(ker(T)) + dim(Im(T)) = 2 + 2 = 4 = dim Vההעתקה אינה הפיכה, כי הגרעין לא טריויאלי ולכן ההעתקה אינה חד-חד-ערכית.

שאלה 4

$$Tegin{pmatrix} 1 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 1 \ 0 \ 2 \end{bmatrix}, \quad Tegin{pmatrix} 0 \ 1 \ 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 2 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}, \quad Tegin{bmatrix} 1 \ 1 \ 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 3 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} :$$
העתקה ליניארית המקיימת: $T: R^3 o R^3$ תהי $T: R^3 o R^3$

L(T) ב. (8 נק.) מצא בסיס ומימד ל-

2. (4 נק.) האם T חד-חד-ערכית

(X

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נפתור את המערכת ונקבל:

$$\alpha = \frac{x - y + z}{2}$$

$$\beta = \frac{-x + y + z}{2}$$

$$\gamma = \frac{x + y - z}{2}$$

מכאן:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x+2y}{-x+y+z} \\ \frac{3x-y+z}{2} \end{bmatrix}$$

$$Im(T) = Sp\left(\left\{T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right\}\right) = Sp\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \atop R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

כיון שקבלנו דירוג מלא, לפי משפט מיות, על כך העתקה היא על. $\dim(\operatorname{Im}(T))=3$ משפט מיות כיון שקבלנו דירוג מלא,

$$3 = \dim(R^3) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(\ker(T)) + 3 \implies \dim(\ker(T)) = 0$$

 ולכן $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ לכן העתקה היא חח"ע

שאלה 5

.2

- אטריים. העתקה $T\colon V \to W$ העתקה לינארית מרחבים ע, W יהיו א
- V של העתקה לינארית הוא תת-מרחב וקטורי של Ker(T) של העתקה לינארית אוא (8 נק.) הוכח כי גרעין
- W של העתקה וקטורי היא תת-מרחב היא T היא של וקטורי של Im(T) הוכח כי תמונה (U 8) א2) א2
 - א1) בשני המקרים נראה סגירות לחיבור ולכפל בסקלר

$$v, u \in Ker(T) \subseteq V \rightarrow T(u) = \mathbf{0}, T(v) = \mathbf{0} \rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = \mathbf{0} \rightarrow u + v \in T(T)$$
 .1 $Ker(T)$

$$v \in Ker(T) \rightarrow T(u) = \mathbf{0} \rightarrow T(\alpha u) = \mathbf{0} \rightarrow \alpha u \in Ker(T)$$
יהיי .2
(28

$$v, u \in Im(T) \subseteq W \rightarrow \exists x, y \in V | T(x) = u, T(y) = v \rightarrow x + y \in V | T(x + y) = u + v \rightarrow u + v \in Im(T)$$

$$v \in Im(T) \to \exists x \in V | T(x) = v \to \alpha x \in V | T(\alpha x) = \alpha v \to \alpha v \in Im(T)$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & a & a \\ 1+b & 2 & b & a \\ 1+c & 3 & c & a \\ 1+d & 4 & d & a \end{vmatrix}$$
 : הבאה: הבאה: (ב ננטה את הדטרמיננטה אל דטרמיננטה מן ב ב הגדרה תכונות של דטרמיננטה a

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & a & a \\ 1+b & 2 & b & a \\ 1+c & 3 & c & a \\ 1+d & 4 & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & 2 & b & a \\ 1 & 3 & c & a \\ 1 & 4 & d & a \end{vmatrix} = 0$$

שאלה 6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
א) נתונה המטריצה

- A של את העצמיים הערכים האופייני ואת הפולינום את הפולינום או (16)
 - A אם העצמיים הערחבים של הבסיסים של את (26, 6) (2 א
 - A של P של המטריצה המלכסנת P של (3) אונק.) אונק
- ב) λ (4 נק.) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: למטריצה λ יש ערך עצמי λ אם ורק אם λ לא הפיכה.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 2 - \lambda & 1 \\ -3 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$
$$|A - 3I| = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 3t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$|A - I| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$|A - 2I| = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ר) (7) יהיה λ ע"ע של המטריצה. אז: קיים וקטור $v \neq \mathbf{0}$. כמו כן, נתון כי λ הפיכה. לכן: $\mathbf{A}^{-1}Av = A^{-1}\lambda v, v \neq 0, \rightarrow v = \lambda A^{-1}v, \qquad \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v, v \neq \mathbf{0}$ - $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v, v \neq \mathbf{0}$