<u>שאלה 1</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>

א. (10 נק') נתונה הסדרה :

$$a_n=\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{4n^2+2}}+\frac{1+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{4n^2+3}}+\cdots+\frac{1+\frac{n}{n^2}}{\sqrt{4n^2+n}};\quad n\geq 1, n\in\mathbf{N}$$

חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. נמקו !

ב. (10 נק') מצאו $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x-3\sin x+2}$ וקבעו האם הפונקציה F חסומה בקטע $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. נמקו !

<u>פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>שאלה 2</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳</u>

א. (10 נק׳) נתונה הפונקציה :

$$f(x)=\begin{cases}\left(\sqrt{x-5}-1\right)^{\frac{18}{x^2-81}} & ,6<x<9\\ \sqrt[4]{e} & ,x=9\\ \dfrac{x+3}{x^2-8x-9} & ,x>9\end{cases}$$

חשבו את הגבול $L=\lim\limits_{x\to 9^-} f(x)$; קבעו האם הפונקציה f רציפה בנקודה $x_0=9$.

אם f לא רציפה בנקודה $x_0=9$, מיינו את סוג אי הרציפות. נמקו !

ב. (10 נק׳) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-3\ln x$, $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$. עבור איזה $m\in\mathbf{R}$ המשוואה $f(x)=m$ פתירה ? מצאו את התמונה $\text{Image}(f)$ וקבעו האם f פונקציה חח״ע . נמקו !

<u>פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

שאלה 3 **(20 נקודות)** **אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') תהי פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ בעלת שתי נגזרות f', f'' רציפות ב- $\mathbf{R}$. נגדיר $g(x)=e^{2x}f(x)$.

נתון $f(0)=3, f'(0)=0, f''(0)=4$. רשמו פולינום טיילור מקלורן (Taylor-Maclaurin) מסדר 2 של g ומשוואת משיק לפונקציה g בנקודה $x=0$. נמקו !

ב. (10 נק') מצאו את ערך האינטגרל $I=\int_1^3 \frac{x^3-3x^2+9x-5}{x^2-2x+5}dx$. נמקו!

פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>שאלה 4</u> **(20 נקודות)** **<u>אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳</u>**

א. (10 נק׳) נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ בעלת שתי נגזרות $f\,', f\,''$ רציפות ב- $\mathbf{R}$.

ידוע ש- $f\,'(x)\ge 0,\ f\,''(x)\le 0,\ f(0)=0$.

1. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים $f(x)\ge x\cdot f\,'(x)$. נמקו !

2. הוכיחו כי לכל $0<a<b$ מתקיים $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$. נמקו !

ב. (10 נק׳) הוכיחו שלכל $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ מתקיים $\left|e^{-x}-\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)\right|\le\frac{1}{128}$. נמקו !

<u>פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>שאלה 5</u> **(20 נקודות)** **<u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>**

א. (10 נק') נתונה פונקציה $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ בעלת נגזרת ראשונה רציפה ב- $\mathbf{R}$. נתון ש- $g(0)=0$. הוכיחו כי הסדרה $a_n=n\cdot g(1/n)$ מתכנסת והגבול שלה שווה ל- $g'(0)$. $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=g'(0)$. נמקו !

ב. (10 נק') מצאו את כל נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x+\cos x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ וכן את סוגן (מינימום או מקסימום מוחלט). נמקו !

<u>פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות) <u>**אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳**</u>

א. (10 נק׳) מצאו נקודות מינימום מקומי של הפונקציה : $x>0, F(x)=\int_0^x \sin\left(\pi t^2\right)dt$. נמקו !

ב. (10 נק׳) הראו שלכל $0<a<b$ מתקיים : $(2\arctan b-3a^3)-(2\arctan a-3b^3)\ge 2(b-a)$.
נמקו !

<u>פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

סוף הפתרון !

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X

פתרון 1א:

לכל $n \in \mathbf{N}$:

$$0 < 1+\frac{1}{n^2} \le 1+\frac{2}{n^2} \le 1+\frac{3}{n^2} \le \cdots \le 1+\frac{n}{n^2}$$

$$\sqrt{4n^2+n} \ge \sqrt{4n^2+n-1} \ge \cdots \ge \sqrt{4n^2+3} \ge \sqrt{4n^2+2} \ge \sqrt{4n^2+1} > 0$$

$$\Rightarrow \quad n\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4n^2+n}} \le a_n = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{4n^2+2}} + \frac{1+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{4n^2+3}} + \cdots + \frac{1+\frac{n}{n^2}}{\sqrt{4n^2+n}} \le n\frac{1+\frac{n}{n^2}}{\sqrt{4n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4n^2+n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\sqrt{4+\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\boxed{\frac{1}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)}{\sqrt{4+\boxed{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1+\frac{n}{n^2}}{\sqrt{4n^2+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{4n^2+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\boxed{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)}{\sqrt{4+\boxed{\frac{1}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ' :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

<u>פתרון 1ב:</u>

$$F(x)=\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x-3\sin x+2}=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos xdx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2-3t+2}$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{t^2-3t+2}=\frac{1}{(t-1)(t-2)}=\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}$$

ולכן:

$$F(x)=\int\frac{\cos xdx}{\sin^2 x-3\sin x+2}=\begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos xdx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2-3t+2}=$$
$$=\int\frac{dt}{t-2}-\int\frac{dt}{t-1}=\ln|t-2|-\ln|t-1|+C=\ln\left|\frac{\sin x-2}{\sin x-1}\right|+C=\ln\left(\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right)+C$$

ברור שהגבול $L=\lim\limits_{x\to\pi/2}F(x)$ לא סופי:

$$L=\lim_{x\to\pi/2}F(x)=\lim_{x\to\pi/2}\ln\left(\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right)+C=\ln\left(\frac{1}{+0}\right)+C=\infty$$

ולכן F **<u>לא</u>** חסומה בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

פתרון 2א:

נחשב גבולות חד צדדיים :

$$L_{-}=\lim_{x\to 9^-}\left(\sqrt{x-5}-1\right)^{\frac{18}{x^2-81}}=(Euler\ \ 1^{\infty})=\lim_{x\to 9^-}\left(1+(\sqrt{x-5}-2)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-5}-2}\cdot(\sqrt{x-5}-2)\cdot\frac{18}{x^2-81}}=$$

$$=\left[denote\quad a(x)=\sqrt{x-5}-2\right]=\lim_{x\to 9^-}\left[\left(1+a(x)\right)^{\frac{1}{a(x)}}\right]^{(\sqrt{x-5}-2)\cdot\frac{18}{x^2-81}}=\mathbf{e}^{\frac{1}{4}}.$$

השיוויון האחרון נכון מפני שהבסיס החדש שואף ל- $\mathbf{e}$:

$$a(x)\xrightarrow{x\to 9^-}0\ \ \Rightarrow\ \ \lim_{x\to 9^-}\left(1+a(x)\right)^{\frac{1}{a(x)}}=\mathbf{e}$$

והמעריך החדש שואף ל- 1/4 :

$$\lim_{x\to 9^-}\frac{18\cdot(\sqrt{x-5}-2)}{x^2-81}=\lim_{x\to 9^-}\frac{18\cdot(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)}{(x^2-81)(\sqrt{x-5}+2)}=\lim_{x\to 9^-}\frac{18\cdot(x-9)}{(x-9)(x+9)(\sqrt{x-5}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 9^-}\frac{18}{(x+9)(\sqrt{x-5}+2)}=\frac{18}{(9+9)(\sqrt{9-5}+2)}=\frac{1}{4}$$

בנוסף,

$$L_{+}=\lim_{x\to 9^+}\frac{x+3}{x^2-8x-9}=\lim_{x\to 9^+}\frac{x+3}{(x-9)(x+1)}=\frac{12^+}{0^+\cdot 10^+}=+\infty$$

התוצאה של גבול מימין לא סופית, לכן הפונקציה לא רציפה בנקודה $x_0=9$,
אי רציפות מסוג שני עיקרית.

<u>פתרון 2ב:</u>

נבצע חקירה חלקית של הפונקציה $f(x)=x^3-3\cdot\ln x$, שמוגדרת בקטע $(0,\infty)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-3\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\cdot\left(1-3\boxed{\frac{\ln x}{x^3}}_{\searrow 0}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^3-3\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3\right)-3\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\right)=+\infty$$

<u>הערה</u>: לחישוב הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}$ אפשר להשתמש בסדר אינסופיות או לבצע כלל L'Hôpital לופיטל.

$$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=0\Leftrightarrow 3x^3=3\Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}>0\underset{x>0}{\Leftrightarrow}3x^3>3\Leftrightarrow x>1$$

<u>לפי סימן הנגזרת ניתן להסיק</u> :

הפונקציה יורדת ממש בקטע $(0,1]$ ועולה ממש בקטע $[1,\infty)$.

לכן יש לה מינימום מוחלט בנקודה $x=1$. הערך המינימלי של f שווה ל- $f(1)=1-3\ln 1=1$.

הפונקציה f **רציפה** בכל נקודה בקטע $(0,\infty)$ (מפני ש- f פונקציה אלמנטרית).

נפעיל אז משפט ערך הביניים של Cauchy ונקבל שהתמונה של f שווה ל-

$$\mathrm{Image}(f)=\{y\in\mathbf{R}: y\geq f(1)=1\}=[1,+\infty)$$

מסיקים שהמשוואה $f(x)=m$ פתירה אם ורק אם המשוואה $m\geq 1$.

בנוסף, עבור $m>1$ למשוואה $f(x)=m$ יש שני פתרונות $0<x_1<1<x_2$.

מסיקים ש- f לא חח״ע.

<u>נימוק</u>:

נניח ש- $m>1$. לפי הגבולות שקבלנו קיימות נקודות $b>1$ ו- $0<a<1$ בהן הפונקציה $g(x)=f(x)-m=\left(x^3-3\ln x\right)-m$ <u>**חיובית**</u>. ברור ש- $g(1)=1-m<0$.

נפעיל אז משפט ערך הביניים של Cauchy בקטעים $[a,1]$ ו- $[1,b]$ עבור הפונקציה הרציפה g

ונקבל שבכל אחד מהקטעים $(a,1)$, $(1,b)$ קיים לפחות פתרון אחד.

סה״כ למשוואה $f(x)=m\Leftrightarrow g(x)=0$ יש שני פתרונות $0<x_1<1<x_2$. מ.ש.ל.

פתרון 3א:

נתון ש- $g(x)=e^{2x}f\left(x\right)$.

מאחר ש- f בעלת 2 נגזרות רציפות ב- $\mathbf{R}$, אז גם $g(x)$ בעלת 2 נגזרות רציפות ב- $\mathbf{R}$, (מכפלת פונקציות רציפות). מכאן:

$$g(x)=e^{2x}f\left(x\right)$$

$$g'(x)=e^{2x}(2f\left(x\right)+f'(x))$$

$$g''(x)=e^{2x}(4f\left(x\right)+2f'(x)+2f'\left(x\right)+f''(x))=e^{2x}(4f\left(x\right)+4f'(x)+f''(x))$$

$$\Rightarrow g(0)=3,\ g'(0)=6,\ g''(0)=16$$

נרשום פולינום Taylor-Maclaurin טיילור-מקלורן מסדר 2 של g :

$$T_2(x)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}\left(x-0\right)+\frac{g''(0)}{2!}\left(x-0\right)^2=g(0)+\frac{g'(0)}{1}x+\frac{g''(0)}{2}x^2=3+6x+8x^2$$

משוואת משיק לפונקציה g בנקודה x=0:

$$y=3+6x \Leftarrow y=g(0)+g'(0)(x-0)=T_1(x)$$

פתרון 3ב:

נמצא את ערך האינטגרל I לפי משפט היסודי של חדו״א (משפט Newton-Leibnitz).

הפונקציה $f(x)=\frac{x^3-3x^2+9x-5}{x^2-2x+5}$ היא פונקציה רציונלית בה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה,

לכן קודם נחלק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+9x-5 & x^2-2x+5 \\ x^3-2x^2+5x & x-1 \\ -x^2+4x-5 & \\ -x^2+2x-5 & \\ 2x & \end{array}$$

כלומר, נקבל

$$\frac{x^3-3x^2+9x-5}{x^2-2x+5}=(x-1)+\frac{2x}{x^2-2x+5}$$

המחובר הראשוןפולינום. לכן נטפל רק במחבר השני ונציג אותו כסכום של שברים פשוטים:

$$\frac{2x}{x^2-2x+5}=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{2}{(x-1)^2+4}=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$$

מסיקים שהפונקציה הקדומה של $f(x)=\frac{x^3-3x^2+9x-5}{x^2-2x+5}$ שווה ל:

$$F(x)=\int\frac{x^3-3x^2+9x-5}{x^2-2x+5}dx=\int\left(x-1+\frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+\int\frac{d(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5}+\int\frac{d\left(\frac{x-1}{2}\right)}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}=$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C},$$

כי $\boldsymbol{x^2-2x+5>0}$ לכל $\boldsymbol{x}$ ממשי. נשתמש במשפט Newton-Leibnitz ונסיק ש-

$$I=\int_1^3\frac{x^3-3x^2+9x-5}{x^2-2x+5}dx=\left[\text{Newton}-\text{Leibnitz}\right]=F(x)\Big|_{x=1}^{x=3}=2+\ln 2+\frac{\pi}{4}.$$

פתרון 4א:

פתרון 1:

1. f רציפה בכל הישר הממשי, וגזירה בו, ולכן לכל $x>0$ הפונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,x]$ וגזירה בקטע הפתוח $(0,x)$. מכאן שלפי משפט Lagrange יש $c\in(0,x)$ כך ש $f(x)=f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)=xf'(c)$. הנגזרת השנייה שלילית, ולכן פונקציית הנגזרת יורדת, ולכן $f'(c)\geq f(x)$ (כי $c<x$), ומכיוון ש $xf'(c)\geq xf'(x)$ ובפרט $f(x)=xf'(c)\geq xf'(x)$.

2. כעת נגדיר $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. מתקיים כי $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ (המונה שלילי לפי החלק הראשון), כלומר עבור $x>0$ הפונקציה $g(x)$ יורדת, ולכן עבור $0<a<b$ מתקיים כי $g(a)=\dfrac{f(a)}{a}>g(b)=\dfrac{f(b)}{b}$.

פתרון 2:

טענה 2 של התרגיל: $\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$ עבור $0<a<b$,

שקולה לטענה הבאה: הפונקציה $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ <u>יורדת ממש</u> בקטע $(0,\infty)$.

נחקור את סימן הנגזרת הראשונה של g . מספיק לבדוק ש- $g'(x)<0$, לכל $x\in(0,\infty)$.

ברור ש- $$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$$

לכן **<u>מספיק להראות</u>** שהמונה שלילי, ז"א:

$$m(x)=f'(x)x-f(x)<0 \text{, לכל } x\in(0,\infty) \quad (***)$$

ברור ש- $m'(x)=\left(f''(x)x+f'(x)\cdot 1\right)-f'(x)=\underbrace{f''(x)}_{negative}x<0$, לכל $x>0$.

זה אומר שהפונקציה $m(x)$ יורדת ממש בקטע $x\geq 0$ ולכן המספר אפס $\mathbf{0}$ $m(0)=f'(0)\cdot 0-\underbrace{f(0)}_{=0}=\mathbf{0}$

מהווה <u>ערך מקסימלי</u> של הפונקציה $m(x)$ בקטע $x\geq 0$.

זה שקול ל- $\underline{m(x)=f'(x)x-f(x)<m(0)=0}$, לכל $x>0$.

<u>הערה:</u> סיימנו את ההוכחה של התרגיל כי האי-שיוויון (***) $f'(x)x-f(x)<0$, לכל $x\in(0,\infty)$ גורר את ה**טענה 1** של התרגיל: $f(x)\geq xf'(x)$, לכל $x\geq 0$.

פתרון 4ב:

נראה שהפולינום $1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$ הוא פולינום Maclaurin מקלורין של $f(x)=e^{-x}$ מסדר $n=3$.

ידוע שפולינום Maclaurin מקלורין של $g(x)=e^{x}$ הוא

$$T_{g,n}(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...+\frac{1}{n!}x^n$$

ולכן פולינום Maclaurin מקלורין של $f(x)=e^{-x}$ הוא

$$T_{f,n}(x)=1+(-x)+\frac{1}{2!}(-x)^2+\frac{1}{3!}(-x)^3+...+\frac{1}{n!}(-x)^n$$

ולכן פולינום Maclaurin מקלורין של $f(x)=e^{-x}$ מסדר $n=3$ הוא

$$T_3(x)=1+(-x)+\frac{1}{2!}(-x)^2+\frac{1}{3!}(-x)^3=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$$

בהמשך הפתרון נשתמש בנוסחת השארית $R_3(x)$ בצורה של Lagrange.

מסיקים שהשגיאה בקירוב $f(x)=e^{-x}$ ע״י הפולינום $T_3(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$ היא

$$E_3=\left|e^{-x}-\left(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)\right|=\left|f(x)-T_3(x)\right|=\left|R_3(x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right|$$

כאשר c בין 0 לבין x.

$$f(x)=e^{-x} \quad\Rightarrow\quad f^{(4)}(x)=e^{-x}$$

ולכן השגיאה היא

$$E=\left|R_3(x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right|=\left|\frac{e^{-c}}{4!}x^4\right|=\frac{e^{-c}}{24}|x|^4$$

$$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad |x|\le\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad |x|^4\le\left(\frac{1}{2}^4\right)=\frac{1}{16}$$

$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$ ו- c בין 0 לבין x ולכן $-\frac{1}{2}<c<\frac{1}{2}$.

$$-\frac{1}{2}<c<\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}<-c<\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad e^{-c}<e^{\frac{1}{2}}<e<3$$

ולכן השגיאה מקיימת

$$E=\frac{e^{-c}}{24}|x|^4<\frac{1}{24}\cdot 3\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{128}$$

<u>פתרון 5א:</u>

נתון כי g גזירה ב $x_0=0$, כלומר הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ קיים ושווה ל- $g'(0)$.

על פי הגדרת הגבול (Heine), לכל סדרה x_n שמקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ מתקיים כי הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{x_n}$

קיים ושווה ל- $g'(0)$.

בפרט עבור הסדרה $x_n=\frac{1}{n}$ הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{g(1/n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}ng(1/n)$$

קיים ושווה ל- $g'(0)$, כלומר הסדרה הנתונה מתכנסת לגבול סופי ששווה ל- $g'(0)$.

פתרון 5ב:

$f(x) = x \cdot \sin x + \cos x$ פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה !

משפט Weierstrass גורר ש- f בעלת נקודות קיצון מוחלט בקטע חסום וסגור $[-\pi,\pi]$.

נבודד נקודות חשודות לקיצון בקטע הפתוח $(-\pi,\pi)$ בעזרת משפט Fermat. בשלב ראשון נוכיח שהנגזרת מתאפסת $f'(x) = 0$ בקטע $(-\pi,\pi)$ רק כאשר $x = 0$ או $x = \frac{\pi}{2}$ או $x = -\frac{\pi}{2}$.

מתקיים :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + x \cdot \cos x - \sin x = x \cdot \cos x = 0 \; .$$

בקטע $(-\pi,\pi)$ השוויון האחרון שקול ל: $x = 0$ או $x = \frac{\pi}{2}$ או $x = -\frac{\pi}{2}$.

משפט Fermat גורר שהנקודות החשודות לקיצון בקטע הפתוח $(-\pi,\pi)$ הן : $0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

<u>מסקנה:</u>

הנקודות החשודות לקיצון מוחלט בקטע חסום וסגור $[-\pi,\pi]$ הן אפוא $\left\{-\pi,\pi,0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right\}$.

מתקיים כי $f(0)=1$ וכן $f(\pm\pi) = -1$, $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

לכן $x = \pm\pi$ נקודות <u>מינימום מוחלט</u> ו- $x = \pm\frac{\pi}{2}$ נקודות <u>מקסימום מוחלט</u>.

<u>פתרון 6א:</u>

הפונקציה $\sin\left(\pi t^2\right)$ רציפה בכל $\left[0,\infty\right)$ לכן עפ״י המשפט היסודי של חדו״א (משפט Newton-Leibnitz) $F\left(x\right)$ הנתונה היא פונקציה קדומה שלה.

נקודות חשודות לקיצון מקומי של פונקציה גזירה חייבות עפ״י משפט פרמה להיות קריטיות, כלומר שהנגזרת מתאפסת בהן.

נאתר את הנקודות הללו : $F'\left(x\right)=\sin\left(\pi x^2\right)=0$ גורר שהנקודות החשודות לקיצון מקומי הן $x=\sqrt{n}, n\in\mathbb{N}$ (רק נקודות חיוביות נלקחות בחשבון שכן רק הן פנימיות באינטרוול הנתון).

כעת נכריע מי מתוכן אכן נק׳ מינימום מקומי ע״י <u>מבחן הנגזרת השנייה</u> :

$$F''\left(\sqrt{n}\right)=2\pi x\cos\left(\pi x^2\right)\Big|_{x=\sqrt{n}}=2\pi\sqrt{n}\cos\left(n\pi\right)=2\sqrt{n}\left(-1\right)^n .$$

הערכים שמתקבלים עבור $F''\left(\sqrt{n}\right)$ הם :

- או <u>חיוביים</u> כאשר $n=2k$ זוגי (משתמשים באי-שיוויון : $0<1=\cos\left(2k\pi\right)$).
- או <u>שליליים</u> כאשר $n=2k-1$ אי-זוגי (משתמשים באי-שיוויון : $0>1-=\cos\left(\left(2k-1\right)\pi\right)$).

אנחנו מעוניינים בנקודות <u>מינימום</u> מקומי לכן אילו הן : $x=\sqrt{n}$ עבור n זוגי.

<u>פתרון 6ב:</u>

מספיק להראות את האי-שיוויון : $\frac{(2\arctan b-3a^3)-(2\arctan a-3b^3)}{b-a}\geq 2$.

זה שקול ל- $\frac{\left(2\arctan b+3b^3\right)-\left(2\arctan a+3a^3\right)}{b-a}\geq 2$.

נגדיר פונקציה $f(x)=2\arctan x+3x^3$ וקטע $[a,b]$.

פונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, וגזירה בקטע (a,b), לכן משפט Lagrange גורר שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\left(2\arctan b+3b^3\right)-\left(2\arctan a+3a^3\right)}{b-a}=f'(c)$$

הנגזרת של f שווה ל- $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+9x^2$ ולכן $f'(c)=\frac{2}{1+c^2}+9c^2$.

ברור שהנגזרת f' חסומה מלמטה על ידי :

$$f'(c)=\frac{2}{1+c^2}+9c^2=\frac{2+9c^2+9c^4}{1+c^2}\geq\frac{2+2c^2}{1+c^2}=2$$

מסיקים ש-

$$\frac{\left(2\arctan b+3b^3\right)-\left(2\arctan a+3a^3\right)}{b-a}=f'(c)\geq 2$$

מ.ש.ל.