



חזון"א 1 – דף תרגילים מספר 13

אינטגרל לא אמיתי

תרגיל 1

קיבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים/מתבדרים על פי הגדרת אינטגרל לא אמיתי. אם הם מתכנסים חשבו את ערך האינטגרל.

$$\begin{array}{llll} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \quad (\tau) & \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (\alpha) & \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 4)} dx \quad (\beta) & \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \quad (\aleph) \\ \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx \quad (\kappa) & \int_{-\infty}^0 \frac{\arctan^2 x}{1 + x^2} dx \quad (\imath) & \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x+1}} dx \quad (\omicron) & \int_1^{+\infty} x e^{-4x} dx \quad (\heartsuit) \\ \int_{-\infty}^{-5} \frac{x}{(x+1)(x^2-4)} dx \quad (\aleph''') & \int_3^{\infty} \frac{32}{(4-x^2)(4+x^2)} dx \quad (\iota) & \int_1^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx \quad (\varsigma) & \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (\tau'') & \int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx \quad (\aleph'') & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx \quad (\aleph'') & \end{array}$$

תרגיל 2

עבור אילו ערכים של הפרמטר p האינטגרל $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$ מתכנס/מתבדר?

תרגיל 3

השתמשו במבחני השוואה כדי לקבוע אם האינטגרלים הבאים מתכנסים/מתבדרים:

$$\begin{array}{llll} \int_3^{+\infty} \frac{3x+2}{x(x^4+x+1)} dx \quad (\alpha) & \int_{10}^{+\infty} \frac{x-8}{x(x^2-4x+4)} dx \quad (\beta) & \int_1^{+\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^3+6x^2+9x}} dx \quad (\aleph) & \\ \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{3x+5}}{x^2(1+\cos^2 x)} dx \quad (\imath) & \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2-\sin x} dx \quad (\heartsuit) & \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x^2+\ln^2 x)} \quad (\tau) & \\ \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x} dx \quad (\varsigma) & \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2x^2+1} e^{-x^2} dx \quad (\kappa) & \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (\iota) & \\ \int_1^{\infty} \frac{\sin(2x)+e^{-x}}{\sqrt{x^3+x^2+x}} dx \quad (\aleph'') & \int_1^{\infty} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x^6+1}} dx \quad (\aleph''') & \int_1^{\infty} \frac{1}{(10x+\ln^{10} x)} dx \quad (\iota) & \end{array}$$

תרגיל 4

האם האינטגרלים הבאים מתכנסים/מתבדרים?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx \quad \text{א)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{ב)} \int_0^2 \frac{2x}{x^2-4} dx \quad \text{א}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} \quad \text{ג)} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx \quad \text{ד)} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx \quad \text{ד}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x+x^3} dx \quad \text{ה)} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{ו)} \int_0^1 \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{ו}$$

תרגיל 5

קיבעו האם הטענות הבאות נכונות או שגויות. נמקו את תשובתכם.

$$\int_0^3 (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx \stackrel{?}{=} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_0^3 = 3 \left[(2)^{\frac{1}{3}} - (-1)^{\frac{1}{3}} \right] = 3 \left[\sqrt[3]{2} + 1 \right] \quad \text{א)}$$

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx \stackrel{?}{=} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^2 = - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = -1 \quad \text{ב)}$$

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{4x-1} \right) dx \stackrel{?}{=} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx - \int_1^{\infty} \frac{4}{4x-1} dx \quad \text{ג)}$$