נוסחאות עזר – מבוא להסתברות

חוקי הפילוג: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$;

חוקי דה מורגן: $\overline{(\bigcup_i A_i)} = (\bigcap_i \overline{A_i})$ $\quad$ $\overline{(\bigcap_i A_i)} = (\bigcup_i \overline{A_i})$

A, B **מאורעות זרים** אם $A\cap B=\phi$,

סדרת מאורעות תקרא **זרים בזוגות** אם **כל** זוג מאורעות מתוכה הם זרים.

חוקי ההסתברות: $P\{\overline{A}\}=1-P\{A\}$; $P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}$

אם: $\{A_i\}_{i=1}^n$ סדרת מאורעות **זרים בזוגות** אז: $P\{\bigcup_{i=1}^n Ai\}=\sum_{i=1}^n P\{Ai\}$

נוסחת **ההכלה וההוצאה** (inclusion exclusion):

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C\cup D)&=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-\\&-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-P(B\cap D)-P(C\cap D)+\\&+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P\{A\cap C\cap D\}+P(B\cap C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

כללים קומבינטוריים:

כלל המכפלה: אם ניסוי ניתן להצגה כמתבצע ב n שלבים, ובשלב k יש n_k תוצאות אפשריות וסימטריות,
ואם מרחב המדגם מוגדר כוקטורים באורך n כאשר הרכיב ה k שלו הוא תוצאת השלב ה k, אז
במרחב המדגם יש $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ תוצאות אפשריות סימטריות.

מספר האפשרויות לדגימה של k מתוך n איברים:

	התחשבות בסדר הדגימה	ללא התחשבות בסדר
עם החזרה	n^k	(מרחב מדגם לא סימטרי)
ללא החזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

הסתברות מותנית: $P\{A/B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$, **נוסחת הכפל**: $P\{A\cap B\}=P\{A\}P\{B/A\}$

נוסחת ההסתברות השלמה:

אם: $\{B_i\}_{i=1}^n$ חלוקה של מרחב המדגם, אז: $P\{A\}=\sum_{i=1}^n P\{A/Bi\}P\{Bi\}$

נוסחת בייס: $P\{B_k/A\}=\frac{P\{A/B_k\}P\{B_k\}}{P\{A\}}$ כאשר: $P(A)=\sum_{i=1}^n P\{A/B_i\}P\{B_i\}$

אי תלות: A ו B הם מאורעות **בלתי תלויים** אם מתקיים: $P\{A/B\}=P(A)$ או $P\{A\cap B\}=P(A)P(B)$
קבוצת מאורעות הם בלתי תלויים אם כל קבוצה חלקית שלהם מקיימת שהסתברות החיתוך שלהם
שווה למכפלת ההסתברויות.

סדרת ניסויי ברנולי: סדרת ניסויים זהים ובלתי תלויים, כשבכל ניסוי שתי תוצאות אפשריות: הצלחה
וכשלון, וכאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p.

משתנים מקריים:

משתנה מקרי בדיד: פונקצית ההסתברות: $P(X=k)$ פונקצית ההתפלגות המצטברת: $F(k)=P(X\le k)$

התוחלת של X: $E(X)=\sum_k x_k P(X=x_k)$; התוחלת של פונקציה של X, g(X) היא: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P\{X=k\}$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בעל ההסתברות הגבוהה ביותר, **החציון** הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (בדידים) מיוחדים:

אחיד (בדיד): X~U(N), מתאר משתנה המקבל את הערכים: 1,2,…,N בהסתברויות שוות.

עבור משתנה זה: $V[X]=\frac{N^2-1}{12}$; $E[X]=\frac{N+1}{2}$; $P\{X=k\}=\frac{1}{N}\quad k=1,2,...,N$

בינומי: $X\sim B(n,p)$, מתאר את מספר **ההצלחות** ב- *n* ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה: $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\quad k=0,1,...,n\ ;\quad E[X]=np\ ;\quad V[X]=npq$

גיאומטרי: $X\sim G(p)$, מתאר את מספר הניסויים **עד** להצלחה (כולל) בסדרת ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה:

$$P(X=k)=pq^{k-1}\quad k=1,2,...\ ;\quad P(X\le k)=1-q^k\quad k=1,2,...\ ;\quad E[X]=\frac{1}{p};\quad V[X]=\frac{q}{p^2}$$

היפרגיאומטרי: $X\sim H(N,R,n)$ מתאר את מספר האיברים המיוחדים שיתקבלו בבחירת *n* איברים ללא החזרה מאוכלוסיה בגודל *N* שבה *R* איברים מיוחדים.

עבור משתנה זה:

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad k=0,1,2,...n\ ;\quad E(X)=n\frac{R}{N}\ ;\quad V(X)=n\frac{R}{N}\frac{(N-R)}{N}\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

פואסוני: $X\sim Pois(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור מספר אירועים ביחידת זמן.

עבור משתנה זה: $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad k=0,1,2,...\ ;\quad E(X)=V(X)=\lambda$

משתנה מקרי רציף: פונקצית הצפיפות: $f(x)$, פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=P\{X\le t\}=\int_{x=-\infty}^{t} f(x)dx\ .$$

התוחלת של X: $E[X]=\int xf(x)dx$; **התוחלת של פונקציה של X**, g(X) היא: $E[g(X)]=\int g(x)f(x)dx$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בו הצפיפות היא מקסימלית, החציון הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (רציפים) מיוחדים:

אחיד (רציף): $X \sim U(a,b)$ מתאר משתנה המקבל ערכים בין a ל- b כך שההסתברות לערך בקטע פרופורציונית לאורך הקטע.

עבור משתנה זה: $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}\ ;\quad F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}\ ;\quad \mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2};\quad \mathrm{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

מעריכי (אקספוננציאלי): $\mathrm{X}\sim \mathrm{ezp}(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור אורך חיי רכיבים ומערכות אלקטרוניות.

עבור משתנה זה: $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases};\quad F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & 0\le x\end{cases};\quad \mathrm{E}(X)=\frac{1}{\lambda};\quad \mathrm{V}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

נורמלי: $\mathrm{X}\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, משמש לצרכים רבים....

עבור משתנה זה: $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(\mathrm{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty\le x\le\infty\quad;\quad \mathrm{E}(X)=\mu;\quad \mathrm{V}(X)=\sigma^2$$

חישוב הסתברויות עבור משתנה זה בעזרת טבלת ההתפלגות המצטברת של המשתנה הסטנדרטי

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, והחישוב מתבצע על ידי: $P\{X\le t\}=P\{Z\le\frac{t-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$,

את הערך $\Phi(t)$ קוראים בטבלה, הוא מקיים: $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

משתנה דו ממדי בדיד: פונקצית ההסתברות המשותפת: $P(X=x_i,Y=y_j)=P_{X,Y}(x_i,y_j)$

פונקצית **ההסתברות השולית** של X: $P_X(k)=P\{X=k\}=\sum_j P\{X=k,Y=j\}$

פונקצית **ההסתברות המותנית** של X בהינתן Y=j: $P_{X/Y}(k/j)=P\{X=k/Y=j\}=\frac{P\{X=k,Y=j\}}{P\{Y=j\}}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $P_{X,Y}(x_i,y_j)=P_X(x_i)P_Y(y_j)$ לכל הערכים האפשריים i ו- j.

תכונות התוחלת והשונות:

$$E[aX+b]=aE[X]+b\quad;\quad \mathrm{V}[aX+b]=a^2V[X]$$

$$E[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n E[X_i]\quad;\quad V[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n V[X_i]+\sum_{i\ne j}^{\text{"}n^2-n\text{"}}Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^n V(X_i)+2\sum_{i>j}Cov(X_i,X_j)$$

$$\mathrm{Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)}\quad;\quad \rho(\mathrm{X,Y})=\frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})}$$

$$\mathrm{Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y)}\ ;\quad \mathrm{Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)}$$

משתנים מקריים נורמליים ב"ת:

ב"ת X_i עבור $X_i\sim N\left(\mu_i,\,\sigma_i^2\right),\ i=1,2,\dots,n\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^n a_iX_i\ \sim\ N\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i,\ \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\right)$

מדגם מקרי פשוט הוא אוסף של מ"מ בלתי תלויים, לכולם אותה התפלגות.

ממוצע המדגם הוא: $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, והוא מקיים: $E[\overline{X_n}]=E[X]\ ;\ V[\overline{X_n}]=\frac{V[X]}{n}$

משפט הגבול המרכזי: עבור מדגם מקרי פשוט קיים, עבור n מספיק גדול ($n \geq 30$):
אם X משתנה מקרי עם תוחלת $E(X) = \mu$ ושונות $V(X) = \sigma^2$ אזי:

$$\overline{X_n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

קרוב נורמלי למשתנה בינומי: עבור X משתנה בינומי: $X \sim B(n,p)$
כאשר n מספיק גדול, כך ש: $np > 5$ וגם: $nq > 5$, מתקיים: $X \sim N(np, npq)$

תיקון רציפות: $P\{X < k\} = \Phi\left(\frac{k-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$; $P\{X \leq k\} = \Phi\left(\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$

משפט 1: אם $X_1, X_2, ..., X_n$ הוא מדגם מקרי של n תצפיות בלתי תלויות מהתפלגות בעלת תוחלת μ ושונות σ^2, אז:

א. ממוצע המדגם $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ הוא אומד חסר הטיה עבור התוחלת μ.

ב. אומד חסר הטיה עבור השונות σ^2 ניתן על ידי:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1}$$

רווח בר-סמך עבור תוחלת כאשר שונות ידועה:

יהיו $X_1, ..., X_n$ תצפיות ב"ת מהתפלגות בעלת תוחלת μ ושונות (ידועה) σ^2. אם n הוא מספיק גדול, אז' רווח בר-סמך ברמת סמך $1-\alpha$ עבור μ:

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

רווח בר-סמך עבור פרופורציה:

אם $X \sim Bin(n,p)$, אז' רווח סמך ברמת סמך מקורבת $1-\alpha$ עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסיה, המבוסס על מדגם מספיק גדול, ניתן על ידי:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

כאשר $\hat{p} = \frac{X}{n}$.

רווח בר-סמך עבור תוחלת כאשר שונות לא ידועה:

יהיו $X_1,...,X_n$ תצפיות ב"ת מהתפלגות נורמלית, כאשר התוחלת μ והשונות σ^2 הם פרמטרים לא ידועים. רווח בר-סמך ברמת סמך $1-\alpha$ עבור μ:

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

כאשר S^2 הוא האומד הבלתי מוטה עבור σ^2.

אזור הדחייה: תחום שבו מחליטים לדחות את $\mathbf{H}_0$ נקרא *אזור הדחייה* ומסומן ב-$\mathbf{C}$.

טעות מסוג I (טעות מסוג ראשון) הינה הטעות הנגרמת מדחיית השערת האפס בטעות כלומר כאשר היא למעשה נכונה:

$$\alpha = P(\text{טעות מסוג I}) = P_{H_0}(C)$$

טעות מסוג II (טעות מסוג שני) הינה הטעות הנגרמת מקבלת השערת האפס בטעות כלומר כאשר ההשערה האלטרנטיבית $\mathbf{H}_1$ נכונה:

$$\beta = P(\text{טעות מסוג II}) = P_{H_1}(\bar{C})$$

העוצמה של מבחן המסומנת ב-π היא ההסתברות לדחיית השערת האפס, כאשר האלטרנטיבה נכונה:

$$\pi = P_{H_1}(C) = 1 - P_{H_1}(\bar{C}) = 1 - \beta$$

מובהקות התוצאה הינה ההסתברות לקבל תוצאה קיצונית לפחות כמו התוצאה שהתקבלה בניסוי, בהנחה שהשערת האפס נכונה. ההסתברות מסומנת ב-p_value.

בדיקת השערות על התוחלת כאשר שונות האוכלוסייה ידועה:

<u>ההשערות הנבדקות הן:</u>

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ או $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ או $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$

המבחן מסתמך על $\overline{X}$ או $z_{\overline{X}} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

סיכום כללים לדחיית H_0 ברמת מובהקות α

אלטרנטיבה H_1	אזור דחיית H_0		p_value
$H_1: \mu > \mu_0$	$\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$z_{\overline{X}} > z_{1-\alpha}$	$P(Z \geq z_{\overline{X}}) = 1 - \Phi(z_{\overline{X}})$
$H_1: \mu < \mu_0$	$\overline{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$z_{\overline{X}} < -z_{1-\alpha}$	$P(Z \leq z_{\overline{X}}) = \Phi(z_{\overline{X}})$
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$\overline{X} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\overline{X} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\lvert z_{\overline{X}} \rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2 \cdot P(Z \geq \lvert z_{\overline{X}} \rvert) = 2 \cdot [1 - \Phi(\lvert z_{\overline{X}} \rvert)]$

בדיקת השערות על התוחלת כאשר שונות לא ידועה:

<u>ההשערות הנבדקות הן:</u>

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ או $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ או $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$

המבחן מסתמך על $\overline{X}$ או $t_{\overline{X}} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

סיכום כללים לדחיית H_0 ברמת מובהקות α

אלטרנטיבה H_1	אזור דחיית H_0		p_value
$H_1: \mu > \mu_0$	$\overline{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha,n-1}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$t_{\overline{X}} > t_{1-\alpha,n-1}$	$P(T \geq t_{\overline{X}})$
$H_1: \mu < \mu_0$	$\overline{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha,n-1} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$t_{\overline{X}} < -t_{1-\alpha,n-1}$	$P(T \leq t_{\overline{X}})$
$H_1: \mu \neq \mu_0$	$\overline{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$ או $\overline{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$	$\lvert t_{\overline{X}} \rvert > t_{1-\alpha/2,n-1}$	$2 \cdot P(T \geq \lvert t_{\overline{X}} \rvert)$

ומספר נוסחאות מתמטיות לסיום:

- טור חשבוני (אריתמטי):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad ; \quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

ולדוגמא סכום המספרים הטבעיים הוא:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

- טור הנדסי (גיאומטרי):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a\frac{(1-q^n)}{1-q} \quad ; \quad a_n = a \cdot q^{n-1}$$

ובפרט כאשר $0 \leq q < 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a\frac{1}{1-q}$$

Table of Normal Commulative Distribion Function

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

$\phi(Z)$	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995	0.999
z	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090

critical values of the t distribution											
d.f.\q	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1	0.325	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	0.289	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.256	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.255	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
50	0.255	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.254	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	0.254	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	0.254	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	0.254	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
100	0.254	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
inf	0.253	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090