



בחינות

**שם הקורס: מבוא להסתברות**  
**קוד הקורס: 90911**

**הוראות לנבחן:**

- חומר עזר שימושי לבחינה
- 4 דפי נוסחאות,
- מחשבון אישי

**בחינת סמסטר: א'**

**השנה: תשע"ו / 2016**

**מועד ב'**

**תאריך הבחינה:** 17.02.2016

**שעת הבחינה:** 17:00

**משך הבחינה:** 3 שעות

- אין לכתוב בעפרון או בצבע אדום
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי
- ו/או מכשיר מדיה אחר

**השאלון לא ייבדק בתום הבחינה ע"י המרצה**

**מרצים:** ד"ר חנה קלבנר, ד"ר מאיר אזור

**מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:**

יש לפתור את כל השאלות.  
יש להתחיל פתרון כל שאלה בדף חדש!  
יש להסביר, לנמק, ולפרט, את כל הפתרונות בכל אחת מהשאלות!  
יש לדייק בחישובים!  
חישובי הסתברויות יש לבצע בדיוק של ארבע ספרות,  
ואת יתר החישובים בדיוק של שלוש ספרות משמעותיות.

לכל הסעיפים משקל שווה.

## בהצלחה!

**שאלה מס' 1:**

בכד יש 8 כדורים, מהם 2 לבנים. מטילים קובייה הוגנת: אם יצא 1 או 2, מוציאים מהכד 3 כדורים עם החזרה, אם יצא בקובייה מספר גדול שווה 3, מוצאים מהכד 4 כדורים ללא החזרה.

- א. מה ההסתברות שנוציא 2 כדורים לבנים?
- ב. מהי תוחלת מספר הכדורים הלבנים שנוציא?



## שאלה מס' 2:

חברה מעסיקה 60 עובדים. כמות המים המינרליים שצורך עובד ביום עבודה, מתפלגת נורמלית עם ממוצע 2.3 ליטר וסטיית תקן 0.4 ליטר. בכל יום החברה מכינה 142 ליטר מים מינרליים עבור העובדים.

א. מה ההסתברות שכמות המים היומית תספק את צריכת כל העובדים?

(אם יש צורך בהמשך, השתמשו במספר 0.9).

ב. מה ההסתברות שבשבוע עבודה של 5 ימים, יהיה לפחות יום אחד בו כמות המים לא תספק את כל העובדים?

ג. מה ההסתברות שבמשך שנה של 300 ימי עבודה, יהיו לכל היותר 25 ימים בהם כמות המים לא תספק את כל העובדים?

## שאלה מס' 3:

ערכו סקר בין עובדים במפעל. את העובדים סיווגו לפי:

$N$  = עובד שאף פעם לא עישן

$Q$  = עובד שעישן והפסיק לעשן

$S$  = עובד שמעשן

הטבלה הבאה מראה חלק מההסתברויות לקטגוריות השונות, מחולקת לפי נשים (F) וגברים (M).

	N	Q	S	P(gender)
F	0.08		0.2	0.6
M	0.25	0.05		
P(smoke)			0.3	

א. השלימו את הערכים החסרים בטבלה (יש להעתיק את הטבלה למחברת הבחינה).

ב. עובד נבחר באקראי, מה ההסתברות שהוא אינו מעשן?

ג. אם עובד שנבחר הוא אישה, מה ההסתברות שהיא מעשנת?

ד. מה ההסתברות שעובד שנבחר באקראי הוא גבר שמעשן או הפסיק לעשן?

ה. אם ידוע שעובד מעשן, מה ההסתברות שהוא אישה?

## שאלה מס' 4:

נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ רציף  $X$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0.2x + 0.2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

א. חשבו את ערכו של  $a$ , ורשמו את פונקציית הצפיפות של המ"מ  $X$ .

ב. חשבו את התוחלת של  $X$ .

ג. אם ידוע שערכו של  $X$  קטן מ-2.5, מה ההסתברות שערכו גדול מ-1.5?



# פתרון



## פתרון בחינה במבוא להסתברות - מועד ב' - סמסטר א' 2016

### שאלה 1

בכד יש 8 כדורים, מהם 2 לבנים. מטילים קובייה הוגנת: אם יצא 1 או 2, מוציאים מהכד 3 כדורים עם החזרה, אם יצא בקובייה מספר גדול שווה 3, מוצאים מהכד 4 כדורים ללא החזרה.

- א. מה ההסתברות שנוציא 2 כדורים לבנים?  
ב. מהי תוחלת מספר הכדורים הלבנים שנוציא?

### פתרון

א. נגדיר:  $X$  = התוצאה של הקובייה,  $Y$  = מספר הכדורים הלבנים שנוציא

$$k = 1, 2 \text{ עבור } (Y/X = k) \sim B(3, 0.25)$$

$$k = 3, 4, 5, 6 \text{ עבור } (Y/X = k) \sim H(8, 2, 4)$$

$$P(Y=2) = P(Y=2/X \leq 2)P(X \leq 2) + P(Y=2/X \geq 3)P(X \geq 3)$$

$$P(Y=2) = \binom{3}{2} \times 0.25^2 \times 0.75 \times \frac{2}{6} + \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} \times \frac{4}{6} = 0.1897$$

$$E(Y) = E(Y/X \leq 2)P(X \leq 2) + E(Y/X \geq 3)P(X \geq 3) \quad \text{ב.}$$

$$E(Y) = 3 \times 0.25 \times \frac{2}{6} + \frac{4 \times 2}{8} \times \frac{4}{6} = 0.92$$

### שאלה 2

חברה מעסיקה 60 עובדים. כמות המים המינרלים שצורך עובד ביום עבודה, מתפלגת נורמלית עם ממוצע 2.3 ליטר וסטיית תקן 0.4 ליטר. בכל יום החברה מכינה 142 ליטר מים מינרלים עבור העובדים.

א. מה ההסתברות שכמות המים היומית תספק את צריכת כל העובדים?  
(אם יש צורך בהמשך, השתמשו במספר 0.9).

ב. מה ההסתברות שבשבוע עבודה של 5 ימים, יהיה לפחות יום אחד בו כמות המים לא תספק את כל העובדים?

ג. מה ההסתברות שבמשך שנה של 300 ימי עבודה, יהיו לכל היותר 25 ימים בהם כמות המים לא תספק את כל העובדים?

### פתרון

$$X \sim N(2.3, 0.4^2) = \text{כמות מים יומית שצורך עובד}$$

$$\sum_{i=1}^{60} X_i \sim N(138, 9.6) \quad \text{א.}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i \leq 142\right) = \Phi\left(\frac{142-138}{\sqrt{9.6}}\right) = \Phi(1.29) = 0.9015$$

ב.  $Y \sim B(5, 0.1)$  = מספר הימים בשבוע בהם המים לא הספיקו לכל העובדים.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0.9^5 = 0.4095$$



ג.  $Y \sim B(300, 0.1)$  = מספר הימים בשנה בהם המים לא הספיקו לכל העובדים.

$P(Y \leq 25) = ?$  קרוב נורמלי לבינומי:  $Y \sim N(30, 27)$

$$P(Y \leq 25) = \Phi\left(\frac{25 + 0.5 - 30}{\sqrt{27}}\right) = \Phi(-0.87) = 1 - \Phi(0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922$$

### שאלה 3

ערכו סקר בין עובדים. במפעל, את העובדים סיווגו לפי:

$N$  = עובד שאף פעם לא עישן

$Q$  = עובד שעישן והפסיק לעשן

$S$  = עובד שמעשן

הטבלה הבאה מראה חלק מההסתברויות לשלושת הקטגוריות מחולקת לפי נשים (F) וגברים (M).

	N	Q	S	P(gender)
F	0.08		0.2	0.6
M	0.25	0.05		
P(smoke)			0.3	

א. השלימו את הערכים החסרים בטבלה (יש להעתיק את הטבלה למחברת הבחינה).

ב. עובד נבחר באקראי, מה ההסתברות שהוא לא מעשן?

ג. אם עובד שנבחר הוא אישה, מה ההסתברות שהיא מעשנת?

ד. מה ההסתברות שעובד שנבחר באקראי הוא גבר שמעשן או הפסיק לעשן?

ה. אם ידוע שעובד מעשן, מה ההסתברות שהוא אישה?

### פתרון

א.

	Y	N	Q	S	$P_X(x)$
X					
F		0.08	0.32	0.2	0.6
M		0.25	0.05	0.1	0.4
$P_Y(y)$		0.33	0.37	0.3	1

ב.

$$P(N \cup Q) = 0.7$$

$$1 - P(S) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{אפשר גם לחשב:}$$



ג.

$$P(S/F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

ד.

$$P((M \cap S) \cup (M \cap Q)) = 0.05 + 0.1 = 0.15$$

ה.

$$P(F/S) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} = 0.6667$$

## שאלה 4

נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ רציף  $X$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0.2x + 0.2, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 \leq x \end{cases}$$

א. חשבו את ערכו של  $a$ , ורשמו את פונקציית הצפיפות של המ"מ  $X$ .

ב. חשבו את התוחלת של  $X$ .

ג. אם ידוע שערכו של  $X$  קטן מ-2.5, מה ההסתברות שערכו של  $X$  גדול מ-1.5?

## פתרון

א.

$$F(2) = a \times 2^2 = 0.2 \times 2 + 0.2 : \text{היא פונקציה רציפה ולכן}$$

$$4a = 0.6 \Rightarrow a = 0.15$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.3x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0.6, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 \leq x \end{cases}$$

ב.

$$E(X) = \int_0^2 0.3x^2 dx + \int_2^4 0.2x dx = 0.1x^3 \Big|_0^2 + 0.1x^2 \Big|_2^4 = 0.8 + 1.6 - 0.4 = 2$$

ג.

$$P(X > 1.5 / X < 2.5)$$

$$P(X > 1.5 / X < 2.5) = \frac{P(1.5 < X < 2.5)}{P(X < 2.5)} = \frac{F(2.5) - F(1.5)}{F(2.5)} = \frac{0.2 \times 2.5 + 0.2 - 0.15 \times 1.5^2}{0.2 \times 2.5 + 0.2} = 0.5179$$