מרצים : ד"ר דבורה קפלן, ד"ר רוני ביתן, פרופסור יוני סטאנצ'סקו.
מתרגלים : מר עמית בנגיאט, מר ולדימיר גלמן, מר שי כרמון .

מבחן X

<u>שאלה 1</u>: (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו כי לכל $0<a<b$ מתקיים : $e^{b^2}-e^{a^2}<2be^{b^2}(b-a)$.

ב. (10 נק') חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n-3}{n^2+2n+5}\right)^{6n}$.

<u>שאלה 2</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, כך ש- $a_n=\frac{5n+\sqrt{1}}{n^2+1}+\frac{5n+\sqrt{2}}{n^2+2}+....+\frac{5n+\sqrt{n}}{n^2+n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל : $\int\left(\frac{1}{(\tan x-1)(\tan x-2)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$.

<u>שאלה 3</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו כמה פתרונות ממשיים קיימים למשוואה : $\ln\left(x^2+1\right)=\arctan x$.

ב. (10 נק') נתונה פונקציה f בעלת נגזרות עד סדר 3 רציפות ב- $\mathbb{R}$.
ידוע שהפולינום טיילור-מקלורין שלה מסדר שני הוא $T_2(x)=2+4x+8x^2$, ו - $\left|f'''(x)\right|\le 1$ לכל x ממשי.

ב.1) הוכיחו שהנקודה $x_0=0$ היא לא נקודה קריטית וגם לא נקודת פיתול של הפונקציה f^2 .

ב.2) מצאו קירוב של הערך $f\left(\frac{1}{2}\right)$ והעריכו את השגיאה בקירוב שמצאתם .

שאלה 4 : (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$.

א. (10 נק') מצאו תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון מקומי של הפונקציה f בתחום ההגדרה שלה $(0,\infty)$.

ב. (10 נק') האם קיים לפונקציה f מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט בתחום :

ב.1) $(0,\infty)$?

ב.2) $[1,\infty)$?

נמקו היטב את תשובתכם.

שאלה 5 : (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $F(x)=\int_{\pi}^{x}\frac{(\sin t)^2}{t}dt$.

א. (10 נק') הוכיחו ש-F גזירה בכל $x\in(0,\infty)$ ומצאו את הנגזרת שלה.

ב. (10 נק') נגדיר פונקציה חדשה :

$$G(x)=\begin{cases}\frac{F(x)}{x-\pi} & x>\pi\\ 0 & x=\pi\\ \frac{\ln(1+(\pi-x)^2)}{\pi-x} & x<\pi\end{cases}$$

האם הפונקציה G היא רציפה בנקודה $x_0=\pi$?

שאלה 6 : (20 נקודות)

א. (10 נק') נתונה הפונקציה :

$$f(x)=\begin{cases}x^{5x} & (x>0)\\ x+1 & (x\le 0)\end{cases}$$

א.1) הוכיחו שהפונקציה היא רציפה בנקודה $x_0=0$.

א.2) האם היא גזירה בנקודה $x_0=0$?

ב. (10 נק') לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$ העבירו משיק בנקודה $(1, f(1))$.
חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר המשיק וציר ה-x.

בהצלחה!!

זהויות טריגונומטריות:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha\cos\beta=1/2\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$
$\sin\alpha\sin\beta=1/2\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$
$\cos\alpha\cos\beta=1/2\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$
$\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha,\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$
$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$
$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$
$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$
$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

הבינום של Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k;\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,\ 0!=1$$

פונקציות- מבוא

פונקציה זוגית // אי-זוגית - $f(-x)=f(x)$ // $f(-x)=-f(x)$.
פונקציה מחזורית - $f(x+T)=f(x)$.
פונקציה חח"ע - אם לכל $x_1\neq x_2$ בתחום מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$.
פונקציה על - אם התמונה של f שווה לטווח של f .

נגזרות מיידיות:

$(e^x)'=e^x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(a^x)'=a^x\ln a$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$arc\cot'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$
$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$

$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos' x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$\sin' x=\cos x$
$\cos' x=-\sin x$
$\sinh' x=\cosh x$
$\cosh' x=\sinh x$

אינטגרלים מיידים:

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$
$\int(x-a)^m dx=\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}+c,\ \ m\neq-1$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$
$\int\sin x dx=-\cos x+c$
$\int\cos x dx=\sin x+c$
$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c$
$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+c$
$\int\tan x dx=-\ln|\cos x|+c$
$\int\cot x dx=\ln|\sin x|+c$

סדרות והתכנסות $\{a_n\}_{n\geq0}$

סדרה חשבונית: $a_n=a_0+n\cdot d,\ \ S_n=a_0+...+a_n=(a_0+a_n)\cdot\frac{n+1}{2}$

סדרה הנדסית: $a_n=a_0\cdot q^n;\ S_n=a_0+...+a_n=a_0\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\ if\ \ q\neq1$

סדרה מונוטונית:

1. **סדרה עולה** - קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים: $a_{n+1}-a_n\geq0$.
2. **סדרה יורדת** - קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים: $a_{n+1}-a_n\leq0$.
3. **עולה ממש // יורדת ממש** - קיום התנאים הנ"ל ללא ה"שווה" בהתאמה.

הגדרת הגבול של סדרה: מספר ממשי L הוא הגבול של סדרה $\{a_n\}_{n\geq1}$
אם לכל $\varepsilon>0$ קיים n_ε כך שלכל $n\geq n_\varepsilon$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$.

התכנסות של סדרה ומונוטוניות:

1. כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת .
2. סדרה מונוטונית ולא חסומה שואפת ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

משפטי התכנסות של סדרה:

1. סדרה לא יכולה להתכנס ל- 2 גבולות שונים.
2. כל סדרה מתכנסת היא חסומה (אך לא להפך).
3. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות אינסופיות ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim_{n\to\infty}a_n=B$:
   א. $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B,\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$.
   ב. אם $B\neq0$ אז $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n/\lim_{n\to\infty}b_n=A/B$.
4. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ו- $\{b_n\}$ סדרה חסומה, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$.
5. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.
6. אם $A>0$ אז $\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=A^B$.
7. $\sqrt[n]{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ $-1<q<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}q^n=0;\ \ a>1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0;$
8. גבולו של **Euler** : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

משפט הסנדוויץ': אם $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$ ומתקיים $b_n\leq a_n\leq c_n$
עבור n מספיק גדול, אז הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים ו - $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

תת סדרה: $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}=\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

1. אם הסדרה המקורית מתכנסת אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול .
2. אם לסדרה קיימות לפחות 2 תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אז הסדרה המקורית מתבדרת.

גבול חלקי= גבול של תת-סדרה.

משפט בולזנו-ויישטרס: (Bolzano-Weierstrass)
אם סדרה חסומה, אז יש לה תת סדרה מתכנסת.

קריטריון קושי (Cauchy) להתכנסות סדרה:
סדרה אינסופית $\{a_n\}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים n_ε כך שעבור $n\geq n_\varepsilon$
ו- p טבעי כלשהו מתקיים: $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

גבולות פונקציות

הגדרת גבול פונקציה לפי Heine:
L הוא גבול של פונקציה F בנקודה a אם לכל סדרה $x_n\neq a$ שמתכנסת ל- a ,
אז מתקיים $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$.

הגדרת גבול פונקציה לפי Cauchy: הפונקציה f בעלת גבול L בנק' a
אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך ש: $|f(x)-L|<\varepsilon$,לכל $0<|x-a|<\delta$.

משפט:
$\lim_{x\to a}\alpha\cdot f(x)=\alpha\cdot L_f\ ;\ \lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=L_f\pm L_g$
$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=L_f\cdot L_g\ ;\ \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{L_f}{L_g}\ ,L_g\neq0$

גבול חד צדדי: $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x),\quad \lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)$

משפט:
לפונקציה יש גבול בנקודה, אם ורק אם קיימים 2 גבולות חד צדדיים בנק', והם שווים.

חישובי גבולות: $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad,\ \lim_{y\to0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=e\ ,\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

כלל הסנדוויץ': $\left.\begin{cases}f(x)\leq g(x)\leq h(x)\\ \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=C\end{cases}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to a}g(x)=C$

גבול של הרכבה: אם $\lim_{x\to x_0}g(x)=a$ והפונקציה f רציפה בנקודה a ,
אז $\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0}g(x))=f(a)$.

רציפות פונקציות

<u>הגדרה</u>: תהי פונקציה מוגדרת בסביבת נקודה x_0 כולל הנקודה עצמה. אומרים שהפונקציה רציפה בנקודה x_0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים את $|x - x_0| < \delta$ יתקיים גם $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>משפט:</u>

1. אם f, g רציפות אז $f(x) \pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad f(x) / g(x)$ רציפות גם כן. (לגבי המנה, מניחים ש- $g(x) \neq 0$).
2. אם שתי פונקציות רציפות בנקודה מתאימות אז ההרכבה שלהן גם כן רציפה.
3. כל פונקציה אלאמנטרית רציפה. בפרט, כל פולינום או מנת פולינומים רציפים (בתחום ההגדרה) סינוס, קוסינוס ופונקצית המעריכית רציפים לכל x.
4. אם פונקציה f "חח"ע" ו-"על" ורציפה בנקודה x_0 אז הפונקציה הופכית g גם רציפה בנקודה y_0, כאשר $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow g(y_0) = x_0$.

<u>משפט:</u> אם f פונקציה רציפה אז $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

<u>אי רציפות בפונקציות:</u>

אי רציפות סליקה:

א. ערך הפונק' בנקודה שונה מערך הגבול של הפונק' בנקודה.

ב. הפונק' לא מוגדרת בנקודה זו.

אי רציפות מסוג ראשון: לפונקציה יש 2 גבולות חד צדדיים אך הם שונים זה מזה.

אי רציפות מסוג שני: <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים או שווה ל- $\pm\infty$.

<u>תכונות של פונקציות רציפות:</u>

משפט ערך הביניים של Cauchy לגבי רציפות פונקציות:

אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ו- γ נמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחת c בקטע $[a,b]$ כך ש- $f(c) = \gamma$.

<u>מסקנה:</u> אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ מקיימת $f(a)\cdot f(b) < 0$, אז קיים $c \in [a,b]$ כך ש- $f(c) = 0$. (ז"א הגרף של f חותך את ציר ה- x.)

משפט Weierstrass

1. אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא גם חסומה בקטע זה.
2. אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא בעלת נקודות קיצון מוחלטות בקטע זה.

גזירת פונקציות

הפונקציה גזירה בנק' x אם הגבול $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ סופי.

<u>משוואת משיק</u> : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

<u>משוואת נורמל</u> : $x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0$.

<u>דיפרנציאל:</u> $df = f'(x_0)dx$.

<u>קירוב לינארי ודיפרנציאל:</u>

$$f(x) = f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df = f(x_0) + f'(x_0)\cdot dx = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

<u>משפט:</u> אם הפונקציה גזירה בנקודה אז היא גם רציפה בנקודה זו (לא להפך).

<u>אריתמטיקה של נגזרות, כלל Leibnitz , נגזרת מסדר גבוה:</u>

$$(f \pm g)' = f' \pm g';\quad (fg)' = f'g + fg';\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x),\quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>נגזרת של פונקציה הפוכה</u>

f היא פונקציה הפוכה של g ו- $g'(y) \neq 0$. אז $y' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$.

<u>משפט Fermat:</u>

אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של הפונקציה f ואם f גם גזירה בנקודה זו, אז הנגזרת של f שווה אפס בנק' זו, בתנאי ש- f מוגדרת בקטע פתוח שמכיל את x_0.

<u>משפט Rolle:</u>

אם $f(a) = f(b)$ עבור פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b), אז קיימת נקודה c בתחום (a,b) שבה הנגזרת מתאפסת: $f'(c) = 0$.

<u>הוכחת שורש אחד ויחיד לפונקציה:</u>

מוצאים נקודה שבה הפונקציה חיובית, ונקודה שבה הפונקציה שלילית, ואז מוכיחים שהפונקציה מונוטונית יורדת / עולה ממש.

<u>משפט Lagrange (משפט הערך הממוצע):</u>

אם פונקקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), אז קיימת לפחות נקודה אחת $c \in [a,b]$ כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

<u>הגדרה פונקציה קמורה בקטע J (convex)</u>

אם לכל $x, x_0 \in J$ מתקיים $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

<u>הגדרה פונקציה קעורה בקטע J (concave)</u>

אם אם לכל $x, x_0 \in J$ מתקיים $f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

<u>משפט:</u>

אם $f'(x) > 0$ // $f'(x) < 0$ בקטע אז הפונקציה עולה // יורדת ממש בקטע זה.

אם $f''(x) > 0$ // $f''(x) < 0$ בקטע פתוח אז הפונקציה קמורה // קעורה בקטע זה.

<u>משפט:</u>

אם $f'(a) = 0$ ו- $f''(x) > 0$ בקטע פתוח סביב a, אז a נק' מינימום מקומי.

אם $f'(a) = 0$ ו- $f''(x) < 0$ בקטע פתוח סביב a, אז a נק' מקסימום מקומי.

<u>חקירת פונקציה</u> $y = f(x)$ כאשר $x \in D_f$, D_f = תחום ההגדרה.

1. $x = a$ אסימפטוטה אנכית אם <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד צדדיים שווה ל- $\pm\infty$: $\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$ ו/או $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$.
2. אסימפטוטות משופעות ב- $\pm\infty$:
$$y = mx + n,\quad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},\quad n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right)$$
3. תחום הגדרה של הנגזרת, תחומי עליה // ירידה+ נקודות קיצון .
4. תחום הגדרה של הנגזרת השנייה, תחומי קמירות // קעירות+נק' פיתול.
5. גרף (וחיתוך עם הצירים).

<u>כלל לופיטל L'Hopital</u> במצב לא מוגדר $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

אם $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ אז $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

<u>פולינום Taylor</u> $f(x) \cong T_{n,a}(x),\quad f(x) = T_{n,a}(x) + R_n(x)$

$$T_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

שארית Lagrange: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$, c בין a ל- x.

<u>דוגמאות:</u>

$$\frac{1}{1-x} \cong T_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n,\qquad e^x \cong T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x \cong T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x \cong T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\ln(1+x) \cong T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

$$\arctan x \cong T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$(1+x)^m \cong T_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!} x^k,$$

$$\arcsin x \cong T_{2n+1}(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

אינטגרלים

סכומי Riemann של פונקציה $y=f(x)$, כאשר $x\in[a,b]$. נגדיר

$$\begin{cases} S_n = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2+...+f(x_n^*)\Delta x_n,\\ \Delta x_k=(x_k-x_{k-1});\quad x_{k-1}\le x_k^*\le x_k;\ a=x_0,\ b=x_n\end{cases}$$

אם f אינטגרבילית Riemann ב- $[a,b]$ ואם $\|\Delta\|=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

אז $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int_a^b f(x)dx$.

1. כל פונקציה $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ אינטגרבילית לפי Riemann היא פונקציה חסומה.
2. **משפט** אם פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ אז היא אינטגרביליתRiemann ב- $[a,b]$.
3. **משפט** אם פונקציה חסומה ורציפה למקוטעין ב- $[a,b]$ (מס' סופי של נקודות אי רציפות) , אז הפונקציה אינטגרבילית.

תכונות אינטגרל מסוים

1. $\int_a^b\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.
2. $f(x)\le g(x)\ \Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$
3. $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\le M(b-a) \Leftarrow m\le f(x)\le M$.
4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.
5. אם f פונקציה זוגית, אז $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

   אם f פונקציה אי-זוגית, אז $\int_{-a}^a f(x)dx=0$.
6. אדיטיביות האינטגרל: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.
7. קיימת נקודה c כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$.

משפט Newton-Leibnitz: תהי $y=f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$.

1. אם $S(x)=\int_a^x f(t)dt$, אז $S'(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,b]$.

   (כל פונקציה רציפה בעלת פונקציה קדומה).
2. אם F פונקציה קדומה של f, ז"א אם $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,b]$,

   אז $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

שימושים של אינטגרלים

1. שטח: $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$
2. אורך עקומה: $L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
3. נפח סיבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

אינטגרציה בחלקים: $\int u\cdot v'dx=\ u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$

החלפת משתנים: אם $x=x(t)$, אז $\int f\big(x(t)\big)x'(t)dt=\int f(x)dx$

הצבה טריגונומטרית

$$u=\tan\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

חזקה אי-זוגית: $\int\sin^n x\cos^3 xdx=\int\sin^n x(1-\sin^2 x)\cos xdx$

רק חזקות זוגיות: שימוש בנוסחאות זווית כפולה פעמיים כדי להוריד חזקות:

$\sin^2 x=\frac{1-\cos2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos2x}{2}$.

פונקציה רציונאלית (פולינום/פולינום) דוגמא:

$$\frac{x^7}{x^2(x-4)(3x+1)(x^2+7)}=$$

$$=(mx+n)+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-4}+\frac{D}{3x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+7}$$

השלמת מכנה לריבוע: ... $\int\frac{dx}{x^2+x+3}=\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+11/4}=...$

אינטגרל לא אמיתי סוג ראשון:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx\ ,\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx+\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

אינטגרל לא אמיתי סוג שני:

a נקודה שבסביבתה הפונקציה f לא חסומה: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

b נקודה שבסביבתה הפונקציה f לא חסומה: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

קריטריון ההשוואה: אם $0\le|f(x)|\le g(x)$ בקטע (a,b) ואם

$\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

דוגמאות:

$\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.

$\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $0<p<1$.

נוסחאות שימושיות $|a+b|\le|a|+|b|,\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})\cdot$$

לוגריתמים : יהי $0<a\ne1$, $y=f(x)=\log_a x$, $D_f: x>0$

$a^{\log_a x}=x,\ \log_a a^x=x\ ;\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},0<b\ne1;\ \ln x=\log_e x$

$\log_a xy=\log_a x+\log_a y\ ,\ \log_a x^k=k\log_a x,\ \log_a 1=0,$

אם a>1 // 0<a<1 , אז פונקצית הלוגריתם עולה ממש // יורדת ממש.

$$\lim_{x\to0+}\ln x=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}\ln x=+\infty$$