



מס' מבחן

מבחן סוף הקורס במבוא להסתברות (90911)

שעה: 17:00
מתרגלים:

תאריך הבחינה: 20.06.2016

מועד: X
מרצים:

גב' רבקה יעקובוב

ד"ר אהרון גיטניק,
ד"ר חנה קלבנר,
ד"ר מאיר אזור.

משך הקצין: 180 דקות

הוראות למבחן:

משך המבחן: 180 דקות.

יש לענות על כל השאלות.

יש להתחיל פתרון של כל שאלה בדף חדש.

יש לנמק היטב את הפתרון. תשובה לא מנומקת לא תזכה במלוא הניקוד.

אין לכתוב בעפרון או בצבע אדום.

אין להשתמש במחשב אישי או נייד. אין להשתמש בטלפון סלולארי או סמארטפון.

אין להעביר חומר בין הנבחנים.

מותר השימוש ב 3 דפי נוסחאות ובטבלת התפלגות נורמלית

בהצלחה!

שאלה מס' 1

מכונת צילום במשרד מתקלקלת לעתים, ומספר הפעמים שהמכונה מתקלקלת מתפלג פואסונית עם תוחלת של 4 קלקולים בשבוע. בכל פעם שהמכונה מתקלקלת, מגיע טכנאי לתקן את המכונה. תיקון המכונה על ידי הטכנאי כרוך בתשלום לפי הטבלה הבאה:

מספר תיקונים בשבוע	סך כל עלות התיקונים לשבוע
0	0
1 עד 2	450 ש"ח
3 או יותר	700 ש"ח

- מהי ההסתברות שעלות התיקונים בשבוע תהיה 450 ₪?
- מהי ההסתברות שבמשך שבועיים רצופים יהיה בסך הכל תיקון אחד בלבד?
- מהי תוחלת עלות תיקוני המכונה בשבוע?
- מהי סטיית התקן של עלות תיקוני המכונה בשבוע?
- בשנה יש 52 שבועות: מה ההסתברות שסך העלות לתיקון המכונה במשך שנה יהיה לכל היותר 35,000 ₪?
- מה ההסתברות שבמשך השנה היו לכל היותר 20 שבועות בהן המכונה התקלקלה לא יותר מפעמיים?

שאלה מס' 2

- מטילים שתי קוביות הוגנות 7 פעמים. נגדיר: W = מספר הפעמים בהם סכום התוצאות קטן מ-4.
- אם $W \geq 2$ מטילים קובייה סימטרית 4 פעמים וסופרים את מספר הפעמים בהם התקבל המספר 1.
- אם $W < 2$ מטילים קובייה סימטרית 6 פעמים וסופרים את מספר הפעמים בהם התקבל המספר 1.
- א. חשבו את ההסתברות: $P(W \geq 2)$. (אם יש צורך בהמשך השתמשו בהסתברות 0.11).
- ב. מהי ההסתברות שהמספר 1 יתקבל בדיוק 3 פעמים?
- ג. מהי תוחלת מספר הפעמים בהם יתקבל המספר 1?
- ד. מהי שונות מספר הפעמים בהם יתקבל המספר 1?

שאלה מס' 3

- בכד 4 כדורים ממוספרים 1, 2, 3, 4. מוציאים מהכד שני כדורים ללא החזרה. נגדיר:
- X = המספר על הכדור הראשון שהוצא.
- Y = המספר הגדול מבין שני המספרים שהוצאו.
- א. בנו את טבלת ההתפלגות המשותפת של X ו- Y . האם המשתנים X , Y הם בלתי תלויים?
- ב. אם ידוע שהמספר על הכדור הראשון הוא 2, מה ההסתברות שהמספר הגדול מבין השניים יהיה לפחות 3?
- ג. נגדיר: $W = X + Y$. רשמו את פונקציית ההסתברות של W (ההסתברויות $P(W = k)$ לכל k אפשרי) וחשבו את התוחלת של W .

פתרון

פתרון נ"ל 381 א'
20.06.2016

פתרון - מבחן סוף הקורס במבוא להסתברות (90911)

שאלה מס' 1

מכונת צילום במשרד מתקלקלת לעתים, ומספר הפעמים שהמכונה מתקלקלת מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 קלקולים בשבוע. בכל פעם שהמכונה מתקלקלת, מגיע טכנאי לתקן את המכונה. תיקון המכונה על ידי הטכנאי כרוך בתשלום לפי הטבלה הבאה:

מספר תיקונים בשבוע	סך כל עלות התיקונים לשבוע
0	0
1 עד 2	450 ש"ח
3 או יותר	700 ש"ח

- מהי ההסתברות שעלות התיקונים בשבוע תהיה 450 ₪?
- מהי ההסתברות שבמשך שבועיים רצופים יהיה בסך הכל תיקון אחד בלבד?
- מהי תוחלת עלות תיקוני המכונה בשבוע?
- מהי סטיית התקן של עלות תיקוני המכונה בשבוע?
- בשנה יש 52 שבועות: מה ההסתברות שסך העלות לתיקון המכונה במשך שנה יהיה לכל היותר 35,000 ₪?
- מה ההסתברות שבמשך השנה היו לכל היותר 20 שבועות בהן המכונה התקלקלה לא יותר מפעמיים?

פתרון

א.

$X =$ מספר הפעמים שהמכונה מתקלקלת בשבוע: $X \sim \text{Pois}(4)$

$$P(X=1) + P(X=2) = 4e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} = 0.2198$$

ב.

$Y =$ מספר הפעמים שהמכונה מתקלקלת בשבועיים: $Y \sim \text{Pois}(2 \times 4)$

$$P(Y=1) = \frac{8^1}{1!}e^{-8} = 0.0027$$

ג.

עלות התיקונים לשבוע - C	P(C)
0	0.0183
450 ש"ח	0.2198
700 ש"ח	0.7619

$$E(C) = 632.24$$

ד.

$$V(C) = 18,113.09$$

$$\sigma(C) = 134.58$$

ה.

$$\sum_{i=1}^{52} C_i \sim N(52 \times 632.24, 52 \times 18,113.09)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{52} C_i \leq 35,000\right) = \Phi\left(\frac{35,000 - 32,876.42}{970.51}\right) = \Phi(2.19) = 0.9857$$

ו.

M = מספר השבועות בהן המכונה התקלקלה לא יותר מפעמיים

$$M \sim B(52, \alpha)$$

$$\alpha = P(Y \leq 2) = 0.2381$$

$$M \sim B(52, 0.2381)$$

$$np = 52 \times 0.2381 = 12.3812 > 5$$

$$nq = 39.62 > 5$$

קרוב נורמלי לבינומי: $M \sim N(12.3812, 9.43)$

$$P(M \leq 20) = \Phi\left(\frac{20 + 0.5 - 12.3812}{\sqrt{9.43}}\right) = \Phi(2.64) = 0.9959$$

שאלה מס' 2

מטילים שתי קוביות הוגנות 7 פעמים. נגדיר: W = מספר הפעמים בהם סכום התוצאות קטן מ-4.

אם $W \geq 2$ מטילים קובייה סימטרית 4 פעמים וסופרים את מספר הפעמים בהם התקבל המספר 1.

אם $W < 2$ מטילים קובייה סימטרית 6 פעמים וסופרים את מספר הפעמים בהם התקבל המספר 1.

א. חשבו את ההסתברות: $P(W \geq 2)$. (אם יש צורך בהמשך השתמשו בהסתברות 0.11).

ב. מהי ההסתברות שהמספר 1 יתקבל בדיוק 3 פעמים?

ג. מהי תוחלת מספר הפעמים בהם יתקבל המספר 1?

ד. מהי שונות מספר הפעמים בהם יתקבל המספר 1?

פתרון

א.

$$W \sim B(7, \alpha)$$

$$\alpha = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$W \sim B\left(7, \frac{1}{12}\right)$$

$$P(W \geq 2) = 1 - P(W \leq 1) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^7 - \binom{7}{1} \times \left(\frac{1}{12}\right) \times \left(\frac{11}{12}\right)^6 = 0.11$$

ב.

נגדיר: $Y =$ מספר הפעמים בהם התקבל המספר 1.

$$\begin{aligned} P(Y=3) &= P(Y=3/W \geq 2)P(W \geq 2) + P(Y=3/W < 2)P(W < 2) = \\ &= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) \times 0.11 + \binom{6}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) \times 0.89 \end{aligned}$$

ג.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(Y/W \geq 2)P(W \geq 2) + E(Y/W < 2)P(W < 2) = \\ &= 4 \times \frac{1}{6} \times 0.11 + 6 \times \frac{1}{6} \times 0.89 = 0.96 \end{aligned}$$

ד.

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E(Y^2/W \geq 2)P(W \geq 2) + E(Y^2/W < 2)P(W < 2) = \\ &= \left(4 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \left(4 \times \frac{1}{6}\right)^2\right) \times 0.11 + \left(6 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \left(6 \times \frac{1}{6}\right)^2\right) \times 0.89 = 1.74 \\ V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = 1.74 - 0.96^2 = 0.82 \end{aligned}$$

שאלה מס' 3

בכד 4 כדורים ממוספרים 1, 2, 3, 4. מוציאים מהכד שני כדורים ללא החזרה. נגדיר:

$X =$ המספר על הכדור הראשון שהוצא.

$Y =$ המספר הגדול מבין שני המספרים שהוצאו.

א. בנו את טבלת ההתפלגות המשותפת של X ו- Y . האם המשתנים X, Y הם בלתי תלויים?

ב. אם ידוע שהמספר על הכדור הראשון הוא 2, מה ההסתברות שהמספר הגדול מבין השניים יהיה לפחות 3?

ג. נגדיר: $W = X + Y$. רשמו את פונקציית ההסתברות של W (ההסתברויות $P(W = k)$ לכל k אפשרי) וחשבו את התוחלת של W .

פתרון

א.

X	Y	2	3	4	$P_Y(y)$
1		1/12	1/12	1/12	3/12
2		1/12	1/12	1/12	3/12
3		0	2/12	1/12	3/12
4		0	0	3/12	3/12
$P_X(x)$		2/12	4/12	7/12	1

בטבלה יש הסתברות 0 ולכן המשתנים תלויים.

ב.

$$P(Y \geq 3 / X = 2) = P(Y = 3 / X = 2) + P(Y = 4 / X = 2) = \frac{1/12}{3/12} + \frac{1/12}{3/12} = \frac{2}{3}$$

ג.

$W = X + Y$	$P(W)$
3	1/12
4	2/12
5	2/12
6	3/12
7	1/12
8	3/12

$$E(W) = \frac{1}{12}(3 + 8 + 10 + 18 + 7 + 24) = 5.83$$