

1. כמה שורות יש בטבלת אמת של פסוק המורכב מ n פסוקים יסודיים? ראינו שכאשר $n = 1$ בטבלת האמת יש 2 שורות (כמו למשל טבלת האמת של קשר השלילה), כאשר $n = 2$ בטבלת האמת יש 4 שורות (כמו למשל בטבלת האמת של כל יתר הקשרים שראינו). הסבירו את תשובתכם.

$$n \text{ variables} = 2^n \text{ lines}$$

הסבר: לכל פסוק יסודי יש שני אפשרויות - T/F. לכל פסוק נוסף אפשרות נוספת, נכפיל אז מספר השורות ב-2. 2 כי פסוק אחד הוא T/F והשורות הן T/F והפסוק האחר T/F, ופסוק אחד הוא T/F והשורות הן T/F.

2.

(א) כיתבו פסוק כך שערך האמת שהוא מקבל הוא תמיד T. פסוק כזה נקרא טאוטולוגיה.

(ב) כיתבו פסוק כך שערך האמת שהוא מקבל הוא תמיד F. פסוק כזה נקרא סתירה.

$$(1) (P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$$

$$(2) (P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

(1)

האמת:
 $P \wedge (\neg P)$
 תמיד F.

P	Q	$\neg Q$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge \neg Q)$	$(P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F

(2)

3. הצרינו את המשפטים הבאים (כלומר, כיתבו פסוקים לוגיים מתאימים)

(א) נבוא לקרקס רק אם יופיעו פילים ורודים ולא יופיעו ג'ירפות.

(ב) אם האקווריום ריק, החתול לא רעב ואין יותר דגי זהב.

א) $A :=$ נבוא לקרקס

$B :=$ יופיעו פילים ורודים

$C :=$ יופיעו ג'ירפות

$$(B \wedge \neg C) \rightarrow A$$

ב) $A :=$ האקווריום ריק

$B :=$ החתול רעב

$C :=$ יש דגי זהב

$$A \rightarrow (\neg B \wedge \neg C)$$

4. כיתבו משפטים אשר יתאימו לפסוקים הבאים:

$$\neg A \rightarrow B \quad (\text{א})$$

$$A \wedge B \wedge C \rightarrow D \quad (\text{ב})$$

$$\neg A \vee B \rightarrow C \quad (\text{ג})$$

א. אם לא ירצו לשם, אלא לים

ב. אם אדם מוכן, ואם יהיו מליון, ואם אהיה עיני, אזר אליו

ג. אם יהיו מליון, ואם לא אהיה עיני, אזר בקמפוס

5. קיבעו את ערך האמת של כל אחד מהפסוקים הבאים עבור ערכי האמת

$$P = T, Q = T, R = F, S = T$$

$$F \quad \neg(P \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee R) \quad (א)$$

$$T \quad S \rightarrow ((Q \wedge (\neg R)) \wedge (P \rightarrow ((R \vee Q) \wedge S))) \quad (ב)$$

$$(c) \quad 1) \neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q) \rightarrow F \wedge F \rightarrow F$$

$$2) ((\neg P) \vee R) \rightarrow F \vee F \rightarrow F$$

$$3) \neg(P \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee R)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ F & \wedge & F \equiv F \end{array}$$

$$(2) \quad T \rightarrow ((T \wedge (T)) \wedge (T \rightarrow ((F \vee T) \wedge T)))$$

$$\rightarrow T \rightarrow (T) \wedge (T \rightarrow ((T) \wedge T))$$

$$\rightarrow T \rightarrow T \wedge (T \rightarrow T)$$

$$\rightarrow (T \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow T)$$

$$\rightarrow T \wedge T \equiv T$$

6. על סמך טבלאות האמת שלמדנו קיבעו אילו מהטענות הבאות נכונות: (הסימון \equiv משמעותו שקילות טאוטולוגית כפי שנלמד בשיעור הבא. כרגע, התייחסו למשמעות סימון זה כאל שיווין בטבלאות האמת.)

$$(P \rightarrow \neg R) \vee (\neg Q \rightarrow R) \equiv (P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R \quad (א)$$

$$\neg((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((P \wedge R) \rightarrow Q)) \equiv \neg(P \rightarrow Q) \quad (ב)$$

$$(\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \vee S \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \rightarrow S \quad (ג)$$

1c. $P \rightarrow \neg R \stackrel{\text{זכירה}}{=} (\neg P \vee \neg R)$ 93 טענה:

$\neg Q \rightarrow R \stackrel{\text{זכירה}}{=} \neg(\neg Q) \vee R = Q \vee R$

$(\neg P) \vee (\neg R) \vee (Q \vee R) = \neg P \vee \underbrace{(\neg R) \vee R} \vee Q \equiv T \vee Q \stackrel{\text{טענה 93}}{=} T$

93 טענה:

$(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R \equiv F$

טענה הינחה כאלה:

1) $(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$ $p = T, \neg Q = T, Q = F$

2) $(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R \rightarrow R = F$ (אזין סתירה)

$(T \vee \neg F) \rightarrow \neg F$ נגזר בצורה המקורית של 93 טענה:

$(T \vee T) \rightarrow T$; $T \rightarrow T$

אזין סתירה

כפי 'מין' אין אטומוספירה

הטענה היא נכונה

6. על סמך טבלאות האמת שלמדנו קיבעו אילו מהטענות הבאות נכונות: (הסימון \equiv משמעותו שקילות טאוטולוגית כפי שנלמד בשיעור הבא. כרגע, התייחסו למשמעות סימון זה כאל שיווין בטבלאות האמת).

$$\begin{aligned} (P \rightarrow \neg R) \vee (\neg Q \rightarrow R) &\equiv (P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R \quad (א) \\ \neg((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((P \wedge R) \rightarrow Q)) &\equiv \neg(P \rightarrow Q) \quad (ב) \\ (\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \vee S &\equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \rightarrow S \quad (ג) \end{aligned}$$

1) $(P \rightarrow (Q \vee R)) \stackrel{א}{=} (\neg P \vee (Q \vee R)) = (\neg P \vee Q \vee R) \quad (1)$

2) $((P \wedge R) \rightarrow Q) \stackrel{א}{=} (\neg(P \wedge R) \vee Q) \stackrel{א}{=} ((\neg P \vee \neg R) \vee Q) = (\neg P \vee \neg R \vee Q) \quad (2)$

1+2 = $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee Q)$

3) $(P \rightarrow Q) \stackrel{א}{=} \neg P \vee Q$

ע"פ: $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee Q) \equiv \neg P \vee Q \quad (3)$

$(\neg P \vee Q)$	R	$\neg R$	(1)	(2)	(3)
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

נכון! ✓

6. על סמך טבלאות האמת שלמדנו קיבעו אילו מהטענות הבאות נכונות: (הסימון \equiv משמעותו שקילות טאוטולוגית כפי שנלמד בשיעור הבא. כרגע, התייחסו למשמעות סימון זה כאל שיווין בטבלאות האמת).

$$\begin{aligned} (P \rightarrow \neg R) \vee (\neg Q \rightarrow R) &\equiv (P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R \quad (א) \\ \neg((P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((P \wedge R) \rightarrow Q)) &\equiv \neg(P \rightarrow Q) \quad (ב) \\ (\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \vee S &\equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \rightarrow S \quad (ג) \end{aligned}$$

$$2) \textcircled{1} (\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \stackrel{f}{=} (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)$$

$$\textcircled{1+2} ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee S = \text{רצף 23}$$

$$\textcircled{3} \neg((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \vee S$$

= דפירה

$$\stackrel{D.M}{=} (\neg(P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \wedge R))$$

$$\stackrel{D.M}{=} [(\neg P) \vee (\neg Q)] \wedge [(\neg P) \vee (\neg R)] \vee S = \text{רצף 24}$$

הם שקולים

1. שקילות וקשרים העזרו בשקילות טאוטולוגיות שראינו על מנת למצוא פסוקים שקולים לפסוקים הבאים.
 הפסוקים שתמצאו יכולים להכיל אך ורק את הקשרים \neg , \wedge :

$$P \rightarrow Q \text{ (א)}$$

$$P \vee Q \text{ (ב)}$$

$$P \oplus Q \text{ (ג)}$$

$$(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R \text{ (ד)}$$

$$\text{ז) } P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

$$\text{ח) } P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q) \equiv \neg \neg(P \vee Q) \equiv P \vee Q$$

$$\text{ט) } P \oplus Q \equiv \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$$

$$\stackrel{\text{D.M}}{\equiv} (\neg(P \wedge Q)) \wedge (\neg(\neg P \wedge \neg Q))$$

$$\text{י) } (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R \stackrel{\text{ז.י.י}}{\equiv} (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow R \stackrel{\text{D.M}}{\equiv} \neg(P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$\stackrel{\text{ז.י.י}}{\equiv} \neg(\neg(P \wedge Q)) \vee R \equiv R \vee \neg(\neg(P \wedge Q)) \stackrel{\text{D.M}}{\equiv} \neg R \wedge \neg(\neg(P \wedge Q))$$

2. הוכיחו בעזרת שקילות לוגיות שהפסוק הבא הוא סתירה

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\equiv (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q) \stackrel{\text{D.M}}{\equiv} (P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$$

3. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה. אפשר לכתוב הוכחה (ישירה או בשלילה) להשתמש בזהויות שראינו או דרך (לא מומלץ) טבלאות אמת.

$$e: \underbrace{((P \vee Q) \vee R)}_{(1)} \rightarrow \underbrace{(\neg P \rightarrow ((Q \vee R) \wedge (\neg P)))}_P$$

$$r \equiv F \xrightarrow{\text{זי}} e \equiv T$$

גרסה דרך טבלה:

לכן נניח $e \equiv F$ הרי $r \equiv F$, $False$, ולכן $r' \equiv T$

אם נניח $e \equiv T$, סימן $e \equiv T$ הרי $r \equiv F$, וזהו $e \equiv T$ (לא נאמא).

$$(P \vee Q) \vee R \equiv T ; P=F, Q=F, R=F \xrightarrow{\text{זי}} \text{מתקבל סתירה}$$

נסיגה לטבלה דרך טבלה:

$$p \equiv T \rightarrow e \equiv T$$

לכן נניח $e \equiv F$

$$\underbrace{(1)}_{(2)} \quad \underbrace{(3)}_{(4)} \quad \wedge \quad \underbrace{(5)}_{(6)} \\ (\neg P \rightarrow ((Q \vee R) \wedge (\neg P))) \equiv F$$

$$(F \rightarrow \dots) \wedge F \equiv T$$

$$\begin{matrix} p \equiv T \\ \downarrow \\ \neg p \equiv F \end{matrix}$$

נציב:

סתירה

הטעות היא שטבלה

4. נתון כי הפסוק $\neg(\neg A \rightarrow B)$ הוא אמיתי (כלומר בעל ערך אמת T). מצאו את ערך האמת של הפסוק

$$((\neg A) \oplus B) \rightarrow (A \vee B)$$

$$\neg(\neg A \rightarrow B) = T \rightarrow (\neg A \rightarrow B) = F$$

$$\downarrow$$

$$\neg A = T, B = F$$

$$\downarrow$$

$$A = F$$

$$((\neg F \oplus F) \rightarrow (F \vee F)) = ((T \oplus F) \rightarrow F)$$

$$= T \rightarrow F = F$$

5. הוכיחו את השקילות הטאוטולוגית הבאה

$$e: \underbrace{(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)}_1 \equiv \underbrace{(P \rightarrow (R \wedge S))}_2 \wedge \underbrace{(Q \rightarrow (R \wedge S))}_3$$

$$(1) \quad \begin{matrix} \text{זרימה} \\ \equiv \end{matrix} (\neg(P \vee Q)) \vee (R \wedge S) \stackrel{D.M}{=} ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S))$$

$$(2) \quad \begin{matrix} \text{זרימה} \\ \equiv \end{matrix} (\neg P \vee (R \wedge S))$$

$$(3) \quad \begin{matrix} \text{זרימה} \\ \equiv \end{matrix} (\neg Q \vee (R \wedge S))$$

$$((\neg P \wedge \neg Q) \vee (R \wedge S)) \equiv (\neg P \vee (R \wedge S)) \wedge (\neg Q \vee (R \wedge S))$$

כך זה נראה בעיני:

$$R \wedge S = T; (\neg P) \wedge (\neg Q) = T/F \rightarrow e; T = T \quad (\neg P) \wedge (\neg Q) \text{ תמיד}$$

$$R \wedge S = F; (\neg P) \wedge (\neg Q) = T \rightarrow e; T = T$$

$$(\neg P) \wedge (\neg Q) = F \rightarrow e; F = F$$