ספר הפרק – ע"ע, ו"ע, מ"ע ולכסון מטריצות ואופרטורים

הגדרות ומשפטים

ערכים, וקטורים ומרחבים עצמיים של אופרטורים ליניאריים:

- ערך עצמי (ע"ע): יהי אופרטור ליניארי $T: V \to V$. הסקלר $\lambda \in F$ נקרא ערך עצמי (ע"ע) של האופרטור T, אם קיים וקטור $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, כך שמתקיים:

$$T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

- וקטור עצמי (ו"ע): יהי אופרטור ליניארי $T: V \to V$. יהי $\lambda \in F$ ע"ע של האופרטור T.

כל וקטור $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, המקיים $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ נקרא וקטור עצמי של T השייך לע"ע λ.

- מרחב עצמי (מ"ע): המרחב העצמי של ע"ע λ הוא כלל הוקטורים הפותרים את המשוואה $T(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$. כלומר, מרחב עצמי של ע"ע λ הוא הקבוצה המכילה את כל הו"ע של λ אך גם את וקטור האפס.

דוגמה: אם נתון אופרטור $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיים:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

להעתקה הנ"ל יש ע"ע $\lambda = 3$ עם ו"ע $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

ערכים, וקטורים ומרחבים עצמיים של מטריצות ריבועיות:

- ערך עצמי (ע"ע): תהא $A \in M_{n\times n}(F)$. הסקלר $\lambda \in F$ נקרא ערך עצמי (ע"ע) של המטריצה A, אם קיים וקטור $\boldsymbol{v} \in F^n$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, כך שמתקיים:

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

- וקטור עצמי (ו"ע): תהא $A \in M_{n\times n}(F)$. יהי $\lambda \in F$ ע"ע של המטריצה A. כל וקטור $\boldsymbol{v} \in F^n$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, המקיים $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ נקרא וקטור **עצמי** של A השייך לע"ע λ.

- מרחב עצמי (מ"ע): המרחב העצמי של ע"ע λ הוא כלל הוקטורים הפותרים את המשוואה $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$. כלומר, מרחב עצמי של ע"ע λ הוא הקבוצה המכילה את כל הו"ע של λ אך גם את וקטור האפס.

דוגמה: אם נתונה מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת:

$$A\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\6\end{pmatrix} = 1.5 \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$$

למטריצה A יש ע"ע 1.5 עם ו"ע $\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$.

פולינום אופייני (פ"א):

פולינום אופייני של מטריצה: תהא מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$. הפולינום האופייני של A הינו:

$$F_A[\lambda] = \det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_n - A|$$

תכונות חשובות:

1. מעלת הפולינום האופייני שווה לסדר המטריצה.

   לדוגמה, אם המטריצה היא מסדר 3×3, אז מעלת הפ"א שלה היא 3.

2. שורשי הפ"א הם הע"ע של המטריצה (במידה והם שייכים לשדה F).

פולינום אופייני של אופרטור לינארי: יהי אופרטור לינארי $T: V \to V$, ויהי C בסיס כלשהו של V. תהא $[T]_C = [T]_C^C$ המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס C.

הפולינום האופייני של האופרטור T הינו:

$$F_T[\lambda] = |\lambda I - [T]_C|$$

מציאת ערכים עצמיים של מטריצה:

בהינתן $A \in M_{n\times n}(F)$ נמצא ע"ע של המטריצה A לפי המשפט הבא (הוכחה בוידאו):

λ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ מתקיים $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

כלומר, כדי למצוא ע"ע של מטריצה נשווה את הפולינום האופייני שלה לאפס. השורשים של הפולינום האופייני הם בדיוק בערכים העצמיים של המטריצה.

סדר פעולות למציאת ע"ע ומ"ע:

תהא מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$. כדי למצוא את הערכים העצמיים של המטריצה והמרחבים העצמיים המתאימים, נעבוד על פי סדר הפעולות הבא:

1. נרשום את המטריצה $\lambda I_n - A$ או $A - \lambda I_n$ (מה שיותר נח, זה לא משנה לשם מציאת ע"ע ומ"ע).
2. נחשב ערכים עצמיים: $|\lambda I_n - A| = 0$ או $|A - \lambda I_n| = 0$ (מה שיותר נח, זה לא משנה לשם מציאת ע"ע ומ"ע).
3. מרחבים עצמיים: עבור כל אחד מהע"ע λ_i, נחשב בסיס למרחב העצמי שלו באופן הבא:

   a) נציב את λ_i שמצאנו בביטוי $\lambda I_n - A$ (או $A - \lambda I_n$): $\quad \lambda_i I_n - A$

   b) המרחב העצמי של λ_i הוא $N(\lambda_i I_n - A)$ (או $N(A-\lambda_i I_n)$).
   בסיס למ"ע של λ_i הוא בסיס של $N(\lambda_i I_n - A)$.

הערה: כאשר אנחנו רוצים לחשב ע"ע ומ"ע – זה לא משנה אם נשתמש ב- $A - \lambda I$ או ב-$\lambda I - A$.
אבל, אם אנחנו מתבקשים לחשב **פולינום אופייני** – עלינו לחשב את $|\lambda I - A|$.

מטריצות דומות:

מטריצות $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(F)$ כך שמתקיים $A=PBP^{-1}$.

דוגמה: המטריצות $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$ ו- $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ הן דומות, משום שקיימת מטריצה הפיכה $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ($P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$) כך שמתקיים $A=PBP^{-1}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

תכונות:

1. אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות, אז הפ"א שלהן שווה, כלומר $F_A[\lambda]=F_B[\lambda]$ (ההפך לא בהכרח נכון).
2. אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות, אז ל-A ול-B יש את אותם ערכים עצמיים, אך לא בהכרח אותם ו"ע.
3. אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות, אז $|A|=|B|$.
4. אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות, אז $trace(A)=trace(B)$.
5. אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות, אז $Rank(A)=Rank(B)$.
6. אם $A,B\in M_{n\times n}(F)$ הן דומות אז A ו-B הן מטריצות מייצגות של אותה העתקה לינארית, בבסיסים שונים (זה אם ורק אם).

לכסון מטריצות:

- מטריצה לכסינה: תהא $A\in M_{n\times n}(F)$. נגיד כי A לכסינה, כלומר ניתנת ללכסון, אם קיימת מטריצה אלכסונית $D\in M_{n\times n}(F)$ ומטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(F)$ (מטריצה מלכסנת) כך שמתקיים:

$$A=PDP^{-1}\leftrightarrow D=P^{-1}AP$$

דרך אחרת להגדיר מטריצה לכסינה: מטריצה A היא מטריצה **לכסינה**, אם היא דומה למטריצה אלכסונית D, כי אז $A=PDP^{-1}$.

- ריבוי (ריבוי) אלגברי של ע"ע: מספר הופעתיו של הערך העצמי כשורש של הפולינום האופייני.

דוגמה: אם הפ"א של המטריצה A הוא:

$$F_A[\lambda]=(\lambda-1)^3(\lambda-2)^2\lambda^1$$

אז למטריצה A יש ע"ע:

i. $\lambda_1=1$ עם ר"א 3.

ii. $\lambda_2=2$ עם ר"א 2.

iii. $\lambda_3=0$ עם ר"א 1.

- ריבוי (ריבוי) גיאומטרי של ע"ע: המימד של המרחב העצמי. כלומר,

$$\text{ר"ג}(\lambda_i)=\dim\left(N(\lambda_i I_n-A)\right).$$

- תכונה ("למה צריך את הלכסון הזה?!"): לכל $m\in\mathbb{N}$:

$$A^m=PD^mP^{-1}$$

- תזכורת: העלאה בחזקה של מטריצה אלכסונית היא קלה מאוד לחישוב ושווה להעלאה בחזקה של כל אחד מאיברי האלכסון של המטריצה. דוגמה:

$$D=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ D^m=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}4^m&0&0\\0&3^m&0\\0&0&2^m\end{pmatrix}$$

- משפט (לכסון): מטריצה $A\in M_{n\times n}(F)$ היא לכסינה $\Leftrightarrow$ עבור כל אחד מהע"ע שלה מתקיים ר"א=ר"ג וסכום הר"א של כל הע"ע שלה הוא n (או באופן שקול הפ"א שלה מתפרק לגורמים ליניאריים).

- משפט (לכסון): מטריצה $A\in M_{n\times n}(F)$ היא לכסינה $\Leftrightarrow$ קיים בסיס של F^n המורכב כולו מו"ע של A.

דוגמה: מטריצה $A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ היא לכסינה $\Leftrightarrow$ קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ שכל וקטוריו הם ו"ע של A.

מציאת מטריצה אלכסונית D ומלכסנת P של מטריצה לכסינה:

- כאשר A לכסינה, נמצא את המטריצה D ו-P באופן הבא:
  - המטריצה D היא מטריצה אלכסונית שעל האלכסון שלה נשים כל אחד מהערכים העצמיים של A, מספר פעמים השווה לריבוי האלגברי של הע"ע.
  - המטריצה P היא מטריצה הפיכה שעמודותיה הן הו"ע המהווים את וקטורי הבסיס של המ"ע של הע"ע, בסדר המתאים לסדר העמודות בהן מופיעים הע"ע במטריצה D.

דוגמה: נניח שמצאנו ע"ע ומ"ע של מטריצה מסוימת $A \in M_{3\times3}(F)$ ומצאנו כי הע"ע והמ"ע המתאימים:

- $\lambda_1 = 1$ עם ר"א 2, ר"ג 2, $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\} = B_{\lambda_1\ \text{ע"מ}}$.
- $\lambda_2 = 2$ עם ר"א 1, ר"ג 1, $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = B_{\lambda_2\ \text{ע"מ}}$.

- במצב כזה A לכסינה (כי הר"א=ר"ג עבור כל אחד מהע"ע וסכום הר"א של על הע"ע של A הוא כסדר המטריצה - 3), בחירה אפשרית של D, P:

$$D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

משפטים, תכונות, טיפים וכיף (יש עוד בטריקים וטיפים):

- תכונה: לכל ע"ע של מטריצה מתקיים ר"א $\leq$ ר"ג ≤ 1.
- תכונה: הפולינום האופייני של מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ הוא פולינום ממעלה n.
  לדוגמה, אם $A \in M_{3\times 3}(F)$ אז מעלת הפ"א שלה היא 3.
- תכונה: אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ אז $n =$ (סכום הר"א של כל הע"ע שלה).
  אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ אז $n \geq$ (סכום הר"א של כל הע"ע שלה).

1. תכונה: אם למטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ יש n ע"ע שונים אז היא לכסינה.
2. משפט הפיכות: מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ היא הפיכה $\Leftrightarrow$ **אין** לה ע"ע אפס (הוכחנו בוידאו)
3. טיפ: המשפט האחרון מאוד שימושי. אם אתם יודעים שמטריצה היא איננה הפיכה, מידית ניתן לקבוע שיש לה ע"ע 0, וההפך. זכרו זאת.
4. תכונה: אם A מטריצה משולשית (עליונה, תחתונה או אלכסונית) – הע"ע הם בדיוק הערכים על האלכסון שלה.
5. משפט: עקבת המטריצה היא **סכום** הערכים העצמיים, כלומר: $tr(A) =$ סכום הע"ע (יש להתחשב בריבוי האלגברי של הע"ע).
   דוגמה: אם למטריצה A יש שני ע"ע:
   - $\lambda_1 = 2$, ר"א 2.
   - $\lambda_2 = 3$, ר"א 1.

   אז $tr(A) = 2 + 2 + 3 = 7$.
   - *הערה חשובה:* משפט זה לא מתקיים במקרה בו המטריצה היא מעל $\mathbb{R}$ והפולינום האופייני שלה לא מתפרק לגורמים לינאריים (כלומר במקרה שבו לפ"א של המטריצה יש שורשים מרוכבים בעוד שהמטריצה מעל $\mathbb{R}$. זה לא קורה הרבה, ובכל זאת חשוב לדייק ולציין זאת). במידה והמטריצה מעל $\mathbb{C}$ - המשפט מתקיים תמיד.
6. משפט: הדטרמיננטה של מטריצה היא **כפל** הערכים העצמיים, כלומר $det(A) =$ כפל הע"ע (יש להתחשב בריבוי האלגברי של הע"ע).
   דוגמה: אם למטריצה A יש שני ע"ע:
   - $\lambda_1 = 2$, ר"א 2.
   - $\lambda_2 = 3$, ר"א 1.

   אז $det(A) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.
   - *הערה חשובה:* משפט זה לא מתקיים במקרה בו המטריצה היא מעל $\mathbb{R}$ והפולינום האופייני שלה לא מתפרק לגורמים לינאריים (כלומר במקרה שבו לפ"א של המטריצה יש שורשים מרוכבים בעוד שהמטריצה מעל $\mathbb{R}$. זה לא קורה הרבה, ובכל זאת חשוב לדייק ולציין זאת). במידה והמטריצה מעל $\mathbb{C}$ - המשפט מתקיים תמיד.

7. תכונה: כל מטריצה אלכסונית A היא לכסינה. פשוט נבחר $D = A, P = I$ ואז $A = PDP^{-1}$.
8. תכונה: קבוצה המכילה ו"ע של ע"ע שונים זה מזה – היא קבוצה בת"ל.
למשל, אם $\boldsymbol{v_1}$ הוא ו"ע של ע"ע λ_1 ו-$\boldsymbol{v_2}$ הוא ו"ע של ע"ע λ_2, כאשר $\lambda_1 \neq \lambda_2$, אז הקבוצה $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ היא קבוצה בת"ל.

תכונות חשובות הקשורות ל- $dim[N(A - \lambda \cdot I)]$:

תהא $A \in M_{n\times n}(F)$, אז:

- $\lambda \in F$ ע"ע של $A \Leftrightarrow dim[N(A - \lambda I)] > 0$

דוגמאות:
- אם נתון כי $\dim[N(A - 3I)] > 0$, נסיק מיד כי $\lambda = 3$ הוא ע"ע של A.
- אם נתון כי $\dim[N(A - 5I)] = 0$, נסיק מיד כי $\lambda = 5$ הוא **<u>לא</u>** ע"ע של A.

- אם $\dim[N(A - \lambda I)] = m$ כאשר $m > 0$, אז λ הוא ע"ע של A עם ר"ג ששווה ל-m.

דוגמאות:
- אם נתון כי $\dim[N(A - 3I)] = 2$, נסיק מיד כי $\lambda = 3$ הוא ע"ע של A עם ר"ג 2.
- אם נתון כי $\dim[N(A + 2I)] = 5$, נסיק מיד כי $\lambda = -2$ הוא ע"ע של A עם ר"ג 5.

- לכל $\lambda \in F$ מתקיים: $Rank(A - \lambda \cdot I) + \dim[N(A - \lambda \cdot I)] = n$.
דוגמה לשימוש: תהא $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $Rank(A - 7I) = 1$. אז לפי משפט זה נובע כי $\dim[N(A - 7I)] = 3$. לפי 2, ניתן להסיק כי למטריצה A יש ע"ע $\lambda = 7$ עם ר"ג 3.

הערה: נזכיר כי אם $\lambda \in F$ הוא ע"ע של A, אז המ"ע של λ מוגדר להיות $N(A - \lambda \cdot I)$ והר"ג של λ מוגדר להיות $\dim\,[N(A - \lambda \cdot I)]$ (המימד של המ"ע של λ).

מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומעל $\mathbb{C}$:

ייתכן כי מטריצה מסוימת היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אך לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

עם זאת, אם מטריצה היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$ היא בהכרח לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

דוגמה:

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. הפ"א של מטריצה זו הוא $F_A[\lambda]=\lambda^2+1$ ולכן השורשים שלו הם $\pm i$.
כאשר המטריצה היא מעל $\mathbb{C}$ המטריצה לכסינה (מטריצה 2×2, 2 ע"ע שונים זה מזה)
אך כאשר היא מעל $\mathbb{R}$ כלל אין לה ערכים עצמיים ולכן מידית איננה לכסינה.

תכונה חשובה ושימושית (הוכחנו באינדוקציה באחת משאלות הפרק):

תהא $A\in M_{n\times n}(F)$ ויהי $\lambda\in F$ ע"ע של A עם ו"ע $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$.

אז לכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים: $A^m\cdot\boldsymbol{v}\overset{**}{=}\lambda^m\cdot\boldsymbol{v}$.
כלומר, מתקיים ש- λ^m הוא ע"ע של A^m עם ו"ע $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$.

דוגמה:
תהא $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ויהי $\lambda=5$ ע"ע של A עם ו"ע $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.
אז מתקיים:
$$A^{16}\cdot\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\overset{**}{=}5^{16}\cdot\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$
(בדוגמה זאת בחרנו $m=16$, אך זה נכון לכל $m\in\mathbb{N}$ שניקח).

מטריצה אורתוגונלית:

תהא $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. נגיד כי P היא מטריצה א"ג אם מתקיים $P\cdot P^T=I_n$, כלומר $P^{-1}=P^T$.

דוגמה: מטריצת היחידה היא מטריצה א"ג, משום שהיא מקיימת $I^T=I^{-1}$.

מטריצה לכסינה אורתוגונלית:

מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא לכסינה א"ג אם היא לכסינה וקיימת לה מטריצה מלכסנת $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שהיא מטריצה א"ג.

כלומר, מטריצה A היא לכסינה א"ג אם קיימת מטריצה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ המקיימת $P^{-1}=P^T$ ומטריצה $D\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ אלכסונית כך שמתקיים:
$$A=PDP^{-1}=PDP^T$$

- משפט: תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. המטריצה A היא לכסינה א"ג $\Leftrightarrow$ המטריצה A סימטרית ($A^T = A$).

כלומר, אם יש לנו מטריצה ממשית שהיא סימטרית – ניתן לקבוע מידית שהיא לכסינה (א"ג).

- תכונה (דורשת ידע במכפלה פנימית ואורתוגונליות של וקטורים): תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ לכסינה **א"ג**. יהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ שני ע"ע **שונים** של A, אז כל ו"ע של λ_1 הוא א"ג לכל ו"ע של λ_2.

כלומר, אם A לכסינה א"ג ומתקיים ש- $\boldsymbol{v_1}$ הוא ו"ע של λ_1 ו-$\boldsymbol{v_2}$ הוא ו"ע של λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), אז $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \rangle = 0$.

סדר פעולות ללכסון א"ג של מטריצה A (כלומר מציאת P, מטריצה מלכסנת, שהיא א"ג):

(דורש ידע במכפלה פנימית, בסיס אורתונורמלי ותהליך גראם-שמידט)

תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית (ולכן לכסינה א"ג). על מנת ללכסן אותה א"ג, כלומר, להציג אותה כ-$A = PDP^{-1} = PDP^T$:

1. נמצא את הע"ע של המטריצה A.
2. נמצא בסיסים א"נ למרחבים העצמיים של הע"ע של המטריצה A (נמצא בסיסים רגילים ונפעיל ג"ש במידת הצורך לקבלת בסיס א"נ).
3. המטריצה P היא המטריצה שעמודותיה הן בדיוק וקטורי הבסיסים של המ"ע, והמטריצה P תהיה א"ג.

לאחר שלבים אלו, נקבל $A = PDP^T$ כאשר $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה אלכסונית ו-P מטריצה א"ג.

הערה: משפט קיילי-המילטון לא נלמד בכל מחלקה ובכל מוסד.
על כן, מומלץ לבדוק האם נושא זה בסילבוס שלכם **לפני** שאתם קוראים את המשפט הנ"ל.

משפט קיילי-המילטון:

תהא מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$, ויהי הפולינום האופייני של A:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\cdot\lambda^2 + a_1\cdot\lambda + a_0$$

משפט קיילי-המילטון קובע כי $P_A(A) = 0_{n\times n}$. כלומר, מתקיים:

$$p_A(A) = A^n + a_{n-1}\cdot A^{n-1} + \cdots + a_2\cdot A^2 + a_1\cdot A + a_0\cdot I_n = 0_{\mathrm{n}\times n}$$

במילים אחרות, אם ניקח את הפ"א של המטריצה A ונציב את המטריצה A במקום λ (פולינום מטריצות), נקבל ש- $p_A(A) = 0_{n\times n}$.

דוגמה:

תהא מטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

פתרנו שאלה עם אותה המטריצה, ומצאנו שהע"ע שלה הם:

- $\lambda_1 = 2$, ר"א=2.
- $\lambda_2 = 6$, ר"א=1.

על כן, הפ"א של A הוא $p_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-6) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24$.
לפי משפט קיילי המילטון, מובטח לנו שמתקיים $p_A(A) = 0_{3\times 3}$, כלומר:

$$p_A(A) = (A-2I)^2(A-6I) = A^3 - 10A^2 + 28A - 24I$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}^3 - 10\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}^2 + 28\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} - 24\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{\text{קיילי–המילטון}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

שימו לב לפני המשך קריאה וצפיה בוידאו:

המשפטים וההגדרות שיצוינו החל מעכשיו קשורים לנושא של לכסון אופרטורים לינאריים. חומר זה רלוונטי רק לחלק מהקורסים והמחלקות. לפני הקריאה והצפיה בסרטונים הרלוונטים לנושא זה (הסברים ושאלות), **אנא וודאו כי נושא זה נמצא בסילבוס של הקורס שלכם** ושאתם נבחנים על חומר זה בבחינה. לעיתים מרצה הקורס מחליט/ה לוותר על נושא זה וללמד ולבחון את הסטודנטים בקורס רק על לכסון מטריצות (זה משתנה בין מרצה למרצה ולעיתים אף בין סמסטר לסמסטר).

אופרטור לינארי לכסין:

יהא $T: V \to V$ אופרטור לינארי. נגיד כי T הוא אופרטור לכסין (ניתן ללכסון) אם קיים בסיס B של V, כך שהמטריצה $[T]_B$ היא מטריצה אלכסונית. לבסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן.

"ללכסן אופרטור" משמעו מציאת בסיס מלכסן של האופרטור ומציאת $[T]_B$ האלכסונית.

משפט (לכסון): אופרטור $T: V \to V$ הוא לכסין $\Leftrightarrow$ המטריצה $[T]_C$ לכסינה עבור כל בסיס C של V.

משפט (לכסון): אופרטור $T: V \to V$ הוא לכסין $\Leftrightarrow$ קיים בסיס של V המורכב מו"ע של T.

משפט (לכסון): אופרטור $T: V \to V$ $(\dim(V) = n)$ הוא לכסין $\Leftrightarrow$ לכל ע"ע שלו מתקיים ר"א=ר"ג ובנוסף סכום הר"א של כל הע"ע הוא n.

משפט: יהי מ"ו V מעל $\mathbb{R}$, $\dim(V) = n$, אז סכום הר"א של כל הע"ע של האופרטור $T: V \to V$ הוא לכל היותר n (דומה למה שראינו במטריצה $(M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

משפט: יהי מ"ו V מעל $\mathbb{C}$, $\dim(V) = n$, אז סכום הר"א של כל הע"ע של האופרטור $T: V \to V$ הוא בדיוק n (דומה למה שראינו במטריצה $(M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

לכסון אופרטורים הפועלים על מרחב F^n:

יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי, כאשר $V = F^n$. כדי למצוא ע"ע ומ"ע של אופרטור $T: V \to V$ (כאשר $V = F^n$), נחשב את $[T]_E$ ונמצא את הע"ע והמ"ע שלה (E-בסיס סטנדרטי של V). הע"ע והמ"ע של $[T]_E$ הם בדיוק הע"ע והמ"ע של האופרטור $T: V \to V$.

משפט (ע"ע): $\lambda \in F$ הוא ע"ע של $T: V \to V \Leftrightarrow \lambda \in F$ הוא ע"ע של $[T]_C = [T]_C^C$ לפי איזשהו בסיס C של V.

משפט (ו"ע): $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v}$ הוא ו"ע של ע"ע $\lambda \in F$ של $T \Leftrightarrow \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v}$ הוא ו"ע של ע"ע $\lambda \in F$ של $[T]_E^E$ (E – **הבסיס הסטנדרטי** של V).
שימו לב כי משפט זה נכון רק כאשר האופרטור עובד על מרחב F^n (ולא מרחב פולינומים או מטריצות), וכאשר אנחנו לוקחים את $[T]_C$ כאשר $\mathrm{C} = \mathrm{E}$, כלומר בסיס סטנדרטי של V. אחרת – המשפט משתנה ומסתבך במעט (נראה זאת במקרה שבו $V \neq F^n$).

סדר פעולות לבדיקה האם אופרטור העובד על $\boldsymbol{V = F^n}$ הוא לכסין, ולכסונו במידה והוא לכסין (שימו לב כי אם $V \neq F^n$ סדר פעולות כבר לא נכון):

1. נמצא מטריצה מייצגת של T לפי בסיס סטנדרטי של V שנסמנו ב-E: $[T]_E$.
2. נמצא את הע"ע ובסיסים למ"ע של $[T]_E$. הע"ע והמ"ע האלו הם בדיוק הע"ע והמ"ע של האופרטור T (ואותם ר"א ור"ג).
3. נבדוק האם $[T]_E$ מטריצה לכסינה. $[T]_E$ מטריצה לכסינה $\Leftrightarrow$ T אופרטור לכסין.
4. במידה ו-T אופרטור לכסין, בסיס מלכסן B (בסיס של V) הוא בסיס המכיל בדיוק את הוקטורים העצמיים המהווים את הבסיסים למ"ע של הע"ע של האופרטור, ו-$[T]_B$ היא מטריצה אלכסונית שעל אלכסונה הערכים העצמיים של T, בסדר המתאים לוקטורי הבסיס.

דוגמה להמחשה: נניח ש-$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי, ומצאנו ע"ע ובסיסים למ"ע של $[T]_E \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, או באופן שקול של T:

- $\lambda_1 = 1$, ר"א 2, ר"ג 2. $B_{\lambda_1} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.
- $\lambda_2 = 5$, ר"א 1, ר"ג 1. $B_{\lambda_2} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

במצב כזה האופרטור לכסין (סכום הר"א שווה למימד של $\mathbb{R}^3$ ומתקיים ר"א=ר"ג עבור כל אחד מהע"ע של T). על כן:

- בסיס מלכסן של T: $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.
- המטריצה $[T]_B$: $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

<u>לכסון אופרטורים הפועלים על מרחב שאיננו F^n (פולינומים/מטריצות):</u>

יהי $T: V\to V$ אופרטור לינארי (V לאו דווקא שווה ל-F^n), אז:

<u>משפט (ע"ע)</u>: $\lambda\in F$ הוא ע"ע של $T: V\to V \Leftrightarrow \lambda\in F$ הוא ע"ע של $[T]_C^C=[T]_C$ לפי איזשהו בסיס C של V (בדר"כ נבחר $C=E$).

<u>משפט (ו"ע)</u>: $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ הוא ו"ע של ע"ע $\lambda\in F$ של $T \Leftrightarrow [\boldsymbol{v}]_C\neq\boldsymbol{0}$ הוא ו"ע של ע"ע $\lambda\in F$ של $[T]_C$ (בדר"כ נבחר $C=E$).
כלומר, כדי למצוא ו"ע של הע"ע של האופרטור T, נמצא ו"ע של $[T]_C$ והו"ע האלו שמצאנו שווים **לוקטורי הקוארדינטות** של הוקטורים העצמיים של האופרטור T.

(את המשפט הזה הוכחנו וגם הסברנו כמה וכמה פעמים בוידאו, בליווי של מספר דוגמאות, כיוון שמדובר במשפט מבלבל).

<u>סדר פעולות לבדיקה האם אופרטור העובד על $V\neq F^n$ הוא לכסין, ולכסונו במידה והוא לכסין:</u>

1. נמצא מטריצה מייצגת של T לפי בסיס סטנדרטי של V שנסמנו ב-E: $[T]_E$.
2. נמצא את הע"ע ובסיסים למ"ע של $[T]_E$. הע"ע של $[T]_E$ הם בדיוק הע"ע של האופרטור T (ואותם ר"א ור"ג), הו"ע של $[T]_E$ שווים לוקטורי הקוארדינטות של הו"ע של T ($\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ הוא ו"ע של $T \Leftrightarrow [\boldsymbol{v}]_E\neq\boldsymbol{0}$ הוא ו"ע של $[T]_E$).
3. נבדוק האם $[T]_E$ מטריצה לכסינה. $[T]_E$ מטריצה לכסינה $\Leftrightarrow T$ אופרטור לכסין (או שנשתמש באחד ממשפטי הלכסון שלמדנו).
4. במידה ו-T אופרטור לכסין, בסיס מלכסן B הוא בסיס המכיל בדיוק את הוקטורים העצמיים המהווים את הבסיסים למ"ע של הע"ע של האופרטור T, ו-$[T]_B$ היא

מטריצה אלכסונית שעל אלכסונה הערכים העצמיים של T, בסדר המתאים לוקטורי הבסיס.

דוגמה להמחשה (ראינו דוגמה נוספת בוידאו, דוגמה של לכסון אופרטור העובד על מרחב המטריצות): נניח ש ש-$T: \mathbb{C}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{C}_{\leq 2}[x]$ אופרטור לינארי, ומצאנו ע"ע ובסיסים למ"ע של $[T]_E$ (כאשר $E = E_{\mathbb{C}_{\leq 2}[x]} = \{x^2, \text{x}, 1\}$):

- $\lambda_1 = 1$, ר"א 2, ר"ג 2. $B_{\lambda_1} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.
- $\lambda_2 = 5$, ר"א 1, ר"ג 1. $B_{\lambda_2} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

אז הע"ע והמ"ע של האופרטור (פירוט מלא לתהליך ההמרה בוידאו):

- $\lambda_1 = 1$, ר"א 2, ר"ג 2. $B_{\lambda_1} = \{\boldsymbol{p_1} = (x^2 + x + 1), \boldsymbol{p_2} = (x^2 + x)\}$.
- $\lambda_2 = 5$, ר"א 1, ר"ג 1. $B_{\lambda_2} = \{\boldsymbol{p_3} = (x^2)\}$.

במקרה כזה T אופרטור לכסין (סכום הר"א של כל הע"ע הוא 3, כמימד המרחב $\mathbb{C}_{\leq 2}[x]$, ועבור כל אחד מהע"ע של T מתקיים ר"א=ר"ג), ואם כך:

- בסיס מלכסן של T: $B = \{\boldsymbol{p_1} = (x^2 + x + 1), \boldsymbol{p_2} = (x^2 + x), \boldsymbol{p_3} = (x^2)\}$.
- המטריצה $[T]_B$: $[T]_B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

טריקים, טיפים משפטים נוספים וטעויות נפוצות

- אם מצאתם ע"ע שר"א שלו הוא 1, מידית מתקיים שר"ג גם הוא 1 (כי אז $1 \leq$ ר"ג ≤ 1).

- אם אתם יודעים שמטריצה היא איננה הפיכה, מידית ניתן לקבוע שיש לה ע"ע 0, וההפך. זכרו זאת. יש הרבה שאלות שמתבססות על העובדה הזאת, ופתרנו מספר רב של שאלות כאלו.

- בדיקת שפיות חשובה: אחרי שמצאתם ע"ע של מטריצה A ובסיסים למרחבים העצמיים המתאימים, ניתן לוודא שעשיתם עבודה טובה באופן הבא: אם $\boldsymbol{v_1}$ הוא ו"ע של λ_1 אז בהכרח מתקיים:

$$A\boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \boldsymbol{v_1}$$

לכן, נניח ומצאתם שהוקטורים $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ מהווים יחד בסיס למ"ע של הע"ע λ_1, ודאו כי מתקיים:

$$A\boldsymbol{v_1} = \lambda_1 \boldsymbol{v_1}$$

$$A\boldsymbol{v_2} = \lambda_1 \boldsymbol{v_2}$$

- טעות נפוצה: אם התבקשתם למצוא ע"ע של מטריצה A, אסור לכם לדרג אותה לפני שאתם מתחילים את השלבים שלמדנו. דוגמה להמחשה:
נניח שנתונה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. הע"ע שלה הם 2 ו-3. אם תדרגו את A לצורה קאנונית ותמצאו ע"ע של המטריצה המתקבלת לאחר דירוג - תקבלו:
$A \xrightarrow{\cdots} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, כלומר מטריצה שהע"ע שלה הוא 1 עם ר"א=2.

- הטענה הבאה **לא** נכונה: "במטריצה ממשית כל שני ו"ע של ע"ע שונים הם א"ג אחד לשני". זה נכון כאשר המטריצה ממשית וסימטרית (לכסינה א"ג).

- חידוד בשל טעות נפוצה: שאלה שחוזרת על עצמה באמריקאיות בפרט ובמבחנים בכלל, שימו לב - **אין** קורלציה בין היותה של מטריצה לכסינה/לא לכסינה ובין היותה של המטריצה הפיכה/לא הפיכה.

- דוגמה למטריצה לכסינה והפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- דוגמה למטריצה לכסינה ולא הפיכה: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- דוגמה למטריצה לא לכסינה והפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- דוגמה למטריצה לא לכסינה ולא הפיכה: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

❖ מטריצה (או אופרטור לינארי) לכסינה מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$: יתכנו שאלות שבהן תישאלו האם מטריצה (או אופרטור לינארי מסוים) היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$ והאם היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$. כששואלים אתכם האם מטריצה היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$ הכוונה היא שאנחנו בשדה המרוכבים ולכן למטריצה יכולים להיות ע"ע מרוכבים.
אם מטריצה היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$ היא בהכרח תהיה גם לכסינה מעל $\mathbb{C}$.
עם זאת, ייתכן שמטריצה היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אך לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

לדוגמה, מטריצה $A \in M_{2\times 2}$ שהפ"א שלה הוא $F_A[\lambda] = \lambda^2 + 1$. אם אנחנו מעל $\mathbb{C}$ יש לה שני ע"ע $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ ולכן לכסינה (מטריצה 2×2 עם 2 ע"ע שונים זה מזה היא לכסינה), אך אם אנחנו מעל $\mathbb{R}$ למטריצה אין ע"ע בכלל ולכן איננה לכסינה.

❖ מידי פעם מופיעות שאלות הקשורות לנושא של ע"ע, בסגנון הבא:
"תהא $A = \begin{pmatrix} \text{משהו} & \cdots & \text{משהו} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{משהו} & \cdots & \text{משהו} \end{pmatrix}$. האם $(A - \alpha I)$ היא מטריצה הפיכה?"
בדרך כלל, בשאלות מסוג זה עלינו לבדוק האם α הוא ע"ע של A. ואז:
- אם α הוא ע"ע של A – המטריצה $(A - \alpha I)$ איננה הפיכה (כי אז $|A - \alpha I| = 0$).
- אם α הוא **לא** ע"ע של A – המטריצה $(A - \alpha I)$ הפיכה (כי אז $|A - \alpha I| \neq 0$).

❖ תהא מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$, אז מתקיים (הוכחנו את כל הטענות הללו בוידאו, בשאלת הוכיחו/הפריכו):
- אם A הפיכה ו-$\lambda \in F$ הוא ע"ע של A, אז λ^{-1} הוא ע"ע של A^{-1}.
- $\lambda \in F$ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ $\lambda \in F$ הוא ע"ע של A^T.
- אם סכום כל איברי עמודה ב-A שווה ח- $\alpha \in F$, אז $\lambda = \alpha$ ע"ע של A.

- אם סכום כל איברי שורה ב-A שווה ל- $\alpha \in F$, אז $\lambda = \alpha$ ע"ע של A. בנוסף, במקרה כזה הוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in F^n$ הוא ו"ע של α.

❖ טיפ: הדבר הנכון לעשות כשיש לכם שאלה בה אתם מתבקשים לחשב **מטריצה בחזקה גבוהה כפול וקטור** (כמו למשל $A^{2000} \cdot \begin{pmatrix}8\\1\\8\end{pmatrix}$), זה לנסות ולבדוק האם הוקטור הזה הוא וקטור עצמי (או צ"ל של ו"ע) של ע"ע של המטריצה. אם כן, יש להשתמש בנוסחה מהנקודה הבאה לצורך החישוב. ראינו ופתרנו שאלות כאלו בוידאו.

❖ תהא $A \in M_{n\times n}(F)$. אם $\lambda \in F$ הוא ע"ע של A עם ו"ע $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, אז לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים ש- λ^m הוא ע"ע של A^m עם אותו ו"ע $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$. כלומר, מתקיים

$$A^m \cdot \boldsymbol{v} = \lambda^m \cdot \boldsymbol{v}$$

(את התכונה הנ"ל הוכחנו באינדוקציה באחת משאלות הפרק)

<u>הטיפים והמשפטים הבאים מתייחסים לנושא של לכסון אופרטורים ליניארים:</u>

❖ יהא $I: V \to V$ אופרטור הזהות. המטריצה המייצגת של I לפי כל בסיס B של V שווה למטריצת היחידה (הוכחה בוידאו). כלומר:

$$[I]_B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

❖ לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים: $[T^m]_B = ([T]_B)^m$.

❖ יהי אופרטור ליניארי $T: V \to V$ מעל F. אם $\lambda \in F$ הוא ע"ע של T עם ו"ע $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, אז לכל $m \in \mathbb{N}$:

$$T^m(\boldsymbol{v}) = \lambda^m \cdot \boldsymbol{v}$$

כלומר, λ^m הוא ע"ע של האופרטור T^m, **עם ו"ע $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.**

שאלות ותשובות סופיות

שאלות

תת פרק 'ע"ע, ו"ע, מ"ע ולכסון מטריצות':

שאלה 1:

מצאו את כל הע"ע של המטריצה A מעל $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 22 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

מצאו את כל הע"ע של המטריצה A מעל $\mathbb{R}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

שאלה 3:

מצאו את כל הע"ע של המטריצה A, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

א. מעל $\mathbb{C}$.

ב. מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 4:

עבור המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$, מצאו:

א. ערכים עצמיים.

ב. בסיס למרחב העצמי של כ"א מהערכים העצמיים.

שאלה 5:

עבור המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, מצאו:

א. ערכים עצמיים.

ב. בסיס למרחב העצמי של כ"א מהערכים העצמיים.

שאלה 6:

תהיינה $A, B \in M_{n\times n}(F)$ מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א. הדטרמיננטות שלהן שווה, כלומר $|A| = |B|$.

ב. הפ"א שלהן שווה, כלומר $F_A[\lambda] = F_B[\lambda]$.

שאלה 7:

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

א. מצאו ע"ע ור"א של כל ע"ע.

ב. מצאו בסיסים למ"ע של הע"ע ור"ג של הע"ע.

ג. האם A לכסינה? אם כן מצאו מטריצות D, P כך שמתקיים $A = PDP^{-1}$.

שאלה 8:

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

האם המטריצה לכסינה?

שאלה 9:

תהא מטריצה $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$. עבור כל אחד מהסעיפים, קבעו האם A לכסינה או לא:

א. $F_A[\lambda]=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+2)$.

ב. $dim\big(N(A-I)\big)=2, dim\big(N(A+2I)\big)=1, Rank(A)<4$.

ג. $F_A[\lambda]=\lambda^2(\lambda-2)^2$, $Rank(A)=3$.

שאלה 10:

תהא מטריצה $A\in M_{n\times n}(F)$. הוכיחו כי A הפיכה $\Leftrightarrow$ אין לה ע"ע 0.

שאלה 11:

תהא $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ המקיימת $\mathrm{A}^5=2\mathrm{A}^4$. הוכיחו כי ל-A **בהכרח** יש לפחות ע"ע אחד.

שאלה 12:

הוכיחו כי לא קיימת מטריצה $A\in M_{n\times n}(F)$ כך ש:

- $Rank(A-7I)=1$.
- $F_A[\lambda]=(\lambda-7)^{10}\lambda^4$.

שאלה 13:

תהא $B\in M_{n\times n}(F)$ מטריצה לכסינה. נתון כי $B^m=0$ עבור m שלם חיובי כלשהו. הוכיחו כי בהכרח $B=0$ (כלומר B היא מטריצת האפסים).

שאלה 14:

תהא $A\in M_{n\times n}(F)$. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבעו האם הטענה היא נכונה או לא. אם כן – הוכיחו. אם לא – הפריכו באמצעות דוגמה נגדית.

א. אם A הפיכה ו-$\lambda\in F$ הוא ע"ע של A, אז λ^{-1} הוא ע"ע של A^{-1}.

ב. $\lambda\in F$ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ $\lambda\in F$ הוא ע"ע של A^T.

ג. $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ הוא ו"ע של A $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ הוא ו"ע של A^T.

ד. אם סכום כל איברי שורה ב-A הוא 7 אז $\lambda=7$ ע"ע של A.

ה. אם סכום כל איברי עמודה ב-A הוא 7 אז $\lambda = 7$ ע"ע של A.

שאלה 15:

תהא המטריצה $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

א. מצאו את הע"ע ואת הפ"א של A, נסו ללא חישוב דטרמיננטה (אתגר).

ב. מצאו מ"ע של הע"ע של A, הראו כי A לכסינה ולכסנו.

ג. חשבו את $A^{2043} \cdot \begin{pmatrix} 4200 \\ -700 \\ 4200 \end{pmatrix}$.

ד. חשבו $A^{2000} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

שאלה 16:

תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

א. הסבירו מדוע A לכסינה.

ב. לכסנו את A אורתוגונלית, כלומר מצאו P א"ג ו-D אלכסונית כך ש- $A = PDP^T$.

ג. חשבו את A^{2100}.

תת-פרק 'תוספות ושאלות נוספות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)':

שאלה 0 (הוכחה באינדוקציה של תכונה חשובה ושימושית):

תהא $A \in M_{n\times n}(F)$ ויהי $\lambda \in F$ ע"ע של A עם ו"ע $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

הוכיחו כי לכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים: $A^m \cdot \boldsymbol{v} = \lambda^m \cdot \boldsymbol{v}$

(כלומר הוכיחו כי λ^m הוא ע"ע של A^m עם ו"ע $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$).

שאלה 1:

עבור אילו ערכי $x,y\in\mathbb{R}$ המטריצה $C\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ לכסינה? $C=\begin{pmatrix} y & 0 & 0\\ x & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

שאלה 2:

תהא מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ שלה ע"ע אחד בלבד, $\lambda_1\in\mathbb{C}$. הראו כי אם A לכסינה אז $A=\lambda_1\cdot I_n$.

הערה חשובה: ניתן למצוא דוגמה למטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ שיש לה ע"ע אחד בלבד אך איננה לכסינה. למשל: $A=\begin{pmatrix} 0 & 12\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

שאלה 3:

הוכיחו כי מטריצה הפכית של מטריצה לכסינה (הפיכה) היא מטריצה לכסינה בעצמה.
כלומר, הוכיחו כי אם קיימת מטריצה $C\in M_{n\times n}(F)$ שהיא מטריצה הפיכה ולכסינה, אז המטריצה $G=C^{-1}$ גם היא לכסינה.

שאלה 4:

תהיינה $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ וידוע כי מתקיים $(A-2I)(2B+I)=I$. הוכיחו/הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. 0 איננו ע"ע של המטריצה $A-2I$.

ב. 2 הוא לא ע"ע של A.

ג. ייתכן כי $\left(-\frac{1}{2}\right)$ הוא ע"ע של B.

ד. בהכרח מתקיים $AB=BA$.

ה. נתון ש- B לכסינה, אז בהכרח A לכסינה (לא פשוט).

שאלה 5:

מצאו את כל הע"ע (כולל ר"א ור"ג) של המטריצה $A\in M_{6\times6}(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix}7&1&1&1&1&1\\1&7&1&1&1&1\\1&1&7&1&1&1\\1&1&1&7&1&1\\1&1&1&1&7&1\\1&1&1&1&1&7\end{pmatrix}$$

שאלה 6:

תהיינה $A,B\in M_{n\times n}(F)$ כך שמתקיים: $2BA+5B^2-20I=0$.
נתון גם כי 2 הוא ע"ע של B.

הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

שאלה 7:

תהא $A\in M_{n\times n}(F)$ מטריצה לכסינה, עם מטריצה מלכסנת הפיכה P ומטריצה אלכסונית D, כך שמתקיים: $A=PDP^{-1}$.

א. הוכיחו כי המטריצה $3A^2-4A+5I$ היא מטריצה לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית G, הדומה למטריצה $3A^2-4A+5I$.

ב. נתון כי $A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ וכי הע"ע של A הם $\lambda_1=3,\quad \lambda_2=5,\quad \lambda_3=2$.

מצאו את הע"ע של $3A^2-4A+5I$.

שאלה 8:

א. תהיינה $A_1,B_1\in M_{n\times n}(F)$ מטריצות דומות. הוכיחו $Rank(A_1)=Rank(B_1)$.
כלומר, הוכיחו שלמטריצות דומות יש דרגה שווה.

ב. הראו כי **לא** קיימת העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ובסיסים A,B של $\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים:

$$[T]_A^A=\begin{pmatrix}5&2&1\\5&2&1\\5&2&1\end{pmatrix},[T]_B^B=\begin{pmatrix}8&3&4\\0&0&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ג. הראו כי **לא** קיימת העתקה ליניארית $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ובסיסים C,D של $\mathbb{R}^3$ כך שמתקיים:

$$[S]_C^C=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&7\\0&0&2\end{pmatrix},[S]_D^D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

שאלה 9:

תהא $A \in M_{n\times n}(F)$, כאשר נתון $A \neq 0$.
כמו כן, נתון כי קיים $m \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $A^m = 0$.

א. הוכיחו כי 0 הוא ע"ע של A.
ב. הוכיחו כי 0 הוא הע"ע היחיד של A.
ג. הוכיחו כי A איננה לכסינה.

שאלה 10:

תהא $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ ונתון:

- קיים $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ כך ש- $A\boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{u}$.
- $\dim[N(A-3I)] = 1$.
- $Rank(A-6I) = 2$.

א. מצאו את כל הע"ע של A, כולל ר"א ור"ג שלהם.
ב. הוכיחו כי A לכסינה.
ג. מצאו מטריצה D אלכסונית הדומה ל-A.

תת פרק 'לכסון אופרטורים ליניאריים':

שאלה 1:

יהא $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי, הנתון על ידי הנוסחה הבאה: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+2z \\ 2x+6y+4z \\ 0 \end{pmatrix}$

א. מצאו ע"ע של T.

ב. מצאו ר"ג ומ"ע של הע"ע של T.

ג. האם T לכסין? T^5? לכסנו במידה וכן.

ד. חשבו $T^4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ה. הראו כי $T^{17} + 3I$ הוא אופרטור לכסין.

שאלה 2:

יהא $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ אופרטור לינארי, הנתון על ידי הנוסחה הבאה:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

א. מצאו ע"ע של T.

ב. מצאו ר"ג ומ"ע של הע"ע של T.

ג. האם T לכסין? אם כן - לכסנו.

ד. הראו כי $T^7 + 6T - 2I$ הוא אופרטור לכסין.

ה. חשבו את $T^{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

שאלה 3:

יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי (V לאו דווקא שווה ל-F^n), $\dim(V) = n$.

הוכיחו כי אם ל-V יש בסיס B המורכב מו"ע של T, אז $[T]_B$ היא מטריצה אלכסונית שעל האלכסון שלה יש את הע"ע של T.

שאלה 4:

יהי אופרטור לינארי $T: F^n \to F^n$ $(n \in \mathbb{N})$ וידוע כי מתקיים $T^2 = T$ (כלומר, לכל $\boldsymbol{v} \in F^n$ מתקיים $T^2(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v})$). קבעו נכון/לא נכון (הוכחה או ד"נ):

א. אם $\lambda \in F$ הוא ע"ע של T אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

ב. כל $\boldsymbol{v_1} \in Ker(T)$ הוא ו"ע של ע"ע $\lambda_1 = 0$,
כל $\boldsymbol{v_2} \in Im(T)$ הוא ו"ע של ע"ע $\lambda_2 = 1$ ($\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \neq \boldsymbol{0}$).

ג. T בהכרח אופרטור לכסין.

שאלה 5:

יהא $T: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ אופרטור לינארי, הנתון על ידי הנוסחה הבאה:

$$T(ax^2+bx+c) \overset{*}{=} (a+b+c)x^2 + (3b)x + (a+b+c)$$

א. מצאו ע"ע של T.

ב. מצאו ר"ג ובסיסים למ"ע של הע"ע של T.

ג. האם T לכסין? אם כן - לכסנו.

ד. חשבו את $T^{20}(7x^2+2x+3)$.

שאלה 6:

יהא $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ אופרטור לינארי, הנתון על ידי הנוסחה הבאה:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d \end{pmatrix}$$

א. מצאו $[T]_E$ כאשר E בסיס סטנדרטי של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ב. מצאו ע"ע ומ"ע של $[T]_E$.

ג. מצאו ע"ע ומ"ע של T וקבעו האם T לכסין. במידה ו-T לכסין – לכסנו.

שאלה 7:

יהי $T: \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ אופרטור לינארי המוגדר באופן הבא - לכל פולינום $p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ מתקיים:

$$T(p(t)) = t \cdot p'(t)$$

א. הראו כי T אופרטור לכסין וכי הבסיס $E = \{t^2, t, 1\}$ מהווה בסיס מלכסן שלו.

ב. מצאו ע"ע ובסיסים למ"ע של T.

ג. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של T.

תשובות סופיות

תת פרק ע"ע, ו"ע, מ"ע ולכסון מטריצות:

שאלה 1:

הע"ע של A הם $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 3$.

שאלה 2:

הע"ע של A הם $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = 1$.

שאלה 3:

א. הע"ע של A הם $\lambda_1 = 2i,\ \ \lambda_2 = -2i$

ב. ל-A אין ערכים עצמיים מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 4:

א. הע"ע של A הם $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 3$.

ב. בסיסים למרחבים העצמיים של הע"ע של A:

- $B_{\lambda_1, \text{מ"ע}} = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
- $B_{\lambda_2, \text{מ"ע}} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 5:

א. הע"ע של A הם $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = 2$.

ב. בסיסים למרחבים העצמיים של הע"ע של A:

- $B_{\lambda_1, \text{מ"ע}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

- $B_{\lambda_2,\text{מ"ע}} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 6:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

שאלה 7:

א. הע"ע של A:

- $\lambda_1 = 2$, ר"א 2.
- $\lambda_2 = 6$, ר"א 1.

ב. הבסיסים של המ"ע של הע"ע של המטריצה A:

- $B_{\lambda_1\,\text{מ"ע}} = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, ר"ג 2.
- $B_{\lambda_2\,\text{מ"ע}} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ר"ג 1.

ג. A לכסינה, המטריצות D ו-P:

- $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$
- $P = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$

שאלה 8:

המטריצה לא לכסינה (הראינו זאת ב-2 דרכים).

שאלה 9:

א. לכסינה (הוכחה בוידאו).

ב. לכסינה (הוכחה בוידאו).

ג. לא לכסינה (הוכחה בוידאו).

<u>שאלה 10</u>:

הוכחה.

<u>שאלה 11</u>:

הוכחה.

<u>שאלה 12</u>:

הוכחה.

<u>שאלה 13</u>:

הוכחה.

<u>שאלה 14</u>:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

ג. הפרכה (דוגמה נגדית).

ד. הוכחה.

ה. הוכחה.

<u>שאלה 15</u>:

א. הע"ע והפ"א של המטריצה A:

- הע"ע של A הם (פתרון ללא חישוב, אלא רק ע"י שימוש במשפטים שלמדנו):
  - $\lambda_1 = 0$, ר"א $= 1$, ר"ג$= 1$.

- $\lambda_2 = 4$, ר"א $= 1$, ר"ג$= 1$.
- $\lambda_3 = -3$, ר"א $= 1$, ר"ג$= 1$.

- הפולינום האופייני של A: $F_A[\lambda] = \lambda(\lambda-4)(\lambda+3)$.

ב. המ"ע של הע"ע של המטריצה A:

- מ"ע של ע"ע $\lambda_1 = 0$: $span\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.
- מ"ע של ע"ע $\lambda_2 = 4$: $span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.
- מ"ע של ע"ע $\lambda_3 = -3$: $span\left\{\begin{pmatrix}6\\-1\\6\end{pmatrix}\right\}$.

המטריצה A לכסינה ועל כן מתקיים $A = PDP^{-1}$ כאשר:

$$P = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\1 & 1 & -1\\1 & 1 & 6\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 4 & \\ & & -3\end{pmatrix}$$

ג. $A^{2043}\cdot\begin{pmatrix}4200\\-700\\4200\end{pmatrix} = (-3)^{2043}\cdot\begin{pmatrix}4200\\-700\\4200\end{pmatrix}$.

ד. $A^{2000}\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\cdot 3^{2000}+2\cdot 4^{2000}\\-1\cdot 3^{2000}+2\cdot 4^{2000}\\6\cdot 3^{2000}+2\cdot 4^{2000}\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 16:</u>

א. הסבר.

ב. המטריצות $D, P^T = P^{-1}$ כך שמתקיים $A = PDP^T$:

$$D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & -3\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

ג. $A^{2100}=\begin{pmatrix}3^{2100} & 0\\ 0 & 3^{2100}\end{pmatrix}$.

תת-פרק 'תוספות ושאלות נוספות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)':

שאלה 0:

הוכחה.

שאלה 1:

במקרים הבאים C לכסינה:

- עבור $y \neq 0,1$ (כל x).
- עבור $x=-2$, $y=1$.
- עבור $x=0$, $y=0$.

שאלה 2:

הוכחה.

שאלה 3:

הוכחה.

שאלה 4:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

ג. הפרכה.

ד. הוכחה.

ה. הוכחה (2 דרכים).

שאלה 5:

ל-A יש את הע"ע הבאים:

- $\lambda_1 = 12$, ר"א=1, ר"ג= 1 .
- $\lambda_2 = 6$, ר"א=5, ר"ג= 5 .

<u>שאלה 6</u>:

הוכחה.

<u>שאלה 7</u>:

א. הוכחה,

מטריצה G אלכסונית הדומה למטריצה $3A^2 - 4A + 5I$:

$$G = \begin{pmatrix} 3{\lambda_1}^2 - 4\lambda_1 + 5 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3{\lambda_2}^2 - 4\lambda_2 + 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3{\lambda_3}^2 - 4\lambda_3 + 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 3\lambda_n^2 - 4\lambda_n + 5 \end{pmatrix}$$

ב. הע"ע של המטריצה $3A^2 - 4A + 5I$ הם:

- $\delta_1 = 20$.
- $\delta_2 = 60$.
- $\delta_3 = 9$.

<u>שאלה 8</u>:

א. הוכחה.
ב. הוכחה.
ג. הוכחה.

<u>שאלה 9</u>:

א. הוכחה.
ב. הוכחה.
ג. הוכחה.

<u>שאלה 10</u>:

א. ע"ע של A:

- $\lambda_1 = 4$, ר"א= 1, ר"ג= 1.
- $\lambda_2 = 3$, ר"א= 1, ר"ג= 1.
- $\lambda_3 = 6$, ר"א= 2, ר"ג= 2.

ב. הוכחה.

ג. $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

תת פרק לכסון אופרטורים ליניאריים:

שאלה 1:

א. מצאנו את המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בעזרת המטריצה מצאנו את הע"ע של T:

- $\lambda_1 = 0$, ר"א= 2.
- $\lambda_2 = 7$, ר"א= 1.

ב. מצאנו את המ"ע (ובסיסים שלהם) של הע"ע של האופרטור T:

- $\text{מ"ע } \lambda_1 = span\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, B_{\lambda_1=0} = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
- $\text{מ"ע } \lambda_2 = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, B_{\lambda_2=7} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

על כן, הר"ג של λ_1 הוא 2, הר"ג של λ_2 הוא 1.

ג. האופרטור T הוא לכסין, וכך גם האופרטור T^5.

- בסיס מלכסן של שניהם:

$$B_{\text{מלכסן}} = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \overset{\text{סימון}}{=} B$$

- המטריצה $[T]_B$:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&7\end{pmatrix}$$

- המטריצה $[T^5]_B$:

$$[T^5]_B=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&7^5\end{pmatrix}$$

ד. $T^4\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=7^4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

ה. הוכחנו כי האופרטור $T^{17}+3I$ הוא אופרטור לכסין וחישבנו את $[T^{17}+3I]_B$:

$$[T^{17}+3I]_B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&7^{17}+3\end{pmatrix}$$

שאלה 2:

א. מצאנו את המטריצה המייצגת של האופרטור לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}2&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&2&2\\2&2&2&2\end{pmatrix}$$

בעזרת המטריצה מצאנו את הע"ע של T (עשינו זאת ללא חישוב אלא באמצעות משפטים שלמדנו):

- $\lambda_1=0$, ר"א=3, ר"ג=3.
- $\lambda_2=8$, ר"א= 1, ר"ג=1.

ב. מצאנו את המ"ע (ובסיסים שלהם) של הע"ע של האופרטור T:

- $\text{מ"ע } \lambda_1=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B_{\lambda_1=0}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
- $\text{מ"ע } \lambda_2=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B_{\lambda_2=8}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

ג. האופרטור T הוא אכן לכסין.

- בסיס מלכסן של T:

$$B \overset{\text{סימון}}{=} B_{\text{מלכסן}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- המטריצה $[T]_B$:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 8 \end{pmatrix}$$

ד. חישבנו את $[T^7 + 6T - 2I]_B$ והראינו כי מדובר במטריצה אלכסונית:

$$[T^7 + 6T - 2I]_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8^7 + 6 \cdot 8 - 2 \end{pmatrix}$$

כלומר, הראינו כי B הוא בסיס מלכסן של האופרטור $T^7 + 6T - 2I$, ועל כן הוא אופרטור לכסין.

ה. $T^{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 \cdot (8)^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 3:

הוכחה.

שאלה 4:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

ג. הוכחה.

שאלה 5:

א. מצאנו את הע"ע של T ע"י חישוב הע"ע של $[T]_E$ (כולל ר"א ור"ג):

- $\lambda_1 = 0$, ר"א= 1, ר"ג= 1.
- $\lambda_2 = 3$, ר"א= 1, ר"ג= 1.
- $\lambda_3 = 2$, ר"א= 1, ר"ג= 1.

ב. מצאנו בסיסים למ"ע של הע"ע של T (פירוט מלא בוידאו):

- $B_{\lambda_1=0}=\{\boldsymbol{q_1}=-x^2+1\}$.
- $B_{\lambda_2=3}=\{\boldsymbol{q_2}=x^2+x+1\}$.
- $B_{\lambda_3=2}=\{\boldsymbol{q_3}=x^2+1\}$.

ג. האופרטור T הינו לכסין.

- בסיס מלכסן של T:

$$B\overset{\text{סימון}}{=}B_{\text{מלכסן}}=\{(-x^2+1),(x^2+x+1),(x^2+1)\}$$

- המטריצה $[T]_B$:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ד. $T^{20}(7x^2+2x+3)=(2\cdot 3^{20}+3\cdot 2^{20})\cdot x^2+(2\cdot 3^{20})\cdot x+(2\cdot 3^{20}+3\cdot 2^{20})\cdot 1$

<u>שאלה 6</u>:

א. $[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

ב. למטריצה $[T]_E$ יש ע"ע $\lambda_1=1$, ר"א 4, ר"ג 1. הבסיס של המ"ע של λ_1 הוא: $B_{\lambda_1}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ג. האופרטור T איננו לכסין. ע"ע ובסיס למ"ע של T:

$\lambda_1=1$, ר"א= 4, ר"ג= 1, $B_{\lambda_1=1}=\left\{M_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

<u>שאלה 7</u>:

א. הוכחה.

ב. הע"ע ובסיס למ"ע של הע"ע של האופרטור T:

- $\lambda_1=2$, ר"א=1, ר"ג=1. $B_{\lambda_1}=\{t^2\}$.

- $\lambda_2 = 1$, ר"א=1, ר"ג=1. $B_{\lambda_2} = \{t\}$.
- $\lambda_3 = 0$, ר"א=1, ר"ג=1. $B_{\lambda_3} = \{1\}$.

ג. בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של האופרטור:

- $B_{Im(T)} = \{2t^2, t\},\ \dim\big(Im(T)\big) = 2$.
- $B_{Ker(T)} = \{1\},\ \dim\big(Ker(T)\big) = 1$.