מבחן מבוא להסתברות פתרון Y

השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך! יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת !

בהצלחה!

שאלה 1 **(35 נקודות)**

א. **(8 נק')** חבילת קלפים מכילה 52 קלפים ומתוכם 4 אסים. 4 שחקנים מקבלים 4 קלפים הנבחרים באקראי. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם יקבל קלף אס?

פתרון א:
פשוט יותר לחשב סיכוי של משלים, "אף שחקן לא יקבל קלף אס".

$$1-\frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{46}{50}\cdot\frac{45}{49}=0.2813$$

ב. **(8 נק')** בתחרות הריאליטי הכי לוהטת היום על המסך, 'המתמטיקאי הדגול הבא', בסוף כל פרק כל מתמודד עשוי להישאר לפרק נוסף או להיות מודח בסוף הפרק. ידוע כי 1/4 מהמתמודדים משחדים את השופטים וכי אם מתמודד משחד את השופטים הוא משחד אותם לאורך כל העונה. במקרה זה המתמודד בהכרח לא יודח בסוף פרק. מתמודד שאיננו משחד את השופטים לא יודח בסוף פרק בהסתברות 1/3. אם מתמודד לא הודח בתום הפרק הראשון מה ההסתברות שהוא יודח בתום הפרק השני?

פתרון ב:

(מומלץ לצייר עץ)

$$P(\,eliminated\ at\ round\ \#2 \mid survived\ round\ \#1) = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

ג. **(9 נק')** כל יום בדרכו לעבודה יואב עוצר במאפייה בה יש 5 קרואסונים בטעם שוקולד, 3 קרואסונים בטעם שקדים ו- 2 קרואסונים בטעם חמאה. בכל יום, באופן ב"ת בימים אחרים, יואב בוחר 3 קרואסונים אותם הוא אוכל במהלך היום. יום שבו יואב אוכל לפחות קרואסון שוקולד אחד הוא 'יום של השמחות'. מה ההסתברות שב- 70 הימים הבאים יהיו לפחות 65 'ימים של השמחות'?

פתרון ג:

: יהי Y_i מספר קרואסונים בטעם שוקולד שיואב אוכל ביום i, $i = 1, 2, \dots, 30$.

$$P(day\ i\ is\ pagaz) = P(Y_i \geq 1) = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{12}$$

יהי Z מספר הימים שהם 'יום פגז' ב- 70 ימים, $Z \sim Bin\left(70, \frac{11}{12}\right) \dot{\sim} N\left(70 \cdot \frac{11}{12}, 70 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{12}\right)$,

$$P(Z \geq 65) = 1 - \Phi\left(\frac{65 - 0.5 - 64\frac{1}{6}}{\sqrt{5\frac{25}{72}}}\right) = 1 - \Phi(0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$$

ד. **(5 נק')** מרצה בקורס נוקטת במדיניות הבאה בנוגע לבחינה, היא מחברת 10 שאלות שונות, כל אחת מהן רושמת על פתק נפרד ואת הפתקים היא שמה בקופסא. כל סטודנט נבחן בנפרד, במהלך הבחינה, המרצה מוציאה פתקים באקראי ללא החזרה ושואלת את הסטודנט את השאלה הרשומה בפתק עד אשר לראשונה הסטודנט עונה נכון על השאלה שנשאל. יוני, סטודנט בקורס, יודע את התשובה הנכונה רק לאחת מבין השאלות. מהי התוחלת והשונות של מספר השאלות שיישאל יוני עד שיענה נכון?

1. תוחלת 5.5, שונות 8.25
2. תוחלת 1, שונות 0.9
3. תוחלת 10, שונות 90
4. תוחלת 3.7, שונות 6.2

פתרון ד: מספר שאלות מתפלג לפי התפלגות אחידה עם פרמטר 10. לכן תשובה נכונה היא תשובה מס]ר 1.

ה. **(5 נק')** קובייה הוגנת מוטלת שוב ושוב עד אשר לראשונה סכום תוצאת כל ההטלות גדול מ- 6, יהי Y מספר ההטלות הכולל. כיצד Y מתפלג?

1. Y הוא משתנה מקרי גיאומטרי.
2. Y הוא משתנה מקרי היפר גיאומטרי.
3. Y הוא משתנה מקרי אחיד.
4. Y איננו בעל התפלגות מוכרת שנלמדה בקורס.

פתרון ה: תשובה מספר 4.

<u>שאלה 2</u> (35 נקודות)

א. **(8 נק')** זמן העבודה של סוללה מסוג A בשעות מתפלג לפי התפלגות אחידה בקטע $(0,50)$, זמני העבודה של סוללות שונות הם בלתי תלויים. מכשיר אלקטרוני א' צריך 4 סוללות להפעלתו, המכשיר מפסיק לעבוד אם לפחות חצי מהסוללות מפסיקות לעבוד. נסמן ב- X את זמן העבודה של המכשיר. מהי ההסתברות שמכשיר החדש יעבוד יותר מ-10 שעות?

פתרון א:

נסמן ב- Y את מספר הסוללות מתוך 4 שיעבדו יותר מ-10 שעות. מ"מ Y מתפלג בינומית $Bin(4,p)$ כאשר p הוא סיכוי של סוללה לעבוד יותר מ-10 שעות ושווה ל-0.8. כדי שהמכשיר יעבוד יותר מ-10 שעות לפחות שתי סוללות חייבות לעבוד יותר מ-10 שעות כל אחת. נחשב את הסיכוי לכך:

$$P(Y\ge 2)=1-P(Y\le 1)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-0.2^4-4\cdot 0.8\cdot 0.2^3=0.9728$$

ב. **(9 נק')** זמן העבודה של סוללה מסוג B בשעות מתפלג לפי התפלגות מעריכית עם תוחלת 20 שעות, זמני העבודה של סוללות שונות הם בלתי תלויים. מכשיר אלקטרוני מסוג ב' צריך סוללה אחת כזאת לצורך הפעלתו. כאשר סוללה מפסיקה לעבוד היא מיידיתמוחלפת בסוללה חדשה. ברשותנו 30 סוללות מסוג B, מהי ההסתברות שהמכשיר יעבוד יותר 700 שעות?

פתרון ב:

נגדיר משתנים מקריים : X_i - זמן העבודה של סוללה ה-i-ית. i=1,…,30.

משתנים מקריים ב"ת ושווי התפלגות, כולם מתפלגים מעריכית עם פרמטר 0.05. זמן העבודה של המכשיר הינו סכום של שלושים המשתנים האלה. לפי משפט הגבול המרכזי סכום מתפלג בקירוב נורמלית עם ממוצע 600 ושונות 12000. נחשב את הסיכוי הנדרש :

$$P(\sum_{i=1}^{30} X_i > 700) = 1-\Phi\left(\frac{700-600}{\sqrt{12000}}\right) = 1-\Phi(0.91) = 1-0.8186 = 0.1814$$

ג. **(8 נק')** נתונה פונקציית הצפיפות של מ"מ רציף W :

$$f_W(w)=\begin{cases}-\frac{w}{16}+\frac{5}{16}, & 1\le w\le 5\\ \frac{w}{16}-\frac{6}{16}, & 6\le w\le 10\\ 0, & else\end{cases}$$

מצאו פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ W. מומלץ לצייר את הגרף של פונקציית הצפיפות.

פתרון ג:

עבור $t<1$:

$$F_X(t)=0$$

עבור $1\le t\le 5$:

$$F_X(t)=\int_1^t -\frac{x}{16}+\frac{5}{16}dx=-\frac{x^2}{32}+\frac{5x}{16}\Big|_1^{tt}=-\frac{t^2}{32}+\frac{5t}{16}-\frac{9}{32}$$

עבור $5\le t\le 6$:

$$F_X(t)=0.5$$

עבור $6\le t\le 10$:

$$F_X(t)=0.5+\int_6^t \frac{x}{16}-\frac{6}{16}dx=0.5+\frac{x^2}{32}-\frac{6x}{16}\Big|_6^t=\frac{t^2}{32}-\frac{6t}{16}+1.625$$

עבור $t>10$:

$$F_X(t)=1$$

ללא תלות בסעיפים הקודמים:

ד. **2ד. (5 נק')** יהיו X_1, X_2, X_3 משתנים מקריים ב"ת המתפלגים מעריכית עם פרמטר 0.5. חשבו את $V\left(\sum_{k=1}^{3} kX_k\right)$.

1. 1.5
2. 24
3. 12
4. 56

פתרון ד: תשובה 4.

ה. **(5 נק')** קבעו מהי הטענה נכונה

1. $\Phi(-z_{0.1}) = 0.1$
2. $\Phi(-z_{0.1}) = z_{0.1}$
3. $\Phi(-z_{0.1}) = 0.9$
4. $\Phi(-z_{0.1}) = 1 - \Phi(z_{0.9})$

פתרון ה: תשובה 3.

שאלה 3 (30 נקודות)

נתונים שני כדים, כד א' וכד ב', ובכל אחד מהם ישנם 3 כדורים. על הכדורים בכד א' רשומים המספרים $0,1,2$, ואילו על הכדורים בכד ב' רשומים המספרים $1,2,3$. מוציאים כדור מכד א'. אם המספר הוא 0 אז מוציאים כדור שני מכד ב'. אם מספר הוא לא 0 אז מוציאים כדור נוסף מכד א'.

נסמן ב X - המספר על הכדור הראשון שהוצא מכד א',

נסמן ב Y - סכום המספרים על 2 הכדורים שהוצאו.

א. **(12 נק')** מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y. (מומלץ לצייר את השאלה בעץ)

פתרון א:

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	
$X=0$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$X=1$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$X=2$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{18}$	

המשך פתרון א:

ב. **(6 נק')** מצאו את התוחלת של Y בהינתן $X = 0$.

פתרון ב:

נשים לב שמ״מ $Y|X = 0 \sim U(3)$ ולכן התוחלת שווה ל 2.

ג. **(5 נק')** עבור איזה פונקציה $g(X)$ מתקיים $E(g(X)) = g(E(X))$, לכל משתנה מקרי X?

1. עבור $g(X)$ מעריכית.
2. עבור $g(X)$ ליניארית.
3. עבור אף פונקציה $g(X)$.
4. עבור $g(X)$ סימטרית.

פתרון ג: $g(X)$ ליניארית.

ד. **(5 נק')** יהיו X ו- Y משתנים מקריים תלוים. האם יכול להתקיים $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$?

1. רק אם X היא פונקציה ליניארית של Y עם שיפוע חיובי.
2. רק אם X היא פונקציה ליניארית של Y עם שיפוע שלילי.
3. רק אם אין קשר ליניארי בין X ו- Y.
4. לא יכול להתקיים לאף X ו- Y.

פתרון ד: תשובה 3.