פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון Y

פתרון 1א:

זה גבול מהצורה " 1^{∞}". נתאים אותו לגבול של Euler (אוילר):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+n^2}\right)^{\frac{3n^2-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n^2+2-n^2}{n^3+n^2}\right)^{\frac{3n^2-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2-n^2}{n^3+n}\right)^{\frac{3n^2-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{2-n^2}}\right)^{\frac{3n^2-1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{2-n^2}}\right)^{\frac{(3n^2-1)}{n}\frac{(n^3+n)(2-n^2)}{(2-n^2)(n^3+n)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n}{2-n^2}}\right)^{\frac{(n^3+n)}{(2-n^2)}}\right)^{\frac{(3n^2-1)(2-n^2)}{n(n^3+n)}}$$

נשתמש בגבול של Euler אוילר:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\mathbf{e}$$

עבור הסדרה: $a_n=\frac{n^3+n}{2-n^2}\to\infty$.

נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+n^2}\right)^{\frac{3n^2-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{e}^{\frac{(3n^2-1)(2-n^2)}{n(n^3+n)}}=\mathbf{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n^2-1)(2-n^2)}{n(n^3+n)}}=\mathbf{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\left(-3+\frac{7}{n^2}-\frac{2}{n^4}\right)}{n^4\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\mathbf{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{7}{n^2}-\frac{2}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}}=\mathbf{e}^{-3}$$

<u>פתרון 1ב:</u>

נחשב ראשית פונק' קדומה כללית.

$$F(x)=\int x\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int xdx-\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\int x\cos 2xdx=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'\cdot xdx=\left(\text{integration by parts}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{(\sin 2x)x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{2}\cdot(x)'dx\right]=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C=$$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{(\sin 2x)x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{2}dx\right]=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C$$

התנאי הנוסף גורר ש-

$$F(0)=0\Rightarrow -\frac{1}{8}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{8}$$

ולכן:

$$F(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+\frac{1}{8}.$$

קל לראות ש- F פונקציה **לא חח"ע** ב- $\mathbf{R}$:

<u>דרך 1:</u>

$$,\ F(\pm\pi)=\frac{(\pm\pi)^2}{4}-\frac{(\pm\pi)\sin(2(\pm\pi))}{4}-\frac{\cos(2(\pm\pi))}{8}+\frac{1}{8}=\frac{\pi^2}{4}$$

ז"א קיבלנו שני ערכים שווים $F(\pi)=F(-\pi)$, אף על פי ש- $\pi\neq-\pi$.

<u>דרך 2:</u>

F פונקציה רציפה ב- $\mathbf{R}$. ברור ש- $F'(0)=f(0)=0\cdot\sin^2 0=0$. בנוסף:

$F'(x)=f(x)=x\sin^2 x>0$, לכל $x\in(0,\pi)$ ו- $F'(x)=f(x)=x\sin^2 x<0$, לכל $x\in(-\pi,0)$.

מסיקים ש- F פונקציה <u>עולה ממש</u> בקטע $[0,\pi)$ <u>ויורדת ממש</u> בקטע $(-\pi,0]$

ולכן F לא חח"ע ב- $\mathbf{R}$.

<u>פתרון 2א:</u>

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{2\ln x+a}{x^2-x}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to1^+}\left(\frac{2\ln x}{x^2-x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)\underset{LOP}{=}\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\frac{2}{x}}{2x-1}\right)=2, & (a=0)\\ \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\boxed{2\ln x+a}\nearrow^{a}}{\boxed{x^2-x}\searrow 0^+}\right)=+\infty, & (a>0)\\ \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\boxed{2\ln x+a}\nearrow^{a}}{\boxed{x^2-x}\searrow 0^+}\right)=-\infty, & (a<0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(2x+3^{\boxed{\frac{1}{x-1}}\nearrow^{-\infty}}\right)=2$$

ואז הפונקציה היא רציפה ב- $x_0=1$ רק עבור $a=0$ כי אז הגבולות החד צדיים שווים לערך בנקודה.

מקרים של אי רציפות :

במקרה ש - $a\neq0$ יש לפונקציה אי רציפות ממין שני כי הגבול מימין הוא אינסוף (או מינוס אינסוף).

<u>פתרון 2ב:</u>

נגדיר $f(x)=\ln(x^2)+x-\cos x$ בקטע $(0,\infty)$.
נוכיח שלמשוואה $f(x)=0$ יש בדיוק פתרון אחד חיובי.

<u>שלב א': קיום הפתרון (בעזרת משפט Cauchy)</u>

1. **נבדוק שהפונקציה f בעלת ערכים שליליים:** או לפי בדיקת הגבול מימין ב- 0:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\ln(x^2)+x-\cos x)=-\infty$$

או לפי הצבה:

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln(e^{-2})+\frac{1}{e}-cos\left(\frac{1}{e}\right)=-2+\frac{1}{e}-cos\left(\frac{1}{e}\right)=\left(-1+\frac{1}{e}\right)+\left(-1-cos\left(\frac{1}{e}\right)\right)<0$$

2. **נבדוק שהפונקציה f בעלת ערכים חיוביים** לפי הצבה:

$$f(1)>\ln(1)+(1-cos1)>0$$

לכן מהרציפות של f בקטע $(0,\infty)$, נובע ממשפט ערך הביניים של Cauchy , כי למשוואה $f(x)=0$ קיים פתרון בקטע $(0,\infty)$.

<u>שלב ב': יחידות הפתרון (בעזרת משפט Rolle)</u>

f גזירה בקטע $(0,\infty)$ וברור שהנגזרת של f חיובית:

$f'(x)=(\ln(x^2)+x-\cos x)'=\frac{2x}{x^2}+(1+\sin x)>0$, לכל $x\in(0,\infty)$. (***)

נניח בדרך השלילה שקיים יותר מפתרון אחד בקטע זה.
אזי ממשפט Rolle (רול) ייגבע כי קיימת נקודה $x\in(0,\infty)$ כך ש- $f'(x)=0$ (נמקו !),
וזה סותר את (***).

לכן קיים <u>פתרון יחיד</u> למשוואה $f(x)=0$ בקטע $(0,\infty)$. מ.ש.ל.

פתרון 3א:

האי שוויון הנתון שקול ל- $\left|\ln(1+3x)-\left(3x-4.5x^2+9x^3\right)\right|\le\frac{1}{64}$.

בשלב הראשון של ההוכחה נמצא את הפולינום Taylor-Maclaurin של $f(x)=\ln(1+3x)$ מסדר 3.

פתרון 1: ברור שעבור הפונקציה f מתקיים $f(0)=0$ ו-

$$f'(x)=3(1+3x)^{-1}\quad\Rightarrow\quad f'(0)=3;\qquad f'''(x)=2\cdot3^3(1+3x)^{-3}\quad\Rightarrow\quad f'''(0)=54$$

$$f''(x)=(-1)3^2(1+3x)^{-2}\quad\Rightarrow\quad f''(0)=-9;\qquad f^{(4)}(x)=-6\cdot3^4(1+3x)^{-4}$$

לכן הפולינום Taylor-Maclaurin של $f(x)=\ln(1+3x)$ שווה ל-

$$\underline{T_3(x)=0+\frac{3}{1}x+\frac{(-9)}{1\cdot2}x^2+\frac{54}{1\cdot2\cdot3}x^3=3x-4.5x^2+9x^3.}$$

פתרון 2: ידוע ש- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$. לכן הפולינום Taylor-Maclaurin של $f(x)=\ln(1+3x)$ שווה ל-

$$\underline{T_3(x)=3x-\frac{(3x)^2}{2}+\frac{(3x)^3}{3}=3x-4.5x^2+9x^3.}$$

בשלב בשני של ההוכחה, נשתמש בנוסחת השארית $R_3(x)$ בצורה של Lagrange:

$$f(x)=\ln(1+3x)=T_3(x)+R_3(x)=\left(3x-4.5x^2+9x^3\right)+R_3(x),\quad R_3(x)=\frac{(f^{(4)}(c))}{4!}x^4,$$

כאשר $0\le c\le x\le\frac{1}{6}$.

לכן צריך להוכיח שלכל $0\le x\le\frac{1}{6}$ מתקיים: $\left|\ln(1+3x)-(3x-4.5x^2+9x^3)\right|=\left|R_3(x)\right|\le\frac{1}{64}$

נשאר לבצע את הערכת השגיאה:

$$\left|R_3(x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right|=\left|\frac{(-6)\cdot81(1+3c)^{-4}}{24}x^4\right|=\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{(1+3c)^4}\cdot x^4\le\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{(1+3\cdot0)^4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{81}{4\cdot6^4}=\frac{1}{64}$$

<u>פתרון 3ב:</u>

נמצא את ערך האינטגרל I לפי משפט היסודי של חדו"א (משפט Newton-Leibnitz).

הפונקציה הקדומה של $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{4x}+5e^{2x}+4}$ שווה ל-

$$F(x)=\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5e^{2x}+4}=\begin{bmatrix}t=e^{2x}\\ dt=2e^{2x}dx\end{bmatrix}=0.5\int\frac{dt}{t^2+5t+4}=0.5\int\frac{dt}{(t+1)(t+4)}$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(t+1)(t+4)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+4}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים. על ידי השוואת מקדמים נקבל כי: $A=\dfrac{1}{3},\ B=-\dfrac{1}{3}$ (נמקו !)

לכן $\dfrac{1}{(t+1)(t+4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{1}{t+4}\right)$ ו-

$$0.5\int\frac{dt}{(t+1)(t+4)}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t+4}=\frac{\ln|t+1|}{6}-\frac{\ln|t+4|}{6}+C=\frac{1}{6}\ln\left(e^{2x}+1\right)-\frac{1}{6}\ln(e^{2x}+4)+C$$

נשאר להפעיל את משפט Newton-Leibnitz. נסיק ש-

$$\int_0^1\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5e^{2x}+4}=\left[\text{Newton}-\text{Leibnitz}\right]=F(x)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{6}\left(\ln\left(e^{2x}+1\right)-\ln(e^{2x}+4)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{6}\ln\frac{5(e^2+1)}{2(e^2+4)}.$$

<u>פתרון 4א:</u>

.1
נניח בשלילה שקיים $x_2 \neq x_1$ כך ש $f(x_1) = f(x_2)$.

בגלל ש f גזירה לכל הממשיים היא גם רציפה לכל הממשיים ואפשר להשתמש במשפט Rolle רול.

אז קיים נקודה c כך ש $f'(c) = 0$.

אבל זה סתירה לנתון, לכן f חח״ע .

.2
הטענה לא נכונה !
דוגמא נגדית :
$f(x) = x^3$ פונקציה חח״ע ב- $\mathbf{R}$, אבל הנגזרת שלה מתאפסת עבור $x = 0$.

פתרון 4ב:

נשים לב שהפונקציות $f(x)=\frac{1}{|x|-3}$, $g(x)=1-|x|$ זוגיות כי מתקיים:

$f(x)=\frac{1}{|x|-3}=\frac{1}{|-x|-3}=f(-x),\ g(x)=1-|x|=1-|-x|=g(-x)$.

אז התחום שחסום על-ידי שני הגרפים סימטרי ביחס לציר ה-Y, ולכן מספיק לחשב את השטח בתחום, בו $x\ge 0$, ובסוף נכפול אותו ב-2.

בתחום $x\ge 0$ מתקיים $f(x)=\frac{1}{x-3},\quad g(x)=1-x$.

נמצא את נקודות חיתוך בין $f(x)$ ו- $g(x)$.

$\frac{1}{x-3}=1-x$ אז $1=x-x^2-3+3x$, ואז $x^2-4x+4=0$, ואז $x=2$.

ברור ש- $g(x)\ge f(x)$ לכל $-2\le x\le 2$. (נמקו !)

לכן מצד ימין של ציר ה-Y השטח הוא $\int_0^2 (g(x)-f(x))dx$, ז"א

$$\int_0^2\left((1-x)-\frac{1}{x-3}\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{2}-\ln|x-3|\right)\Big|_0^2=2-\frac{2^2}{2}-\ln|2-3|-\left(0-\frac{0^2}{2}-\ln|0-3|\right)=\ln 3$$

ולכן השטח כולו הוא $2\ln 3$.

פתרון 5א:

f בעלת 4 נגזרות רציפות בקטע $[-a,a]$. נרשום פיתוח Maclaurin מקלורן מסדר 3 של f :

$$f(0)=3,\ f'(0)=0,\ f''(0)=4,\ f'''(0)=0$$

$$f(x)=T_3(x)+R_3(x)=3+0\cdot x+\frac{4}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \qquad |c|<|x|\le a$$

$$f(x)=T_3(x)+R_3(x)=3+2x^2+\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \qquad |c|<|x|\le a$$

$$f(x)-3-2x^2=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \qquad |c|<|x|\le a$$

לפי הנתון $f^{(4)}(x)$ רציפה בקטע $[-a,a]$. לכן, לפי משפט Weierstrass ווירשטראס,

$f^{(4)}(x)$ חסומה בקטע חסום וסגור $[-a,a]$, כלומר קיים קבוע $A\in\mathbf{R}$ כך ש :

$\left|f^{(4)}(x)\right|\le A,\ \forall x\in[-a,a]$.

מכאן שקיים קבוע $M\in\mathbf{R}$ כך ש :

$$\left|f(x)-3-2x^2\right|=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right|\le\frac{A}{4!}x^4\le Mx^4 \Leftarrow |x|\le a$$

פתרון 5ב:

אם a_n סדרה חסומה, כלומר קיימים α,β כך ש- $a_n\in[\alpha,\beta]$, לכל n טבעי.

הפונקציה f רציפה, ולכן לפי משפט Weierstrass ווירשטראס היא חסומה על כל קטע סגור וחסום, כלומר קיים $M>0$ כך ש שלכל $x\in[\alpha,\beta]$ מתקיים $|f(x)|\le M$ ובפרט הסדרה $f(a_n)$ חסומה על ידי $\pm M$.

<u>פתרון 6א:</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_{\sqrt{x}}^{1} 2e^{t^2}dt+e^x-e}{2\sin(x-1)-x^2+1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(L'Hopital)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\left[\int_{\sqrt{x}}^{1} 2e^{t^2}dt+e^x-e\right]}{\frac{d}{dx}\left[2\sin(x-1)-x^2+1\right]}=(Newton-Leibnitz)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-2e^{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^x}{2\cos(x-1)-2x}=\lim_{x\to 1}\frac{-2e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^x}{2\cos(x-1)-2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{-e^x\cdot(x)^{-1/2}+e^x}{2\cos(x-1)-2x}$$

$$\overset{(L'Hopital)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-e^x\cdot(x)^{-1/2}-e^x(-0.5)(x)^{-3/2}+e^x}{-2\sin(x-1)-2}=\frac{-e-e(-0.5)+e}{-2}=-\frac{e}{4}$$

פתרון 6ב:

נתון $a\neq b$. ניתן להניח ש- $a<b$. נגדיר $f\left(x\right)=2x+\cos\left(3x\right)$. אזי $f'\left(x\right)=2-3\sin\left(3x\right)$.
פונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$, וגזירה בקטע (a,b), לכן משפט Lagrange גורר שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש:

$$\frac{2b+\cos\left(3b\right)-2a-\cos\left(3a\right)}{b-a}=2-3\sin\left(3c\right)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}=f'(c),$$

מאחר ו- $\left|\sin\left(3c\right)\right|\le 1$, מקבלים $\left|f'(c)\right|=\left|2-3\sin\left(3c\right)\right|\le 2+3=5$ ולכן

$$\left|\frac{2b+\cos\left(3b\right)-2a-\cos\left(3a\right)}{b-a}\right|\le 5$$

מזה נובע אי שוויון

$$\left|2b+\cos\left(3b\right)-2a-\cos\left(3a\right)\right|\le 5\left|b-a\right|,$$

ז״א

$\left|2a-\cos\left(3b\right)+\cos\left(3a\right)-2b\right|\le 5\left|a-b\right|$, מ.ש.ל.

<u>הערה:</u>

באופן כללי, אם $f\left(x\right)$ היא פונקציה גזירה בקטע מסוים I ומתקיים $\left|f'\left(x\right)\right|\le M$ לכל $x\in I$,
אזי $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le M\left|x_1-x_2\right|$ לכל $x_1,x_2\in I$.

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2}{n^3+n^2}\right)^{\frac{3n^2-1}{n}}$. נמקו !

ב. (10 נק') מצאו $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)=x\sin^2 x$ כך ש- $F(0)=0$.

האם F פונקציה חח"ע ב- $\mathbf{R}$? נמקו !

פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>שאלה 2</u> **(20 נקודות)** **<u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>**

א. **(10 נק')** מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי a עבורם הפונקציה :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln x+a}{x^2-x} & ,x>1\\ 2 & ,x=1\\ 2x+3^{\frac{1}{x-1}}, & x<1\end{cases}$$

היא רציפה בנקודה $x_0=1$.

עבור הערכים של a שהיא לא רציפה בנקודה $x_0=1$, מיינו את סוג האי רציפות. נמקו !

ב. **(10 נק')** הראו שלמשוואה $\cos x = x+\ln(x^2)$ יש פתרון יחיד בקטע $x>0$. נמקו !

<u>פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

א. (10 נק׳) הוכיחו שלכל $0 \le x \le \frac{1}{6}$ מתקיים $\left|\ln(1+3x) - 3x + 4.5x^2 - 9x^3\right| \le \frac{1}{64}$. נמקו !

ב. (10 נק׳) מצאו את ערך האינטגרל $\int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+5e^{2x}+4}$. נמקו!

פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>

א. (10 נק') תהי $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה לכל $x\in\mathbf{R}$.

1. הוכיחו שאם $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in\mathbf{R}$, אז f חח"ע ב- $\mathbf{R}$. נמקו!
2. האם f חח"ע ב- $\mathbf{R}$ גורר ש- $f'(x)\neq 0$ לכל $x\in\mathbf{R}$? נמקו!

ב. (10 נק') נתונה פונקציה $f(x)=\dfrac{1}{|x|-3}$ מוגדרת לכל $x\neq\pm3$.

חשבו את שטח התחום, שחסום על-ידי גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)=1-|x|$,
בקטע $-2\le x\le 2$. נמקו !

<u>פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ בעלת 4 נגזרות $f', f'', f''', f^{(4)}$ רציפות בקטע $[-a,a]$.
נתון $f(0)=3, f'(0)=0, f''(0)=4, f'''(0)=0$. הוכיחו שקיים קבוע ממשי M
כך שלכל $x\in[-a,a]$ מתקיים $\left|f(x)-3-2x^2\right|\le Mx^4$. נמקו !

ב. (10 נק') נתונה פונקציה רציפה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. הוכיחו שאם $(a_n)_{n\ge1}$ סדרה חסומה, אז הסדרה
$b_n=f(a_n)$ חסומה. נמקו !

פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') מצאו את הגבול: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e + 2\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{t^2}dt}{1+2\sin(x-1)-x^2}$. נמקו!

ב. (10 נק') הוכיחו ש- $|2a-\cos(3b)+\cos(3a)-2b| \le 5|a-b|$, לכל $a \ne b$ ממשיים. נמקו!

פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

סוף הפתרון !