8. חבילת רכיבים מכילה 20 רכיבים, מתוכם 5 פגומים ויתרם תקינים, מן החבילה מוציאים 4 רכיבים הנבחרים באקראי להרכבה במכשיר,

א. מהי ההסתברות לכך שהמכשיר יהיה תקין אם לשם כך נדרש שכל הרכיבים יהיו תקינים? {0.2817}

ב. מהי ההסתברות לכך שהמכשיר יהיה תקין אם לשם כך נדרש שלכל היותר רכיב אחד מבין הרכיבים המותקנים בו יהיה פגום? {0.7513}

$$\left.\begin{aligned}|\Omega| &= 20\cdot19\cdot18\cdot17 = 116{,}280\\ \underset{\text{4 תקינים}}{|A|} &= 15\cdot14\cdot13\cdot12 = 32{,}760\end{aligned}\right\} P_א = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{32{,}760}{116{,}280} = 0.2817 \quad (א)$$

$$\underset{\text{3 תקינים בדיוק}}{|B|} = 15\cdot14\cdot13\cdot5\cdot\binom{4}{1} = 54{,}600 \Longrightarrow P_ב = \frac{|A|+|B|}{|\Omega|} = 0.7513 \quad (ב)$$

$$\underset{\text{2 בדיוק}}{|C|} = 15\cdot14\cdot5\cdot4\cdot\binom{4}{2} = 25{,}200 \qquad \underset{\text{1 בדיוק}}{|D|} = 15\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\binom{4}{3} = 3{,}600$$

$$\underset{\text{הכל פגום}}{|E|} = 5\cdot4\cdot3\cdot2 = 120$$

$$|\Omega| = |A|+|B|+|C|+|D|+|E| = 116{,}280 \checkmark$$

10. בקופסא יש 4 כדורים שחורים ו 6 כדורים לבנים, מן הקופסא מוציאים שלושה כדורים ללא החזרה, מהן התוצאות האפשריות הנצפות בניסוי ומהן ההסתברויות להן?

$$\Omega = \{\underset{=3B}{(B,B,B)}, \underset{=2B}{\overbrace{(B,B,W)}^{\text{פי 3 סידורים}}}, \underset{=1B}{\overbrace{(B,W,W)}^{\text{פי 3 סידורים}}}, \underset{=0B}{(W,W,W)}\}$$

$$|\Omega| = 10\cdot9\cdot8 = 720$$

$$\left.\begin{aligned}P(3B) &= \frac{4\cdot3\cdot2}{|\Omega|} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30} = 0.0333\\ P(2B) &= \frac{\binom{3}{1}\cdot4\cdot3\cdot6}{|\Omega|} = \frac{216}{720} = 0.3\\ P(1B) &= \frac{\binom{3}{2}\cdot4\cdot6\cdot5}{|\Omega|} = \frac{360}{720} = 0.5\\ P(0B) &= \frac{6\cdot5\cdot4}{|\Omega|} = \frac{120}{720} = 0.1666\end{aligned}\right\} = P(\Omega) = 1$$

11. מקבוצה של 10 נשים ו 6 גברים נבחר ועד של 6 נבחרים, אם הבחירה נעשית באקראי:

א. מהי ההסתברות לכך שהועד מורכב כולו מנשים?

ב. מהי ההסתברות לכך שמחצית מחברי הועד נשים?

ג. מהי ההסתברות לכך שלפחות ארבעה מחברי הועד גברים?

$$\Omega = \{6w, 5w, 4w, 3w, 2w, 1w, 0w\}$$

$$|\Omega| = 16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11 = 5,765,760$$

א

$$|6w| = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = 151,200$$

$$P(6w) = \frac{|6w|}{|\Omega|} = \frac{151,200}{5,765,760} = 0.0262$$

ב

$$|3w| = \binom{6}{3}\cdot10\cdot9\cdot8\cdot6\cdot5\cdot4 = 1,728,000$$

$$P(3w) = \frac{|3w|}{|\Omega|} = \frac{1,728,000}{5,765,760} = 0.2996$$

ג

$$P(0w)+P(1w)+P(2w) \equiv \underbrace{\text{לפחות 4 גברים = לכל היותר 2 נשים}}_{\text{מאורע } C}$$

$$= \frac{|0w|+|1w|+|2w|}{|\Omega|}$$

- $|0w| = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$
- $|1w| = \binom{6}{1}\cdot10\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 43,200$
- $|2w| = \binom{6}{2}\cdot10\cdot9\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 486,000$

$$720 + 43,200 + 486,000 = 529,920$$

$$\Longrightarrow P(C) = \frac{529,920}{5,765,760} = 0.0919$$

12. גלידרייה מציעה 7 טעמים שונים של גלידה. שלושה לקוחות מגיעים, וכל אחד מהם מקבל כדור גלידה אחד שנבחר עבורו באופן אקראי. חשבו את הסיכויים של המאורעות הבאים:

עם חזרות

א. שני הכדורים שקיבלו שני הלקוחות הראשונים יהיו בטעמים שונים.

ב. ששני הראשונים קיבלו טעם שונה, אבל השלישי כבר קיבל טעם זהה לאחד משני הראשונים.

ג. **לפחות** שניים מבין שלושת הלקוחות קיבלו כדור באותו טעם.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\} \Longrightarrow$ מ"מ סימטרי

$P(e_i) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{7}$

א) $P(A) = \frac{1}{7}$; $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = 0.8571$

ב) $0.8571 \cdot \frac{2}{7} = 0.2449$

ג) $P(2_s) = \frac{\binom{3}{2} \cdot 7 \cdot 1 \cdot 6}{7^3} = \frac{18}{49} = 0.3673$

$+$

$P(3_s) = \frac{7 \cdot 1 \cdot 1}{7^3} = \frac{1}{49} = 0.0204$

$P_ג = \frac{19}{49}$

13. בכיתה שבה 30 תלמידים מחלקים בסיום שנת הלימודים פרסים ל-3 תלמידים: פרס על הצטיינות בלימודים, פרס על שקדנות והתמדה ופרס על תרומה חברתית בולטת.

א. בהנחה שתלמיד אינו יכול לזכות ביותר מפרס אחד, חשבו:

א1. את ההסתברות שתמר, אחת התלמידות בכתה, תזכה בפרס על הצטיינות בלימודים. (1/30)

א2. את ההסתברות שתמר תזכה בפרס כלשהו. (1/10)

ב. חזרו על החישובים כאשר תלמיד יכול לזכות ביותר מפרס אחד. ב1. (1/30), ב2. (0.0967)

$\Omega_1 = \{1,2,\ldots,30\}$ = מ"מ סימטרי = תלמידי הכיתה

$\Omega_2 = \{(1,2,3),(1,2,4),\ldots(2,1,3),(2,1,4),\ldots(30,29,28)\}$ = סימטרי. התלמידים הנבחרים

$|\Omega_2| = \frac{30!}{27!} = 24,360$

א1

נגדיר תמר = תלמיד #1

$i=1$ בקבוצה (x,y,z) מייצג זוכה בהצטיינות בלימודים.

נגדיר מאורע A = תמר זוכה בהצטיינות בלימודים = המספר '1' מופיע ב-$i=1$.

$|A| = \underset{i=2}{29}\cdot\underset{i=3}{28} = 812 \quad ; \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{812}{24,360} = 0.0333 = \frac{1}{30}$

א2

נגדיר מאורע B = תמר זוכה בפרס השני = המספר '1' מופיע ב-$i=2$.

$|B| = \underset{i=1}{29}\cdot\underset{i=3}{28} = 812 \quad ; \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{812}{24,360} = 0.0333 = \frac{1}{30}$

נגדיר מאורע C = תמר זוכה בהצטיינות בלימודים = המספר '1' מופיע ב-$i=3$.

$|C| = \underset{i=1}{29}\cdot\underset{i=2}{28} = 812 \quad ; \quad P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{812}{24,360} = 0.0333 = \frac{1}{30}$

תמר זוכה בפרס כלשהו $= (A\cup B\cup C) \underset{\text{זרים, כי כך הגדרנו את } \Omega_2}{\Leftarrow} = A+B+C = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

ב) נגדיר מרחב מדגם חדש. $\Omega_3 = \{(1,1,1), (1,1,2), \dots (2,1,1), \dots (30,30,30)\}$

$$|\Omega_3| = 30^3 = 27{,}000$$

ב1)

נגדיר תמר = תלמיד #1

$i=1$ בקבוצה (x,y,z) מייצג זכייה בהצטיינות בלימודים.

נגדיר מאורע A = תמר זוכה בהצטיינות בלימודים = המספר '1' מופיע כ-$i=1$.

$$|A| = \underset{i=2}{\underset{\downarrow}{30}} \cdot \underset{i=3}{\underset{\downarrow}{30}} = 900 \quad ; \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{900}{27{,}000} = 0.0333 = \frac{1}{30}$$

ב2) כאן כבר נצטרך להתייחס למאורעות זרים.

$$|(A \cup B \cup C)| = |A| + |B| + |C| - [|A\cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|] + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cap B| = \tfrac{1}{30} \cdot \tfrac{1}{30} = \tfrac{1}{900} = |A \cap C| = |B \cap C|$$

אז מתקבל:

$$|(A\cup B \cup C)| = 3 \cdot \tfrac{1}{30} - 3 \cdot \tfrac{1}{30^2} + \tfrac{1}{30^3} = \frac{3 \cdot 30^2}{30^3} - \frac{3 \cdot 30}{30^3} + \frac{1}{30^3}$$

$$= \frac{3 \cdot 30^2 - 3 \cdot 30 + 1}{30^3} = \frac{2{,}700 - 90 + 1}{27{,}000} = 0.0967$$