## יונתן כהן אלגברה לינארית תרגול מספר 12

מטריצה מייצגת של טרנספורמציה לינארית לפי בסיסים

## מטריצה מייצגת של טרנספורמציה לינארית לפי בסיסים

.1

נתונה טרנספורמציה לינארית

$$T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) \quad T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a+b-c+d) + (c-d)x + (a+b)x^2$$

נתונים הבסיסים:

 $:M_{2 imes 2}(\mathbb{R})$  בסיס של B

$$B = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

 $P_2(\mathbb{R})$  בסיס של Q

$$Q = \{q_0(x) = 1, q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 + x + x^2\}$$

 $P_{2}(\mathbb{R})$  הבסיס הסטנדרטי של P

$$P = \{1, x, x^2\}$$

- $\left[T
  ight]_{O}^{B}$  ,  $\left[T
  ight]_{P}^{B}$  : מצוא את המטריצות המייצגות את ההעתקה לפי בסיסים א.
  - .  $\operatorname{Ker} T$  ,  $\operatorname{Im} T$  ב. למצוא בסיס ומימד ל
    - t הפיכה t חחייע t על t הפיכה t
  - $.\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{\mathcal{Q}}^{B}$ עייי המטריצה המייצגת עייי איי א לחשב את ייי א איי א איי איי ד. ע ד.  $v = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . ד

א.

 $\left[T
ight]_{p}^{B}$  נמצא את המטריצה המייצגת

T עייי  $M_{2 imes 2}(\mathbb{R})$  של התחום של אברי הבסיס אברי אברי מונות אברי הבסיס

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c+d) + (c-d)x + (a+b)x^{2}$$

$$T(b_{1}) = T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 + 2x^{2}$$

$$T(b_{2}) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x + x^{2}$$

$$T(b_{3}) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 - x + x^{2}$$

$$T(b_{4}) = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - x$$

 $P_2(\mathbb{R})$  של הטווח את הקואורדינטות של התמונות האלה לפי הבסיס את הקואורדינטות של הטנדרטי של הטווח ולכן חישוב הקואורדינטות מיידי.

$$T(b_1) = T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 + 2x^2 \qquad \Rightarrow \quad [T(b_1)]_P = (2, 0, 2)$$

$$T(b_2) = T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = x + x^2 \qquad \Rightarrow [T(b_2)]_p = (0,1,1)$$

$$T(b_3) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 - x + x^2 \implies [T(b_3)]_P = (2, -1, 1)$$

$$T(b_4) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 - x \qquad \Rightarrow [T(b_4)]_P = (1, -1, 0)$$

נרשום וקטורי קואורדינטות אלה בעמודות:

$$[T]_{P}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

 $\left[T
ight]_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}$  נמצא את המטריצה המייצגת

W בסיסים על C,D , V בסיסים של בסיס אל לינארית, כאשר לינארית, כאשר ביסיס ארנספורמציה לינארית, כאשר

Aשל B של B של B לפי הבסיסים לפי הטרנספורמציה של הטרנספורמציה ווער המייצגת של הטרנספורמציה ווער

 $A \in \mathcal{U}$ ו B של B לפי הבסיסים לפי הטרנספורמציה של הטרנספורמציה וא המייצגת של הטרנספורמציה ווא  $\left[T\right]_D^B$ 

C לפי הבסיס D את המטריי של וקטור הקואורדינטות שלה הן הקואורדינט שהעמודות המטריצה את  $\left[I\right]_{c}^{D}$  אז

$$\left[ \left[ I \right]_{C}^{D} \middle| \left[ T \right]_{C}^{B} \right] \rightarrow \left[ I \middle| \left[ T \right]_{D}^{B} \right]$$

: מסקנה

טרנספורמציה לינארית, כאשר בסיס של D , V בסיס של בסיס לינארית, כאשר לינארית,  $T:V\to W$  של W .

אז

$$\left[ \left[ I \right]_{E}^{D} \middle| \left[ T \right]_{E}^{B} \right] \rightarrow \left[ I \middle| \left[ T \right]_{D}^{B} \right]$$

בתרגיל שלנו:

 $M_{2 imes 2}(\mathbb{R})$  בסיס של התחום B

 $P_2(\mathbb{R})$  של סטנדרטי לא בסיס Q ,  $P_2(\mathbb{R})$  הטווח של פסנדרטי א הבסיס הבסיס ולכן

$$\left\lceil \left[I\right]_{P}^{Q} \left| \left[T\right]_{P}^{B} \right| \rightarrow \left\lceil I \left| \left[T\right]_{Q}^{B} \right| \right\rceil$$

המטריצה לפיס Q לפי הבסיס לפי הקואורדינטות של וקטורי הבסיס לפי הבסיס לפי הבסיס והמטריצה וק $\left[I\right]_{p}^{Q}$  המטריצה לפי המטריצה המטריצה המטריצה שהעמודות המטריצה המטריעה המטר

$$Q = \{q_0(x) = 1, q_1(x) = 1 + x, q_2(x) = 1 + x + x^2\}$$

$$[I]_{P}^{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.  $\left[\left[I
ight]_{P}^{\mathcal{Q}}\left|\left[T
ight]_{P}^{\mathcal{B}}
ight]$  כעת כדי לקבל את המטריצה ל $\left[T
ight]_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}$  נדרג את המטריצה לקבל את המטריצה לקבל את המטריצה את המטריצה ל

$$\begin{bmatrix}
[I]_{P}^{Q} \mid [T]_{P}^{B}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \mid 2 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 \mid 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 \mid 2 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\xrightarrow{R_{1} \to R_{1} - R_{2}}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 \mid 2 & -1 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 1 \mid 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 \mid 2 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{2} \to R_{2} - R_{3}}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 \mid 2 & -1 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 0 \mid 2 & -1 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 0 \mid 2 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

ומכאן

$$[T]_{Q}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

: הערה

: ניתן לחשב את המטריצה  $\left[T
ight]_{\mathcal{O}}^{\mathcal{B}}$  ניתן לחשב את המטריצה

(הלא Q כבר חישבנו את הקואורדינטות מחשבים את וכעת הקואורדינטות את הבסיס אוכער,  $T(b_{\scriptscriptstyle 1}),\dots,T(b_{\scriptscriptstyle 4})$  סטנדרטי).

ב.

ימזוההי עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת של המייצגת קואורדינטות לפי אייי קואורדינטות לפי ומזוההי עם מרחב הפתרונות של המייצגת B של התחום.

ימזוההי עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת של האיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי  $\operatorname{Im} T$ הבסיס של הטווח.

נדרג את המטריצה  $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{\mathcal{Q}}^{\mathbb{R}}$  לצורה מדורגת קנונית כדי למצוא בסיסים למרחב הפתרונות ולמרחב העמודות שלה.

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{Q}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{2} \to R_{2} + R_{1} \\ R_{3} \to R_{3} - R_{1}} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{2} \to R_{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1} \to R_{1} + R_{2} \\ R_{3} \to R_{3} - 2R_{2}} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1} \to -R_{1}/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 $: \operatorname{Ker} T$ 

.  $\left[T
ight]_{o}^{^{B}}$  ממצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המטריצה

(נניח שהמשתנים הם עניח שהמשתנים).

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות y,z, ולכן המשתנים w,x הם משתנים בעמודות בעמודות חופשיים.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases} w + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \implies w = -y - \frac{1}{2}z, x = y + z$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(w, x, y, z) = (-y - \frac{1}{2}z, y + z, y, z) =$$
  
=  $y(-1, 1, 1, 0) + z(-\frac{1}{2}, 1, 0, 1)$ 

מהפתרון הכללי נובע שבסיס של מרחב הפתרונות של המטריצה  $\left[T
ight]_{O}^{^{B}}$  נתון ע״יי

$$\{(-1,1,1,0),(-\frac{1}{2},1,0,1)\}$$

מימד מרחב הפתרונות של המטריצה הפתרונות מימד מרחב מימד מים הפתרונות מימד מים הפתרונות של המטריצה הפתרונות המטריצה הפתרונות של המטריצה הפתרונות של המטריצה הפתרונות הפתרונות של המטריצה הפתרונות הפתרו

 $\dim \ker [T]_O^B = 2$ 

 $\dim \operatorname{Ker} T = 2$ 

כאמור,  $\ker T$  מזוהה עם מרחב הפתרונות של המטריצה  $[T]_{\mathcal{Q}}^{B}$ , הזיהוי נעשה ע"י קואורדינטות לפי הבסיס R של התחום.

$$B = \left\{b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ b_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$(-1,1,1,0) \xrightarrow{B} (-1) \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-\frac{1}{2},1,0,1) \xrightarrow{B} (-\frac{1}{2}) \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4 - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Met } T$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

: Im*T* 

.  $\left[T
ight]_{\mathcal{Q}}^{^{B}}$  ממצא בסיס ומימד למרחב העמודות של ומימד נמצא

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{Q}^{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות 1,2.

 $\left[T
ight]_{\mathcal{O}}^{^{B}}$  המטריצה של מרחב העמודות של מרחב המטריצה ולכן המריצה של 1,2 של המריצה ולכן נובע שעמודות א

כלומר בסיס של מרחב העמודות של המטריצה  $\left[T
ight]_{o}^{^{B}}$  נתון עייי

$$\{(2,-2,2),(-1,0,1)\}$$

הוא המטריצה העמודות של המטריצה מימד מרחב מימד מימד מימד העמודות מימד מימד מימד העמודות של המטריצה העמודות המ

$$\dim\operatorname{col}([T]_{\mathcal{Q}}^{B}) = 2$$

כאמור,  $\operatorname{Im} T$  מזוהה עם מרחב העמודות של המטריצה  $\left[T\right]_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}$ , הזיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי הבסיס של הטווח.

$$\begin{split} Q = & \{q_0(x) = 1\,,\, q_1(x) = 1 + x\,,\, q_2(x) = 1 + x + x^2\} \\ & (2, -2, 2) \xrightarrow{\quad \mathcal{Q} \quad} 2 \cdot q_0 + (-2) \cdot q_1 + 2 \cdot q_2 = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (1 + x) + 2 \cdot (1 + x + x^2) = 2 + 2x^2 \\ & (-1, 0, 1) \xrightarrow{\quad \mathcal{Q} \quad} (-1) \cdot q_0 + 0 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) = x + x^2 \\ & \text{rider} \quad \text{Im } T \quad \text{in } T \end{split}$$
 ולכן בסיס של  $T = 2$ 

`

טענה

. טרנספורמציה לינארית  $T:V \to W$ 

(V אפס אל וקטור האפס אל מכיל האפס אל אפרחב מרחב (כלומר תת מרחב (כלומר אפס אל אם ורק אם אם ורק אם T

.  $\dim \operatorname{Ker} T = 0$  חחייע אם ורק אם T

. ולכן T אינה חחייע,  $\dim \operatorname{Ker} T = 2 \neq 0$  מצאנו בסעיף בי ש

: הסבר אחר

. אינה חחייע.  $\operatorname{Ker} T \neq \{\underline{0}\}$  אינה אינה (Ker T אינה בסעיף בי ש

: טענה

. טרנספורמציה לינארית  $T:V \to W$ 

.  $\operatorname{Im} T = W$  על אם ורק אם T

.  $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$  על אם ורק אם T

. אינה על ו $\operatorname{Im} T \neq P_2(\mathbb{R})$  ו לכן ו $\operatorname{dim} \operatorname{Im} T = 2 \neq 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$  מצאנו בסעיף בי ש

. אינה חחייע ואינה על ולכן אינה הפיכה T

## : הסבר אחר

: טענה

W בסיס של C , V בסיס של בסיס של הינארית, כאשר לינארית, טרנספורמציה לינארית, כאשר די

. הפיכה אם ורק אם המטריצה המייצגת המייצגת הם ורק אם הפיכה T

,3×4 מסדר 3, ולכן היא מסדר 3, שמימדו 4 שמימדו 4 שמימדו  $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$  היא מסדר 3, היא טרנספורמציה מהמרחב אינה  $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$  שאינה מסדר 3 אינה מטריצה ריבועית ובוודאי שאינה הפיכה.

ולכן T אינה טרנספורמציה הפיכה.

טענר

W בסיס של C ערנספור בסיס של בסיס אינארית, כאשר בסיס של  $T:V \to W$ 

זא  $x \in V$ 

$$[T(x)]_C = [T]_C^B \cdot [x]_B$$

נחפש את הפתרון של מערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן נחפש את הפתרון של מערכת המשוואות האי-הומוגנית ה $b_1,b_2,b_3,b_4$  ע

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

מהמטריצה המדורגת קנונית נובע שלמערכת קיים פתרון יחיד והוא

(1,0,1,1)

היא B כצירוף אברי הבסיס ע כלומר הדרך היחידה לכתוב את הוקטור

$$v = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 + 1 \cdot b_4$$

משמעות הדבר היא שהקואורדינטות של הוקטור  $\nu$  לפי הבסיס משמעות משמעות הדבר היא

$$[v]_{p} = (1,0,1,1)$$

 $P_2(\mathbb{R})$  של הטווח של Q לפי הבסיס לפי הוקטור של הוקטות של הקואורדינטות של שלב שני: נחשב את הקואורדינטות של

$$[T(v)]_{Q} = [T]_{Q}^{B} \cdot [v]_{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

T(v) שלב שלישי: מתוך הקואורדינטות של T(v) נקבל את הוקטור

$$[T(v)]_{Q} = (7, -5, 3)$$

$$\Rightarrow T(v) = 7 \cdot q_{0} + (-5) \cdot q_{1} + 3 \cdot q_{2} = 7 \cdot 1 + (-5) \cdot (1 + x) + 3 \cdot (1 + x + x^{2}) = 5 - 2x + 3x^{2}$$

היא B בסיס של מיין המייצגת שהמטריצה שהמטריצה עהיא  $T:V \to V$  היא מיין הבסיס  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ 

$$.[T]_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

 $T(b_1)$  א. מהו

. Ker T, Im T ב. למצוא בסיס ל

יע יעל יהפיכה T האם ג. האם החייע און

T(w) לחשב,  $w = b_1 + 2b_2 + b_3$  . T(w)

?  $w \in \operatorname{Ker} T$  האם.

?  $w \in \operatorname{Im} T$  נ. האם

۸.

העמודה הראשונה של המטריצה  $[T]_{_B}$  היא הקואורדינטות של המטריצה  $[T(b_{_1})]_{_B}=(1,-1,-2)$ 

כלומר

$$T(b_1) = 1 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2 + (-2) \cdot b_3 = b_1 - b_2 - 2b_3$$

ב.

ימזוההי עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת הוי נעשה עייי קואורדינטות לפי  $\operatorname{Ker} T$ הבסיס של התחום.

ימזוההי עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת  $[T]_B$ , הזיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי Im T הבסיס של הטווח.

נדרג את המטריצה  $[T]_{\scriptscriptstyle B}$  לצורה מדורגת קנונית כדי למצוא בסיסים למרחב הפתרונות ולמרחב העמודות שלה.

$$[T]_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{2} \to R_{2} + R_{1} \atop R_{3} \to R_{3} + 2R_{1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{3} \to R_{3} - 3R_{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 $: \operatorname{Ker} T$ 

 $.[T]_{\scriptscriptstyle R}$  המטריצה של הפתרונות למרחב למרחב ממצא בסיס ומימד

(x, y, z) ונניח שהמשתנים הם

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות 1,2, ולכן המשתנים x,y הם משתנים קשורים, z משתנה חופשי. ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases} x & +z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow x=-z, y=-2z$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(x, y, z) = (-z, -2z, z) = z(-1, -2, 1)$$

נתון עייי [T] מהפתרון הכללי נובע שבסיס של מרחב הפתרונות של המטריצה

$$\{(-1, -2, 1)\}$$

הוא  $\left[T\right]_{\scriptscriptstyle B}$  מימד מרחב של הפתרונות הפתרונות מימד

 $\dim \ker[T]_{R} = 1$ 

כאמור,  $\operatorname{Ker} T$  מזוהה עם מרחב הפתרונות של המטריצה  $[T]_B$ , הזיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי הבסיס B של התחום.

$$(-1, -2, 1) \xrightarrow{B} (-1) \cdot b_1 + (-2) \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 = -b_1 - 2b_2 + b_3$$

נתון עייי Ker T ולכן בסיס של

$$\{-b_1 - 2b_2 + b_3\}$$
  
$$\dim \operatorname{Ker} T = 1$$

: Im T

 $.[T]_{\scriptscriptstyle B}$  ממטריצה של העמודות למרחב למרחב נמצא בסיס ומימד

$$[T]_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות 1,2.

 $\left. \left[ T \right]_{\scriptscriptstyle B}$  המטריצה של העמודות מרחב של בסיס הודות  $\left[ T \right]_{\scriptscriptstyle B}$  של המריצה של 1,2 של נובע ולכן ולכן ו

נתון עייי [T] נתון עייי פלומר בסיס של מרחב העמודות של מרחב

$$\{(1,-1,-2),(0,1,3)\}$$

 $\dim \operatorname{col}([T]_B) = 2$ 

כאמור,  $\operatorname{Im} T$  מזוהה עם מרחב העמודות של המטריצה אויי (נעשה עייי קואורדינטות לפי הבסיס מחור, באמור,  $\operatorname{Im} T$  של הטווח.

$$(1,-1,-2) \xrightarrow{B} 1 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2 + (-2) \cdot b_3 = b_1 - b_2 - 2b_3$$

$$(0,1,3) \xrightarrow{B} 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 3 \cdot b_3 = b_2 + 3b_3$$

נתון עייי Im T ולכן בסיס של

$${b_1 - b_2 - 2b_3, b_2 + 3b_3}$$
  
dim Im  $T = 2$ 

ډ.

. ולכן T אינה חחייע,  $\dim \operatorname{Ker} T = 1 \neq 0$  מצאנו בסעיף בי ש

: הסבר אחר

. אינה חחייע. אינה (- $b_1$  –  $2b_2$  +  $b_3$  מצאנו בסעיף בי ש (היה בו את היה בו את היה בו את אינה הבסיס (היה בו את היה בו את היש היע.

. dimV=3 בסיס של V ויש בו S וקטורים, ולכן וע

. אינה על ו $\operatorname{Im} T \neq V$  ולכן ו $\operatorname{dim} \operatorname{Im} T = 2 \neq 3 = \dim V$  מצאנו בסעיף בי ש

. אינה חחייע ואינה על ולכן אינה הפיכה T

: הסבר אחר

המטריצה ולכן אינה אפסים שורות למטריצה עם שורת אפסים ולכן אינה הפיכה. המטריצה  $[T]_{\scriptscriptstyle R}$ 

. אינה הפיכה אינה  $[T]_{\scriptscriptstyle B}$ , אפשר לחשב את הפיכה ולקבל ולקבל  $|[T]_{\scriptscriptstyle B}|$  אינה אפשר לחשב את לחילופין, אפשר אינה ולקבל

. ולכן T אינה טרנספורמציה הפיכה

٦.

.(של התחום) שלב ראשון נחשב את הקואורדינטות של הוקטור של לפי הבסיס ושלב התחום).

$$w = b_1 + 2b_2 + b_3$$

הוקטור B כבר כתוב כצירוף לינארי של אברי הבסיס w ומכאן ש

$$[w]_{R} = (1, 2, 1)$$

. שלב שני: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור T(w) לפי הבסיס B (של הטווח).

$$[T(w)]_{B} = [T]_{B}^{B} \cdot [w]_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

T(w) שלב שלישי: מתוך הקואורדינטות של T(w) נקבל את הוקטור

$$[T(w)]_B = (2,2,8)$$
  
$$\Rightarrow T(w) = 2 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 8 \cdot b_3$$

ה.

ימזוההי עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת המייצגת קואורדינטות לפי הפתרונות של מטריצה המייצגת של התחום. Bשל התחום.

ולכן הפתרונות שלו נמצא במרחב הפתרונות אם וקטור הקואורדינטות אם נמצא במרחב הפתרונות של ולכן הוקטור ווק אם ורק אם

. Av = 0 אם ורק אם מתקיים אם מטריצה א מטריצה פתרונות של מטריצה על נמצא ממרחב

נחשב

$$[T]_{B} \cdot [w]_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ולכן וקטור הקואורדינטות  $[w]_{B}$  אינו במרחב הפתרונות של המטריצה  $[w]_{B}$ , כלומר הוקטור א אינו ב נלכן וקטור הקואורדינטות . Ker T

٦.

ימזוההי עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת  $[T]_B$ , הזיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי Im T הבסיס של הטווח.

ולכן העמודות של נמצא במרחב אם ורק אם ורק אם ורק אם ורק אם ורק אם וחקטור וולכן אורדינטות ורק ורק אם ורק אם

וקטור ע נמצא במרחב עמודות של מטריצה A אם ורק אם הוא צרוף לינארי של עמודות המטריצה, וקטור ע נמצא במרחב של מטריצה במרון למערכת המשוואות המתאימה למטריצה [ $A \mid v$ ].

ודרג

$$\begin{bmatrix} [T]_B \mid [w]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1 \atop R_3 \to R_3 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

הגענו למצטריצה מדורגת (קנונית).

התקבלה שורת סתירה (בשורה 3).

ולכן למערכת המשוואות אין פתרון.

ומכאן שוקטור הקואורדינטות  $[w]_B$  אינו במרחב העמודות של המטריצה ו $[w]_B$ , כלומר הוקטור אינו ב Im T

 $T:P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) \quad T(p) = p(1) - xp'(x) + 3p(x)$  נתונה טייל

- .  $\left[T\right]_{P}$   $P=\{1,x,x^{2}\}$  א. למצוא את המטריצה המייצגת את ההעתקה לפי בסיס הסטנדרטי
  - . Ker T , Im T ב. למצוא בסיס ומימד ל
    - ! האם T חחייע ! על ! הפיכה
  - $T^{-1}$  לפי הבסיס הסטנדרטי של ההעתקה ההפוכה למצוא את המטריצה המייצגת של ההעתקה ההעתקה למצוא את המטריצה המייצגת המייצגת המייצגת המעתקה ההעתקה החפוכה
    - $T^{-1}$  ה. למצוא את הנוסחה של ההעתקה התפוכח

א.

 $\left[T
ight]_{P}^{P}$  נמצא את המטריצה המייצגת

T עייי ( $P_2(\mathbb{R})$  נחשב את תמונות אברי הבסיס P

$$T(p) = p(1) - xp'(x) + 3p(x)$$

$$T(1) = 1 - x \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4$$

$$T(x) = 1 - x \cdot 1 + 3 \cdot x = 1 + 2x$$

$$T(x^2) = 1^2 - x \cdot 2x + 3 \cdot x^2 = 1 + x^2$$

.( $P_2(\mathbb{R})$  של הטווח של התמונות האלה לפי הבסיס א התמונות של התמונות של התמונות האלה לפי הקואורדינטות ה

נשים לב שזהו הבסיס הסטנדרטי של הטווח ולכן חישוב הקואורדינטות מיידי.

$$T(1) = 4 \qquad \Rightarrow [T(1)]_p = (4,0,0)$$

$$T(x) = 1 + 2x$$
  $\Rightarrow$   $[T(x)]_p = (1, 2, 0)$ 

$$T(x^2) = 1 + x^2 \implies [T(x^2)]_p = (1,0,1)$$

נרשום וקטורי קואורדינטות אלה בעמודות:

$$[T]_{P}^{P} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ב.

ימזוההי עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת אורדינטות של מטריצה הפתרונות של מרחב הפתרונות של המייצגת אורדינטות לפי הבסיס Pשל התחום.

ימזוההי עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת של הזיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי  $\operatorname{Im} T$ הבסיס של הטווח.

נדרג את המטריצה  $\left[T\right]_{p}$  לצורה מדורגת קנונית כדי למצוא בסיסים למרחב הפתרונות ולמרחב העמודות שלה.

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{P} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{2} \to R_{2}/2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1} \to R_{1} - R_{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1} \to R_{1} - R_{3}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1} \to R_{1}/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

 $: \operatorname{Ker} T$ 

.  $[T]_{\scriptscriptstyle P}$  ממצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המטריצה

(x, y, z) נניח שהמשתנים הם

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

. איברים פותחים נמצאים בעמודות 1,2,3, ולכן כל המשתנים x,y,z הם משתנים קשורים

ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

הוא  $\left[T
ight]_{\scriptscriptstyle P}$  המטריצה של הפתרונות כלומר כלומר

 $\{(0,0,0)\}$ 

הוא  $\left[T\right]_{\scriptscriptstyle P}$  המטריצה של הפתרונות הפתרונות בסיס

 $\phi$ 

הוא הפתרונות של המטריצה הפתרונות מימד מרחב מימד מים הפתרונות של המטריצה הפתרונות מימד מימד היא מימד מימד הפתרונות של המטריצה המטריצה הפתרונות של המטריצה הפתרונות של המטריצה המטריעה המטריצה המטריעה המטריעה המטריעה המטריעה המטריעה המטריעה

 $\dim \ker [T]_P = 0$ 

כאמור,  $[T]_P$  הזיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי הפתרונות של המטריצה אייי קואורדינטות לפי הבסיס בסיס של התחום.

$$(0,0,0) \xrightarrow{P} 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 0$$

הוא Ker T כלומר

$$Ker T = \{0 + 0x + 0x^2\} = \{\underline{0}\}\$$

נתון עייי  $\operatorname{Ker} T$  ולכן בסיס של

ф

 $\dim \operatorname{Ker} T = 0$ 

: Im*T* 

 $[T]_{p}$  ממצא בסיס ומימד למרחב העמודות של המטריצה

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}_{P} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות 1,2,3

 $.\big[T\big]_{_{\!P}}$  המטריצה של מרחב מרחב של בסיס הודות 1,2,3 של המטריצה ולכן נובע אינו המטריצה ולכן של המטריצה המחיצה המחיצה ולכן המחיצה המוצה המוצי המחיצה המומי המומי המחיצה המחיצה המומי המומי המומי המומי המומי ה

נתון עייי  $\left[T
ight]_{P}$  כלומר בסיס של מרחב העמודות של המטריצה

$$\{(4,0,0),(1,2,0),(1,0,1)\}$$

מימד מרחב העמודות של המטריצה  $\left[T
ight]_{\scriptscriptstyle P}$  הוא

 $\dim \operatorname{col}([T]_p) = 3$ 

כאמור,  $\operatorname{Im} T$  מזוהה עם מרחב העמודות של המטריצה  $\left[T\right]_{P}$ , הזיהוי נעשה עייי קואורדינטות לפי הבסיס של הטווח.

$$(4,0,0) \xrightarrow{P} 4$$

$$(1,2,0) \xrightarrow{P} 1+2x$$

$$(1,0,1) \xrightarrow{P} 1 + x^2$$

ינתון עייי Im T נתון עייי

$${4, 1+2x, 1+x^2}$$
  
dim Im  $T = 3$ 

ډ.

. ולכן T חחייע,  $\dim \operatorname{Ker} T = 0$  מצאנו בסעיף בי ש

הסבר אחר

. עיש. את ולכן את את את את את את את את אפס), ולכן  $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$  מצאנו בסעיף בי ש

. אל.  $\operatorname{Im} T = P_2(\mathbb{R})$ ו לכן ,  $\dim \operatorname{Im} T = 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$ ו על.

.חחייע ועל ולכן היא הפיכה T

: הסבר אחר

המטריצה ולכן היא הפיכה. שקולת שורות שקולת שורות היחידה ולכן היא הפיכה.  $\left[T\right]_{\scriptscriptstyle P}$ 

. הפיכה  $[T]_{_B}$  ולכן , $|[T]_{_P}|=8 \neq 0$  ולקבל את לחילופין, אפשר לחשב את הפיכה ולקבל אפיכה ולקבל

ולכן T טרנספורמציה הפיכה.

٦.

W בסיס של C , V בסיס של בסיס אל לינארית, כאשר בסיס של דינארית, טרנספורמציה לינארית, כאשר

M של N של B של B אפיסיסים לפי הבסיסים של הטרנספורמציה ווערנספורמציה  $\left[T
ight]_{C}^{B}$ 

C הבסיסים T לפי הבסיסים לפי המינצגת של הטרנספורמציה בסיסים המינצגת על הבסיסים הפיכה אז  $T^{-1}\Big]^{c}_{B}$  ,  $T^{-1}:W o V$  אם אם בסיסים על אינ

אז

$$\left[T^{-1}\right]_{B}^{C} = \left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)^{-1}$$

כדי למצוא את המטריצה של הטרנספורמציה ההפוכה  $T^{-1}$ , נחשב את המטריצה של הטרנספורמציה המייצגת המייצגת [T].

$$\begin{split} & \left[T^{-1}\right]_{P}^{P} = \left(\left[T\right]_{P}^{P}\right)^{-1} \\ & \left[\left[T\right]_{P}^{P} \mid I\right] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{2} \to R_{2}/2} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R_{1} \to R_{1} - R_{2}} & \left[ \begin{matrix} 4 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \xrightarrow{R_{1} \to R_{1} - R_{3}} & \left[ \begin{matrix} 4 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \\ & \xrightarrow{R_{1} \to R_{1}/4} & \left[ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \end{split}$$

ולכן

ה.

כדי למצוא את הנוסחה של הטרנספורמציה ההפוכה  $T^{-1}$ , נחשב את הטרנספורמציה ההפוכה  $T^{-1}$  על וקטור כללי במרחב.

 $P_2(\mathbb{R})$  וקטור כללי במרחב

$$v = a + bx + cx^2$$

.(של התחום) און פיסיס לפי הבסיס על הוקטור של הוקטור של הוקטור של הבסיס לפי הבסיס את הקואורדינטות של התחום ולכן חישוב הקואורדינטות מיידי.

$$[v]_{P} = (a,b,c)$$

. (של הטווח) אני: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור  $T^{-1}(v)$  לפי הבסיס (של הטווח).

$$\begin{bmatrix} T^{-1}(v) \end{bmatrix}_{P} = \begin{bmatrix} T^{-1} \end{bmatrix}_{P}^{P} \cdot \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}_{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a - \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c \\ \frac{1}{2}b \\ c \end{bmatrix}$$

 $T^{-1}(v)$  מתוך הקואורדינטות של  $T^{-1}(v)$  נקבל את הוקטור מתוך שלב

$$\left[T^{-1}(v)\right]_{P} = \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c, \frac{1}{2}b, c\right)$$

$$\Rightarrow T^{-1}(v) = (\frac{1}{4}a - \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c) + \frac{1}{2}bx + cx^2$$