יונתן כהן
חדו״א 2
תרגול מספר 6

דיפרנציאביליות
מישור משיק ונורמל
קירוב לינארי
כלל השרשרת

דיפרנציאביליות

.1

האם הפונקציה $f(x,y)=e^{x^2}\ln y$ דיפרנציאבילית בתחום $D=\{(x,y)\,|\,y>0\}$?

נחשב את הנגזרות החלקיות של f

$$f_x(x,y)=e^{x^2}2x\ln y$$

$$f_y(x,y)=\frac{e^{x^2}}{y}$$

f_x, f_y הן נוסחאות אלמנטריות ולכן רציפות בכל תחום הגדרתן שהוא D.

משפט:
אם f_x ו f_y רציפות בנקודה (x_0,y_0) אז f דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0).

ולכן מהמשפט נובע ש f דיפרנציאבילית בכל התחום D.

.2

$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^2+y)^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, האם f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$?

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+0)^2}{x^4+0^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=\lim_{x\to0}1=1$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $x=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to0} f(0,y)=\lim_{y\to0}\frac{(0^2+y)^2}{0^4+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{y^2}=\lim_{y\to0}1=1$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=x^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,x^2)=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+x^2)^2}{x^4+(x^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^4}{2x^4}=\lim_{x\to0}2=2$$

מכיוון שהגבולות של f לאורך שני המסלולים שונים, נובע שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ אינו קיים.

מכיוון שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ אינו קיים נובע ש f אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

משפט :
אם f דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אז f רציפה בנקודה (x_0,y_0) .

מהמשפט נובע שמכיוון ש f אינה רציפה בנקודה $(0,0)$, נובע ש f אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

.3

$$. f(x,y)=\begin{cases} 2x+e^{\frac{y}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

א. האם f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$?

ב. האם f דיפרנציאבילית ב $(x,y)\neq(0,0)$?

א.

ראינו בתרגול קודם שבנקודה $(x,y)=(0,0)$ אין ל f נגזרת חלקית לפי y .

משפט:
אם f דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אז ל f קיימות נגזרות חלקיות (לפי x ולפי y) בנקודה (x_0,y_0).

מהמשפט נובע שמכיוון שלפונקציה f אין נגזרת חלקית לפי y בנקודה $(0,0)$, נובע ש f אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

ב.

ראינו בתרגול קודם שלכל $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)=2-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$f_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

f_x, f_y הן נוסחאות אלמנטריות ולכן רציפות בכל תחום הגדרתן שהוא $(x,y)\neq(0,0)$.

ולכן ממשפט נובע ש f דיפרנציאבילית בכל $(x,y)\neq(0,0)$.

מישור משיק ווקטור נורמל לגרף של פונקציה ב 2 משתנים

.1

למצוא משוואת המישור המשיק ווקטור נורמל למישור המשיק, לגרף הפונקציה $f(x,y)=\ln(e^x+y^e)$ בנקודה $(0,1)$.

משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) :
$z-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$
נוסחת וקטור נורמל למישור המשיק לגרף של פונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) :
$\vec{N}=\pm\left(f_x(x_0,y_0)\,,\,f_y(x_0,y_0)\,,-1\right)$

נחשב את הנגזרות החלקיות של f

$$f_x(x,y)=\frac{1}{e^x+y^e}\cdot e^x=\frac{e^x}{e^x+y^e}$$

$$f_y(x,y)=\frac{1}{e^x+y^e}\cdot ey^{e-1}=\frac{ey^{e-1}}{e^x+y^e}$$

נחשב את ערכי f והנגזרות החלקיות f_x,f_y בנקודה $(x_0,y_0)=(0,1)$:

$$f(x_0,y_0)=f(0,1)=\ln(e^0+1^e)=\ln 2$$

$$f_x(x_0,y_0)=f_x(0,1)=\frac{e^0}{e^0+1^e}=\frac{1}{2}$$

$$f_y(x_0,y_0)=f_y(0,1)=\frac{e\cdot 1^{e-1}}{e^0+1^e}=\frac{e}{2}$$

וכעת

משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה $(0,1)$:

$$z-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$z-\ln 2=\frac{1}{2}\cdot(x-0)+\frac{e}{2}\cdot(y-1)$$

$$z=\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}y+\left(\ln 2-\frac{e}{2}\right)$$

נוסחת וקטור נורמל למישור המשיק לגרף של פונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) :

$$\vec{N}=\left(f_x(x_0,y_0)\,,\,f_y(x_0,y_0)\,,-1\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{e}{2},-1\right)$$

או

$$\vec{N}=-\left(f_x(x_0,y_0)\,,\,f_y(x_0,y_0)\,,-1\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{e}{2},1\right)$$

אפשר לכפול וקטור בסקלר שונה מאפס, למשל

$$\vec{N}=(1,e,-2)$$

קירוב לינארי

1.

לחשב בקירוב את $\sqrt[4]{15.09+0.99^3}$.

נוסחת הקירוב הלינארי:

$$f(x_1,y_1)\cong f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

בצורה אחרת:

$$\Delta f\cong f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y=df(x_0,y_0)$$

צריך לבחור פונקציה $f(x,y)$, נקודה (x_1,y_1) ונקודה (x_0,y_0) כך ש:

- $f(x_1,y_1)$ הוא המספר המבוקש, כלומר $f(x_1,y_1)=\sqrt[4]{15.09+0.99^3}$.
- f והנגזרות החלקיות f_x,f_y ידועות בנקודה (x_0,y_0).
- הנקודה (x_1,y_1) קרובה לנקודה (x_0,y_0).

נבחר:

$$f(x,y)=\sqrt[4]{x+y^3}=(x+y^3)^{\frac{1}{4}}$$
$$(x_1,y_1)=(15.09,0.99)$$
$$(x_0,y_0)=(15,1)$$

ואז

$$\Delta x=x_1-x_0=15.09-15=0.09$$
$$\Delta y=y_1-y_0=0.99-1=-0.01$$

נחשב את הנגזרות החלקיות של f

$$f_x(x,y)=\frac{1}{4}(x+y^3)^{-\frac{3}{4}}\cdot 1=\frac{1}{4(\sqrt[4]{x+y^3})^3}$$
$$f_y(x,y)=\frac{1}{4}(x+y^3)^{-\frac{3}{4}}\cdot 3y^2=\frac{3y^2}{4(\sqrt[4]{x+y^3})^3}$$

נחשב את ערכי f והנגזרות החלקיות f_x,f_y בנקודה (x_0,y_0)

$$f(x_0,y_0)=f(15,1)=\sqrt[4]{15+1^3}=\sqrt[4]{16}=2$$
$$f_x(x_0,y_0)=f_x(15,1)=\frac{1}{4(\sqrt[4]{15+1^3})^3}=\frac{1}{4\cdot 2^3}=\frac{1}{32}$$
$$f_y(x_0,y_0)=f_y(15,1)=\frac{3\cdot 1^2}{4(\sqrt[4]{15+1^3})^3}=\frac{3}{4\cdot 2^3}=\frac{3}{32}$$

וכעת

$$f(x_1,y_1)\cong f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$
$$\sqrt[4]{15.09+0.99^3}\cong 2+\frac{1}{32}\cdot 0.09+\frac{3}{32}\cdot(-0.01)=$$
$$=2+\frac{1}{32}\cdot\frac{9}{100}-\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{100}=2\frac{6}{3200}=\frac{6406}{3200}=2.001875$$

הערה:

הערך ה'מדוייק' הוא $\sqrt[4]{15.09+0.99^3}\cong 2.00188168...$.

כלל השרשרת

.1

$z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, כאשר $y = h(t) = \ln t$, $x = g(t) = e^t$, לחשב $\frac{dz}{dt}$ לפי כלל השרשרת.

z פונקציה של x, y ,

x, y פונקציות של t .

לאחר ההרכבה z פונקציה של t : $z(t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$ רציפות (אלמנטריות) ולכן הפונקציה $z = \ln(x^2+y^2)$ דיפרנציאבילית.

הפונקציות $y = \ln t$, $x = e^t$ גזירות.

ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot e^t + \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{t}$$

$$= \frac{2e^t}{(e^t)^2+(\ln t)^2}\cdot e^t + \frac{2\ln t}{(e^t)^2+(\ln t)^2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{2e^{2t}}{e^{2t}+\ln^2 t} + \frac{2\ln t}{(e^{2t}+\ln^2 t)t}$$

.2

$z=\frac{\ln v}{e^u}$, כאשר $v=4x^2+5y^2$, $u=2x-3y+4xy$, לחשב $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ לפי כלל השרשרת.

z פונקציה של u,v ,

u,v פונקציות של x,y .

לאחר ההרכבה z פונקציה של x,y : $z(x,y)$.

$$z=\frac{\ln v}{e^u}=e^{-u}\ln v$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=-e^{-u}\ln v \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{e^{-u}}{v}$$

$\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ רציפות (אלמנטריות) ולכן הפונקציה $z(u,v)$ דיפרנציאבילית.

$$u=2x-3y+4xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2+4y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-3+4x$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ רציפות (אלמנטריות) ולכן הפונקציה $u(x,y)$ דיפרנציאבילית.

$$v=4x^2+5y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=8x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=10y$$

$\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ רציפות (אלמנטריות) ולכן הפונקציה $v(x,y)$ דיפרנציאבילית.

ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=\left[-e^{-u}\ln v\right]\cdot(2+4y)+\left[\frac{e^{-u}}{v}\right]\cdot 8x$$

$$=\left[-e^{-(2x-3y+4xy)}\ln(4x^2+5y^2)\right]\cdot(2+4y)+\left[\frac{e^{-(2x-3y+4xy)}}{4x^2+5y^2}\right]\cdot 8x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=$$

$$=\left[-e^{-u}\ln v\right]\cdot(-3+4x)+\left[\frac{e^{-u}}{v}\right]\cdot 10y$$

$$=\left[-e^{-(2x-3y+4xy)}\ln(4x^2+5y^2)\right]\cdot(-3+4x)+\left[\frac{e^{-(2x-3y+4xy)}}{4x^2+5y^2}\right]\cdot 10y$$

.3

$z = yf(x^2 - y^2)$.

א. לחשב $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$ כאשר f גזירה ברציפות (כלומר f' רציפה).

ב. להוכיח ש z מקיימת את המשוואה $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

א.

<u>פתרון I</u>

נסמן $v = y$, $u = x^2 - y^2$ ולכן $z = v \cdot f(u)$.

כלומר:

$z = v \cdot f(u)$ פונקציה של u, v, כאשר בתוך הנוסחה של $z(u,v)$ ישנה f לא ידועה,

u, v פונקציות של x, y .

לאחר ההרכבה z פונקציה של x, y : $z(x, y)$.

$$z = v \cdot f(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v \cdot f'(u) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = f(u)$$

נתון ש f' , f רציפות ולכן $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}$ רציפות, ולכן הפונקציה $z(u,v)$ דיפרנציאבילית.

$$u = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}$ רציפות (אלמנטריות) ולכן הפונקציה $u(x, y)$ דיפרנציאבילית.

$$v = y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ רציפות (אלמנטריות) ולכן הפונקציה $v(x, y)$ דיפרנציאבילית.

ולכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \left[v \cdot f'(u)\right]\cdot 2x + \left[f(u)\right]\cdot 0 = \\ &= y \cdot f'(x^2 - y^2)\cdot 2x = 2xyf'(x^2 - y^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= \left[v \cdot f'(u)\right]\cdot(-2y) + \left[f(u)\right]\cdot 1 \\ &= y \cdot f'(x^2 - y^2)\cdot(-2y) + f(x^2 - y^2)\cdot 1 = f(x^2 - y^2) - 2y^2 f'(x^2 - y^2)\end{aligned}$$

כעת נראה שמתקיימת המשוואה:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\cdot\left[2xyf'(x^2 - y^2)\right] + \frac{1}{y}\cdot\left[f(x^2 - y^2) - 2y^2 f'(x^2 - y^2)\right] =$$

$$= 2yf'(x^2 - y^2) + \frac{f(x^2 - y^2)}{y} - 2yf'(x^2 - y^2) = \frac{f(x^2 - y^2)}{y} = \frac{yf(x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}$$

פתרון II

נגזור את $z(x,y)$ 'בצורה אינטואיטיבית'.

f גזירה, x^2-y^2 דיפרנציאבילית, ולכן אפשר לגזור את ההרכבה $f(x^2-y^2)$ לפי כלל השרשרת.

$$z_x(x,y)=\left(yf(x^2-y^2)\right)_x=y\cdot f'(x^2-y^2)\cdot 2x=2xyf'(x^2-y^2)$$

$$z_y(x,y)=\left(yf(x^2-y^2)\right)_y=1\cdot f(x^2-y^2)+y\cdot f'(x^2-y^2)\cdot(-2y)=f(x^2-y^2)-2y^2f'(x^2-y^2)$$

.4

$z = x^2 f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ כאשר f דיפרנציאבילית. להוכיח שמתקיים $xz_x + yz_y = 2z$.

f דיפרנציאבילית, $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ דיפרנציאביליות, ולכן אפשר לגזור את ההרכבה $f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ לפי כלל השרשרת.

נגזור את $z(x, y)$ 'בצורה אינטואיטיבית'.

לשם נוחות נחשוב על f כפונקציה של המשתנים u, v כלומר $f = f(u, v)$.

$$z_x = 2x \cdot f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) + x^2\left[f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{y} + f_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]$$

$$= 2xf\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y} f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) - yf_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$$

$$z_y = x^2\left[f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}\right] =$$

$$= -\frac{x^3}{y^2} f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) + xf_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$$

כעת נראה שמתקיימת המשוואה :

$$xz_x + yz_y = x\left[2xf\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y} f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) - yf_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)\right] + y\left[-\frac{x^3}{y^2} f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) + xf_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)\right] =$$

$$= 2x^2 f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) + \frac{x^3}{y} f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) - xyf_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) - \frac{x^3}{y} f_u\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) + xyf_v\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) =$$

$$= 2 \cdot x^2 f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) = 2 \cdot z(x, y)$$