פתרון מועד X

שאלה 1: קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\, ln(n+1)}$ (9 נק'),

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{(n+1)\sqrt{n}}$ (8 נק'),

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ (8 נק').

פתרון:

א. זהו טור לייבניץ לכן מתכנס. אבל האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$ שהוא "חבר" של טור הערכים המוחלטים מתבדר: ניתן לראות זאת ע"י הצבת $t = \ln(x+1)$ עם $x+1 = e^t$ כך ש:

$dx = e^t dt = (x+1)\, dt$ הנותן $\int_2^{\infty} \frac{dt}{t}$ שמתבדר, לכן בסה"כ הטור המקורי מתכנס בתנאי.

ב. טור הערכים המוחלטים מתכנס עפ"י השוואה ל$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ שמתכנס, לכן מתכנס בהחלט.

ג. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ ולכן מתבדר (בהשוואה לטור הרמוני).

שאלה 2:

א. מצאו משטח ריבועי $z = g(x,y)$ (כלומר פולינום ממעלה 2) הקרוב למשטח $z = f(x,y) = x^y$ סביב הנקודה $(1,1,1)$ (15 נק'),

ב. מצאו נקודה שהיא קריטית גם של f וגם של g. האם היא נקודת קיצון או אוכף של כל אחת מהפונקציות? (10 נק').

פתרון:

א. פיתוח טיילור מסדר שני סביב הנקודה נותן: $z = xy - y + 1$.

ב. הנקודה $(1,0)$ היא קריטית של שתי הפונקציות. נחשב את ההסיאן שלהן שם ונקבל:

$Hf_{(1,0)} = Hg_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, כלומר עבור שתי הפונקציות הנקודה היא אוכף.

שאלה 3:

תיבה שקודקוד אחד שלה מונח בראשית הצירים חסומה ע"י האליפסואיד: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$ (כלומר הקודקוד הנגדי לזה שבראשית מונח על האליפסואיד). מהו הסכום המקסימלי והמינימלי האפשרי של מימדי התיבה?

פתרון:

צריך למקסם ולמזער את הפונקציה $x + y + z$ תחת האילוץ $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$. נרשום את פונקצית לגרנז':

$L(x,y,z) = x + y + z + \lambda\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 66\right)$ ונאתר נקודות קריטיות:

$$\begin{cases} L_x(x,y,z) = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y(x,y,z) = 1 + 4\lambda y = 0 \\ L_z(x,y,z) = 1 + 6\lambda z = 0 \end{cases}$$

ונקבל: $x = 2y = 3z$. יחד עם האילוץ נקבל:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = (3z)^2 + 2\left(\frac{3}{2}z\right)^2 + 3z^2 = \frac{33z^2}{2} = 66 \Rightarrow z^2 = 4.$$

מתקבלות שתי נקודות: $\pm(6,3,2)$. כיוון שהתחום הוא קומפקטי, עפ"י ויירשטראס קיימות נקודות קיצון גלובליות: המימדים החיוביים נותנים סכום מקסימלי של 11 והשליליים 11-. אלא שמימדים אלו מוגבלים בפועל ע"י אפס, לכן המינימום יתקבל כאשר $x = y = 0, z = \sqrt{22}$ ואז הסכום יהיה $\sqrt{22}$.

שאלה 4: נתון שדה וקטורי: $F = ze^{xy}\left(yz, xz, a\right)$ ועקום במרחב: $C = \left\{r(t) = \left(b\cos t, b\sin t, t\right) : 0 \le t \le \pi \ (b > 0)\right\}$.

א. עבור איזה ערך של a השדה F משמר ב-$\mathbb{R}^3$? (10 נק')

ב. חשבו את $\int_C F \bullet dr$ עבור הערך של a מסעיף א. (10 נק')

ג. האם קיים k טבעי כך שהחישוב בסעיף ב' בתחום $0 \le t \le k\pi$ ישווה לאפס? (5 נק').

פתרון:

א. כיוון שהתחום $\mathbb{R}^3$ הינו פשוט קשר מספיק לדרוש שהרוטור ישווה לוקטור האפס שם:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{xy}yz^2 & e^{xy}xz^2 & e^{xy}az \end{vmatrix} = e^{xy}\left(azx - 2zx, 2zy - azy, yxz^2 + z^2 - xyz^2 - z^2 = 0\right)$$

וזה קורה כאשר $a = 2$.

ב. נחשב את פונקציית הפוטנציאל (עד כדי קבוע): $U(x,y,z) = e^{xy}z^2$ ונקבל:

$$\int_C F \bullet dr = U(-b,0,\pi) - U(b,0,0) = \pi^2.$$

דרך אחרת: אם השדה משמר אז העבודה אינה תלויה במסלול לכן לצורך פישוט החישוב נחבר את שתי הקצוות באמצעות קטע ישר המתואר ע"י: $L = \left\{r(t) = \left(b - 2tb, 0, t\pi\right) : 0 \le t \le 1\right\}$ ונקבל:

$$\int_C F \bullet dr = \int_L F \bullet dr = \int_0^1 F\left(r(t)\right) \bullet r'(t)\,dt = \int_0^1 \left(0,*,2t\pi\right) \bullet \left(*,0,\pi\right)dt = \pi^2.$$

ג. באמצעות פונקציית הפוטנציאל: $\forall t = z > 0: \ U(x,y,z) - U(b,0,0) = e^{xy}z^2 > 0$.

ללא חישוב פונקצית הפוטנציאל, עבור $t = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$ נקבל שנקודת הסיום היא $\left(b(-1)^k, 0, k\pi\right)$ והקו הישר המחבר בין שתי הנקודות נתון ע"י: $L = \left\{r(t) = \left(b + t\left(b(-1)^k - b\right), 0, t\pi k\right) : 0 \le t \le 1\right\}$

ומכאן ש: $\displaystyle\int_C F \bullet dr = \int_L F \bullet dr = \int_0^1 F\left(r(t)\right) \bullet r'(t)\,dt = \int_0^1 \left(0,*,2tk\pi\right) \bullet \left(*,0,k\pi\right)dt = k^2\pi^2$

כלומר אין נקודה כזו.

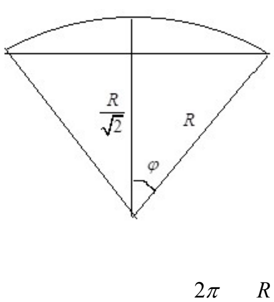
שאלה 5: גוף V חסום מלמטה ע"י החרוט: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ומלמעלה ע"י הספירה: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

חשבו את שטף השדה $F = \left(yx^2, 2zy - xy^2, x^3 + y^2\right)$ דרך מעטפת הגוף החיצונית (כפונקציה של R).

פתרון:

כדי לדעת היכן שני המשטחים נפגשים נשווה בין הגבהים שלהם:

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}$$



כלומר הגובה בו הם נפגשים הוא: $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$. זווית המפתח של החרוט עם ציר ה-z היא $\dfrac{\pi}{4}$.

כיוון שהמשטח סגור, נוכל להיעזר במשפט גאוס באשר $div(F) = 2z$.

יחד עם קורדינטות כדוריות נקבל:

$$\oiint_{\partial V} F \bullet \hat{n}\,dS = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/4} (r\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi\,d\varphi = 2\pi \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R \cdot \left.-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/4} = \frac{\pi R^4}{4}$$

.