

חזו"א 2

תרגיל מספר 10 - אינטגרלים משולשים

שאלה 1

חשבו את האינטגרלים המשולשים הבאים :

$$\text{א. } \int_{\pi}^{4\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^2 (2y + x \sin(yz)) dy dx dz$$

$$\text{ב. } \int_2^3 \int_0^{e^y-1} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{4x}{z+1} dx dz dy$$

שאלה 2

השלימו את הגבולות החסרים באינטגרלים הבאים על ידי זיהוי התחום והחלפת סדר האינטגרציה כנדרש :

$$\int_0^2 \int_0^{4-2z} \int_0^2 f(x, y, z) dx dy dz = \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} f(x, y, z) dy dx dz = \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} f(x, y, z) dz dy dx$$

ב.

$$\begin{aligned} \int_0^5 \int_0^2 \int_{16-4y^2}^{32-8y^2} f(x, y, z) dz dy dx &= \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} f(x, y, z) dx dz dy = \\ &= \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} f(x, y, z) dy dx dz + \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} f(x, y, z) dy dx dz \end{aligned}$$

שאלה 3

גוף חסום בין המשטחים : $z(x, y) = 16 - 4y^2$, $z(x, y) = 32 - 8y^2$, $x(y, z) = 0$
 $x(y, z) = 5$, $y(x, z) = 0$ חשבו את מסת הגוף אם נתון שצפיפותו ליחידת נפח היא :
 $f(x, y, z) = 2x + y$

שאלה 4 (רשות)

חשבו את נפח הגוף התחום בין המשטח $z(x, y) = 8 - x^2 - y^2$ מלמעלה, והמשטח $z(x, y) = x^2 + 3y^2$ מלמטה.

שאלה 5

חשבו את מרכז הכובד של גוף G המוגדר על ידי $G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{4}{3}|y| \leq z \leq 7 - |y|\}$

וצפיפותו נתונה על ידי $f(x, y, z) = 2y^2z$

שאלה 6

נתון גוף G שהיטלו על מישור xy הוא התחום D החסום בין המעגלים $r = \cos \theta$, $r = 2 \cos \theta$. הגוף

חסום מלמטה על ידי מישור xy ומלמעלה על ידי המישור $z = 3 - y$.

א. ציירו את התחום D במישור xy

ב. חשבו את נפח הגוף.

שאלה 7

גוף חסום בין המשטח $z(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ מהצדדים ובין המישור $z(x, y) = 1$ מלמטה

והמישור $z(x, y) = 9$ מלמעלה. מצאו את נפח הגוף ואת מסת הגוף אם ידוע שצפיפות הגוף היא

$$f(x, y, z) = z^2 \quad (\text{הדרכה: חלקו את הגוף לשני נפחים}).$$

שאלה 8

חשבו מסת קליפה כדורית שרדיוסה הפנימי $R_1 = 2$, רדיוסה החיצוני $R_2 = 5$ וצפיפותה ליח' נפח נתונה

$$f(x, y, z) = \frac{z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad \text{על ידי}$$

שאלה 9

חשבו את נפח הגוף הכלוא בין שני הכדורים $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ו- $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$.

שאלה 10

חשבו את נפח הגוף הכלוא בין שני הכדורים $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ו- $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$

והגליל $4x^2 + 4y^2 = R^2$ (החלק הפנימי של הגליל). השתמשו:

א. בקוארדינטות גליליות

ב. בקוארדינטות כדוריות

שאלה 11

א. הראו שמשוואת חרוט מעגלי $z(x, y) = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ בקוארדינטות כדוריות היא $\varphi = k$ (קבוע).

מהו ערכו של k ?

ב. חשבו בעזרת שימוש בקוארדינטות כדוריות את מסת הגוף המוגדר באופן הבא :

$$G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, z \geq \sqrt{3}, z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}\}$$

$$f(x, y, z) = z$$

ג. חזרו על חישוב מסת הגוף בקוארדינטות גליליות.

ד. חשבו את מרכז הכובד של הגוף.

שאלה 12

Find the centroid of the solid that is enclosed by the hemispheres $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ (from below) and $x^2 + y^2 + z^2 + 12z = 64$ (from above). Assume the density of the solid is constant.