<u>שם הקורס: מתמטיקה בדידה</u>
<u>קוד הקורס: 90926</u>
<u>שאלון X</u>

<u>שאלה 1</u>

מתמטיקאי באיסלנדית נקרא S T Æ R Ð F R Æ Ð I N G U R
שימו לב: האות Æ זו אות אחת באיסלנדית.

א) (5 נק') כמה מילים אפשר לבנות **מכל** אותיות המילה STÆRÐFRÆÐINGUR ?
ב) (5 נק') כמה מילים אפשר לבנות כך שהאותיות R **לא יופיע שלוש פעמים ברצף** (לא יופיע במילה RRR) ?
ג) (10 נק') כמה מילים אפשר לבנות כך שלא יופיע בהן RRR ולא יופיע בהן ÆÆ ולא יופיע בהן ÐÐ ?

<u>שאלה 2</u>

א) (10 נק') נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x+3}{2x-1}$.
(I) הוכיחו שהפונקציה היא חד-חד-ערכית.
(II) מהי התמונה של הפונקציה?

ב) (10 נק') נגדיר יחס S על $N\setminus\{0\}\times N\setminus\{0\}$ באופן הבא:
$$((a,b),(c,d))\in S\leftrightarrow ad=bc$$
(I) הוכיחו כי היחס S הוא יחס שקילות.
(II) חשבו מחלקת שקילות של (1,2).

<u>שאלה 3</u>

א) (10 נק') הוכיחו על ידי שימוש באינדוקציה מתמטית כי לכל $n>0$ טבעי, מתקיים:
$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!=(n+1)!-1$$
ב) (10 נק') נסמן ב-a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3\}$ כך שאין שתי ספרות '1' סמוכות זו לזו. מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n

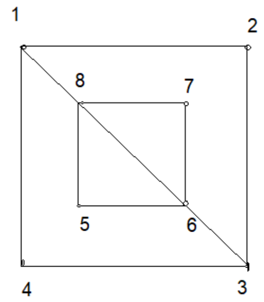
<u>שאלה 4</u>

א) (10 נק') נתונה מערכת ההנחות הבאה:
אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי אז תומר ילך לאפקה
אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי אז הוא יהיה זכאי למלגה
אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי או יהיה זכאי למלגה אז הוא ילך לאפקה
תומר ילך לאפקה אם ורק אם יקבל מלגה.
מסקנה: אם תומר ילך לאפקה, אז תומר יקבל יותר מ-600 בפסיכומטרי וגם יהיה זכאי למלגה
הצרינו את ההנחות ואת המסקנה וקבעו האם המסקנה נובעת מן ההנחות.

ב) (10 נק') תהי $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f(n,m)=n\cdot 2^m$ (בשאלה זו $N=\{0,1,2,3,\dots\}$)
(I) האם f חד-חד-ערכית? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.
(II) האם f על? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 5

א) (10 נק') האם ניתן לשרטט את הצורה הבאה מבלי להרים את העפרון מהדף, ומבלי לחזור על קטע שכבר צויר? נמקו על סמך טענות הקשורות לתורת הגרפים שנלמדו בקורס.
אם תשובתכם חיובית, הראו (בעזרת חיצים או רשימת מהלכים מסודרת) כיצד ניתן לשרטט צורה זו כנדרש.
אם תשובתכם שלילית, קבעו מהו מספר הצלעות המינימלי שיש להוסיף כדי שהשרטוט יהיה אפשרי, הוסיפו צלעות כנדרש ורשמו את המסלול.



ב) (10 נק') בזריקת קובייה התוצאות שעשויות להתקבל הן בין 1 ל-6. זורקים 5 קוביות בצבעים שונים: אדומה, ירוקה, צהובה, כחולה ולבנה. בכמה דרכים ניתן לקבל סכום תוצאות 18 אם בזריקת קובייה לבנה מתקבלות תוצאות זוגיות קטנות מ-6?

שאלה 6

א) (10 נק') חשבו את המקדם של x^2 בביטוי $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$.

ב) (10 נק') תהי A קבוצת כל הקבוצות של שני מספרים טבעיים. הוכיחו כי A קבוצה בת מניה.

בהצלחה!

פתרון מועד X מתמטיקה בדידה חורף 2020

<u>שאלה 1</u>

מתמטיקאי באיסלנדית נקרא S T Æ R Ð F R Æ Ð I N G U R

שימו לב: האות Æ זו אות אחת באיסלנדית.

א) (5 נק') כמה מילים אפשר לבנות **מכל** אותיות המילה STÆRÐFRÆÐINGUR ?

ב) (5 נק') כמה מילים אפשר לבנות כך שהאותיות R **לא יופיע שלוש פעמים ברצף** (לא יופיע במילה RRR) ?

ג) (10 נק') כמה מילים אפשר לבנות כך שלא יופיע בהן RRR ולא יופיע בהן ÆÆ ולא יופיע בהן ÐÐ ?

<u>פתרון</u>

נסמן:

U – קבוצת כל המילים שאפשר לבנות מאותיות המילה STÆRÐFRÆÐINGUR.

R – קבוצת כל המילים שבהן מופיע RRR.

Æ - קבוצת כל המילים שבהן מופיע ÆÆ

Ð - קבוצת כל המילים שבהן מופיע ÐÐ.

א)

מספר המילים שאפשר לבנות מהאותיות המילה STÆRÐFRÆÐINGUR:

$$|U| = \frac{14!}{3!\,2!\,2!}$$

ב) מספר המילים בהם מופיע הרצף RRR:

$$|R| = \frac{12!}{2!\,2!}$$

מספר המילים בהם לא מופיע הרצף RRR:

$$|U| - |R| = \frac{14!}{3!\,2!\,2!} - \frac{12!}{2!\,2!}$$

ג) נחשב על פי עקרון ההכלה וההפרדה את מספר מילים שבהן לא מופיע RRR ולא מופיע Æ Æ ולא מופיע ÐÐ:

$$|Æ| = |Ð| = \frac{13!}{3!\,2!}$$

$$|Æ \cap Ð| = \frac{12!}{3!}$$

$$|Ð \cap R| = |Æ \cap R| = \frac{11!}{2!}$$

$$|Æ \cap Ð \cap R| = 10!$$

על פי עקרון ההכלה וההפרדה מספר מילים שבהן לא מופיע RRR ולא מופיע Æ Æ ולא מופיע Ð Ð שווה ל-

$$|U| - |R| - |Æ| - |Ð| + |Æ \cap Ð| + |Æ \cap R| + |Ð \cap R| - |Æ \cap Ð \cap R|$$
$$= \frac{14!}{3!\,2!\,2!} - \frac{12!}{2!\,2!} - 2\frac{13!}{3!\,2!} + \frac{12!}{3!} + 2\frac{11!}{2!} - 10!$$

<u>שאלה 2</u>

א) (10 נק') נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4x+3}{2x-1}$.

(I) הוכיחו שהפונקציה היא חד-חד-ערכית.

(II) מהי התמונה של הפונקציה?

ב) (10 נק') נגדיר יחס S על $N\backslash\{0\}\times N\backslash\{0\}$ באופן הבא:

$((a,b),(c,d))\in S \leftrightarrow ad=bc$

(I) הוכיחו כי היחס S הוא יחס שקילות.

(II) חשבו מחלקת שקילות של $(1,2)$.

__פתרון__: א) (I) ישירות ועל פי ההגדרה:

$$f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{4x+3}{2x-1}=\frac{4y+3}{2y-1}\Rightarrow 8xy-4x+6y-3=8xy-4y+6x-3\Rightarrow -10x+10y=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow 10(y-x)=0\Rightarrow x=y$. מ.ש.ל.

(II) נניח ש- $a\in Im(f)$, אז קיים $x\in f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ כך ש- $f(x)=a$, כלומר:

$$\frac{4x+3}{2x-1}=a\Rightarrow 4x+3=2ax-a\Rightarrow(4-2a)x=-a-3\Rightarrow x=\frac{a+3}{2a-4}\ ,\quad a\neq 2$$

נשים לב כי לא ייתכן $x=\frac{a+3}{2a-4}=\frac{1}{2}$, כי אז $2a+6=2a-4$ וזו סתירה לכן אכן $x=\frac{a+3}{2a-4}\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

ולכן קיבלנו $Im(f)=\{a\in\mathbb{R}\mid a\neq 2\}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

ב) (I) היחס S רפלקסיבי: לכל זוג (a,b) מתקיים כי $ab=ba$ ולכן $((a,b),(a,b))\in S$.

היחס S סימטרי: אם $ad=bc$ אז $cb=da$.

היחס S טרנזיטיבי: נניח כי $ad=bc$ וגם כי $ce=df$. אז $c=\frac{df}{e}$ ולכן

$$ad=b\frac{df}{e}\leftrightarrow ae=bf$$

(II) מהגדרת יחס השקילות מקבלים כי $((a,b),(c,d))\in S\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

לכן מחלקת השקילות של הזוג $(1,2)$ היא אוסף כל הזוגות שמקיימים $d=2c\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow((1,2),(c,d))\in S$.

בכתיבה פורמלית: $\Leftrightarrow$ $[(1,2)]=\{(c,d)|d=2c\}=\{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\}$.

__שאלה 3__

א) (10 נק') הוכיחו על ידי שימוש באינדוקציה מתמטית כי לכל $n>0$ טבעי, מתקיים:

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=(n+1)!-1$$

ב) (10 נק') נסמן ב-a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3\}$ כך שאין שתי ספרות '1' סמוכות זו לזו. מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n.

__פתרון__ א) בדיקה עבור $n=1$:

$1\cdot 1!=1$, $(1+1)!-1=2!-1=1$, שני האגפים שווים ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$.

צעד האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור n מסוים, כלומר, $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$

ונוכיח כי הטענה נכונה עבור $n+1$. כלומר, צ"ל:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! = (n+2)!-1$$

ואכן,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! =$$
$$= (n+1)!\,(1+n+1)-1 = (n+1)!\,(n+2)-1 = (n+2)!-1$$

המעבר השני הוא לפי הנחת האינדוקציה.

לכן, לפי משפט האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n\geq 1$.

א) סדרה באורך n שמתחילה ב-1 חייבת להמשיך בספרה 2 או בספרה 3 כלומר שתי אפשרויות, ולאחר מכן, יכולה להמשיך בכל סדרה חוקית באורך $n-2$.
סדרה באורך n שמתחילה ב-2 יכולה להמשיך בכל סדרה חוקית באורך $n-1$.
סדרה באורך n שמתחילה ב-3 יכולה להמשיך בכל סדרה חוקית באורך $n-1$.
מכאן נקבל כלל נסיגה $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ לכל $n \geq 2$.
תנאי התחלה: $a_2 = 3^2 - 1 = 8,\ a_1 = 3$
אפשר גם לחשב את a_0 מכלל הנסיגה ולקבל $a_0 = 1$ (או להגדיר מראש כתנאי התחלה לסדרה הריקה).
נמצא נוסחה מפורשת: נפתור את המשוואה האופיינית: $x^2 - 2x - 2 = 0$ נקבל $x = 1 \pm \sqrt{3}$.
מכאן, הנוסחה של הצורה המפורשת הינה: $a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B\left(1-\sqrt{3}\right)^n$
נציב את תנאי ההתחלה כדי לחשב את המקדמים:

$$a_0 = A + B = 1$$

$$a_1 = A\left(1+\sqrt{3}\right) + B\left(1-\sqrt{3}\right) = 3$$

מכאן, $A = \frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}}, B = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}}$

ולכן, $a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \left(1-\frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$ לכל $n \geq 0$.

<u>שאלה 4</u>

א) (10 נק') נתונה מערכת ההנחות הבאה:
אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי אז תומר ילך לאפקה
אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי אז הוא יהיה זכאי למלגה
אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי או יהיה זכאי למלגה אז הוא ילך לאפקה
תומר ילך לאפקה אם ורק אם יקבל מלגה.
מסקנה: אם תומר ילך לאפקה, אז תומר יקבל יותר מ-600 בפסיכומטרי וגם יהיה זכאי למלגה
הצרינו את ההנחות ואת המסקנה וקבעו האם המסקנה נובעת מן ההנחות.

ב) (10 נק') תהי $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f(n,m) = n\cdot 2^m$ (בשאלה זו $N = \{0,1,2,3,\dots\}$)
(I) האם f חד-חד-ערכית? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.
(II) האם f על? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

<u>**פתרון**</u>:
א) ראשית נצרין את הפסוקים
A – תומר ילך לאפקה

B – תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי

C – תומר יהיה זכאי למלגה

$A \leftrightarrow C, B \rightarrow A, B \rightarrow C, (B \vee C \rightarrow A) \ | = A \rightarrow (B \wedge C)$

נתחיל בשלילת המסקנה. $A \rightarrow (B \wedge C) = F$ ולכן $A = T$

ההנחה הראשונה מתקיימת כאשר $C = T$

ההנחה השנייה מתקיימת

הנחה השלישית מתקיימת

ההנחה רביעית מתקיימת גם כן.

כלומר, שללנו את המסקנה אך ההנחות מתקיימות ולכן ניתן להגיד כי המסקנה איננה נובעת מן ההנחות.

ב) (I) הפונקציה איננה חח"ע, כי למשל $f(1,2) = 4 = f(4,0)$, וכמובן $(1,2) \neq (4,0)$.

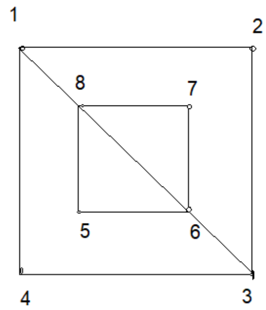
(II) f היא על כי לכל $m \in \mathbb{N}$, $f(m,0) = m \cdot 2^0 = m \cdot 1 = m$

שאלה 5

א) (10 נק') האם ניתן לשרטט את הצורה הבאה מבלי להרים את העפרון מהדף, ומבלי לחזור על קטע שכבר צויר? נמקו על סמך טענות הקשורות לתורת הגרפים שנלמדו בקורס.

אם תשובתכם חיובית, הראו (בעזרת חיצים או רשימת מהלכים מסודרת) כיצד ניתן לשרטט צורה זו כנדרש.

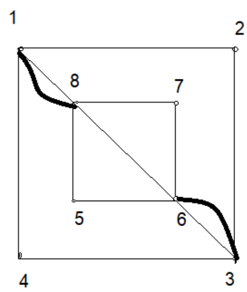
אם תשובתכם שלילית, קבעו מהו מספר הצלעות המינימלי שיש להוסיף כדי שהשרטוט יהיה אפשרי, הוסיפו צלעות כנדרש ורשמו את המסלול.

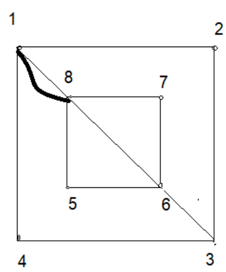


ב) (10 נק') בזריקת קובייה התוצאות שעשויות להתקבל הן בין 1 ל-6. זורקים 5 קוביות בצבעים שונים: אדומה, ירוקה, צהובה, כחולה ולבנה. בכמה דרכים ניתן לקבל סכום תוצאות 18 אם בזריקת קובייה לבנה מתקבלות תוצאות זוגיות קטנות מ-6?

<u>פתרון</u>

א) כיוון שיש 4 קודקודים עם דרגה אי זוגית אין מסלול אוילר. כדי שיהיה מסלול כזה צריך להוסיף צלע אחת לפחות. למשל צלע נוספת המחברת בין 1 לבין 8 ובנוסף צלע זמנית בין 3 לבין 6 כדי שנוכל לרשום מעגל אוילר.





המעגל יהיה: $\{3,6,7,8,5,6,3,4,1,8,1,2,3\}$

המסלול יהיה: $\{6,7,8,5,6,3,4,1,8,1,2,3\}$

ב) הפונקציה היוצרת המתאימה לזריקת קובייה לבנה שעבורה מתקבלות רק תוצאות זוגיות קטנות מ-6, היא:

$$x^2+x^4$$

ועבור כל אחת מ-4 הקוביות האחרות

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6=x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)$$

בסה"כ הפונקציה היוצרת של הבעיה היא:

$$f(x)=\left(x^2+x^4\right)\left(x\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)\right)^4=$$
$$=x^2\left(1+x^2\right)x^4\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4$$
$$=x^6\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4\left(1+x^2\right)$$

מספר הדרכים בהן ניתן לקבל סכום תוצאות 18 הוא המקדם של x^{18} ב- $f(x)$ או המקדם של x^{12} בביטוי $\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4\left(1+x^2\right)$.

נפתח את הביטוי האחרון לפי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית סופית:

$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4\left(1+x^2\right)=\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4\left(1+x^2\right)=\left(1-x^6\right)^4\frac{1}{(1-x)^4}\left(1+x^2\right)$$

לפי הבינום של ניוטון:

$$\left(1-x^6\right)^4=1^4+4\cdot1^3\left(-x^6\right)+\binom{4}{2}\cdot1^2\left(-x^6\right)^2+\binom{4}{3}\cdot1^1\left(-x^6\right)^3+\binom{4}{4}\cdot1^0\left(-x^6\right)^4=1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24}$$

ולפי בינום שלילי:

$$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$$

מקבלים:

$$\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4\left(1+x^2\right)=\left(1-4x^6+6x^{12}+\cdots\right)\left(1+x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{3}x^n$$

האפשרויות לקבל את x^{12} הן:

אפשרות 1: $1\cdot1\cdot\binom{12+3}{3}$

אפשרות 2: $1\cdot1\cdot\binom{10+3}{3}$

אפשרות 3: $-4\cdot1\cdot\binom{6+3}{3}$

אפשרות 4: $-4\cdot1\cdot\binom{4+3}{3}$

אפשרות 5: $6\cdot1\cdot\binom{0+3}{3}$

בסה"כ, המקדם של x^{12} בביטוי $\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^4\left(1+x^2\right)$ הוא:

$$\binom{15}{3}+\binom{13}{3}-4\left(\binom{9}{3}+\binom{7}{3}\right)+6\binom{3}{3}=271$$

לכן, יש 271 אפשרויות לקבל סכום תוצאות 18 כאשר בזריקת קובייה לבנה מתקבלות תוצאות זוגיות.

שאלה 6

א) (10 נק') חשבו את המקדם של x^2 בביטוי $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$.

ב)   (10 נק') תהי A קבוצת כל הקבוצות של שני מספרים טבעיים. הוכיחו כי A קבוצה בת מניה.

<u>פתרון</u>: א) נפתח לפי הבינום של ניוטון:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8=(x+x^{-1})^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^{8-k}x^{-k}=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^{8-2k}$$

ועכשיו נמצא עבור איזה ערך של k החזקה של x שווה ל-2 :

$x^{8-2k}=x^2\Leftrightarrow 8-2k=2\Leftrightarrow k=3$,

ולכן המקדם המבוקש הוא

$$\binom{8}{3}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{3!}=7\cdot 8=56 \qquad \blacksquare$$

ב) בקבוצה של שני איברים, האיברים שונים זה מזה.

I) נסמן את האיבר הקטן בכל קבוצה X ע"י minX

ואת האיבר הגדול ע"י maxX ונגדיר פונקציה $f:A\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא: $f(X)=(\min X,\max X)$.

<u>הפונקציה מוגדרת היטב</u>: לכל איבר X מתוך הקבוצה A מוגדר איבר יחיד $f(X)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

<u>הפונקציה חח"ע</u>: $f(X_1)=f(X_2) \;\Rightarrow\; (\min X_1,\max X_1)=(\min X_2,\max X_2) \;\Rightarrow\; X_1=X_2$.

נשים לב כי הפונקציה לא על, למשל לזוג $(3,2)$ אין מקור.

לכן ע"י פונקציה זו הראינו כי $|A|\le|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$.

II) נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to A$ באופן הבא $f(n)=\{n,n+1\}$.

<u>הפונקציה מוגדרת היטב</u>: לכל איבר n מתוך הקבוצה $\mathbb{N}$ מוגדר איבר יחיד $\{n,n+1\}\in A$

<u>הפונקציה חח"ע</u>: $f(n_1)=f(n_2) \;\Rightarrow\; \{n_1,n_1+1\}=\{n_2,n_2+1\}$

אפשרות אחת מובילה לסתירה $n_1=n_2+1=n_2-1 \;\Leftarrow\; n_1+1=n_2 \;\wedge\; n_1=n_2+1$

ולכן בהכרח מתקיימת האפשרות השנייה: $n_1=n_2 \;\Leftarrow\; n_1+1=n_2+1 \;\wedge\; n_1=n_2$

נשים לב כי הפונקציה לא על, למשל לקבוצה $\{1,3\}$ אין מקור.

לכן ע"י פונקציה זו הראינו כי $\aleph_0=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\le|A|$

<u>ולפי משפט קנטור שרדר ברנשטיין</u> $|A|=\aleph_0$