**פתרון מבחן Y ( ספטמבר 2023)**

**מרצה : ד"ר דבורה קפלן**

**מתרגלים :גב' אירנה נמירובסקי, מר עמית בנגיאט, מר אלכסנדר מינקין.**

**<u>שאלה 1 - (20 נק') ( אין קשר בין שני הסעיפים)</u>**

**א.( 12 נק')** מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n n^2}\right)(x-2)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

**ב.(8 נק')** לטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ יש רדיוס התכנסות $r=5$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. הטור חזקות מתבדר לכל $x\in[5,+\infty)$.

2. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}\right)2^{n+1}$ מתכנס בהחלט.

**פתרון : א.**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{3^n n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{3^n n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{\sqrt[n]{n}}\nearrow 1\ \boxed{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}}\nearrow 1}{3\boxed{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\searrow 1}=\frac{1}{3}\to\boxed{r=3}$$

הרדיוס שווה 3 ו $x_0=2$ לכן הטור מתכנס בהחלט בקטע $(-1,5)$ ומתבדר לכל $x\notin[-1,5]$.

נבדוק את הקצוות של הקטע :

$\boxed{x=5}$ : נציב בטור חזקות ונקבל: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n n^2}\right)(5-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

לכל $n\in\mathbb{N}$ , $0\le\frac{n}{n^2}\le\frac{n+1}{n^2}$ והטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר. ולכן לפי מבחן השוואה ראשון גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ מתבדר.

$\boxed{x=-1}$ :
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3^n n^2}\right)(-1-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

מדובר על טור מחליף סימן שמקיים תנאי ליבניץ ואז הוא מתכנס :

**נסמן** $b_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$

אזי **:** $b_n>0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ,

$b_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\le b_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ לכל $n\in\mathbb{N}$ , ובנוסף $\lim_{n\to\infty}b_n=0+0=0$ .

אבל ההתכנסות <u>היא בתנאי</u> כי טור של ערכי מוחלט של המחוברים שווה לטור שקבלנו בקצה השני לכן מתבדר.

**ב.1 הטענה לא נכונה, כי יתכן שעבור הקצה** $\boxed{x=5}$ הטור יתכנס . לדוגמה :

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n n^2}x^n$ בעל רדיוס התכנסות 5 , ובקצה $\boxed{x=5}$ הטור מתכנס ( הרמוני מוכלל p=2).

**ב.2 הטענה נכונה :** הטור מתכנס בהחלט כי מתקבל מהטור המקורי על ידי הצבה $\boxed{x=2}$ בטור האינטגרלים

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt$$

שיש לו אותו רדיוס התכנסות כמו לטור חזקות המקורי.

## <u>שאלה 2 - (20 נק')</u>

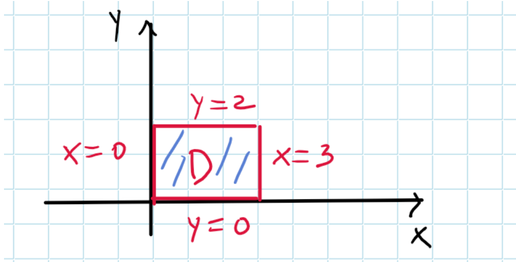
נתונה הפונקציה : $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ .

**א. ( 15 נק')** מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה $f$ בתחום :
$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 3,0\le y\le 2\}$ .

**ב. ( 5 נק')** האם קיימים לפונקציה $f$ מקסימום או מינימום מוחלטים ב - $\mathbb{R}^2$ ?

**פתרון:**

א.




נשים לב כי הפונקציה $f$ רציפה בתחום $D$ שהוא חסום וסגור (מכיל את השפה שלו ומוכל בסביבה של מרכז הראשית רדיוס למשל 10). , ולכן על פי משפט ויירשטרס קיימים מקסימום ומינימום מוחלטים. נמצא נקודות חשודות לקיום ערכי קיצון מוחלט :

**נקודות חשודות מהפנים** : נחפש את הנקודות הקריטיות הפנימיות ל- $D$ של הפונקציה : הנגזרות מוגדרות בכל נקודה ולכן הנקודות הקריטיות הן הפתרונות של המערכת :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,1)$$

הנקודה פנימית ל$D$ לכן נחשב $f(1,1)=1$ .

**נקודות חשודות מהשפה:** נמצא נקודות חשודות למקסימום או מינימום מוחלט בכל עקומה שמרכיבה את השפה כי ביניהן אולי יתקבלו המקסימום או מינימום בכל התחום .

$$\begin{cases} g(x)=f(x,0)=x^2 \\ x\in[0,3] \\ (increases) \end{cases} \rightarrow (0,0),(3,0) \rightarrow \boxed{f(0,0)=0,\ f(3,0)=9}$$

$$\begin{cases} h(y)=f(0,y)=2y \\ y\in[0,2] \\ (increases) \end{cases} \rightarrow (0,0),(0,2) \rightarrow \boxed{f(0,0)=0,\ f(0,2)=4}$$

$$\left\{\begin{matrix} t(x)=f(x,2)=x^2-4x+4 \\ t'(x)=2x-4=0 \leftrightarrow x=2 \\ x\in[0,3] \end{matrix}\right\} \rightarrow (0,2),(3,2),(2,2) \rightarrow \boxed{f(0,2)=4,\ f(3,2)=1,\ f(2,2)=0}$$

$$\left\{\begin{matrix} r(y)=f(3,y)=-4y+9 \\ y\in[0,2] \\ (decreses) \end{matrix}\right\} \rightarrow (3,0),(3,2) \rightarrow \boxed{f(3,0)=9,\ f(3,2)=1}$$

כעת נשווה את ערכי הפונק' בכל הנק' החשודות שמצאנו, ואז מסיקים שהמקסימום המוחלט בתחום $D$ הוא 9 והמינימום הוא 0.

**ב.**
$$\left.\begin{matrix} f(0,y)=2y \\ \lim\limits_{y\to\infty} 2y=\infty \\ \lim\limits_{y\to-\infty} 2y=-\infty \end{matrix}\right\}$$

לכן נובע שאין מקסימום מוחלט ואין מינימום מוחלט ב- $\mathbb{R}^2$.

**<u>שאלה 3 - (20 נק') ( אין קשר בין שני הסעיפים)</u>**

**א.(10 נק')** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ במשתנים $x$ , $y$ דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2$. נגדיר פונקציה $g$ באופן הבא: $g(t)=f(t^2+2e^t,\sin t)$. נגדיר וקטור יחידה $\vec{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

ידוע כי $\frac{dg}{dt}(0)=g'(0)=5$ ו- $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,0)=0$. מצאו את $\vec{\nabla} f(2,0)$.

**ב.(10 נק')** נתונה הפונקציה : $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x\,y\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ .

**ב. 1.** האם הפונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ ?

**ב. 2.** האם הפונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה $(x,y)\neq(0,0)$?

**פתרון:**

**א.** הפונקציות $x(t)=t^2+2e^t$ ו $y(t)=\sin t$ הן גזירות ב - $t=0$ ו - $f$ היא דיפרנציאבילית בנקודה $(x(0),y(0))=(2,0)$ ולכן ניתן להסיק שקיימת הנגזרת של $g$ ב-0 ומתקבלת על ידי כלל השרשרת באופן הבא :

$$\boxed{5=\frac{dg}{dt}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\frac{dx}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\frac{dy}{\partial t}(0)=2\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)+1\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)}$$

פה השתמשנו בנגזרות :

$$x'(t)=2t+2e^t\to x'(0)=2$$
$$y'(t)=\cos t\to y'(0)=1$$
.

בנוסף על פי הדיפרנציאביליות של $f$ בכל נקודה, והנתונים, נובע :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,0)=0=\vec{\nabla}f(2,0)\bullet\vec{v}=\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}$$

משתי המשוואות שקבלנו נובע : מסקנה : $\vec{\nabla}f(2,0)=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$.

**ב.1**

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{|h|}}{h}\lim_{h\to0}\frac{h}{|h|}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1\\ \lim_{h\to0^-}\frac{h}{-h}=-1\end{aligned}\right\}\to f_x(0,0)\quad\nexists$$

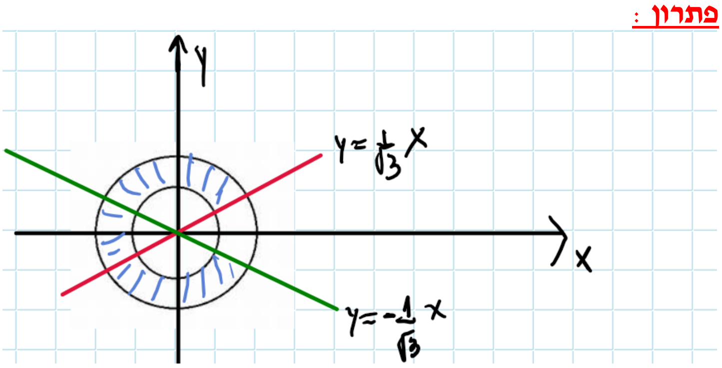
אחת הנגזרות החלקיות לא מוגדרת ב $(0,0)$ לכן הפונקציה לא דיפרנציאבילית בנקודה.

**ב.2** בנקודה $(x,y)\neq(0,0)$ הנגזרות החלקיות מוגדרות בסביבה והן רציפות בנקודדה ( מנה והרכבה והפרש רציפות) לכן הפונקציה דיפרנציאבילית.

**__שאלה 4- (20 נק')__**

חשבו את מסת לוח המישורי $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le\sqrt{3}\cdot|y|\right\}$, כאשר פונקציית הצפיפות של הלוח היא $\rho(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

**__פתרון :__**




יש לחשב את האינטגרל $m=\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)dx\,dy$.

נשתמש בקואורדינטות קוטביות. $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad |J|=r$

נמצא את הזוויות ($\theta$) של הישרים $x=\sqrt{3}\cdot y$ ו- $x=-\sqrt{3}\cdot y$.

לישר $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ הזווית היא $\dfrac{\pi}{6}$ או $\dfrac{7\pi}{6}$.

לישר $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ הזווית היא $\dfrac{5\pi}{6}$ או $\dfrac{11\pi}{6}$.

אז מ- $x\le\sqrt{3}\cdot|y|$ נובע $\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{11\pi}{6}$, ומ- $1\le x^2+y^2\le 4$ נובע $1\le r\le 2$.

$$m=\iint_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)dxdy=\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} d\theta \int_{r=1}^{2} \ln\left(1+r^2\right)rdr=\begin{bmatrix}1+r^2=t & r=1\to t=2\\ 2rdr=dt & r=2\to t=5\end{bmatrix}=$$

$$=\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} d\theta \int_{t=2}^{5} \ln(t)\frac{1}{2}dt=\begin{bmatrix}u=\ln t & v'=1\\ u'=\frac{1}{t} & v=t\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int_{\theta=\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(t\ln t\Big|_2^5-\int_2^5 dt\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta=\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(5ln5-2\ln 2-t\Big|_2^5\right)d\theta=$$

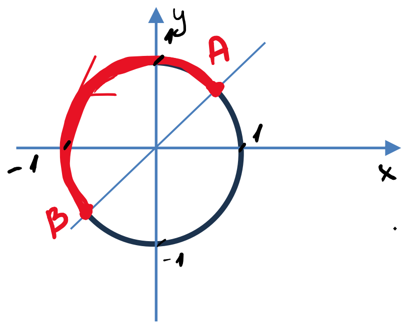
$$=\frac{1}{2}\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}\left(5ln5-2\ln 2-3\right)d\theta=\frac{1}{2}\left(5ln5-2\ln 2-3\right)\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}=\left(5ln5-2\ln 2-3\right)\frac{5\pi}{6}$$

## **<u>שאלה 5 - (20 נק')</u>**

חשבו את האינטגרל הקווי מסוג שני : $\int_L (x^2+2x^2y)dx+(2xy^2-y^2)dy$

לאורך העקומה $L=\{(x,y)\ \left|x^2+y^2=1, y\ge x\right.\}$ בכיוון **נגד השעון**.

(שימו לב : העקומה לא סגורה)




**פתרון** : נבדוק האם השדה הוא משמר :

נסמן :

$$P(x,y)=x^2+2x^2y$$

$$Q(x,y)=2xy^2-y^2$$

אלה פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbb{R}^2$ .

$$P_y(x,y)=2x^2$$

$$Q_x(x,y)=2y^2$$

ואז **לא קיים** תחום קשיר המכיל את העקומה עבורו $P_y(x,y)=Q_x(x,y)$ לכל $(x,y)$, כלומר לא קיים תחום קשיר המכיל את העקומה עבורו השדה משמר.

לכן ניעזר במשפט גרין. נסגור את העקומה על ידי עקומה נוספת

$$L_1=\{(x,y)\ \left|y=x,-\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}\right.\}$$

כך קיבלנו עקומה סגורה $L^*=L\cup L_1$.

נחשב עבודה לאורך העקומה הסגורה , פשוטה וחלקה למקוטעין $L^*$ , עם כיוון נגד השעון, המהווה שפתו של תחום מישורי פשוט קשר . $P(x,y),Q(x,y)$ הן פונקציות רציפות בעלות נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון בתחום הזה. ולכן לפי משפט גרין :

$$\int_{L^*}(x^2+2x^2y)dx+(2xy^2-y^2)dy=\iint_D\left(Q_x-P_y\right)dxdy=\iint_D\left(2y^2-2x^2\right)dxdy=2\iint_D\left(y^2-x^2\right)dxdy$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות :

$$2\iint_D\left(y^2-x^2\right)dxdy=\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ |J|=r\\ 0\le r\le 1\\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{4}\end{array}\right\}=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_0^1\left((r\sin\theta)^2-(r\cos\theta)^2\right)r\,dr=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_0^1\left((\sin\theta)^2-(\cos\theta)^2\right)r^3drd\theta=$$

$$=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}d\theta\int_0^1\cos(2\theta)r^3dr=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta\int_0^1 r^3dr=0$$

בהמשך נחשב עבודה רק לאורך העקומה:

$L_1=\{(x,y)\ \ |y=x,-\frac{1}{\sqrt2}\le x\le\frac{1}{\sqrt2}\}$, בעלת הצגה פרמטרית:

$r(t)=(x(t),y(t))=(t,t)$, $t\in\left[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right]$.

$r'(t)=(1,1)$

$$\int_{L_1}(x^2+2x^2y)dx+(2xy^2-y^2)\,dy=\int_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}(t^2+2t^3+2t^3-t^2)dt=\int_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}(4t^3)dt=0$$

$$\int_L(x^2+2x^2y)dx+(2xy^2-y^2)dy=\int_{L^*}(x^2+2x^2y)dx+(2xy^2-y^2)dy-\int_{L_1}(x^2+2x^2y)dx+(2xy^2-y^2)dy=$$
$$=0-0=0$$

**<u>שאלה 6 - (20 נק')</u>**

חשבו את השטף של השדה הוקטורי: $\vec F(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\vec i+(1-x)y\,\vec j+z^2\,\vec k$ דרך המשטח

<u>הפתוח</u> $\sigma$ : $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\le 1$.

כיוון הנורמליים למשטח הוא "כלפי מטה" כלומר לכיוון השלילי של ציר $\overrightarrow{OZ}$.

.

**פתרון :** רכיבי השדה הן פונקציות בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל נקודה, ולכן

נוכל להשתמש במשפט גאוס אם נסגור את המשטח ( חרוט) ע"י העיגול: $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{array}\right\}$

נסמן אותו ב- $\sigma_1$. נתבונן במשטח הסגור עם כיוון הוקטורים הנורמלים <u>כלפי חוץ.</u>
המשטח הסגור הוא חלק למקוטעין. ואז נוכל להפעיל משפט הדיברגנץ:
(נסמן ב- $G$ את הגוף הכלוא בתוך המשטח הסגור ).

$$\iint\limits_{\sigma\cup\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint\limits_{G}(2+2z)\,dv \underset{GAUSS}{\Leftarrow} div\vec{F} = 2+2z \quad .$$

נעבור **לקואורדינאטות גליליות** ונקבל :

$$\iint\limits_{\sigma\cup\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint\limits_{G}(2+2z)\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 (2+2z)\,r dz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \left(2z+z^2\right)\Big|_r^1 r\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \left(3-2r-r^2\right)r\,dr = .$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta\left(\frac{3r^2}{2}-2\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)_0^1 = \int_0^{2\pi}\frac{7}{12}\,d\theta = \frac{7}{12}2\pi = \frac{7\pi}{6}$$

.

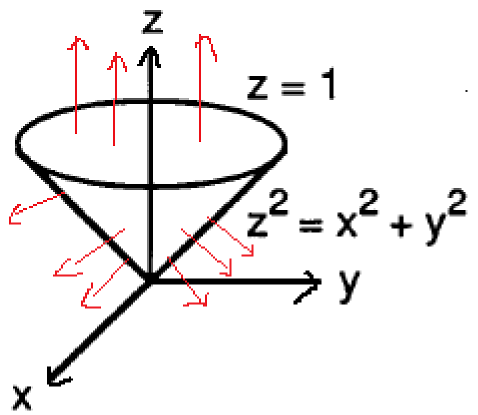
נמצא את השטף דרך המכסה העליון שהוספנו , ונשים לב שהמכוון שלו הוא כלפי מעלה כדי שלמשטח הסגור יש מכוון כלפי חוץ. הצגה פרמטרית של המכסה הזה :

$$\left\{\begin{array}{l} r(x,y) = (x,y,1) \\ (x,y)\in D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\} \\ r_x\times r_y = (0,0,1) \end{array}\right\}$$

$$\iint\limits_{\sigma_1}\vec{F}\cdot n\,dS = \iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{2}+x,\,y(1-x),1\right)\bullet(0,0,1)\,dxdy = \iint\limits_{D}1dxdy = AREA(D) = \pi$$

מקבלים :

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}ds = \iint\limits_{\sigma\cup\sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds - \iint\limits_{\sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \frac{7\pi}{6}-\pi = \frac{\pi}{6}}$$




.