פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & & & + & az & = & a-3 \\ -2x & + & y & + & (2-3a)\,z & = & 11-a \\ (a-8)\,x & + & (2a-2)\,y & - & (3a+6)\,z & = & 4a^2+4 \end{cases}$$

(i) (9 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי a עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ii) (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a (אם קיימים) וקטור העמודה $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) תהיינה A מטריצה מסדר 2×3, B מטריצה מסדר 3×2. בנוסף תהיינה u,v,w עמודות כך ש- $Au=v, Bv=w$. קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) למערכת $Ax=v$ יש אינסוף פתרונות.

(ii) למערכת $ABx=v$ אין פתרון.

(iii) למערכת $BAx=w$ יש פתרון.

פתרון

א. (i) נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & 2-3a \\ a-8 & 2a-2 & -3-6a \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2+2R_1 \\ R_3\to R_3-(a-8)R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2-a \\ 0 & 2a-2 & -a^2+5a-6 \end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3-(2a-2)R_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & a^2-a-2 \end{vmatrix} = a^2-a-2=(a-2)(a+1)$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שווה ל-$(a-2)(a+1)$. המטריצה הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן המטריצה הפיכה אם"ם $a\neq -1,2$. ידוע כי למערכת עם מטריצה מצומצמת ריבועית יש פתרון יחיד אם"ם המטריצה הפיכה, כלומר למטריצה יש פתרון יחיד אם"ם $a\neq -1,2$.נבדוק עבור שאר הערכים:

עבור $a=-1$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 & 12 \\ -9 & -4 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1\ R_3\to R_3+9R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -12 & -28 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת גדולה מדרגת המטריצה המצומצמת (ישנה שורת סתירה) ולכן למערכת אין פתרון.

עבור $a=2$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 9 \\ -6 & 2 & -12 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1\ R_3\to R_3+6R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת והיא שווה ל-2 (כי במטריצה המדורגת יש רק שתי שורות שונות מאפס), כלומר הדרגה קטנה ממספר המשתנים 3, ולכן למערכת הזו יש אינסוף פתרונות.

נסכם:

עבור $a\neq -1,2$ למערכת יש פתרון יחיד

עבור $a=-1$ למערכת אין פתרונות.

עבור $a=-2$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ii) נציב את הערכים המתאימים $x=2, y=5, z=1$ במערכת ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} 2 & & & + & a & = & a-3 \\ -4 & + & 5 & + & (2-3a) & = & 11-a \\ 2\,(a-8) & + & 5\,(2a-2) & - & (3a+6) & = & 4a^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = & -5 \\ -4a & = & 8 \\ 5a+4a^2 & = & 36 \end{cases}$$

ומהשורה הראשונה נקבל כי אין ערכים שעבורם מתקיים שוויון, כלומר אין ערך של a עבורו העמודה היא פתרון למערכת.

ב. (i) **נכון**. העמודה u היא פתרון של המערכת, ומכיוון שלמערכת יש יותר משתנים ממשוואות, אם יש לה פתרון ישלה אינסוף פתרונות.

(ii) **לא נכון**. עבור u, v, w וקטורי האפס המתאימים, למערכת יש פתרון.

(iii) **נכון**. העמודה u היא פתרון של המערכת, כי $(BA)\,u = B\,(Au) = Bv = w$.

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) יהיה V מרחב וקטורי ממימד 3, ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של V.

(i) הסבירו מדוע הקבוצה

$$S = \{v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 + 3v_2, -v_2 + v_3, v_1 + v_2 + 3v_3, v_1 + 4v_3\}$$

תלויה לינארית.

(ii) מצאו תת קבוצה של S שהיא בסיס של V.

אין קשר בין סעיפים א,ב

ב. יהי U מרחב וקטורי, ויהיו $W_1, W_2, W_3 \neq \{0\}$ תתי מרחבים של U כך ש-

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}\,.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

(i) המרחבים $W_1 + W_3, W_2 + W_3$ שונים.

(ii) אם $\dim U$ אי זוגי ו-$W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = U$, אז $W_1 + W_2 \neq U$

פתרון

א. (i) הקבוצה S תלויה לינארית כי היא מכילה 5 איברים במרחב ממימד 3. אם המימד שווה 3 אז הגודל המקסימלי של קבוצה בת"ל הוא 3.

(ii) כדי למצוא תת קבוצה שהיא בסיס נבדוק תלויות לינאריות של איברי הקבוצה, ע"י מציאת תלויות לינאריות של וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי הבסיס B. נכתוב את וקטורי בקואורדינטות כעמודות מטריצה, ונפעיל פעולות אלמנטריות ששומרות על תלויות לינאריות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

העמודות הראשונה השנייה והרביעית במטריצה המדורגת הן קבוצה בת"ל (כי עמודות או שורות שונות מאפס במטריצה מדורגת הן קבוצה בת"ל, ולכן עמודות עם איברים פותחים הן קבוצה בת"ל), ומכיוון שדירוג שורות שומר על תלויות לינאריות, ותלויות לינאריות של וקטורי קואורדינטות שקולות לתלויות לינאריות של הוקטורים עצמם, נקבל כי הוקטורים הראשון, השני והרביעי בקבוצה S, כלומר הקבוצה

$$S_1 = \{v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 + 3v_2, v_1 + v_2 + 3v_3\}$$

מהווה קבוצה בת"ל עם שלושה איברים, ולכן בסיס של V

ב. (i) **הטענה לא נכונה**. דוגמה נגדית: עבור

$$U = \mathbb{R}^2,\ W_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\ W_2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\ W_3 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מתקיים כי החיתוכים הם $\{0\}$ (כי הוקטורים הפורסים הם בת"ל, ולכן כפולה משותפת שלהם היא רק וקטור האפס). אבל

$$W_1 + W_3 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = W_2 + W_3$$

(ii) **הטענה נכונה**. אם $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$, אז ממשפט המימד הראשון מתקיים

$$\dim W_1 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_3) = \dim(W_1 + W_3) = \dim(W_2 + W_3) = \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_2 \cap W_3)$$

ומכיוון ש $W_1 \cap W_3 = W)2 \cap W_3 = \{0\}$ נקבל כי $\dim W_1 + \dim W_3 = \dim W_2 + \dim W_3$ ובפרט $\dim W_1 = \dim W_2$. כעת, אם $U = W_1 + W_2$ אז ממשפט המימד הראשון נובע כי

$$\dim U = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2\dim W_1$$

בסתירה לכך שהמימד של U אי זוגי.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (14 נקודות) נסמן $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2, ויהיו $B=\left\{1+x,1+x+x^2,1+2x\right\}$ בסיס של U, ו-C הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. תהי $T:U\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&1&1\\a^2&4&1\\6&a^2+2&2\end{pmatrix}$$

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a ההעתקה T הפיכה.

(ii) מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור $a=2$.

ב. (6 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת

$$T\neq 0,\mathrm{Im}T\subset \mathrm{Ker}T,\mathrm{Im}T\neq\mathrm{Ker}T$$

(i) הסבירו מדוע $V\neq\mathrm{Ker}T$, $\mathrm{Im}T\neq\{0\}$

(ii) מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של T.

פתרון

א. (i) העתקה לינארית היא הפיכה אם ורק אם מטריצה מייצגת שלה היא הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת הנתונה:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&4&1\\6&a^2+2&2\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2\to C_2-C_1\\C_3\to C_3-1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\a^2&4-a^2&1-a^2\\6&a^2-4&-4\end{vmatrix}=\left(4-a^2\right)(-4)-\left(a^2-4\right)\left(a^2-1\right)=\left(a^2-4\right)\left(a^2+3\right)$$

כלומר המטריצה הפיכה אם ורק אם $\left(a^2-4\right)\left(a^2+3\right)\neq 0$ כלומר אם ורק אם $a\neq\pm 2$.

(ii) כדי למצוא בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה נדרג תחילה את המטריצה המייצגת, כאשר $a=2$.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\a^2&4&1\\6&a^2+2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&4&1\\6&6&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-6R_1]{R_2\to R_2-4R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-3\\0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{3}R_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+4R_2]{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

בעת בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה הוא וקטורי קואורדינטות של בסיס לגרעין לפי הבסיס B, ובסיס למרחב העמודות מורכב מוקטורי קואורדינטות של בסיס לתמונה לפי הבסיס C. כדי למצוא בסיס למרחב הפתרונות נכתוב את מערכת המשוואות ההומוגנית המתאימה אחרי דירוג (ניתן לעשות זאת כי דירוג שורות שומר על קבוצת הפתרונות של המערכת)

$$\begin{cases}x\quad +y\qquad\quad =0\\ \qquad\qquad\quad z=0\end{cases}$$

כלומר מרחב הפתרונות הוא מהצורה $\left\{\begin{pmatrix}-t\\t\\0\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$ ולכן בסיס למרחב הפתרונות הוא $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ובסיס לגרעין הוא

$$\left\{(-1)(1+x)+1\cdot(1+x+x^2)\right\}=\left\{x^2\right\}$$

ומימד הגרעין הוא 1. מימד מרחב העמודות הוא דרגת המטריצה, ובסיס למרחב העמודות הוא קבוצה בת"ל מתוך עמודות המטריצה שגודלה הוא המימד. דרגת המטריצה היא 2, ולכן כל קבוצה של שני וקטורים לא פרופורציונליים מהווה בסיס למרחב העמודות, כלומר

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

כמו כן אלו הם וקטורי קואורדינטות לבסיס לתמונה, ומכיוון שהבסיס הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הקבוצה עצמה היא בסיס לתמונה.

ב. (i) ההעתקה T שונה מהעתקת האפס, ולכן יש וקטור $v\in V$ כך ש $T(v)\neq 0$ ובפרט הוא לא בגרעין ויש בתמונה איבר ששונה מ-0. מכאן ש $V\neq\mathrm{Ker}T$, $\mathrm{Im}T\neq\{0\}$.

(ii) מהנתון ומהסעיף הקודם נובע כי $\{0\}\subset\mathrm{Im}T\subset\mathrm{Ker}T\subset V$ כאשר כל ההכלות הן הכלות ממש ואין שוויון. ולכן גם המימדים שונים. המימד של V הוא 3 ומכאן

$$0<\dim\mathrm{Im}T<\dim\mathrm{Ker}T<3$$

והפתרון היחיד לאי השוויונות הללו הן $\dim\mathrm{Im}T=1,\dim\mathrm{Ker}T=2$.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & a-2 & a\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & a & a-1\end{pmatrix}$.

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש-$D=P^{-1}AP$ (אין צורך למצוא את P,D).

(ii) מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו הוקטור $\begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A.

ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)

(i) אם A הפיכה, λ ערך עצמי של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ ערך עצמי של A^{-1}.

(ii) אם A לכסינה אז A^T לכסינה.

פתרון

א. נחשב תחילה את הפולינום האפייני של המטריצה

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2-a & -a\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & -a & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda(\lambda-a+1)-a)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-a)$$

ידוע כי מספר הוא ע"ע של A אם ורק אם הוא מאפס את הפולינום האופייני, ולכן הערכים העצמיים של A הם $\pm1, a$. כאשר $a\neq\pm1$ למטריצה יש שלושה ערכים עצמיים שונים ולכן היא לכסינה. נבדוק מה קורה בשאר המקרים:

עבור $a=1$ הריבוי האלגברי של -1 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של 1 ע"י מציאת הדרגה של $A-I$:

$$A-I=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה 1 (כי כל השורות הן כפולה של השורה הראשונה), ולכן הריבוי הגיאומטרי של 1 הוא $3-\operatorname{rank}(A-I)=2$ כלומר שווה לריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לכסינה במקרה זה.

עבור $a=-1$ הריבוי האלגברי של 1 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של -1 ע"י מציאת הדרגה של $A+I$:

$$A+I=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה 2, ולכן הריבוי הגיאומטרי של -1 הוא $3-\operatorname{rank}(A+I)=1$ כלומר שונה לריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה במקרה זה.

ב. (i) **הטענה נכונה**: אם A הפיכה אז כל הערכים העצמיים שונים מאפס. כעת, אם λ ע"ע של A, אז קיים $v\neq0$ כך ש

$$Av=\lambda v\Leftrightarrow v=\lambda A^{-1}v\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}v=A^{-1}v$$

ולכן $\frac{1}{\lambda}$ ע"ע של ההפכית של A.

(ii) **הטענה נכונה**: אם A לכסינה, כלומר קיימות P,D כך ש- D אלכסונית ומתקיים $P^{-1}AP=D$, אז ע"י הפעלת שחלוף על שני הצדדים נקבל כי:

$$\left(P^{-1}AP\right)^T=D^T\Leftrightarrow P^TA^T\left(P^{-1}\right)^T=D$$

D סימטרית כי היא אלכסונית, וע"י סימון $Q=\left(P^T\right)^{-1}$ נקבל כי $Q^{-1}A^TQ=D$.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. (7 נקודות) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5×5 המקיימת $A^3=81A$. חשבו את הדטרמיננטה של A אם נתון שהיא מספר שלילי.

ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & 2b_1 & c_1\\ 3a_2 & 6b_2 & 3c_2\\ a_3 & 2b_3 & c_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5a_3 & 5a_2 & 5a_1\\ -2b_3 & -2b_2 & -2b_1\\ c_3 & c_2 & c_1\end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה A שווה 12.

ג. (7 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3×3 כך ש-$AB+BA=0$. הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

פתרון

א. מהנתון נובע כי $|A|^3 = |A^3| = |81A| = 81^5|A|$ השוויון הימני נובע כי המטריצה מסדר 5×5. כלומר הדטרמיננטה מקיימת

$$0 = |A|^3 - 3^{20}|A| = |A|\left(|A|^2 - 3^{20}\right) = |A|\left(|A| + 3^{10}\right)\left(|A| - 3^{10}\right) \Rightarrow |A| = 0, \pm 3^{10}$$

נתון כי $|A|$ שלילי ולכן $|A| = -3^{10}$.

ב. נשווה בין שתי הדטרמיננטות:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 6b_2 & 3c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \to \frac{1}{2}C_2 \\ R_2 \to \frac{1}{3}R_2}}{=} 6 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{6}|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5a_3 & 5a_2 & 5a_1 \\ -2b_3 & -2b_2 & -2b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1 \to \frac{1}{5}R_1 \\ R_2 \to -\frac{1}{2}R_2}}{=} -10 \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} 10 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{10}|B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

קיבלנו כי

$$\frac{1}{6}|A| = \frac{1}{10}|B| \Leftrightarrow |B| = \frac{10}{6}|A| = \frac{10}{6}12 = 20.$$

ג. מהשוויון $AB + BA = 0$ נובע השוויון $AB = -BA$ וממנו נובע

$$|A||B| = |-AB| = (-1)^3|A||B| \Leftrightarrow 2|A||B| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \text{ או } |B| = 0$$

ולכן אחת המטריצות חייבת להיות לא הפיכה.

שאלה 6. (20 נקודות)

א. נתון המרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו $v \in V$ שמקיימים את שני התנאים הבאים:

(i) הוקטור v אורתוגונלי לוקטורים $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

(ii) הנורמה של v שווה 1.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד $\dim V = 2$, ויהיו $0 \neq u, v \in V$ שני וקטורים שונים זה מזה המקיימים $\langle u, v\rangle = \langle u, u\rangle = 3$.

(i) הראו כי $\{u - v, u\}$ קבוצה אורתוגונלית.

(ii) חשבו את הנורמה של v, כלומר $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ אם נתון בנוסף שהקבוצה $\{u - 2v, v\}$ היא גם קבוצה אורתוגונלית

פתרון

א. נמצא תחילה את כל הוקטורים שהם אורתוגונליים לשני הוקטורים הנתונים.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x + 5y - 6z = 0 \\ 2x + 9y - 10z = 0 \end{cases} \right\}$$

כלומר זהו מרחב הפתרונות של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix}$. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

נחשב את הנורמה של האיבר בבסיס:

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 21 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{21}$$

ולכן וקטור עם נורמה 1 שאורתוגונלי לשני הוקטורים הנתונים הוא $\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$.

ב. (i) מהנתון נובע כי גם u וגם $u-v$ שונים מאפס. ולכן הקבוצה אורתוגונלית אם המכפלה הפנימית שווה לאפס:

$$\langle u-v,u\rangle = \langle u,u\rangle - \langle v,u\rangle = 3-3=0$$

(ii) אם נתון שהקבוצה אורתוגונלית, אז

$$0=\langle u-2v,v\rangle = \langle u,v\rangle - 2\langle v,v\rangle = 3-2\|v\|^2 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & & + (1-b)\,z = -b-2 \\ -2x & + \quad y & + (3b-1)\,z = 10+b \\ (-b-6)\,x & - (2b+1)\,y & + (b-9)\,z = 4b^2-8b \end{cases}$$

(i) (9 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי b עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ii) (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר b (אם קיימים) וקטור העמודה $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) תהיינה A מטריצה מסדר 3×2, B מטריצה מסדר 2×3. בנוסף תהיינה u,v,w עמודות כך ש- $Au=v, Bv=w$. קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) למערכת $Bx=w$ יש אינסוף פתרונות.

(ii) למערכת $ABx=v$ יש פתרון יחיד.

(iii) למערכת $BAx=w$ יש פתרון.

פתרון

א. (i) נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-b \\ -2 & 1 & 3b-1 \\ -b-6 & -2b-1 & b-9 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2+2R_1 \\ R_3\to R_3+(b+6)R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & b+1 \\ 0 & -2b-1 & -b^2-4b-3 \end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3+(2b+1)R_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & b^2-b-2 \end{vmatrix} = a^2-a-2 = (a-2)(a+1)$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שווה ל-$(b-2)(b+1)$. המטריצה הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן המטריצה הפיכה אם"ם $b\neq -1,2$. ידוע כי למערכת עם מטריצה מצומצמת ריבועית יש פתרון יחיד אם"ם המטריצה הפיכה, כלומר למטריצה יש פתרון יחיד אם"ם $b\neq -1,2$.נבדוק עבור שאר הערכים:

עבור $b=2$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 & 12 \\ -9 & -4 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1\ R_3\to R_3+9R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -12 & -28 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת גדולה מדרגת המטריצה המצומצמת (ישנה שורת סתירה) ולכן למערכת אין פתרון.

עבור $b=-1$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 9 \\ -6 & 2 & -12 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+2R_1\ R_3\to R_3+6R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת והיא שווה ל-2 (כי במטריצה המדורגת יש רק שתי שורות שונות מאפס), כלומר הדרגה קטנה ממספר המשתנים 3, ולכן למערכת הזו יש אינסוף פתרונות.

נסכם:

עבור $b\neq -1,2$ למערכת יש פתרון יחיד

עבור $b=2$ למערכת אין פתרונות.

עבור $b=-1$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ii) נציב את הערכים המתאימים $x=2, y=5, z=1$ במערכת ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} 2 & & + \quad 1-b = -b-2 \\ -4 & + \quad 5 & + (3b-1) = b+10 \\ 2(-b-6) & + 5(-2b-1) & - (b-9) = 4b^2-8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -5 \\ 2b = 10 \\ -5b-4b^2 = 8 \end{cases}$$

ומהשורה הראשונה נקבל כי אין ערכים שעבורם מתקיים שוויון, כלומר אין ערך של b עבורו העמודה היא פתרון למערכת.

ב. (i) **נכון**. העמודה v היא פתרון של המערכת, ומכיוון שלמערכת יש יותר משתנים ממשוואות, אם יש לה פתרון יש לה אינסוף פתרונות.

(ii) **לא נכון**. עבור $A=B=0$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(iii) **נכון**. העמודה u היא פתרון של המערכת, כי $(BA)\,u = B\,(Au) = Bv = w$.

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) יהיה V מרחב וקטורי ממימד 3, ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של V.

(i) הסבירו מדוע הקבוצה $S = \{v_1 - 2v_2 + v_3, -v_1 + 3v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_2 + 2v_3, v_1 - 4v_3\}$ תלויה לינארית.

(ii) מצאו תת קבוצה של S שהיא בסיס של V.

אין קשר בין סעיפים א,ב

ב. יהי U מרחב וקטורי, ויהיו $W_1, W_2, W_3 \neq \{0\}$ תתי מרחבים של U כך ש-

$$W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = U.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

(i) המרחבים $W_1 \cap W_3, W_2 \cap W_3$ שווים.

(ii) אם $W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$, אז $\dim U$ זוגי.

פתרון

א. (i) הקבוצה S תלויה לינארית כי היא מכילה 5 איברים במרחב ממימד 3. אם המימד שווה 3 אז הגודל המקסימלי של קבוצה בת"ל הוא 3.

(ii) כדי למצוא תת קבוצה שהיא בסיס נבדוק תלויות לינאריות של איברי הקבוצה, ע"י מציאת תלויות לינאריות של וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי הבסיס B. נכתוב את וקטורי בקואורדינטות כעמודות מטריצה, ונפעיל פעולות אלמנטריות ששומרות על תלויות לינאריות.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

העמודות הראשונה השנייה והחמישית במטריצה המדורגת הן קבוצה בת"ל (כי עמודות או שורות שונות מאפס במטריצה מדורגת הן קבוצה בת"ל, ולכן עמודות עם איברים פותחים הן קבוצה בת"ל), ומכיוון שדירוג שורות שומר על תלויות לינאריות, ותלויות לינאריות של וקטורי קואורדינטות שקולות לתלויות לינאריות של הוקטורים עצמם, נקבל כי הוקטורים הראשון, השני והחמישי בקבוצה S, כלומר הקבוצה

$$S_1 = \{v_1 - 2v_2 + v_3, -v_1 + 3v_2, v_1 - 4v_3\}$$

מהווה קבוצה בת"ל עם שלושה איברים, ולכן בסיס של V

ב. (i) **הטענה לא נכונה**. דוגמה נגדית: עבור

$$U = \mathbb{R}^2,\ W_1 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\ W_2 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\ W_3 = U$$

מתקיים כי הסכומים שלהם שווים U (כי סכום של U אם תת מרחב כלשהו נשאר U, ו-$W_1 + W_2 = U$). אבל

$$W_1 \cap W_3 = W_1 \neq W_2 = W_2 \cap W_3$$

(ii) **הטענה נכונה**. אם $W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$, אז ממשפט המימד הראשון מתקיים

$$\dim W_1 + \dim W_3 - \dim\left(W_1 \cap W_3\right) = \dim\left(W_1 + W_3\right) = \dim\left(W_2 + W_3\right) = \dim W_2 + \dim W_3 - \dim\left(W_2 \cap W_3\right)$$

ומכיוון ש $W_1 \cap W_3 = W)2 \cap W_3 = \{0\}$ נקבל כי $\dim W_1 + \dim W_3 = \dim W_2 + \dim W_3$ ובפרט $\dim W_1 = \dim W_2$. כעת, אם $U = W_1 + W_2$ אז ממשפט המימד הראשון נובע כי

$$\dim U = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim\left(W_1 \cap W_2\right) = 2\dim W_1$$

כלומר המימד של U זוגי.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (14 נקודות) נסמן $U = \mathbb{R}_2[x] = P_2(\mathbb{R})$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2, ויהיו $B = \left\{1 + x, 1 + x + x^2, 1 + 2x\right\}$ בסיס של U, ו-C הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. תהי $T : U \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 + 1 & 2 & 1 \\ 3 & a^2 + 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a ההעתקה T לא הפיכה.

(ii) מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור $a = 1$.

ב. (6 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3, ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית המקיימת

$$\mathrm{Ker}T \subset \mathrm{Im}T, \mathrm{Im}T \neq \mathrm{Ker}T, \quad \text{לא חח''ע } T$$

(i) הסבירו מדוע T לא על.

(ii) מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של T.

פתרון

א. (i) העתקה לינארית היא הפיכה אם ורק אם מטריצה מייצגת שלה היא הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת הנתונה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2+1 & 2 & 1 \\ 3 & a^2+2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - 1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2+1 & 1-a^2 & -a^2 \\ 6 & a^2-1 & -1 \end{vmatrix} = \left(1-a^2\right)(-1) + a^2\left(a^2-1\right) = \left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)$$

כלומר המטריצה הפיכה אם ורק אם $\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right) \neq 0$ כלומר אם ורק אם $a \neq \pm 1$.

(ii) כדי למצוא בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה נדרג תחילה את המטריצה המייצגת, כאשר $a = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2+1 & 2 & 1 \\ 3 & a^2+2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בעת בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה הוא וקטורי קואורדינטות של בסיס לגרעין לפי הבסיס B, ובסיס למרחב העמודות מורכב מוקטורי קואורדינטות של בסיס לתמונה לפי הבסיס C. כדי למצוא בסיס למרחב הפתרונות נכתוב את מערכת המשוואות ההומוגנית המתאימה אחרי דירוג (ניתן לעשות זאת כי דירוג שורות שומר על קבוצת הפתרונות של המערכת)

$$\begin{cases} x & +y & & = & 0 \\ & & -z & = & 0 \end{cases}$$

כלומר מרחב הפתרונות הוא מהצורה $\left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ ולכן בסיס למרחב הפתרונות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ובסיס לגרעין הוא

$$\left\{(-1)(1+x) + 1 \cdot (1+x+x^2)\right\} = \left\{x^2\right\}$$

ומימד הגרעין הוא 1. מימד מרחב העמודות הוא דרגת המטריצה, ובסיס למרחב העמודות הוא קבוצה בת"ל מתוך עמודות המטריצה שגודלה הוא המימד. דרגת המטריצה היא 2, ולכן כל קבוצה של שני וקטורים לא פרופורציונליים מהווה בסיס למרחב העמודות, כלומר

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

כמו כן אלו הם וקטורי קואורדינטות לבסיס לתמונה, ומכיוון שהבסיס הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הקבוצה עצמה היא בסיס לתמונה.

ב. (i) ההעתקה T היא מ V לעצמו ולכן היא חח"ע אם ורק אם היא על. נתון כי היא לא חח"ע ולכן היא לא על.

(ii) מהנתון ומהסעיף הקודם נובע כי $\{0\} \subset \mathrm{Ker}T \subset \mathrm{Im}T \subset V$ כאשר כל ההכלות הן הכלות ממש ואין שוויון. ולכן גם המימדים שונים. המימד של V הוא 3 ומכאן

$$0 < \dim \mathrm{Ker}T < \dim \mathrm{Im}T < 3$$

והפתרון היחיד לאי השוויונות הללו הן $\dim \mathrm{Ker}T = 1$, $\dim \mathrm{Im}T = 2$.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & -a-5 & -3 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & a-3 & -3 \end{pmatrix}$.

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש-$D = P^{-1}AP$ (אין צורך למצוא את P, D).

(ii) מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו הוקטור $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A.

ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)

(i) אם λ ערך עצמי של A, אז λ^2+1 ערך עצמי של A^2+I.

(ii) אם A הפיכה ולכסינה אז A^{-1} לכסינה.

פתרון

א. נחשב תחילה את הפולינום האפייני של המטריצה

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & a+5 & 3 \\ 0 & \lambda+a-1 & -1 \\ 0 & 3-a & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)((\lambda+3)(\lambda+a-1)+3-a) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda+a)$$

ידוע כי מספר הוא ע"ע של A אם ורק אם הוא מאפס את הפולינום האופייני, ולכן הערכים העצמיים של A הם $-a$, ±2. כאשר $a\neq\pm2$ למטריצה יש שלושה ערכים עצמיים שונים ולכן היא לכסינה. נבדוק מה קורה בשאר המקרים:

עבור $a=-2$ הריבוי האלגברי של -2 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של 2 ע"י מציאת הדרגה של $A-2I$:

$$A-2I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה 1 (כי כל השורות הן כפולה של השורה הראשונה), ולכן הריבוי הגיאומטרי של 2 הוא $3-\text{rank}(A-2I)=2$ כלומר שווה לריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לכסינה במקרה זה.

עבור $a=2$ הריבוי האלגברי של 2 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של -2 ע"י מציאת הדרגה של $A+2I$:

$$A+2I = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה 2, ולכן הריבוי הגיאומטרי של -2 הוא $3-\text{rank}(A+2I)=1$ כלומר שונה לריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה במקרה זה.

ב. (i) **הטענה נכונה**: אם λ ע"ע של A, אז קיים $v\neq0$ כך ש

$$Av=\lambda v \Rightarrow A^2v = A(Av) = \lambda Av = \lambda^2 v \Rightarrow \left(A^2+I\right)v = A^2v+v = \lambda^2 v + v = \left(\lambda^2+1\right)v$$

ולכן λ^2+1 ע"ע של A^2+I.

(ii) **הטענה נכונה**: אם A לכסינה, כלומר קיימות P,D כך ש- D אלכסונית ומתקיים $P^{-1}AP=D$, אז ע"י הפעלת הפכי על שני הצדדים נקבל כי:

$$\left(P^{-1}AP\right)^{-1} = D^{-1} \Leftrightarrow PA^{-1}P = D^{-1}$$

ע"י סימון $Q=P^{-1}$ נקבל כי $Q^{-1}A^{-1}Q=D$.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. (7 נקודות) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 המקיימת $A^3=9A$. חשבו את הדטרמיננטה של A אם נתון שהיא מספר שלילי.

ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 5a_2 & 10b_2 & 5c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3a_3 & 3a_2 & 3a_1 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה A שווה 20.

ג. (7 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3×3 כך ש-$AB+BA=0$. הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

פתרון

א. מהנתון נובע כי $|A|^3=|A^3|=|9A|=9^3|A|$ השוויון הימני נובע כי המטריצה מסדר 3×3. כלומר הדטרמיננטה מקיימת

$$0=|A|^3-3^6|A| = |A|\left(|A|^2-3^6\right) = |A|\left(|A|-3^3\right)\left(|A|+3^3\right) \Rightarrow |A| = 0,\pm3^3$$

נתון כי $|A|$ שלילי ולכן $|A|=-3^3$.

ב. נשווה בין שתי הדטרמיננטות:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 5a_2 & 10b_2 & 5c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2\to\frac{1}{2}C_2 \\ R_2\to\frac{1}{5}R_2}}{=} 10\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{10}|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3a_3 & 3a_2 & 3a_1 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1\to\frac{1}{3}R_1 \\ R_2\to-R_2}}{=} -3\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} \overset{C_1\leftrightarrow C_3}{=} 3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}|B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

קיבלנו כי

$$\frac{1}{10}|A| = -\frac{1}{3}|B| \Leftrightarrow |B| = -\frac{3}{10}|A| = -\frac{3}{10}20 = -6.$$

ג. מהשוויון $AB + BA = 0$ נובע השוויון $AB = -BA$ וממנו נובע

$$|A||B| = |-AB| = (-1)^3|A||B| \Leftrightarrow 2|A||B| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \text{ או } |B| = 0$$

ולכן אחת המטריצות חייבת להיות לא הפיכה.

שאלה 6. (20 נקודות)

א. נתון המרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו $v \in V$ שמקיים את שני התנאים הבאים:

(i) הוקטור v אורתוגונלי לוקטורים $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) הנורמה של v שווה 1.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $0 \neq u, v \in V$ שני וקטורים שונים זה מזה המקיימים $\langle u, v\rangle = \langle u, u\rangle = 2$.

(i) הראו כי $\{u - v, u\}$ קבוצה אורתוגונלית.

(ii) חשבו את הנורמה של v, כלומר $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ אם נתון בנוסף שהקבוצה $\{u - 4v, v\}$ היא גם קבוצה אורתוגונלית

פתרון

א. נמצא תחילה את כל הוקטורים שהם אורתוגונליים לשני הוקטורים הנתונים.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 7y & + & 10z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

כלומר זהו מרחב הפתרונות של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{11} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

נחשב את הנורמה של האיבר בבסיס:

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 11 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{11}$$

ולכן וקטור עם נורמה 1 שאורתוגונלי לשני הוקטורים הנתונים הוא $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$.

ב. (i) מהנתון נובע כי גם u וגם $u - v$ שונים מאפס. ולכן הקבוצה אורתוגונלית אם המכפלה הפנימית שווה לאפס:

$$\langle u - v, u\rangle = \langle u, u\rangle - \langle v, u\rangle = 2 - 2 = 0$$

(ii) אם נתון שהקבוצה אורתוגונלית, אז

$$0 = \langle u - 4v, v\rangle = \langle u, v\rangle - 4\langle v, v\rangle = 2 - 4\|v\|^2 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

בהצלחה

מס׳ נבחן

שם הקורס: אלגברה ליניארית

קוד הקורס: 90905

הוראות לנבחן:

- חומר עזר שימושי לבחינה:
  דפי נוסחאות מצורפים
  מחשבון לא גרפי
- אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
- אין להפריד את דפי שאלון הבחינה
- אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

שנה: תשפ״ג

סמסטר: א׳

תאריך ושעת הבחינה:

מועד א 01/02/23 09:00

משך הבחינה: 180 דקות

מרצי הקורס:

ד״ר רוזנצויג ליאור, פרופ׳ טל-עזר הלל, ד״ר קפלן דבורה, ד״ר שלוסברג מנחם, ד״ר ביתן רוני, ד״ר בנק אפרת, ד״ר אמיר ענת, ד״ר בארשבסקי אברהמי אורלי, פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד״ר לייטנר אריאלה מירה, ד״ר בר לוקיאנוב ולדימיר

***** שאלון הבחינה לא ייבדק על ידי המרצה, לא ייסרק ולא יישמר. *****
***** לא ינתן ציון על תשובות אשר תכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור 5 שאלות מתוך 6.
שווי כל שאלה 20 נקודות.
יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל שאלה בדף חדש
יש לענות תשובות מפורטות ומנומקות. הסבירו את צעדיכם.
יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.

בהצלחה!

מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. אם לא צויין אחרת, יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & & & + & az & = & a-3 \\ -2x & + & y & + & (2-3a)\,z & = & 11-a \\ (a-8)\,x & + & (2a-2)\,y & - & (3a+6)\,z & = & 4a^2+4 \end{cases}$$

(i) (9 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי a עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ii) (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a (אם קיימים) וקטור העמודה $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) תהיינה A מטריצה מסדר 3×2, B מטריצה מסדר 2×3. בנוסף תהיינה u,v,w עמודות כך ש- $Au=v, Bv=w$. קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) למערכת $Ax=v$ יש אינסוף פתרונות.

(ii) למערכת $ABx=v$ אין פתרון.

(iii) למערכת $BAx=w$ יש פתרון.

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) יהיה V מרחב וקטורי ממימד 3, ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V.

(i) הסבירו מדוע הקבוצה

$$S=\{v_1+2v_2+v_3, v_1+3v_2, -v_2+v_3, v_1+v_2+3v_3, v_1+4v_3\}$$

תלויה לינארית.

(ii) מצאו תת קבוצה של S שהיא בסיס של V.

אין קשר בין סעיפים א,ב

ב. (8 נקודות) יהי U מרחב וקטורי, ויהיו $W_1,W_2,W_3\neq\{0\}$ תתי מרחבים של U כך ש-

$$W_1\cap W_2=W_1\cap W_3=W_2\cap W_3=\{0\}\,.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

(i) המרחבים W_1+W_3, W_2+W_3 שונים.

(ii) אם $\dim U$ אי זוגי ו-$W_1+W_3=W_2+W_3=U$, אז $W_1+W_2\neq U$

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (14 נקודות) נסמן $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2, ויהיו $B=\left\{1+x, 1+x+x^2, 1+2x\right\}$ בסיס של U, ו-C הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. תהי $T:U\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & 4 & 1\\ 6 & a^2+2 & 2\end{pmatrix}$$

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a ההעתקה T הפיכה.

(ii) מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור $a=2$.

ב. (6 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת

$$T\neq 0, \mathrm{Im}T\subset \mathrm{Ker}T, \mathrm{Im}T\neq\mathrm{Ker}T$$

(i) הסבירו מדוע $V\neq\mathrm{Ker}T$, $\mathrm{Im}T\neq\{0\}$

(ii) מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של T.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$.

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש-$D = P^{-1}AP$ (אין צורך למצוא את P, D).

(ii) מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו הוקטור $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A.

ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)

(i) אם A הפיכה, λ ערך עצמי של A, אז $\frac{1}{\lambda}$ ערך עצמי של A^{-1}.

(ii) אם A לכסינה אז A^T לכסינה.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. (7 נקודות) תהי A מטריצה ממשית מסדר 5×5 המקיימת $A^3 = 81A$. חשבו את הדטרמיננטה של A אם נתון שהיא מספר שלילי.

ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 6b_2 & 3c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5a_3 & 5a_2 & 5a_1 \\ -2b_3 & -2b_2 & -2b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה A שווה 12.

ג. (7 נקודות) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מסדר 3×3 כך ש-$AB + BA = 0$. הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

שאלה 6. (20 נקודות)

א. (10 נקודות) נתון המרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו $v \in V$ שמקיים את שני התנאים הבאים :

(i) הוקטור v אורתוגונלי לוקטורים $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

(ii) הנורמה של v שווה 1.

ב. (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $0 \neq u, v \in V$ שני וקטורים שונים זה מזה המקיימים $\langle u, v \rangle = \langle u, u \rangle = 3$.

(i) הראו כי $\{u - v, u\}$ קבוצה אורתוגונלית.

(ii) חשבו את הנורמה של v, כלומר $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ אם נתון בנוסף שהקבוצה $\{u - 2v, v\}$ היא גם קבוצה אורתוגונלית

בהצלחה

שם הקורס: אלגברה ליניארית

מס׳ נבחן

קוד הקורס: 90905

הוראות לנבחן:

- חומר עזר שימושי לבחינה:
  דפי נוסחאות מצורפים
  מחשבון לא גרפי
- אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
- אין להפריד את דפי שאלון הבחינה
- אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

שנה: תשפ״ג

סמסטר: א׳

תאריך ושעת הבחינה:

מועד א 01/02/23 09:00

משך הבחינה: 180 דקות

מרצי הקורס:

ד״ר רוזנצויג ליאור, פרופ׳ טל-עזר הלל, ד״ר קפלן דבורה, ד״ר שלוסברג מנחם, ד״ר ביתן רוני, ד״ר בנק אפרת, ד״ר אמיר ענת, ד״ר בארשבסקי אברהמי אורלי, פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד״ר לייטנר אריאלה מירה, ד״ר בר לוקיאנוב ולדימיר

***** שאלון הבחינה לא ייבדק על ידי המרצה, לא ייסרק ולא יישמר. *****
***** לא ינתן ציון על תשובות אשר תכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור 5 שאלות מתוך 6.
שווי כל שאלה 20 נקודות.
יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל שאלה בדף חדש
יש לענות תשובות מפורטות ומנומקות. הסבירו את צעדיכם.
יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.

בהצלחה!

מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. אם לא צויין אחרת, יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) **אין קשר בין סעיפים א,ב**

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & & & + & (1-b)\,z & = & -b-2 \\ -2x & + & y & + & (3b-1)\,z & = & 10+b \\ (-b-6)\,x & - & (2b+1)\,y & + & (b-9)\,z & = & 4b^2-8b \end{cases}$$

(i) (9 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי b עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ii) (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר b (אם קיימים) וקטור העמודה $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) תהיינה A מטריצה מסדר 3×2, B מטריצה מסדר 2×3. בנוסף תהיינה u,v,w עמודות כך ש- $Au=v, Bv=w$. קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) למערכת $Bx=w$ יש אינסוף פתרונות.

(ii) למערכת $ABx=v$ יש פתרון יחיד.

(iii) למערכת $BAx=w$ יש פתרון.

שאלה 2. (20 נקודות) **אין קשר בין סעיפים א,ב**

א. (12 נקודות) יהיה V מרחב וקטורי ממימד 3, ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V.

(i) הסבירו מדוע הקבוצה $S=\{v_1-2v_2+v_3, -v_1+3v_2, v_2+v_3, v_1-v_2+2v_3, v_1-4v_3\}$ תלויה לינארית.

(ii) מצאו תת קבוצה של S שהיא בסיס של V.

אין קשר בין סעיפים א,ב

ב. (8 נקודות) יהי U מרחב וקטורי, ויהיו $W_1,W_2,W_3\neq\{0\}$ תתי מרחבים של U כך ש-

$$W_1+W_2=W_1+W_3=W_2+W_3=U.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

(i) המרחבים $W_1\cap W_3, W_2\cap W_3$ שווים.

(ii) אם $W_1\cap W_3=W_2\cap W_3=\{0\}$, אז $\dim U$ זוגי.

שאלה 3. (20 נקודות) **אין קשר בין סעיפים א,ב**

א. (14 נקודות) נסמן $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2, ויהיו $B=\left\{1+x, 1+x+x^2, 1+2x\right\}$ בסיס של U, ו-C הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. תהי $T:U\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&1&1\\a^2+1&2&1\\3&a^2+2&2\end{pmatrix}$$

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a ההעתקה T לא הפיכה.

(ii) מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור $a=1$.

ב. (6 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת

$$\mathrm{Ker}T\subset\mathrm{Im}T, \mathrm{Im}T\neq\mathrm{Ker}T, \quad T \text{ לא חח"ע}$$

(i) הסבירו מדוע T לא על.

(ii) מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של T.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}2 & -(5+a) & -3\\ 0 & 1-a & 1\\ 0 & -3+a & -3\end{pmatrix}$.

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש-$D=P^{-1}AP$ (אין צורך למצוא את P,D).

(ii) מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו הוקטור $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A.

ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)

(i) אם λ ערך עצמי של A, אז λ^2+1 ערך עצמי של A^2+I.

(ii) אם A הפיכה ולכסינה אז A^{-1} לכסינה.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. (7 נקודות) תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 המקיימת $A^3=9A$. חשבו את הדטרמיננטה של A אם נתון שהיא מספר שלילי.

ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & 2b_1 & c_1\\ 5a_2 & 10b_2 & 5c_2\\ a_3 & 2b_3 & c_3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3a_3 & 3a_2 & 3a_1\\ -b_3 & -b_2 & -b_1\\ c_3 & c_2 & c_1\end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה A שווה 20.

ג. (7 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3×3 כך ש-$AB+BA=0$. הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

שאלה 6. (20 נקודות)

א. (10 נקודות) נתון המרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו $v\in V$ שמקיים את שני התנאים הבאים:

(i) הוקטור v אורתוגונלי לוקטורים $\begin{pmatrix}-1\\7\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$.

(ii) הנורמה של v שווה 1.

ב. (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $0\neq u,v\in V$ שני וקטורים שונים זה מזה המקיימים $\langle u,v\rangle=\langle u,u\rangle=2$.

(i) הראו כי $\{u-v,u\}$ קבוצה אורתוגונלית.

(ii) חשבו את הנורמה של v, כלומר $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$ אם נתון בנוסף שהקבוצה $\{u-4v,v\}$ היא גם קבוצה אורתוגונלית

בהצלחה