פתרון Y

שאלה 1 : (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו שלכל $x\in(0,\infty)$ מתקיים אי השוויון : $\ln(1+x^2)<x^2+x$.

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל : $\int e^{x^3}3x^5\ dx$.

פתרון:

א . נגדיר פונקצית עזר : $f(x)=x^2+x-\ln(1+x^2)$.

צריך להוכיח ש- f חיובית בקטע $(0,\infty)$. הפונקציה גזירה לכל x ומתקיים :

$f'(x)=2x+1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2x^3+x^2+1}{1+x^2}$. הנגזרת חיובית לכל נקודה $x\in[0,\infty)$, ואז f עולה בקטע $[0,\infty)$. מפה נובע שאם $x>0$ אז $f(x)>f(0)=0$. מזה מסיקים ש- f חיובית בקטע $(0,\infty)$.

ב.

$$\int e^{x^3}3x^5\ dx=\int e^{x^3}x^3\ 3x^2\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ x^3=t \\ 3x^2\,dx=dt}}{=} \int e^t\,t\,dt=e^t t-\int e^t dt=e^t t-e^t+C=$$

$$=e^{x^3}x^3-e^{x^3}+C$$

שאלה 2 : (20 נקודות)

א. (12 נק') נתונה הסדרה : $x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{6}{5-x_n}$.

א-1. הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $0<x_n<2$.

א-2. הוכיחו שהסדרה מונוטונית.

א-3. נמקו שהסדרה מתכנסת לגבול סופי וחשבו את גבולה.

ב. (8 נק') טענה : אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ וגם $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$ אזי הסדרה $\{b_n\}$ היא חסומה.

האם הטענה נכונה ?

אם התשובה היא "כן" אז נמקו היטב ואם היא "לא" אז הביאו דוגמה נגדית להפרכה של הטענה .

פתרון:

א :

1- הוכחה באינדוקציה.

עבור $n=1$, $x_1=1$ אכן מקיים $0<x_1<2$.

נניח שהטענה נכונה עבור n : $0<x_n<2$.

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$: $0 < x_{n+1} < 2$.

$$0 < x_n < 2 \quad \Rightarrow \quad 3 < 5 - x_n < 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{5-x_n} > \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{3} = 2 > \frac{6}{5-x_n} > \frac{6}{5} > 0$$

ב.

$$x_2 = \frac{6}{5-x_1} = \frac{6}{4} > 1 = x_1$$

2- נוכיח שהסדרה עולה ממש : לכל n מתקיים $x_{n+1} > x_n$.

הוכחה באינדוקציה.

עבור $n=1$, אכן מתקיים $x_2 = \frac{6}{4} > 1 = x_1$.

נניח שהטענה נכונה עבור n מסוים : $x_{n+1} > x_n$.

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$: $x_{n+2} > x_{n+1}$.

$$x_{n+1} > x_n \quad \Rightarrow \quad 5 - x_{n+1} < 5 - x_n \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5-x_{n+1}} > \frac{6}{5-x_n} \quad \Rightarrow \quad x_{n+2} > x_{n+1}$$

3-מסעיף א', לכל n מתקיים $0 < x_n < 2$ כלומר הסדרה (x_n) חסומה.

מסעיף ב', הסדרה עולה ממש.

הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול סופי.

נסמן $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. אז

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{5-x_n} = \frac{6}{5-L}$$

$$L(5-L) = 6 \Rightarrow \quad L^2 - 5L + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \begin{cases} 2 \\ or \\ 3 \end{cases}$$

אבל הסדרה קטנה מ 2 , ולכן $\lim_{n\to\infty} x_n = L = 2$.

ב: הטענה לא נכונה : דוגמה להפרכה : $a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = n$. מתקיים : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. אבל הסדרה $b_n = n$ היא לא חסומה מלמעלה לכן לא חסומה.

<u>שאלה 3</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $x^2 \arctan x = 1$?
נמקו היטב את התשובה. רמז : $\arctan x > 0$ לכל $x > 0$ ו $\arctan x < 0$ לכל $x < 0$.

ב. (10 נק ') על ידי שימוש בנוסחת טיילור עבור הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ סביב $x_0 = 8$ הוכיחו כי לכל $x \geq 8$ מתקיים:

$$\sqrt[3]{x} \geq 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{288}$$

פתרון :

א: נתבונן בפונקציה $f(x)=x^2\arctan x-1$. מספיק לבדוק כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $f(x)=0$. f פונקציה אלמנטרית שמוגדרת לכל x ממשי, לכן f רציפה לכל x ממשי. בכל תחום המונוטוניות ממש של f יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $f(x)=0$. נמצא את התחומים האלה : $f'(x)=2x\arctan x+\frac{x^2}{1+x^2}$.
נשים לב כי עבור $x>0$ מתקיים $x\arctan x>0$ ועבור $x<0$ גם מתקיים $x\arctan x>0$. לכן $f'(x)>0$ לכל x ממשי השונה מ-0 ומתאפסת בנקודה בודדה $x=0$.
ואז הפונקציה f עולה ב – $\mathbb{R}$.
מתקיים : $f\left(\sqrt{3}\right)=\pi-1>0$ ו – $f\left(-\sqrt{3}\right)=-\pi-1<0$. לכן לפי משפט קושי על ערך הביניים יש למשוואה $f(x)=0$ לפחות פתרון אחד בקטע $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$. המונוטוניות ממש ב – $\mathbb{R}$ גוררת שהפתרון הזה יחיד ב – $\mathbb{R}$.
מסקנה : למשוואה $x^2\arctan x=1$ יש פתרון ממשי יחיד.

ב: עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ נרשום את נוסחאות טיילור מסדר 2 סביב $x_0=8$ עם שארית בצורת לגרנז'. נחשב קודם את הנגזרות הנדרשות לכך :

$$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3} \qquad f(8)=2$$
$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8)=\frac{1}{12}$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8)=-\frac{1}{144}$$
$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-8/3}$$

לכן לכל $x\geq 8$ מתקיים :

$$\sqrt[3]{x}=f(8)+f'(8)(x-8)+\frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2+R_2(x,8)=$$
$$=2+\frac{x-8}{12}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{(x-8)^2}{144}+\underbrace{\frac{1}{3!}\cdot\frac{10}{27}\cdot\overset{\geq 0}{c^{-8/3}}\cdot\overbrace{(x-8)^3}^{\geq 0}}_{\geq 0}\geq 2+\frac{x-8}{12}-\frac{(x-8)^2}{288}$$

זה מוכיח את אי השוויון הנדרש.

שאלה 4 (20 נקודות).

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^4-16\right)^{\frac{2}{5}}$.

א. (13 נק') מצאו את תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון מקומי של f .

ב. (7 נק') האם יש לפונקציה f מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט ב- $\mathbb{R}$?

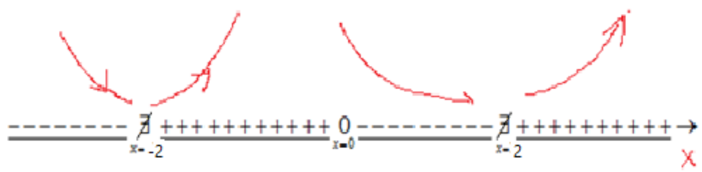
<u>פתרון :</u> הפונקציה אלמנטרית שמוגדרת בכל נקודה לכן רציפה בכל x ממשי.

א.
$$f(x)=\left(x^4-16\right)^{\frac{2}{5}} \to f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{5}(x^4-16)^{-\frac{3}{5}}4x^3=\frac{8}{5}\frac{x^3}{\left(x^4-16\right)^{\frac{3}{5}}} & (x\neq -2,2) \\ \nexists & x=\pm 2 \end{cases}$$

.

(נימוק אי קיום הנגזרת בנקודות שרשמנו : הגבולות החד צדדיים של הנגזרת לנקודות האלו הם אינסופיים).

סימן הנגזרת :



ואז לפי הסימן של הנגזרת אפשר להסיק כי הפונקציה עולה בקטע $[-2,0]$ ובקטע $[2,\infty)$ ויורדת בקטע $[0,2]$ ובקטע $(-\infty,-2]$.

בנקודות $x=2,\ x=-2$ יש מינימום מקומי ובנקודה x=0 יש מקסימום מקומי (לפי סימן הנגזרת **בסביבה של כל נקודה קריטית**, ורציפות בנקודה).

ב. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4-16\right)^{\frac{2}{5}}=+\infty$ ולכן אין לפונקציה f מקסימום מוחלט ב- $\mathbb{R}$.

המינימום המוחלט הוא $f(2)=f(-2)=0$ כי לכל נקודה x מתקיים :

$$f(x)=\left(x^4-16\right)^{\frac{2}{5}}=\left(\sqrt[5]{x^4-16}\right)^2\geq 0=f(2)=f(-2)\ .$$

שאלה 5 : (20 נקודות)

נגדיר את הפונקציה $F(x)=\int_0^{\sin x}\frac{\arcsin t}{t^2+1}dt$, לכל $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $x\in$.

א. (12 נק') מצאו באיזה נקודות של הקטע הסגור $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הפונקציה F מקבלת את המקסימום ואת המינימום המוחלטים בקטע. מהו הערך של המינימום ?
(אין צורך לחשב את ערך המקסימום המוחלט) .

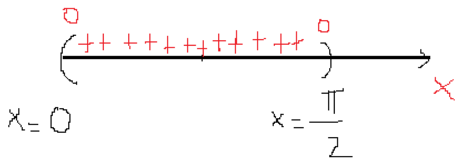
ב. (8 נק') האם הישר $x=0$ מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף של הפונקציה : $G(x)=\frac{F(x)}{x^2}$?

פתרון :

א. הפונקציה $f(t)=\frac{\arcsin t}{t^2+1}$ רציפה בקטע $[-1,1]$ כאלמנטרית שמוגדרת בקטע, לכן היא רציפה בקטע הסגור עם קצוות 0 ו- $\sin x$, לכל x . $g(x)=\sin x$ היא גזירה לכל x . ואז F גזירה לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **ועל פי משפט היסודי המוכלל :**

$$F'(x)=\frac{\arcsin(\sin x)}{(\sin x)^2+1}\cos x=\frac{x\cos x}{(\sin x)^2+1}$$

סימן הנגזרת בקטע :



לכן הפונקציה עולה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ואז המינימום המוחלט מתקבל עבור $x=0$ והמקסימום המוחלט מתקבל עבור $x=\frac{\pi}{2}$.

הערך של המינימום המוחלט הוא : $F(0)=\int_0^{\sin 0}\frac{\arcsin t}{t^2+1}dt=\int_0^{0}\frac{\arcsin t}{t^2+1}dt=0$.

ב.

הערה : F גזירה לכן רציפה בקטע הנתון ולכן $\lim_{x\to 0}F(x)=F(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}G(x)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^2}=(\frac{0}{0},LOPITAL)=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cos x}{\left((\sin x)^2+1\right)2\cancel{x}}=1$$

לכן שני הגבולות החד צדדיים הם סופיים ואז הישר $x=0$ הוא לא אסימפטוטה אנכית.

<u>שאלה 6</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b הפונקציה $f:(3,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת בהמשך היא רציפה בנקודה $x_0=4$?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{x}-a)4}{x-4} & (x>4)\\ b & (x=4)\\ \dfrac{\ln(x-3)}{x-4} & (3<x<4)\end{cases}$$

ב. (10 נק') מצאו את השטח הכלוא בין העקומות הבאות עבור $x\geq 0$:

$y=x$, $y=\dfrac{1}{x}$, ו- $y=4x$.

פתרון:

א. נחשב גבולות חד צדדיים ונדרוש שיתקיים שוויון: $\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=f(4)$:

נבצע חישוב של הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x\to 4^-}f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{\ln(x-3)}{x-4}=\left\{\frac{0}{0},Lopital\right\}=\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{\frac{1}{x-3}}{1}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 4^+}f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{(\sqrt{x}-a)4}{x-4}$$

כאשר $a=2$ נקבל:

$$\lim_{x\to 4^+}f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{(\sqrt{x}-2)4}{(x-4)}=\lim_{x\to 4^+}\frac{(\sqrt{x}-2)4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=1$$

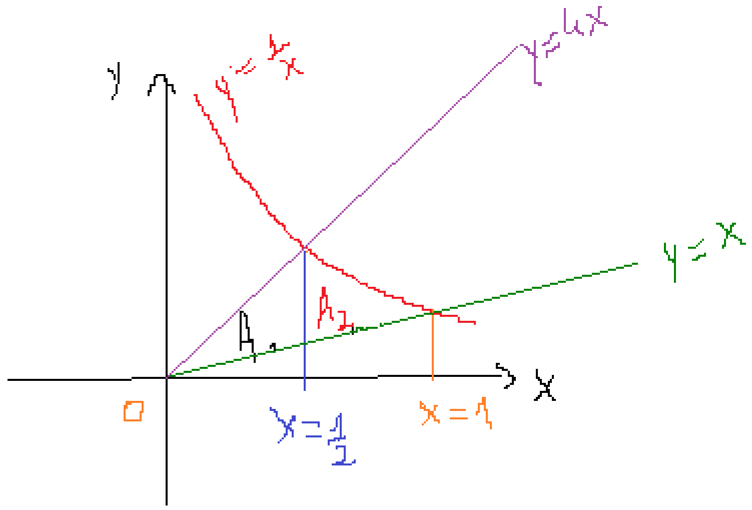
כאשר $a\neq 2$ נקבל אי רציפות מסדר שני (עיקרית).

לכן דרישת הרציפות: $\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=f(4)$ מתקיימת אם ורק אם :

$a=2$

$b=1$.

ב. השטח הוא סכום של השטחים של התחומים A_1 ו A_2 כמו שמסומן בציור :



$$Area=\int_0^{\frac{1}{2}}(4x-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{x}-x)dx=\left(3\frac{x^2}{2}\right)_0^{\frac{1}{2}}+\left(\ln x-\frac{x^2}{2}\right)_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}+(\frac{-1}{2}-\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{8})=\ln 2$$