מבחן באלגברה לינארית

שאלה 1. (20 נק׳) נתונה מערכת המשוואות
$$\begin{cases} x + y + z = t \\ tx + (2t-1)y + (t^2+t)z = t^2 \\ -6x - 2(2+t)y - t(t+5)z = -5t-3 \end{cases}$$

א. (15 נק׳) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר t יש למערכת
1. פתרון יחיד 2. אינסוף פתרונות 3. אין פתרון
במקרה שבו יש אינסוף פתרונות, מצאו את הפתרון הכללי.

ב. (5 נק׳) מצאו האם קיים ערך עבור הפרמטר t כך שהווקטור $(1,1,1)$ הוא פתרון של המערכת.

שאלה 2. (20 נק׳) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (15 נק׳) נתונים תתי המרחבים U,W של $V=\mathbb{R}_3[x]=P_3(\mathbb{R})$
$U=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in V \mid a-2b+c=0\,,\,a+b-2c=0\right\}$,
$W=\text{Span}\left\{1+x+x^2+x^3, 2+x+x^2+x^3, 3+x+x^2+x^3\right\}$.

i. (10 נק׳) מצאו בסיסים ומימדים ל U,W.

ii. (5 נק׳) מצאו מימדים של $U\cap W$ ושל $U+W$.

ב. (5 נק׳) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 2×2. נתון שלמשוואה $x_1A+x_2A^2+x_3B+x_4B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד בנעלמים x_1,x_2,x_3,x_4. הראו שהקבוצה $\left\{A,A^2,B,B^2\right\}$ מהווה בסיס של המרחב $M_2(\mathbb{R})$, מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2.

שאלה 3. (20 נק׳)

א. תהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המקיימת כי
$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

i. (5 נק׳) הוכיחו כי הקבוצה $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^4$.

ii. (10 נק׳) מצאו את $\dim\text{Ker}T,\dim\text{Im}T$

ב. (5 נק׳) האם קיימת העתקה לינארית $S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ שהיא חח״ע?

שאלה 4. (20 נק') אין קשר בין הסעיפים א,ב.

א. (10 נק') נתונה A מטריצה אנטי סימטרית מסדר $(n\times n)$ המקיימת $2A^2+A^4+I=0$. מצאו מטריצה B המקיימת את המשוואה הבאה: $A^2(B+A)A^T=A$. הביעו את המטריצה B כצירוף לינארי של I,A,A^2

ב. (10 נק') חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה $A=\begin{pmatrix} 2017 & 2018 & 2019 \\ 2018+k & 2019+k & 2020+k \\ 2016-k & 2017-k & 2018-k \end{pmatrix}$.

כמה פתרונות יש למערכת $A^{2019}x=0$.

שאלה 5. (20 נק') נתונה המטריצה A מסדר 2×2. נגדיר את הווקטורים הבאים:

$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

כמו כן נתון כי $Av_1=2v_1,\quad Av_2=3v_1+v_2$

א. (10 נק') מצאו את המטריצה A, הוכיחו כי המטריצה A לכסינה, ומצאו את הערכים העצמיים שלה.

ב. (10 נק') נתון הוקטור $w=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. חשבו את A^6w.

שאלה 6. (20 נק') אין קשר בין סעיפים א,ב,ג

א. (8 נק') נתון המרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו $v\in V$ שמקיים את שני התנאים הבאים:

i. הוקטור v אורתוגונלי לוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ii. הוקטור v הוא בעל נורמה $\|v\|=1$

ב. (8 נק') יהי V מרחב וקטורי ממשי עם מכפלה פנימית $\langle\ ,\ \rangle$. ויהיו $v_1,v_2\in V$ שני וקטורים המקיימים

i. $\|3v_1-v_2\|^2=9\|v_1\|^2$ כאשר $\|v\|^2=\langle v,v\rangle$

ii. $\langle v_1,v_2\rangle=6$

הוכיחו כי $\|v_2\|=6$.

ג. (4 נק') יהי V מרחב וקטורי ממשי, $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס של V, ונגדיר מכפלה פנימית על V באופן הבא:

$\langle u,v\rangle=[u]_B\cdot[v]_B$,

(כלומר המכפלה של שני וקטורים שווה למכפלה הפנימית הסטנדרטית בין וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי הבסיס B). הוכיחו שהבסיס B הוא בסיס אורתונורמלי לפי המכפלה הפנימית הזו.