דף נוסחאות למבחן סופי באלגברה ליניארית

מטריצות

תכונות בסיסיות

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad \alpha\cdot A=A\cdot\alpha$$
$$A(BC)=(AB)C \qquad -A=-1\cdot A$$
$$(A+B)C=AC+BC \qquad A+B=B+A$$
$$A(B+C)=AB+AC \qquad A\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$$
$$I_m\cdot A=A\cdot I_n=A \quad (A \text{ is } m\times n \text{ matrix})$$

מטריצה משוחלפת

תהי $A=[a_{ij}]$ מטריצה מסדר $m\times n$, אז מטריצה משוחלפת של A היא מטריצה $A^T=[a^T_{ij}]$ מסדר $n\times m$, כך שמתקיים $a^T_{ij}=a_{ji}$.

$$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T \qquad (\alpha A)^T=\alpha A^T$$
$$(AB)^T=B^TA^T \qquad (A^T)^T=A$$

מטריצה סימטרית מטריצה אנטיסימטרית

מטריצה ממשית A נקראת סימטרית אם $A^T=A$.

מטריצה ממשית A נקראת אנטיסימטרית אם $A^T=-A$

מטריצה הפיכה ומטריצה הפוכה

מטריצה ריבועית A נקראת מטריצה הפיכה אם קיימת מטריצה B, כך ש - $AB=BA=I$. מטריצה B נקראת מטריצה הפוכה של A, ומסומנת על ידי $B=A^{-1}$.

משפט תהינה A ו – B שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר, כך ש – $AB=I$, אז גם $BA=I$.

תכונות בסיסיות של מטריצות הפיכות

1. אם B מטריצה הפוכה של A, אז A מטריצה הפוכה של B, כלומר
$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$$
2. אם A ו – B מטריצות הפיכות מאותו סדר, אז גם AB מטריצה הפיכה, ומתקיים
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$
3. אם A מטריצה הפיכה אז
$$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$$

מציאת מטריצה הפוכה

$$[A\mid I]\xrightarrow{\cdots}[I\mid A^{-1}]$$

דטרמיננטות

מטריצה מינורית מטריצה A_{ij} המתקבלת ממטריצה A על ידי סילוק שורה ה- i ועמודה ה- j.

מינור דטרמיננטה $|A_{ij}|$ של מטריצה מינורית.

חישוב דטרמיננטה ישיר

פיתוח לפי שורה ה- i: $|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|A_{ik}|$

פיתוח לפי עמודה ה- j: $|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|A_{kj}|$

תכונות בסיסיות

1. $|A|=|A^T|$ **מסקנה:** כל תכונות של שורות נכונות גם עבור עמודות.
2. אם במטריצה A יש שורות פרופורציוניות, אז $|A|=0$.
3. ניתן להוציא גורם משותף של שורה אחת מחוץ לסימן דטרמיננטה.
4. אם A מטריצה ריבועית מסדר n, אז $|\alpha\cdot A|=\alpha^n\cdot|A|$.
5. ניתן לחבר כפולה כלשהי של שורה אחת לשורה אחרת.
6. אם מחליפים שתי שורות במקומות, אז דטרמיננטה מחליפה סימן.
7. דטרמיננטה של מטריצה משולשת עליונה (תחתונה) שווה למכפלת אברי אלכסון.
8. מטריצה A הפיכה, אם ורק אם $|A|\neq 0$.
9. אם A ו – B שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר, אז $|AB|=|A|\cdot|B|$.
10. אם מטריצה A הפיכה, אז $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$.

כלל קרמר

תהי $A\underline{x}=\underline{b}$ מערכת משוואות, כך ש – A מטריצה הפיכה מסדר n. נסמן ב- A_i את המטריצה המתקבלת מ- A על ידי החלפת עמודה ה - i של A בעמודה $\underline{b}$. אזי:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\dots,x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

מטריצה ADJOINT (מצורפת)

לכל מטריצה ריבועית A מגדירים מטריצה $Adj(A)$, כך שהאיברים שלה

$$\left[Adj(A)\right]_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

מקרה פרטי:

$$Adj\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

משפט לכל מטריצה ריבועית A מתקיים

$$A\cdot Adj(A)=Adj(A)\cdot A=|A|\cdot I_n$$

מסקנה אם A הפיכה, אז $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA$ וגם $Adj^{-1}(A)=\frac{1}{|A|}A$

טענה לכל מטריצה ריבועית A מסדר n מתקיים $|Adj(A)|=|A|^{n-1}$

דטרמיננטת Vandermonde

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

מקרה פרטי:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix}=(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

מערכות משוואות ליניאריות

מערכות הומוגניות $A\underline{x}=\underline{0}$

1. סכום שני פתרונות הוא פתרון
2. כפל פתרון בסקלר הוא פתרון
3. יש פתרון יחיד (הטריוויאלי) או אינסוף פתרונות

מערכות לא הומוגניות $A\underline{x}=\underline{b}$

משפט תהי $A\underline{x}=\underline{b}$ מערכת לא הומוגנית בעלת פתרון פרטי $\underline{x}_p$, ותהי $A\underline{x}=\underline{0}$ מערכת הומוגנית מתאימה בעלת קבוצת כל הפתרונות U, אז קבוצת כל הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ היא $\underline{x}_p+U=\left\{\underline{x}_p+\underline{x}_h \mid A\underline{x}_h=\underline{0}\right\}$, כלומר כל פתרון של מערכת לא הומוגנית הוא סכום של פתרון פרטי נתון שלה עם פתרון מסויים של המערכת ההומוגנית המתאימה.

משפט תהי $A\underline{x}=\underline{b}$ מערכת משוואות ליניאריות עם n נעלמים בעלת מטריצת המערכת A ומטריצה מורחבת $A|b$.
אם $rank(A)=rank(A|b)=n$, אז יש למערכת פתרון יחיד.
אם $rank(A)=rank(A|b)<n$, אז יש למערכת אינסוף פתרונות.
אם $rank(A)<rank(A|b)$, אז אין פתרונות למערכת.
הערה $rank(A)$ שווה למספר שורות שונות משורות האפס בצורה מדורגת של מטריצה A.

משפט תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. התנאים הבאים שקולים:
1. A הפיכה
2. $|A|\neq 0$
3. $rank(A)=n$
4. למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ יש פתרון **יחיד** לכל $\underline{b}$ והוא $\underline{x}=A^{-1}\underline{b}$
5. למערכת $A\underline{x}=\underline{0}$ יש רק פתרון טריוויאלי $\underline{x}=\underline{0}$
6. $Adj(A)$ הפיכה

מרחבים וקטוריים

הגדרה תהי V קבוצת איברים מטבע מסוים ויהי $\mathbf{F}$ שדה מספרים.
נסמן ב – $\oplus$ פעולת חיבור בין האיברים בתוך V,
ונסמן ב – $\odot$ פעולת כפל של איבר מ – V במספר מ – $\mathbf{F}$.
קבוצה V נקראת מרחב וקטורי מעל $\mathbf{F}$ ביחס לפעולות $\oplus$ ו – $\odot$, אם מתקיימות התכונות הבאות:
1. **סגירות ביחס לחיבור:**
לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $v_1\oplus v_2\in V$
2. **קומוטטיביות של חיבור:**
לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $v_1\oplus v_2=v_2\oplus v_1$
3. **אסוציאטיביות של חיבור:**
לכל $v_1,v_2,v_3\in V$ מתקיים $(v_1\oplus v_2)\oplus v_3=v_1\oplus(v_2\oplus v_3)$
4. **איבר ניטרלי ביחס לחיבור:**
קיים $\theta\in V$, כך שלכל $v\in V$ מתקיים $\theta\oplus v=v\oplus\theta=v$
5. **איבר נגדי ביחס לחיבור:**
לכל $v\in V$ קיים איבר $-v\in V$, כך ש – $-v\oplus v=v\oplus -v=\theta$
6. **סגירות ביחס לכפל בסקלר:**
לכל $v\in V$, ולכל $\alpha\in\mathbf{F}$ מתקיים $\alpha\odot v\in V$
(לפי הגדרה מניחים כי $\alpha\odot v=v\odot\alpha$)
7. **אסוציאטיביות של כפל בסקלר:**
לכל $v\in V$, ולכל $\alpha,\beta\in\mathbf{F}$ מתקיים $(\alpha\beta)\odot v=\alpha\odot(\beta\odot v)$
8. **דיסטריבוטיביות:**
לכל $v,u\in V$, ולכל $\alpha,\beta\in\mathbf{F}$ מתקיים
$$\alpha\odot(v\oplus u)=(\alpha\odot v)\oplus(\alpha\odot u)$$
$$(\alpha+\beta)\odot v=(\alpha\odot v)\oplus(\beta\odot v)$$
9. **התאמה:**
לכל $v\in V$ מתקיים $1\odot v=v$, $0\odot v=\theta$

תכונות מיידיות של מרחב וקטורי
1. לכל $\alpha\in\mathbf{F}$ מתקיים $\alpha\odot\theta=\theta$.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $-1\odot v=-v$.
3. אם $\alpha\odot v=\theta$, אז $v=\theta$ או $\alpha=0$.

הערה לרוב לא משתמשים בסימונים מיוחדים $\oplus,\odot$ לחיבור וכפל, אלא בסימונים רגילים $+,\bullet$. השימוש מוצדק במקרים שרוצים למנוע את חפיפת הסימון.

תת מרחב וקטורי יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{F}$ ביחס לפעולות חיבור וכפל בסקלר מסויימות. תת קבוצה W של V נקראת תת מרחב וקטורי של V, אם היא בפני עצמה מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbf{F}$ ביחס לאותן פעולות.

משפט יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{F}$ ביחס לפעולות חיבור וכפל בסקלר מסויימות. תת קבוצה W של V הינה תת מרחב וקטורי של V, אם ורק אם
1. $W\neq\varnothing$ (W לא קבוצה ריקה).
2. לכל $w_1,w_2\in W$ מתקיים $w_1+w_2\in W$.
3. לכל $w\in W$, ולכל $\alpha\in\mathbf{F}$ מתקיים $\alpha\cdot w\in W$.

הערה את שתי הדרישות האחרונות ניתן להחליף לדרישה אחת משולבת:
לכל $w_1,w_2\in W$, ולכל $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{F}$ מתקיים $\alpha_1w_1+\alpha_2w_2\in W$.

צירוף ליניארי יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$, ויהיו $v_1,v_2,\dots,v_n$ וקטורים מ – V. הביטוי
$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n$$
כאשר $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbf{F}$ נקרא צירוף ליניארי של $v_1,v_2,\dots,v_n$ מעל $\mathbf{F}$.

נפרש (Span) יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$, ויהיו $v_1,v_2,\dots,v_n$ וקטורים מ – V. קבוצה W של כל הצירופים הליניאריים של $v_1,v_2,\dots,v_n$ מעל $\mathbf{F}$ נקרת נפרש (או span) של $v_1,v_2,\dots,v_n$ מעל $\mathbf{F}$. סימון:
$$W=Span_{\mathbf{F}}\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$$

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$, ויהיו $v_1,v_2,\dots,v_n$ וקטורים מ – V. ויהי $W=Span_{\mathbf{F}}\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. אז W תת מרחב וקטורי של V.

הערה אם $W=Span_{\mathbf{F}}\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, אז אומרים כי המרחב W נפרש על ידי הוקטורים $v_1,v_2,\dots,v_n$, או כי הוקטורים $v_1,v_2,\dots,v_n$ פורשים את W.

הגדרה בהנתן מטריצה A מגדירים שלושה מרחבים וקטוריים:
מרחב השורות $row(A)$ - מ"ו הנפרש על ידי השורות של A.
מרחב העמודות $col(A)$ - מ"ו הנפרש על ידי העמודות של A.
מרחב הפתרונות $null(A)=\ker A$ - מ"ו של פתרונות המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$.

תלות ליניארית יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$, ויהיו $v_1,v_2,\dots,v_n$ וקטורים מ – V. הוקטורים $v_1,v_2,\dots,v_n$ נקראים תלוים ליניארית מעל $\mathbf{F}$, אם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbf{F}$, לא כולם אפסים, כך ש –
$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n=\theta$$
אם השוויון מתקיים רק עבור $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$, אז אומרים כי הוקטורים $v_1,v_2,\dots,v_n$ בלתי תלוים ליניארית (בת"ל) מעל $\mathbf{F}$.

הערה מהגדרה נובע כי $v_1,v_2,\dots,v_n$ תלויים ליניארית אם ורק אם אחד מהוקטורים האלה הינו צירוף ליניארי של האחרים.

בסיס יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$. קבוצת וקטורים $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subset V$ נקראת בסיס של V מעל $\mathbf{F}$, אם
1. $V=Span_{\mathbf{F}}(B)$
2. B בת"ל מעל $\mathbf{F}$.

משפט יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$ בעל בסיס $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. כל קבוצת וקטורים מ – V בת יותר מ - n איברים הינה תלויה ליניארית.

מסקנה: בכל בסיס של מרחב וקטורי V יש אותה כמות איברים.

מימד יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$. כמות האיברים בבסיס כלשהו של V נקרת מימד של מרחב וקטורי (מעל $\mathbf{F}$). סימון: $\dim_{\mathbf{F}} V$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$, כך ש – $\dim_{\mathbf{F}} V = n$. ותהי C קבוצה בת m וקטורים מ – V.
אם $m<n$, אז C לא פורשת את V.
אם $m>n$, אז C קבוצה תלויה ליניארית.

משפט תהי A מטריצה בעלת רכיבים מסדה $\mathbf{F}$, אז

$$\dim(row(A)) = \dim(col(A)) = rank(A)$$

קואורדינטות

יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$ בעל בסיס $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. לכל $v\in V$ מתקיים

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n$$

עבור $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbf{F}$ מסוימים. המספרים $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ נקראים קואורדינטות של וקטור v ביחס לבסיס B. סימון: $[v]_B$. כלומר

$$[v]_B = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \Leftrightarrow v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n$$

משפט המימד 1 יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$, ויהיו U,W שני תת מרחבים של V, אז

$$\dim U+\dim W = \dim(U\cap W)+\dim(U+W)$$

כאשר

$$U\cap W=\{v\in V \mid v\in U \ \&\ v\in W\}$$

$$U+W=\{v\in V\mid v=u+w, u\in U, w\in W\}$$

העתקות ליניאריות

הגדרה יהיו V ו – W שני מ"ו מעל אותו שדה $\mathbf{F}$. פונקציה $T:V\to W$ נקראת העתקה ליניארית מ – V ל – W, אם
1. לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.
2. לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbf{F}$ מתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$.

הערה את שתי הדרישות הנ"ל ניתן להחליף לדרישה אחת משולבת:
לכל $v_1,v_2\in V$, ולכל $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{F}$ מתקיים
$T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)$.

טענה תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית, אז $T(\theta_V)=\theta_W$.

משפט תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית, ויהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, אז T מוגדרת על ידי הפעולה שלה על אברי בסיס B, ולכל וקטור

$$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n$$

מתקיים

$$T(v)=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)+\ldots+\alpha_n T(v_n)$$

תמונה וגרעין תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. מגדירים שתי קבוצות
גרעין של T: $\ker T=\{v\in V\mid T(v)=\theta_W\}$
תמונה של T: $\operatorname{Im} T=\{w\in W\mid \exists v\in V: T(v)=w\}$

משפט תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית אז $\ker T$ תת מרחב וקטורי של V ו – $\operatorname{Im} T$ תת מרחב וקטורי של W.

הגדרה תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית.
T נקראת **חד – חד ערכית (חח"ע)**, אם $v_1=v_2 \Leftarrow T(v_1)=T(v_2)$.
T נקראת **על** (W **על**), אם $\operatorname{Im} T=W$.

טענה תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. אז T העתקה חד – חד ערכית, אם ורק אם $\ker T=\{\theta_V\}$.

משפט המימד 2 תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. אז

$$\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im} T)=\dim V$$

מסקנה יהיו V ו – W שני מ"ו, כך ש – $\dim W=\dim V$.
אז T חח"ע, אם ורק אם T על.

העתקת זהות העתקה ליניארית $Id:V\to V$ נקראת **העתקת זהות** ב – V, אם לכל $v\in V$ מתקיים $Id(v)=v$.

הרכבת העתקות יהיו U,V,W שלושה מ"ו מעל אותו שדה $\mathbf{F}$, ותהינה $T:U\to V$ ו – $S:V\to W$ שתי העתקות ליניאריות. הפונקציה $S\circ T:U\to W$ המוגדרת על ידי $(S\circ T)(u)=S(T(u))$ הינה העתקה ליניארית ונקראת **הרכבה** של S ו – T.

העתקה הפיכה והעתקה הפוכה העתקה ליניארית $T:V\to W$ נקראת **העתקה הפיכה**, אם קיימת העתקה ליניארית $S:W\to V$, כך שמתקיים:

$$S\circ T=Id_V$$

$$T\circ S=Id_W$$

העתקה S נקראת **העתקה הפוכה** של T ומסומנת ע"י $S=T^{-1}$.

טענה העתקה ליניארית T הפיכה, אם ורק אם T חח"ע ועל.

טענה אם העת' ליניארית $T:V\to W$ הפיכה, אז $\dim W=\dim V$.

הצגה מטריציונית של העתקה ליניארית

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית. יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V, ויהי $C=\{w_1,\dots,w_m\}$ בסיס של W. **המטריצה המייצגת** $[T]_C^B$ של העתקה ליניארית T ביחס לבסיסים B ו – C מוגדרת על ידי הנוסחה הבאה:

$$[T]_C^B=\begin{bmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{bmatrix}$$

ומקיימת

$$[T(v)]_C=[T]_C^B\cdot[v]_B$$

מציאת מטריצה מייצגת בנוסף לסימונים לעיל, נסמן ב – E את הבסיס הסטנדרטי של W. כדי למצוא את המטריצה המייצגת ניתן לבצע את הדירוג הבא:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} | & | & | & | \\ [w_1]_E & \ldots[w_m]_E & [T(v_1)]_E & \ldots[T(v_n)]_E \\ | & | & | & | \end{array}\right] \xrightarrow{\ldots} \left[I \mid [T]_C^B \right]$$

מעבר בין הקואורדינטות יהיו B ו – C שני בסיסים של מרחב וקטורי V. אז

$$[v]_C=[Id]_C^B[v]_B$$

כאשר

$$[Id]_C^B=\begin{bmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \cdots & [v_n]_C \\ | & & | \end{bmatrix}$$

הערה $[Id]_B^B=I$

טענה מטריצת מעבר $[Id]_C^B$ הינה הפיכה ומתקיים $\left([Id]_C^B\right)^{-1}=[Id]_B^C$.

משפט תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית, ויהיו B ו – C בסיסים של V. אז מתקיים

$$[T]_C^C=[Id]_C^B\cdot[T]_B^B\cdot[Id]_B^C$$

משפט יהיו U,V,W שלושה מ"ו, ותהינה $T:U\to V$ ו – $S:V\to W$ שתי העתקות ליניאריות. אם B,C,D בסיסים של U,V,W בהתאמה, אז

$$[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$$

משפט העתקה ליניארית $T:V\to W$ הפיכה, אם ורק אם מטריצה מייצגת $[T]_C^B$ (כלשהי) של T הפיכה. כמו כן מתקיים $\left([T]_C^B\right)^{-1}=[T^{-1}]_B^C$.

משפט תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית ותהי $[T]_C^B$ מטריצה מייצגת שלה ביחס לבסיסים נתונים, אז $\ker T$ הינו מרחב הפתרונות של $[T]_C^B$ במובן הקואורדינטות ביחס לבסיס B, ו- $\operatorname{Im}T$ הינו מרחב העמודות של $[T]_C^B$ במובן הקואורדינטות ביחס לבסיס C.

העתקת **סיבוב** במישור בזווית φ נגד השעון:

$$[T_\varphi]_E^E=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

העתקת **שיקוף** במישור ביחס לישר העובר דרך ראשית הצירים ומהווה זווית φ עם כיוון החיובי של ציר ה- x:

$$[R_\varphi]_E^E=\begin{bmatrix}\cos2\varphi & \sin2\varphi\\ \sin2\varphi & -\cos2\varphi\end{bmatrix}$$

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות

הגדרה תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. וקטור $\underline{x}\neq\underline{0}$ נקרא **וקטור עצמי** (ו"ע) של מטריצה A, אם קיים מספר λ, כך שמתקיים $A\underline{x}=\lambda\underline{x}$. מספר λ נקרא **ערך עצמי** (ע"ע) של מטריצה A המתאים לו"ע $\underline{x}$.

משפט תהי A מטריצה ריבועית. λ ע"ע של A, אם ורק אם $|A-\lambda I|=0$.

הגדרה פולינום אופייני של מטריצה ריבועית A הוא $p_A(\lambda)=|A-\lambda I|$.

מסקנה כדי למצוא את כל ע"ע של A צריך למצוא את כל הפתרונות של המשוואה האופיינית $p_A(\lambda)=0$.

טענה וקטורים עצמיים בת"ל המתאימים לע"ע λ הינם בסיס למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $(A-\lambda I)\underline{x}=\underline{0}$.

טענה יהיו $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ ע"ע **שונים** של מטריצה A, אז הוקטורים העצמיים המתאימים $v_1,v_2,\dots,v_k$ בת"ל.

הגדרה יהי λ_0 ע"ע של A. **ריבוי אלגברי** של λ_0 הוא חזקה של גורם ליניארי $(\lambda-\lambda_0)$ בפירוק של פולינום אופייני $p_A(\lambda)$. **ריבוי גיאומטרי** של λ_0 הוא $\dim\left(\ker(A-\lambda_0 I)\right)$.

טענה תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. סכום הריבויים האלגבריים של כל ע"ע שונים של A שווה ל- n.

משפט ריבוי גיאומטרי של כל ע"ע קטן שווה מריבוי אלגברי שלו וגדול שווה מ- 1.

טענה מטריצה ריבועית A הפיכה, אם ורק אם כל ע"ע שלה שונים מאפס.

טענה למטריצות ריבועיות A ו- A^T יש אותו פולינום אופייני ולכן גם אותם ע"ע.

טענה תהי A מטריצה ריבועית בעלת ע"ע λ, אז
1. λ^n ע"ע של A^n לכל n טבעי. (עם אותו ו"ע)
2. $k\lambda$ ע"ע של kA לכל k. (עם אותו ו"ע)
3. אם A הפיכה, אז $\frac{1}{\lambda}$ ע"ע של A^{-1}. (עם אותו ו"ע)

טענה תהי A מטריצה ריבועית מסדר n, בעלת ע"ע $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ ולאו דווקא שונים. אז
1. $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n=p_A(0)$
2. $trace(A)=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$

לכסון מטריצות תהי A מטריצה ריבועית. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$, אם היא ניתנת להצגה $A=PDP^{-1}$, כאשר D מטריצה אלכסונית ממשית ו- P מטריצה הפיכה.

הערה הגדרה דומה תקפה לגבי לכסון מעל $\mathbb{C}$ או כל שדה $\mathbf{F}$ אחר.

משפט תהי A מטריצה ריבועית ממשית מסדר n. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$, אם ורק אם כל ע"ע שלה הינם ממשיים וקיים בסיס של $\mathbb{R}^n$ המורכב מו"ע של A. במקרה הזה P היא מטריצה שבעמודות שלה ו"ע (שמהווים בסיס) ו- D מטריצה שבאלכסון שלה ע"ע בסדר מתאים לסדר העמודות של P.

משפט תהי A מטריצה ריבועית ממשית. A לכסינה מעל $\mathbb{R}$, אם ורק אם כל ע"ע שלה ממשיים, ולכל ע"ע הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי.

בפרט, מטריצה ריבועית ממשית A לכסינה מעל $\mathbb{R}$, אם כל ע"ע שלה ממשיים ושונים.

דימיון מטריצות שתי מטריצות ריבועיות A ו- B נקראות דומות, אם קיימת מטריצה הפיכה P, כך ש- $A=PBP^{-1}$. סימון לדימיון מטריצות: $A\sim B$.

הערה מטריצה ריבועית ממשית A לכסינה מעל $\mathbb{R}$, אם ורק אם $A\sim D$, כאשר D מטריצה אלכסונית ממשית.

משפט אם $A\sim B$, אז
1. $p_A(\lambda)=p_B(\lambda)$, ולכן ל- A ו- B יש אותם ע"ע.
2. $|A|=|B|$
3. $trace(A)=trace(B)$
4. $rank(A)=rank(B)$
5. $(A-\lambda I)^n\sim(B-\lambda I)^n$ לכל λ ולכל n טבעי
6. A הפיכה, אם ורק אם B הפיכה, ו- $A^{-1}\sim B^{-1}$

הערה כל התנאים הנ"ל הינם תנאים **הכרחיים** בלבד, אבל **לא מספיקים** לדימיון.

מכפלה פנימית

הגדרה יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$. הפונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\to\mathbf{F}$ נקראת מכפלה פנימית ב- V, אם
1. לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $\langle v_1,v_2\rangle=\overline{\langle v_2,v_1\rangle}$
2. לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbf{F}$ מתקיים $\langle\alpha v_1,v_2\rangle=\alpha\langle v_1,v_2\rangle$
3. לכל $v_1,v_2,v_3\in V$ מתקיים $\langle v_1+v_2,v_3\rangle=\langle v_1,v_3\rangle+\langle v_2,v_3\rangle$
4. לכל $v\in V$ מתקיים $\langle v,v\rangle\ge0$, ו- $\langle v,v\rangle=0$ אם ורק אם $v=\theta$

מסקנות מהגדרה
1. לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbf{F}$ מתקיים $\langle v_1,\alpha v_2\rangle=\bar{\alpha}\langle v_1,v_2\rangle$
2. לכל $v_1,v_2,v_3\in V$ מתקיים $\langle v_1,v_2+v_3\rangle=\langle v_1,v_2\rangle+\langle v_1,v_3\rangle$
3. לכל $v\in V$ מתקיים $\langle v,v\rangle\in\mathbb{R}$

דוגמאות
1. ב- $\mathbb{R}^n$: $\langle\underline{x},\underline{y}\rangle=\underline{x}^T\cdot\underline{y}=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$
2. ב- $\mathbb{C}^n$: $\langle\underline{z},\underline{w}\rangle=\underline{z}^T\cdot\underline{w}^*=\sum_{k=1}^{n}z_k\bar{w}_k$

אורתוגונליות

יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$ בעל מכפלה פנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$. שני וקטורים $v_1,v_2\in V$ נקראים **אורתוגונליים** ביחס למכפלה פנימית הנתונה, אם $\langle v_1,v_2\rangle=0$.

נורמה יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$ בעל מכפלה פנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ויהי $v\in V$. המספר $\sqrt{\langle v,v\rangle}$ נקרא **נורמה** של v, ומסומן ע"י $\|v\|$, כלומר, $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$.

אם $\|v\|=1$, אז v נקרא **וקטור יחידה**.

דוגמה ב – $\mathbb{R}^n$: $\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\underline{x}^T \cdot \underline{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

טענה לכל $v \in V$ מתקיים $\frac{v}{\|v\|}$ הינו וקטור יחידה.

הערה חלוקת וקטור בנורמה שלו נקראת **נירמול** הוקטור.

בסיס אורתוגונלי

קבוצת וקטורים $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ נקראת קבוצה **אורתוגונלית**, אם הוקטורים בקבוצה אותוגונליים בזוגות, כלומר $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$. אם בנוסף הוקטורים מהווים בסיס של מ"ו V, אז הקבוצה נקראת **בסיס אורתוגונלי**.

בסיס אורתונורמלי

קבוצת וקטורים $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ נקראת קבוצה **אורתונורמלית**, אם היא קבוצה אורתוגונלי של וקטורי יחידה, כלומר $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ לכל $i \neq j$ ו – $\|v_j\|^2 = \langle v_j, v_j \rangle = 1$ לכל $j = 1, \ldots, k$. אם בנוסף הוקטורים מהווים בסיס של מ"ו V, אז הקבוצה נקראת **בסיס אורתונורמלי**.

משפט יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$ בעל מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. יהי $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. אז לכל $v \in V$ מתקיים

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \langle v, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n \rangle \end{bmatrix}$$

כלומר אם $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$, אז $\alpha_j = \langle v, u_j \rangle$.

$$\|v\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2$$

תהליך Gramm – Schmidt

יהי V מ"ו מעל $\mathbf{F}$ בעל מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. ויהי $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ בסיס כלשהו של V. תהליך Gramm – Schmidt מאפשר לבנות בסיס אורתונורמלי $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ של V. השלבים הם:

1. $w_1 = v_1$
2. $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$
3. $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$

k. $w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$

$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ בסיס אורתוגונלי.

נחשב: $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots, u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$

$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי.

נוסחאות בגיאומטריה אנליטית

משוואת ישר במישור

משוואה קרטזית:

$$L: \ ax + by = c$$

משוואה וקטורית:

$$L: \ \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t \cdot \mathbf{v}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$L: \ \underbrace{(x, y)}_{\mathbf{r}} = \underbrace{(x_0, y_0)}_{\mathbf{r_0}} + t \cdot \underbrace{(v_x, v_y)}_{\mathbf{v}}$$

משוואה פרמטרית:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

משוואה סימטרית:

$$L: \ \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}, \ t \in \mathbb{R}$$

הערה שלושת המשוואות האחרונות מתאימות לישר העובר דרך נקודה $P(x_0, y_0)$ מקביל לוקטור $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$.

משוואת ישר במרחב $\mathbb{R}^3$

משוואה וקטורית:

$$L: \ \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t \cdot \mathbf{v}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$L: \ \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{r}} = \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\mathbf{r_0}} + t \cdot \underbrace{(v_x, v_y, v_z)}_{\mathbf{v}}$$

משוואה פרמטרית:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

משוואה סימטרית:

$$L: \ \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}, \ t \in \mathbb{R}$$

הערה המשוואות מתאימות לישר העובר דרך נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ מקביל לוקטור $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

משוואת מישור במרחב $\mathbb{R}^3$

משוואה קרטזית:

$$S: \ ax + by + cz = d$$

משוואה וקטורית:

$$S: \ \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t_1 \cdot \mathbf{u} + t_2 \cdot \mathbf{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$S: \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{r}} = \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{\mathbf{r_0}} + t_1 \underbrace{(u_x, u_y, u_z)}_{\mathbf{u}} + t_2 \underbrace{(v_x, v_y, v_z)}_{\mathbf{v}}$$

משוואה פרמטרית:

$$S: \begin{cases} x = x_0 + t_1 u_x + t_2 v_x \\ y = y_0 + t_1 u_y + t_2 v_y \\ z = z_0 + t_1 u_z + t_2 v_z \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

הערה המשוואות מתאימות למישור העובר דרך נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ מקביל לוקטורים $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z), \ \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.