

# פתרון X

מבוא להסתברות

### שאלה 1 (32 נקודות)

- במדינת ליליפוט ההסתברות לגשם בכל אחד מימות השנה, היא 0.1. ההסתברות שהמלך יכריז על חוק חדש ביום גשום היא 0.4. ההסתברות שהמלך יכריז על חוק חדש ביום לא גשום היא 0.2. ימים שונים הם בלתי תלויים מבחינת ההסתברות לגשם ומבחינת ההכרזה על חוק חדש.
- א. מה ההסתברות שביום שלישי הבא המלך יכריז על חוק חדש?
- ב. אתמול המלך הכריז על חוק חדש, מה ההסתברות שאתמול ירד גשם?
- ג. מה ההסתברות שיעברו יותר מ-7 ימים עד שהמלך יכריז על חוק חדש?
- ד. מה ההסתברות שבמשך 340 ימים יהיו לפחות 50 ימים גשומים?

### פתרון

נגדיר:

$$A = \text{יום גשום} : P(A) = 0.1$$

$$B = \text{המלך מכריז על חוק חדש} : P(B|A) = 0.4, \quad P(B|\bar{A}) = 0.2$$

א.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = 0.4 \times 0.1 + 0.2 \times 0.9 = 0.22$$

ב.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.4 \times 0.1}{0.22} = 0.1818$$

ג.

$$Y = \text{מספר הימים עד להכרזה על חוק חדש}, Y \sim G(0.22) \Leftrightarrow P(Y > 7) = (1 - 0.22)^7 = 0.1757$$

ד.

$$X = \text{מספר הימים הגשומים} : X \sim B(340, 0.1)$$

$$340 \times 0.1 > 5, \quad 340 \times 0.9 > 5$$

$$X \sim N(34, 30.6) : \text{קרוב נורמלי לבינומי}$$

$$P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) = 1 - \Phi(2.8) = 1 - 0.9974 = 0.0026$$

### שאלה 2 (24 נקודות)

נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת של המשתנה  $X$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2 & 0 \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$

נתון שהחציון של  $X$  הוא  $\sqrt{2}$ .

א. חשבו את הערכים של  $a$  ו- $b$ .

ב. מהי התוחלת של  $X$ ?

ג. אם ידוע שערכו של  $X$  גדול מ-0.8, מה ההסתברות שערכו של  $X$  קטן מ-1.2?

**פתרון**

א.

$$F_X(\sqrt{2}) = 2a = 0.5 \Rightarrow a = 0.25$$

$F_X(x)$  פונקציה רציפה:

$$F_X(b) = 0.25b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

ב.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.5x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^2 0.5x^2 dx = \frac{0.5}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

ג.

$$P(X < 1.2 | X > 0.8) = \frac{P(0.8 < X < 1.2)}{P(X > 0.8)} = \frac{F(1.2) - F(0.8)}{1 - F(0.8)} = \frac{0.25 \times 1.2^2 - 0.25 \times 0.8^2}{1 - 0.25 \times 0.8^2} = 0.2381$$

**שאלה 3 (16 נקודות)**

יצחק הוא יועץ טכני. בימי שלישי הוא עונה לשאלות באימיילים. משך זמן כתיבת אימייל מתפלג מעריכית. נתון שההסתברות שמשך הזמן לענות אל אימייל יהיה גדול מ-5 דקות היא 0.4493. יצחק צריך לענות על 36 אימיילים לפני הפסקת הצהריים.

א. מהי תוחלת משך זמן מענה לאימייל?

ב. מה ההסתברות שמשך הזמן שייקח ליצחק לענות על כל 36 האימיילים יהיה לפחות שעתיים?

**פתרון**

נגדיר:  $T =$  משך זמן כתיבת אימייל:  $T \sim \exp(\lambda)$

א.

$$P(T > 5) = e^{-5\lambda} = 0.4493 \Rightarrow -5\lambda = \ln 0.4493 \Rightarrow \lambda = 0.16$$

$$E(T) = \frac{1}{0.16} = 6.25$$

ב.

$$\sum_{i=1}^{36} T_i \sim N(36 \times 6.25, 36 \times 6.25^2)$$

כאשר  $T_i$  הוא משך הזמן לענות לאימייל  $i$  עבור  $i = 1, 2, \dots, 36$

$$P\left(\sum_{i=1}^{36} T_i > 120\right) = 1 - \Phi\left(\frac{60 - 36 \times 6.25}{6 \times 6.25}\right) = 1 - \Phi(-2.8) = \Phi(2.8) = 0.9974$$

#### שאלה 4 (28 נקודות)

נתונה קובייה לא הוגנת: ההסתברות לקבל את המספר 6 בהטלת הקובייה היא 0.4, וההסתברות לקבל כל אחד מהמספרים 1 עד 5 היא 0.12. מטילים את הקובייה 5 פעמים וסופרים את מספר הפעמים שהתקבל המספר 6, ואז מטילים מטבע הוגן כמספר הפעמים שהתקבל המספר 6 וסופרים את מספר הפעמים שקיבלנו "עץ". נגדיר:  $X =$  מספר הפעמים שהתקבל המספר 6;  $Y =$  מספר הפעמים שהתקבל "עץ".

א. מה ההסתברות שנקבל את המספר 6 ארבע פעמים?

ב. מה ההסתברות שנקבל "עץ" ארבע פעמים?

ג. חשבו את התוחלת של  $Y$  בהינתן  $X = 3$ .

ד. חשבו את התוחלת של  $Y$ .

#### פתרון

א.

$$X \sim B(5, 0.4) \Rightarrow P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0.4^4 \times 0.6 = 0.0768$$

ב.

$$(Y \mid X = k) \sim B(k, 0.5)$$

$$\begin{aligned} P(Y = 4) &= P(Y = 4 \mid X = 4)P(X = 4) + P(Y = 4 \mid X = 5)P(X = 5) = \\ &= \binom{4}{4} \times 0.5^4 \times 0.0768 + \binom{5}{4} \times 0.5^4 \times 0.5 \times 0.4^5 = 0.0064 \end{aligned}$$

•

$$(Y \mid X = 3) \sim B(3, 0.5)$$

$$E(Y \mid X = 3) = 3 \times 0.5 = 1.5$$

•

$$(Y \mid X = k) \sim B(k, 0.5)$$

$$E(Y \mid X = k) = 0.5k \Rightarrow E(Y \mid X) = 0.5X$$

$$E(Y) = E(E(Y \mid X)) = E(0.5X) = 0.5E(X) = 0.5 \times 5 \times 0.4 = 1$$