שם הקורס: חשבון דיפרנציאלי אינטגרלי 2

קוד הקורס: 90902

הוראות לנבחן:

• חומר עזר שימושי לבחינה:
אסור להשתמש בכל חומר עזר, פרט לדפי נוסחאות מצורפים.
מותר להשתמש במחשבון, חוץ ממחשבון גרפי.
• אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
• אין להשתמש בטלפון סלולארי
• אין להשתמש במחשב אישי או נייד
• אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
• אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

שנה: תשפ"א

סמסטר: ב׳

תאריך ושעת הבחינה:

מרצי הקורס:

פרופ' סטאנצ'סקו יוני, ד"ר קפלן דבורה, ד"ר גבל מיקה, ד"ר ביתן רוני, ד"ר אבן-דר מאנדל ליאת,
ד"ר רוזנצויג ליאור, ד"ר בארשבסקי אברהמי אורלי, ד"ר סגל אלכסנדר, ד"ר אולבסקי ויקטור, ד"ר בר
לוקיאנוב ולדימיר

***** שאלון הבחינה ייבדק על ידי המרצה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

בדקו כי בטופס הבחינה 28 עמודים (לא כולל את העמוד הזה).
יש לפתור 5 שאלות מתוך 6 השאלות שמספרן 1-6. שווי כל שאלה 20 נקודות.
יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל סעיף בדף חדש ורק במקום המיועד לכך.
רושמים את הפתרון לכל שאלה לפי ההנחיות ב 4 עמודים
מקסימום.
***** תשובות שיכתבו במקום אחר לא יבדקו !
השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך! יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת !
***** אסור לתלוש דפים ממחברת הבחינה. תלישת דף אחד או יותר תביא לפסילת הבחינה !

בהצלחה!

מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - שאלון X

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון הטור $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(4n+1)8^n}x^n$.

א. (15 נק') מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ? נמקו !

ב. (05 נק') מצאו טור מספרי שמתכנס לנגזרת $S'(5)$. נמקו !

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x,y)=4x^2+9y^2-8x$.

א. (15 נק') מצאו את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה f
בתחום $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:4x^2+9y^2\le 9\}$. נמקו !

ב. (05 נק') תנו דוגמא למישור *מקביל* למישור המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $P=(1,0)$. נמקו !

שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') נתונה פונקציה $g(t)$ בעלת נגזרת רציפה לכל t ממשי. נתון ש- $g'(1)=5$. מגדירים פונקציה דיפרנציאבילית f על ידי: $f(x,y)=g(2y+e^{2x}-3x)$. מצאו וקטור יחידה $\vec{\mathbf{u}}$ כך שהערך של $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ מקסימאלי. נמקו! רמז: היעזרו בכלל שרשרת.

ב. (10 נק') נגדיר פונקציה $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ על ידי: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^5+xy^4-3y^5}{x^4+y^4}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

האם הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ קיימות? האם f פונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$? נמקו !

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

מצאו את מסת התחום $D \subseteq \mathbf{R}^2$ החסום על ידי הקווים $y = x+1,\ y = x+5,\ y = 2x-4,\ y = 2x-8$

בהינתן פונקציית הצפיפות $\rho(x,y) = (y-x)(2x-y)$. נמקו !

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות)

יהי $m \in \mathbf{R}$. נתון שדה כוח $\vec{F}(x,y) = \left(e^x - y^3 + mx^2y\right)\vec{i} + \left(\cos y + x^3 - mxy^2\right)\vec{j}$.

א. (10 נק') עבור איזה $m \in \mathbf{R}$ השדה $\vec{F}$ הוא שדה משמר בתחום $\mathbf{R}^2$? נמקו !

ב. (10 נק') נתון $m = 0$. חשבו את העבודה שמבצע שדה כוח $\vec{F}$ על חלקיק הנע על מעגל היחידה $C: x^2 + y^2 = 1$ בכיוון הפוך לכיוון השעון ומשלים הקפה אחת. נמקו !

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות)

נתון השדה: $\vec{F} = (z+2xy)\,\mathbf{\vec{i}} + (2xy - z)\,\mathbf{\vec{j}} + (z^2)\,\mathbf{\vec{k}}$.

א. (15 נק') חשבו את שטף השדה $\vec{F}$ דרך <u>המשטח</u> <u>הסגור</u> $\mathbf{\Sigma}$ שהוא שפת התחום G הנתון על ידי $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\right\}$, כאשר וקטור נורמל היחידה למשטח $\mathbf{\Sigma}$ מכוון כלפי חוץ.

ב. (05 נק') נסמן ב- $\mathbf{S}$ את <u>החרוט</u> <u>הלא סגור</u> הנתון על ידי $\mathbf{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le 2\right\}$.
חשבו את שטף השדה $\vec{F}$ דרך המשטח $\mathbf{S}$ עם נורמל יחידה $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, מכוון כלפי מטה,
(ז״א הנורמל היחידה $\vec{n}$ למשטח $\mathbf{S}$ מכוון כלפי חוץ לתחום G שנתון בסעיף א').

נמקו !

אסור לתלוש דפים ממחברת הבחינה. תלישת דף אחד או יותר תביא לפסילת הבחינה !

בהצלחה!

טורים

תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים.

טור הוא הסכום האינסופי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0+a_1+a_2+\dots$.

סדרת סכומים חלקיים היא הסכום הסופי $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0+a_1+\ldots+a_n$.

טור מתכנס אם קיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ לסדרת הסכומים החלקיים, ואז סכום הטור הוא $S=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$. אם הגבול של S_n לא קיים או אינסופי זהו **טור מתבדר**.

תנאי הכרחי להתכנסות טור: אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

תכונות נוספות של טורים:

א. הורדת/הוספת מספר סופי של אברים אינה משפיעה על התכנסות/התבדרות הטור.

ב. אם $c\neq 0$ קבוע, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty}ca_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

ג. אם 2 טורים מתכנסים אז גם סכומם מתכנס: $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n$.

טורים חיוביים

* המבחנים להלן מניחים שהטורים הם אי שליליים $a_n,b_n\ge 0$.
* עבור סדרה חיובית, סדרת הסכומים החלקיים S_n היא מונוטונית עולה.

מבחן השוואה ראשון: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ שני טורים חיוביים, המקיימים $a_n\le b_n$ החל ממקום מסוים.

- אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס.
- אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה שני: נסמן $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$.

- אם $0<k<\infty$, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד.
- אם $k=0$, אז $a_n\le b_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.
- אם $k=\infty$, אז $b_n\le a_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.

מבחן דלמבר: נסמן $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$.

- אם $L<1$, אז הטור מתכנס.
- אם $L>1$, אז הטור מתבדר.
- אם $L=1$, לא ניתן לדעת.

מבחן קושי: נסמן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$,

- אם $L<1$, אז הטור מתכנס.
- אם $L>1$, אז הטור מתבדר.
- אם $L=1$, לא ניתן לדעת.

מבחן אינטגרלי: תהי $f(x)$ פונקציה חיובית יורדת בקטע $[k,\infty)$, כך ש - $a_n=f(n)$. אז הטור $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ והאינטגרל $\int_k^{\infty}f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

טורים כלליים

טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט**, אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ נקרא **מתכנס בתנאי**, אם הוא מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתבדר.

משפט: טור מתכנס בהחלט הינו טור מתכנס.

טור מחליף סימן הוא טור שאיבריו מחליפים סימן לסירוגין: $a_n>0$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$

משפט לייבניץ: תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה חיובית יורדת לאפס, אז:

1. הטור מחליף הסימן $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.
2. השארית $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k$ מקיימת: $|S-S_n|=|r_n|<a_{n+1}$.

סדרי גודל: $c\ll(\ln n)^b\ll n^p\ll a^n\ll n!\ll n^n$

כאשר הקבועים מקיימים $b,c,p>0$, $a>1$.

נוסחת סטירלינג: $n!\approx\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

טורי חזקות

טור חזקות הינו טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. זהו טור חזקות סביב x_0 .

תחום ההתכנסות: לכל טור קיים מספר $R\ge 0$ שנקרא רדיוס התכנסות הטור, עבורו:

- כאשר $|x-x_0|<R$ טור החזקות מתכנס (בהחלט).
- כאשר $|x-x_0|>R$ טור החזקות מתבדר.
- בקצוות $x_0\pm R$ בודקים ישירות על ידי הצבה בטור.

משפט Cauchy – Hadamard: את רדיוס ההתכנסות של טור חזקות ניתן למצוא לפי כל אחת מהנוסחאות הבאות:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\qquad\qquad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ הוא הגבול העליון של הסדרה.

משפט: בתחום ההתכנסות של טור חזקות ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר, גזירה איבר-איבר ולעבור לגבול בנקודה מסוימת איבר-איבר, כלומר:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_a^b(x-x_0)^n dx$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{d(x-x_0)^n}{dx}=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$\lim_{x\to c}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lim_{x\to c}(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(c-x_0)^n$$

משפט: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ מתכנס בקטע מסוים לפונקציה $f(x)$, אז זהו טור טיילור של f בסביבת x_0 , כלומר מתקיים: $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

טורי טיילור יסודיים

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots\qquad x\in(-1,1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\qquad x\in(-1,1]$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\qquad x\in[-1,1]$$

פונקציות במספר משתנים

גבול: אומרים כי מספר L הינו גבול של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) ורושמים $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $0<\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|<\delta$, מתקיים $\left|f(x,y)-L\right|<\varepsilon$.

רציפות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

נגזרות חלקיות מוגדרות ע"י הגבולות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

גרדיאנט של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) הוא וקטור הנגזרות החלקיות של $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0):

$$\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla} f=(f_x,f_y)$$

דיפרנציאביליות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אם

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=$$
$$=f(x_0,y_0)+A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+r(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

כאשר $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} r(\Delta x,\Delta y)=0$.

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה, אז בנקודה זו היא רציפה והנגזרות החלקיות שלה קיימות. נגזרות אלו הן הקבועים מההגדרה, ז"א:

$$A=f_x(x_0,y_0) \qquad B=f_y(x_0,y_0)$$

משפט: אם עבור פונקציה $f(x,y)$ הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת נקודה, אז $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה.

דיפרנציאל: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אז החלק הליניארי של שינוי הפונקציה נקרא דיפרנציאל, כלומר

$$df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

נגזרת כיוונית של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\vec{s}=(a,b)$, $\|\vec{s}\|=1$
(כלומר $\vec{s}$ וקטור יחידה) מוגדרת על ידי הגבול:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+ah,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), ו $\|\vec{s}\|=1$ אז

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0)=\vec{\nabla} f\cdot\vec{s}$$

משפט: הנגזרת הכיוונית של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) היא מקסימלית בכיוון הגרדיאנט, ז"א בכיוון $\vec{s}=\vec{\nabla} f(x_0,y_0)$.

משפט: הגרדיאנט של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) מאונך לקו גובה של f בנקודה זו.

כלל השרשרת: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בסביבה של (x_0,y_0) ותהינה $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ פונקציות דיפרנציאביליות בסביבה של (u_0,v_0), כאשר $x_0=x(u_0,v_0),\ y_0=y(u_0,v_0)$. אז הפונקציה המורכבת $f(x(u,v),y(u,v))$ דיפרנציאבילית בסביבה של (u_0,v_0) ומתקיים:

$$f_u=f_x\cdot x_u+f_y\cdot y_u \qquad f_v=f_x\cdot x_v+f_y\cdot y_v$$

נגזרות מסדר גבוה הן נגזרות חלקיות של נגזרות חלקיות, למשל

$$f_{xx}=(f_x)_x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

משפט: אם לפחות אחת מהנגזרות המעורבות מסדר גבוה f_{xy} או f_{yx} קיימת ורציפה בנקודה, אז גם הנגזרת המעורבת השנייה קיימת ורציפה ומתקיים $f_{xy}=f_{yx}$.

* תוצאה דומה נכונה עבור נגזרות מעורבות מסדר גבוה יותר.

קירוב טיילור: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית n פעמים בסביבה של (x_0,y_0), ויהיו $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, אז מתקיים

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!}+R_n(x_0,y_0)$$

כאשר

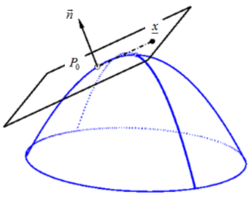
$$d^n f=d\left(d^{n-1}f\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x,y)$$

$$R_n(x_0,y_0)=d^{n+1}f(c,d)$$

עבור c בין x_0 לבין x ו- d בין y_0 לבין y.

נורמל ומישור משיק למשטח

* משמעות דיפרנציאביליות – קיום מישור משיק בנקודה.



עבור נקודה P_0 על משטח כלשהו עם נורמל $\vec{n}$, נקודה $\underline{x}$ על המישור המשיק תקיים $\vec{n}\perp(\underline{x}-P_0)$.

ובפרט:

1. משטח נתון בצורה מפורשת $z=f(x,y)$, כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$-f_x(P_0)\cdot(x-x_0)-f_y(P_0)\cdot(y-y_0)+z-f(x_0,y_0)=0$$

2. משטח נתון בצורה סתומה $F(x,y,z)=0$, כאשר F דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0,z_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n}=\vec{\nabla} F=(F_x,F_y,F_z)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$F_x(P_0)\cdot(x-x_0)+F_y(P_0)\cdot(y-y_0)+F_z(P_0)\cdot(z-z_0)=0$$

קיצון של פונקציות במספר משתנים

נקודת מינימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

נקודה קריטית (x_0,y_0) אם $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)=(0,0)$ או לא קיים $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)$.

משפט Fermat: אם (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי של פונקציה $f(x,y)$, אז היא נקודה קריטית.

סיווג נקודות קיצון מקומי:

תהי (x_0,y_0) נקודה חשודה לקיצון. נגדיר

$$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$

- אם $\Delta(x_0,y_0)>0$, אז (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי:
  - אם $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ זוהי נקודת מינימום מקומי.
  - אם $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ זוהי נקודת מקסימום מקומי.
- אם $\Delta(x_0,y_0)<0$, אז (x_0,y_0) נקודת אוכף (אין קיצון).

נקודת מינימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

תחום קומפקטי D הוא תחום חסום וסגור.

משפט Weierstrass: פונקציה רציפה $f(x,y)$ בתחום קומפקטי D מקבלת ערך מינימלי וערך מקסימלי בתוך D, או על השפה של D.

קיצון תחת אילוץ: נקודת קיצון מקומי של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$, אם היא נקודת קיצון של f בקבוצת כל הנקודות המקיימות את תנאי האילוץ.

שיטת כופלי לגרנג': למציאת קיצון של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$ מגדירים פונקציית לגרנג': $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)$.

הנקודות החשודות לקיצון תחת אילוץ הינן נקודות קריטיות של F, ז"א נקודות בהן אחת הנגזרות החלקיות לא קיימת, או שמתקיים:

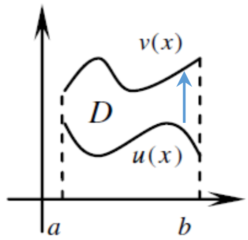
$$\vec{\nabla}F=0 \iff \begin{cases}F_x=0\\ F_y=0\\ F_\lambda=0\end{cases} \iff \begin{cases}f_x=\lambda g_x\\ f_y=\lambda g_y\\ g=0\end{cases}$$

* ניתן להרחיב את שיטת לגרנג' לפונקציות עם יותר משתנים ולבעיות קיצון עם יותר אילוצים, למשל $F(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y)-\lambda_1\cdot g_1(x,y)-\lambda_2\cdot g_2(x,y)$

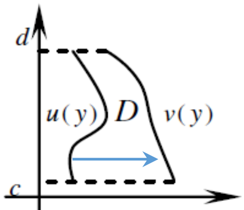
אינטגרל כפול ואינטגרל משולש

אינטגרל כפול של $f(x,y)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מישורי D הוא $\iint\limits_D f(x,y)dA$.

משפט פוביני: ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים:



$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_a^b\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dydx$$



$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy$$

אינטגרל משולש של $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מרחבי G הוא $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$.

ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים, למשל:

$$G:\begin{cases}a\le x\le b\\ g(x)\le y\le h(x)\\ m(x,y)\le z\le k(x,y)\end{cases}$$

אז

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{m(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

יישומים של אינטגרל כפול ומשולש

שטח של תחום מישורי D: $Area(D)=\iint\limits_D dA$

נפח של גוף מרחבי G: $Volume(G)=\iiint\limits_G dV$

• בפרט עבור תחום $G=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D, g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$:

$$Volume(G)=\iint\limits_D\left(f(x,y)-g(x,y)\right)dA$$

מסה של לוחית מישורית D בעלת צפיפות $\rho(x,y)$: $m(D)=\iint\limits_D\rho(x,y)dA$

מסה של גוף מרחבי G בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(G)=\iiint\limits_G\rho(x,y,z)dV$

מרכז מסה של גוף מרחבי G:

$$x_{cm}=\frac{\iiint\limits_G x\cdot\rho dV}{m(G)}\qquad y_{cm}=\frac{\iiint\limits_G y\cdot\rho dV}{m(G)}\qquad z_{cm}=\frac{\iiint\limits_G z\cdot\rho dV}{m(G)}$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

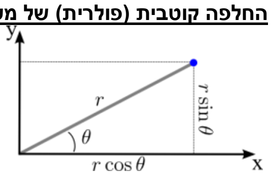
החלפת משתנים היא העתקה $(x,y)\to(u,v)$ המעתיקה את התחום $D_{xy}\mapsto D_{uv}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$

משפט: אם בהחלפת משתנים $J\ne 0$, אז קימת העתקה הופכית $(u,v)\to(x,y)$ שהיעקוביאן שלה $J^{-1}=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$ מקיים $J^{-1}=\frac{1}{J}$.

משפט החלפת משתנים באינטגרל כפול:

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\left[\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases},\ u,v\in D_{uv},\ J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]=\iint\limits_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

החלפה קוטבית (פולרית) של מעגל:



$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},\quad J=r,\quad \begin{matrix}0\le r\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{matrix}$$

החלפה קוטבית מוכללת של אליפסה:

$$\begin{cases}x=ra\cos\theta\\ y=rb\sin\theta\end{cases},\quad J=abr,\quad \begin{matrix}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{matrix}$$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

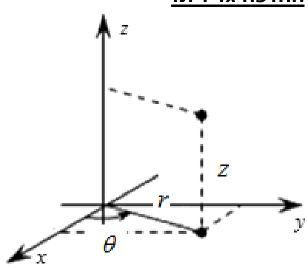
החלפת משתנים היא העתקה $(x,y,z)\to(u,v,w)$ המעתיקה את התחום $G_{xyz}\mapsto G_{uvw}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$. אם $J\ne 0$ אז ההעתקה הפיכה, קיימת העתקה הופכית, ומתקיים:

$$J=\begin{vmatrix}x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{vmatrix},\quad J^{-1}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix},\quad J^{-1}=\frac{1}{J}$$

משפט החלפת משתנים באינטגרל משולש:

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)dV_{xyz}=\left[\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w)\end{cases}\begin{matrix}u,v,w\in G_{uvw}\\ J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\end{matrix}\right]$$
$$=\iiint\limits_{G_{uvw}} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)|J|dV_{uvw}$$

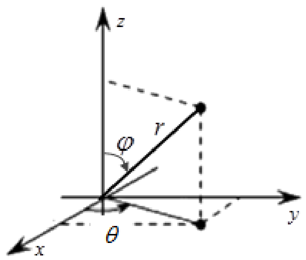
החלפה גלילית:



$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases},\quad J=r$$

r - המרחק מציר Z.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר X.
Z - מרחק ממישור xy.
מתקיים $x^2+y^2=r^2$.

החלפה כדורית:



$$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\varphi\end{cases},\quad J=r^2\sin\varphi$$

r - המרחק מהראשית.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר X.
φ - זווית עם הכיוון החיובי של ציר Z.
מתקיים $x^2+y^2+z^2=r^2$.

אינטגרל קווי

פרמטריזציה של עקומה חלקה C במרחב היא העתקה $\vec{r}:[a,b]\to C$ הנתונה ע"י:

$$C:\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\quad,\quad t\in[a,b]$$

בפרמטריזציה נקודת ההתחלה היא $A=\vec{r}(a)$, ונקודת הסיום היא $B=\vec{r}(b)$.

אינטגרל קווי מסוג I

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה מוגדרת לאורך C, אז

$$\int_C f(x,y,z)\,dl=\int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.

יישומים של אינטגרל קווי מסוג I

אורך של עקומה C: $length(C)=\int_C dl$

מסה של עקומה C בעלת צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(C)=\int_C \rho(x,y,z)\,dl$

אינטגרל קווי מסוג II

יהי $\vec{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$ **שדה במרחב** המוגדר לאורך C, ונסמן $d\vec{r}=\big(dx,dy,dz\big)$. אז

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_a^b \vec{F}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)dt=$$

$$=\int_a^b\big(P\cdot x'+Q\cdot y'+R\cdot z'\big)dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.
* החישוב תלוי כיוון: $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{B\to A}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

יישומים של אינטגרל קווי מסוג II

עבודה של שדה כוחות $\vec{F}$ במעבר חלקיק לאורך מסלול C, או **שטף** שדה $\vec{F}$ דרך עקומה C מחושבת ע"י $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

מסלול בכיוון חיובי הוא מסלול סגור שבמעבר לאורכו התחום החסום נמצא משמאלו.

משפט Green: יהי $\vec{F}=\big(P,Q\big)$ שדה מישורי בעל רכיבים גזירים ברציפות בתחום D בעל שפה חלקה למקוטעין C מכוונת בכיוון החיובי, אז

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\big(Q_x-P_y\big)dxdy$$

* שפה C יכולה להיות מורכבת ממספר מסילות זרות.
* עבור תחום כנ"ל מתקיים: $Area(D)=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy$

שדה משמר $\vec{F}=\big(P,Q\big)$ בתחום D מישורי (או $\vec{F}=\big(P,Q,R\big)$ בתחום מרחבי), הוא שדה שקיימת לו **פונקציית פוטנציאל** φ דיפרנציאבילית ב- D, כך שמתקיים $\nabla\varphi=\vec{F}$.

משפט שקילויות: עבור $\vec{F}$ שדה בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום D הטענות הבאות שקולות:

(1) $\vec{F}$ שדה משמר.

(2) קיימת פונקציית **פוטנציאל** φ רציפה ב – D, כך ש $\nabla\varphi=\vec{F}$ – (כלומר $\varphi_x=P,\quad\varphi_y=Q$ במישור, או $\varphi_x=P,\quad\varphi_y=Q,\quad\varphi_z=R$ במרחב).

(3) לכל מסלול סגור γ בתוך D מתקיים $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

(4) לכל שתי נקודות A,B בתוך D, האינטגרל $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ לא תלוי במסלול המחבר בין A ל – B בתוך D, ומתקיים $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(B)-\varphi(A)$.

(5) אם בנוסף D הינו תחום פשוט קשר, אז $Q_x=P_y$ במישור, או $rot\vec{F}=\vec{0}$ במרחב, כאשר **הרוטור** מוגדר ע"י

$$rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

אינטגרל משטחי

פרמטריזציה של משטח חלק σ במרחב היא העתקה $\vec{r}:D\to\sigma$ הנתונה על ידי:

$$\sigma:\vec{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\quad,\quad u,v\in D_{uv}$$

עם נורמל

$$\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}$$

אינטגרל משטחי מסוג I

האינטגרל המשטחי מסוג I של $f(x,y,z)$ על פני משטח פשוט σ, הוא

$$\iint_\sigma f\big(x,y,z\big)dS$$

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\|\vec{n}\|=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|$ ולכן:

$$\iint_\sigma f\big(x,y,z\big)dS=\iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\|\vec{n}\|=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$ ולכן

$$\iint_\sigma f\big(x,y,z\big)dS=\iint_{D_{xy}} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy$$

ישומים של אינטגרל משטחי מסוג I

שטח פנים של משטח σ: $Area(\sigma)=\iint_\sigma dS$

מסה של משטח σ בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(\sigma)=\iint_\sigma \rho(x,y,z)dS$

אינטגרל משטחי מסוג II

האינטגרל המשטחי מסוג II של שדה $\vec{F}=\big(P,Q,R\big)$ על פני משטח דו צדדי σ בעל נורמל יחידה בכיוון נתון $\hat{n}=\vec{n}/\|\vec{n}\|$, הוא $\iint_\sigma\big(\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS$.

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ ולכן:

$$\iint_\sigma\big(\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS=\iint_{D_{uv}}\big(P(u,v),Q(u,v),R(u,v)\big)\cdot\big(\vec{r}_u\times\vec{r}_v\big)dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\vec{n}=\big(-z_x,-z_y,1\big)$ ולכן:

$$\iint_\sigma\big(\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS=\iint_{D_{xy}}\big(-P\cdot z_x-Q\cdot z_y+R\big)dxdy$$

* אם $\vec{F}$ ו- $\hat{n}$ ניצבים על פני σ, אז $\iint_\sigma\big(\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS=0$.
* אם נחליף את הכיוון של $\hat{n}$, אז האינטגרל יחליף את סימנו.

יישומים של אינטגרל משטחי מסוג II

שטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ דרך משטח σ: $\Phi_\sigma\big(\vec{F}\big)=\iint_\sigma\big(\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS$

משפט הדיוורגנץ של Gauss: יהי $\vec{F}=\big(P,Q,R\big)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום קומפקטי פשוט קשר G בעל שפה חלקה למקוטעין σ, ויהי $\hat{n}$ נורמל יחידה חיצוני לשפה σ. אז

$$\oiint_\sigma\big(\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS=\iiint_G div\vec{F}dV$$

כאשר $div\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=P_x+Q_y+R_z$ הוא **הדיוורגנץ** של השדה.

משפט Stokes: יהי $\vec{F}=\big(P,Q,R\big)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים על פני משטח דו צדדי σ בעל שפה γ, כך שכיוון הנורמל $\hat{n}$ למשטח נבחר לפי כלל יד ימין ביחס לכיוון γ. אז

$$\oint_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_\sigma\big(rot\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS$$

נוסחאות כלליות

זהויות טריגונומטריות

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$

$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

גבולות מוכרים

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

כלל הסנדוויץ':

$$\left.\begin{cases} f(x)\le g(x)\le h(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L\end{cases}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=L$$

כלל L'Hopital: במצב $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, אם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ אז $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

נגזרות יסודיות

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

אינטגרלים יסודיים

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ \ (n\ne-1)$

$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

$\int e^x dx=e^x+C$

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

$\int\sin x dx=-\cos x+C$

$\int\cos x dx=\sin x+C$

$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$

$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$

$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C$$

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים: $\int u\cdot v'dx=uv-\int u'\cdot vdx$

החלפת משתנים: אם $x=x(t)$ אז $\int f(x(t))x'(t)dt=\int f(x)dx$

הצבות טריגונומטריות: בחישוב $\int\sin^n x\cos^m xdx$

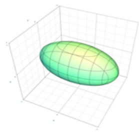
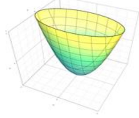
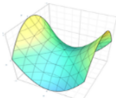
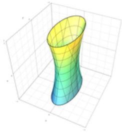
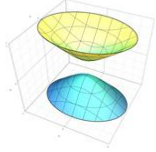
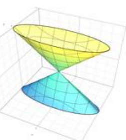
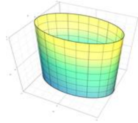
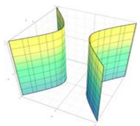
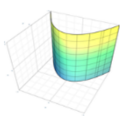
- אם n אי זוגי נציב $t=\cos x$
- אם m אי זוגי נציב $t=\sin x$
- אם שניהם זוגיים ניתן להוריד חזקה ע"י זווית כפולה.

שטחים ונפחים

מעגל ברדיוס r - שטח πr^2, היקף $2\pi r$.

כדור ברדיוס r - נפח $\frac{4\pi r^3}{3}$, שטח פנים $4\pi r^2$.

חרוט ברדיוס r וגובה h - נפח $\frac{\pi r^2 h}{3}$, שטח פנים $\pi r\left(\sqrt{r^2+h^2}+r\right)$.

Ellipsoid **אליפסויד** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Elliptic paraboloid **פרבולויד אליפטי** $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	
Hyperbolic paraboloid **פרבולויד היפרבולי** $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	
Elliptic hyperboloid of one sheet **היפרבולויד אליפטי I** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Elliptic hyperboloid of two sheets **היפרבולויד אליפטי II** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Elliptic cone **חרוט אליפטי** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
Elliptic cylinder **גליל אליפטי** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z\in\mathbf{R}$	
Hyperbolic cylinder **גליל היפרבולי** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, z\in\mathbf{R}$	
Parabolic cylinder **גליל פרבולי** $x^2+2ay=0, z\in\mathbf{R}$	

From: https://en.wikipedia.org/wiki/User:Sam_Derbyshire/Gallery and https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - שאלון X

פתרון שאלה 1.א

נסמן ב: $x_0=0$, $a_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)(4n+1)8^n}$. נוכיח שרדיוס ההתכנסות של טור שווה ל- $R=8$:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{(n+1)(4n+1)8^n}\cdot\frac{(n+2)(4n+5)8^{n+1}}{1}=8\frac{(n+2)(4n+5)}{(n+1)(4n+1)}=8(1+\frac{1}{n+1})\frac{(4+5/n)}{(4+1/n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}8$$

<u>מסקנה :</u> I. בקטע $(x_0-8,x_0+8)=(-8,8)$ הטור מתכנס בהחלט.

II. מחוץ לקטע הסגור $\left[-8,8\right]$ הטור מתבדר.

נשאר לבדוק את הקצוות $x=\pm 8$:

- <u>עבור</u> $x=8$ נקבל טור מספרי $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)(4n+1)8^n}8^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)(4n+1)}$

הסדרה $u_n=\frac{1}{(n+1)(4n+1)}$ היא סדרה חיובית, יורדת ושואפת לאפס (נמקו !).

לכן זה טור מתכנס לפי משפט Leibniz. הטור הנ״ל <u>גם</u> מתכנס בהחלט כי

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{(n+1)(4n+1)}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(4n+1)}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

(נמקו לפי קריטריון ההשוואה הראשון !)

- <u>עבור</u> $x=-8$ נקבל טור מספרי חיובי שמתכנס (ולכן גם מתכנס בהחלט !):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)(4n+1)8^n}(-8)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(4n+1)}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

<u>מסקנה :</u> בקצה $x=8$ וגם בקצה $x=-8$ הטור מתכנס וגם מתכנס בהחלט. <u>תחום ההתכנסות</u> שווה לקטע $[-8,8]$.

פתרון שאלה 1.ב

נבצע גזירה איבר – איבר של הטור הנתון (זה אפשרי כי מדובר בטור חזקות):

$$S'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(4n+1)8^n}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)(4n+1)8^n}x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(4n+1)8^n}nx^{n-1}$$

$$\underset{m=n-1}{=}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+2)(4m+5)8^{m+1}}(m+1)x^m,\quad -8<x<8$$

הנקודה <u>$x=5$</u> שייכת לקטע הפתוח $D=(-8,8)$. מסיקים שהנגזרת $S'(5)$ שווה לסכום של טור הבא:

$S'(5)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+2)(4m+5)8^{m+1}}(m+1)5^m$, ז״א $S'(5)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}b_m$, כאשר $b_m=\frac{(m+1)5^m}{(m+2)(4m+5)8^{m+1}}$.

פתרון שאלה 2.א

התחום $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : 4x^2+9y^2\le 9\}$ הוא תחום סגור וחסום הפונקציה $f(x,y)=4x^2+9y^2-8x$ היא רציפה. לכן לפי משפט Weierstrass קיימות נקודות קיצון מוחלטות (מקסימום ומינימום) של הפונקציה f בתחום D. נסמן ב- $P=(x,y)$ אחת מהנקודות הקיצון המוחלטות של f.

1. אם $P=(x,y)$ שייכת לקבוצה $IntD=\{(x,y): 4x^2+9y^2<9\}$, אז לפי משפט Fermat $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=8x-8=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=18y=0$ וזה גורר $P=(1,0)$. הנקודה הזאת שייכת ל- $IntD$ ולכן זאת נקודה חשודה לקיצון.
2. אם $P=(x,y)$ שייכת לקבוצה $BdD=\{(x,y): 4x^2+9y^2=9\}$, אז $-1.5\le x\le 1.5$ והפונקציה $f(x,y)$ שווה ל- $f(x,y)=\left(4x^2+9y^2\right)-8x=9-8x$. זאת פונקציה יורדת בקטע $-1.5\le x\le 1.5$ ומתקיים:

$f(1.5,0)=-3\le f(x,y)=9-8x\le 21=f(-1.5,0)$, לכל $(x,y)\in BdD$.

<u>מסקנה</u>: קיבלנו רק 3 נקודות שיכולות להיות נקודות קיצון מוחלטות: $(1,0),\ (1.5,0),\ (-1.5,0)$. נציב אותם ב- f ונקבל ש-

(I) המינימום המוחלט של f שווה ל- $m=\min f=-4=f(1,0)$.

(II) המקסימום המוחלט של f שווה ל- $M=\max f=21=f(-1.5,0)$.

פתרון שאלה 2.ב

הוכחנו ש- $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0$, ז"א הנקודה $P=(1,0)$ היא נקודת קריטית של f.

לכן המישור המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $P=(1,0)$ נתון על ידי המשוואה הקרטזית:

$$z=f(1,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)\Leftrightarrow z=f(1,0)+0\cdot(x-1)+0\cdot(y-0)\Leftrightarrow z=-4$$

לכל $h\ne -4$ המישור $(z=h)$ מקביל למישור המשיק $(z=-4)$.

פתרון שאלה 3.א

נסמן $u = u(x,y) = 2y + e^{2x} - 3x$. פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית, לכן הערך המקסימאלי לנגזרת המכוונת $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ הוא $\left\|\vec{\nabla} f(\underline{\mathbf{0}})\right\|$. נמצא את $\vec{\nabla} f(\underline{\mathbf{0}}) = \left(f_x'(0,0), f_y'(0,0)\right)$. נשים לב ש- $u(0,0) = e^{2\cdot 0} - 3\cdot 0 + 2\sin 0 = 1$ ולכן $f(0,0) = g(u(0,0)) = g(2\cdot 0 + e^{2\cdot 0} - 3\cdot 0) = g(1)$. בנוסף:

$$f_x'(x,y) = g_u'(u)\cdot u_x' = g_u'(u)\cdot(2e^{2x}-3), \quad f_y'(x,y) = g_u'(u)\cdot u_y' = g_u'(u)\cdot(2)$$

מציבים $(x,y) = (0,0)$. מקבלים $u = u(0,0) = 1$. ידוע ש- $g'(1) = 5$, לכן, בנקודה $(0,0)$ המשוואות יראו כך:

$$\begin{cases} f_x'(0,0) = g_u'(1)\cdot u_x'(0,0) = 5\cdot(2e^{2\cdot 0}-3) = -5 \\ f_y'(0,0) = g_u'(1)\cdot u_y'(0,0) = 5\cdot(2) = 10 \end{cases}$$

. לכן $\vec{\nabla} f(\underline{\mathbf{0}}) = \left(f_x'(0,0), f_y'(0,0)\right) = (-5,10)$.

זהו <u>הכיוון</u> בו הערך של $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ מקסימאלי, ננרמל: $\vec{\mathbf{u}} = \frac{(-5,10)}{\sqrt{25+100}} = \left(\frac{-5}{5\sqrt{5}}, \frac{10}{5\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

<u>הערך המקסימאלי</u> של הנגזרת הכיוונית הוא $\left\|\vec{\nabla} f(\underline{\mathbf{0}})\right\| = \left\|(-5,10)\right\| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

פתרון שאלה 3.ב

ברור ש- $f(x,0) = \frac{2x^5}{x^4+0} = 2x, \quad f(0,y) = \frac{-3y^5}{0+y^4} = -3y$ לכל $x,y \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$. לכן:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{\mathbf{0}}) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-0}{x} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{\mathbf{0}}) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{-3y-0}{y} = \lim_{y\to 0}(-3) = -3$$

מתקיים:

$$f(x,y) = \frac{2x^5 + xy^4 - 3y^5}{x^4+y^4} = \underbrace{2x}_{\to 0}\cdot\frac{x^4}{x^4+y^4} + \underbrace{x}_{\to 0}\cdot\frac{y^4}{x^4+y^4} - \underbrace{3y}_{\to 0}\cdot\frac{y^4}{x^4+y^4}.$$

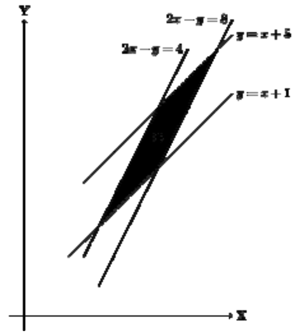
כל אחד מהגורמים $\frac{x^4}{x^4+y^4}, \frac{y^4}{x^4+y^4}, \frac{y^4}{x^4+y^4}$ חסום על ידי 0 ו- 1 לכן

$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, ז"א f רציפה ב- $(0,0)$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

מסת התחום $D\subseteq \mathbf{R}^2$ שווה לאינטגרל הכפול $m(D)=\iint\limits_D \rho(x,y)dA=\iint\limits_D \left(y-x\right)\left(2x-y\right)dA$.

התחום הנתון שווה ל- $D=\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : 1\le y-x\le 5,\ 4\le 2x-y\le 8\right\}$.



נבצע את שינוי המשתנים: $T^{-1}:\begin{cases} u=y-x \\ v=2x-y \end{cases} \Leftrightarrow T:\begin{cases} x=u+v \\ y=2u+v \end{cases}$.

נחשב את היעקוביאן (Jacobian) של T: $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$.

הגבולות החדשים של התחום (לפי משתנים u,v) הם: $D^*:\begin{cases} 1\le u=y-x\le 5 \\ 4\le v=2x-y\le 8 \end{cases}$.

במשתנים החדשים, הפונקציה הנתונה $\rho(x,y)=\left(y-x\right)\left(2x-y\right)=uv$.

לפי משפט החלפת המשתנים (Jacobi) נקבל:

$$m(D)=\iint\limits_D \left(y-x\right)\left(2x-y\right)dA=\iint\limits_{D^*} uv\cdot\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{=1}d(u,v)=\iint\limits_{D^*}\left(uv\right)d(u,v)$$

התחום החדש $D^*:\begin{cases} 1\le u\le 5 \\ 4\le v\le 8 \end{cases}$ מהווה מלבן במישור (u,v) ולפי משפט Fubini נקבל:

$$m(D)=\iint\limits_{D^*}\left(uv\right)d(u,v)=[Fubini]=\int\limits_1^5\left(\int\limits_4^8 (uv)\ dv\right)du=$$

$$=\int\limits_1^5\left(0.5uv^2\right)\Big|_{v=4}^{v=8}du=\int\limits_1^5 0.5\left(64-16\right)udu=0.5\left(64-16\right)\left(0.5u^2\right)\Big|_{u=1}^{u=5}=0.5\left(64-16\right)\cdot 0.5\left(25-1\right)=288.$$

<u>פתרון שאלה 5.א</u>

נסמן $P(x,y)=e^x-y^3+mx^2y,\ Q(x,y)=\cos y+x^3-mxy^2$.

התחום $\mathbf{R}^2$ הוא תחום קמור ולכן השדה $\vec{F}$ הוא שדה משמר בתחום הזה אם ורק אם

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos y+x^3-mxy^2\right)=3x^2-my^2=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x-y^3+mx^2y\right)=-3y^2+mx^2$, לכל (x,y).

זה שקול ל- $3x^2-my^2=-3y^2+mx^2$, לכל (x,y), ז"א $(m-3)(x^2+y^2)=0$, לכל (x,y).

מסיקים שהשדה $\vec{F}$ הוא שדה משמר בתחום $\mathbf{R}^2$ אם ורק אם $m=3$.

<u>פתרון שאלה 5.ב</u>

נתון $m=0$. במצב הזה העבודה של השדה הנתון $\vec{F}(x,y)=\left(e^x-y^3\right)\vec{i}+\left(\cos y+x^3\right)\vec{j}$ היא

$$W_C\left(\vec{F}\right)=\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\oint_C\left(e^x-y^3\right)dx+\left(\cos y+x^3\right)dy,$$

כאשר C שווה מעגל בעל רדיוס אחד לפי הפרמטריזציה: $C:\left(x=\cos t,\ y=\sin t;0\le t\le 2\pi\right)$

<u>הערה:</u>

לפי סעיף הקודם, אם $m=0$ אז שדה הכוח $\vec{F}$ אינו משמר, לכן העבודה שהכוח מבצע לא בהכרח שווה לאפס למרות שהמסלול C הוא עקומה סגורה פשוטה.

נפתור את הבעיה באמצעות משפט Green. נגדיר תחום $D\subseteq\mathbf{R}^2$ על ידי $D:x^2+y^2\le 1$.

המסלול הסגור C שווה ל- $C=Boundary(D)$ ולכן

כל התנאים של משפט Green מתקיימים (נמקו !).

מסיקים שהעבודה שווה ל-

$$W_C(\vec{F})=\oint_C(e^x-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy=\iint_D\left(\frac{\partial(\cos y+x^3)}{\partial x}-\frac{\partial(e^x-y^3)}{\partial y}\right)dA$$

$$=\iint_D(3x^2+3y^2)dA=3\iint_{D:\,x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dA=\begin{bmatrix}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ J=r\end{bmatrix},\left[D^*:\begin{cases}0\le\theta<2\pi\\ 0\le r\le 1\end{cases}\right]$$

$$=3\iint_{D^*}(r^2)rdA=[Fubini\ on\ D^*]=$$

$$=3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3dr\right)d\theta=3\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta=3\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta=3\frac{1}{4}2\pi=1.5\pi.$$

פתרון שאלה 6.א

עלינו לחשב $\Phi=\Phi_\Sigma\left(\vec F\right)=\iint\limits_\Sigma \vec F\bullet\vec n_{ext}dS$, כאשר המשטח הסגור Σ הנו שפת הגוף G. השדה $\vec F$ וכל הנגזרות החלקיות שלו רציפות ב $\mathbf{R}^3$, Σ משטח סגור מכוון, הכוון (כלפי חוץ) של Σ הוא הכוון החיובי ולכן ניתן להשתמש במשפט Gauss: לפי הנתון $\vec F=(z+2xy,2yx-z,z^2)$ נובע ש-

$$\Phi=\Phi_\Sigma\left(\vec F\right)\underset{Gauss}{=}\iiint\limits_G\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dV=\iiint\limits_G\left(\frac{\partial\left(z+2xy\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(2yx-z\right)}{\partial y}+\frac{\partial z^2}{\partial z}\right)dV=2\iiint\limits_G\left(y+x+z\right)dV$$

נחשב את האינטגרל המשולש הנ"ל לפי משפט Fubini:

$$\Phi_\Sigma\left(\vec F\right)=2\iiint\limits_G(x+y+z)dV=2\iint\limits_{D:x^2+y^2\le 2^2}\left(\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}\left(x+y+z\right)dz\right)d(x,y)=$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 2^2}\left((x+y)\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{2^2-\left(x^2+y^2\right)}{2}\right)d(x,y)=\begin{bmatrix}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{bmatrix},J=r,\left[D^*:\begin{cases}0\le\theta<2\pi\\0\le r\le 2\end{cases}\right]$$

$$=2\iint\limits_{D^*}\left(r\left(\cos\theta+\sin\theta\right)(2-r)+0.5\left(2^2-r^2\right)\right)rd(r,\theta)=$$

$$=2\int_0^2\int_0^{2\pi}(r^2\left(\cos\theta+\sin\theta\right)(2-r)+0.5\left(2^2-r^2\right)r)d\theta dr\overset{*}{=}2\cdot2\pi\int_0^2 0.5\left(2^2r-r^3\right)dr=2\pi\left(2^2\frac{2^2}{2}-\frac{2^4}{4}\right)=8\pi$$

<u>הערה</u>: בשלב (*) השתמשנו ב- $\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\theta+\sin\theta\right)d\theta\overset{(*)}{=}0$.

פתרון שאלה 6.ב

נסגור את <u>החרוט</u> $\mathbf{S}$ בעזרת המעגל $\mathbf{S}_1:z=2,x^2+y^2\le 2^2$; נקבל משטח סגור $\Sigma=\mathbf{S}\cup\mathbf{S}_1$ שמהווה את השפת הגוף $G\subseteq\mathbf{R}^3$ הכלוא בין החרוט $\mathbf{S}$ והמעגל $\mathbf{S}_1$.

נמצא את השטף $\Phi_{\mathbf{S}_1}\left(\vec F\right)$. וקטור נורמל היחידה ל- $\mathbf{S}_1$ שווה ל- $(0,0,1)$ ולכן

$$\Phi_{\mathbf{S}_1}\left(\vec F\right)=\iint\limits_{\mathbf{S}_1}\vec F\cdot\vec nds=\iint\limits_{\mathbf{S}_1}(P,Q,R)\cdot(0,0,1)ds=\iint\limits_{\mathbf{S}_1\subset(z=2)}z^2ds=2^2\iint\limits_{\mathbf{S}_1}1ds=2^2area\left(\mathbf{S}_1\right)=2^2\cdot\pi\cdot2^2=16\pi\ .$$

<u>מסקנה</u>: השטף דרך החרוט $\mathbf{S}$ שווה ל- $\Phi_{\mathbf{S}}\left(\vec F\right)=\iint\limits_{\mathbf{S}}\vec F\cdot\vec nds=\Phi_\Sigma\left(\vec F\right)-\Phi_{\mathbf{S}_1}\left(\vec F\right)=8\pi-16\pi=-8\pi$.