פתרון שאלון Y

1. נתון טור החזקות $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n}(3x+1)^n$

(א) (12 נק') מהו תחום ההתכנסות של הטור? קבעו את סוג ההתכנסות (התכנסות בהחלט, בתנאי או התבדרות) בכל נקודה.

פתרון: נסדר את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n}(3x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n(n^2+1)}3^n\left(x+\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(x+\frac{1}{3}\right)^n.$$

זהו טור חזקות עם מקדמים $a_n=\frac{3^n}{n}$ סביב $x_0=-\frac{1}{3}$. נמצא רדיוס התכנסות לפי קושי

$$R^{-1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}=3$$

ולכן $R=\frac{1}{3}$. על כן, הטור מתכנס בהחלט עבור $x\in(-\frac{2}{3},0)$. נבדוק בקצוות: עבור $x=0$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ ועבור $x=-\frac{2}{3}$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ שמתכנס בתנאי לפי לייבניץ. לסיכום: הטור מתכנס בהחלט כאשר $-\frac{2}{3}<x<0$, מתכנס בתנאי כאשר $x=-\frac{2}{3}$ ומתבדר כאשר $x\geq 0, x<-\frac{2}{3}$.

(ב) (8 נק') מצאו נוסחה מפורשת (כפונקציה אלמנטרית) עבור הפונקציה $S(x)$ בתחום בו הטור מתכנס

פתרון: מתקיים, כאשר $t=-(3x+1)$,

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+n}(3x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(3x+1)^n=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}[-(3x+1)]^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n=-\ln(t+1)=-\ln(-3x).$$

אכן, הטור מתכנס כאשר $-\frac{2}{3}<x<0 \Longrightarrow |3x+1|<1 \Longrightarrow |t|<1$.

2. (א) (14 נק') נתונה $f(x,y)=x^2+ay^2$. מהו ערכו של a כך שהנגזרת הכוונית בנקודה $(1,2)$ תהיה מקסימלית בכוון $\mathbf{v}=(4,3)$? מה ערך הנגזרת בנקודה זו?

פתרון: הפונקציה רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbb{R}^2$ ולכן דיפרנציאבילית ב $\mathbb{R}^2$. על פי משפט, הנגזרת הכוונית בנקודה כלשהיא מקסימלית בכוון הגרדיאנט באותה נקודה. כלומר קיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש

$$\nabla f(1,2)=t\mathbf{v}\Longrightarrow(2,4a)=t(4,3)\Longrightarrow\frac{2}{4}=\frac{4a}{3}\Longrightarrow a=\frac{3}{8}.$$

הנגזרת הכוונית היא

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{\mathbf{v}}}=\|\nabla f\|=\sqrt{2^2+(4a)^2}=\frac{5}{2}.$$

(ב) (6 נק') חשבו את הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^3}$ או הוכיחו כי אינו קיים.

פתרון: החזקות במכנה שונות, לכן נחשב את הגבול לאורך מסלול שיאחד אותן, למשל $y = kx^{2/3}$. נקבל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^{5/3}}{x^2+2k^3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{x^{1/3}(1+2k^3)}.$$

כאשר $k=0$ הגבול הוא אפס. אחרת הגבול לא קיים (לכל $k \neq 0$ הגבולות החד צדדיים $\lim_{x\to 0^+} \frac{2k}{x^{1/3}(1+2k^3)}$ ו $\lim_{x\to 0^-} \frac{2k}{x^{1/3}(1+2k^3)}$ קיימים במובן הרחב אך שונים בסימן). נסיק אפוא כי הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^3}$ לא קיים.

3. (20 נק') נתונה ספירה $x^2+y^2+z^2 = R^2$ ובתוכה חסומה תיבה. מצאו את הנפח המקסימלי האפשרי של התיבה שקדקדיה נמצאים בנקודות $(\pm x, \pm y, \pm z)$.

פתרון: עבור תיבה שחסומה ע"י הספירה $x^2+y^2+z^2=R^2$ נסמן את אחד הקדקדים בנקודה (x,y,z)והוא מקיים את משואת הספירה. בגלל סימטריה, שמונת הקדקדים של התיבה הם $(\pm x, \pm y, \pm z)$ ואפשר להניח $x,y,z \geq 0$. ארכי צלעות התיבה הם $2x, 2y, 2z$ ולכן נפח התיבה $V(x,y,z) = 8xyz$. צריך למצוא מקסימום של הפונקציה V תחת האילוץ $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$. מכיון שהפונקציה רציפה והספירה היא תחום קומפקטי, ע"פ משפט וירשטראס יש לפונקציה מינימום ומקסימום בתחום. נפתור בעזרת כפלי לגראנג'.

$$\begin{array}{c} \nabla V = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{array} \implies \begin{array}{c} 8yz = \lambda 2x \\ 8xz = \lambda 2y \\ 8xy = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2 = R^2 \end{array}.$$

נבדוק את המקרים השונים.

(א) $x = 0 \implies 8yz = 0 \implies y = 0 \text{ or } z = 0 \implies (x,y,z) = (0,R,0),(0,0,R)$

(ב) $y = 0 \implies 8xz = 0 \implies x = 0 \text{ or } z = 0 \implies (x,y,z) = (R,0,0),(0,0,R)$

(ג) $z = 0 \implies 8xy = 0 \implies x = 0 \text{ or } y = 0 \implies (x,y,z) = (R,0,0),(0,R,0)$

(ד) $x,y,z \neq 0 \implies \lambda = \frac{4yz}{x} = \frac{4xz}{y} = \frac{4xy}{z} \implies \frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \frac{z}{y} = \frac{y}{z} \implies x^2 = y^2 = z^2 \implies (x,y,z) = (\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}})$. נחשב את הפונקציה בנקודות החשודות ונקבל $V(R,0,0) = V(0,R,0) = V(0,0,R) = 0$ וכן $V(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}) = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} = V_{\max}$.

4. (20 נק') נתון השדה $\mathbf{F} = (\ln(y^2z^2+1), \ln(x^2z^2+1), \ln(z^2+1))$.

(א) (5 נק') מצאו את השטף דרך הדיסקה $x^2+y^2 \leq 1, z=0$ בכוון החיובי של ציר z.

פתרון: נחשב במפורש $\iint \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds$ כאשר $\hat{\mathbf{n}} = (0,0,1)$ ונקבל

$$\Phi_0 = \iint \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,1)dxdy = \iint \ln(0+1)dxdy = 0.$$

(ב) (15 נק') חשבו את השטף של השדה דרך המשטח הפתוח $x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$ בכוון החיובי (רמז: את הפונקציה $f(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$ ניתן לרשום בצורה $f(t) = t - \frac{t}{t^2+1}$).

פתרון: השדה רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbb{R}^3$. על כן נוכל לסגור את המשטח ולהשתמש במשפט גאוס. אם כן

$$\Phi = \iint \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \iiint div\mathbf{F}dV = \iiint \frac{2z}{z^2+1}dV =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{2r\cos\phi}{r^2\cos^2\phi+1}r^2\sin\phi drd\phi d\theta =$$

$$2\pi\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{2r\cos\phi}{r^2\cos^2\phi+1}r^2\sin\phi drd\phi d\theta = .$$

$$-2\pi\int_0^1 r\ln(r^2\cos^2\phi+1)|_0^{\pi/2}dr = 2\pi\int_0^1 r\ln(r^2+1)dr =$$

$$2\pi\left[\frac{1}{2}r^2\ln(r^2+1)|_0^1 - \int_0^1\frac{r^3}{r^2+1}dr\right] =$$

$$\pi\ln 2 - 2\pi\int_0^1\left(r-\frac{r}{r^2+1}\right)dr = \pi\ln 2 - \pi + \pi\ln 2 = \pi(\ln 4 - 1).$$

השטף דרך המשטח הפתוח יהיה אפוא $\Phi+\Phi_0=\pi(\ln 4-1)$ כאשר $\Phi_0=0$ השטף שחושב בסעיף (א).

5. (א) (12 נק') חשבו את מסת הגוף החסום בין החרוט $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ והפרבולואיד $z=1-\frac{5}{4}(x^2+y^2)$ כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י $\rho(x,y,z)=x^2$

פתרון: נעבוד בקורדינטות גליליות. נשווה בין החרוט לפרבולואיד ונקבל $1-\frac{5}{4}r^2 = 2r$ כלומר $r=\frac{2}{5}$ ולכן הגוף מתואר ע"י

$$V=\{(r,\theta,z): 0\le r\le\frac{2}{5}, 0\le\theta\le 2\pi, 2r\le z\le 1-\frac{5}{4}r^2\}$$

והמסה תהיה

$$M=\iiint\rho dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2/5}\int_{2r}^{1-\frac{5}{4}r^2} r^2\cos^2\theta rdzdrd\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\int_0^{2/5}\int_{2r}^{1-\frac{5}{4}r^2} r^3dzdr = \pi\int_0^{2/5}\int_{2r}^{1-\frac{5}{4}r^2} r^3dzdr =$$

$$\pi\int_0^{2/5}(r^3-\frac{5}{4}r^5-2r^4)dr = \frac{68\pi}{46875}.$$

(ב) (8 נק') חשבו את מסת הגוף החסום בתחום $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4, x\ge 0\}$ כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י $\rho(x,y)=x$.

פתרון: נעבוד בקורדינטות קוטביות בהן התחום מתואר ע"י

$$\tilde{D}=\{(r,\theta): 0\le r\le 2, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$$

והמסה תהיה

$$M=\iint_D xdxdy = \iint_{\tilde{D}} x(r,\theta)rdrd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 r\cos\theta rdrd\theta =$$

$$\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3|_0^2 \cos\theta d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{16}{3}.$$

6. אין קשר בין סעיפים (א) ו (ב).

(א) (15 נק') חשבו את העבודה הדרושה להביא חלקיק נקודתי מהנקודה $(0,-1)$ לנקודה $(0,1)$ לאורך העקום $(x-1)^2\cos(\frac{\pi}{2}y) - xy^2 = 0$ עבור השדה

$$\mathbf{F} = (\sin xe^y + \cos x, -\cos xe^y + y^2).$$

פתרון: קל לראות כי השדה משמר ולכן העבודה נתונה ע"י $W = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(0,1) - \phi(0,-1)$ כאשר $\mathbf{F} = \nabla\phi$. נחשב את $\phi(x,y)$.

$$\phi(x,y) = \int(-\cos xe^y + y^2)dy = -\cos xe^y + \frac{1}{3}y^3 + g(x)$$

ולכן

$$\phi'_x = \sin xe^y + g'(x) = \sin xe^y + \cos x$$

ונקבל

$$g(x) = \sin x + C$$

ובסה"כ

$$\phi(x,y) = -\cos xe^y + \frac{1}{3}y^3 + \sin x + C.$$

על כן העבודה נתונה ע"י

$$W = \phi(0,1) - \phi(0,-1) = -e + \frac{1}{3} - (-e^{-1} - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} - 2\sinh(1).$$

(ב) (5 נק') נתון השדה

$$\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = (a\ln(x^2+y^2), \arctan(x/y)).$$

עבור אילו ערכים של a השדה משמר בתחום $D = \{(x,y) : y > 0\}$?

פתרון: השדה רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום פשוט קשר. על כן הוא משמר אם"ם $Q'_x = P'_y$. אם כן

$$Q'_x = \frac{1/y}{1+(x/y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2} = P'_y = a\frac{2y}{x^2+y^2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}.$$