

תרגילים לבדיקה מעמיקה - העתקות לינאריות

השאלות הבאות הן שאלות בסגנון הוכיחו/הפריכו. בכל שאלה יש לבצע את התהליך הבא בצורה מסודרת:

א. זיהוי מפורש של הנתונים, ושל הטענה אותה צריך להוכיח או להפריך

ב. כתיבה של שתי דוגמאות שמקיימות את הנתונים.

ג. בדיקת הטענה עבור הדוגמאות שמצאתם בסעיף הקודם.

ד. הוכחה או הפרכה של הטענה. במקרה של הוכחה יש לכתוב הוכחה מסודרת (לא בהכרח ארוכה). במקרה של הפרכה יש להציג דוגמה נגדית (אפשר מהסעיף הקודם)

הבדיקה תיקח בחשבון את ההתייחסות לכל הסעיפים ולא רק לחלק האחרון.

שאלה 1. נתונה העתקה לינארית $T : U \rightarrow V$ ונתונות שתי קבוצות $A = \{u_1, u_2, u_3\} \subset U, T(A) = \{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\} \subset V$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $T(A)$ בת"ל אז $\dim V \geq 3$.

ב. אם $T(A)$ בת"ל אז $\dim U \geq 3$.

ג. אם $T(u_1) = T(2u_2)$ אז T לא חח"ע.

ד. אם $U = V$, אז $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

ה. אם $U = V, T(A)$ בת"ל, אז $T(T(A)) = \{T(T(u_1)), T(T(u_2)), T(T(u_3))\}$ בת"ל.