# יונתן כהן
# חדו"א 2
## תרגול מספר 9

## אינטגרל כפול, שימושי אינטגרל כפול (שטח, מסה)
## החלפת סדר אינטגרציה
## אינטגרל כפול בקואורדינטות פולריות

# אינטגרל כפול, שימושי אינטגרל כפול (שטח, מסה)

.1

$D$ התחום החסום ע"י $xy=1\ ,\ y=a\ \ ,\ y=1\ ,\ x=0$ ( $a>1$ פרמטר).

א. לחשב שטח התחום $D$.

ב. לחשב מסת התחום $D$ כאשר צפיפות המסה ליחידת שטח היא $\rho(x,y)=3xye^{xy}$.

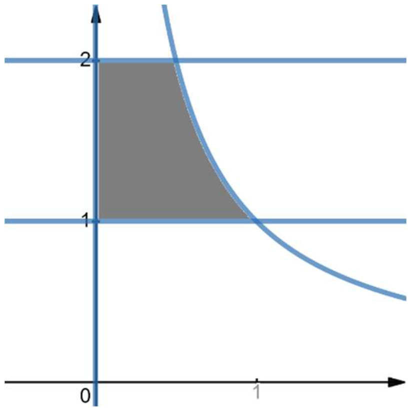
ג. לחשב צפיפות מסה ממוצעת של התחום $D$.

א.

שטח התחום $D$ נתון ע"י

$$\text{area}(D)=\iint_D 1dA$$

נקודות החיתוך של העקומות:




$$y=1\,,\ y=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad x=1$$

$$y=a\,,\ y=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{a}$$

איפיון הקבוצה $D$ :

איפיון ראשון (קבוצה $x$-פשוטה)

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le\frac{1}{a}\,,1\le y\le a\ \text{ or }\ \frac{1}{a}\le x\le 1\,,1\le y\le\frac{1}{x}\right\}$$

איפיון שני (קבוצה $y$-פשוטה)

$$D=\left\{(x,y)\,|\,1\le y\le a\,,0\le x\le\frac{1}{y}\right\}$$

שטח הקבוצה $D$ נתון ע"י

$$\text{area}(D)=\iint_D 1dA=\int_{x=0}^{\frac{1}{a}}dx\int_{y=1}^{a}1dy+\int_{x=\frac{1}{a}}^{1}dx\int_{y=1}^{\frac{1}{x}}1dy$$

או ע"י

$$\text{area}(D)=\iint_D 1dA=\int_{y=1}^{a}dy\int_{x=0}^{\frac{1}{y}}1dx$$

נחשב את שטח התחום $D$ לפי האיפיון השני:

$$\text{area}(D)=\iint_D 1dA=\int_{y=1}^{a}dy\int_{x=0}^{\frac{1}{y}}1dx=\int_{y=1}^{a}dy\,x\Big|_{x=0}^{\frac{1}{y}}=\int_{y=1}^{a}\frac{1}{y}dy=\ln|y|\Big|_1^a=\ln|a|-\ln|1|=\ln a$$

ב.

מסת התחום $D$ נתונה ע"י

$$\text{mass}(D)=\iint_D\rho(x,y)dA=\iint_D 3xye^{xy}dA=\int_{y=1}^{a}dy\int_{x=0}^{\frac{1}{y}}3xye^{xy}dx$$

נחשב בנפרד את האינטגרל הלא מסויים הפנימי.

$$\int xye^{xy}dx = [f' = e^{xy}, g = xy, f = \frac{1}{y}e^{xy}, g' = y] =$$

$$= xy \cdot \frac{1}{y}e^{xy} - \int y \cdot \frac{1}{y}e^{xy}dx = xe^{xy} - \int e^{xy}dx = xe^{xy} - \frac{1}{y}e^{xy} + c = \left(x - \frac{1}{y}\right)e^{xy} + c$$

ולכן

$$\text{mass}(D) = \iint_D \rho(x,y)dA = \iint_D 3xye^{xy}dA = \int_{y=1}^{a} dy \int_{x=0}^{\frac{1}{y}} 3xye^{xy}dx =$$

$$= \int_{y=1}^{a} dy\, 3\left(x - \frac{1}{y}\right)e^{xy}\Bigg|_{x=0}^{\frac{1}{y}} = \int_{y=1}^{a} 3\left(\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right)e^{\frac{1}{y}y} - \left(0 - \frac{1}{y}\right)e^{0\cdot y}\right)dy =$$

$$= \int_{y=1}^{a} \frac{3}{y}dy = 3\ln|y|\Big|_{y=1}^{a} = 3\ln|a| - 3\ln|1| = 3\ln a$$

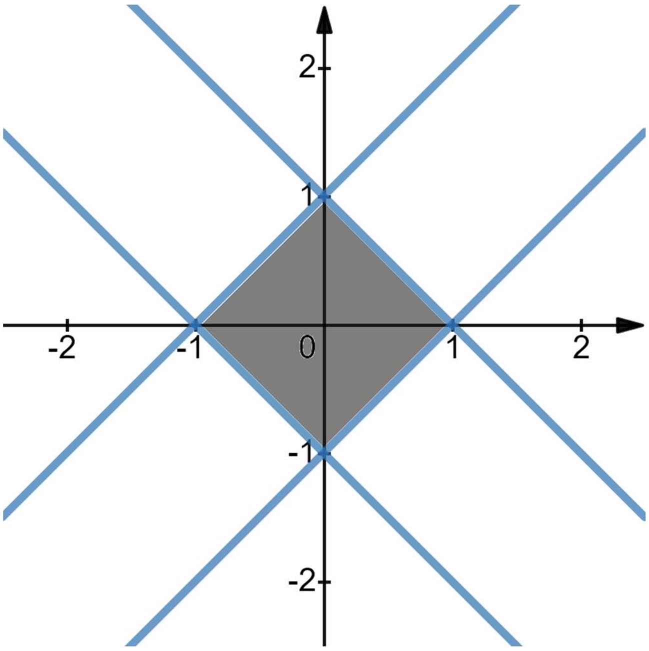
ג.

הצפיפות הממוצעת של התחום $D$ נתונה ע"י

$$\frac{\text{mass}(D)}{\text{area}(D)} = \frac{3\ln a}{\ln a} = 3$$

.2

לחשב מסת הגוף $D$ החסום ע״י העקומה $|x|+|y|=1$ כאשר צפיפות המסה ליחידת שטח נתונה ע״י $\rho(x,y)=x^4+y^4$.




איפיון התחום $D$

$$D=\{\,(x,y)\,|\,-1\le x\le 0\,,\,-1-x\le y\le 1+x \ \text{ or } \ 0\le x\le 1\,,\,-1+x\le y\le 1-x\}$$

נשים לב שהתחום $D$ סימטרי ביחס לציר $y$ : $(x,y)\in D \iff (-x,y)\in D$

וגם הפונקציה $f$ סימטרית ביחס לציר $y$ (כלומר זוגית במשתנה $x$): $f(x,y)=f(-x,y)$.

ולכן ניתן לחשב מסת החצי הימני של התחום ולכפול ב $2$.

באופן דומה:

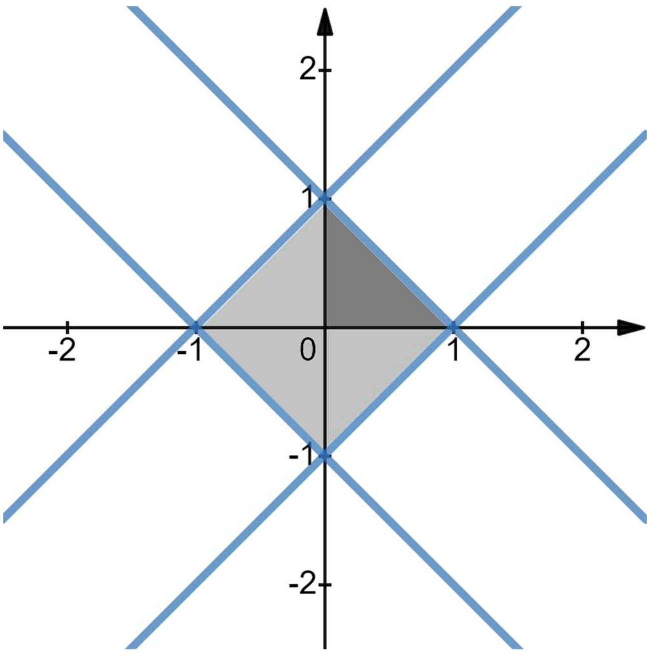
התחום $D$ סימטרי ביחס לציר $x$ : $(x,y)\in D \iff (x,-y)\in D$

וגם הפונקציה $f$ סימטרית ביחס לציר $x$ (כלומר זוגית במשתנה $y$): $f(x,y)=f(x,-y)$.

ולכן ניתן לחשב מסת החצי העליון של התחום ולכפול ב $2$.

משילוב שתי סימטריות אלה נובע שניתן לחשב את מסת הרבע העליון-ימני של התחום ולכפול ב $4$.

נסמן ב $D_1$ את רבע התחום $D$ הנמצא ברביע הראשון




איפיון התחום $D_1$

$$D_1=\{\,(x,y)\,|\,0\le x\le 1\,,\,0\le y\le 1-x\}$$

ולכן

$$\text{mass}(D) = 4\,\text{mass}(D_1) = 4\iint_{D_1} \rho(x,y)\,dA = 4\iint_{D_1} (x^4 + y^4)\,dA = 4\int_{x=0}^{1} dx \int_{y=0}^{1-x} (x^4 + y^4)\,dy = \ldots$$

## **החלפת סדר אינטגרציה**

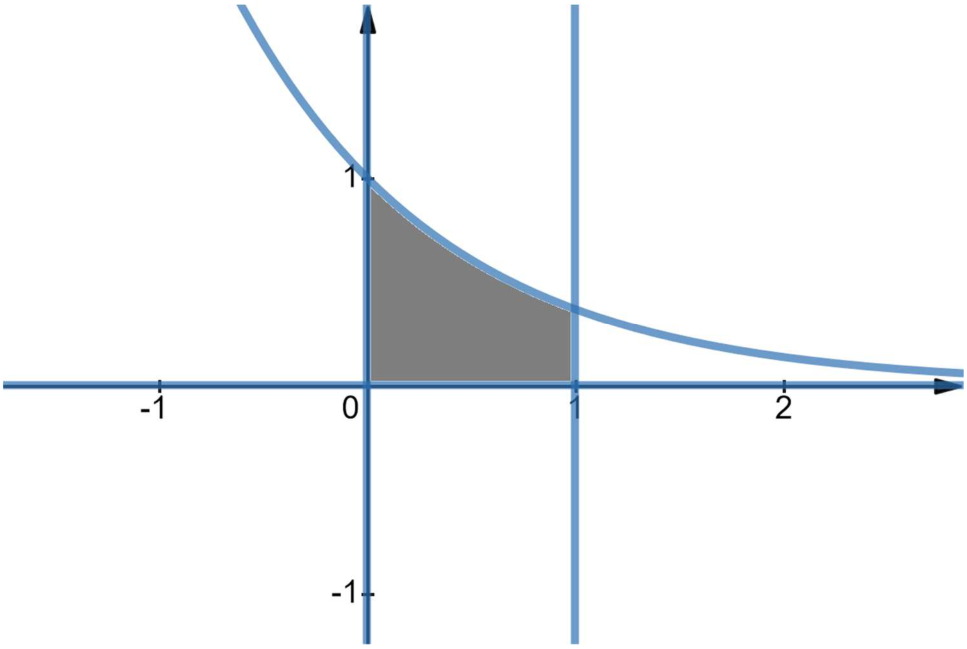
.1

להחליף סדר האינטגרציה ב $\int_0^1 \int_0^{e^{-x}} f(x,y)dydx$ .

האינטגרל החוזר הנתון מתאים לאינטגרל כפול בתחום $D$ המאופיין ע"י :

משתנה 'חיצוני' $x$ עם גבולות $0 \le x \le 1$

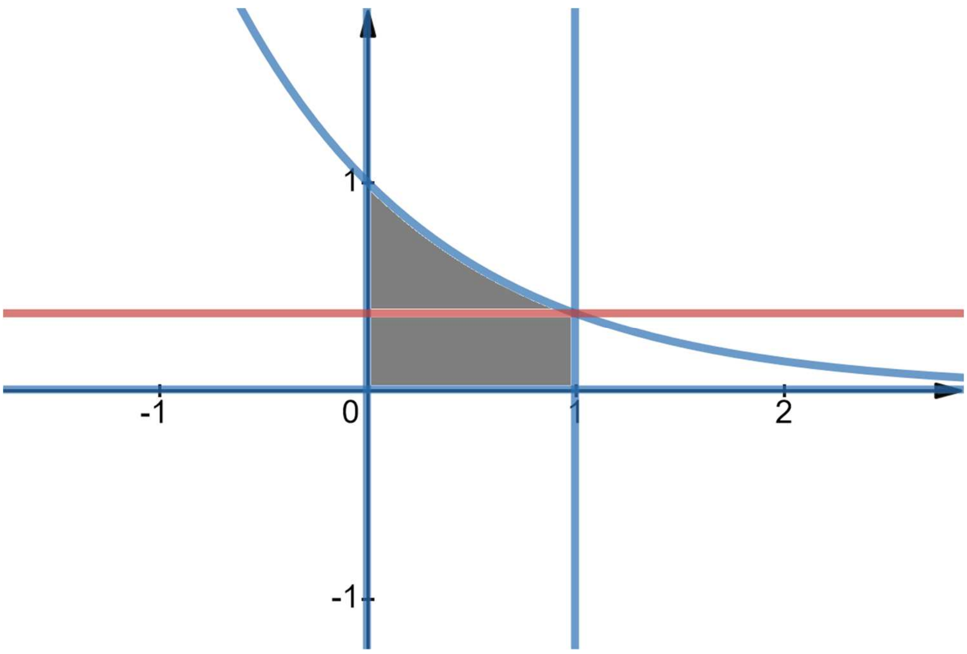
משתנה 'פנימי' $y$ עם גבולות $0 \le y \le e^{-x}$




נקודת החיתוך של הישר $x=0$ עם העקומה $y=e^{-x}$ היא ב $y=1$ .

נקודת החיתוך של הישר $x=1$ עם העקומה $y=e^{-x}$ היא ב $y=\frac{1}{e}$ .

כדי לאפיין את התחום $D$ בסדר ההפוך – משתנה 'חיצוני' $y$ , משתנה 'פנימי' $x$ , צריך לפצל את התחום $D$ לשני תת תחומים, ע"י הישר $y=\frac{1}{e}$ :



נהפוך את הפונקציה $y=e^{-x}$ :

$$y=e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y=-x \quad \Leftrightarrow \quad x=-\ln y$$

תת התחום התחתון $D_L$ מאופיין ע״י :

משתנה 'חיצוני' $y$ עם גבולות $0 \le y \le \frac{1}{e}$

משתנה 'פנימי' $x$ עם גבולות $0 \le x \le 1$

תת התחום העליון $D_U$ מאופיין ע״י :

משתנה 'חיצוני' $y$ עם גבולות $\frac{1}{e} \le y \le 1$

משתנה 'פנימי' $x$ עם גבולות $0 \le x \le -\ln y$

ולכן האינטגרל החוזר המתאים לאינטגרל כפול בתחום $D$ בסדר האינטגרציה ההפוך הוא

$$\int_{y=0}^{\frac{1}{e}} \int_{x=0}^{1} f(x,y)dxdy + \int_{y=\frac{1}{e}}^{1} \int_{x=0}^{-\ln y} f(x,y)dxdy$$

.2

להחליף סדר האינטגרציה ב $\int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$ .

האינטגרל החוזר הנתון מתאים לאינטגרל כפול בתחום $D$ המאופיין ע"י :

משתנה 'חיצוני' $y$ עם גבולות $1 \le y \le 8$

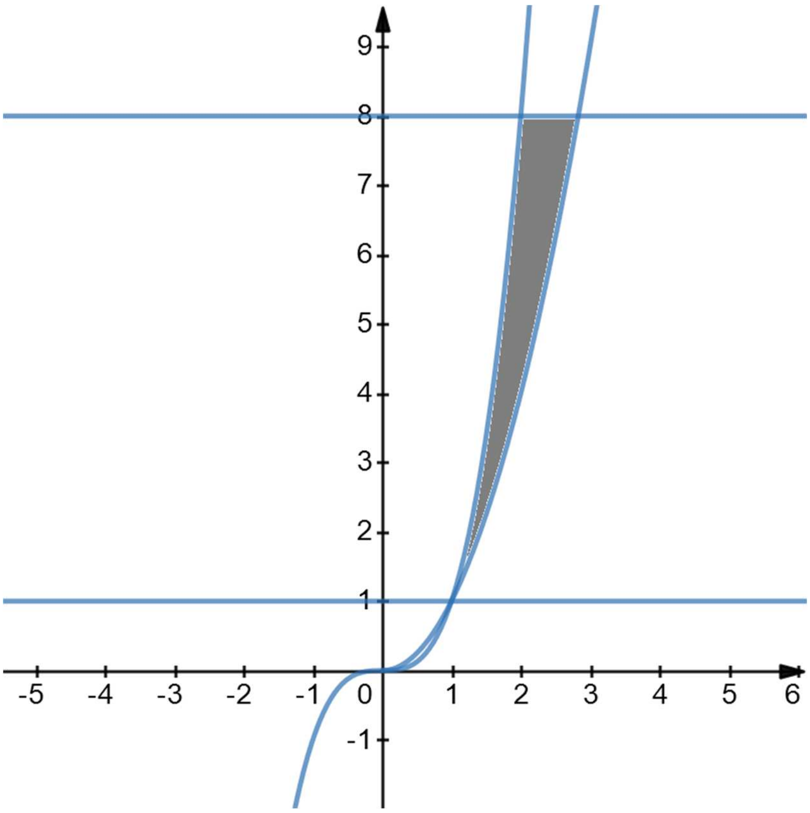
משתנה 'פנימי' $x$ עם גבולות $\sqrt[3]{y} \le x \le \sqrt{y}$

נהפוך את הפונקציה $x=\sqrt{y}$ :

$$x=\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad y=x^2 \, , x \ge 0$$

נהפוך את הפונקציה $x=\sqrt[3]{y}$ :

$$x=\sqrt[3]{y} \quad \Leftrightarrow \quad y=x^3$$



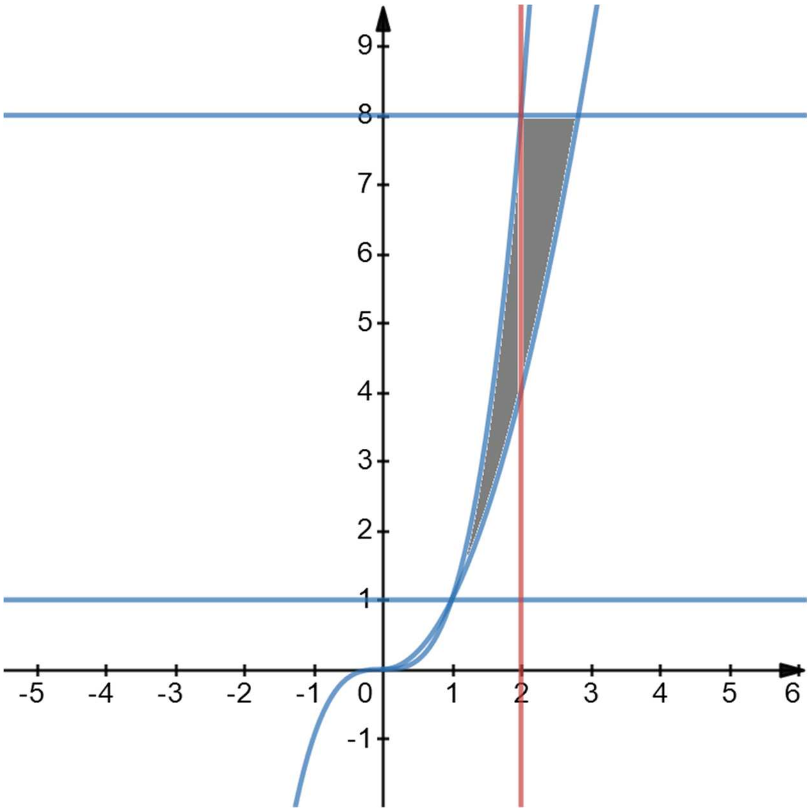

נקודת החיתוך של הישר $y=1$ עם העקומה $x=\sqrt{y}$ היא ב $x=1$ .

נקודת החיתוך של הישר $y=1$ עם העקומה $x=\sqrt[3]{y}$ היא ב $x=1$ .

נקודת החיתוך של הישר $y=8$ עם העקומה $x=\sqrt{y}$ היא ב $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ .

נקודת החיתוך של הישר $y=8$ עם העקומה $x=\sqrt[3]{y}$ היא ב $x=\sqrt[3]{8}=2$ .

כדי לאפיין את התחום $D$ בסדר ההפוך – משתנה 'חיצוני' $x$, משתנה 'פנימי' $y$ , צריך לפצל את התחום $D$ לשני תת תחומים, ע"י הישר $x=2$ :




תת התחום השמאלי $D_L$ מאופיין ע"י :

משתנה 'חיצוני' $x$ עם גבולות $1 \le x \le 2$

משתנה 'פנימי' $y$ עם גבולות $x^2 \le y \le x^3$

תת התחום הימני $D_R$ מאופיין ע"י :

משתנה 'חיצוני' $x$ עם גבולות $2 \le x \le 2\sqrt{2}$

משתנה 'פנימי' $y$ עם גבולות $x^2 \le y \le 8$

ולכן האינטגרל החוזר המתאים לאינטגרל כפול בתחום $D$ בסדר האינטגרציה ההפוך הוא

$$\int_{x=1}^{2} \int_{y=x^2}^{x^3} f(x,y)dydx + \int_{x=2}^{2\sqrt{2}} \int_{y=x^2}^{8} f(x,y)dydx$$

# אינטגרל כפול בקואורדינטות פולריות

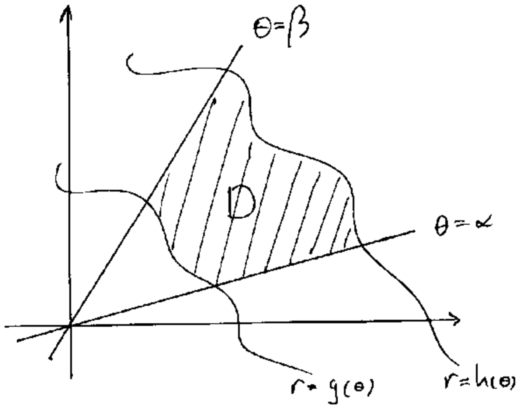
$D$ התחום הכלוא בין הישרים $\theta = \alpha$ , $\theta = \beta$
ובין העקומות הרציפות $r = h(\theta)$ , $r = g(\theta)$
בתחום $\theta \in [\alpha, \beta]$,
כאשר $g(\theta) \le h(\theta)$ לכל $\theta \in [\alpha, \beta]$.

$$D = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, g(\theta) \le r \le h(\theta) \right\}$$

האינטגרל החוזר בקואורדינטות פולריות המתאים לאינטגרל כפול בקבוצה $D$ :

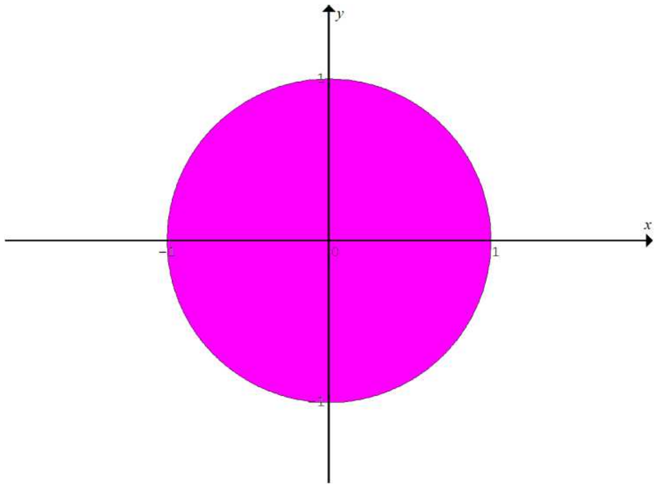
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{\theta=\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r=g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$



.1

לחשב $\iint\limits_D (1-2x-3y)dA$ כאשר $D$ הוא העיגול $x^2+y^2\le 1$ .




התחום $D$ הוא עיגול שמרכזו הראשית ורדיוסו 1.

איפיון התחום $D$ בקואורדינטות פולריות : $0\le r\le 1$ , $0\le\theta\le 2\pi$ .

ולכן :

$$\iint\limits_D (1-2x-3y)dA = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{r=0}^{1} (1-2r\cos\theta-3r\sin\theta)rdr = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{r=0}^{1} (r-2r^2\cos\theta-3r^2\sin\theta)dr =$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{2}r^2-\frac{2}{3}r^3\cos\theta-r^3\sin\theta\right)\Bigg|_{r=0}^{1} = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos\theta-\sin\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}\theta-\frac{2}{3}\sin\theta+\cos\theta\Bigg|_{\theta=0}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi-0)-\frac{2}{3}(\sin 2\pi-\sin 0)+(\cos 2\pi-\cos 0)=\pi$$

.2

לחשב $\iint_D x^2y^3\,dA$ כאשר $D$ הוא התחום המוגדר ע"י $x^2+y^2\le R^2$ ( $R$ פרמטר חיובי).

התחום $D$ הוא עיגול שמרכזו הראשית ורדיוסו $R$.

איפיון התחום $D$ בקואורדינטות פולריות: $0\le r\le R$ , $0\le\theta\le 2\pi$.

$$\iint_D x^2y^3\,dA=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^3\,rdrd\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}r^6\cos^2\theta\sin^3\theta drd\theta$$

נשתמש ב"טריק":

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d}\alpha(x)\beta(y)\,dydx=\int_{x=a}^{b}\alpha(x)\,dx\cdot\int_{y=c}^{d}\beta(y)\,dy$$

נוסחה זו תקפה אך ורק כאשר האינטגרנד הוא מכפלה של פונקציה של המשתנה הראשון כפול של פונקציה של המשתנה השני $f(x,y)=\alpha(x)\cdot\beta(y)$ וכאשר גבולות האינטגרציה של האינטגרל הפנימי ( $y$ במקרה זה) אינם תלויים במשנה החיצוני ( $x$ במקרה זה) אלא פונקציות קבועות, כלומר כאשר תחום האינטגרציה הוא מלבן.

ולכן:

$$\iint_D x^2y^3\,dA=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}r^6\cos^2\theta\sin^3\theta drd\theta=\int_{r=0}^{R}r^6dr\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\sin^3\theta d\theta$$

$$\int_{r=0}^{R}r^6dr=\frac{1}{7}r^7\Big|_{r=0}^{R}=\frac{1}{7}R^7$$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\sin^3\theta d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta\overset{t=\cos\theta}{=}\int_{t=1}^{1}t^2(1-t^2)(-1)dt=0$$

$$\Rightarrow\quad\iint_D x^2y^3\,dA=0$$

.3

לחשב מסת התחום $D$ שהוא רבע העיגול $x^2 + y^2 \le R^2$ ברביע הראשון ( $R$ פרמטר חיובי), כאשר צפיפות המסה ליחידת שטח נתונה ע"י $\rho(x,y) = x^2 y^3$ .

מסת הגוף $D$ נתונה ע"י

$$\text{mass}(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dA = \iint_D x^2 y^3\,dA$$

התחום $D$ הוא רבע העיגול שמרכזו הראשית ורדיוסו $R$ , הרבע שברביע הראשון.
איפיון התחום $D$ בקואורדינטות פולריות: $0 \le r \le R$ , $0 \le \theta \le \pi/2$ .

$$\text{mass}(D) = \iint_D x^2 y^3\,dA = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{R} (r\cos\theta)^2 (r\sin\theta)^3\, r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{R} r^6 \cos^2\theta \sin^3\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{r=0}^{R} r^6\,dr \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^3\theta\,d\theta$$

$$\int_{r=0}^{R} r^6\,dr = \frac{1}{7} r^7 \Big|_{r=0}^{R} = \frac{1}{7} R^7$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^3\theta\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta \overset{t=\cos\theta}{=} \int_{t=1}^{0} t^2(1-t^2)(-1)\,dt = \int_{t=1}^{0} (t^4 - t^2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 \Big|_{t=1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow \quad \text{mass}(D) = \iint_D x^2 y^3\,dA = \frac{1}{7} R^7 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2R^7}{105}$$

לחשב מסת התחום $D$ המוגדר ע"י $x^2+y^2\le x$ , כאשר צפיפות המסה ליחידת שטח נתונה ע"י $\rho(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ .

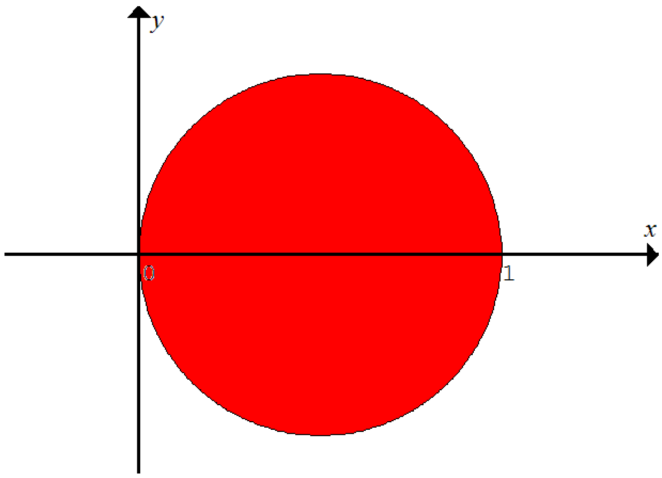
מסת התחום $D$ נתונה ע"י

$$\text{mass}(D)=\iint_D \rho(x,y)dA=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA$$

ננסה להבין מהו תחום האינטגרציה $D$ .

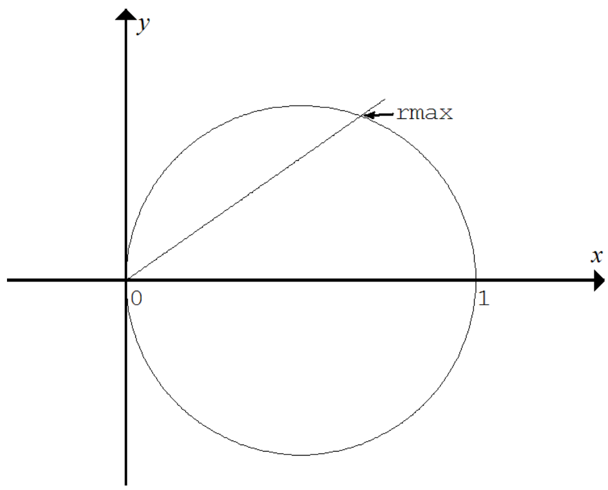
$$x^2+y^2\le x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x+y^2\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x+\tfrac{1}{4}+y^2\le\tfrac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad (x-\tfrac{1}{2})^2+y^2\le\tfrac{1}{2}^2$$

כלומר זו משוואה של עיגול שמכרזו הנקודה $(\tfrac{1}{2},0)$ ורדיוסו $\tfrac{1}{2}$ .




התחום $D$ בקואורדינטות פולריות:

אפשר לראות שלכל זווית $\theta$ (בתחום הרלוונטי) הישר העובר בראשית ויוצר זווית $\theta$ עם הכוון החיובי של ציר $x$ חותך את המעגל בנקודה שמרחקה מהראשית מסומן $r_{MAX}$ . ולכן לכל $0\le r\le r_{MAX}$ הנקודה שהקואורדינטות הפולריות שלה הן $(r,\theta)$ היא נקודה בתחום $D$ .




מהתרשים ניתן לראות שזה קורה עבור $-\tfrac{1}{2}\pi\le\theta\le\tfrac{1}{2}\pi$ , ושעבור זוויות $\theta$ שלא בתחום זה אין אף ערך של $r$ כך שהנקודה שהקואורדינטות הפולריות שלה הן $(r,\theta)$ היא נקודה בתחום.

באופן מסודר:

המעבר לקואורדינטות פולריות נתון ע"י: $x=r\cos\theta$ , $y=r\sin\theta$ .

נציב זאת במשוואה המגדירה את התחום $D$ :

$$x^2+y^2\le x \quad\Leftrightarrow\quad (r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\le r\cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad r^2\le r\cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad r\le\cos\theta$$

מכיוון ש $r\ge 0$ מתקבל $\cos\theta\ge 0$ וזה מתקיים עבור $-\tfrac{1}{2}\pi\le\theta\le\tfrac{1}{2}\pi$ .

כמו כן משמעות הדבר היא ש $r_{MAX}=\cos\theta$ ולכל $-\frac{1}{2}\pi\le\theta\le\frac{1}{2}\pi$ ערכי ה $r$ עבורם מתקבלת נקודה בקבוצה $D$ הן $0\le r\le\cos\theta$.

כלומר התאור של הקבוצה $D$ בקואורדינטות פולריות הוא :

$$D=\left\{(r\cos\theta,r\sin\theta)\,|\,-\tfrac{1}{2}\pi\le\theta\le\tfrac{1}{2}\pi\,,0\le r\le\cos\theta\right\}$$

ולכן :

$$\text{mass}(D)=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dA=\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\cos\theta}\sqrt{1-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\,rdrd\theta=$$

$$=\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\cos\theta}\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta$$

נבצע החלפת משתנה :

$$t=1-r^2\quad\Rightarrow\quad dt=-2rdr\,,\,r=0\Rightarrow t=1\,,\,r=\cos\theta\Rightarrow t=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

$$\text{mass}(D)=\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{t=1}^{\sin^2\theta}\sqrt{t}\cdot(-\tfrac{1}{2})dtd\theta=\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_{t=1}^{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}-\frac{1}{3}\left((\sin^2\theta)^{3/2}-1\right)d\theta=$$

$$=\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{3}\left(1-\left(\sqrt{\sin^2\theta}\right)^3\right)d\theta=\frac{1}{3}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}d\theta-\frac{1}{3}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}|\sin\theta|^3\,d\theta$$

נחשב שני האינטגרלים האחרונים :

$$\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}d\theta=\theta\Big|_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi$$

לחישוב האינטגרל האחרון נשים לב שבתחום $[0,\frac{1}{2}\pi]$ מתקיים $\sin x\ge 0$ ולכן $|\sin x|=\sin x$, אך בתחום $[-\frac{1}{2}\pi,0]$ מתקיים $\sin x\le 0$ ולכן $|\sin x|=-\sin x$. ולכן נפריד תחום האינטגרציה $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ לשני תת-תחומים : $[0,\frac{1}{2}\pi]$ ו $[-\frac{1}{2}\pi,0]$.

$$\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}|\sin\theta|^3\,d\theta=\int_{\theta=-\pi/2}^{0}|\sin\theta|^3\,d\theta+\int_{\theta=0}^{\pi/2}|\sin\theta|^3\,d\theta=\int_{\theta=-\pi/2}^{0}(-\sin\theta)^3d\theta+\int_{\theta=0}^{\pi/2}(\sin\theta)^3d\theta=$$

$$=-\int_{\theta=-\pi/2}^{0}\sin^3\theta d\theta+\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=-\frac{1}{3}\cos^3\theta+\cos\theta\Big|_{\theta=-\pi/2}^{0}+\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\pi/2}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-0+0-\left(\frac{1}{3}-1\right)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

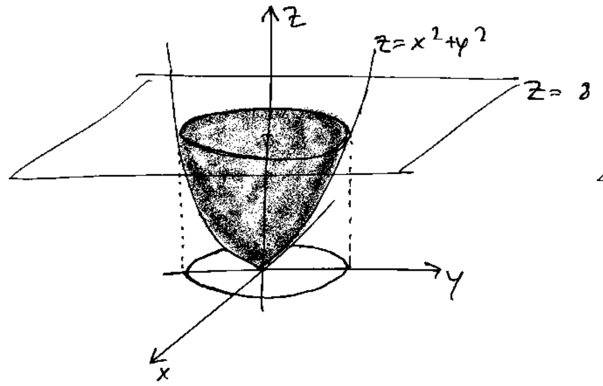
(נעזרנו ב : $\int\sin^3xdx=\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+c$ )

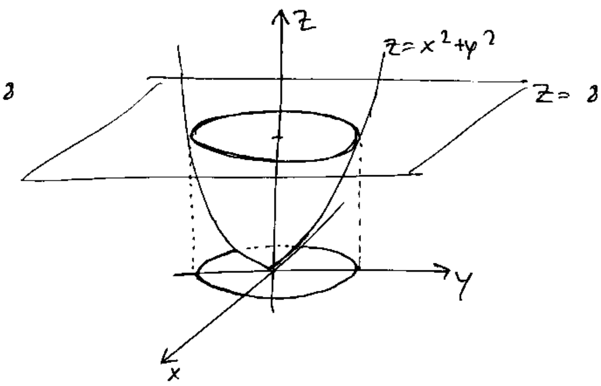
לסיכום

$$\text{mass}(D)=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dA=\frac{1}{3}\cdot\pi-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}$$

5.

לחשב נפח הגוף $G$ הכלוא בין הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ לבין המישור $z = 8$.




החיתוך בין הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ והמישור (המקביל למישור $xy$) הוא $x^2 + y^2 = 8$ כלומר הנקודות $(x, y, z)$ המקיימות $x^2 + y^2 = 8$ וגם $z = 8$. זהו מעגל שמכרזו $(0,0,8)$ ורדיוסו $\sqrt{8}$ המונח במישור $z = 8$.

אפשר לראות שהיטל הקבוצה $G$ למישור $xy$ הוא עיגול ששפתו היא עיגול החיתוך הנ"ל מוטל למישור $xy$.

כלומר ההיטל של $G$ למישור $xy$ הוא העיגול $D$ הנתון ע"י $x^2 + y^2 \le 8$.

כלומר הגוף $G$ הוא הגוף המוגדר מעל הקבוצה $D$, מוגבל מלמטה ע"י גרף הפונקציה $z(x, y) = x^2 + y^2$ ומלמעלה ע"י גרף הפונקציה $z(x, y) = 8$.

ולכן נפח הגוף $G$ נתון ע"י:

$$\text{volume}(G) = \iint_D \left[8 - (x^2 + y^2)\right] dA$$

מכיון שתחום האינטגרציה $D$ הוא העיגול שמרכזו הראשית $(0,0)$ נחשב אינטגרל זה בקואורדינטות פולריות.

איפיון התחום $D$ בקואורדינטות פולריות: $0 \le r \le \sqrt{8}$ , $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$\text{volume}(G) = \iint_D \left[8 - (x^2 + y^2)\right] dA = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{8}} \left[8 - ((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2)\right] r dr d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{8}} (8 - r^2) r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{8}} (8r - r^3) dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(4r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_{r=0}^{\sqrt{8}} d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(4\sqrt{8}^2 - \frac{1}{4}\sqrt{8}^4 - 0\right) d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} 16 d\theta = 16 \cdot 2\pi = 32\pi$$