דף נוסחאות במתמטיקה בדידה

א. לוגיקה

טבלאות אמת

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\oplus Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

שקילויות בסיסיות

1. $p\wedge\neg p\equiv F,\ p\vee\neg p\equiv T$
2. $p\wedge T\equiv p,\ p\vee T\equiv T$
   $p\wedge F\equiv F,\ p\vee F\equiv p$
3. $\neg(\neg p)\equiv p$
4. $p\vee q\equiv q\vee p,\ p\wedge q\equiv q\wedge p$
5. $p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$
   $p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$
6. $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
   $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
7. $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$
   $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$
8. $p\rightarrow q\equiv(\neg p)\vee q$
9. $p\rightarrow q\equiv(\neg q)\rightarrow(\neg p)$

כללי היסק

$p\Rightarrow p\vee q$

$p\wedge q\Rightarrow p$

$p,q\Rightarrow p\wedge q$

$p\vee q,\neg q\Rightarrow p$

$p\rightarrow q,p\Rightarrow q$

$p\rightarrow q,\neg q\Rightarrow\neg p$

$p\rightarrow q,q\rightarrow r\Rightarrow p\rightarrow r$

דה מורגן לכמתים

$\neg(\forall x\,A(x))\equiv\exists x(\neg A(x))$
$\neg(\exists x\,A(x))\equiv\forall x(\neg A(x))$

ב. קבוצות

שוויון קבוצות: $A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$

הכלה: $(A\subseteq B)\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

הקבוצה הריקה $\varnothing$ **:** $\forall x(x\notin\varnothing)$ **,** $\forall A(\varnothing\subseteq A)$

קבוצה אוניברסלית U **:** $\forall x(x\in U)$, כמו כן $\forall A(A\subseteq U)$

קבוצת חזקה: $2^A=P(A)=\{B|B\subseteq A\}$

כמו כן: $X\subseteq A\ \Leftrightarrow\ X\in P(A)$

טענה: $|P(A)|=2^n\leftarrow|A|=n$

פעולות על קבוצות

משלים של A **:** $A^c=A'=\bar{A}=\{x\mid x\notin A\}$

אחוד: $A\cup B=\{x\mid(x\in A)\vee(x\in B)\}$

חיתוך: $A\cap B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\in B)\}$

הפרש: $A\setminus B=\{x\mid(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$

הפרש סימטרי: $A\oplus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

תכונות בסיסיות

$A\cup A=A\quad A\cup\varnothing=A\quad A\cup U=U\quad A\cup\bar{A}=U$
$A\cap A=A\quad A\cap\varnothing=\varnothing\quad A\cap U=A\quad A\cap\bar{A}=\varnothing$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\qquad(A\cup B)\cap A=A$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\qquad(A\cap B)\cup A=A$

זהויות שימושיות

$A\setminus B=A\cap\bar{B}\qquad A\oplus B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}\qquad\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

$A\oplus\phi=A\quad A\oplus A=\phi\quad A\oplus\bar{A}=U$

יחסים

מכפלה קרטזית של קבוצות B,A **:**
$A\times B=\{(a,b)\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}$

יחס R **:** כל תת קבוצה R של $A\times B$ נקראת יחס בין הקבוצות B,A. שייכות של הזוג (a,b) ליחס R מסמנים באחת הדרכים הבאות: $(a,b)\in R$, aRb

יחסים מיוחדים

יחס הפוך ל- R **:** $R^{-1}=\{(a,b)\in A\times B\mid(b,a)\in R\}$

יחס משלים: $\bar{R}=\{(a,b)\in A\times B\mid(a,b)\notin R\}$

יחס זהות ב - $A\times A$ **:** $I=\{(a,a)\in A\times A\mid a\in A\}$

יחס אוניברסלי: $U=A\times B$

הרכבת (כפל) יחסים

$R=R_1\circ R_2=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\wedge\exists c\in C((a,c)\in R_1\wedge(c,b)\in R_2)\}$

תכונות של יחסים

$R^{-1}\subseteq S^{-1}\Leftrightarrow R\subseteq S\qquad(R^{-1})^{-1}=R$

$RT\subseteq RS\Leftarrow T\subseteq S\qquad(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}$

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

תכונות יחסים ב- $A^2=A\times A$

R **רפלקסיבי:** $\forall a\in A((a,a)\in R)$

R **סימטרי:** $\forall a,b\in A((a,b)\in R\rightarrow(b,a)\in R)$

R **אנטיסימטרי:**
$\forall a,b\in A((a,b)\in R\wedge(b,a)\in R\rightarrow a=b)$

R **טרנזיטיבי:**
$\forall a,b,c\in A((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R\rightarrow(a,c)\in R)$

R **מלא:** $\forall a,b\in A((a,b)\in R\vee(b,a)\in R\vee a=b)$

תכונות שקולות להגדרות

R רפלקסיבי $\leftrightarrow I\subseteq R$

R סימטרי $\leftrightarrow R=R^{-1}$

R אנטיסימטרי $\leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I$

R טרנזיטיבי $\leftrightarrow R^2\subseteq R$

R מלא $\leftrightarrow R\cup R^{-1}\cup I=U$

יחס שקילות

R **יחס שקילות** אם R רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

מחלקת שקילות של $a\in A$ **:**

$[a]_R=\{b\in A\mid(a,b)\in R\}$

לכל $a,b\in A$ מתקיים

$[a]_R=[b]_R$ או $[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$

קבוצת המנה A/R היא קבוצת כל מחלקות השקילות השונות.

חלוקה של A

חלוקה של A היא הקבוצה $\{A_1,A_2,...A_n\}$

כך ש: **(1)** $A_i\subseteq A,A_i\neq\phi$

(2) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$

טענה: לכל יחס שקילות מעל A מתאימה חלוקה יחידה של A ולהיפך, לכל חלוקה מתאים יחס שקילות יחיד.

$\exists i(x,y\in A_i)\Leftrightarrow(x,y)\in R$

יחסי סדר

R יחס סדר חלקי אם R רפלקסיבי, אנטיסימטרי, טרנזיטיבי. אם בנוסף R יחס מלא, אז R יחס סדר מלא.

סימונים נוסף ליחס סדר: $x\prec y\leftrightarrow(x,y)\in R$

$x\in A$ נקרא **מינימלי** אם לא קיים $y\in A$, כך ש- $y\prec x$

$x\in A$ נקרא **קטן ביותר** אם לכל $y\in A$ מתקיים $x\prec y$

$x\in A$ נקרא **מקסימלי** אם לא קיים $y\in A$, כך ש- $x\prec y$

$x\in A$ נקרא **גדול ביותר** אם לכל $y\in A$ מתקיים $y\prec x$

טענה: בכל קבוצה סופית בעלת סדר חלקי קיים איבר מינימלי.(אם סדר מלא, אז איבר מינימלי יחיד)

קבוצה בעלת סדר חלקי נקראת **מקיימת תכונת המינימליות**, אם לכל תת קבוצה לא ריקה שלה קיים איבר מינימלי.

עיקרון האינדוקציה:

תהי A קבוצה סדורה המקיימת את תכונת מינימליות, ויהי $x_0\in A$ האיבר מינימלי. יהי $P(x)$ יחס על איברים של A. אם

$\left[\forall x_0P(x_0)\right]\wedge\left[\forall x,y\in A((x\prec y\wedge P(x))\rightarrow P(y))\right]$

אז $\forall x\,P(x)$.

פונקציות

תהינה B, A שתי קבוצות. יחס $f \subseteq A\times B$ נקרא פונקציה, אם 1) $\forall a\in A.\exists b\in B.(a,b)\in f$

2) $\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B\left((a,b_1)\in f\wedge(a,b_2)\in f\to b_1=b_2\right)$

סימון: $f:A\to B$.

סימון ליחס פונקציונלי: $f(a)=b\leftrightarrow(a,b)\in f$

הקבוצה $Image(A)=\{b\in B\mid \exists a\in A(f(a)=b)\}$ נקראת **תמונה** של פונקציה. מתקיים: $Image(A)\subseteq B$.

פונקציה חד-חד ערכית (חח"ע):

$$\left(f(a_1)=f(a_2)\right)\to\left(a_1=a_2\right)$$

פונקציה על: $Image(A)=B$

פונקצית זהות ב - A: $i_A:A\to A$ $\quad \forall a\in A(i_A(a)=a)$

הרכבת פונקציות:

$$f:A\to B,\quad g:B\to C\Rightarrow g\circ f:A\to C$$

$$(g\circ f)(a)=g(f(a))$$

פונקציה $f:A\to B$ נקראת **הפיכה**, אם קיימת פונקציה $g:B\to A$, כך ש- $f\circ g=i_A\wedge g\circ f=i_B$.

פונקציה g נקראת **הפוכה** ל- f, ומסמנים: $f^{-1}=g$.

טענה: פונקציה $f:A\to B$ **הפיכה** $\Leftrightarrow$ f **חח"ע ועל**.

טענה: מספר הפונקציות מקבוצה בת k איברים לקבוצה בת n איברים היא: n^k

עוצמות

הגדרה: אומרים כי לקבוצות B, A יש אותה עוצמה, ומסמנים $|A|=|B|$ אם קיימת פונקציה הפיכה $f:A\to B$.

עבור קבוצה **סופית** A בת n איברים נסמן $|A|=n$.

הגדרה: קבוצה A שוות עוצמה לתת קבוצה של קבוצת המספרים הטבעיים N נקראת **קבוצה בת מניה**.

טענה: אם A קבוצה בת מניה אינסופית, אז $|A|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$

הגדרה: עוצמת קבוצת נקודות הקטע $(0,1)$ נקראת **עוצמת הרצף**.

סימון $\aleph=|\mathbb{R}|=|(0,1)|$. או C

דוגמאות לקבוצות בנות עוצמה בת מניה

-איחוד מספר בן מניה של קבוצות בנות מניה

-קבוצת הסדרות הסופיות של הטבעיים

-קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של הטבעיים

דוגמאות לקבוצות בנות עוצמת הרצף:

-כל קטע פתוח או סגור חסום או לא חסום של מספרים ממשיים

-קבוצת הממשיים R וגם

-קבוצת כל הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים

-קבוצת החזקה של קבוצת המספרים הטבעיים

משפט : אם $A\subseteq C\subseteq B$ ו- $|A|=|B|$, אז $|C|=|A|$.

הגדרה: אומרים כי $|A|\le|B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-B. אם בנוסף $|A|\ne|B|$, אז אומרים כי $|A|<|B|$.

משפט קנטור-שרדר ברנשטיין:

אם $|A|\le|B|$ **וגם** $|B|\le|A|$ **אז** $|A|=|B|$

טענה: $\aleph=2^{\aleph_0}$

משפט קנטור: לכל קבוצה A מתקיים $|A|<|P(A)|=2^{|A|}$.

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{P(n,k)}{k!}$$

חליפות עם חזרות: מספר דרכים ליצור סדרה של k איברים לאו דווקא שונים מקבוצת n איברים שונים הוא n^k.

ג. קומבינטוריקה

חליפות בלי חזרות: מספר דרכים ליצור סדרת k איברים שונים מקבוצת n איברים שונים.

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

תמורות של n איברים: מספר חליפות של n איברים שונים מתוך n איברים שונים.

$$P(n,n)=n!$$

צירופים בלי חזרות: מספר דרכים להרכיב קבוצה (סדר לא משנה) של k איברים מתוך קבוצה בת n איברים.

תמורות עם חזרות: מספר דרכים לסדר k איברים לאו דווקא שונים מתוך n איברים לאו דווקא שונים. אם n_j מספר איברים מסוג j, כאשר $n=n_1+n_2+...+n_m$, אז מספר הדרכים הוא:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot...\cdot n_m!}$$

צירופים עם חזרות:

- מספר הדרכים לבחור k איברים לאו דווקא שונים מקבוצת האיברים של n סוגים שונים
- מספר הפתרונות (טבעיים או אפס) של המשוואה $x_1+x_2+...+x_n=k$
- מספר דרכים לסדר k איברים זהים בין n תאים

$$D(n,k)=\binom{n-1+k}{n-1}=\binom{n-1+k}{k}$$

הבינום של ניוטון:

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ **תכונות** **המקדמים**

הבינומיים: כאשר $n\ge k$

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

עיקרון ההכלה וההדחה:

תהינה $A_1,A_2,...,A_n$ קבוצות סופיות, ותהי U קבוצה אוניברסלית כך ש - $A_k\subseteq U$ $(1\le k\le n)$, אז

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right|=\sum_{k=1}^{n}|A_k|-\sum_{1\le k<j\le n}|A_k\cap A_j|+$$

$$+\sum_{1\le i<k<j\le n}|A_i\cap A_k\cap A_j|+...+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right|$$

או בדרך שקולה

$$\left|\bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right|=|U|-\sum_{k=1}^{n}|A_k|+\sum_{1\le k<j\le n}|A_k\cap A_j|-$$

$$-\sum_{1\le i<k<j\le n}|A_i\cap A_k\cap A_j|+...+(-1)^{n}\left|\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right|$$

$b_n=0$ לכל n הרקורסיה נקראת **הומוגנית**.

עיקרון שובך היונים:

תהי A קבוצה סופית בת n איברים, אז בחלוקת A ל- k מחלקות, קיימת לפחות מחלקה אחת שבה מספר האיברים לא קטן מ - n/k.

שימוש גיאומטרי: אם בקטע באורך l נמצאים מספר קטעים, כך שסכום האורכים שלהם L, אז יש לפחות L/l קטעים בעלי נקודה משותפת. הערה: באופן דומה משתמשים בעיקרון הזה עבור שטחים ונפחים.

נוסחת נסיגה וכלל נסיגה

הגדרה: תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי הכלל

$$a_n=p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2}+...+p_ka_{n-k}+b_n \qquad (*)$$

הכלל (*) נקרא רקורסיה **לא הומוגנית** מסדר k. אם

הגדרה: הפולינום

$$p(x)=x^k-p_1x^{k-1}-p_2x^{k-2}-...-p_{k-1}x-p_k$$

נקרא **פולינום אופייני** של הרקורסיה (*). המשוואה

$$x^k-p_1x^{k-1}-p_2x^{k-2}-...-p_{k-1}x-p_k=0$$

נקראת **משוואה אופיינית** של הרקורסיה (*).

משפט (פתרון רקורסיה הומוגנית): יהיו $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ שורשים של משוואה אופיינית של רקורסיה הומוגנית. אם כל השורשים שונים זה מזה, אז פתרון לרקורסיה הנתונה:

$$a_n=A_1\alpha_1^n+A_2\alpha_2^n+...+A_k\alpha_k^n$$

אם α_j שורש מריבוי s, אז המחובר המתאים לשורש הזה הינו מהצורה: $A_{j1}\alpha_j^n+A_{j2}n\alpha_j^n+...+A_{js}n^{s-1}\alpha_j^n$.

את המקדמים $A_1,A_2,...,A_k$ מוצאים מתנאי התחלה.

פונקציות יוצרות

הגדרה: תהי $\{a_n\}$ סדרת מספרים טבעיים (כולל אפס).

פונקציה יוצרת של הסדרה הזאת היא טור פורמלי $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

משפט: תהינה $A_1,A_2,...,A_r$ תת קבוצות של הטבעיים.

ויהי a_n מספר הפתרונות של המשוואה $u_1+u_2+...+u_r=n$, כאשר $u_k\in A_k$, $1\le k\le r$, אז הפונקציה היוצרת של סדרה $\{a_n\}$ היא

$$A(x)=\sum_{u_1\in A_1}x^{u_1}\cdot\sum_{u_2\in A_2}x^{u_2}\cdot...\cdot\sum_{u_r\in A_r}x^{u_r}.$$

נוסחאות עזר:

- סכום סדרה הנדסית סופית:

$$1+x+...+x^N=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

- סכום סדרה הנדסית אינסופית:

$$1+x+x^2+...=\frac{1}{1-x}$$

- המקדם של x^k בביטוי $(1+x)^n$ הוא: $\binom{n}{k}$
- המקדם של x^k בביטוי: $(1+x+x^2+,,,)^n$ הוא: $D(n,k)$

- בינום שלילי: $\frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}x^n$

ד. גרפים

הגדרה: גרף $G(V,E)$ הוא מבנה המורכב משתי קבוצות:
V קבוצת הקודקודים, ו – $E \subseteq V \times V$ קבוצת הקשתות (צלעות).
כל קשת מתאימה לזוג אחד של קודקודים (קצוות הקשת) לאו דווקא שונים.

- קשתות שונות בעלות אותם קצוות נקראות **קשתות מקבילות**.
- גרף שבו קשתות מקבילות נקרא **מולטיגרף.**
- קשת בעלת קצוות מתלכדים נקראת **לולאה**.
- גרף חסר קשתות מקבילות ולולאות נקרא **גרף פשוט**.
- שני קודקודים נקראים **סמוכים** או **שכנים** אם הם קצוות של קשת מסוימת.
- מספר הקשתות עבורם קודקוד v הינו הקצה שלהן נקרא **דרגת הקודקוד** v ומסומן ב – $\deg(v)$.
- אם $\deg(v)=0$ v נקרא **קודקוד מבודד**.
- משפט לחיצות הידיים:

: לכל גרף $G(V,E)$ מתקיים $\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E|$.

<u>מסלול (u,v) בגרף $G(V,E)$ הוא סדרת הקודקודים והקשתות לסירוגין</u>

- $ue_1w_1e_2w_2e_3...w_{k-1}e_kv$, שמתחילה ב – u, ממשיכה בקשת e_1 לקודקוד סמוך w_1 וכו', ומסתיימת ב – v.
- גרף שבו בין כל שני קודקודים קיים מסלול נקרא **גרף קשיר**.
- מסלול לא טריוויאלי (u,u) נקרא **מעגל**.
- מעגל שאף קודקוד בו לא מופיע פעמיים נקרא **מעגל פשוט**.
- גרף חסר מעגלים נקרא **גרף אציקלי**.

<u>גרפים מיוחדים</u>

1. גרף שלם K_n הוא גרף פשוט בעל n קודקודים כך שבין כל זוג הקודקודים יש קשת. מתקיים $|E| = n(n-1)/2$.

2. גרף k-רגולרי מקיים : $\deg(V_i) = k$ לכל קודקוד.

3. גרף אוילר הינו גרף כך שקיים בו <u>מעגל</u> שעובר על כל קשת הגרף בדיוק פעם אחת. המעגל הזה נקרא **מעגל אוילר**.

משפט: גרף $G(V,E)$ הוא גרף אוילר אם ורק אם הוא קשיר ודרגת כל קודקוד בגרף הינה זוגית.

4. גרף חצי אוילר הוא גרף שקיים בו <u>מסלול</u> העובר דרך כל קשת בגרף בדיוק פעם אחת. המסלול הזה נקרא **מסלול אוילר**.

משפט: גרף $G(V,E)$ הוא גרף חצי אוילר אם ורק אם הוא קשיר וקיימים בדיוק שני קודקודים בעלי דרגה אי זוגית. (שני קודקודים האלה הינם ההתחלה והסוף של המסלול.)

5. גרף המילטון הינו גרף בעל מעגל שעובר כל קודקוד בגרף בדיוק פעם אחת.

משפט: יהי $G(V,E)$, $|V| \geq 3$ גרף. אם לכל קודקוד $v \in V$ מתקיים $\deg(v) \geq |V|/2$, אז הגרף הינו גרף המילטון.

6. עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים.

טענה: אם גרף $G(V,E)$ הוא עץ, אז $|E| = |V| - 1$.

טענה: גרף קשיר בעל תכונה $|E| = |V| - 1$ הינו עץ.

טענה: גרף אציקלי בעל תכונה $|E| = |V| - 1$ הינו עץ.