המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב
אפקה

שם הקורס: חשבון דיפרנציאלי אינטגרלי1

קוד הקורס: 90901

הוראות לנבחן:
- חומר עזר שימושי לבחינה:
3 דפי נוסחאות לכל הסטודנטים.
הרחבת דף נוסחאות למבחן בחדו"א 1 רק לזכאים.
- אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
- אין להפריד את דפי שאלון הבחינה
- אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

מס׳ נבחן

שנה: תשפ"ג

סמסטר: א׳

תאריך ושעת הבחינה:
מועד א 26/01/23 09:00

משך הבחינה: 180 דקות

מרצי הקורס:
פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד"ר שלוסברג מנחם, ד"ר גבל מיקה, ד"ר רוזנצויג ליאור, ד"ר איילי נחשון, ד"ר אמיר ענת, ד"ר סגל אלכסנדר, ד"ר אולבסקי ויקטור, ד"ר ראיצ׳יק אירינה, ד"ר לייטנר אריאלה מירה, ד"ר בר לוקיאנוב ולדימיר, ד"ר מגנזיק אבלין, ד"ר מכורה מיכאל מרצין

*** שאלון הבחינה ייבדק על ידי המרצה ***

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:
יש לפתור 5 שאלות מתוך 6 השאלות שמספרן 1-6 . שווי כל שאלה 20 נקודות.
בקובץ התשובות שישלח לבדיקה הפתרונות חייבים להופיע לפי סדר העולה של מספר השאלות !
יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל סעיף בדף חדש ורק במקום המיועד לכך.
**** תשובות שיכתבו במקום אחר לא יבדקו ****
השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך.
יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.
****יש לתלוש רק את הדף האחרון (דף השאלות המרוכז). הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק****

בהצלחה!

<u>שאלה 1</u> **(20 נקודות)** **<u>אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳</u>**

א. **(10 נק׳)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+n-1}}{\sqrt{16n^6+2}}+\ldots+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}\right)$.

נמקו !

ב. **(10 נק׳)** חשבו את השטח הכלוא בין העקומות הבאות: גרף הפונקציה $f(x)=1+3x-x^3$,

הישרים $x=0$ ו- $x=4$ ומשיק לגרף הפונקציה f בנקודת *המקסימום המקומי* שלה. נמקו !

<u>פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$. נמקו !

ב. (10 נק') תהיה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה ברציפות (כלומר הנגזרת הראשונה $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה ב- $\mathbf{R}$). ידוע כי קו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $a=-1$ מאונך לקו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $b=8$, ושני הישרים הנ"ל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה c כך ש- $f'(c)=0$ (כלומר נגזרת הפונקציה f מתאפסת לפחות פעם אחת ב- $\mathbf{R}$). נמקו !
הערה: ידוע ששני ישרים $L_1: y=m_1x+n_1; L_2: y=m_2x+n_2$ מאונכים אם ורק אם $m_1m_2=-1$.

פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

א. (10 נק׳) יהיה $a \in \mathbf{R}$. נתונה פונקציה $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ על ידי $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{x-3}, & x \neq 3 \\ a, & x = 3 \end{cases}$.

מצאו מספר $a \in \mathbf{R}$ כך ש- f פונקציה הפיכה ומצאו את פונקציית ההופכית f^{-1}. נמקו !

ב. (10 נק׳) הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים: $x^2 - 1 \geq 2\ln x$. נמקו!

פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>

א. (10 נק') 1. מצאו את פולינום Maclaurin מסדר $n=3$ של $f(x)=(1+8x)^{1/2}$.

2. הוכיחו ש- $\sqrt{1+8x}-(1+4x-8x^2+32x^3)\le 0$, לכל $x>-\frac{1}{8}$. נמקו !

ב. (10 נק') חשבו את הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)+x-1-\int_0^x e^{3t^2}dt}{x^2}$. נמקו !

<u>פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>

א. (10 נק') מצאו את $\int \sin\left(\sqrt{x+5}\right)dx$. נמקו !

ב. (10 נק') האם הקו $x=0$ מהווה אסימפטוטה אנכית של $f(x)=(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$? נמקו !

<u>פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

א. (10 נק׳) נגדיר פונקציה רציפה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}10x-1 & ,x\ge 1\\ 13-4x & ,x<1\end{cases}$.

מצאו פונקציה $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך ש- F פונקציה גזירה ב- $\mathbf{R}$, $F(0)=0$ ו- $F'(x)=f(x)$, לכל $x\in\mathbf{R}$.
נמקו !

ב. (10 נק׳) נתונה פונקציה $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ מוגדרת בקטע $I=(0,\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x>0\}$.

1. הוכיחו שהפונקציה f בעלת נקודות מקסימום מוחלט בקטע I, אבל אין לפונקציה f נקודות מינימום מוחלט בקטע I . האם הטענה האחרונה סותרת את משפט Weierstrass ?

2. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ בקטע $e^{-1/2}\le x\le e^{3}$.
נמקו !

פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

סוף הפתרון !

אין לכתוב בעמוד זה

המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב אפקה

בחינות – היחידה למתמטיקה

מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X1

שאלה 1 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) חשבון את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+(n-1)}}{\sqrt{16n^6+2}}+\ldots+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}\right)$.

נמקו !

ב. (10 נק׳) חשבון את השטח הכלוא בין העקומות הבאות : גרף הפונקציה $f(x)=1+3x-x^3$, הישרים $x=0$ ו- $x=4$ ומשיק לגרף הפונקציה f בנקודת *המקסימום המקומי* שלה. נמקו !

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) חשבון את הגבול $\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$. נמקו !

ב. (10 נק׳) תהיה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה ברציפות (כלומר הנגזרת הראשונה $f':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה ב- $\mathbf{R}$). ידוע כי קו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $a=-1$ מאונך לקו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $b=8$, ושני הישרים הנ״ל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה c כך ש- $f'(c)=0$ (כלומר נגזרת הפונקציה f מתאפסת לפחות פעם אחת ב- $\mathbf{R}$). נמקו !

<u>הערה</u>: ידוע ששני ישרים $L_1: y=m_1x+n_1; L_2: y=m_2x+n_2$ מאונכים אם ורק אם $m_1m_2=-1$.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) יהיה $a\in\mathbf{R}$. נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $y=f(x)=\begin{cases}\frac{-x+1}{x-3}, & x\neq 3\\ a, & x=3\end{cases}$.

מצאו מספר $a\in\mathbf{R}$ כך ש- f פונקציה הפיכה ומצאו את פונקצית ההופכית f^{-1} . נמקו !

ב. (10 נק׳) הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים : $x^2-1\geq 2\ln x$. נמקו!

שאלה 4 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) 1. מצאו את פולינום Maclaurin מסדר $n=3$ של $f(x)=(1+8x)^{1/2}$.

2. הוכיחו ש- $\sqrt{1+8x}-\left(1+4x-8x^2+32x^3\right)\leq 0$, לכל $x>-\frac{1}{8}$. נמקו !

ב. (10 נק׳) חשבון את הגבול: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)+x-1-\int_0^x e^{3t^2}dt}{x^2}$. נמקו !

שאלה 5 (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו את $\int \sin\left(\sqrt{x+5}\right)dx$. נמקו !

ב. (10 נק') האם הקו $x=0$ מהווה אסימפטוטה אנכית של $f(x)=(2-\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$? נמקו !

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (10 נק') נגדיר פונקציה רציפה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}10x-1 & ,x\ge 1\\ 13-4x & ,x<1\end{cases}$.

מצאו פונקציה $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך ש- F פונקציה גזירה ב- $\mathbf{R}$, $F(0)=0$ ו- $F'(x)=f(x)$, לכל $x\in\mathbf{R}$.
נמקו !

ב. (10 נק') נתונה פונקציה $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ מוגדרת בקטע $I=(0,\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>0\}$.

1. הוכיחו שהפונקציה f בעלת נקודות מקסימום מוחלט בקטע I, אבל אין לפונקציה f נקודות מינימום מוחלט בקטע I. האם הטענה האחרונה סותרת את משפט Weierstrass ?

2. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ בקטע $e^{-1/2}\le x\le e^{3}$.
נמקו !

בהצלחה !

יש לתלוש את הדף הזה !
הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק !

המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב
אפקה

שם הקורס: חשבון דיפרנציאלי אינטגרלי1

קוד הקורס: 90901

מס׳ נבחן

הוראות לנבחן:

- חומר עזר שימושי לבחינה:
3 דפי נוסחאות לכל הסטודנטים.
הרחבת דף נוסחאות למבחן בחדו״א 1 רק לזכאים.
- אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
- אין להפריד את דפי שאלון הבחינה
- אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

שנה: תשפ״ג

סמסטר: א׳

תאריך ושעת הבחינה:
מועד א 26/01/23 09:00

משך הבחינה: 180 דקות

מרצי הקורס:

פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד״ר שלוסברג מנחם, ד״ר גבל מיקה, ד״ר רוזנצויג ליאור, ד״ר איילי נחשון, ד״ר אמיר ענת, ד״ר סגל אלכסנדר, ד״ר אולבסקי ויקטור, ד״ר ראיצ׳יק אירינה, ד״ר לייטנר אריאלה מירה, ד״ר בר לוקיאנוב ולדימיר, ד״ר מגנזיק אבלין, ד״ר מכורה מיכאל מרצין

*** שאלון הבחינה ייבדק על ידי המרצה ***

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור 5 שאלות מתוך 6 השאלות שמספרן 1-6 . שווי כל שאלה 20 נקודות.
בקובץ התשובות שישלח לבדיקה הפתרונות חייבים להופיע לפי סדר העולה של מספר השאלות !
יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל סעיף בדף חדש ורק במקום המיועד לכך.
**** תשובות שיכתבו במקום אחר לא יבדקו ****
השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך.
יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.
****יש לתלוש רק את הדף האחרון (דף השאלות המרוכז). הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק****

בהצלחה!

<u>שאלה 1</u> **(20 נקודות)** **<u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>**

א. (10 נק') חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+1+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}+\frac{\sqrt{n^4+2+\cos n}}{\sqrt{4n^6+\ n-1}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^4+n+\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}\right)$.

נמקו !

ב. (10 נק') חשבו את השטח הכלוא בין העקומות הבאות: גרף הפונקציה $g(x)=2-x^3+3x$, הישרים $x=0$ ו- $x=5$ ומשיק לגרף הפונקציה g בנקודת *המקסימום המקומי* שלה. נמקו !

<u>פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$. נמקו !

ב. (10 נק') תהיה $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה ברציפות (כלומר הנגזרת הראשונה $g':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה ב- $\mathbf{R}$). ידוע כי קו המשיק לגרף הפונקציה g בנקודה $u=-7$ מאונך לקו המשיק לגרף הפונקציה g בנקודה $v=2$, ושני הישרים הנ"ל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה c כך ש- $g'(c)=0$ (כלומר נגזרת הפונקציה g מתאפסת לפחות פעם אחת ב- $\mathbf{R}$). נמקו !

<u>הערה</u>: ידוע ששני ישרים $L_1: y=m_1x+n_1; L_2: y=m_2x+n_2$ מאונכים אם ורק אם $m_1m_2=-1$.

<u>פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>שאלה 3</u> (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳</u>

א. (10 נק׳) יהיה $m\in\mathbf{R}$. נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{-x+1}, & x\neq 1\\ m, & x=1\end{cases}$.

מצאו מספר $m\in\mathbf{R}$ כך ש- f פונקציה הפיכה ומצאו את פונקצית ההופכית f^{-1}. נמקו!

ב. (10 נק׳) הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים: $4x^2\geq 1+2\ln(2x)$. נמקו!

<u>פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') **1**. מצאו את פולינום Maclaurin מסדר $n=3$ של $f(x)=(1+4x)^{1/2}$.

2. הוכיחו ש- $\sqrt{1+4x}-(1+2x-2x^2+4x^3)\le 0$, לכל $x>-\frac{1}{4}$. נמקו !

ב. (10 נק') חשבו את הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-x-1+\int_0^x e^{2t^2}dt}{x^2}$. נמקו !

פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

<u>המשך פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א׳ ו- ב׳

א. (10 נק׳) מצאו את $\int \cos\left(\sqrt{2x-8}\right)dx$. נמקו !

ב. (10 נק׳) האם הקו $x=0$ מהווה אסימפטוטה אנכית של $f(x)=\left[3-2\cos x\right]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$? נמקו !

פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

שאלה 6 (20 נקודות) **אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') נגדיר פונקציה רציפה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}8x+1 & ,x\ge 2\\ 21-2x & ,x<2\end{cases}$.

מצאו פונקציה $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך ש- F פונקציה גזירה ב- $\mathbf{R}$, $F(0)=0$ ו- $F'(x)=f(x)$, לכל $x\in\mathbf{R}$.
נמקו !

ב. (10 נק') נתונה פונקציה $f(x)=1+\dfrac{\ln x}{x}+x^{-1}$ מוגדרת בקטע $I=(0,\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>0\}$.

1. הוכיחו שהפונקציה f בעלת נקודות מקסימום מוחלט בקטע I, אבל אין לפונקציה f נקודות מינימום מוחלט בקטע I . האם הטענה האחרונה סותרת את משפט Weierstrass ?

2. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=1+\dfrac{\ln x}{x}+x^{-1}$ בקטע $e^{-2}\le x\le e^{2}$. נמקו !

פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

<u>המשך פתרון 6</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

סוף הפתרון !

אין לכתוב בעמוד זה

המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב אפקה

בחינות – היחידה למתמטיקה

מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X2

שאלה 1 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) חשבון את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+1+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}+\frac{\sqrt{n^4+2+\cos n}}{\sqrt{4n^6+(n-1)}}+\dots+\frac{\sqrt{n^4+n+\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}\right)$.
נמקו !

ב. (10 נק׳) חשבון את השטח הכלוא בין העקומות הבאות: גרף הפונקציה $g(x)=2-x^3+3x$, הישרים $x=0$ ו- $x=5$ ומשיק לגרף הפונקציה g בנקודת *המקסימום המקומי* שלה. נמקו !

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) חשבון את הגבול $\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}$. נמקו !

ב. (10 נק׳) תהיה $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה ברציפות (כלומר הנגזרת הראשונה $g':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה ב- $\mathbf{R}$). ידוע כי קו המשיק לגרף הפונקציה g בנקודה $u=-7$ מאונך לקו המשיק לגרף הפונקציה g בנקודה $v=2$, ושני הישרים הנ״ל אינם מקבילים לצירים. הוכיחו כי קיימת נקודה c כך ש- $g'(c)=0$ (כלומר נגזרת הפונקציה g מתאפסת לפחות פעם אחת ב- $\mathbf{R}$). נמקו !
הערה: ידוע ששני ישרים $L_1: y=m_1x+n_1; L_2: y=m_2x+n_2$ מאונכים אם ורק אם $m_1m_2=-1$.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) יהיה $m\in\mathbf{R}$. נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $y=f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{-x+1}, & x\neq 1\\ m, & x=1\end{cases}$.
מצאו מספר $m\in\mathbf{R}$ כך ש- f פונקציה הפיכה ומצאו את פונקצית ההופכית f^{-1}. נמקו !

ב. (10 נק׳) הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים: $4x^2\geq 1+2\ln(2x)$. נמקו!

שאלה 4 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) **1**. מצאו את פולינום Maclaurin מסדר $n=3$ של $f(x)=(1+4x)^{1/2}$.
2. הוכיחו ש- $\sqrt{1+4x}-\left(1+2x-2x^2+4x^3\right)\leq 0$, לכל $x>-\frac{1}{4}$. נמקו !

ב. (10 נק׳) חשבון את הגבול: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-x-1+\int_0^x e^{2t^2}dt}{x^2}$. נמקו !

שאלה 5 (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו את $\int \cos\left(\sqrt{2x-8}\right)dx$. נמקו !

ב. (10 נק') האם הקו $x=0$ מהווה אסימפטוטה אנכית של $f(x)=\left[3-2\cos x\right]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$? נמקו !

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (10 נק') נגדיר פונקציה רציפה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}8x+1 & ,x\ge 2\\ 21-2x & ,x<2\end{cases}$.

מצאו פונקציה $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך ש- F פונקציה גזירה ב- $\mathbf{R}$, $F(0)=0$ ו- $F'(x)=f(x)$, לכל $x\in\mathbf{R}$.
נמקו !

ב. (10 נק') נתונה פונקציה $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}+x^{-1}$ מוגדרת בקטע $I=(0,\infty)=\{x\in\mathbf{R}:x>0\}$.

1. הוכיחו שהפונקציה f בעלת נקודות מקסימום מוחלט בקטע I, אבל אין לפונקציה f נקודות מינימום מוחלט בקטע I. האם הטענה האחרונה סותרת את משפט Weierstrass ?

2. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}+x^{-1}$ בקטע $e^{-2}\le x\le e^{2}$. נמקו !

בהצלחה !

יש לתלוש את הדף הזה !
הדף זה לא ייבדק ולא ייסרק !

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X1

פתרון 1.א.

תהי $a_n=\left(\frac{7n^2+\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+(n-1)}}{\sqrt{16n^6+2}}+\ldots+\frac{7n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}\right)$ (סכום של n מחוברים).

לכל $1\le k\le n$ מתקיים:
$$\begin{Bmatrix} 7n^2+\sqrt{n^4+1}\le 7n^2+\sqrt{n^4+k}\le 7n^2+\sqrt{n^4+n} \\ \frac{1}{\sqrt{16n^6+n}}\le\frac{1}{\sqrt{16n^6+k}}\le\frac{1}{\sqrt{16n^6+1}}\end{Bmatrix}$$

נשתמש בכלל הסנדוויץ':
$$n\cdot\left[\frac{7n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}\right]\le a_n\le n\cdot\left[\frac{7n^2+\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}\right]$$

גבולות החסמים הם:
$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{7n^2+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3+n\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{16n^6+n}}\underset{[:n^3]}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{7+\sqrt{1+(1/n^4)}}{\sqrt{16+(1/n^5)}}=\frac{8}{4}=2$$
$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{7n^2+\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3+n\sqrt{n^4+n}}{\sqrt{16n^6+1}}\underset{[:n^3]}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{7+\sqrt{1+(1/n^3)}}{\sqrt{16+(1/n^6)}}=\frac{8}{4}=2$$

ולכן, לפי כלל הסנדוויץ', גם הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

פתרון 1.ב.

נתונה $f(x)=1+3x-x^3$. ברור שהנגזרת של f אי-שלילית $f'(x)=3-3x^2\ge 0$ אם ורק אם $-1\le x\le 1$.

לכן f עולה בקטע $[0,1]$ ו- f יורדת בקטע $[1,\infty)$. בנוסף, $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(4)=-51$.

לכן, מתקיים: $\underline{f(x)\le f(1)=3=Max(f)}$ (***), לכל x ששייך לקטע הקומפקטי $[0,4]$.

שיפוע המשיק בנקודה $x=1$ שווה ל- $f'(1)=0$. לכן, $\underline{y=3}$ היא משוואת המשיק בנקודת המקסימום $x=1$.

אי-שיוויון (***) אומר שהקו המשיק $y=3$ נמצא <u>מעל גרף הפונקציה</u> f בקטע $[0,4]$.

מסיקים שהתחום הנתון שווה ל- $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0\le x\le 4,\ 1+3x-x^3\le y\le 3\}$.

משפט Newton-Leibniz גורר שהשטח של D שווה ל-

$$S=Area(D)=\int_0^4\left[3-\left(1+3x-x^3\right)\right]dx=\int_0^4\left(2-3x+x^3\right)dx=\left[2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_0^4=8-24+64=48.$$

פתרון 2.א.

אפשר (אבל לא מומלץ) לפתור לפי כלל L'Hôpital :

$$L=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0+}\frac{(1/2)x^{-0.5}+2\cdot(1/4)x^{-0.75}}{(1/4)(\sin x)^{-0.75}\underbrace{\cos x}_{\to1}}=\lim_{x\to0+}\frac{2x^{-0.5}}{(\sin x)^{-0.75}}+\frac{2x^{-0.75}}{(\sin x)^{-0.75}}$$

$$=2\lim_{x\to0+}\left(\frac{(\sin x)^{0.75}}{x^{0.5}}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.75}\right)=2\lim_{x\to0+}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.5}(\sin x)^{0.25}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.75}\right)=2\left(1^{0.5}\cdot0+1^{0.75}\right)=2$$

<u>פתרון יותר פשוט</u>

נחלק את המונה והמכנה ב- $\sqrt[4]{x}$ ונקבל :

$$L=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=[:\sqrt[4]{x}]=\lim_{x\to0+}\frac{x^{\frac14}+2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac14}}=\frac{\lim\limits_{x\to0+}\left(x^{\frac14}+2\right)}{\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac14}}=\frac{2}{1}=2$$

<u>**או**</u> ניתן לפתור את השאלה ישירות לפי הגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$:

$$L=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}+\lim_{x\to0+}\frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}}+2\lim_{x\to0+}\sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}}=0\cdot1+2=2\ .$$

פתרון 2.ב.

נפתור בעזרת <u>משפט ערך הביניים</u> של Cauchy.

נסמן ב- $m_1=f'(-1)$ את שיפוע המשיק בנקודה $a=-1$. לפי הנתון $m_1\neq0$.

נסמן ב- $m_2=f'(8)$ את שיפוע המשיק בנקודה $b=8$. לפי הנתון $m_2\neq0$.

התנאי "*קו המשיק בנקודה* $a=-1$ *<u>מאונך</u> לקו המשיק בנקודה* $b=8$" שקול ל- $\underline{m_1\cdot m_2=-1}$,

ז"א $m_1\cdot m_2=f'(-1)f'(8)=-1<0$.

הפונקציה f' רציפה בקטע $[a,b]=[-1,8]$ והמכפלה $f'(-1)f'(8)<0$ שלילית.

לכן, משפט ערך הביניים של Cauchy גורר שקיים $c\in[-1,8]$ כך ש- $f'(c)=0$, מ.ש.ל.

<u>פתרון 3.א.</u>

יהי $y \neq -1$. נפתור את המשוואה $y = f(x) = \dfrac{-x+1}{x-3}$, כאשר $y \neq -1$ נתון ו- x הנעלם.

זה שקול ל- $yx - 3y = -x + 1$ ולכן יש פתרון <u>יחיד</u> $x = \dfrac{1+3y}{y+1}$. ברור שהפתרון $x = \dfrac{1+3y}{y+1} \neq 3$ (נמקו !)

<u>הערה</u>: אם $a \neq -1$, אז f <u>לא חח״ע</u> (כי $f(3) = a = f\left(\dfrac{1+3a}{a+1}\right)$, ז״א f מקבלת את הערך a פעמיים,

עבור שתי נקודות שונות $x_1 = \dfrac{1+3a}{a+1} \neq 3 = x_2$). לכן $a = -1$ <u>תנאי הכרחי</u> לכך ש- f הפיכה.

נניח ש- $a = -1$. במצב הזה $f(3) = -1$ וההופכית f^{-1} שווה ל-

$$f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{1+3y}{y+1}, & y \neq -1 \\ 3, & y = -1 \end{cases} .$$

<u>פתרון 3.ב.</u>

<u>פתרון ראשון</u> : מספיק להראות שפונקצית העזר $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \geq 0$ אי-שלילית, לכל $x > 0$.

נחקור את <u>נקודות הקיצון</u> של g בעזרת <u>תחומי עליה / ירידה</u> (לא ניתן להשתמש במשפט Weierstrass).

g פונקציה מוגדרת רציפה וגזירה עבור כל $x > 0$. ברור ש- $g'(x) = 2x - (2/x) = 2(x^2-1)(1/x)$.

x	$0 < x \leq 1$	$1 \leq x < \infty$
סימן הנגזרת הראשונה $g'(x)$	| ---------- 0	0 ++++++
תחומי מונוטוניות $g(x)$	| ↘	↗

המינימום המוחלט של g מתקבל בנקודה $x = 1$. לכן עבור כל $x > 0$ מתקיים:

$g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x \geq g(1) = 0$. מסקנה: $x^2 \geq 1 + 2\ln x$ לכל $x > 0$.

<u>פתרון שני</u> : מספיק להראות ש: (***) $x^2 - 1 - 2\ln x \geq 0$ לכל $x > 0$. <u>נפעיל את משפט Lagrange</u> עבור הפונקציה $f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$, בקטע $[a,b] = [1,x]$ אם $x > 1$ <u>או</u> בקטע $[a,b] = [x,1]$ אם $0 < x < 1$.

(נמקו למה תנאי משפט Lagrange מתקיימים!) ברור ש- $f(1) = 0$; לכן אי-שיוויון (***) תקף עבור $x = 1$.

(I) יהי $x > 1$. בוחרים קטע $[a,b] = [1,x]$. משפט Lagrange גורר שקיים c בין 1 ל- x כך ש-

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^2 - 1 - 2\ln x}{x-1} = [Lagrange] = f'(c) = 2c - \frac{2}{c} = 2\frac{c^2-1}{c} \geq 0 .$$

אי-שיוויון הנ״ל גורר שהמונה $x^2 - 1 - 2\ln x \geq 0$ לכל $x > 1$, מ.ש.ל.

(II) יהי $0 < x < 1$. בוחרים קטע $[a,b] = [x,1]$. משפט Lagrange גורר שקיים c בין x ל- 1 כך ש-

$$\frac{f(1) - f(x)}{1-x} = \frac{-(x^2 - 1 - 2\ln x)}{1-x} = [Lagrange] = f'(c) = 2c - \frac{2}{c} = 2\frac{c^2-1}{c} \leq 0 .$$

אי-שיוויון הנ״ל גורר שהמונה $-(x^2 - 1 - 2\ln x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2\ln x \geq 0$, לכל $0 < x < 1$, מ.ש.ל.

<u>פתרון שלישי</u> : נפתור בעזרת <u>קעירות</u> הפונקציה $F(t) = \ln t$ בקטע $t > 0$. המשיק לגרף הפונקציה F בנקודה $t_0 = 1$ נתון על ידי המשוואה $L : y = t - 1$. צריכים להוכיח ש: $\underline{x^2 - 1 \geq 2\ln x = \ln(x^2)}$, לכל $x > 0$.

אי-שיוויון זה **<u>שקול</u>** ל: $\underline{t - 1 \geq \ln t}$, לכל $t > 0$ (השקילות ברורה בגלל שינוי המשתנים $t = x^2$).

המשיק L נמצא מעל גרף הפונקציה F , ולכן $t - 1 \geq \ln t$, לכל $t > 0$, מ.ש.ל.

פתרון 4.א.

1. נראה כי $T_3(x)=1+4x-8x^2+32x^3$ הינו פולינום טיילור-מקלורן עבור פונקציה $f(x)=\sqrt{1+8x}$.

נחשב את המקדמים של פולינום טיילור-מקלורן (Taylor-Maclaurin):

$$\begin{cases} f(0)=1, \quad f'(x)=\dfrac{8}{2\sqrt{1+8x}}=4(1+8x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0)=4 \\ f''(x)=4\cdot\dfrac{-1}{2}\cdot(1+8x)^{-3/2}\cdot 8=-16(1+8x)^{-3/2} \quad \Rightarrow f''(0)=-16 \\ f'''(x)=(-16)\cdot\dfrac{-3}{2}\cdot(1+8x)^{-5/2}\cdot 8=64\cdot 3(1+8x)^{-5/2} \quad \Rightarrow f'''(0)=64\cdot 3 \end{cases}$$

נקבל $T_3(x)=1+\dfrac{4}{1}x-\dfrac{16}{2}x^2+\dfrac{64\cdot 3}{6}x^3=1+4x-8x^2+32x^3$.

2. נוכיח ש- $\sqrt{1+8x}-\left(1+4x-8x^2+32x^3\right)\le 0$, לכל $x>-\dfrac{1}{8}$.

לפי סעיף (1) מקבלים שההפרש הנ"ל שווה ל-

$$\sqrt{1+8x}-\left(1+4x-8x^2+32x^3\right)=f(x)-T_3(x)=R_3(x).$$

נשאר להראות שהשארית מסדר $n=3$ אי-שלילי : $R_3(x)\le 0$, לכל $x>-\dfrac{1}{8}$.

$f^{(4)}(x)=\dfrac{-5}{2}\cdot\dfrac{64\cdot 3}{(1+8x)^{7/2}}\cdot 8=\dfrac{-15\cdot 256}{(1+8x)^{7/2}}$ ולכן משפט השארית בצורה של Lagrange גורר ש-

$R_3(x)=\dfrac{-15\cdot 256}{4!\cdot(1+8c)^{7/2}}\cdot x^4$, כאשר c בין 0 ל x . נתון ש- $x>-\dfrac{1}{8}$ ולכן $c>-\dfrac{1}{8}$.

<u>מסקנה</u>: $R_3(x)\le 0$, לכל $x>-\dfrac{1}{8}$, מ.ש.ל.

פתרון 4.ב.

הפונקציה $f(t)=e^{3t^2}$ רציפה ב- $\mathbf{R}$. לפי משפט היסודי של Newton-Leibniz , הפונקציה

$F(x)=\int_0^x e^{3t^2}dt$ גזירה ב- $\mathbf{R}$ ו- $F'(x)=e^{3x^2}$. F גם רציפה ב- $\mathbf{R}$ ומתקיים :

$\lim_{x\to 0}F(x)=F(0)=\int_0^0 e^{3t^2}dt=0$. לכן, לפי כלל L'Hôpital במצב לא מוגדר מסוג $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ מסיקים ש-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+x-1-\int_0^x e^{3t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{-2\sin 2x+1-e^{3x^2}}^{\nearrow 0}}{\boxed{2x}_{\searrow 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{-4\cos 2x-e^{3x^2}6x}^{\nearrow -2}}{\boxed{2}_{\searrow 2}}=-2$$

פתרון 5.א.

נבצע שינוי משתנים :

$$\int \sin\left(\sqrt{x+5}\right)dx = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x+5} \\ dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}dx=\dfrac{1}{2t}dx \\ dx=2tdt \end{array}\right] = 2\int \sin(t)\cdot tdt \quad =$$

$$= 2\int \left(-\cos(t)\right)'\cdot t\ dt = \left[\begin{array}{cc} f(t)=-\cos t & f'(t)=\sin t \\ g(t)=t & g'(t)=1 \end{array}\right]$$

$$= 2\left(\left(-t\cos t\right)-\int(-\cos t)\cdot 1dt\right) = 2\left(-t\cos t\right)+2\sin t + c =$$

$$= 2\left(-\sqrt{x+5}\right)\cos\left(\sqrt{x+5}\right)+2\sin\left(\sqrt{x+5}\right)+c$$

פתרון 5.ב.

הקו $x=0$ <u>לא מהווה אסימפטוטה אנכית</u> של $y=f(x)$ כי הגבול הבא סופי :

$$L=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[2-\cos x\right]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+(1-\cos x)\right]^{\frac{1}{1-\cos x}\times\frac{1-\cos x}{\sin x}} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left[1+(1-\cos x)\right]^{\frac{1}{1-\cos x}}\right)^{\frac{1-\cos x}{\sin x}} = \left[t=\left(1-\cos x\right)\to 0\right] = (***)$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}} \underset{L'HOPITAL}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}} = e^0 = 1$$

בשלב (***) השתמשנו בגבול מסוג $\left[1^\infty\right]$ Euler עבור הביטוי :

$$.\lim_{x\to 0}\left(\left[1+(\underbrace{1-\cos x}_{t})\right]^{\frac{1}{1-\cos x}}\right) = \lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{1/t} = e$$

<u>פתרון 6.א.</u>

<u>פתרון ראשון</u>: הנתון $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbf{R}$ שקול ל- $F'(x)=\begin{cases}10x-1 & ,x\ge 1\\ 13-4x & ,x<1\end{cases}$, לכל $x\in\mathbf{R}$.

מסיקים שקיימים שני מספרים ממשים C_1 ו- C_2 כך ש-

$F(x)=\begin{cases}5x^2-x+C_1 & ,x>1\\ 13x-2x^2+C_2 & ,x<1\end{cases}$. הנתון $F(0)=0$ גורר ש- $C_2=0$, ז״א

$F(x)=\begin{cases}5x^2-x+C_1 & ,x>1\\ 13x-2x^2 & ,x<1\end{cases}$. הפונקציה F גזירה ב- $\mathbf{R}$ ולכן הפונקציה F רציפה ב- $\mathbf{R}$.

בפרט, מסיקים ש- $\lim\limits_{x\to 1-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1+}F(x)=F(1)$, ז״א $F(1)=4+C_1=11$. לכן $C_1=7$:

$F(x)=\begin{cases}5x^2-x+7 & ,x\ge 1\\ 13x-2x^2 & ,x\le 1\end{cases}$.

קל לבדוק שהפתרון שמצאנו מהווה פונקציה גזירה ב- $\mathbf{R}$ וכל הדרישות השאלה מתקיימות (נמקו !).

<u>פתרון שני</u>: לפי משפט Newton-Leibniz הפונקציה הקדומה של f שמתאפסת עבור $x=0$ שווה ל-

$\begin{cases}5x^2-x+7 & ,x\ge 1\\ 13x-2x^2 & ,x\le 1\end{cases}=(***)=\int\limits_0^x f(t)dt=F(x)$. נמקו את החישוב (***)!

<u>פתרון 6.ב.</u>

1. נחקור <u>את נקודות הקיצון</u> של f בקטע I בעזרת <u>תחומי עליה / ירידה</u> (לא ניתן להשתמש במשפט Weierstrass). ברור ש- $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ גורר ש- $f'(x)=\dfrac{(1/x)x-(1+\ln x)\cdot 1}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{x^2}$. לכן:

<u>א</u>. אם $0<x\le 1$ אז $f'(x)\ge 0$ ולכן הפונקציה f <u>עולה</u> בקטע $0<x\le 1$.

<u>ב</u>. אם $x\ge 1$ אז $f'(x)\le 0$ ולכן הפונקציה f <u>יורדת</u> בקטע $x\ge 1$.

מסיקים ש- $x=1$ מהווה <u>מקסימום מוחלט</u> של f בתחום $(0,\infty)$ ולכן $f(x)\le f(1)=1$, לכל x בתחום ההגדרה $x>0$. הנגזרת $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ מתאפסת <u>רק</u> עבור $x=1$ ולכן משפט Fermat גורר שלא קיימות נקודות קיצון נוספות חוץ מנקודת המקסימום המוחלט שכבר מצאנו. זה <u>לא סותר</u> את משפט Weierstrass מפני שהקטע $I=(0,\infty)$ לא קטע סגור וחסום.

2. בקטע סגור וחסום $J=\left[e^{-1/2},e^3\right]$ הפונקציה הרציפה f בעלת נקודות קיצון מוחלט (לפי משפט Weierstrass); בקטע $\left[e^{-1/2},1\right]$ הפונקציה f <u>עולה</u> ובקטע $\left[1,e^3\right]$ הפונקציה f <u>יורדת</u>. נחשב את הערכים של f בקצוות: ברור ש- $f(1)=1<\dfrac{\sqrt{e}}{2}=\dfrac{1+\ln e^{-1/2}}{e^{-1/2}}=f(e^{-1/2})<\dfrac{4}{e^3}=\dfrac{1+\ln e^3}{e^3}=f(e^3)$. לכן:

א. <u>הערך המקסימלי</u> של הפונקציה f בקטע J שווה ל- $M=f(1)=1$.

ב. <u>הערך המינימלי</u> של הפונקציה f בקטע J שווה ל- $m=f(e^3)=\dfrac{4}{e^3}$.

בהצלחה!

בחינות – היחידה למתמטיקה

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X2

פתרון 1.א.

תהי $a_n=\left(\frac{\sqrt{n^4+1+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}+\frac{\sqrt{n^4+2+\cos n}}{\sqrt{4n^6+(n-1)}}+\ldots+\frac{\sqrt{n^4+n+\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}\right)$ (סכום של n מחוברים).

לכל $1\le k\le n$ מתקיים:

$$\begin{cases}\sqrt{n^4+1+\cos n}\le\sqrt{n^4+k+\cos n}\le\sqrt{n^4+n+\cos n}\\ \frac{1}{\sqrt{4n^6+n}}\le\frac{1}{\sqrt{4n^6+k}}\le\frac{1}{\sqrt{4n^6+1}}\end{cases}$$

נשתמש בכלל הסנדוויץ':

$$n\cdot\left[\frac{\sqrt{n^4+1+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}\right]\le a_n\le n\cdot\left[\frac{\sqrt{n^4+n+\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}\right]$$

גבולות החסמים הם:

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\sqrt{n^4+1+\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+n^2+n^2\cos n}}{\sqrt{4n^6+n}}\underset{[:n^3]}{=}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^4}+\frac{\cos n}{n^4}}{4+\frac{1}{n^5}}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\sqrt{n^4+n+\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+n^3+n^2\cos n}}{\sqrt{4n^6+1}}\underset{[:n^3]}{=}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^3}+\frac{\cos n}{n^4}}{4+\frac{1}{n^6}}}=\frac{1}{2}$$

ולכן, לפי כלל הסנדוויץ', גם הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n=1/2$.

פתרון 1.ב.

נתונה $g(x)=2-x^3+3x$. ברור שהנגזרת של g אי-שלילית $g'(x)=3-3x^2\ge0$ אם ורק אם $-1\le x\le1$.

לכן g עולה בקטע $[0,1]$ ו- g יורדת בקטע $[1,\infty)$. בנוסף, $g(0)=2, g(1)=4, g(5)=-108$.

לכן, מתקיים: $\underline{g(x)\le g(1)=4=Max(g)}$ (***), לכל x ששייך לקטע הקומפקטי $[0,5]$.

שיפוע המשיק בנקודה $x=1$ שווה ל- $g'(1)=0$. לכן, $\underline{y=4}$ היא משוואת המשיק בנקודת המקסימום $x=1$.

אי-שיוויון (***) אומר שהקו המשיק $y=4$ נמצא <u>מעל גרף הפונקציה</u> g בקטע $[0,5]$.

מסיקים שהתחום הנתון שווה ל- $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0\le x\le5,\ 2-x^3+3x\le y\le4\}$.

משפט Newton-Leibniz גורר שהשטח של D שווה ל-

$$S=Area(D)=\int_0^5\left[4-\left(2-x^3+3x\right)\right]dx=\int_0^5\left(2-3x+x^3\right)dx=\left[2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_0^5=128.75.$$

פתרון 2.א.

אפשר (אבל לא מומלץ) לפתור לפי כלל L'Hôpital :

$$L=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0+}\frac{(1/2)x^{-0.5}-3\cdot(1/4)x^{-0.75}}{(1/4)(\sin x)^{-0.75}\underbrace{\cos x}_{\to1}}=\lim_{x\to0+}\frac{2x^{-0.5}}{(\sin x)^{-0.75}}-\frac{3x^{-0.75}}{(\sin x)^{-0.75}}$$

$$=\lim_{x\to0+}\left(2\frac{(\sin x)^{0.75}}{x^{0.5}}-3\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.75}\right)=\lim_{x\to0+}\left(2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.5}(\sin x)^{0.25}-3\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{0.75}\right)=\left(2\cdot1^{0.5}\cdot0-3\cdot1^{0.75}\right)=-3$$

<u>פתרון יותר פשוט</u>

נחלק את המונה והמכנה ב- $\sqrt[4]{x}$ ונקבל :

$$L=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}-3\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=[:\sqrt[4]{x}]=\lim_{x\to0+}\frac{x^{\frac14}-3}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac14}}=\frac{\lim_{x\to0+}\left(x^{\frac14}-3\right)}{\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac14}}=\frac{-3}{1}=-3$$

<u>או</u> ניתן לפתור את השאלה ישירות לפי הגבול $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$:

$$L=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}-3\cdot\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{\sin x}}=\lim_{x\to0+}\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}}-3\cdot\lim_{x\to0+}\sqrt[4]{\frac{x}{\sin x}}=0\cdot1-3=-3\ .$$

פתרון 2.ב.

נפתור בעזרת <u>משפט ערך הביניים</u> של Cauchy.

נסמן ב- $m_1=g'(-7)$ את שיפוע המשיק בנקודה $u=-7$. לפי הנתון $m_1\neq0$.
נסמן ב- $m_2=g'(2)$ את שיפוע המשיק בנקודה $v=2$. לפי הנתון $m_2\neq0$.

התנאי "*קו המשיק בנקודה* $u=-7$ *<u>מאונך</u> לקו המשיק בנקודה* $v=2$" שקול ל- <u>$m_1\cdot m_2=-1$</u>,
ז"א $m_1\cdot m_2=g'(-7)g'(2)=-1<0$.

הפונקציה g' רציפה בקטע $[u,v]=[-7,2]$ והמכפלה $g'(-7)g'(2)<0$ שלילית.
לכן, משפט ערך הביניים של Cauchy גורר שקיים $c\in[-7,2]$ כך ש- $g'(c)=0$, מ.ש.ל.

<u>פתרון 3.א.</u>

יהי $y \neq -1$. נפתור את המשוואה $y = f(x) = \dfrac{x-2}{-x+1}$, כאשר $y \neq -1$ נתון ו- x הנעלם.

זה שקול ל- $-yx + y = x - 2$ ולכן יש פתרון <u>יחיד</u> $x = \dfrac{y+2}{y+1}$. ברור שהפתרון $x = \dfrac{y+2}{y+1} \neq 1$ (נמקו !)

<u>הערה</u>: אם $m \neq -1$, אז f <u>לא חח"ע</u> (כי $f(1) = m = f\left(\dfrac{m+2}{m+1}\right)$, ז"א f מקבלת את הערך m פעמיים,

עבור שתי נקודות שונות $x_2 = 1 \neq \dfrac{m+2}{m+1} = x_1$). לכן $m = -1$ <u>תנאי הכרחי</u> לכך ש- f הפיכה.

נניח ש- $m = -1$. במצב הזה $f(1) = -1$ וההופכית f^{-1} שווה ל-

$$f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y+2}{y+1}, & y \neq -1 \\ 1, & y = -1 \end{cases}.$$

<u>פתרון 3.ב.</u>

מספיק להראות שפונקצית העזר $g(x) = 4x^2 - 1 - 2\ln(2x) \geq 0$ אי-שלילית, לכל $x > 0$.

נחקור את <u>נקודות הקיצון</u> של g בעזרת <u>תחומי עליה / ירידה</u> (לא ניתן להשתמש במשפט Weierstrass).

g פונקציה מוגדרת רציפה וגזירה עבור כל $x > 0$. ברור ש- $g'(x) = 8x - (2/x) = 2 \cdot (4x^2 - 1)(1/x)$.

x	$0 < x \leq 1/2$	$1/2 \leq x < \infty$
סימן הנגזרת הראשונה $g'(x)$	| ---------- 0	0 ++++++
תחומי מונוטוניות $g(x)$	| ↘	↗

המינימום המוחלט של g מתקבל בנקודה $x = 1/2$. לכן עבור כל $x > 0$ מתקיים:

$g(x) = 4x^2 - 1 - 2\ln(2x) \geq g(1/2) = 0$. מסקנה: $4x^2 \geq 1 + 2\ln(2x)$ לכל $x > 0$.

פתרון 4.א.

1. נראה כי $T_3(x)=1+2x-2x^2+4x^3$ הינו פולינום טיילור-מקלורן עבור פונקציה $f(x)=\sqrt{1+4x}$.

נחשב את המקדמים של פולינום טיילור-מקלורן (Taylor-Maclaurin) :

$$\begin{cases} f(0)=1, \quad f'(x)=\dfrac{4}{2\sqrt{1+4x}}=\dfrac{2}{(1+4x)^{1/2}} \Rightarrow f'(0)=2 \\ f''(x)=\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{2}{(1+4x)^{3/2}}\cdot 4=\dfrac{-4}{(1+4x)^{3/2}} \quad \Rightarrow f''(0)=-4 \\ f'''(x)=\dfrac{-3}{2}\cdot\dfrac{(-4)}{(1+4x)^{5/2}}\cdot 4=\dfrac{24}{(1+4x)^{5/2}} \quad \Rightarrow f'''(0)=24 \end{cases}$$

נקבל $T_3(x)=1+\frac{2}{1!}x-\frac{4}{2!}x^2+\frac{24}{3!}x^3=1+2x-2x^2+4x^3$.

2. נוכיח ש- $\sqrt{1+4x}-(1+2x-2x^2+4x^3)\le 0$, לכל $x>-\frac{1}{4}$.

לפי סעיף (1) מקבלים שההפרש הנ"ל שווה ל- $\sqrt{1+4x}-(1+2x-2x^2+4x^3)=f(x)-T_3(x)=R_3(x)$.

נשאר להראות שהשארית מסדר $n=3$ אי-שלילי : $R_3(x)\le 0$, לכל $x>-\frac{1}{4}$.

$f^{(4)}(x)=\dfrac{-5}{2}\cdot\dfrac{24}{(1+4x)^{7/2}}\cdot 4=\dfrac{-240}{(1+4x)^{7/2}}$ ולכן משפט השארית בצורה של Lagrange גורר ש-

$R_3(x)=\dfrac{-240}{4!\cdot(1+4c)^{7/2}}\cdot x^4$, כאשר c בין 0 ל x . נתון ש- $x>-\frac{1}{4}$ ולכן $c>-\frac{1}{4}$.

<u>מסקנה</u> : $R_3(x)\le 0$, לכל $x>-\frac{1}{4}$, מ.ש.ל.

פתרון 4.ב.

הפונקציה $f(t)=e^{2t^2}$ רציפה ב- $\mathbf{R}$. לפי משפט היסודי של Newton-Leibniz , הפונקציה $F(x)=\int_0^x e^{2t^2}dt$

גזירה ב- $\mathbf{R}$ ו- $F'(x)=e^{2x^2}$. F גם רציפה ב- $\mathbf{R}$ ומתקיים : $\lim_{x\to 0}F(x)=F(0)=\int_0^0 e^{2t^2}dt=0$. לכן, לפי כלל

L'Hôpital במצב לא מוגדר מסוג $\left[\frac{0}{0}\right]$ מסיקים ש-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-x-1+\int_0^x e^{2t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{-3\sin 3x-1+e^{2x^2}}^{\nearrow 0}}{\boxed{2x}_{\searrow 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{-9\cos 3x+e^{2x^2}\cdot 4x}^{\nearrow -9}}{\boxed{2}_{\searrow 2}}=-4.5$$

פתרון 5.א.

נבצע שינוי משתנים :

$$\int \cos\left(\sqrt{2x-8}\right)dx = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{2x-8} \\ dt=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-8}}dx \\ dx=tdt \end{array}\right] = \int t\cos(t)dt = \int (\sin(t))'\cdot tdt = \left[\begin{array}{cc} f(t)=\sin t & f'(t)=\cos t \\ g(t)=t & g'(t)=1 \end{array}\right] =$$

$$= (t\sin t) - \int (\sin t)\cdot 1dt = (t\sin t)+\cos t + c =$$

$$= \left(\sqrt{2x-8}\right)\sin\left(\sqrt{2x-8}\right)+\cos\left(\sqrt{2x-8}\right)+c$$

פתרון 5.ב.

הקו $x=0$ לא מהווה אסימפטוטה אנכית של $y=f(x)$ כי הגבול הבא סופי :

$$L=\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[3-2\cos x]^{\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\left[1+(2-2\cos x)\right]^{\frac{1}{2-2\cos x}\times\frac{2-2\cos x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left[1+(2-2\cos x)\right]^{\frac{1}{2-2\cos x}}\right)^{\frac{2-2\cos x}{x^2}} = \left[t=(2-2\cos x)\to 0\right] = (***)$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{x^2}} \underset{L'HOPITAL}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2x}} = e^1 = e$$

בשלב (***) השתמשנו בגבול מסוג $\left[1^\infty\right]$ Euler עבור הביטוי :

$$\lim_{x\to 0}\left(\left[1+(2-2\cos x)\right]^{\frac{1}{2-2\cos x}}\right) = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e .$$

פתרון 6.א.

פתרון ראשון: הנתון $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbf{R}$ שקול ל- $F'(x)=\begin{cases}8x+1 & ,x\ge 2\\ 21-2x & ,x<2\end{cases}$, לכל $x\in\mathbf{R}$.

מסיקים שקימים שני מספרים ממשים C_1 ו- C_2 כך ש- $F(x)=\begin{cases}4x^2+x+C_1 & ,x>2\\ 21x-x^2+C_2 & ,x<2\end{cases}$. הנתון $F(0)=0$ גורר ש- $C_2=0$, ז"א $F(x)=\begin{cases}4x^2+x+C_1 & ,x>2\\ 21x-x^2 & ,x<2\end{cases}$.

הפונקציה F גזירה ב- $\mathbf{R}$ ולכן הפונקציה F רציפה ב- $\mathbf{R}$.

בפרט, מסיקים ש- $\lim_{x\to 2-}F(x)=\lim_{x\to 2+}F(x)=F(2)$, ז"א $F(2)=18+C_1=38$. לכן $C_1=20$:

$F(x)=\begin{cases}4x^2+x+20 & ,x\ge 2\\ 21x-x^2 & ,x\le 2\end{cases}$.

קל לבדוק שהפתרון שמצאנו מהווה פונקציה גזירה ב- $\mathbf{R}$ וכל הדרישות השאלה מתקיימות (נמקו !).

פתרון שני: לפי משפט Newton-Leibniz הפונקציה הקדומה של f שמתאפסת עבור $x=0$ שווה ל-

$F(x)=\int_0^x f(t)dt=(***)=\begin{cases}4x^2+x+20 & ,x\ge 2\\ 21x-x^2 & ,x\le 2\end{cases}$. נמקו את החישוב (***)!

פתרון 6.ב.

1. נחקור את נקודות הקיצון של f בקטע I בעזרת תחומי עליה / ירידה (לא ניתן להשתמש במשפט Weierstrass).

ברור ש- $f(x)=1+\frac{1+\ln x}{x}$ גורר ש- $f'(x)=\frac{(1/x)x-(1+\ln x)\cdot 1}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$. לכן:

א. אם $0<x\le 1$ אז $f'(x)\ge 0$ ולכן הפונקציה f עולה בקטע $0<x\le 1$.

ב. אם $x\ge 1$ אז $f'(x)\le 0$ ולכן הפונקציה f יורדת בקטע $x\ge 1$.

מסיקים ש- $x=1$ מהווה מקסימום מוחלט של f בתחום $(0,\infty)$ ולכן $f(x)\le f(1)=2$, לכל x בתחום ההגדרה $x>0$. הנגזרת $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$ מתאפסת רק עבור $x=1$ ולכן משפט Fermat גורר שלא קיימות נקודות קיצון נוספות חוץ מנקודת המקסימום המוחלט שכבר מצאנו. זה לא סותר את משפט Weierstrass מפני שהקטע $I=(0,\infty)$ לא קטע סגור וחסום.

2. בקטע סגור וחסום $J=\left[e^{-2},e^2\right]$ הפונקציה הרציפה f בעלת נקודות קיצון מוחלט (לפי משפט Weierstrass);

בקטע $\left[e^{-2},1\right]$ הפונקציה f עולה ובקטע $\left[1,e^2\right]$ הפונקציה f יורדת. נחשב את הערכים של f בקצוות:

ברור ש- $2=f(1)>f(e^2)=1+\frac{1+\ln e^2}{e^2}=1+\frac{3}{e^2}>f(e^{-2})=1+\frac{1+\ln e^{-2}}{e^{-2}}=1-e^2$. לכן:

א. הערך המקסימלי של הפונקציה f בקטע J שווה ל- $M=f(1)=2$.

ב. הערך המינמלי של הפונקציה f בקטע J שווה ל- $m=f(e^{-2})=1-e^2$.

בהצלחה!