פתרון שאלון X

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (10 נק') הוכיחו את הנוסחה הבאה

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}=0$$

הדרכה : יש להשתמש בתכונות של המקדמים הבינומיים.

אין להשתמש באינדוקציה מתמטית.

ב. (10 נק') הגדרת גבול של פונקציה f בנקודה x_0 היא : מספר L נקרא גבול של פונקציה בנקודה x_0, אם לכל $\varepsilon > 0$

קיים $\delta > 0$, כך שלכל x אם מתקיים $|x-x_0|<\delta$, אז $|f(x)-L|<\varepsilon$.

מבין הפסוקים הבאים בחרו את הפסוק שנסמנו α אשר מתאים להגדרה הנ"ל.

על ידי שימוש בשקילויות רשמו את $\sim\alpha$ ללא שימוש בקשר השלילה, כלומר את ההגדרה

שמספר L <u>אינו</u> גבול פונקציה f בנקודה x_0.

(1) $$\forall\varepsilon>0\left[\exists\delta>0\Big(\forall x\big(|x-x_0|<\delta\ \wedge\ |f(x)-L|<\varepsilon\big)\Big)\right]$$

(2) $$\forall\varepsilon>0\left[\exists\delta>0\Big(\big(\forall x|x-x_0|<\delta\big)\ \to\ |f(x)-L|<\varepsilon\Big)\right]$$

(3) $$\forall\varepsilon>0\left[\exists\delta>0\Big(\forall x\big(|x-x_0|<\delta\ \to\ |f(x)-L|<\varepsilon\big)\Big)\right]$$

(4) $$\forall\varepsilon>0\left[\exists\delta>0\big(|x-x_0|<\delta\ \to\ |f(x)-L|<\varepsilon\big)\right]$$

<u>פתרון שאלה 1</u>

א.

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}\underset{(1)}{=}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i n!}{i!(n-i)!n!}\underset{(2)}{=}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\underset{(3)}{=}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(1)^{n-i}(-1)^i\binom{n}{i}\underset{(4)}{=}\frac{1}{n!}(1-1)^n=0$$

(1) השלמה למקדם בינומי (2) הוצאת קבוע מחוץ לסכום ושימוש בהגדרת מקדם בינומי

(3) השלמה לביטוי הבינום כאשר $a=1, a=-1$ (4) חישוב של הבינום.

הערה : אפשר גם להשתמש בתכונה שסכום המקדמים הזוגיים שווה לסכום המקדמים האי זוגיים ולכן התוצאה 0.

ב. הפסוק הנכון הינו פסוק (3) ושלילתו היא :

$$\sim\left(\forall\varepsilon>0\left[\exists\delta>0\Big(\forall x\big(|x-x_0|<\delta\ \to\ |f(x)-L|<\varepsilon\big)\Big)\right]\right)\equiv$$

$$\equiv\exists\varepsilon>0\sim\left[\exists\delta>0\Big(\forall x\big(|x-x_0|<\delta\ \to\ |f(x)-L|<\varepsilon\big)\Big)\right]\equiv$$

$$\equiv\exists\varepsilon>0\left[\forall\delta>0\sim\Big(\forall x\big(|x-x_0|<\delta\ \to\ |f(x)-L|<\varepsilon\big)\Big)\right]\equiv$$

$$\equiv\exists\varepsilon>0\left[\forall\delta>0\Big(\exists x\sim\big(\sim(|x-x_0|<\delta)\ \vee\ |f(x)-L|<\varepsilon\big)\Big)\right]\equiv$$

$$\equiv\exists\varepsilon>0\left[\forall\delta>0\Big(\exists x\big((|x-x_0|<\delta)\ \wedge\ \sim(|f(x)-L|<\varepsilon)\big)\Big)\right]\equiv$$

$$\equiv\exists\varepsilon>0\left[\forall\delta>0\Big(\exists x\big((|x-x_0|<\delta)\ \wedge\ |f(x)-L|\geq\varepsilon\big)\Big)\right]$$

מספר L לא גבול של פונקציה בנקודה x_0, אם קיים $\varepsilon > 0$, כך שלכל $\delta > 0$ קיים x שעבורו $|x - x_0| < \delta$ וגם $|f(x) - L| \ge \varepsilon$.

<u>שאלה 2 (20 נקודות)</u> **אין קשר בין סעיפים א' וב'**

א. (10 נק') סבא הקציב סכום של לכל היותר 30 ₪ לקנית מתנות לשלושת נכדיו. בחנות יש צעצועים במחיר 2₪ עד 10₪. (המחיר של כל צעצוע הוא מספר שלם). כמה אפשרויות יש לבחירת המתנות?

I. הציגו את הבעיה באמצעות פונקציות יוצרות.

II . פתרו את הבעיה באמצעות סעיף I.

ב. (10 נק') מעל קבוצת השלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר יחס R על ידי:

$(x, y) \in R$, אם ורק אם $x^2 - y^2$ מתחלק ב – 10.

הוכיחו כי R יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$ ורשמו במפורש את מחלקת השקילות $[-5]_R$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. I. עלינו למצוא את מספר הפתרונות הטבעיים למשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 \le 30$ כאשר $2 \le x_i \le 10, \quad i = 1,2,3$

בעיה שקולה: מספר הפתרונות למשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ כאשר $2 \le x_i \le 10, \quad i = 1,2,3$

הפונקציה היוצרת: $f(x) = \left(x^2 + \cdots + x^{10}\right)^3 \left(1 + x + \cdots\right)$

II . נסדר: $f(x) = \left(x^2\left(1 + \cdots + x^8\right)\right)^3 \left(1 + x + \cdots\right) = x^6 \cdot \left(\dfrac{1 - x^9}{1 - x}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{1 - x} = x^6 \cdot \left(1 - x^9\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{1 - x}\right)^4$

הפתרון הוא המקדם של x^{30} בפונקציה: $f(x) = x^6 \cdot \left(1 - 3x^9 + 3x^{18} - x^{27}\right) \sum_{k=0}^{\infty} D(4,k)x^k$

שהוא המקדם של x^{24} במכפלה: $\left(1 - 3x^9 + 3x^{18} - x^{27}\right) \sum_{k=0}^{\infty} D(4,k)x^k$

מספר האפשרויות לכן: $D(4,24) - 3D(4,15) + 3D(4,6) = \binom{24}{3} - 3\binom{15}{3} + 3\binom{6}{3} = 719$

ב. לכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $x^2 - x^2 = 0$, כלומר מתחלק ב – 10. לכן $(x, x) \in R$ והיחס הינו רפלקסיבי.

יהי $(x, y) \in R$, כלומר $x^2 - y^2$ מתחלק ב – 10. מכאן $y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2)$ גם מתחלק ב – 10, כלומר $(y, x) \in R$. זה מוכיח כי היחס הינו סימטרי.

נניח כעת כי $(x, y) \in R$ ו – $(y, z) \in R$, כלומר $x^2 - y^2$ ו – $y^2 - z^2$ מתחלקים ב – 10. מכאן גם הסכום שלהם $(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = x^2 - z^2$ מתחלק ב – 10, כלומר $(x, z) \in R$ והיחס טרנזיטיבי.

הראינו כי R סימטרי, רפלקסיבי וטרנזיטיבי. זה מוכיח כי R יחס שקילות.

מתקיים:

$$[-5]_R = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid (x, -5) \in R\right\} = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 25 = 10k, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 10k + 25, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 10k + 5, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\pm 5, \pm 15, \pm 25, \pm 35, \ldots\right\}$$

<u>שאלה 3 (20 נקודות)</u> אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (12 נק') קנגורו יכול לעשות צעד אחד של מטר או לדלג למרחק 2 מטר.

נסמן ע"י a_n את מספר הדרכים של הקנגורו לעבור n מטרים.

I. רשמו תנאי התחלה וסדרה רקורסיבית עבור a_n.

II. רשמו סדרה מפורשת עבור a_n.

בתשובה הסופית השאירו ביטויים אי רציונלים מסוג $a\sqrt{b}$ ללא חישוב ערך עשרוני.

ב. (8 נק') מחלקים 9 ילדים בעלי שמות שונים לקבוצות, כך שבכל קבוצה יש לפחות 3 ילדים.
כמה אפשרויות חלוקה כאלה קיימות?

<u>פתרון שאלה 3</u>

א. I. מרחק של מטר אחד ניתן לעבור רק ע"י צעד אחד: $a_1 = 1$

מרחק של שני מטרים אפשר לעבור ע"י שני צעדים או ע"י דילוג אחד $a_2 = 2$

מרחק של n צעדים אפשר לעבור ע"י הוספת צעד אחד למסלול של n-1 או ע"י הוספת דילוג למסלול של n-2. הסדרה הרקורסיבית: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

נמצא את a_0 לפי הסדרה ותנאי ההתחלה: $a_2 = a_1 + a_0 \Leftarrow 2 = 1 + a_0 \Leftarrow a_0 = 1$

II. המשוואה האופיינית: $r^2 - r - 1 = 0$

השורשים: $r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ לכן, הסדרה: $a_n = A \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

מתנאי ההתחלה:

$$1 = A + B$$

$$1 = A \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + B \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

המקדמים: $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}, \quad B = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$

הסדרה: $a_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ב. מספר קבוצות הילדים לא יכול להיות גדול מ – 3, כי אחרת בהכרח תהיה קבוצה עם פחות משלשה ילדים.

נעבור על האפשרויות: לקבוצה אחת, שתי קבוצות ושלוש קבוצות.

1. אם יש רק קבוצה אחת, אז יש רק אפשרות אחת לחלוקה כזאת.
2. אם יש שתי קבוצות אז הן בנות 3 ו – 6 ילדים או 4 ו – 5 ילדים. במקרה הראשון יש $\binom{9}{3}$ אפשרויות בחירה, ובמקרה השני $\binom{9}{4}$ אפשרויות. סה"כ: $\binom{9}{4} + \binom{9}{3}$.
3. אם יש שלוש קבוצות, אז בכל אחת מהן יש 3 ילדים ולכן מספר האפשרויות הוא:

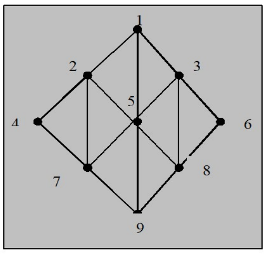
$$\frac{1}{3!} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \frac{9!}{(3!)^4}.$$

נסכם את 3 המקרים והתשובה הסופית: $1 + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \frac{9!}{(3!)^4}$.

<u>שאלה 4 (20 נקודות)</u>   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (12 נק') מטילים 10 קוביות זהות. מהו מספר האפשרויות שבהטלה יופיעו כל 6 פאות הקובייה?
השתמשו בעקרון ההכלה וההדחה.

ב. (8 נק') נתון הגרף הבא. הוסף לגרף <u>מספר מינימלי</u> של צלעות כך שבגרף יהיה מעגל אוילר.



<u>פתרון שאלה 4</u>

א. נסמן ב – U את קבוצת כל התוצאות האפשריות בהטלת 10 קוביות. כמו כן, נסמן ב – A_k $(k=1,2,...,6)$ את קבוצת האפשרויות שבהן הפאה עם מספר k לא מופיעה. בסימונים האלה צריך לחשב את $\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_6}\right|$.

נחשב מספר איברים של קבוצות נדרשות לשימוש בעקרון הכלה והדחה:

$$|U|=6^{10}$$

$$|A_k|=5^{10} \qquad \times\binom{6}{1}$$

$$|A_k\cap A_l|=4^{10} \qquad \times\binom{6}{2}$$

$$|A_k\cap A_l\cap A_m|=3^{10} \qquad \times\binom{6}{3}$$

$$|A_k\cap A_l\cap A_m\cap A_j|=2^{10} \qquad \times\binom{6}{4}$$

$$|A_k\cap A_l\cap A_m\cap A_j\cap A_i|=1^{10} \qquad \times\binom{6}{5}$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6|=0$$

מכאן

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_6}\right|=6^{10}-\binom{6}{1}5^{10}+\binom{6}{2}4^{10}-\binom{6}{3}3^{10}+\binom{6}{4}2^{10}-\binom{6}{5}=$$

$$=6^{10}-6\cdot5^{10}+15\cdot4^{10}-20\cdot3^{10}+15\cdot2^{10}-6=16435440$$

ב. בגרף הנתון לא קיים מעגל אויילר כי יש קדקודים שדרגתם אי זוגית 1 ו-9.
נחבר את 2 הקדקודים האלו על ידי צלע ונקבל גרף קשיר שבו כל דרגות הקדקודים זוגיות.
לכן קיים בגרף מעגל אויילר.

<u>שאלה 5 (20 נקודות)</u>   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (10 נק')

I. הוכיחו עבור קבוצות A, B סופיות או אינסופיות ש :

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad |A| \le |B|$$

II. נגדיר קבוצות באופן הבא :

$$A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid i-1 < x < i\}, \quad i = 1,2,3,....$$

חשבו את עוצמת הקבוצה : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

ב. (10 נק') מבין המספרים הטבעיים החיוביים שקטנים מ-50 , בוחרים 14 מספרים אי זוגיים שונים.
הראו כי מבין המספרים שנבחרו יש לפחות זוג אחד של מספרים כך שסכומם 48.

<u>פתרון שאלה 5</u>

א. I. כיוון ש : $A \subseteq B$ קיימת הפונקציה $I : A \to B \quad I(x) = x$

פונקציה זו היא חח"ע ולכן מהגדרת $\le$ נקבל $|A| \le |B|$

II. הקבוצות $A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid i-1 < x < i\}, \quad i = 1,2,3,....$ הינם קטעים פתוחים על החלק החיובי של ציר ה-X

$$A_1 = (0,1),\ A_2 = (1,2), ..., A_n = (n-1, n), ...$$

כל קטע פתוח על הישר הממשי עוצמתו א .

כל הקטעים זרים זה לזה . $A_i \cap A_j = \phi, \quad i \neq j$

מספר הקטעים הוא בן מניה.

מתקיים : $(0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq R$

לפי סעיף I : $|(0,1)| \le \left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \le |R|$

אבל: $|(0,1)| = |R| =$ א   לכן ממשפט קש"ב : $\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| =$ א

ב. בוחרים 14 מספרים אי זוגיים שונים מבין המספרים $\{1,3, ... ,49\}$. נתבונן במחלקות הבנויות מהמספר הבודד 49 והזוגות הבאים אשר סכומם הוא 48 : $\{49\}, \{1,47\}, \{3,45\}, ... , \{23,25\}$.
מספר המחלקות הוא 13. למחלקות אלו נתייחס כתאים ו-14 המספרים שנבחרו הינם יונים.
אם נשייך את 14 המספרים (יונים) שנבחרו ל 13 התאים , נקבל מעקרון שובך היונים שיש לפחות תא אחד ובו 2 מספרים. כיוון שנבחרו מספרים שונים, לא ייתכן זוג בתא מייצג את המספר בודד 49 . ולכן ,
יש זוג מספרים באחד התאים : $\{1,47\}, \{3,45\}, ... , \{23,25\}$ וסכומו 48.

<u>שאלה 6 (20 נקודות)</u>   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (10 נק') הוכיחו כי לכל n טבעי, $n \ge 7$ מתקיים : $n! > 3^n$.

ב. (10 נק') הוכיחו כי לכל קבוצות A,B,C מתקיים $(A\setminus B) \subseteq (A\setminus C) \cup (C\setminus B)$.

האם בהכרח מתקיים $(A\setminus B) = (A\setminus C) \cup (C\setminus B)$? נמקו.

<u>פתרון שאלה 6</u>

א. **בסיס האינדוקציה:** נראה כי הטענה נכונה עבור $n = 7$:

$$7! = 5040, \quad 3^7 = 2187$$

ולכן הטענה נכונה במקרה זה.

צעד האינדוקציה:

<u>הנחת האינדוקציה</u>**:** נניח כי הטענה נכונה עבור n מסוים הגדול מ -7 :

$$n! > 3^n$$

נוכיח אותה עבור $n+1$. כלומר :

$$(n+1)! > 3^{n+1}.$$

אכן,

$$(n+1)! \underset{(1)}{=} (n+1)\cdot n! \underset{(2)}{>} (n+1)\cdot 3^n \underset{(3)}{>} 3\cdot 3^n = 3^{n+1}$$

(1) הגדרת !

(2) הנחת האינדוקציה עבור המספר n .

(3) $n > 7$

מסקנה: הטענה $n! > 3^n$ מתקיימת לכל n טבעי, $n \ge 7$.

ב.

יהי $x \in A\setminus B$, כלומר $x \in A \wedge x \notin B$.

אם $x \in C$ נקבל כי $x \in C \wedge x \notin B$, כלומר $x \in C\setminus B$.

אם $x \notin C$ נקבל כי $x \in A \wedge x \notin C$, כלומר $x \in A\setminus C$.

קיבלנו כי בכל מקרה $x \in A\setminus C$ או $x \in C\setminus B$, כלומר $x \in (A\setminus C)\cup(C\setminus B)$.

השוויון לא מתקיים, כי למשל עבור הקבוצות $C = \{3\}$, $B = \{4\}$, $A = \{1,2\}$ מקבלים :

$$A\setminus B = \{1,2\} \qquad A\setminus C = \{1,2\} \qquad C\setminus B = \{3\}$$

$$A\setminus B = \{1,2\} \ne (A\setminus C)\cup(C\setminus B) = \{1,2,3\}$$