יונתן כהן

אלגברה לינארית

תרגול מספר 12

מטריצה מייצגת של טרנספורמציה לינארית לפי בסיסים

מטריצה מייצגת של טרנספורמציה לינארית לפי בסיסים

.1

נתונה טרנספורמציה לינארית

$$T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c+d)+(c-d)x+(a+b)x^2$$

נתונים הבסיסים:

B בסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$B = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ b_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Q בסיס של $P_2(\mathbb{R})$:

$$Q = \{ q_0(x) = 1 ,\ q_1(x) = 1+x ,\ q_2(x) = 1+x+x^2 \}$$

P הבסיס הסטנדרטי של $P_2(\mathbb{R})$:

$$P = \{1, x, x^2\}$$

א. למצוא את המטריצות המייצגות את ההעתקה לפי בסיסים: $[T]_P^B$, $[T]_Q^B$.

ב. למצוא בסיס ומימד ל $\mathrm{Ker}T$, $\mathrm{Im}T$.

ג. האם T חח"ע? על? הפיכה?

ד. $v = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, לחשב את $T(v)$ ע"י המטריצה המייצגת $[T]_Q^B$.

א.

נמצא את המטריצה המייצגת $[T]_P^B$.

נחשב את תמונות אברי הבסיס B של התחום $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ע"י T.

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c+d)+(c-d)x+(a+b)x^2$$

$$T(b_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2+2x^2$$

$$T(b_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = x+x^2$$

$$T(b_3) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2-x+x^2$$

$$T(b_4) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1-x$$

נחשב את הקואורדינטות של התמונות האלה לפי הבסיס P של הטווח $P_2(\mathbb{R})$.

נשים לב שזהו הבסיס הסטנדרטי של הטווח ולכן חישוב הקואורדינטות מיידי.

$$T(b_1)=T\left(\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=2+2x^2 \qquad \Rightarrow \quad [T(b_1)]_P=(2,0,2)$$

$$T(b_2)=T\left(\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=x+x^2 \qquad \Rightarrow \quad [T(b_2)]_P=(0,1,1)$$

$$T(b_3)=T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=2-x+x^2 \quad \Rightarrow \quad [T(b_3)]_P=(2,-1,1)$$

$$T(b_4)=T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=1-x \qquad \Rightarrow \quad [T(b_4)]_P=(1,-1,0)$$

נרשום וקטורי קואורדינטות אלה בעמודות:

$$[T]_P^B=\begin{bmatrix}2&0&2&1\\0&1&-1&-1\\2&1&1&0\end{bmatrix}$$

נמצא את המטריצה המייצגת $[T]_Q^B$.

$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית, כאשר B בסיס של V, C,D בסיסים של W.
$[T]_C^B$ המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T לפי הבסיסים B של V ו C של W.
$[T]_D^B$ המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T לפי הבסיסים B של V ו D של W.
נסמן ב $[I]_C^D$ את המטריצה שהעמודות שלה הן הקואורדינטות של וקטורי הבסיס D לפי הבסיס C.
אז

$$\left[[I]_C^D \,\middle|\, [T]_C^B\right]\to\left[I \,\middle|\, [T]_D^B\right]$$

מסקנה:

$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית, כאשר B בסיס של V, D בסיס של W, E הבסיס הסטנדרטי של W.
אז

$$\left[[I]_E^D \,\middle|\, [T]_E^B\right]\to\left[I \,\middle|\, [T]_D^B\right]$$

בתרגיל שלנו:
B בסיס של התחום $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
P הבסיס הסטנדרטי של הטווח $P_2(\mathbb{R})$, Q בסיס לא סטנדרטי של $P_2(\mathbb{R})$.
ולכן

$$\left[[I]_P^Q \,\middle|\, [T]_P^B\right]\to\left[I \,\middle|\, [T]_Q^B\right]$$

המטריצה $[I]_P^Q$ היא המטריצה שהעמודות שלה הן הקואורדינטות של וקטורי הבסיס Q לפי הבסיס הסטנדרטי P.

$$Q=\{q_0(x)=1\,,\,q_1(x)=1+x\,,\,q_2(x)=1+x+x^2\}$$

$$[I]_P^Q=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

כעת כדי לקבל את המטריצה $[T]_Q^B$, נדרג את המטריצה הכפולה $\left[[I]_P^Q \,\middle|\, [T]_P^B\right]$.

$$\left[[I]_P^Q \,\middle|\, [T]_P^B\right]=\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&1&1&2&0&2&1\\0&1&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&2&-1&3&2\\0&1&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&2&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\left[\begin{array}{ccc|cccc}1&0&0&2&-1&3&2\\0&1&0&-2&0&-2&-1\\0&0&1&2&1&1&0\end{array}\right]$$

ומכאן

$$[T]_Q^B=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\-2&0&-2&-1\\2&1&1&0\end{bmatrix}$$

הערה:

ניתן לחשב את המטריצה $[T]_Q^B$ באופן ישיר:

כבר חישבנו את $T(b_1),\dots,T(b_4)$, וכעת מחשבים את הקואורדינטות שלהם לפי הבסיס Q (הלא סטנדרטי).

ב.

$\operatorname{Ker}T$ 'מזוהה' עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת $[T]_Q^B$, הזיהוי נעשה ע"י קואורדינטות לפי הבסיס B של התחום.

$\operatorname{Im}T$ 'מזוהה' עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת $[T]_Q^B$, הזיהוי נעשה ע"י קואורדינטות לפי הבסיס Q של הטווח.

נדרג את המטריצה $[T]_Q^B$ לצורה מדורגת קנונית כדי למצוא בסיסים למרחב הפתרונות ולמרחב העמודות שלה.

$$[T]_Q^B=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\-2&0&-2&-1\\2&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+R_1}\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\0&-1&1&1\\0&2&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to -R_2}\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\0&1&-1&-1\\0&2&-2&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_2]{R_1\to R_1+R_2}\begin{bmatrix}2&0&2&1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to -R_1/2}\begin{bmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker}T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_Q^B$.

(נניח שהמשתנים הם w,x,y,z).

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$, ולכן המשתנים w,x הם משתנים קשורים, y,z משתנים חופשיים.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases}w \qquad +y+\frac{1}{2}z=0\\ \qquad x-y\quad -z=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad w=-y-\tfrac{1}{2}z\,,\ x=y+z$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned}(w,x,y,z)&=(-y-\tfrac{1}{2}z,\,y+z,\,y,\,z)=\\&=y(-1,1,1,0)+z(-\tfrac{1}{2},1,0,1)\end{aligned}$$

מהפתרון הכללי נובע שבסיס של מרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_Q^B$ נתון ע"י

$\{(-1,1,1,0)\,,\,(-\frac{1}{2},1,0,1)\}$

מימד מרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_Q^B$ הוא

$\dim\ker[T]_Q^B=2$

כאמור, $\mathrm{Ker}T$ מזוהה עם מרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_Q^B$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס B של התחום.

$$B=\left\{b_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\,,\,b_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\,,\,b_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\,,\,b_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$(-1,1,1,0)\xrightarrow{B}(-1)\cdot b_1+1\cdot b_2+1\cdot b_3+0\cdot b_4=-\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$(-\tfrac{1}{2},1,0,1)\xrightarrow{B}(-\tfrac{1}{2})\cdot b_1+1\cdot b_2+0\cdot b_3+1\cdot b_4-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&1\end{bmatrix}$$

ולכן בסיס של $\mathrm{Ker}T$ נתון ע״י

$$\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

$\dim\mathrm{Ker}T=2$

$\mathrm{Im}T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב העמודות של המטריצה $[T]_Q^B$.

$$[T]_Q^B=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\-2&0&-2&-1\\2&1&1&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$.

ולכן נובע שעמודות $1,2$ של המריצה $[T]_Q^B$ הן בסיס של מרחב העמודות של המטריצה $[T]_Q^B$.

כלומר בסיס של מרחב העמודות של המטריצה $[T]_Q^B$ נתון ע״י

$\{(2,-2,2)\,,\,(-1,0,1)\}$

מימד מרחב העמודות של המטריצה $[T]_Q^B$הוא

$\dim\mathrm{col}([T]_Q^B)=2$

כאמור, $\mathrm{Im}T$ מזוהה עם מרחב העמודות של המטריצה $[T]_Q^B$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס Q של הטווח.

$$Q=\{q_0(x)=1\,,\,q_1(x)=1+x\,,\,q_2(x)=1+x+x^2\}$$

$$(2,-2,2)\xrightarrow{Q}2\cdot q_0+(-2)\cdot q_1+2\cdot q_2=2\cdot1+(-2)\cdot(1+x)+2\cdot(1+x+x^2)=2+2x^2$$

$$(-1,0,1)\xrightarrow{Q}(-1)\cdot q_0+0\cdot q_1+1\cdot q_2=(-1)\cdot1+0\cdot(1+x)+1\cdot(1+x+x^2)=x+x^2$$

ולכן בסיס של $\mathrm{Im}T$ נתון ע״י

$\{2+2x^2\,,\,x+x^2\}$

$\dim\mathrm{Im}T=2$

ג.

טענה:
$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית.
T חח״ע אם ורק אם $\mathrm{Ker}\,T=\{\underline{0}\}$ (כלומר תת מרחב האפס של V, מכיל רק את וקטור האפס של V).
T חח״ע אם ורק אם $\dim \mathrm{Ker}\,T=0$.

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\dim \mathrm{Ker}\,T=2\neq 0$, ולכן T אינה חח״ע.

הסבר אחר:

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\mathrm{Ker}\,T\neq\{\underline{0}\}$ (היו בו את וקטורי הבסיס של $\mathrm{Ker}\,T$), ולכן T אינה חח״ע.

טענה:
$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית.
T על אם ורק אם $\mathrm{Im}\,T=W$.
T על אם ורק אם $\dim \mathrm{Im}\,T=\dim W$.

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\dim \mathrm{Im}\,T=2\neq 3=\dim P_2(\mathbb{R})$, ולכן $\mathrm{Im}\,T\neq P_2(\mathbb{R})$ ו T אינה על.

T אינה חח״ע ואינה על ולכן אינה הפיכה.

הסבר אחר:

טענה:
$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית, כאשר B בסיס של V, C בסיס של W.
T הפיכה אם ורק אם המטריצה המייצגת $[T]_C^B$ היא מטריצה הפיכה.

T היא טרנספורמציה מהמרחב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ שמימדו 4 למרחב $P_2(\mathbb{R})$ שמימדו 3, ולכן היא מסדר 3×4,
זו אינה מטריצה ריבועית ובוודאי שאינה הפיכה.
ולכן T אינה טרנספורמציה הפיכה.

ד.

טענה:

$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית, כאשר B בסיס של V, C בסיס של W.

$x\in V$. אז

$$\left[T(x)\right]_C=\left[T\right]_C^B\cdot\left[x\right]_B$$

שלב ראשון: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור $v=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$ לפי הבסיס B של התחום $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

נחפש את הפתרון של מערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $b_1,b_2,b_3,b_4\,|\,v$.

$$\begin{array}{c}\\ (1,1)\to\\ (1,2)\to\\ (2,1)\to\\ (2,2)\to\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}b_1&b_2&b_3&b_4&v\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&2\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&2\end{array}\right]\end{array}\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&2\\1&1&1&0&2\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_4\to R_4-R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&2\\0&0&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4-R_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&2\\0&0&0&-1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{R_4\to -R_4}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&2\\0&0&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_4}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

מהמטריצה המדורגת קנונית נובע שלמערכת קיים פתרון יחיד והוא

$$(1,0,1,1)$$

כלומר הדרך היחידה לכתוב את הוקטור v כצירוף אברי הבסיס B היא

$$v=1\cdot b_1+0\cdot b_2+1\cdot b_3+1\cdot b_4$$

משמעות הדבר היא שהקואורדינטות של הוקטור v לפי הבסיס B הן

$$\left[v\right]_B=(1,0,1,1)$$

שלב שני: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור $T(v)$ לפי הבסיס Q של הטווח $P_2(\mathbb{R})$.

$$\left[T(v)\right]_Q=\left[T\right]_Q^B\cdot\left[v\right]_B=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\-2&0&-2&-1\\2&1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-5\\3\end{bmatrix}$$

שלב שלישי: מתוך הקואורדינטות של $T(v)$ נקבל את הוקטור $T(v)$.

$$\left[T(v)\right]_Q=(7,-5,3)$$

$$\Rightarrow\quad T(v)=7\cdot q_0+(-5)\cdot q_1+3\cdot q_2=7\cdot 1+(-5)\cdot(1+x)+3\cdot(1+x+x^2)=5-2x+3x^2$$

.2

$B=\{b_1,b_2,b_3\}$ בסיס של מ״ו V. תהי ט״ל $T:V\to V$ שהמטריצה המייצגת שלה לפי הבסיס B היא

$$[T]_B=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\-2&3&4\end{bmatrix}.$$

א. מהו $T(b_1)$?

ב. למצוא בסיס ל $\operatorname{Im}T$, $\operatorname{Ker}T$.

ג. האם T חח״ע ? על ? הפיכה ?

ד. $w=b_1+2b_2+b_3$, לחשב $T(w)$.

ה. האם $w\in\operatorname{Ker}T$?

ו. האם $w\in\operatorname{Im}T$?

א.

העמודה הראשונה של המטריצה $[T]_B$ היא הקואורדינטות של $T(b_1)$ לפי הבסיס B , כלומר

$$[T(b_1)]_B=(1,-1,-2)$$

כלומר

$$T(b_1)=1\cdot b_1+(-1)\cdot b_2+(-2)\cdot b_3=b_1-b_2-2b_3$$

ב.

$\operatorname{Ker}T$ ׳מזוהה׳ עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת $[T]_B$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס B של התחום.

$\operatorname{Im}T$ ׳מזוהה׳ עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת $[T]_B$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס B של הטווח.

נדרג את המטריצה $[T]_B$ לצורה מדורגת קנונית כדי למצוא בסיסים למרחב הפתרונות ולמרחב העמודות שלה.

$$[T]_B=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\-2&3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+2R_1]{R_2\to R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker}T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_B$.

(נניח שהמשתנים הם x,y,z).

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$, ולכן המשתנים x,y הם משתנים קשורים, z משתנה חופשי.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases}x\qquad+z=0\\\quad y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\quad x=-z\ ,\ y=-2z$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(x,y,z)=(-z,-2z,z)=z(-1,-2,1)$$

מהפתרון הכללי נובע שבסיס של מרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_B$ נתון ע״י

$$\{(-1,-2,1)\}$$

מימד מרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_B$ הוא

$$\dim\ker[T]_B=1$$

כאמור, $\operatorname{Ker}T$ מזוהה עם מרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_B$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס B של התחום.

$(-1,-2,1)\xrightarrow{B}(-1)\cdot b_1+(-2)\cdot b_2+1\cdot b_3=-b_1-2b_2+b_3$

ולכן בסיס של $\mathrm{Ker}\,T$ נתון ע״י

$\{-b_1-2b_2+b_3\}$

$\dim\mathrm{Ker}\,T=1$

$\mathrm{Im}\,T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב העמודות של המטריצה $[T]_B$.

$$[T]_B=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\-2&3&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$.

ולכן נובע שעמודות $1,2$ של המריצה $[T]_B$ הן בסיס של מרחב העמודות של המטריצה $[T]_B$.

כלומר בסיס של מרחב העמודות של המטריצה $[T]_B$ נתון ע״י

$\{(1,-1,-2)\,,(0,1,3)\}$

מימד מרחב העמודות של המטריצה $[T]_B$הוא

$\dim\mathrm{col}([T]_B)=2$

כאמור, $\mathrm{Im}\,T$ מזוהה עם מרחב העמודות של המטריצה $[T]_B$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס B של הטווח.

$(1,-1,-2)\xrightarrow{B}1\cdot b_1+(-1)\cdot b_2+(-2)\cdot b_3=b_1-b_2-2b_3$

$(0,1,3)\xrightarrow{B}0\cdot b_1+1\cdot b_2+3\cdot b_3=b_2+3b_3$

ולכן בסיס של $\mathrm{Im}\,T$ נתון ע״י

$\{b_1-b_2-2b_3\,,b_2+3b_3\}$

$\dim\mathrm{Im}\,T=2$

ג.

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\dim\mathrm{Ker}\,T=1\neq 0$, ולכן T אינה חח״ע.

הסבר אחר:

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\mathrm{Ker}\,T\neq\{\underline{0}\}$ (היה בו את וקטור הבסיס $-b_1-2b_2+b_3$), ולכן T אינה חח״ע.

B בסיס של V ויש בו 3 וקטורים, ולכן $\dim V=3$.

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\dim\mathrm{Im}\,T=2\neq 3=\dim V$, ולכן $\mathrm{Im}\,T\neq V$ ו T אינה על.

T אינה חח״ע ואינה על ולכן אינה הפיכה.

הסבר אחר:

המטריצה $[T]_B$ שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים ולכן אינה הפיכה.

לחילופין, אפשר לחשב את $\left|[T]_B\right|$ ולקבל $\left|[T]_B\right|=0$, ולכן $[T]_B$ אינה הפיכה.

ולכן T אינה טרנספורמציה הפיכה.

ד.

שלב ראשון: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור w לפי הבסיס B (של התחום).

$w=b_1+2b_2+b_3$

הוקטור w כבר כתוב כצירוף לינארי של אברי הבסיס B, ומכאן ש

$[w]_B=(1,2,1)$

שלב שני: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור $T(w)$ לפי הבסיס B (של הטווח).

$$[T(w)]_B = [T]_B^B \cdot [w]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

שלב שלישי: מתוך הקואורדינטות של $T(w)$ נקבל את הוקטור $T(w)$.

$$[T(w)]_B = (2,2,8)$$
$$\Rightarrow \quad T(w) = 2 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 8 \cdot b_3$$

ה.

$\mathrm{Ker}\,T$ 'מזוהה' עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת $[T]_B$, הזיהוי נעשה ע"י קואורדינטות לפי הבסיס B של התחום.

ולכן הוקטור w נמצא ב $\mathrm{Ker}\,T$ אם ורק אם וקטור הקואורדינטות שלו נמצא במרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת $[T]_B$.

וקטור v נמצא במרחב פתרונות של מטריצה A אם ורק אם מתקיים $Av = 0$.

נחשב

$$[T]_B \cdot [w]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ולכן וקטור הקואורדינטות $[w]_B$ אינו במרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_B$, כלומר הוקטור w אינו ב $\mathrm{Ker}\,T$.

ו.

$\mathrm{Im}\,T$ 'מזוהה' עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת $[T]_B$, הזיהוי נעשה ע"י קואורדינטות לפי הבסיס B של הטווח.

ולכן הוקטור w נמצא ב $\mathrm{Im}\,T$ אם ורק אם וקטור הקואורדינטות שלו נמצא במרחב העמודות של מטריצה המייצגת $[T]_B$.

וקטור v נמצא במרחב עמודות של מטריצה A אם ורק אם הוא צרוף לינארי של עמודות המטריצה, כלומר אם ורק אם יש פתרון למערכת המשוואות המתאימה למטריצה $[A \mid v]$.

נדרג

$$\big[[T]_B \,|\, [w]_B\big] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

הגענו למצטריצה מדורגת (קנונית).
התקבלה שורת סתירה (בשורה 3).
ולכן למערכת המשוואות אין פתרון.

ומכאן שוקטור הקואורדינטות $[w]_B$ אינו במרחב העמודות של המטריצה $[T]_B$, כלומר הוקטור w אינו ב $\mathrm{Im}\,T$.

3.

נתונה ט"ל $T(p)=p(1)-xp'(x)+3p(x)$ $T:P_2(\mathbb{R})\to P_2(\mathbb{R})$.

א. למצוא את המטריצה המייצגת את ההעתקה לפי בסיס הסטנדרטי $P=\{1,x,x^2\}$ $[T]_P$.

ב. למצוא בסיס ומימד ל $\operatorname{Ker}T$, $\operatorname{Im}T$.

ג. האם T חח"ע ? על ? הפיכה ?

ד. למצוא את המטריצה המייצגת של ההעתקה ההפוכה T^{-1} לפי הבסיס הסטנדרטי P.

ה. למצוא את הנוסחה של ההעתקה ההפוכה T^{-1}.

א.

נמצא את המטריצה המייצגת $[T]_P^P$.

נחשב את תמונות אברי הבסיס P (של התחום $P_2(\mathbb{R})$) ע"י T.

$$T(p)=p(1)-xp'(x)+3p(x)$$
$$T(1)=1-x\cdot 0+3\cdot 1=4$$
$$T(x)=1-x\cdot 1+3\cdot x=1+2x$$
$$T(x^2)=1^2-x\cdot 2x+3\cdot x^2=1+x^2$$

נחשב את הקואורדינטות של התמונות האלה לפי הבסיס P (של הטווח $P_2(\mathbb{R})$).

נשים לב שזהו הבסיס הסטנדרטי של הטווח ולכן חישוב הקואורדינטות מיידי.

$$T(1)=4 \quad\Rightarrow\quad [T(1)]_P=(4,0,0)$$
$$T(x)=1+2x \quad\Rightarrow\quad [T(x)]_P=(1,2,0)$$
$$T(x^2)=1+x^2 \quad\Rightarrow\quad [T(x^2)]_P=(1,0,1)$$

נרשום וקטורי קואורדינטות אלה בעמודות:

$$[T]_P^P=\begin{bmatrix}4&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ב.

$\operatorname{Ker}T$ 'מזוהה' עם מרחב הפתרונות של מטריצה המייצגת $[T]_P$, הזיהוי נעשה ע"י קואורדינטות לפי הבסיס P של התחום.

$\operatorname{Im}T$ 'מזוהה' עם מרחב העמודות של מטריצה המייצגת $[T]_P$, הזיהוי נעשה ע"י קואורדינטות לפי הבסיס P של הטווח.

נדרג את המטריצה $[T]_P$ לצורה מדורגת קנונית כדי למצוא בסיסים למרחב הפתרונות ולמרחב העמודות שלה.

$$[T]_P=\begin{bmatrix}4&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2/2}\begin{bmatrix}4&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{bmatrix}4&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1/4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker}T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המטריצה $[T]_P$.

(נניח שהמשתנים הם x,y,z).

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3$, ולכן כל המשתנים x,y,z הם משתנים קשורים.

ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

כלומר מרחב הפתרונות של המטריצה $\left[T\right]_P$ הוא

$$\{(0,0,0)\}$$

בסיס של מרחב הפתרונות של המטריצה $\left[T\right]_P$ הוא

$$\phi$$

מימד מרחב הפתרונות של המטריצה $\left[T\right]_P$ הוא

$$\dim\ker\left[T\right]_P = 0$$

כאמור, $\operatorname{Ker}T$ מזוהה עם מרחב הפתרונות של המטריצה $\left[T\right]_P$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס P של התחום.

$$(0,0,0) \xrightarrow{P} 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 = \underline{0}$$

כלומר $\operatorname{Ker}T$ הוא

$$\operatorname{Ker}T = \{0 + 0x + 0x^2\} = \{\underline{0}\}$$

ולכן בסיס של $\operatorname{Ker}T$ נתון ע״י

$$\phi$$
$$\dim\operatorname{Ker}T = 0$$

$\operatorname{Im}T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב העמודות של המטריצה $\left[T\right]_P$.

$$\left[T\right]_P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3$.

ולכן נובע שעמודות $1,2,3$ של המריצה $\left[T\right]_P$ הן בסיס של מרחב העמודות של המטריצה $\left[T\right]_P$.

כלומר בסיס של מרחב העמודות של המטריצה $\left[T\right]_P$ נתון ע״י

$$\{(4,0,0)\ ,\ (1,2,0)\ ,\ (1,0,1)\}$$

מימד מרחב העמודות של המטריצה $\left[T\right]_P$הוא

$$\dim\operatorname{col}(\left[T\right]_P) = 3$$

כאמור, $\operatorname{Im}T$ מזוהה עם מרחב העמודות של המטריצה $\left[T\right]_P$, הזיהוי נעשה ע״י קואורדינטות לפי הבסיס P של הטווח.

$$(4,0,0) \xrightarrow{P} 4$$
$$(1,2,0) \xrightarrow{P} 1 + 2x$$
$$(1,0,1) \xrightarrow{P} 1 + x^2$$

ולכן בסיס של $\operatorname{Im}T$ נתון ע״י

$$\{4\ ,\ 1+2x\ ,\ 1+x^2\}$$
$$\dim\operatorname{Im}T = 3$$

ג.

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\dim\operatorname{Ker}T = 0$, ולכן T חח״ע.

הסבר אחר :

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\operatorname{Ker}T = \{\underline{0}\}$ (יש בו את רק את וקטור האפס), ולכן T חח״ע.

מצאנו בסעיף ב׳ ש $\dim\operatorname{Im}T = 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$, ולכן $\operatorname{Im}T = P_2(\mathbb{R})$ ו T על.

T חח"ע ועל ולכן היא הפיכה.

הסבר אחר:

המטריצה $\left[T\right]_P$ שקולת שורות למטריצת היחידה ולכן היא הפיכה.

לחילופין, אפשר לחשב את $\left|[T]\right|$ ולקבל $\left|[T]_P\right| = 8 \neq 0$, ולכן $[T]_B$ הפיכה.

ולכן T טרנספורמציה הפיכה.

ד.

$T:V \to W$ טרנספורמציה לינארית, כאשר B בסיס של V, C בסיס של W.
$\left[T\right]_C^B$ המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T לפי הבסיסים B של V ו C של W.
אם T הפיכה אז $T^{-1}:W \to V$, $\left[T^{-1}\right]_B^C$ המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T לפי הבסיסים C של W ו B של V.
אז
$\left[T^{-1}\right]_B^C = \left(\left[T\right]_C^B\right)^{-1}$

כדי למצוא את המטריצה של הטרנספורמציה ההפוכה T^{-1}, נחשב את המטריצה ההפוכה של המטריצה המייצגת $\left[T\right]_P$.

$$\left[T^{-1}\right]_P^P = \left(\left[T\right]_P^P\right)^{-1}$$

$$\left[\left[T\right]_P^P \mid I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1/4} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ולכן

$$\left[T^{-1}\right]_P^P = \left(\left[T\right]_P^P\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ה.

כדי למצוא את הנוסחה של הטרנספורמציה ההפוכה T^{-1}, נחשב את הטרנספורמציה ההפוכה T^{-1} על וקטור כללי במרחב.

וקטור כללי במרחב $P_2(\mathbb{R})$:

$$v = a + bx + cx^2$$

שלב ראשון: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור $v = a + bx + cx^2$ לפי הבסיס P (של התחום).
נשים לב שזהו הבסיס הסטנדרטי של התחום ולכן חישוב הקואורדינטות מיידי.

$$[v]_P = (a, b, c)$$

שלב שני: נחשב את הקואורדינטות של הוקטור $T^{-1}(v)$ לפי הבסיס P (של הטווח).

$$\left[T^{-1}(v)\right]_P=\left[T^{-1}\right]_P^P\cdot\left[v\right]_P=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}b+\frac{1}{4}c\\ \frac{1}{2}b\\ c\end{bmatrix}$$

שלב שלישי: מתוך הקואורדינטות של $T^{-1}(v)$ נקבל את הוקטור $T^{-1}(v)$.

$$\left[T^{-1}(v)\right]_P=(\tfrac{1}{4}a-\tfrac{1}{8}b+\tfrac{1}{4}c,\tfrac{1}{2}b,c)$$

$$\Rightarrow\quad T^{-1}(v)=(\tfrac{1}{4}a-\tfrac{1}{8}b+\tfrac{1}{4}c)+\tfrac{1}{2}bx+cx^2$$