

4. במפעל התקבל משלוח של 100 פריטים שחלקם עלול להיות פגומים, כדי להחליט מה לעשות עם המשלוח: לקבל אותו למחסן המפעל או להחזירו ליצרן, נוקטים במדיניות הבאה:
- בוחרים חמישה פריטים באקראי ובודקים אותם: אם יש יותר מפריט אחד פגום במדגם זה מחזירים את כל המשלוח ליצרן, ואחרת מאשרים את קבלתו למחסן.
- א. אם בתהליך הייצור של הפריטים כל פריט הוא תקין בהסתברות 0.8, ללא תלות במצבם של יתר הפריטים, מהי ההסתברות לכך שחבילה של 100 פריטים תהיה חבילה "גרועה" כלומר שיהיו בה לפחות 20 פריטים פגומים?
- ב. אם מתקבל משלוח "גרוע" שבו 30 פריטים פגומים – מה ההסתברות שהוא יאושר ויתקבל למחסן? (הסתברות זו נקראת "סיכון היצרן").
- ג. אם מתקבל משלוח "טוב" שבו רק 5 פריטים פגומים – מה ההסתברות שהוא יוחזר ליצרן? (הסתברות זו נקראת "סיכון היצרן").

⑤ נשמע כאילו הוסיפו הפגומים ליצרן:  $p = \text{כאן} = 0.8$

$$q = \text{כאן} = 0.2$$

$$P(q \geq 20) = 1 - \sum_{n=0}^{19} P(n) = 1 - \sum_{k=0}^{19} \binom{100}{k} \cdot p^{100-k} \cdot q^k$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{19} \binom{100}{k} \cdot 0.8^{100-k} \cdot 0.2^k$$

⑥ נתון:  $\begin{cases} G = 70 \\ B = 30 \end{cases}$

$$P(G) = \frac{7}{10}$$

$$P(B) = \frac{3}{10}$$

כלל הנומים באופן 5 פגומים. נכנס למעבדה:

$$P(B \leq 1) = P(0) + P(1)$$

$$P(0) = \frac{7}{10} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} \cdot \frac{67}{97} \cdot \frac{66}{96} = 0.1607$$

$$P(1) = \binom{5}{1} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{68}{98} \cdot \frac{67}{97} \cdot \frac{30}{96} = 0.3653$$

$$\Rightarrow P(B \leq 1) = 0.1607 + 0.3653 = 0.526$$

$$95 - R, 100 - N$$

עמך המצוי - המידע - אקטואל.  $k, A = \text{good}$

$$4, 5 - k, 5 - n$$

$$\begin{aligned} P(k \leq 3) &= 1 - [P(4) + P(5)] = \frac{\binom{95}{4} \cdot \binom{100-95}{5-4}}{\binom{100}{5}} - \frac{\binom{95}{5} \cdot \binom{100-95}{5-5}}{\binom{100}{5}} \\ &= 1 - \frac{\binom{95}{4} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{100}{5}} - \frac{\binom{95}{5} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{100}{5}} \\ &= 1 - 0.2114 - 0.7695 = 0.019 \end{aligned}$$

$$30 - R, 100 - N$$

סכום יח' ואת: עמך המצוי - המידע - אקטואל.  $k, A = \text{good}$

$$0, 1 - k, 5 - n$$

$$\begin{aligned} P(k \leq 1) &= P(0) + P(1) = \frac{\binom{30}{0} \cdot \binom{100-30}{5-0}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{30}{1} \cdot \binom{100-30}{5-1}}{\binom{100}{5}} \\ &= \frac{\binom{30}{0} \cdot \binom{70}{5}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{30}{1} \cdot \binom{70}{4}}{\binom{100}{5}} \\ &= 0.1607 + 0.3653 = 0.526 \end{aligned}$$

7. הערכה מקובלת היא כי בלידת ילדים ההסתברות לילוד זכר שווה להסתברות לילוד נקבה, וכן כי מינם של ילודים שונים (ואפילו לאותם הורים) הם בלתי תלויים זה בזה. יהי  $X$  מספר הילדים שיהיו לזוג הורים שהחליטו להמשיך ולהוליד ילדים עד שיהיה להם לפחות ילד אחד מכל מין,
- מהי פונקציית ההסתברות של  $X$ ?
  - מהי התוחלת ומהי השונות של  $X$ ?

בתרבויות מסוימות מקובל להוליד ילדים עד לבן הראשון, ואז להפסיק,  
ג. מהי תוחלת מספר הבנים במשפחה כזו, ומהי תוחלת מספר הבנות במשפחה כזו?

1) נניח ש  $X$  הוא מספר ילדים:  $P_X = \{2, 3, 4, \dots\}$

נניח ש  $Y$  הוא מספר ילדים, ונניח ש  $Z$  הוא מספר ילדים. נניח ש  $X = Y + Z$  ונניח ש  $Y$  הוא מספר ילדים.

2) נניח ש  $Y = X$  ונניח ש  $Y$  הוא מספר ילדים.

נניח ש  $X \sim G(\frac{1}{2})$  ונניח ש  $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

3) פונקציית ההסתברות היא:

$$P(Y=k) = p \cdot q^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$P(X=k=Y+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

1) נניח ש  $X$  הוא מספר ילדים:  $E[X] = E[1+Y] = 1 + \frac{1}{p} = 1 + 2 = 3$

2) נניח ש  $X$  הוא מספר ילדים:  $V(X) = V(1+Y) = V(Y) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$

3) מספר הילדים הוא כוונות, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

לפי התוצאות, שם מצאנו שהסתברות

8. מספר האנשים הנכנסים לבנק בכל דקה הוא מ"מ בעל התפלגות פואסון עם תוחלת של 0.5 (אנשים), מקובל

גם להניח כי אין תלות בין מספר הנכנסים לבנק בדקות שונות ;

א. מהי ההסתברות לכך שבין 10:00 ל 10:01 לא יכנס לבנק אף אחד? בדיוק אדם אחד? לפחות שלושה אנשים?

ב. מהי ההסתברות לכך שאף אדם לא ייכנס בין 12:00 ל 12:02 ? שבדיוק שני אנשים ייכנסו בזמן זה ?  
השווה את ההסתברות שהתקבלה להסתברות שתחושב בהנחה שמספר האנשים הנכנסים בפרק זמן של 2 דקות הוא פואסוני עם תוחלת כפולה.

$$X \sim \text{Pois}(\lambda), E[X] = \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow X \sim \text{Pois}(\frac{1}{2})$$

(10) יחיד כ' ותחילת מ' פנשמ' שנגסו כפוקה מסוממ (חל):

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!}$$

$$\bullet P(X=0) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^0}{0!} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6074 \quad (2) \text{ נכנס } \text{ans:}$$

$$\bullet P(X=1) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^1}{1!} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.3037$$

$$\bullet P(X \geq 3) = 1 - P(2) - P(1) - P(0)$$

$$\Rightarrow P(X=2) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} = \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.076$$

$$\Rightarrow P(X \geq 3) = 1 - \frac{13}{8} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.013$$

$$\bullet P(Z=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) \approx (0.6074)^2 = 0.369 \quad (2)$$

$$\bullet P(Z=2) = 2 \cdot P(X=0) \cdot P(Y=2) + P(X=1) \cdot P(Y=1) \quad (2)$$

$$\Rightarrow P(Z=2) = 2 \cdot 0.6074 \cdot 0.076 + (0.3037)^2$$

$$= 0.0923 + 0.0922 = 0.1845$$

חבור תוצאת כפולה:  $\lambda=1$

$$P(X=k) = e^{-1} \cdot \frac{1^k}{k!} =$$

15. כד מכיל 10 כדורים לבנים ו-20 כדורים אדומים. מוציאים 5 כדורים, עם החזרה.

- מה ההסתברות שהוצאו בדיוק שלושה כדורים לבנים?
- מה ההסתברות שהוצאו יותר משלושה כדורים לבנים?
- מה ההסתברות שכולם אדומים?
- מה תוחלת מספר הכדורים האדומים שהוצאו?
- מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 4 כדורים אדומים אם ידוע שהוצא לפחות כדור אדום אחד?
- כעת מוציאים 5 כדורים ללא החזרה, חזרו על סעיפים א-ה.

מצאנו את התוצאה בינארית.

נסמן:  $X$  = מס' הכדורים הלבנים שמוציאים

$$X \sim \text{Bin}(5, \frac{1}{3})$$

$Y = 5 - X$  = מס' הכדורים האדומים שמוציאים

$$Y \sim \text{Bin}(5, \frac{2}{3})$$

Ⓐ נבנה פונקציה:

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{2}{3})^{5-3} = 10 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = \frac{40}{243} \approx 0.1646$$

Ⓑ נבנה פונקציה:

$$P(X > 3) = P(4) + P(5)$$

$$\bullet P(X=4) = \binom{5}{4} \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^1 = 1 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{2}{3} = \dots \approx 0.041$$

$$\bullet P(X=5) = \binom{5}{5} \cdot (\frac{1}{3})^5 \cdot (\frac{2}{3})^0 = 1 \cdot \frac{1}{3^5} \cdot 1 = \dots \approx 0.0041$$

$$\Rightarrow P(X > 3) = 0.041 + 0.0041 = 0.0452$$

$$\approx 0.0454$$

Ⓒ נבנה פונקציה:

$$P(Y=5) = \binom{5}{5} \cdot (\frac{2}{3})^5 \cdot (\frac{1}{3})^0 \approx 0.1316$$

③ נצטרך למדוד:

$$E[y] = n \cdot p = 5 \cdot \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$$

⑤ מוצאים 5 נפוצים. צריך למדוד:

$$\begin{aligned} P(y=4 | y \geq 1) &= \frac{P(y=4 \cap y \geq 1)}{P(y \geq 1)} = \frac{P(y=4)}{P(y=4) + P(y \neq 4 \cap y \geq 1)} \\ &= \frac{0.3292}{2 \cdot 0.3292 + 0.0411 + 0.1646 + 0.1316} = \frac{0.3292}{0.9957} \approx 0.3306 \end{aligned}$$

בת דלא ומצרות: מצוקר הנהפלא ה'ג - לאומאכ'ת.

נסמך:  $X =$  מס' הכובים הולכים שיצאו  $X \sim HG(30, 10, 5)$

$Y = 5 - X =$  מס' הכובים האדומים שיצאו  $Y \sim HG(30, 20, 5)$

Ⓐ נצבה פתע:

$$P(X=3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{30-10}{5-3}}{\binom{30}{5}} = \frac{120 \cdot 190}{142,506} \approx 0.16$$

Ⓑ נצבה פתע:

$$P(X > 3) = P(4) + P(5)$$

$$\bullet P(X=4) = \frac{\binom{10}{4} \binom{30-10}{5-4}}{\binom{30}{5}} = \frac{4,200}{142,506} \approx 0.0298$$

$$\bullet P(X=5) = \frac{\binom{10}{5} \binom{30-10}{5-5}}{\binom{30}{5}} = \frac{252}{142,506} \approx 0.0018$$

$$\Rightarrow P(X > 3) = 0.0298 + 0.0018 \\ \approx 0.0312$$

Ⓒ נצבה פתע:

$$P(Y=5) = \frac{\binom{20}{5} \binom{30-20}{5-5}}{\binom{30}{5}} = \frac{15,504}{142,506} \approx 0.1088$$

③ נכנה למסב:

$$E[y] = \frac{n \cdot R}{N} = \frac{5 \cdot 20}{30} = 3\frac{1}{3}$$

④

מוציאים 5 כדורים. צריך למסב:

$$\begin{aligned} P(y=4 | y \geq 1) &= \frac{P(y=4 \cap y \geq 1)}{P(y \geq 1)} = \frac{P(y=4)}{P(y=4) + P(y \neq 4 \cap y \geq 1)} \\ &= \frac{0.334}{0.334 + 0.0295 + 0.16 + 0.36 + 0.1088} = \frac{0.334}{0.9923} \approx 0.334 \end{aligned}$$



(1) תיבה מכילה כרטיסים ועליהם המספרים  $0, 1, 2, \dots, N$ . מוציאים באקראי כרטיס. יהא  $Y$  המספר על הכרטיס שהוצא.

(א) מהי פונקציית ההסתברות של  $Y$ ?

(ב) מהן התוחלת והשונות של  $Y$ ?

מצורף כהתפלגות אחידה.

(א) פונקציית ההסתברות של  $y$  היא:  $P(y=k) = \frac{1}{N}, \quad 0 \leq k \leq N$

(ב)  $E[y] = \frac{1+N}{2}$

$V[y] = \frac{N^2-1}{12}$

(3) הנח כי הסיכוי להולדת בן שווה לזה של הולדת בת. במשפחה יש שמונה ילדים, חשב את ההסתברויות:

(א) בדיוק שלושה בנים.

(ב) לפחות בן אחד.

(ג) לכל היותר בן אחד.

(ד) ידוע כי יש שני בנות לפחות. מה ההסתברות לשבע בנות?

כינויים.  $F, M \sim \text{Bin}(\frac{1}{2})$  **Male, Female**

(א)  $P(M=3) = \binom{8}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^5 = \binom{8}{3} \cdot (\frac{1}{2})^8 = \frac{56}{256} \approx 0.2188$

(ב)  $P(M \geq 1) = 1 - P(M=0)$   
 $= 1 - \binom{8}{0} \cdot (\frac{1}{2})^8 = 1 - \frac{1}{256} \approx 0.996$

(ג)  $P(M \leq 1) = P(M=0) + P(M=1)$   
 $= \binom{8}{0} \cdot (\frac{1}{2})^8 + \binom{8}{1} \cdot (\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{256} + \frac{8}{256} \approx 0.0351$

(ד)  $P(F=7 | F \geq 2) = \frac{P(F=7)}{P(F=7) + P(F < 2)} = \frac{0.0312}{0.0312 + 0.0351} \approx 0.47$

(5) מטבע הוגנת מוטלת 100 פעמים. בכל פעם שהמטבע מראה "עץ" שמעון משלם לאבי 5 ₪, ובכל פעם שהיא מראה "פלי" אבי משלם לשמעון 3 ₪. נגדיר מ"מ  $X$  המונה את מספר הפעמים שיצא "עץ".

(א) מה ההתפלגות, התוחלת והשונות של  $X$ ?  
(ב) מה תוחלת ושונות הרווח של שמעון?

התחום של  $X$ :  $R_X = \{0, 1, \dots, 100\}$

$$P(X=k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

מפוקד בהתפלגות בינומית  $X \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{2})$

$$E[X] = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$$

$$Z = -5X + 3(100 - X)$$

(ד) נגדיר מ"מ  $Z$  = הרווח של שמעון:

$$Z = 300 - 8X$$

$$E[Z] = E[300 - 8X] = 300 - 8 \cdot E[X] = -100 \quad \text{כלומר:}$$

$$V(Z) = V(300 - 8X) = (-8)^2 \cdot V(X) = 64 \cdot 25 = 1,600$$