חדו"א 1 – דף תרגילים מספר 1

מושגים, חישוב גבולות לפי הגדרת הגבול, אריתמטיקה של גבולות, משפט הסנדוויץ'

תרגיל 1 - הגדרת הגבול

הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות לגבולות הנתונים, לפי הגדרת הגבול.

ניתן להשתמש בכך שכל מספר חיובי x חסום בין שני מספרים טבעיים $[x] \le x < [x]+1$.

א. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (אפשר להעזר באי השיוויון $n < 2^n$)

ג. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$

ד. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2-n+1} = \frac{1}{2}$ (אפשר להעזר באי השיוויון $2n^2-n+1 > n^2$).

תרגיל 2 - אריתמטיקה של גבולות

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-1}{n^2+1}$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-n}{n^2+1}$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-9^n}{3^n+3^{2n}}$

ד. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{2n}-9^n}{3^n+3^{2n}}$

ה. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

ו. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{4n^2+5}-n}$

ז. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n}$

ח. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\cos n}{n+1}$

<u>תרגיל 3 - כלל הסנדוויץ'</u>

בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו 3 איברים ראשונים של הסידרה, וחשבו את הגבול:

א. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2(1/n)}{n(2n+1)}+\frac{\sin^2(2/n)}{n(2n+2)}+\frac{\sin^2(3/n)}{n(2n+3)}+\cdots+\frac{\sin^2(n/n)}{n(2n+n)}\right)$$

ב. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}\right)$$

ד. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{\sqrt{3n^5-n}}+\frac{2+n}{\sqrt{3n^5-2n}}+\frac{3+n}{\sqrt{3n^5-3n}}+\cdots+\frac{2n}{\sqrt{3n^5-n^2}}\right)$$

ה. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+4^n}$$

<u>תרגיל 4 - סדרות חסומות</u>

קבעו האם הסדרות הבאות חסומות מלמעלה ומלמטה:

א. $a_n=2n+1$ ב. $a_n=\sin(n)-\cos(n)$ ג. $a_n=(-1)^n$

ד. $a_n=n\cdot(-1)^n$ ה. $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ ו. $a_n=\frac{n\sin(n)-\cos(n)}{n^2+1}$

<u>תרגיל 5 - הוכח או הפרך</u>

לכל אחת מהטענות הבאות יש לקבוע אם הטענה נכונה או לא. אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה.
אם הטענה איננה נכונה, יש לרשום דוגמא של סדרות שעבורן הטענה איננה מתקיימת.
(ניתן להעזר בדוגמאות של הסדרות ממהתרגיל הקודם).

א. כל סדרה חסומה היא מתכנסת.

ב. כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

ג. מכפלת סדרה מתכנסת לגבול חיובי בסדרה מתבדרת היא בהכרח מתבדרת.

ד. מכפלת 2 סדרות מתבדרות (לא מתכנסות) היא בהכרח מתבדרת.

ה. מכפלת סדרה מתכנסת בסדרה חסומה היא בהכרח מתכנסת.

<u>תרגיל 6 - סדרה חסומה</u>

א. נתונה סדרה: $a_n=(-1)^n$. האם הסדרה חסומה? האם הסדרה מונוטונית? (אין צורך להוכיח).

ב. נתונה סדרה רקורסיבית: $a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n\ ,\quad n=1,2,3,\ldots$. האם הסדרה חסומה? האם הסדרה מונוטונית? (אין צורך להוכיח).