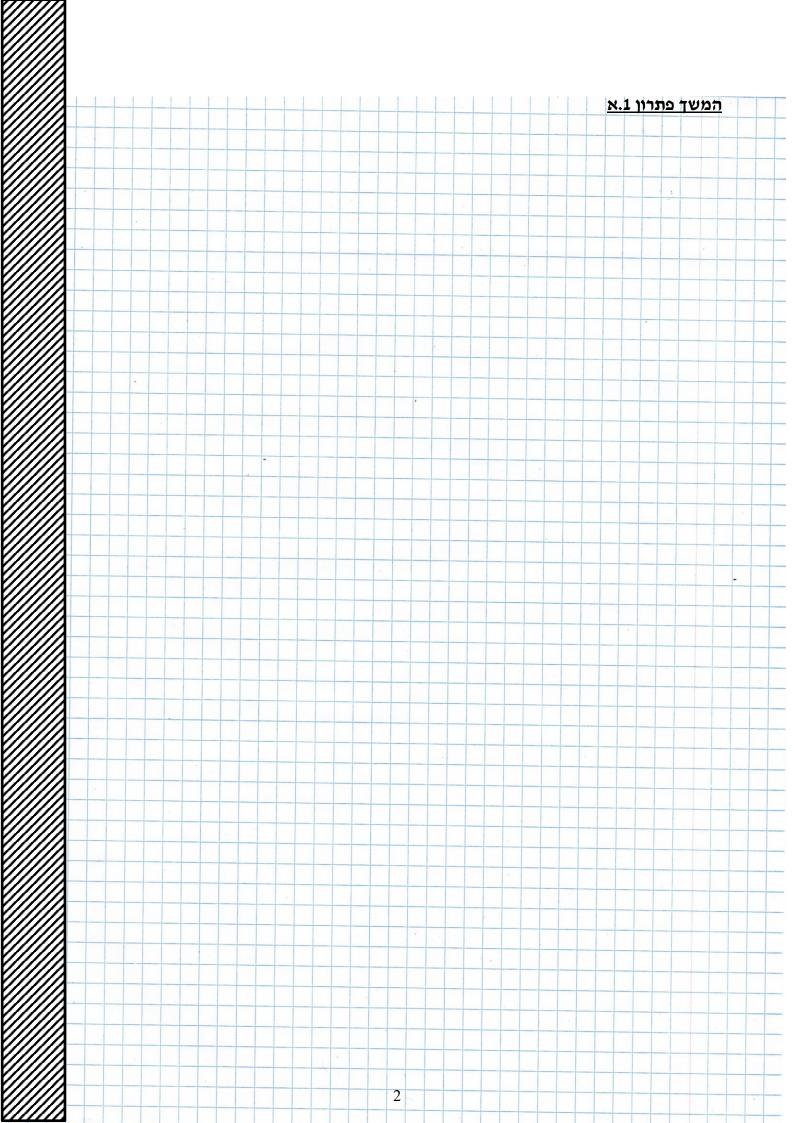
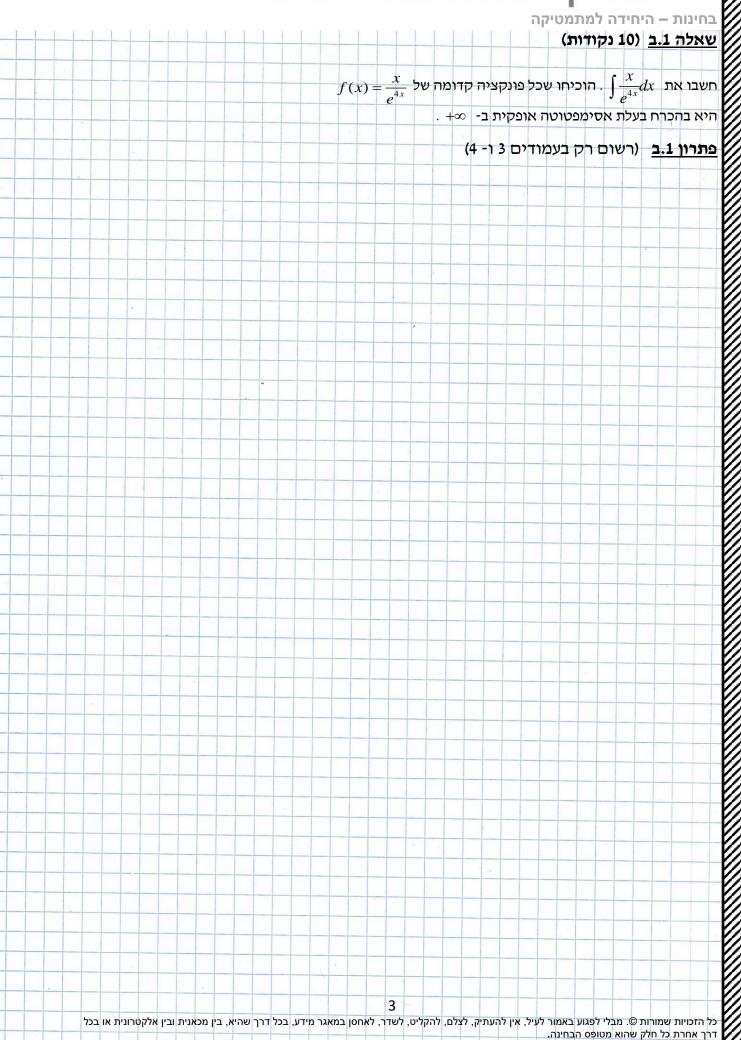
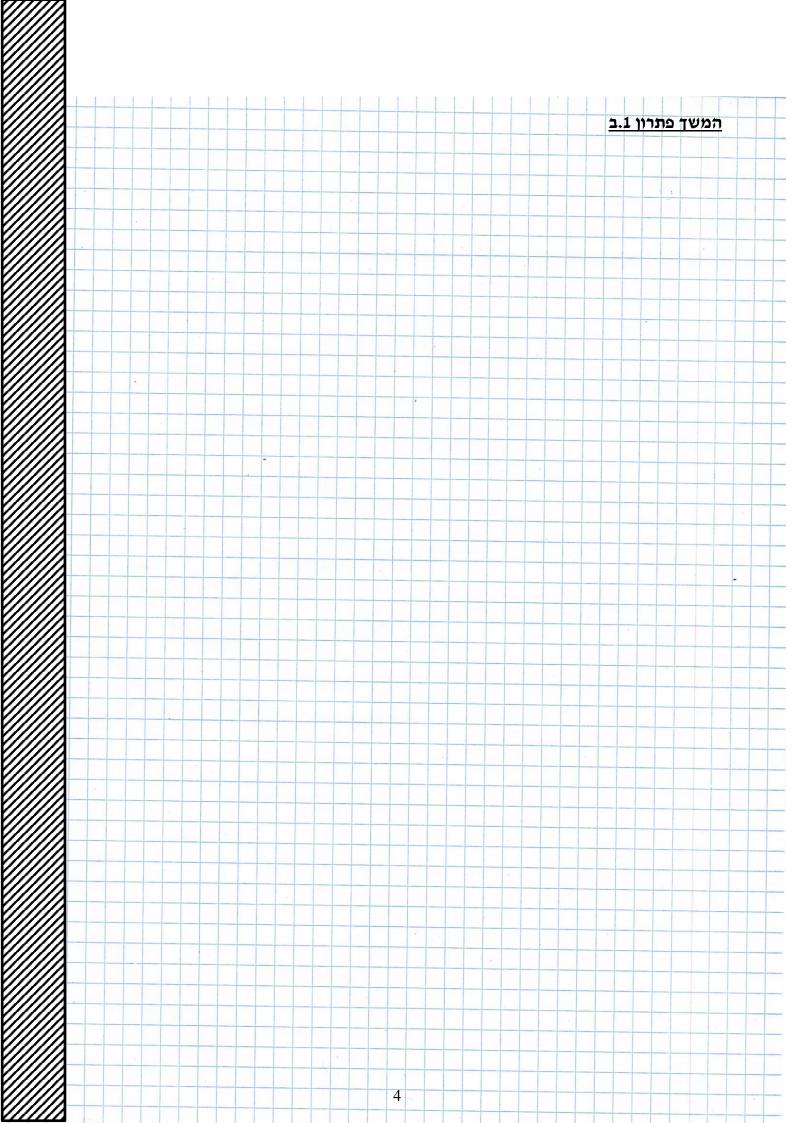


	T7				(40\ 4 4 4 L
	אלון Y				כחינות – היחידה למתמטיק שאלה 1.א (10 נקודות)
4 8		2n ² 1	$8n^2 \perp 2$	$8n^2 + (n-1)$	$8n^2 + n$
		$a_n = \frac{6n + 1}{2^3 + 22}$	$+\frac{3}{3}+(3)+.$	+	$\frac{8n^2+n}{n^3+1}$ הוכיחו שהסדרה.
		n + n			
			غر:	את הגבול $a_n = a_n$. נמי	מתכנסת לגבול סופי ומצאו
	-		! נמקו $n \ge 1$	ש- $m < a_n < M$ לכ	מצאו שני מספרים m,M כן.
				(2 -ן 1 רי דים 1 רי	פתרון 1.א (רשום רק בעמו
-					
		- 4			
				•	
			1		ל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור ל רך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

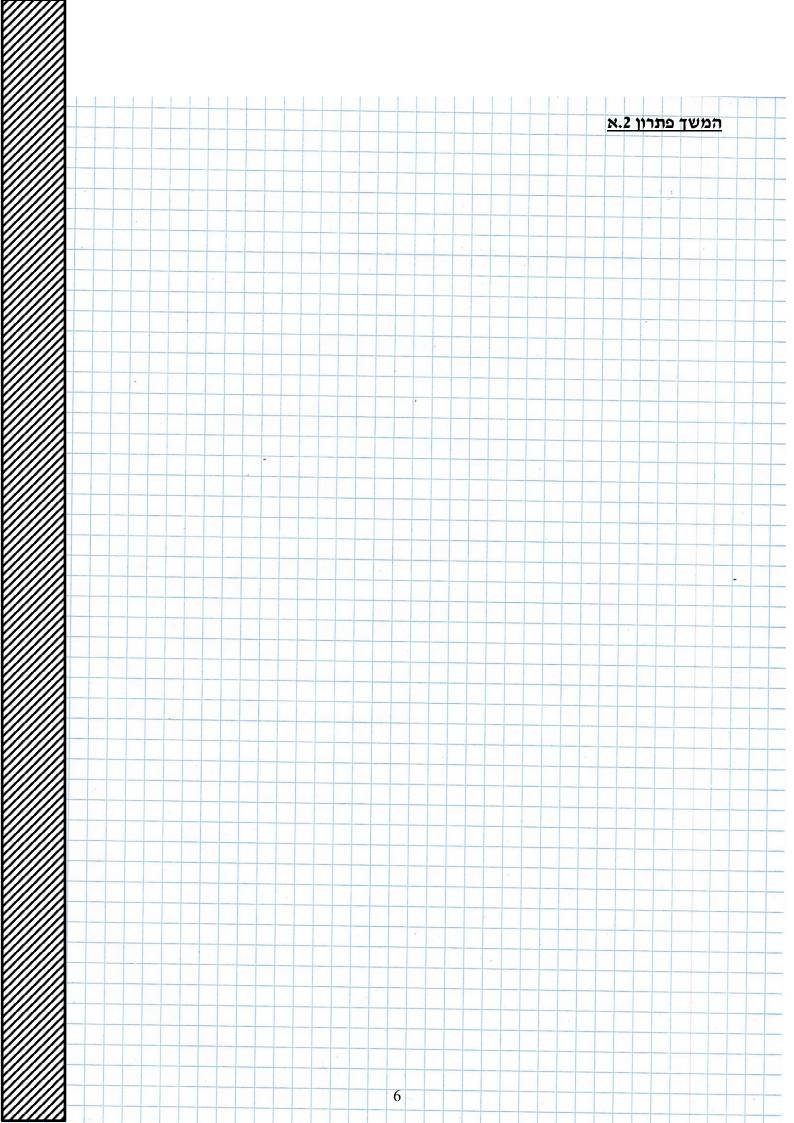






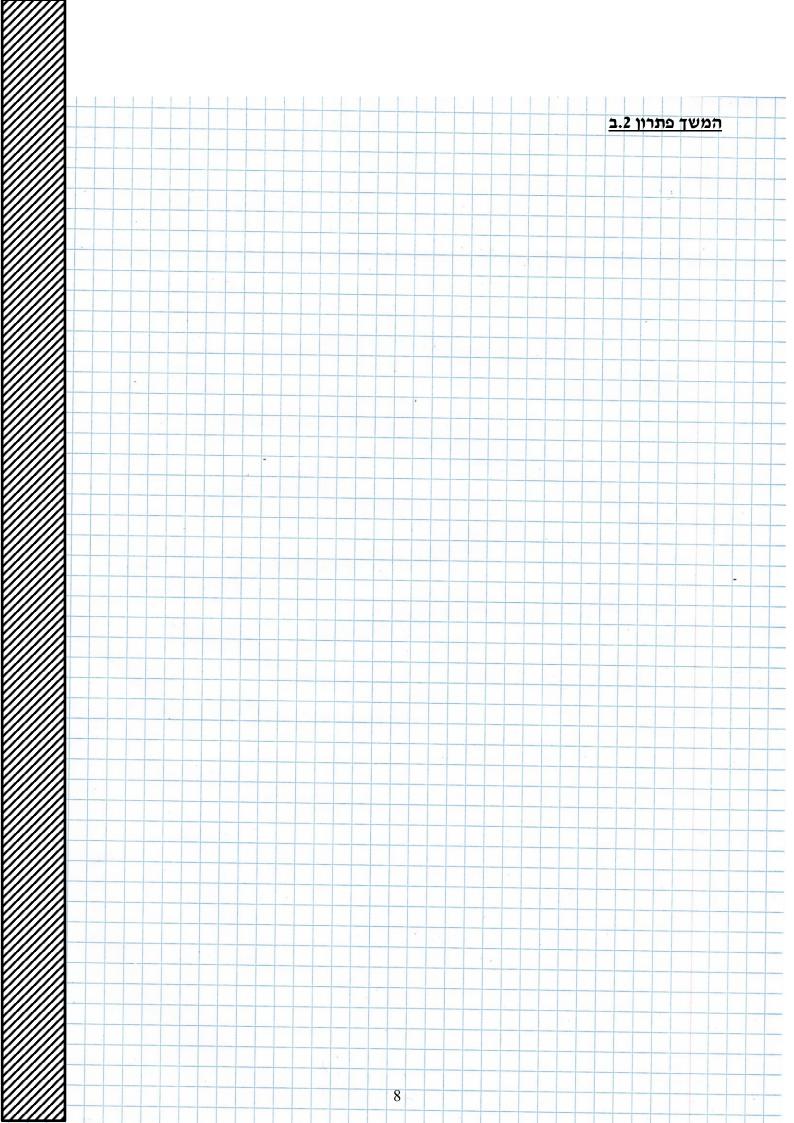


																-												(++	444	. 1	10	4.0	2 4	, 4.	944
		a 8									+		+		+			+	-	-	+	-		+	-	-	-	(311	7);	ר כי	.0)	<u>K.</u>	41	175	12
			+	+	+		-		-		+	-			+	+	-			-				1	4	1									
	+	+		-	+	+	-				-	-	-	3	cos	$\mathbf{s} \mathbf{x}$	+ c	os 3	3x	+ m	<u> </u>	r ≠	π												
	4			1	_										(2	2x	$-\pi$	$)^2$		1111	,	1 7	2											.	
											$\cdot \mid f$	(x)) =	{			-						. 1	: 7	ידי	על j		קציו	פוני	יר	נגד	. <i>m</i>	$i \in$	K	הי
												- 12		m							X	=	$\frac{n}{-}$	+		+		-							
			1									+			1		-	1	+	-	+	+	2	+		-	_								
		-	+	+		-	-		+	-	+			-	π	-	-	-		-	-			-		_			0 (×:
	-		-	-	-	+	+					ווה	מה	<i>x</i> =	= -	- 1	אהק	דעי	$\supset n$	יר וי	וסנ	ם כ	קייו	אם	רא	? L :	‡ l1	$\underset{\pi}{\mathrm{m}}$	f (x) >	גבוי	ז ה	זייכ	ם כ	זא
		_													2	1											х-	$\rightarrow {2}$							
																							קו !	נמי	? f	יה	נקצ	הפו	של	ית	אנכ	טה	יטוי	ימנ	אס
													T		T		1		\top								ľ					•	-		
									-				+		+	-	+	+	+	-		-	(6 -	1 5		ודי	עמ:	ק ב	ר כ	שוכ	ורי	N	.2	רוו	פת
	-	+	+		-				+	-	-	+	-			+	-	_	-		-		-	1	F	1		1			"				
_	-	-	+					-	-		-		-																						
			-																													-			
																				1															
														-																					_
						N													-							-							_		
	-					-		+	+			~			-		-		-																
	-					-			-		1	-	-													*			-						
		-							-																										
																							-		-						-	-		-	_
	Ť							+	+	-	+		-			-	-		-	-			-		-							_			
	+			-				+-		-		-	-				-	*	-																
-	-	+	-	-		-	-	-																											
	_			_																															
							1																												
																					1/4										-				_
								+		H								-	-				-							-	_				
-	+							+		+						-	-																		
	-	-					-	-	-	-	-																								
-	-																																		
																																		_	
																														+	-		-	-	
																					1						-	-		-					
							-	-	-								-																		
								-	-	-																									
							-																												
										45	1																								-
																																			-
																											-								-
															_												_								
									-			1	-																						
																						P													
																														1					
																								,											1
																														-		-			-
																					-							-			4				-
																				_														-	
																												-							
																1																			
																			5		+			-											
1					טרוני																														

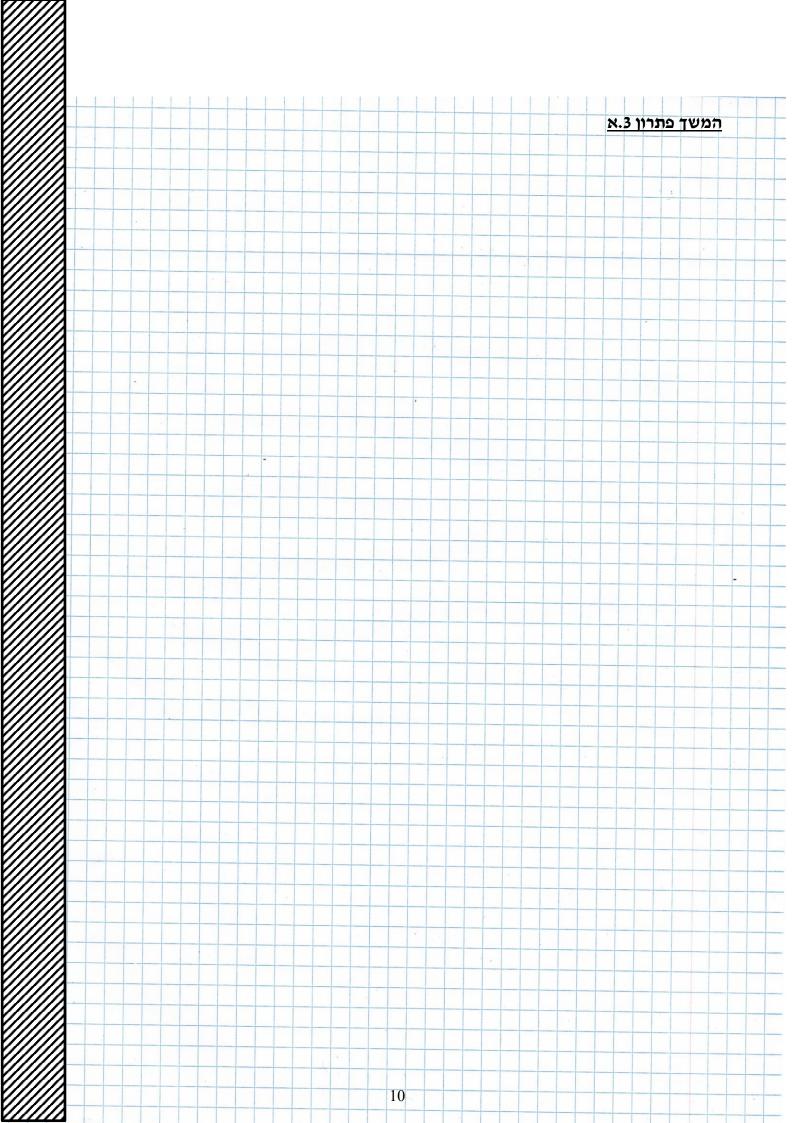




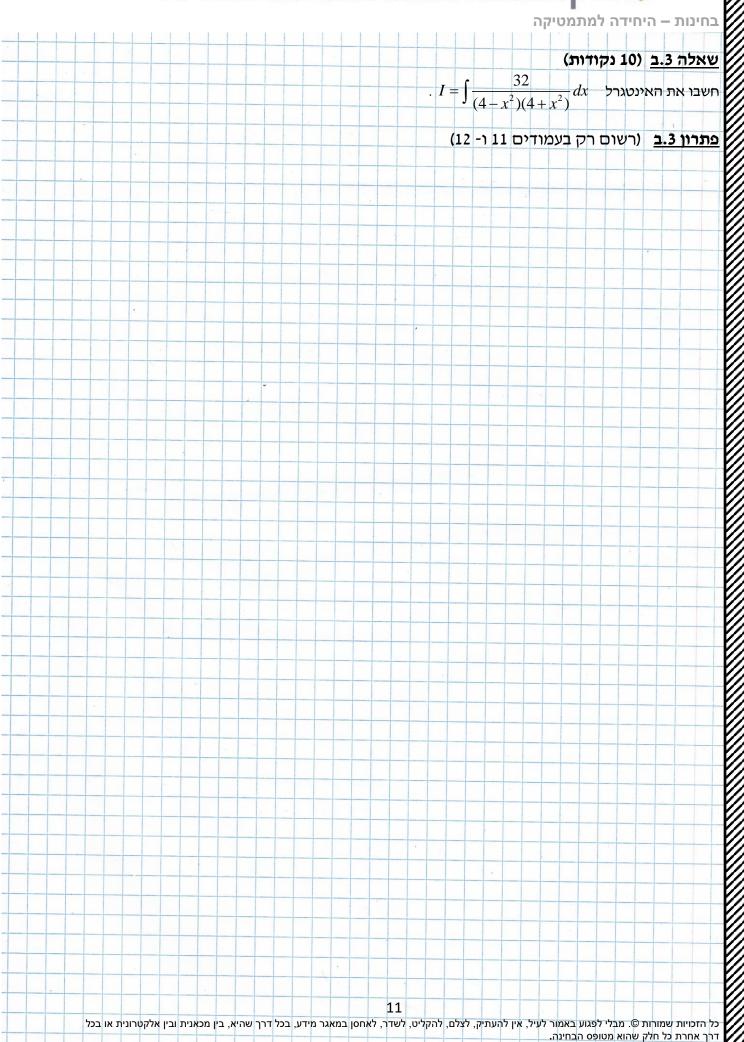
	-																									'''								חינו	
				-														1										ות	111	נק (כ	10)	<u>1.</u>	2 7	אלו	ש
		+	+	+	-	-			-		1 17	ומי	-	D _	- M		5		יניר	7n	M	_1	1	/_	1	/ _	3/	/_	6	9	701	m	ר ועו	יכיח	חר
	+	+	+		+	+	+			-	. 11-	ددرر	· V	4	171		128	3			IVI	T-	/	2		3 -	1	18	4	8	יבו	ובול		,,,	'''
	+	-	+		+	-	+		ור.	איכ	מת	ייה	נקצ	פו	של	n	= 3	יָה	מעי	ז מ	ay	lor	ום	ולינ	ת פ	נזר	בי	$\sqrt{2}$	2 5	ב שי	ירו	וו ק	מצא	: 7 <u>7</u>	רנ
		+	-			-			+		+		+		-			-	+			+													
					+		+										-		+		-		(8	-)]	7 🗀	7	ימו	בע	רק	0,	רשו	<u>ב</u> (.2)	תלו	<u>ور</u>
		Ì	T								+		+		+		-	-	+		-	-		-					-	-				-	
			T						1								-	-			-														
	T		1														+	-			-		-						-	-					
			T												1		+	-	+											-		,			
									-										+																
																	1		1														-		_
					ė				T		T		T																			-	-		
																				,															_
																																			_
																												-							_
												-																							
																			T															-	
																																			-
																T										7									-
																																			-
																						-										+			-
																																		-	
							13																			7									1
																																			1
																				-						7									1
																																			+
																											1							1	+
																											T								+
																																			1
																										T									†
																																			1
																																			Ť
																																			Ť
																																			Ť
							-	1																											T
								_				1	1																						T
																							- August												T
					and have																									1					I
					-112																														T
																														7.	4				T
-																	1/4																		
																												-							
																																			I
															-																			הזכוי ך אחו	
	- 1																		1																1
	-																	-			-		-												

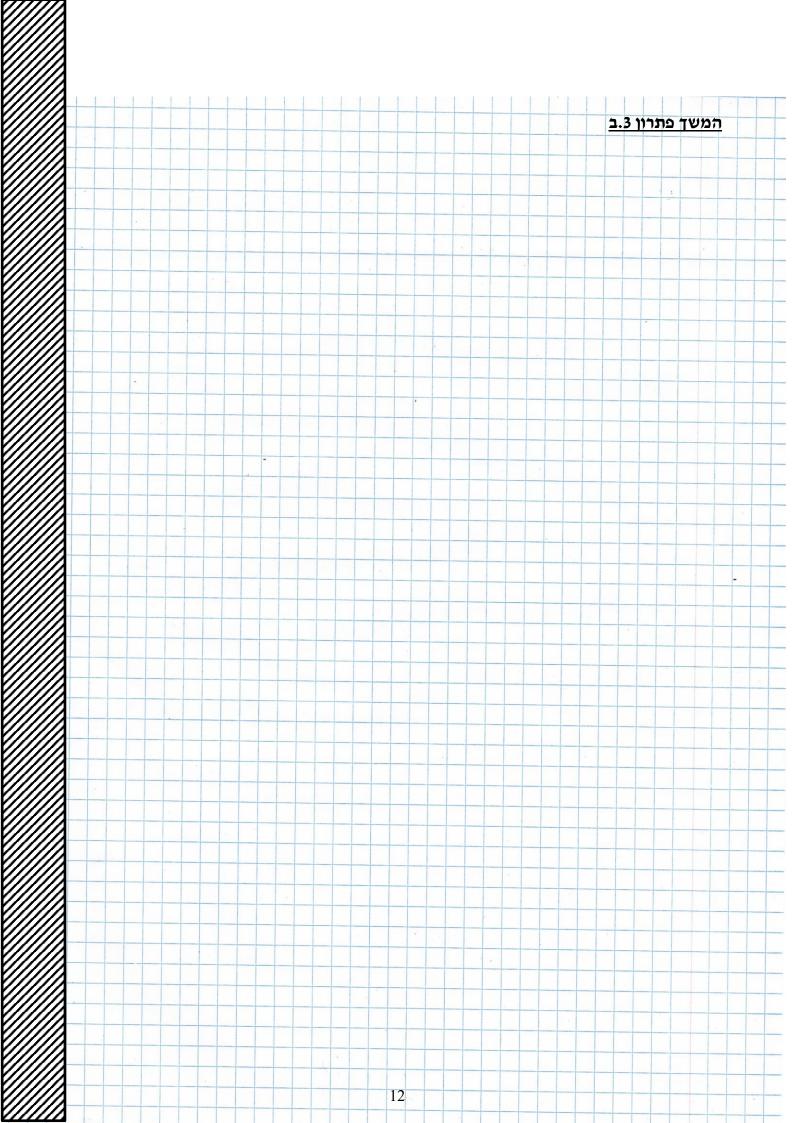


																									(רות י	קו	ر 10)) 2	٧.3	לה	אא
										!	קו	נמ	? L) =	(0,	∞)	0	תחו	ת ב	רכי	י-ע	רוי-	ַחו	f(x)) =	-	Ţν	ייה -	ינקצ	הפו	אם	n .
							חיד:	רון י	פתו	לת	בעי	c	<i>x</i> =	-	ln.	xη	יוא	משו	שה	כד	c	של	בים	זערנ	ל ר:	ת כ	וו א	מצא	. c •	≣ R	הי	٠,
																				/1/											444	
																				(1)	U -	19	′ں	1 1/_	בענ	7	ט (רשו) (X.3	יון	1312
															1													+				
							-	-														,								+	+	
					T	T																							+		1	+
																	-										-			+	+-	-
	T					-																					-		-	-	-	
			+				+	-							-		-								-		-		_			
									-						-																	
																		,														
							-																									
				-	-				-																							
			-	-		-																										
																								1								
-																																
		-																														
		-																														+
																														+		
					-																			+		+	+			-		-
																								+		+			+	+		-
					3															+						-		+	-	-		
																				-		+					-	-		-		-
																			-			-				-	-	-		- 12		-
									,										-		-	-	_	-	-	+	-		-			
																			-	-		-		-		-	-	_	-	_		
-											-							_	_		_	-					_					
											-								_	_				4		_						
-						-							-			_										-						
							- 1		-																							
					*																											
								-																								
																													1			
							-																									
																	1					,					-					
																				-							-	- 1				
															-				+						+	-						
																			+						-		+					
											1					+									-							
											+		+			-			-				-		-							
											-		1	16	-	-							-			-						
									-				-											-). מבל הוא מ				
																_	1							-								

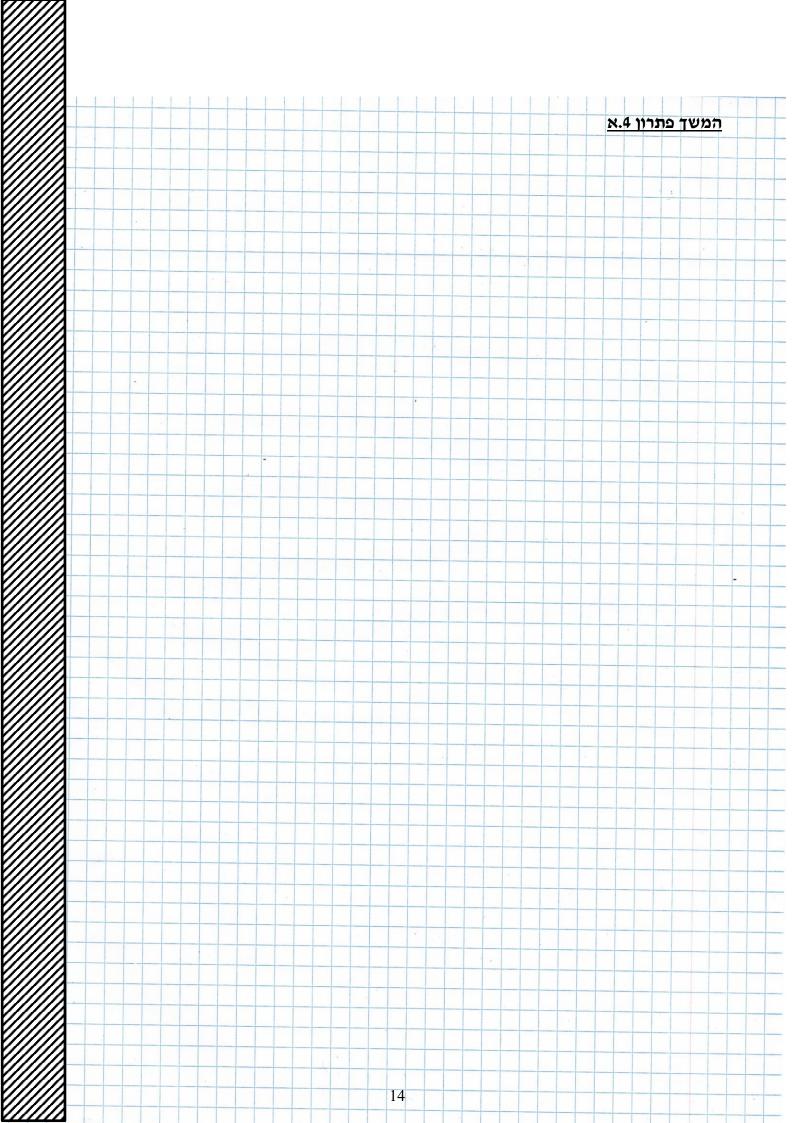








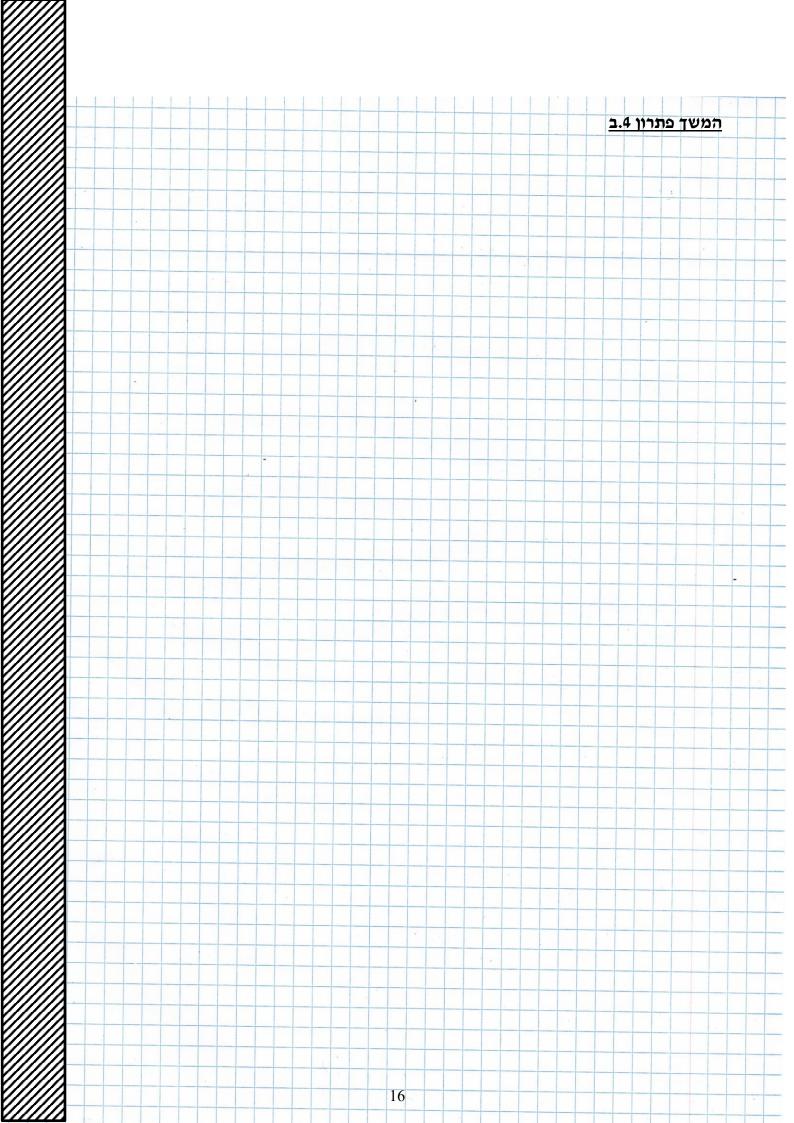
בחינות – היחידה למתמטיקה שאלה 4 (20 נקודות) -נסמן ב $f(x) = 1 + \sin \frac{x}{2}$. נסמן ב , x=0 בנקודה $f\left(x\right)$ בנקודה לגרף הפונקציה בנקודה בנקודה בנקודה לגרף הפונקציה בנקודה $x=\pi$ בנקודה f(x) בנקודה הפונקציה בנקודה $L_{2}:y=m_{2}x+n_{2}$ $[0,\pi]$ בקטע בקטע גרף הפונקציה ל נמצאים מעל גרף הפונקציה בקטע בקטע ווסיחו ששני הקווים $L_{\!_2}$ ו נמצאים מעל גרף הפונקציה ב. (10 נקי) מצאו את שטח התחום החסום על ידי: y = f(x) גרף הפונקציה x=0 משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\pi$ משיק לגרף הפונקציה f בנקודה פתרון 4.א (רשום רק בעמודים 13 ו- 14)



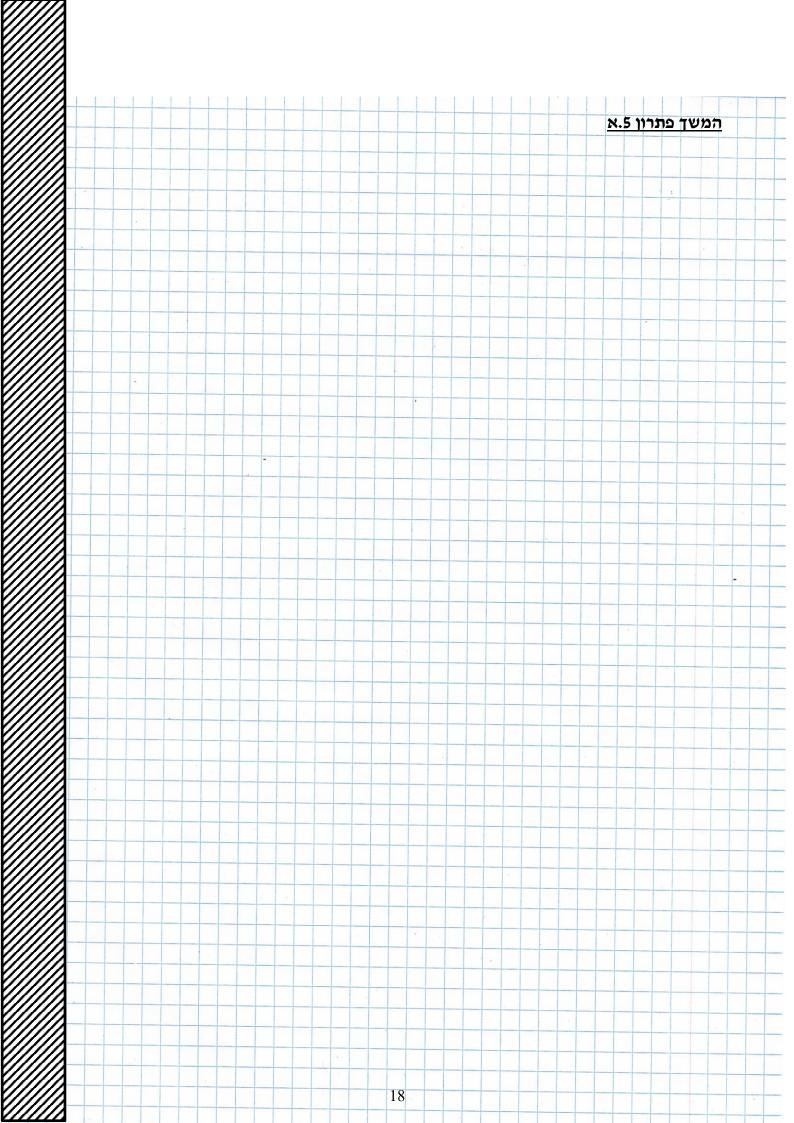
שאלה 4 (20 נקודות)

-נסמן ב $f(x) = 1 + \sin\frac{x}{2}$ נסמן ב

- f(x) בנקודה f(x) קו המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בנקודה בנקודה $L_{\!\!1}:y=m_{\!\!1}x+n_{\!\!1}$
- $x=\pi$ בנקודה f(x) בנקודה לגרף הפונקציה בנקודה בנקודה בנקודה $L_2:y=m_2x+n_2$
- $[0,\pi]$ נקי) הוכיחו ששני הקווים L_1 ו- L_2 נמצאים מעל גרף הפונקציה f בקטע בקטע בקי 10) ג. (10 נקי) מצאן את שטח התחום החסום על ידי:
 - y = f(x) גרף הפונקציה
 - x=0 משיק לגרף הפונקציה f בנקודה
 - $x=\pi$ משיק לגרף הפונקציה f בנקודה
 - פתרון 4.ב (רשום רק בעמודים 15 ו- 16)

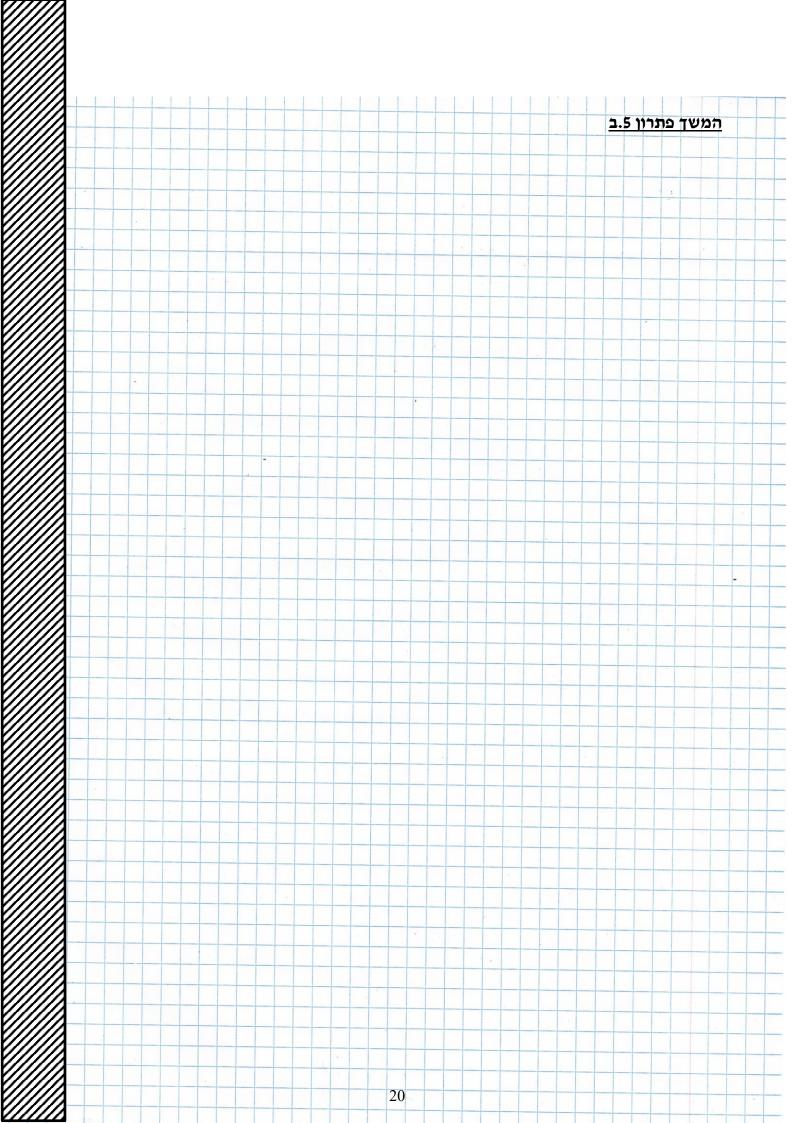


$x \in \sqrt{x}$ עלה $x = x$ (אווי אין $x = x$ אווי אין $x = x$ (אווי אין אין אין אין אין אין אין אין אין אי
$z \in \sqrt{e}, e = \sqrt{e}, e = \sqrt{e}, e = \sqrt{e}$ איני בינייניים אינייניים איניינייים איניינייים אינייניייים אינייניייייייייי
$x \in [\sqrt{\epsilon}, \epsilon \sqrt{\epsilon}]$ אין $\sqrt{\epsilon}$
$x \in [\sqrt{e}, e\sqrt{e}]$ איני אור איני איני איני איני איני איני איני אינ
$x \in \left[\sqrt{e}, e\sqrt{e}\right]$ אים רק בעמורים 17 ר- 18 (18 -1 17 און).
$x \in [\sqrt{e}, e\sqrt{e}]$ אינו אינו אינו אינו אינו אינו אינו אינו
$x \in [\sqrt{e}, e\sqrt{e}]$ איז
$x \in \left[\sqrt{\varepsilon}, e \sqrt{\varepsilon} \right]$ (18 - 17 בעמודים 17 ה-18).
(18 - 7 17 7 7 7 7 7 7 7 7



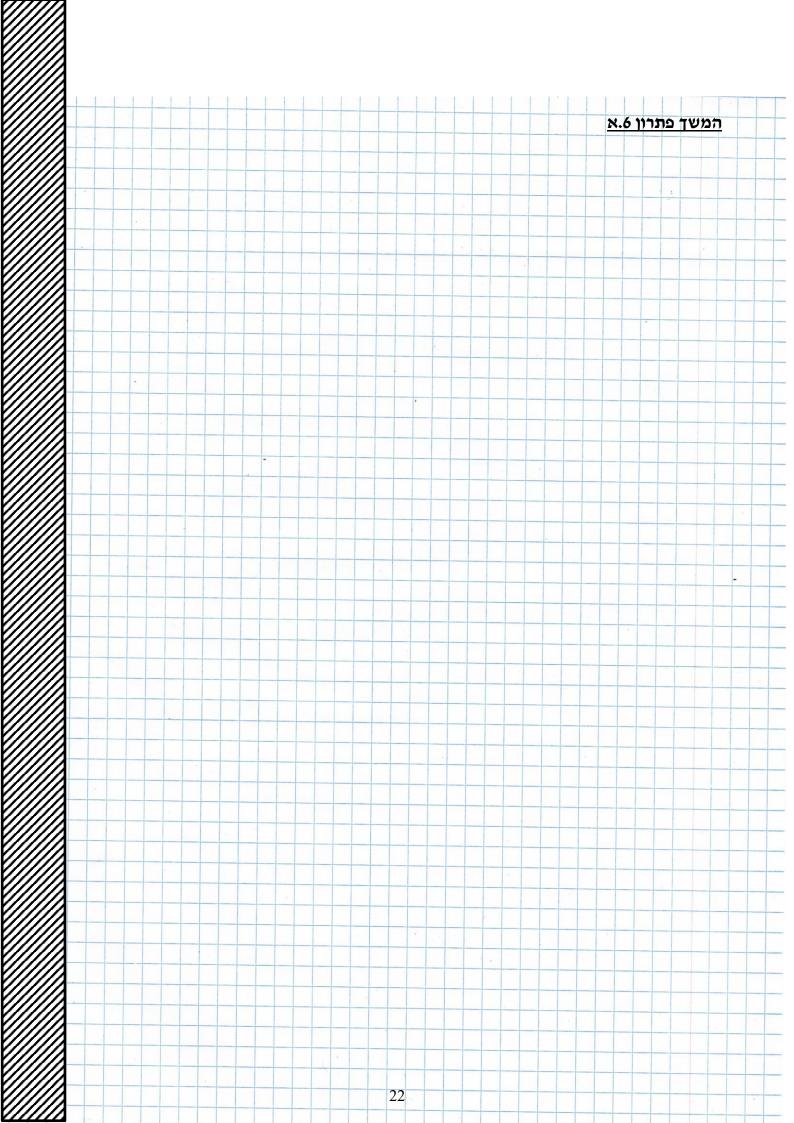
בחינות – היחידה למתמטיקה שאלה <u>5.ב</u> (10 נקודות) $oldsymbol{R}$ -ביפה בf ": $oldsymbol{R} o oldsymbol{R}$ מוגדרת ורציפה ב $f: oldsymbol{R} o oldsymbol{R}$ מוגדרת ורציפה אזי קיימת , f'(b) < -1 ו- f'(a) > 1 כך ש- a < b אזי קיימת Lagrange נקודה c בקטע (a,b) כך ש- f "(c) < (c) בקטע (a,b) בקטע (a,b)פתרון 5.ב (רשום רק בעמודים 19 ו- 20)

דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.



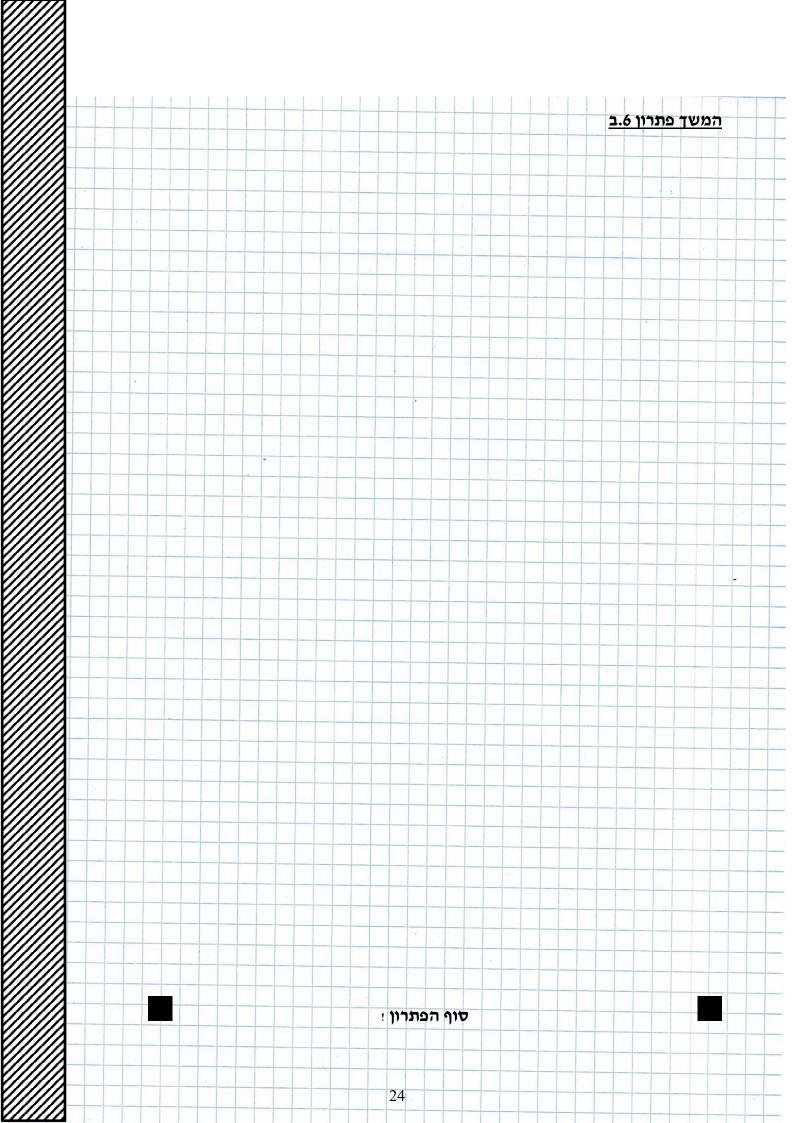


								(לדורנ)	7) 10)	NA	עאלה
								147777	- 20)	24.0	,,,,,,,,
				,	$x^2 - 8x + 2$	20					
		!L:y=0	קביל לקו	G(x) =		$e^{t^2}dt$	פונקציה	ן לגרף הנ	המשיג	כקודה	איזה
		.2.9	1,7 7 - 1,7		0		11-11-11	-1, 1, 1, 1, 1, 1	7 7-11		1,,, -,,-
			? D.	= R תחום	יל <i>G</i> ב	י מוחלט ש	ת קיצו	היא נקוו	a = 4	בקודה	זאם הי
			J								
Ì									-		-
						(22 -1 2:	אודים 1	רק בענ	רשום)	N.6	פתרון
										,	
					- '						
					,						
										The state of the state of	
								-			
	1.										
							E .				
									1		
1											
				24							
		ל דרך שהיא, בין מכאנית ובין:		21			9				-





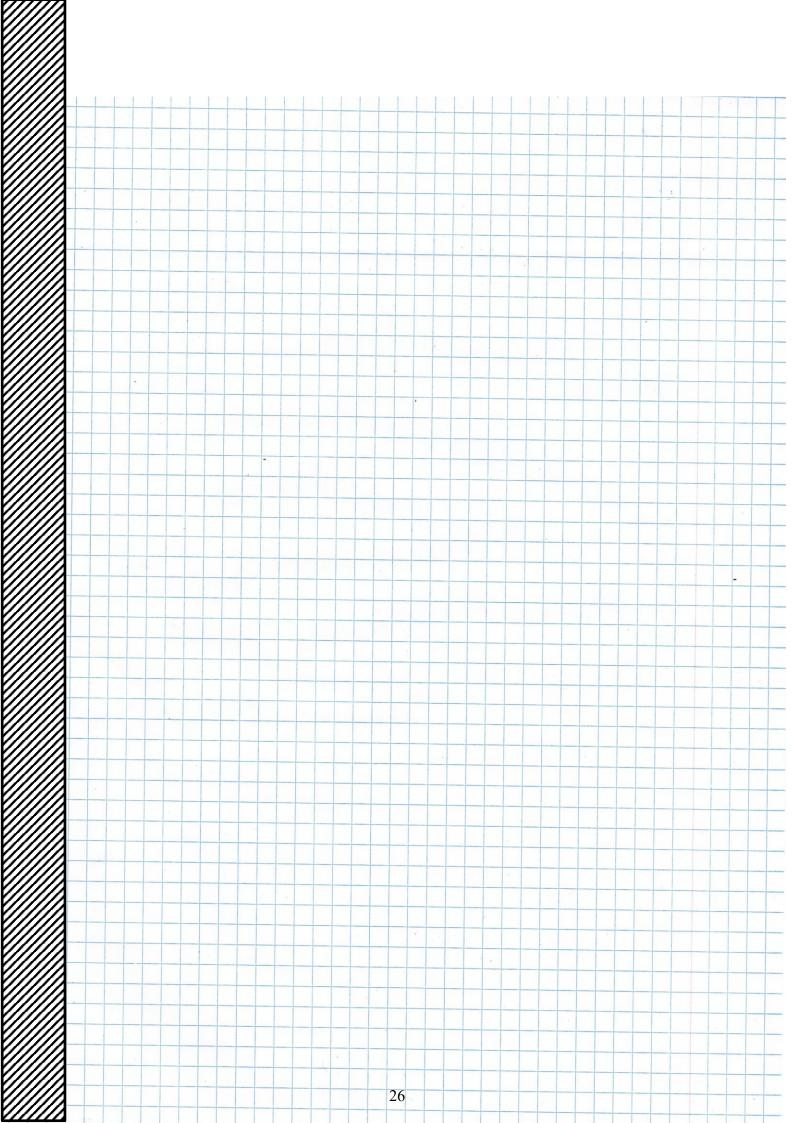
אל	6 ก่:	<u>2</u> .	10)	נק	1171	(5																	1	_		_							
ואם	הטע	נה ו	הבא	ז נכ	ונה :	1																_	_		_							-	
אכ י	Rt	₹ —	: R	o g	ונקו	ציה	ז חיג	שומ	,n	≤1	c) :	g(.	,	לכל	R	$x \in$	-۱.	R	\rightarrow]	R-	f:	פו	נקצ	יה	בעכ	ַרנ.					-	+	-
בול	סופי	(x)	f(lin	L =	٧.,	11 K	ם פ	ונכ	זצי	ית	זמי	:פל) 7	g(x)	.).	f (x	_	(x)	h	בעכ	ית ג	בוכ	סו	>2	-	_			-	-	-	-
)	$x \rightarrow 0$																			-				1			-	-	-	-
,	רה 0																										_		-		-	-	-
	זטענר זעב י	1					ברוו	ו בזנ	112	HU	α.	-	טע	11.	אנ	כונ	,,	וביי	IC	111	, נבזו	ו נגו	را د.	דב	111.	'					_		_
ונכייו	טית א	1 10	צוו	<i>)</i> 11	ו פיו	.,																											
7779	.6 11	7	ורני	עור	77 1	7 7	מעי	ירדי	יח	23	- i	24													-								_
12 12	.0	_=	1)			Ţ'	ـ لات	1,1/			1																						_
		•																															
													,																				
						-																											
		- 1				-																											
						-								,																			
																						u.											
					-			-															-										
																																	-
	-									-																							
																									-	+	-	+					
											4			_										-	-	-	-						
.9																×.										+	-			-			1
																									-	+				-			
																										-	-			-		_	1
			-						2																		1	-		_			7
		1111																															-
1																																	
																													7				
										7		T																					
+																																	
+											1	T																					
-				+							1																-						
				+						\dagger	\dagger	1	1										17	47									
	-	+		+				-	+			+	+																				
		-									-		1																				ſ
	-							-		-	+	+																					T
		-						_		+																							1
		-		1						+		-																					
								-		-	-		-				+																
		-		-		-				-	-	-	+	-	-																		
		_	4										+																				-
		_											-						+										1				
		_				1-								-		-			+			-								-			
										_						_			_		_	_							+				
											_						-		1		_			-						-		-	-
																			-				_		-							-	-
			נ ©. נ שהוי				1						- 1		3	- 2																	





AFEKA בתל-אביב לה האקדמית להנדסה בתל-אביב AFEKA TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING בחינות – היחידה למתמטיקה

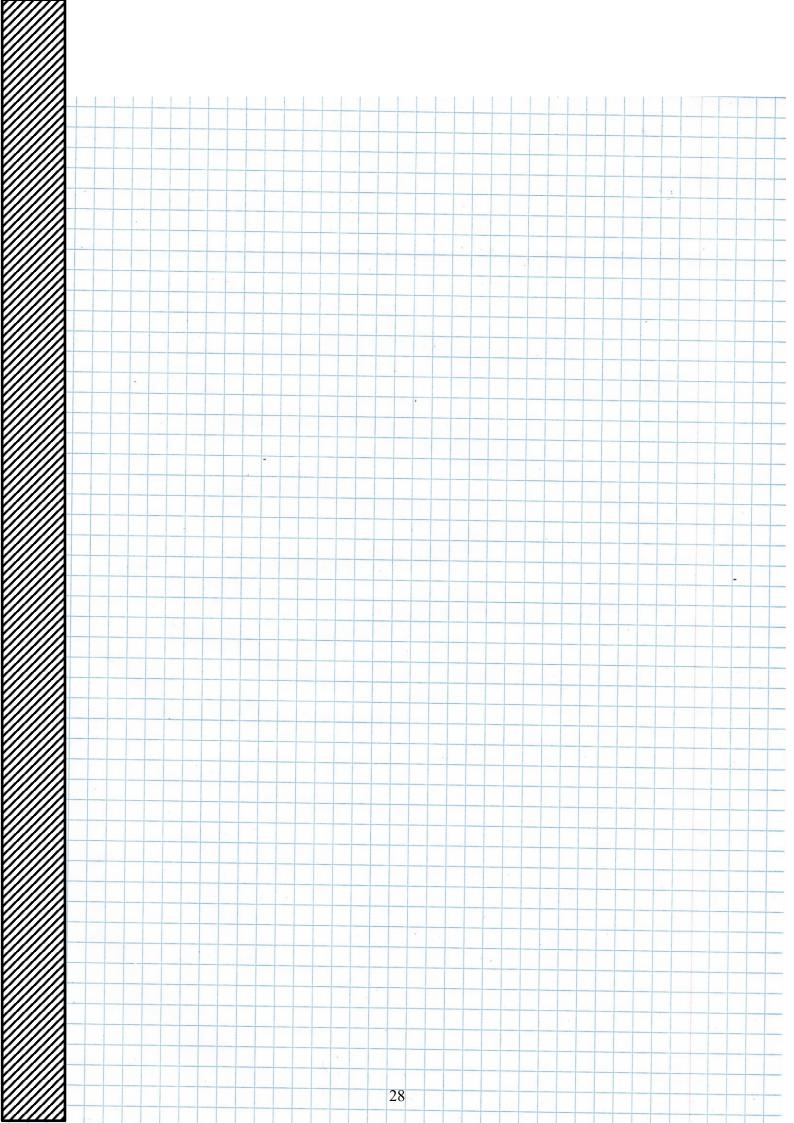
דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.





AFEKA בתל-אביב לה האקדמית להנדסה בתל-אביב AFEKA TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING בחינות – היחידה למתמטיקה

דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.



פתרון Y מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

שאלה 1.א (10 נקודות)

$$a_n = \frac{8n^2 + 1}{n^3 + n} + \frac{8n^2 + 2}{n^3 + (n - 1)} + \dots + \frac{8n^2 + (n - 1)}{n^3 + 2} + \frac{8n^2 + n}{n^3 + 1}$$
 הוכיחו שהסדרה.

ימקו! . $\lim_{n\to\infty}a_n$ מתכנסת לגבול סופי ומצאו את מופי ומצאו

. נמקו ו $n \geq 1$ לכל , $m < a_n < M$ - פך ש- m, M לכל מספרים מספרים.

פתרון

ברור ש-
$$\frac{8n^2+1}{n^3+n}<\frac{8n^2+2}{n^3+(n-1)}<...<\frac{8n^2+n}{n^3+1}<\frac{8n^2+n}{n^3+1}$$
 - ברור ש- $\frac{8n^2+1}{n^3+n}\leq a_n\leq \underbrace{n\frac{8n^2+n}{n^3+1}}_{V_n}$

.(בגלל שיש n מחוברים המחובר הכי הוא המחובר הכי קטן ו- $\frac{8n^2+1}{n^3+n}$ הוא המחובר הכי גדול).

$$y_n := n \frac{8n^2 + n}{n^3 + 1} = \frac{8 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \to \infty} 8$$
, $x_n := n \frac{8n^2 + 1}{n^3 + n} = \frac{8 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \to \infty} 8$ -expression - $x_n := n \frac{8n^2 + 1}{n^3 + n} = \frac{8 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \to \infty} 8$

.8 - מתכנסת (a_n) מתכנסת שהסדרה גוררים הסנדוויץ: גוררים $x_n \leq a_n \leq y_n$ (I) לכן, האי-שיוויון הכפול

$$y_n = 0 < a_n < 9 = M$$
 - ערור ש- (I) גורר ש $y_n = \frac{8 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} < \frac{9}{1}, \;\; x_n = n \frac{8n^2 + 1}{n^3 + n} > 0$ ברור ש- 0

שאלה 1.ב (10 נקודות)

 $f(x)=rac{x}{e^{4x}}$ חשבו את הוכיחו שכל פונקציה שכל הוכיחו . $\int rac{x}{e^{4x}}dx$ היא בהכרח בעלת אסימפטוטה אופקית ב-

פתרון

: בעזרת אינטגרציה בחלקים בעזרת אינטגרציה של פונקציה פונקציה של $f(x) = \frac{x}{e^{4x}}$

$$\int \frac{x}{e^{4x}} dx = \int x e^{-4x} dx = \int x \cdot \left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right)' dx = x \cdot \left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right) - \int (x)' \cdot \left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right) dx = \frac{x}{-4e^{4x}} + \frac{1}{4} \int e^{-4x} dx = \frac{x}{-4e^{4x}} + \frac{x}{4} \int e^{-4x} dx$$

: מסקנה

, $F(x)=rac{-4x-1}{16e^{4x}}+C$ אז $f(x)=rac{x}{e^{4x}}$ אם y=F(x) אם y=F(x)

: כאשר C מהווה קבוע ממשי כלשהוא. לכן , כלל לופיטל גורר שהגבול

$$L = \lim_{x \to \infty} F(x) = C + \lim_{x \to \infty} \frac{-4x - 1}{16e^{4x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = C + \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{16 \cdot 4e^{4x}} = C + 0 = C$$

y=C ב- y=C ב- בעלת אסימפטוטה אופקית בעלת y=F(x) ב-



שאלה 2.א (10 נקודות)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3\cos x + \cos 3x}{(2x - \pi)^2} + m, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ m, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
יהי $m \in \mathbb{R}$ יהי $m \in \mathbb{R}$

האם $x=\frac{\pi}{2}$ האם קיים מספר יים נאם אם ווה ווה בול ווה בול ווה בול ווה בול ווה בול ווה בול ווה ווה בול ווה

! נמקו f אסימפטוטה אנכית של הפונקציה ומקו

פתרון

ידוע שהקו מהגבולות החד אסימפטוטה אנכית של הפונקציה f אם ורק אסימפטוטה אנכית אסימפטוטה אנכית אינסופי. $x=\frac{\pi}{2}$

: L'Hôpital קיים פעמיים פעמיים בכלל קיים וסופי. בכלל בכלל בכלל בכלל $L = \lim_{x \to \pi/2} f(x)$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{3\cos x + \cos 3x}{(2x - \pi)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-3\sin x - 3\sin 3x}{2(2x - \pi) \cdot 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = -\frac{3}{4} \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x + 3\cos 3x}{2} = 0$$

 $m \in \mathbf{R}$ לכן הגבול , $x = \frac{\pi}{2}$, לכל הנתונה רציפה הנתונה אייא הפונקציה הנתונה , $\lim_{x \to \pi/2} f(x) = m = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

. f כך שהקו כך אנכית אסימפטוטה אסימפטוטה ב ב מהווה מספר כך שהקו כך מסיקים שלא כיים מספר מספר מסיקים שלא הפונקציה

AFEKA בתל-אביב לה האקדמית להנדסה בתל-אביב AFEKA TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING

בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 2.ב (10 נקודות)

. נמקו ! נמקו . $\left|\sqrt{2}-M\right|<\frac{5}{128}$ מקיים $M=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{48}=\frac{69}{48}$ נמקו והוכיחו שהמספר

. ממעלה n=3 של פונקציה מתאימה בעזרת פולינום בעזרת פולינום $\sqrt{2}$

פתרון

. f(2)=1 . a=2 סביב n=3 ממעלה $f(x)=\sqrt{x-1}$ של Taylor של Taylor טביב נמצא את הפולינום

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2};$$
 $f''(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x-1)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{(3)}(2) = \frac{3}{8}; \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x-1)^{-\frac{7}{2}}$$

a=2 היא: מכאן נקבל שנוסחת טיילור של $f(x)=\sqrt{x-1}$ אם טיילור של מכאן נקבל איילור

$$f(x) = \sqrt{x-1} = 1 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{3}{48}(x-2)^3 + R_3(x)$$

x=3 באבת עייי הצבת הקירוב הדרוש עייי הצבת , $\sqrt{2}=\sqrt{3-1}=f(3)$ - כאשר אייה הארית. הואיל איי הצבת $R_3(x)$

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48} = \frac{69}{48} = M$$

: <u>שלב ב</u>: השארית היא

בנוסחה שקיבלנו, כלומר:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-2)^4 = -\frac{15}{16\cdot 24}(c-1)^{-7/2}(x-2)^4$$

: איא היא: אוכן $\sqrt{c-1}^7 > \sqrt{2-1}^7$ לכן x=3 וכן 2 < c < 3

$$\left| \sqrt{2} - \frac{69}{48} \right| = \left| R_3(3) \right| = \left| -\frac{15}{16 \cdot 24} \cdot \frac{1}{\sqrt{c-1}^7} (3-2)^4 \right| = \frac{15}{16 \cdot 24} \cdot \frac{1}{\sqrt{c-1}^7} < \frac{15}{384} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-1}^7} = \frac{15}{384} = \frac{5}{128}$$

פתרון נוסף

. f(1)=1 . a=1 סביב n=3 ממעלה $f(x)=\sqrt{x}$ של Taylor של את הפולינום שלב א: נמצא את הפולינום

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} \implies f'(1) = \frac{1}{2} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{2}} \implies f''(1) =$$

 $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$ $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x)^{-\frac{7}{2}}$

: היא a=1 הנקודה 3 ממעלה הנקודה $f(x)=\sqrt{x}$ של טיילור שנוסחת מכאן מכאן מכאן מכא

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{48}(x-1)^3 + R_3(x)$$

בנוסחה בנוסחה אבת x=2 היא השארית. הואיל ש- $\sqrt{2}=f(2)$, נקבל את הקירוב הדרוש עייי הצבת $R_3(x)$

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48} = \frac{69}{48} = M$$
 : שקיבלנו, כלומר

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4 = -\frac{15}{16 \cdot 24}(c)^{-\frac{7}{2}}(x-1)^4$$
 אַלב ב : השארית היא

: איא היא לשגיאה וכך $\sqrt{c}^7 > \sqrt{1}^7$ לכן לכן a = 1 < c < 2 = xכאשר כאשר היא וכן a = 1 < c < 2 = x

$$\left| \sqrt{2} - \frac{69}{48} \right| = \left| R_3(2) \right| = \left| -\frac{15}{16 \cdot 24} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}^7} (2 - 1)^4 \right| = \frac{15}{16 \cdot 24} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}^7} < \frac{15}{384} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}^7} = \frac{15}{384} = \frac{5}{128}$$

AFEKA בתל-אביב לה האקדמית להנדסה בתל-אביב AFEKA TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING

בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 3.א (10 נקודות)

! נמקו ו $D=(0,\infty)$ בתחום חד-חד-ערכית $f(x)=-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ מקו וויים הפונקציה .1

. בעלת פתרון יחיד. $c\sqrt{x}=-\ln x$ יחיד. כך שהמשוואה כל הערכים את מצאו את מצאו . $c\in\mathbf{R}$ יהי .2

פתרון

המשוואה הנתונה שקולה ל- $-\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = c$, המשוואה הנתונה שקולה ל- המשוואה הנתונה אייא וואה המשוואה הנתונה איי

 $:(0,\infty)$ בקטע הנגזרת את נחשב הגדרה הגדרה $f(x)=-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, f(x)=c

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x}{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}.$$

 $x = e^2$ ו- $x > e^2$ יש נקודה קריטית יחידה f'(x) < 0 ו- f'(x) < 0 לכן לכן לכל לכן הייטית יחידה לכן לכל הייטית יחידה לכן הייטית הייטית יחידה לכן הייטית הי

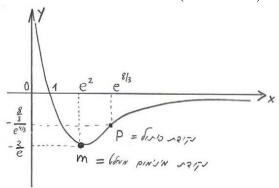
בנוסף, מרציפות הפונקציה ($\left(e^{2},+\infty\right)$ ויורדת ממש בקטע (בנוסף, מרציפות אולה ממש בקטע ($\left(e^{2},+\infty\right)$

. היא נקודת מינימום מוחלט חידה $\mathbf{m} = \left(e^2, f(e^2)\right) = \left(e^2, -\frac{2}{e}\right)$ היא נקודת מינימום מוחלט יחידה

לא קיימות נקודות קיצון מקומיות אחרות. הקוx=0 אסימפטוטה אנכית יחידה כי הפונקציה רציפה בכל לא קיימות נקודות קיצון מקומיות אחרות. הקו $y=0 \ . \lim_{x\to 0+} f(x) = -\lim_{x\to 0+} \ln x \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = -(-\infty)\cdot \infty = \infty$ היא אסימפטוטה תחום ההגדרה והגבול

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = [l'H\hat{o}pital] = -\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -\lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

. היא נקודת פיתול יחידה $P = \left(e^{8/3}, f(e^{8/3})\right)$ היא נקודת פיתול יחידה אפשר בדוק שהנקודה



לפי הגרף שקיבלנו:

. D חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות ולכן f לא חד-חד-ערכית בתחום y=-0.01

c = -2/e או $c \ge 0$ או ורק אם ורק אחת בלבד אחת בלבד אחת גרף הפונקציה בנקודה אחת v = c חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת



<u>שאלה 3.ב</u> (10 נקודות)

.
$$I = \int \frac{32}{(4-x^2)(4+x^2)} dx$$
 חשבו את האינטגרל

פתרון

$$16-x^4 = (4-x^2)(4+x^2) = (2-x)(2+x)(4+x^2)$$
 ברור ש-

 $f(x) = \frac{32}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}$ נבצע את הפרוק לשברים חלקיים פשוטים של הפונקציה הרציונלית

$$\frac{32}{(2-x)(2+x)(4+x^2)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} + \frac{Cx+D}{4+x^2}$$

: המונים בשני האגפים שווים

$$32 = A(2+x)(4+x^2) + B(2-x)(4+x^2) + (Cx+D)(2-x)(2+x)$$

: נציב

$$\begin{cases} x = 2 \implies 32 = A \cdot 4 \cdot 8 & \Rightarrow A = 1 \\ x = -2 \Rightarrow 32 = B \cdot 4 \cdot 8 & \Rightarrow B = 1 \\ x = 0 \Rightarrow 32 = 8A + 8B + 4D \Rightarrow D = 4 \\ x = 1 \Rightarrow 32 = 15 + 5 + 3(C + 4) \Rightarrow C = 0 \end{cases}$$

: לכן

$$I = \int \frac{32}{(4 - x^2)(4 + x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x} + \frac{4}{4 + x^2}\right) dx =$$

$$= -\ln|x - 2| + \ln|x + 2| + 4 \cdot \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C = \ln\left|\frac{x + 2}{x - 2}\right| + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$



שאלה 4 (20 נקודות)

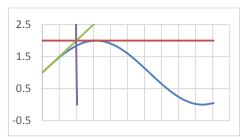
נתונה פונקציה $f(x) = 1 + \sin \frac{x}{2}$. נסמן ב-

- ; x=0 בנקודה f(x) בנקודה לגרף הפונקציה $L_1:y=m_1x+n_1$
- $x=\pi$ בנקודה f(x) בנקודה המשיק לגרף המשיק לגרף בנקודה $L_2:y=m_2x+n_2$

 $egin{aligned} \left[0,\pi
ight]$ בקטע f הפונקציה מעל גרף נמצאים נמצאים ו- L בקטע בקטע שעני הקווים (10 נקי) בקטע (10 נקי) מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

- ; y = f(x) גרף הפונקציה
- ; x = 0 משיק לגרף הפונקציה f בנקודה
- . $x=\pi$ משיק לגרף הפונקציה f בנקודה

<u>פתרון א</u>



ברור ש- הענייה השנייה השנייה ושלילית . f " $(x) = -0.25\sin\left(x/2\right)$ ו - ו f " $(x) = 0.5\cos\left(x/2\right)$ - שברור ש- ברור הפונקציה f בקטע הפונקציה f בקטע בקטע f " $(x) \le 0$ ו זה גורר ששני המשיקים וור- בקטע הפונקציה וור- בקטע הפונקציה וור- ששני המשיקים וור- בקטע הפונקציה וור- ששני המשיקים וור- בקטע וור- ששני המשיקים וור- בקטע ו

$$0 \le x \le \pi$$
 לכל , $f(x) = 1 + \sin \frac{x}{2} \le m_1 x + n_1$, $f(x) = 1 + \sin \frac{x}{2} \le y = m_2 x + n_2$: $\left[0, \pi\right]$

x=0 בתרון ב משוואת משיק בנקודה

$$f(0) = 1$$
, $f'(0) = 0.5$, $y = f(0) + f'(0)x \implies L_1 : y = 0.5x + 1$

. L_2 : y=2 : היא $x=\pi$ משוואת המשיק בנקודה

 $0 \le x \le \pi$ לכל , $f(x) \le 2$ ו- $f(x) \le 0.5x + 1$: לפי סעיף הקודם

משיקים נחתכים בנקודה (x,y) = (2,2). לכן

$$S = \int_{0}^{2} ((0.5x+1) - f(x)) dx + \int_{2}^{\pi} (2 - f(x)) dx = \int_{0}^{2} ((0.5x+1) - (1 + \sin\frac{x}{2})) dx + \int_{2}^{\pi} (2 - (1 + \sin\frac{x}{2})) dx$$

$$S = \int_{0}^{2} \left(0.5x - \sin\frac{x}{2} \right) dx + \int_{2}^{\pi} \left(1 - \sin\frac{x}{2} \right) dx = \left(0.25x^{2} + 2\cos\frac{x}{2} \right) \Big|_{0}^{2} + \left(x + 2\cos\frac{x}{2} \right) \Big|_{2}^{\pi}$$

$$= (1 + 2\cos(1)) - 2 + \left(\pi + 2\cos\frac{\pi}{2} \right) - (2 + 2\cos(1)) = -1 + 2\cos(1) + \pi - 2 - 2\cos(1) = \pi - 3.$$

שאלה 5.א (10 נקודות)

. $x \in \left\lceil \sqrt{e}, e\sqrt{e} \right\rceil$ לכל , $0.75 \le 2 \ln x - \ln^2 x \le 1$ - הוכיחו ש

פתרון

. $x \in \left\lceil \sqrt{e}, e\sqrt{e} \right\rceil$ בקטע בקטע $0.75 \le 2 \ln x - \ln^2 x \le 1$ צריכים להראות ש

לפי משפט Weierstrass הפונקציה הרציפה הרציפה אחד הפונקציה הרציפה אחד הרציפה עלת נקודות הרציפה אחד הרציפה אחד הרציפה אחד אחת מנקות הקיצון המוחלטות של x^* אז x^* מקיימת אחד הרצים החתנאים הבאים:

- $x^* = \sqrt{e}$ אנ $x^* = e\sqrt{e}$.1
- x^* הפונקציה f לא גזירה בנקודה.
- והנגזרת מתאפסת בנקודה הזאת $\sqrt{e} < x^* < e\sqrt{e}$ והנגזרת פנימית גזירה בנקודה הזאת .3 לפי משפט לפי משפט לפי משפט .

$$x>0$$
 לכל , $y'=f'(x)=2\frac{1}{x}-2(\ln x)\frac{1}{x}=2\frac{1-\ln x}{x}$: חישוב הנגזרת

לא קיימות נקודות אי גזירות בתחום D.

. x=e זייא רק עבור הנקודה וו $\ln x=1$ כאשר רק מתאפסת הנגזרת

קיבלנו 3 נקודות חשודות לקיצון: $x^* \in \left\{e, \sqrt{e}, e\sqrt{e}\right\}$ נקודות חשודות קיבלנו 3 נקודות קיבלנו

: של הפונקציה $y = f(x) = 2\ln x - \ln^2 x$ בנקודות החשודות

$$f(e) = 1$$
, $f(\sqrt{e}) = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = 0.75$, $f(e\sqrt{e}) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = 0.75$

. $y_{\max} = f(e) = 1$, $y_{\min} = f(\sqrt{e}) = f(e\sqrt{e}) = 0.75$ לכן ערכי הקיצון המוחלט של - שווים ל- שווים ל-



שאלה 5.ב (10 נקודות)

 $\mathbf{R} - \mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה ב- $\mathbf{R} - \mathbf{R} - \mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה ב- נתונה פונקציה הוכיחו שאם קיימות שתי נקודות a < b כך ש-a < b אזי קיימת הוכיחו שאם קיימות שתי נקודות .Lagrange נקודה במשפט אפשר להשתמש במשפט . f''(c) < 0 - כך ש(a,b) כך כקודה c

פתרון

בקטע [a,b] הפונקציה f' היא גזירה ורציפה.

 $\{[a,b]\}$ בקטע Lagrange לכן יכולים להפעיל את לכן יכולים

.
$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(c)$$
 - כך ש- $a < c < b$ קיימת $a < c < b$

, $f'(b) - f'(a) < \! \left(-1 \right) - \left(-1 \right) = -2 < \! 0 \; :$ המונה שלילי כי

. b-a>0 : המכנה חיובי

. מטיקים שהשבר $\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$ שלישי, זייא f''(c)<0 מטיקים שהשבר

שאלה 6.א (10 נקודות)

! L : y=0 מקביל לקו $G(x)=\int\limits_0^{x^2-8x+20}e^{t^2}dt$ הפונקציה המשיק לגרף הפונקציה $C(x)=\int\limits_0^{x^2-8x+20}e^{t^2}dt$ האם הנקודה היא נקודת קיצון מוחלט של C(x)=0 האם הנקודה C(x)=0

פתרון

. ${f R}$ -ב הפונקציה פונקציה ולכן היא בעלת ב- רציפה ב- $f(t) = e^{t^2}$ הפונקציה

.
$$\frac{dF}{dt}$$
 = $F'(t)$ = e^{t^2} = $\exp(t^2)$: זייא היי א $f(t)$ = e^{t^2} פונקציה קדומה של $F(t)$ = $\int e^{t^2} dt$ מרהי

.
$$y = G(x) = \int_{0}^{x^2 - 8x + 20} e^{t^2} dt = F(x^2 - 8x + 20) - F(0)$$
 אפינים שפט Newton-Leibniz לפי משפט

: גוזרים את לפי כלל השרשרת גוזרים את

$$G'(x) = F'(x^2 - 8x + 20) \cdot (2x - 8) = (2x - 8) \exp((x^2 - 8x + 20)^2)$$

על מנת שהמשיק לפונקציה G יהי מקביל לקו הנתון $L\colon y=0$ נדרוש יהי G יהי לפונקציה G יהי מנת שהמשיק לפונקציה . a=4 - למשוואה הקודמת לפתרון יחיד והוא שווה ל- $G'(x)=(2x-8)\exp\left((x^2-8x+20)^2\right)=0$

. ${f R}$ משפט Fermat גורר שזאת הנקודה היחידה אורר שזאת גורר

: מתקיים

. $\left(-\infty,4\right]$ אי. G יורדת בקטע ולכן הפונקציה ולכן ולכן $G'(x) \leq 0 \iff x \leq 4$ א

 $\left[4,\infty
ight)$ עולה בקטע G ולכן הפונקציה $G'(x) \geq 0 \iff x \geq 4$ ב.

. ${f R}$ בתחום G בתחום של הפונקציה a=4 נקודה מינימום מסיקים שהנקודה

שאלה 6.ב (10 נקודות)

: האם הטענה הבא נכונה

 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ו- $x \in \mathbf{R}$ פונקציה בעלת פונקציה חסומה, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ י" אם $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ פונקציה חסומה, $L = \lim_{x \to 0} f(x)$ בעלת גבול סופי גבול סופי $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ אז גם פונקציית המכפלה בעלת $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ בנקודה $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ בנקודה $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת. אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

פתרון

נוכיח שהטענה לא בהכרח נכונה, בעזרת דוגמה נגדית:

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

ברור ששתי ההנחות של הטענה מתקיימות:

 $x \in \mathbf{R}$ לכל , $|g(x)| \le 1$ לכל , לכל , לכל g(x)

$$L = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$
 (2)

: מתקיים

: ולכן הגבולות החד-צדדים לא שווים ,
$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} 1 \cdot 1, & x \ge 0 \\ 1 \cdot 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} h(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0-} h(0)$$

a=0 מסיקים שהגבול של הפונקציה h לא קיים בנקודה

בהצלחה!