פתרון מבחן באלגברה לינארית

שאלה 1: (20 נק׳) נתונה מערכת המשוואות הלינארית הבאה :

$$\begin{cases} x & +2y & +(1-2k)z & = & 1 \\ x & +(5-k)y & +(3-4k)z & = & 3 \\ -x & +(k-3)y & +(3k-2)z & = & k^2-k-1 \end{cases}$$

א. (15 נק׳) קבעו עבור אלו ערכים של המשתנה k יש למערכת
1. פתרון יחיד 2. אינסוף פתרונות 3. אין פתרון
במקרה של אינסוף פתרונות מצאו את הפתרון הכללי

ב. (5 נק׳) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k הווקטור $(k-1,2,-2)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.

פתרון:

א. נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-2k \\ 1 & 5-k & 3-4k \\ -1 & k-3 & 3k-2 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3+R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-2k \\ 0 & 3-k & 2-2k \\ 0 & k-1 & k-1 \end{vmatrix} \overset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-2k \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 3-k & 2-2k \end{vmatrix} \overset{R_2\to\frac{1}{k-1}R_2}{=}$$

$$(1-k)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-2k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3-k & 2-2k \end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3-(3-k)R_2}{=} (1-k)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1-2k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-k \end{vmatrix} = k^2-1$$

. הדטרמיננטה שונה

מאפס כאשר $k^2-1\neq 0$, כלומר $k\neq\pm1$. עבור ערכים אלו המטריצה המצומצמת של המערכת היא הפיכה, ולמערכת יש פתרון יחיד. נבדוק מה קורה עבור הערכים שבהם המטריצה המצומצמת אינה הפיכה :

$k=1$ **:** נציב במטריצה המורחבת שמתאימה למערכת ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3+R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מערכת המשוואות שמתאימה למטריצה המורחבת היא $\begin{cases} x & -z & = & -1 \\ & y & = & 1 \end{cases}$. נציב $z=t$ ונקבל כי הפתרון

הכללי של המערכת הוא $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}t : t\in\mathbb{R}\right\}$.

$k=-1$: נציב במטריצה המורחבת שמתאימה למערכת ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\1&6&7&3\\-1&-4&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&4&4&2\\0&-2&-2&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to -\frac{1}{2}R_3]{R_2\to \frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&2&2&1\\0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&1&-1\\0&2&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

. קיבלנו שדרגת

המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת המשוואות המתאימה אין פתרונות.

ב. נציב את הוקטור $(k-1,2,-2)$ במערכת ונבדוק מתי יתכן שוויון בכל המשוואות

$$\begin{cases}k-1 & +2\cdot 2 & +(1-2k)\cdot(-2) & = & 1\\ k-1 & +(5-k)\cdot 2 & +(3-4k)\cdot(-2) & = & 3\\ -(k-1) & +(k-3)\cdot 2 & +(3k-2)\cdot(-2) & = & k^2-k-1\end{cases}$$ כלומר $$\begin{cases}5k & = & 0\\ 7k & = & 0\\ -k^2-4k & = & 0\end{cases}$$. משתי המשוואות

הראשונות נקבל כי $k=0$, שאכן מהווה פתרון גם למשוואה האחרונה, כלומר רק עבור $k=0$ הוקטור $(k-1,2,-2)$ הוא פתרון למערכת.

שאלה 2: (20 נק׳) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (15 נק׳) נסמן $U=P_2(\mathbb{R})=\mathbb{R}_2[x]$. נתונה ההעתקה הלינארית $T:U\to\mathbb{R}^3$ שמקיימת את הנתונים הבאים: $T(1+x^2)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ T(x+x^2)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ T(1+x)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

i. (7 נק׳) מצאו את וקטור הקואורדינטות של פולינום כללי $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ לפי הבסיס הסדור $B=\{1+x,x+x^2,1+x^2\}$. (התשובה תלויה בפרמטרים a_0,a_1,a_2)

ii. (8 נק׳) מצאו מימדים של התמונה והגרעין של T.

ב. (5 נק׳) יהי V מרחב וקטורי, $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V , ותהי $S:V\to V$ העתקה לינארית שמקיימת $S(v_1)=v_2,\ S(v_2)=v_3,\ S(v_3)=v_2+v_3$. הוכיחו כי ההעתקה הלינארית S לא חח״ע.

פתרון:

א.

i. נחפש צירוף לינארי שיתן את הפולינום באופן כללי:

$$\alpha(1+x)+\beta(x+x^2)+\gamma(1+x^2)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

ונקבל מערכת משוואות ב : α,β,γ עם מטריצת המקדמים המורחבת הבאה : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \end{array}\right)$. נדרג :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & 2 & a_2-a_1+a_0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_2-a_1+a_0}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1-a_0+a_2}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{a_2-a_1+a_0}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a_0+a_1-a_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_1-a_0+a_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_2-a_1+a_0}{2} \end{array}\right)$$

ונקבל : $\left[p(x)\right]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_0+a_1-a_2 \\ -a_0+a_1+a_2 \\ a_0-a_1+a_2 \end{pmatrix}$.

ii. נחשב תחילה את המטריצה המייצגת לפי הבסיסים B, St_3 (כאשר $St_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$: מהנתון נקבל כי

$$[T]^B_{St_3} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[T(1+x)\right]_{St_3} & \left[T(x+x^2)\right]_{St_3} & \left[T(1+x^2)\right]_{St_3} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

מימד התמונה שווה לדרגת המטריצה המייצגת, ולכן נדרג את המטריצה כדי למצוא את המימד.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. קיבלנו שדרגת המטריצה היא 2, ולכן מימד התמונה הוא 2. מימד הגרעין הוא, לפי משפט המימד, $3-\dim\operatorname{Im}(T)=3-2=1$ כלומר מימד הגרעין הוא 1.

ב. נשים לב כי $S(v_1+v_2)=S(v_1)+S(v_2)=v_2+v_3=S(v_3)$. כמו כן מתקיים כי $v_3 \neq v_1+v_2$ אחרת v_3 היה ת״ל ב $\{v_1,v_2\}$, בסתירה לכך שהקבוצה B בת״ל, כי היא בסיס. קיבלנו שישנם שני וקטורים שונים עם אותה התמונה, ולכן ההעתקה אינה חח״ע.

שאלה 3 : (20 נק׳) אין קשר בין סעיפים א, ב.

א. (12 נק׳) יהיה $M_3(\mathbb{R})$ מרחב מטריצות מסדר 3×3 . נגדיר שתי תתי-קבוצות של $M_3(\mathbb{R})$:

$$U=\left\{A\in M_3(\mathbb{R}):A^T=A,\ \operatorname{tr}(A)=0\right\},\quad W=\left\{A\in M_3(\mathbb{R}):A^T=-A\right\}$$

כאשר $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{trace}(A)$ הוא העקבה של A , כלומר סכום האיברים על האלכסון של המטריצה.

i. הוכיחו ש U,W תתי-מרחבים של V, ומצאו בסיסים שלהם.

ii. חשבו את המימד של $U+W$.

ב. (8 נק') נתונים שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$, V_1,V_2 כך שמתקיים

i. $V_1\cap V_2=\{0\}$

ii. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\in V_2$, $\dim V_1=2$.

חשבו את המימד של V_1+V_2 ומצאו בסיס שלו.

פתרון: U תת-מרחב של V :

$0\in U$ כי $0^T=0,\ \operatorname{tr}(0)=0$

נניח ש $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ מתקיים :

$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$, כמו כן

$$\operatorname{tr}(A+B)=\left((a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+(a_{33}+b_{33})\right)=(a_{11}+a_{22}+a_{33})+(b_{11}+b_{22}+b_{33})=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$$

, ולכן אם $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)=0$, אז $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)=0+0=0$ לכן $A+B\in U$.

נניח ש $k\in\mathbb{R},\ A\in U$ מתקיים : $(kA)^T=kA^T=kA$, כמו כן

$\operatorname{tr}(kA)=(ka_{11}+ka_{22}+ka_{33})=k(a_{11}+a_{22}+a_{33})=\text{k}\operatorname{tr}(B)$ ולכן אם $\operatorname{tr}(A)=0$ אז

$\operatorname{tr}(kA)=k\cdot\operatorname{tr}(A)=k\cdot 0=0$, לכן $kA\in U$

<u>טענה</u> : W תת-מרחב של V.

$0\in W$ כי $0^T=0=-0$

נניח ש $A,B\in W$. מתקיים : $(A+B)^T=A^T+B^T=-A-B=-(A+B)$

לכן $A+B\in W$

נניח ש $k\in\mathbb{R},\ A\in W$ מתקיים : $(kA)^T=kA^T=-kA$, לכן $kA\in W$

כדי למצוא בסיסים נמצא קבוצות פורשות ובת"ל:

$$U=\left\{A\in V: A^T=A,\ \operatorname{tr}(A)=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}: \begin{matrix} a_{11},a_{12},a_{13},a_{22},a_{23},a_{33}\in\mathbb{R}\\ a_{11}+a_{22}+a_{33}=0\end{matrix}\right\}=$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & -a_{11}-a_{22}\end{pmatrix}: a_{11},a_{12},a_{13},a_{22},a_{23}\in\mathbb{R}\right\}$$

כלומר כל מטריצה ב- U ניתנת להצגה כצירוף לינארי של 5 המטריצות:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & -a_{11}-a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+a_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

כלומר קבוצה זו של מטריצות $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה פורשת של U, והיא בת"ל כי רק כאשר כל המקדמים מתאפסים הצירוף הלינארי מתאפס. מכאן שהיא בסיס של U. באותו האופן, $W=\left\{A\in V: A^T=-A\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & a_{23} & 0\end{pmatrix}: a_{12},a_{13},a_{23}\in\mathbb{R}\right\}$,

כלומר כל המטריצה ב- W ניתנת להצגה כצירוף לינארי של 3 המטריצות

$$\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{pmatrix}=a_{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}+a_{23}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

, וכמו קודם המטריצות פורשות את W והן קבוצה בת"ל כי רק כאשר כל המקדמים מתאפסים הצירוף הלינארי מתאפס ולכן הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס.

כדי למצוא את המימד של $U+W$, נמצא תחילה את החיתוך: אם $A\in U\cap W$, אז $A=A^T=-A$, לכן $A=0$, כלומר $U\cap W=\{0\}$. כעת, ממשפט המימד נקבל:

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)=5+3-0=8$$

ב. ממשפט הממדים נובע כי

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

$\left.\begin{matrix}\dim V_1=2\\ \dim(V_1\cap V_2)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \dim(V_1+V_2)=2+\dim V_2$, כמו כן, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\in V_2\Rightarrow \dim V_2\ge 1$ ולפי משפט

המימד נקבל כי $3 \le \dim(U+W) = 2+\dim W \le 3 \Leftarrow \dim(U+W)=3 \Leftarrow U+W=\mathbb{R}^3$

ולכן בסיס ל $U+W$ הוא כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, למשל הבסיס הסטנדרטי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

שאלה 4: (20 נק') אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (10 נק') עבור שני זוגות מספרים $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, תהי $A=\begin{pmatrix}0&1&k\\y_1&1&x_1\\y_2&1&x_2\end{pmatrix}$, כאשר k פרמטר ממשי. נתון כי $\begin{vmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{vmatrix}=6$. הוכיחו שעבור $k=x_1$ מתקיים $|A|=-6y_1$, ועבור $k=x_2$ מתקיים $|A|=-6y_2$.

ב. (10 נק') נתונות מטריצות A ו B מסדר $n\times n$ כך ש $|A|=2$. נתון כי $BA^{-1}+2A^{-1}=A^T$, מצאו את $|B+2I|$ והוכיחו כי למערכת $(BA+2A)\underline{x}=\underline{0}$ קיים פתרון יחיד.

ג.

פתרון:

א. נציב בדטרמיננטה $k=x_1$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&k\\y_1&1&x_1\\y_2&1&x_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&x_1\\y_1&1&x_1\\y_2&1&x_2\end{vmatrix}\overset{R_2\to R_2-R_1}{=}\begin{vmatrix}0&1&x_1\\y_1&0&0\\y_2&1&x_2\end{vmatrix}=-y_1\begin{vmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{vmatrix}=-6y_1$$

נציב בדטרמיננטה $k=x_2$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&k\\y_1&1&x_1\\y_2&1&x_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&x_2\\y_1&1&x_1\\y_2&1&x_2\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3-R_1}{=}\begin{vmatrix}0&1&x_2\\y_1&1&x_1\\y_2&0&0\end{vmatrix}=y_2\begin{vmatrix}1&x_2\\1&x_1\end{vmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{=}-y_2\begin{vmatrix}1&x_1\\1&x_2\end{vmatrix}=-6y_2$$

$$BA^{-1}+2A^{-1}=A^T\Rightarrow(B+2I)A^{-1}=A^T$$

ב. מכללי הדטרמיננטה נובע כי

$$\Rightarrow|B+2I||A^{-1}|=|A^T|\Rightarrow|B+2I|=\frac{|A^T|}{|A^{-1}|}=\frac{|A|}{|A|^{-1}}=4$$.

$BA+2A=(B+2I)A$, כלומר מכפלת הפיכות כי הדטרמיננטה של כל גורם שונה מ-0. לכן המטריצה המצומצמת של המערכת הפיכה ואז למערכת יש פתרון יחיד.

שאלה 5: (20 נק') אין קשר בין סעיפים א, ב.

א. (15 נק') תהי A מטריצה ריבועית ממשית מסדר 4×4 שמקיימת את התנאים הבאים

i. A לא הפיכה

ii. סכום הערכים העצמיים של A הוא 2.

iii. למערכות $A\underline{x}=\underline{x}$ ו $A^T\underline{x}=-\underline{x}$ קיימים פתרונות לא טריוויאליים.

הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ורשמו מטריצה אלכסונית שדומה ל A.

ב. (5 נקי) תהיינה A,B שתי מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$ שמקיימות כי $AB=BA$. נניח ש $0\neq v\in\mathbb{R}^n$ הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 0. הראו שאם B הפיכה, אז גם Bv וקטור עצמי של A עם אותו ערך עצמי 0.

פתרון:

א. A לא הפיכה, לכן $\lambda=0$ הוא ע״ע שלה.
למערכת $A\underline{x}=\underline{x}$ יש פתרון לא טריוויאלי, כלומר למערכת $(A-I)\underline{x}=\underline{0}$ יש פתרון לא טריוויאלי. זה אומר שהמטריצה $A-I$ לא הפיכה ומכאן $|A-I|=0$. כמסקנה מכך: $\lambda=1$ ע״ע של A.
למערכת $A^T\underline{x}=-\underline{x}$ יש פתרון לא טריוויאלי, כלומר למערכת $(A^T+I)\underline{x}=\underline{0}$ יש פתרון לא טריוויאלי. זה אומר שהמטריצה A^T+I לא הפיכה ומכאן $|A+I|=\left|\left(A^T+I\right)^T\right|=|A^T+I|=0$. כמסקנה מכך: $\lambda=-1$ ע״ע גם של A.
כמו כן, סכום הערכים העצמיים של המטריצה A הוא 2. מצאנו עד כה כי $0,\pm 1$ הם ערכים עצמיים. יש סה״כ 4 ע״ע כולל ריבוי אלגברי וסכומם שווה ל 2. לכן $0+1+(-1)+\lambda=2$. כלומר $\lambda=2$ ע״ע נוסף של A.
קיבלנו שלמטריצה ריבועית ממשית מסדר 4 יש 4 ע״ע ממשיים שונים. זה מבטיח ש – A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ וצורה אלכסונית שלה

$$D=\begin{bmatrix}2&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$$

ב. הוקטור v הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי 0, כלומר $Av=0\cdot v=0$. המטריצה B הפיכה, ולכן $Bv\neq 0$ (כי $v\neq 0$). כעת $A\left(Bv\right)=\left(AB\right)v=\left(BA\right)v=B\left(Av\right)=B\cdot 0=0$, ולכן גם Bv הוא וקטור עצמי של A עם אותו ערך עצמי 0.

שאלה 6: (20 נקי) אין קשר בין שני סעיפים א, ב.

א. (10 נקי) בסעיף זה נסמן $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x+2y-2z=0\right\}$.

i. מצאו וקטור $v_2\in W$ כך ש v_2 אורתוגונלי לוקטור v_1 לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ii. מצאו וקטור $v_3\in\mathbb{R}^3$ שהוא אורתוגונלי לוקטורים v_1,v_2 לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
iii. מצאו בסיס **אורתונורמלי** של $\mathbb{R}^3$, לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית, שמורכב מכפולות של הוקטורים v_1,v_2,v_3

ב. (10 נקי) נתונים 2 וקטורים $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ במרחב מכפלה פנימית ממשי V בעל מימד $\dim V=2$.
נתון כי

i. $\|\mathbf{v}\|=1$

ii. $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -1$

iii. הוקטור $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ אורתוגונלי לווקטור $\mathbf{u}+3\mathbf{v}$.

מצאו את הנורמה של $\mathbf{u}$. האם הקבוצה $B=\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}+3\mathbf{v}\}$ מהווה בסיס **אורתונורמלי** של V.

<u>פתרון:</u>

א. מתקיים כי: $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in W \Leftrightarrow \mathbf{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y+2z\\y\\z\end{pmatrix}$

i. נחפש וקטור מהצורה $v_2=\begin{pmatrix}-2y+2z\\y\\z\end{pmatrix}$ כך שיהיה מאונך ל- v_1, כלומר:

$0=< v_1,v_2 >= 2\cdot(-2y+2z)+1\cdot y+2\cdot z=-3y+6z$ מכאן $y=2z$ וניתן לבחור למשל

$$v_2=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

ii. וקטור שמאונך ל- $\{v_1,v_2\}$ מקיים $\begin{cases}2x & +y & +2z & = & 0\\ -2x & +2y & +z & = & 0\end{cases}$. נמצא את מרחב הפתרונות של המערכת:

$$\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

המערכת שמתאימה למטריצה המדורגת היא

$\begin{cases}2x & & +z & = & 0\\ & y & +z & = & 0\end{cases}$. נציב $z=2t$ ונקבל שמרחב הפתרונות הוא $\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}t : t\in\mathbb{R}\right\}$ ולכן נבחר

$$v_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

iii. לפי ההגדרה של $\{v_1,v_2,v_3\}$ זו קבוצה אורתוגונלית. ננרמל אותה ונקבל בסיס אורתונורמלי

$$\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ב. נסמן $\|\mathbf{u}\|=a$. הוקטור $\mathbf{u}+3\mathbf{v}$ אורתוגונלי לווקטור $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ אם ורק אם

$$\langle \mathbf{u}+3\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle=\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle+\langle \mathbf{u},-\mathbf{v}\rangle+\langle 3\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle+\langle 3\mathbf{v},-\mathbf{v}\rangle=$$
$$=\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle-\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+3\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle-3\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=a^2+1-3-3=a^2-5=0$$

וזה גורר ש- $\|\mathbf{u}\| = a = \sqrt{5}$. בנוסף, $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 5+2+1 \neq 1$

ולכן הקבוצה $B = \{\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}+3\mathbf{v}\}$ **<u>לא מהווה</u>** בסיס **אורתונורמלי** של V.