

המחלקה למדעי היסוד - מתמטיקה
Department of Basic Sciences

חדו"א 2

תרגיל מספר 7 – אינטגרל כפול ויישומיו

חלק I

שאלה 1

חשבו את האינטגרלים הבאים

$$\begin{aligned} \text{א. } \int_0^1 \int_0^2 (x+3) dy dx \quad \text{ב. } \int_0^3 \int_0^1 x(\sqrt{x^2+y}) dx dy \quad \text{ג. } \int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2x} dy dx \\ \text{ד. } \int_0^2 \int_{-1}^3 e^{x-y} dy dx \quad \text{ה. } \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad \text{ו. } \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y dx dy \quad \text{ז. } \int_1^2 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y^2}} dx dy \end{aligned}$$

שאלה 2

עבור האינטגרלים הבאים שרטטו תחום מתאים ושנו את סדר האינטגרציה :

$$\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy \quad \text{א)}$$

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx \quad \text{ב)}$$

$$\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \quad \text{ג)}$$

שאלה 3

$$\iint_D x^2 (y-x) dx dy$$

כאשר D מוגבל ע"י קווים: $x = y^2$, $y = x^2$,

שאלה 4

$$\iint_D \sin(x+y) dx dy$$

כאשר D מוגבל ע"י הקווים: $x+y = \frac{\pi}{2}$, $y = x$, $y = 0$,

חלק II

חישוב נפח של גוף

$$V = \iint_D f(x, y) dA; \quad V = \iint_D f(y, z) dA; \quad V = \iint_D f(x, z) dA$$

$$f \geq 0 \text{ in } D.$$

$$V = \iint_D (f_1(x, y) - f_2(x, y)) dA$$

$$f_1 \geq f_2 \text{ in } D.$$

$$A = \iint_D 1 dA : \text{ השטח של תחום } D$$

חישוב מסה ושיעורי מרכז הכובד של לוח דק :

מסה של לוח דק: אם ללוח דק המכסה תחום D במישור x, y יש פונקציה צפיפות רציפה

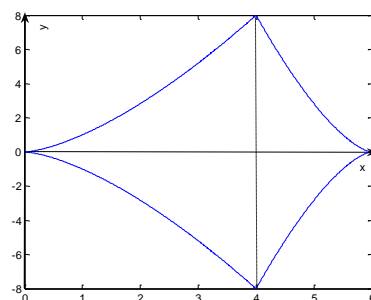
$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy : \text{ אז המסה הכוללת שלו היא } \rho(x, y)$$

ושיעורי מרכז הכובד של הלוח דק :

$$x_0 = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, \quad y_0 = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}$$

שאלה 5

חשבו את השטח המוגבל ע"י הקווים: $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$
שימו לב הצורה סימטרית לגבי ציר ה- x (ציור 1)



שאלה 6

חשבו את נפח הגוף הנמצא בין הפרבולואיד האליפטי $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

והמישורים: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$

הדרכה השתמשו בתכונת הסימטריה של הגוף.

שאלה 7

חשבו את נפח הגוף החסום ע"י הגליל $x^2 + y^2 = 4$ והמישורים:

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=xy$$

שימו לב הגוף נמצא באוקטן הראשון.

שאלה 8

חשבו את נפח הגוף החסום ע"י המשטחים: $z = x^2 + y^2$ $z = x^2$ $y = x^2$ $z = 0$ $y = 1$.
הדרכה: השתמשו בכך שהפונקציה זוגית באינטרוול סימטרי.

שאלה 9

חשבו את מסת הריבוע שאורך הצלע שלו שווה ל-a, אשר הצפיפות בכל נקודה פרופורציונאלית לסכום מרחקי הנקודה מאלכסוני הריבוע.
הדרכה בחרו מערכת צירים כך שקודקודי הריבוע יהיו על הצירים.

שאלה 10

The density of every point of rectangle is proportional to the square of the distance between the point and a fixed vertex A. What is the mass of the rectangle?
a and b are the width and length of the given rectangle.

