מבחן חדו"א 1 פתרון X

פתרון 1

א) $f(x)$ אינה מוגדרת ב- 0 ואז לא רציפה בנקודה זו. יש לה אי-רציפות "סליקה" כי

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{5x^2+1}+\sqrt{x^2+1})\cdot 2\sin^2 x}{(5x^2+1)-(x^2+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{4\sin^2 x}{4x^2}=1;\ \lim_{x\to0^-} f(x)=2^0=1.$$

ב)

$$\int \arctan\sqrt{x}\,dx \overset{<\sqrt{x}=t>}{=} \int \arctan t\, d(t^2)=t^2\arctan t-\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=t^2\arctan t-\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=t^2\arctan t-\int(1-\frac{1}{t^2+1})dt=t^2\arctan t-t+\arctan t+C=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$$

פתרון 2

א) $x=0$ לא שייך לתחום ההגדרה. $\lim_{x\to0} x\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{bounded}=0$ לכן אין אסימפטוטה אנכית ב- $x=0$.

$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x}=1$ לכן הקו הישר $y=1$ הוא כן אסימפטוטה אופקית כאשר $x\to+\infty$.

ב) בקטע $[1;e]$ מתקיים: $0\le\ln x\le1 \;\Leftarrow\; f(x)\ge g(x)$. לכן השטח הנדרש הוא:

$$S=\int_1^e\big(f(x)-g(x)\big)dx=\int_1^e\frac{\ln x-\ln^2 x}{x}dx \overset{<\ln x=t>}{=} \int_0^1(t-t^2)dt=(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3})\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

פתרון 3

א) נגדיר $f(x)=x^2-5x+e^x$, הפונקציה רציפה וגזירה בכל הציר. $f(0)=1>0$, $f(1)=e-4<0$.

לפי משפט ערך הביניים $\exists c\in(0;1):\ f(c)=0$. הפתרון יחיד כיון שהפונקציה יורדת ממש בקטע $[0;1]$:

$f'(x)=2x-5+e^x<2\cdot1-5+e^1<2-5+3=0$. אז הגרף של f חותך את ציר ה- x רק פעם אחת בקטע.

ב) $f'(x)=\dfrac{\cos\pi x}{x}$. לכן המשוואה הנדרשת היא: $y=f(1)+f'(1)(x-1)=0+(-1)(x-1)=1-x$.

$f''(x)=\dfrac{-\pi x\sin\pi x-\cos\pi x}{x^2}$. אז $f''(1)=1$, לכן $f(x)$ קמורה בסביבה של x_0 והמשיק נמצא מתחת לגרף.

פתרון 4

א) הפונקציה $f(x)$ זוגית אז $f'(x)$ אי-זוגית: $\forall x\ \ f'(-x)=-f'(x)$. לכן $f'(-1)=-f'(1)=-T_2'(1)=-3$.

ב) לא יתכן. לפי נוסחת טיילור $f(x)-T_2(x)=R_2(x)=\dfrac{f^{(3)}(c)}{6}(x-1)^3$. לכן $|f(2)-5|\le\dfrac{6}{6}(2-1)^3=1$,
כלומר $4\le f(2)\le 6$.

פתרון 5

א) $f(x)$ גזירה בכל הציר. $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x)(1+x)$.

לכן הנקודות הקריטיות הן $x=\pm1$, אבל $-1\notin[0;2023]$. $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}$, $0<f(2023)<f(1)$, $f(0)=0$.

אז המקסימום המוחלט הוא $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$ והמינימום המוחלט הוא $f(0)=0$.

ב) נגדיר $g(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=\frac{3x^2-7x+12}{x^4+2x^3+5x}$. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=3$, וידוע ש- $\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתכנס.

אז לפי מבחן ההשוואה השני האינטגרל $\int_1^\infty f(x)\,dx$ גם מתכנס.

פתרון 6

א) כן. דוגמה: $f(x)=g(x)=x-0.5$.

הפונקציה $f(x)\cdot g(x)=(x-0.5)^2$ יורדת בקטע $[0;0.5]$ ועולה בקטע $[0.5;1]$.

ב) לא. דוגמה נגדית: $f(x)=\sqrt{x}$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to0^+]{}\infty$.

מבחן חדו"א 1 שאלון X

שאלה 1

א) האם הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}, & x>0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$ רציפה ב- 0 ? אם לא, קבעו את סוג אי-הרציפות.

ב) חשבו את האינטגרל $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$.

שאלה 2

א) האם הקווים הישרים $x=0$ ו- $y=1$ מהווים אסימפטוטות לפונקציה $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$? נמקו!

ב) חשבו את השטח בין הגרפים של הפונקציות $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ו- $g(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ בקטע $x\in[1;e]$.

שאלה 3

א) הוכיחו כי למשוואה $x^2-5x+e^x=0$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[0;1]$.

ב) מצאו את משוואת הקו המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\int_1^x \dfrac{\cos \pi t}{t}dt$ בנקודה $x_0=1$.
האם המשיק נמצא מעל או מתחת לגרף הפונקציה בסביבה של $x_0=1$? נמקו!

שאלה 4

א) נתונה פונקציה זוגית $f(x)$ בעלת נגזרת שלישית רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.
ידוע שפולינום טיילור שלה מסדר שני בנקודה $x_0=1$ הוא $T_2(x)=x^2+x-1$. מצאו את $f'(-1)$.

ב) בנוסף לתנאי סעיף א נניח ש- $\left|f^{(3)}(x)\right|\le 6$ $\forall x$. האם יתכן ש- $f(2)=3$? נמקו!

שאלה 5

א) מצאו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ בקטע $[0;2023]$.

ב) האם האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^\infty \dfrac{3x^2-7x+12}{x^4+2x^3+5x}dx$ מתכנס? נמקו!

שאלה 6

א) האם קיימות פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ עולות ממש בקטע $[0;1]$ אשר $f(x)\cdot g(x)$ <u>אינה</u> מונוטונית ב- $[0;1]$?
אם לא, נמקו. אם כן, הביאו דוגמה, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

ב) תהיה $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0;1]$ וגזירה ב- $(0;1)$. האם $f'(x)$ בהכרח חסומה בקטע $(0;1)$?
אם כן, נמקו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

בהצלחה!