

שם הקורס: מתמטיקה בדידה

קוד הקורס: 90926

שאלון X

שאלה 1

מתמטיקאי באיסלנדית נקרא STÆRÐFRÆÐINGUR שימו לב: האות Æ זו אות אחת באיסלנדית.

- (א) (5 נק') כמה מילים אפשר לבנות מכל אותיות המילה STÆRÐFRÆÐINGUR ?
 (ב) (5 נק') כמה מילים אפשר לבנות כך שהאותיות R לא יופיע שלוש פעמים ברצף (לא יופיע במילה RRR) ?
 (ג) (10 נק') כמה מילים אפשר לבנות כך שלא יופיע בהן RRR ולא יופיע בהן ÆÆ ולא יופיע בהן ÐÐ ?

שאלה 2

(א) (10 נק') נגדיר פונקציה $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$.

(I) הוכיחו שהפונקציה היא חד-חד-ערכית.

(II) מהי התמונה של הפונקציה?

(ב) (10 נק') נגדיר יחס S על $N \setminus \{0\} \times N \setminus \{0\}$ באופן הבא:

$$((a, b), (c, d)) \in S \leftrightarrow ad = bc$$

(I) הוכיחו כי היחס S הוא יחס שקילות.

(II) חשבו מחלקת שקילות של (1,2).

שאלה 3

(א) (10 נק') הוכיחו על ידי שימוש באינדוקציה מתמטית כי לכל $n > 0$ טבעי, מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

(ב) (10 נק') נסמן ב- a_n מספר הסדרות באורך n, שאבריהן שייכים לקבוצה {1,2,3} כך שאין שתי ספרות '1'

סמוכות זו לזו. מצאו נוסחה מפורשת עבור a_n

שאלה 4

(א) (10 נק') נתונה מערכת ההנחות הבאה:

אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי אז תומר ילך לאפקה

אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי אז הוא יהיה זכאי למלגה

אם תומר יקבל מעל 600 בפסיכומטרי או יהיה זכאי למלגה אז הוא ילך לאפקה

תומר ילך לאפקה אם ורק אם יקבל מלגה.

מסקנה: אם תומר ילך לאפקה, אז תומר יקבל יותר מ-600 בפסיכומטרי וגם יהיה זכאי למלגה

הצרינו את ההנחות ואת המסקנה וקבעו האם המסקנה נובעת מן ההנחות.

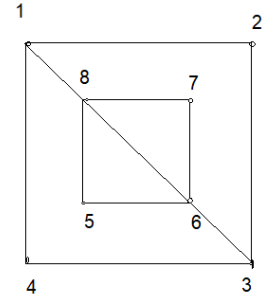
(ב) (10 נק') תהי $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י $f(n, m) = n \cdot 2^m$ (בשאלה זו $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)

(I) האם f חד-חד-ערכית? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

(II) האם f על? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 5

(א) (10 נק') האם ניתן לשרטט את הצורה הבאה מבלי להרים את העפרון מהדף, ומבלי לחזור על קטע שכבר צויר? נמקו על סמך טענות הקשורות לתורת הגרפים שנלמדו בקורס.
 אם תשובתכם חיובית, הראו (בעזרת חיצים או רשימת מהלכים מסודרת) כיצד ניתן לשרטט צורה זו כנדרש.
 אם תשובתכם שלילית, קבעו מהו מספר הצלעות המינימלי שיש להוסיף כדי שהשרטוט יהיה אפשרי, הוסיפו צלעות כנדרש ורשמו את המסלול.



(ב) (10 נק') בזריקת קובייה התוצאות שעשויות להתקבל הן בין 1 ל-6. זורקים 5 קוביות בצבעים שונים: אדומה, ירוקה, צהובה, כחולה ולבנה. בכמה דרכים ניתן לקבל סכום תוצאות 18 אם בזריקת קובייה לבנה מתקבלות תוצאות זוגיות קטנות מ-6?

שאלה 6

(א) (10 נק') חשבו את המקדם של x^2 בביטוי $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$.
 (ב) (10 נק') תהי A קבוצת כל הקבוצות של שני מספרים טבעיים. הוכיחו כי A קבוצה בת מניה.

בהצלחה!

שם הקורס: מתמטיקה בדידה
קוד הקורס: 90926
שאלון Y

שאלה 1

- אמא רוצה לחלק בין חמשת ילדיה: 7 גולות אדומות, 7 גולות ירוקות ו 8 גולות לבנות.
- (א) (5 נק') מה מספר אפשרויות לחלק את הגולות?
- (ב) (5 נק') מה מספר אפשרויות לחלק את הגולות כך שלא כולם יקבלו גולה לבנה?
- (ג) (10 נק') מה מספר אפשרויות לחלק את הגולות כך שלא כולם יקבלו גולה לבנה ולא כולם יקבלו גולה אדומה ולא כולם יקבלו גולה ירוקה?

שימו לב: הגולות אינן ממוספרות, גולות באותו צבע זהות.

שאלה 2

- (א) (10 נק') הוכיחו את השוויון

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

הדרכה: ניתן להיעזר בגזירה של פיתוח הבינום של הביטוי $(x+1)^n$,

$$\text{או לחלופין בזהות הקומבינטורית: } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, \quad k \geq 1$$

- (ב) (10 נק') נתונות שתי קבוצות A, B ונתון כי עוצמתן: $|A| = |B| = \aleph_0$.

הוכיחו או הפריכו:

$$|A - B| = \aleph_0 \quad (\text{I})$$

$$|A \cup B| = \aleph_0 \quad (\text{II})$$

שאלה 3

- (א) (8 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

- (ב) (12 נק') נגדיר \mathbb{Q}^+ קבוצה של המספרים הרציונליים החיוביים (שברים לא מצומצמים): $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a, b > 0 \right\}$

שימו לב: כאן המספרים $\frac{a}{b}, \frac{ka}{kb}$ הם איברים שונים בקבוצה.

$$\text{נגדיר יחס } R \text{ על } \mathbb{Q}^+ \text{ באופן הבא: } a = c \wedge b \leq d \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) \in R$$

(I) הראו כי זהו יחס סדר חלקי.

(II) האם זהו יחס סדר מלא? נמקו.

(III) רשמו דוגמא לאיברים מינימליים, מקסימליים, קטן ביותר, גדול ביותר, במידה וקיימים כאילו.

שאלה 4

- (א) (10 נק') הוכיחו על ידי שימוש באינדוקציה מתמטית כי לכל $n \geq 4$ טבעי, מתקיים: $2^n < n!$
- (ב) (10 נק') בכמה דרכים שונות ניתן לעלות n מדרגות אם בכל פעם עולים מדרגה אחת או שתי מדרגות ביחד? פתרו בעזרת נוסחת נסיגה, והציגו פתרון מפורש.

שאלה 5

- (א) (5 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: לכל שלושה פסוקים p, q, r מתקיים:
- $$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$
- (ב) (10 נק') נתון כי $x, y, z \in A$ נתון הפסוק
- $$\alpha = (\forall x \forall y (x \neq y) \rightarrow (\exists z ((x < z) \wedge (z < y))))$$
- (I) רשמו פסוק השקול לפסוק $\beta = \sim \alpha$ שאיננו כולל את קשר השלילה.
- (II) הסבירו את משמעות הפסוק α ורשמו קבוצה A עבודה הוא אמיתי וקבוצה A עבודה הוא שקרי.
- (ג) (5 נק') תהיינה 3 קבוצות A, B, C הוכיחו/הפריכו:
- $$(A \setminus C) \cap B = (A \cap B) \setminus (B \cap C)$$

שאלה 6

- (א) (10 נק')
- (I) האם קיים גרף 3 רגולרי מסדר 7? אם כן שרטטו כזה, אם לא הסבירו מדוע אין כזה.
- (II) האם קיים גרף 3 רגולרי מסדר 6? אם כן שרטטו כזה, אם לא הסבירו מדוע אין.
- (III) האם קיים גרף פשוט מסדר 5 שבו דרגות הקודקודים הן 0,1,2,3,4? אם כן שרטטו כזה, אם לא הסבירו מדוע אין.
- (ב) (10 נק') נתונה הקבוצה $A = \{0,1,2,\dots,11\}$. הוכיחו שבכל תת-קבוצה של A בת 7 איברים יש זוג מספרים שסכומם 11.

בהצלחה!