

אלגברה לינארית
תרגיל מספר 1 - מספרים מרוכבים

שאלה 1

נסמן $w = 5 - 2i$, $z = 4 + 7i$. חשבו את המספרים הבאים:

$$-w, |w|, \bar{w}, w+z, w-z, w \cdot z, w^{-1}, \frac{w}{z}, \frac{\bar{z}}{w}$$

$$-z, |z|, \bar{z}, z-w, z^{-1}, \frac{z}{w}$$

שאלה 2

חשבו:

א. i^{2015} ב. $(2i)^6$

ג. $(i^{10} + i^{11} + i^{12})^{13}$ ד. $(1+i+i^2+i^3+\dots+i^{99})^{2000}$

ה. $(i^{15} + i^{16} + i^{17} + \dots + i^{27})^7$ רמז: סכום סדרה הנדסית

שאלה 3

מספר מרוכב בצורה פולרית הוא מהצורה $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$ או $z = re^{i\theta}$. כתבו את המספרים המרוכבים הבאים, הנתונים בצורה קרטזית, בצורה פולרית:

$z = -\pi i$, $z = -7$, $z = 5$, $z = -\sqrt{18} - \sqrt{18}i$, $z = \sqrt{12} - 6i$, $z = -\sqrt{3} + i$

$z = 4i$, $z = 3 + 3i$

שאלה 4

עבור מספר בצורה פולרית $z = re^{i\theta} = r \operatorname{cis} \theta$ מחשבים את הפעולות ערך מוחלט, צמוד מרוכב, נגדי (מינוס) והופכי (חלקי ע"י הנוסחאות:

$$|z| = r, \bar{z} = re^{-i\theta} = r \operatorname{cis}(-\theta), -z = re^{i(\theta+\pi)} = r \operatorname{cis}(\theta+\pi), z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)$$

נתון $w = -\sqrt{3} + i$, $z = 3 + 3i$. מצאו בצורה פולרית את: z , $-z$, \bar{z} , $|z|$, z^{-1} , $w \cdot z$, $\frac{w}{z}$.

שאלה 5

עבור מספר מרוכב כלשהו $z = a + bi = r \operatorname{cis} \theta$, ציירו באופן עקרוני את z , $-z$, \bar{z} , $i \cdot z$, $|z|$ ותארו מה כל פעולה עושה למיקום הגיאומטרי של המספר.

שאלה 6

$w = -\sqrt{3} + i$, $z = 3 + 3i$

חשבו את החזקות הבאות: z^2 , z^3 , z^5 , z^{2000} . רשמו את התוצאה בצורה פולרית וגם קרטזית.

חשבו את החזקות הבאות: w^4 , w^{-3} , w^5 .

שאלה 7

מצאו את חמשת ערכי z המקיימים $z^5 = -32$ (בצורה פולרית). שרטטו את הפתרונות כוקטורים במערכת צירים כך שקצות הוקטורים מהווים קודקודי מחומש משוכלל. מהי הזווית בין שני וקטורי פתרון סמוכים?

שאלה 8

חשבו: $\sqrt[4]{1+i}$ (בצורה פולרית).

שאלה 9

חשבו את שורשי היחידה מסדר 3, רשמו את הפתרונות בצורה פולרית וקרטיזית. שרטטו את הפתרונות כוקטורים במערכת צירים. חשבו את סכום שורשי היחידה.

שאלה 10

פתרו את המשוואות הבאות:

א. $(2+5i)z + 3 - 5i = 14 + 2i + (3+i)z$

ב. $5z^2 + 8z + 4 = 0$

ג. $z^2 + (2+i)z - 5i - 1 = 0$

הדרכה: לחשב את השורש $\sqrt{7+24i}$ באופן הבא: להגדיר $w = a + bi$ ולפתור המשוואה $w^2 = 7 + 24i$.

ד. $z = a + bi$ הדרכה: לסמן $z = (\bar{z})^2$

שאלה 11

הוכיחו את הטענות:

א. לכל מספר מרוכב z מתקיים $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$.

ב. לכל מספר מרוכב z מתקיים $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

הדרכה: לסמן $z = a + bi$ ולהראות שוויון בין האגפים.