פתרון

Y

	שאלה 1		שאלה 2		שאלה 3	
	ה	ד	ה	ד	ד	ג
1						
2						
3						
4						

שאלה 1 (38 נקודות)

ספורטאי מתאמן 6 ימים בשבוע (א-ו) באופן הבא: בכל יום הוא בוחר באקראי את סוג האימון מבין שלושה סוגים: אימון ריצה בהסתברות 0.5, אימון כוח בהסתברות 0.3 ושחייה בהסתברות 0.2. הבחירה בכל יום היא בלתי תלוי בבחירות של הימים האחרים.

א. (10 נקודות) נסמן ב- X את מספר אימוני **הריצה** שהוא יבצע בשבוע הקרוב, וב- Y את מספר אימוני **הכוח** שהוא יבצע בשבוע הקרוב. מצאו את ההסתברות $P(X=1|Y=5)$.

ב. (10 נקודות) מצאו את פונקציות ההסתברות השוליות של X ושל Y. האם מדובר במשתנים מקריים בלתי תלויים? נמקו.

ג. (8 נקודות) נגדיר משתנה מקרי R אשר שווה ל-1 אם ביום **ג'** הוא יבחר באימון **ריצה**, ו-0 אחרת. בנוסף, נגדיר משתנה מקרי S אשר שווה ל-1 אם ביום **ג'** הוא יבחר באימון **שחיה**, ו-0 אחרת. חשבו את $E(R\cdot S)-E(R)E(S)$.

ד. (5 נקודות) נגדיר משתנה מקרי R באופן זהה לסעיף הקודם. בנוסף, נגדיר משתנה מקרי P אשר שווה ל-1 אם ביום **ד'** הוא יבחר באימון שחיה, ו-0 אחרת. אז $Cov(R,P)$ שווה:

1. 0
2. -1
3. 1
4. אף תשובה אינה נכונה

ה. (5 נקודות) בנוסף לסימונים של סעיף א', נגדיר משתנה מקרי Z המסמן את מספר אימוני **השחייה** שהוא יבצע בשבוע הקרוב. סמנו את התשובה הנכונה:

1. X,Y,Z בלתי תלויים.
2. $Var(X+Y+Z)=0$
3. $E(X+Y)=E(Y+Z)$
4. אף תשובה אינה נכונה

פתרון:

א.

א. $$P(X=1|Y=5)=\frac{P(X=1,Y=5)}{P(Y=5)}=\frac{\binom{6}{1}\cdot 0.3^5\cdot 0.5}{\binom{6}{1}\cdot 0.3^5\cdot 0.7}=\frac{5}{7}$$

ב. $X\sim Bin(6,0.5), Y\sim Bin(6,0.3)$. המשתנים תלויים, למשל P(X=6,Y=6)=0.

ג. נשים לב ש-RS=0 ולכן

$$E(R\cdot S)-E(R)E(S) = 0- E(R)E(S) = -0.5\cdot 0.2 = -0.1$$

ד. 1

ה. 2

שאלה 2 (38 נקודות)

יוני הוזמן לשלושה ראיונות עבודה בשלוש חברות שונות. זמן ראיון בכל חברה מתפלג לפי התפלגות נורמלית עם תוחלת שעתיים וסטיית התקן של שעה. אם ראיון נמשך לכל היותר שעתיים אזי יוני בוודאות לא מתקבל לעבודה. אם ראיון נמשך יותר שעתיים יוני יתקבל לעבודה בסיכוי 0.8. זמני ראיון בלתי תלויים.

א. (10 נקודות) אם יוני לא התקבל לעבודה בחברה א' מהי ההסתברות שראיון בחברה א' נמשך יותר משעתיים?

ב. (10 נקודות) מהי ההתפלגות של מספר החברות שבהן יוני יתקבל לעבודה?

ג. (8 נקודות) מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של זמן ראיון מקסימאלי.

ד. (5 נקודות) יהי $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. נגדיר משתנה מקרי: $Y=X^2-2X+1$. מצאו $E(Y)$.

1. $\mu^2-2\mu+1$
2. $\sigma^2+(\mu-1)^2$
3. $\sigma^2+1+(\mu-1)^2$
4. $\sigma^2-1+(\mu-1)^2$

ה. (5 נקודות) יהיו $X_i\sim \exp(2)$ $i=1,...,100$ משתנים ב"ת. בחרו את הטענה הנכונה.

1. $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(200,400)$
2. $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \exp(200)$
3. $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50,25)$
4. $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50,25^2)$

פתרון:

א. נגדיר מ"מ X - זמן ראיון. מתקיים: $X \sim N(2,1)$. נחשב את ההסתברות המותנית המבוקשת:

$$p = \frac{0.2 \cdot P(X > 2)}{P(X \le 2) + 0.2 \cdot P(X > 2)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = 0.1667$$

ב. ההסתברות של יוני להתקבל לעבודה שווה ל: $0.8 \cdot P(X > 2) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4$. נגדיר מ"מ

Y- מספר החברות שבהן יוני יתקבל לעבודה. מתקיים: $Y \sim Bin(3,0.4)$.

ג. נגדיר מ"מ X_i - זמן ראיון בחברה ה-i-ית $i=1,2,3$. מתקיים: $X_i \sim N(2,1)$. נגדיר מ"מ זמן ראיון מקסימלי

$Z = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Z.

$$F_Z(t) = P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \le t) = P(X_1 \le t \cap X_2 \le t \cap X_3 \le t) =$$
$$P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t) \cdot P(X_3 \le t) = \Phi(t-2)^3$$

ד. 2

$$E(Y) = E(X^2) - 2E(X) + 1 = V(X) + E(X)^2 - 2E(X) + 1 = \sigma^2 + \mu^2 - 2\mu + 1 = \sigma^2 + (\mu - 1)^2$$

ה. תוחלת של מ"מ מעריכי X שווה ל-0.5. לפי משפט הגבול המרכזי נקבל תשובה 3.

שאלה 3 (24 נקודות)

נתונות 100 תצפיות ב"ת של התפלגות פואסון $X_1, X_2, \dots X_{100} \sim Pois(\lambda)$

א. (7 נקודות) האם האומדים $T_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_{100}}{100}$, $T_2 = {X_1}^2 - X_1 \cdot X_{100}$ הינם אומדים חסרי הטיה עבור λ?

ב. (7 נקודות) חוקר מעוניין לבדוק על סמך התצפיות הנ"ל שתי השערות: $H_0:\ \lambda = 1,\ \ H_1:\ \lambda = 1.3$. לשם כך הוא בונה את המבחן הבא: נדחה את H_0 אם ממוצע המדגם גדול מ-1.15. מצאו את עוצמת המבחן.

ג. (5 נקודות) רמת המובהקות של המבחן בסעיף ב' היא:

1. $\Phi(1.5)$
2. $1 - \Phi(1.5)$
3. $1 - \Phi(1.315)$
4. אף תשובה אינה נכונה.

ד. (5 נקודות) אם נגדיל את כמות התצפיות:

1. רמת המובהקות תקטן ועוצמת המבחן תקטן.
2. רמת המובהקות תגדל ועוצמת המבחן תקטן.
3. רמת המובהקות תקטן ועוצמת המבחן תגדל.
4. רמת המובהקות תגדל ועוצמת המבחן תגדל.

פתרון:

א. לפי משפט שראינו, T_1 הוא אומד חסר הטיה לתוחלת של המשתנים המקריים. כיוון התוחלת של מ"מ פואסוני היא λ נקבל את הנדרש. נחשב תוחלת של T_2:

$$E(T_2) = E({X_1}^2) - E(X_1 \cdot X_{100}) = V(X_1) + E(X_1)^2 - E(X_1)E(X_{100}) = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

כאשר השתמשנו באי תלות בין המשתנים.

ב. לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים $\overline{X}_{100} \sim \mathrm{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{100}\right)$ ולכן עוצמת המבחן

$$\pi = P_{H_1}\left(\overline{\mathrm{X}}_{100} > 1.15\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.15 - 1.3}{\sqrt{1.3}/10}\right) = 0.9066$$

ג. בדומה לסעיף ב: $\alpha = P_{H_0}\left(\overline{X}_{100} > 1.15\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.15-1}{0.1}\right) = 1 - \Phi(1.5)$

ד. 3