פתרון מועד Y

שאלה 1. עבור הטור: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n(n+1)}}(x-3)^n$

א. חשבו את תחום ההתכנסות (12 נקי)

ב. כמה איברים יש לחשב בטור הנגזרות כדי לחשב את $f'(2.75)$ בקירוב של אלפית? (13 נקי)

פתרון:

א. נחשב את רדיוס ההתכנסות של הטור ע"י נוסחת קושי-הדמר: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n(n+1)}}=2\Rightarrow R=\frac{1}{2}$ ולכן

הטור מתכנס בהחלט בקטע $\left(3-\frac{1}{2},3+\frac{1}{2}\right)=\left(2\frac{1}{2},3\frac{1}{2}\right)$. נבדוק בקצוות:

בקצה $x=3\frac{1}{2}$ מתקבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ש"חבר" של הטור ההרמוני שמתבדר.

בקצה $x=2\frac{1}{2}$ מתקבל טור לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ מתכנס, לכן בסה"כ תחום ההתכנסות הוא $\left[2\frac{1}{2},3\frac{1}{2}\right)$.

ב. בתחום ההתכנסות אפשר לגזור איבר איבר:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{\sqrt{n(n+1)}}(x-3)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}(x-3)^{n-1}$$

בפרט: $f'(2.75)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,2^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

קיבלנו טור לייבניץ ולכן נדרוש:

$$\left|f'(2.75)-\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right|<a_{N+1}=\sqrt{\frac{N+1}{N+2}}\cdot\frac{1}{2^{N-1}}\le\frac{1}{1000}$$

זה קורה עבור $N\ge 11$ כלומר חישוב של 11 איברים (אין כאן איבר אפס) יבטיח את הדיוק הדרוש.

שאלה 2. תהא הפונקציה: $f(x,y)=(xy)^{1/3}$.

א. בדקו היכן ב- $\mathbb{R}^2$ הפונקציה f דיפרנציאבילית? (15 נקי)

ב. אדם נמצא על המשטח $z=f(x,y)$ בנקודה $(1,8)$. לכיוון איזה וקטור מנורמל $\hat{h}=(h_1,h_2)$ עליו לפנות אם ברצונו להישאר באותו גובה $z=2$? (10 נקי).

פתרון:

א. מחוץ לצירים הנ"ח החלקיות רציפות ולכן <u>הפונקציה דיפרנציאבילית מחוץ לצירים</u>.
על ציר ה- y חוץ מבראשית נקבל:

$$f_x(0,y\neq 0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(hy)^{1/3}-0}{h}=\text{לא קיים}$$

כלומר הפונקציה <u>אינה דיפרנציאבילית על ציר ה-y ומתוך הסימטריות גם לא על ציר x</u>.
על הראשית נקבל שהנ"ח מתאפסות, לכן נקבל בסביבת הראשית:

$$f(\Delta x,\Delta y)=(\Delta x\Delta y)^{1/3}=\varepsilon\rho\ \Rightarrow\ \varepsilon=\frac{(\Delta x\Delta y)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

הגבול הכפול של ε שמצאנו אינו קיים: למשל במסלול $\Delta x=\Delta y$ נקבל: $\varepsilon=\frac{\Delta x^{2/3}}{\sqrt{2}\Delta x}\xrightarrow{\Delta x\to 0}\infty$ כלומר

הפונקציה אינה דיפרנציאבילית גם בראשית.

ב. כיוון ש f דיפ' בנקודה זו אפשר לחשב את הנגזרת המכוונת ע"י מכפלה סקלרית של גרדיאנט ב $\hat{h}=(h_1,h_2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(1,8)=\nabla f_{(1,8)}\bullet(h_1,h_2)=\frac{1}{3}\left(2,\frac{1}{4}\right)\bullet(h_1,h_2)=0 \;\Rightarrow\; h_2=-8h_1 .$$

יחד עם הנירמול נקבל: $(h_1,h_2)=\frac{1}{\sqrt{65}}(1,-8)$.

שאלה 3.

א. מצאו נקודות קיצון מקומי של הפונקציה $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+3z-x$ (10 נק'),

ב. מצאו את הנקודה הקרובה ביותר על הפרבולה $y^2=18x$ לנקודה $(9,36)$ (15 נק').

פתרון:

א. נאתר נקודות קריטיות בתום התחום:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)=2x+y-1=0 \\ f_y(x,y,z)=2y+x=0 \\ f_z(x,y,z)=2z+3=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\right) .$$

כדי להכריע האם זו נק' קיצון מקומי ניעזר בהסיאן: $Hf_{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\right)}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. כל המינורים הראשיים חיוביים לכן עפ"י משפט סילבסטר זו נקודת מינימום מקומי.

ב. פונקצית המרחק של נקודה (x,y) מ- $(9,36)$ נתונה ע"י $d(x,y)=\sqrt{(x-9)^2+(y-36)^2}$. צריך למזער אותה או לחילופין את $d^2(x,y)$ בהינתן הפרבולה כאילוץ. נרשום את פונקצית לגרנז':

$$L(x,y)=(x-9)^2+(y-36)^2+\lambda\left(y^2-18x\right)$$

ונחפש לה נקודות קריטיות:

$$\begin{cases} L_x(x,y)=2(x-9)-18\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=\dfrac{x-9}{9} \\ L_y(x,y)=2(y-36)+2\lambda y=0 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{y-36}{y} \end{cases} \Rightarrow\; 9y-324=-xy+9y \;\Rightarrow\; y=\frac{324}{x}$$

נציב באילוץ $y^2=18x$ ונקבל: $\left(\frac{324}{x}\right)^2=18x \;\Rightarrow\; \frac{18^4}{18}=x^3 \;\Rightarrow\; x=18, y=18$.

זו אכן נק' מינימום שכן להסיאן שם: $HL_{(18,18)}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$ (שימו לב כי $\lambda=1$ שם) יש רק מינורים חיוביים.

שאלה 4. חשבו את האינטגרל $\int_L e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy$ באשר L הוא חציו העליון של המעגל $x^2+y^2=1$ מהנקודה $(-1,0)$ לנקודה $(1,0)$.

פתרון:

נסמן את מרכיבי השדה: $P=e^{x-y}(1+x+y), Q=e^{x-y}(1-x-y)$ ונראה כי השדה משמר בכל $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} Q_x-P_y&=\left[e^{x-y}(1-x-y)-e^{x-y}\right]-\left[-e^{x-y}(1+x+y)+e^{x-y}\right] \\ &=\left[e^{x-y}(-x-y)\right]+\left[e^{x-y}(x+y)\right]=0 \end{aligned}$$

(אם הרוטור שווה לאפס בתחום פשוט קשר אז השדה בהכרח משמר שם).

אם כן אפשר לחשב את האינטגרל לאורך מסלול אחר שמתחיל ומסתיים באותה נקודה, על ציר ה-x ולקבל:

$$\int_{-1}^{1} e^x(1+x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^x dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} e^x x\,dx}_{\substack{f=x\to f'=1\\ g=e^x\to g'=e^x}} = \int_{-1}^{1} e^x dx + xe^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = xe^x\Big|_{-1}^{1} = e+\frac{1}{e}$$

(האינטגרל לפי y מתאפס שכן y לא משתנה לאורך מסלול זה).

שאלה 5. יהא המשטח $z = xy$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. מצאו נקודה על המשטח בה המישור המשיק למשטח מקביל למישור $x+4y-2z=5$ (10 נק׳).

ב. חשבו את שטח חלק המשטח הכלוא בגליל $x^2+y^2=1$ (15 נק׳).

פתרון:

א. אם נתאר את המשטח ע״י : $F(x,y,z)=xy-z=0$ אז הנורמל למישור המשיק הוא : $\vec{n}=(y,x,-1)$

ועפ״י הנתון הוא אמור להיות כפולה שונה מאפס של $(1,4,-2)$, וזה יכול להתקיים רק אם :

$(y,x,-1)=\left(\frac{1}{2},2,-1\right)$ מכאן שהנקודה הרצויה היא $\left(2,\frac{1}{2},1\right)$.

ב. אנו מעוניינים באינטגרל משטחי מסוג ראשון : $\iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dD$ באשר :

$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}=\sqrt{1+y^2+x^2}$ ו- $D=\left\{x^2+y^2\le 1\right\}$.

באמצעות קורדינטות פולריות נקבל :

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \underbrace{r}_{J}\sqrt{1+r^2}\,dr = 2\pi\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[1+r^2\right]^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$