תרגיל בית 5 – מבוא לתורת הקבוצות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. **תיאורים של קבוצות** נתונות הקבוצות הבאות

$$A_1 = \{x \in \mathbb{N} \,|(x > 1) \wedge (\exists m, n \in \mathbb{N},\, x = 2^n 3^m)\}$$
$$A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|(x \geq 0) \wedge \left(x^2 \in \mathbb{N}\right)\right\}$$
$$A_3 = \{x \in \mathbb{N} \,|(x > 1) \wedge ((3|x) \vee (2|x))\}$$
$$A_4 = \{x \in \mathbb{N} \,|(x > 1) \wedge (\exists k \in \mathbb{N},\, (x = 2k) \vee (x = 3k))\}$$

$$B_1 = \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...\right\}$$
$$B_2 = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\exists y \in \mathbb{N},\, x = y^2\right\}$$
$$B_3 = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$$

(א) מצאו אילו קבוצות שוות זו לזו.

(ב) הוכיחו את ההתאמות שמצאתם בסעיף הקודם. זיכרו, אם $A = B$ אז יש להראות כי כל איברי A שייכים לקבוצה B **ובנוסף** יש להראות כי כל איברי B שייכים לקבוצה A.

2. **גודל קבוצת החזקה** בתרגיל זה נוכיח את הטענה: אם $|A| = n$ אז $|P(A)| = 2^n$. נוכיח את הטענה בשלבים.

(א) ראשית, וודאו שהתוצאות שקיבלתם בתרגילי ההרצאה והתרגול אכן תואמות את הטענה.

(ב) כעת, המטרה שלנו היא ליצור רשימה של כל תתי הקבוצות של A. ב A יש n איברים, וכל איבר יכול להופיע בתת קבוצה שבונים או לא להופיע בה. כלומר, יש n איברים ולכל איבר יש שתי אפשרויות: להיות או לא להיות בתת קבוצה. הסבירו למה נובע מכך שהגודל של $P(A)$ הוא 2^n.

3. **שייכות לעומת הכלה.** זיכרו!!!! **איברים** שייכים לקבוצה, **תתי־קבוצות** מוכלות בקבוצה. עבור כל אחת מהטענות הבאות קיבעו האם היא נכונה או שיקרית. נתבונן בקבוצות

$$A = \{\emptyset, 1, \{\emptyset\}, \{2, 1\}\}, \quad B = \{1, 2\}$$

(א) $B \subseteq A$

(ב) $B \in A$

(ג) $\{1, \emptyset\} \subseteq A$

(ד) $\{\emptyset, 2\} \in A$

(ה) $\{\emptyset, 2\} \subseteq B$

(ו) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \in P(A)$

(ז) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$

(ח) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq P(A)$

(ט) $B \in P(A)$

(י) $x \in \{x\}$

(יא) $\{x\} \subseteq \{x\}$

(יב) $\emptyset \subseteq \{x\}$

(יג) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

(יד) $\emptyset \in \{x\}$

4. מצאו שתי קבוצות A, B כך ש $A \in B$ וגם $A \subseteq B$.