

תרגיל בית 11 – פונקציות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. נתבונן בפונקציה הבאה

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & x > 0 \\ -3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

- (א) חשבו את הערכים הבאים של f : $f(0), f(1), f(-1), f(\frac{5}{3}), f(-\frac{5}{3})$
(ב) חשבו את התמונות ההפוכות הבאות: $f^{-1}(0), f^{-1}(1), f^{-1}(-1), f^{-1}(3), f^{-1}(-3), f^{-1}(6)$
(ג) חשבו את התמונות ההפוכות של הקטעים הבאים: $f^{-1}([-5, 5]), f^{-1}([-6, 5])$
(ד) שרטטו את גרף הפונקציה f .

2. נגדיר שתי פונקציות f, g באופן הבא

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x - 1 \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ x & x > 3 \end{cases}$$

- (א) האם הפונקציה g היא חח"ע? האם הפונקציה g היא על? אם כן הוכיחו, אם לא - מיצאו דוגמא נגדית.
(ב) רישמו נוסחא להרכבות $f \circ g, g \circ f$.
(ג) ציירו את הפונקציה $g \circ f$.

3. נתבונן בפונקציה הבאה

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(x, y) = (y, x - 1)$$

כאשר $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ היא המכפלה הקרטזית בין הממשיים עם עצמם.

- (א) הוכיחו כי הפונקציה f היא פונקציה הפיכה.
(ב) מצאו נוסחא מפורשת לפונקציה ההופכית f^{-1} .
(ג) מצאו את $f^{-1}([0, 1] \times [0, 1])$ כאשר $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ הוא הקטע הממשי הסגור. מומלץ לצייר את הפונקציה בכדי לקבל אינטואיציה.

4. יהיו A, B, C שלוש קבוצות. ויהיו f, g שתי פונקציות כאשר

$$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$$

- (א) הוכיחו כי אם הפונקציות f, g הן שתייהן חח"ע אז גם ההרכבה $g \circ f$ היא פונקציה חח"ע.
 (ב) הוכיחו כי אם הפונקציות f, g הן שתייהן פונקציות על אז גם ההרכבה $g \circ f$ היא פונקציה על.
 (ג) הוכיחו כי אם הפונקציות f, g הן שתייהן פונקציות הפיכות אז גם ההרכבה $g \circ f$ היא פונקציה הפיכה ומתקיים

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

5. יהיו A, B, C שלוש קבוצות. ויהיו f, g שתי פונקציות כאשר

$$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$$

עבור כל אחת מהטענות הבאות קיבעו האם היא אמיתית או שיקרית. אם הטענה אמיתית יש להוכיח, אם הטענה שיקרית יש למצוא דוגמא נגדית.

- (א) אם הפונקציה $g \circ f$ היא חח"ע אז g חח"ע.
 (ב) אם הפונקציה $g \circ f$ היא חח"ע והפונקציה f היא על אז g חח"ע.
 (ג) אם הפונקציה $g \circ f$ היא על אז f על.
 (ד) אם הפונקציה $g \circ f$ היא על והפונקציה g היא חח"ע אז f חח"ע.

6. **פונקציות כיחס.** תהא A קבוצה ו- $f : A \longrightarrow A$ פונקציה.

- (א) באמצעות הפונקציה f הגדירו **יחס** R על הקבוצה A .
 (ב) אם נתון שהיחס R שמצאתם הוא רפלקסיבי, מה חייבת להיות הפונקציה f ?
 (ג) אם נתון שהיחס R שמצאתם הוא סימטרי וכי הזוג $(a, b) \in R$ הראו כי מתקיים

$$a = f(f(a)) = f(f(f(f(a)))) = \dots = f^{2n}(a)$$

כאשר f^{2n} היא ההרכבה של הפונקציה f עם עצמה $2n$ פעמים.

- (ד) האם ייתכן כי היחס R שמצאתם הוא טרנזיטיבי?

7. נגדיר את הפונקציה הבאה

$$f : P(\mathbb{R}) \longrightarrow P(\mathbb{R})$$

$$f(X) = X \cup \mathbb{N}$$

- (א) חשבו את $f(\emptyset), f(\mathbb{Q}), f(\mathbb{R})$.
 (ב) האם הפונקציה f היא פונקציה חח"ע? אם כן הוכיחו, אם לא מיצאו דוגמא נגדית.
 (ג) האם הפונקציה f היא פונקציה על? אם כן הוכיחו, אם לא מיצאו דוגמא נגדית.
 (ד) הראו כי

$$Im(f) = \{A \in P(\mathbb{R}) \mid \mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}\}$$

8. יהיו A, B שתי קבוצות ופונקציה

$$f : A \longrightarrow B$$

נגדיר פונקציה חדשה לקבוצות החזקה

$$F : P(A) \longrightarrow P(B)$$
$$F(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

(א) במקרה הפרטי בו

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\}$$
$$f : A \longrightarrow B$$
$$f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$$

מיצאו את $F(\{1\}), F(\{1, 2\}), F(\emptyset), F(A)$

(ב) נחזור למקרה הכללי כפי שתואר בתחילת השאלה. הוכיחו את הטענות הבאות:

- i. הפונקציה f היא חח"ע אם ורק אם הפונקציה F היא חח"ע.
- ii. הפונקציה f היא על אם ורק אם הפונקציה F היא על.