פתרון מבחן X (ספטמבר 2023)

מרצה : ד"ר דבורה קפלן

מתרגלים :גב' אירנה נמירובסקי, מר עמית בנגיאט, מר אלכסנדר מינקין

<u>שאלה 1 - (20 נק') (אין קשר בין שני הסעיפים)</u>

א.(12 נק') מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\right)(x-2)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

ב. (8 נק') נתון שלטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ יש רדיוס התכנסות $r=2$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. הטור חזקות מתכנס בהחלט לכל $x\in(-1,2]$.

2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n$ מתכנס בהחלט.

<u>פתרון</u>:

א.

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\cos\frac{1}{n}}{n^3+n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\cos\frac{1}{n}}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}}=1\to r=\frac{1}{L}=1$$

(בעצם סדרת המקדמים חיובית לכן ניתן לדלג על ערך המוחלט).

$x_0=2$, לכן בינתיים הטור מתכנס בהחלט בקטע הפתוח $(1,3)$ ומתבדר לכל $x\notin[1,3]$

נבדוק קצוות:

$\boxed{x=3}\leftarrow$ אם נציב נקבל טור חיובי שמתכנס לפי מבחן השוואה הראשון:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\right)(3-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\right)$$

לכל n טבעי מתקיים : $0\le\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\le\frac{1}{n^3}$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ מתכנס (הרמוני מוכלל (p=3 >1) ואז גם הטור הקטן מתכנס.

$\boxed{x=1}\leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\right)(1-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\right)$

וזה טור המתכנס בהחלט : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3+n}\right)\right|$ (כלומר טור הערכים המוחלטים שווה לטור שקבלנו בקצה השני).

בסיכום : הטור מתכנס בהחלט בקטע הסגור $[1,3]$ ומתבדר לכל $x\notin[1,3]$.

ב. 1.הטענה לא נכונה : לפי הרדיוס הנתון הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in(-2,2)$. אבל עבור $x=2$ לא בהכרח מתכנס : לדוגמה :

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$: הרדיוס שווה 2 ו- $x_0=0$.

אבל אם נציב x=2 מקבלים טור שמתבדר כי סדרת המקדמים קבועה 1 לכן לא מתקיים תנאי הכרחי.

ב2. הטענה נכונה : לטור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ יש אותו רדיוס התכנסות. לכן הוא מתכנס בהחלט לכל $x\in(-2,2)$, בפרט עבור x=1.

שאלה 2 - (20 נק')

נתונה הפונקציה : $f(x,y)=x^5-y^5$.

א. (15 נק') מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה f בתחום :
$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$.

ב. (5 נק') האם קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$?

פתרון :

א. הפונקציה רציפה והתחום חסום וסגור :
הפונקציה היא פולינום לכן רציפה בכל נקודה.
נקודות התחום הן הנקודות של המעגל $x^2+y^2=1$ והנקודות בתוך המעגל . לכן התחום מכיל את השפה (ולכן סגור) ומוכל בסביבה של הראשית לכן חסום.

ולכן לפי משפט וירשטרס קיימים מקסימום ומינימום מוחלטים לפונקציה בתחום D. נמצא נקודות חשודות לקיום מקסימום ומינימום מוחלטים :

מהפנים הן הנקודות הקריטיות : $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^4=0\\ -5y^4=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

הערך של הפונקציה בנקודה הזאת הוא $\boxed{f(0,0)=0}$

מהשפה : נשתמש בשיטה של כופלי לגרנז' , ועל ידיה נמצא ערכים בנקודות החשודות למינימום או מקסימום מקומי תחת האילוץ של המעגל , כי בין הערכים האלו נמצאים המקסימום והמינימום המוחלטים בשפה , ואז הן גם נקודות חשודות למקסימום מוחלט או מינימום מוחלט בכל התחום D.
ואז נמצא את הפתרונות של המערכת הבאה :

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \\ g(x,y)=0\end{cases} \overset{\boxed{g(x,y)=x^2+y^2-1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}5x^4=2\lambda x \\ -5y^4=2\lambda y \\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(5x^3-2\lambda)=0 \\ y(-5y^3-2\lambda)=0 \\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2=1\end{cases} \\ OR \\ \begin{cases}x=0 \\ -5y^3-2\lambda=0 \\ x^2+y^2=1\end{cases} \\ OR \\ \begin{cases}y=0 \\ 5x^3-2\lambda=0 \\ x^2+y^2=1\end{cases} \\ OR \\ \begin{cases}5x^3-2\lambda=0 \\ -5y^3-2\lambda=0 \\ x^2+y^2=1\end{cases}\end{cases}$$

מהאופציה הראשונה לא נקבל פתרון. מהאחרות נקבל את הנקודות הבאות :
ואז מקבלים את הנקודות הבאות והערכים של הפונקציה הבאים :

$$\boxed{\begin{array}{l}(0,1)\to f(0,1)=-1 \\ (0,-1)\to f(0,-1)=1 \\ (1,0)\to f(1,0)=1 \\ (-1,0)\to f(-1,0)=-1 \\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\to f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\to f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{array}}$$

<u>**הערה**</u> : הגרדיאנט $\nabla g(x,y)\neq(0,0)$ בנקודות האילוץ ואז אין נקודות חשודות שמאפסות את הגרדיאנט הזה.

<u>בהשוואת הערכים מהפנים שהיה 0 ומהשפה שקבלנו מסיקים שהמקסימום המוחלט של הפונקציה בתחום D הוא **1** והמינימום הוא **-1**.</u>

ב.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3\underbrace{\boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}}}_{BOUNDED}-y^3\underbrace{\boxed{\frac{y^2}{x^2+y^2}}}_{BOUNDED}=0+0=0$$

הסבר : בכל מחובר יש כפל של חסומה בסביבה נקובה של הראשית, כפול אפיסה ואז כל מחובר שואף ל 0.

את החסימות של הביטויים האלו הוכחנו בהרצאה (שניהם בין 0 ל 1 בתחומים).

<u>שאלה 3 - (20 נק')</u>

נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ במשתנים x,y דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2$. נגדיר פונקציה g באופן הבא : $g(u,v)=f(2u+v^3,e^{(u-v^2)})$.

ידוע כי $\frac{\partial g}{\partial v}(1,1)=6$ $\frac{\partial g}{\partial u}(1,1)=4,$ ו- $g(1,1)=5$.

א. (9 נק') מצאו את $\vec{\nabla} f(3,1)$.

ב. (6 נק') מצאו קירוב לינארי של הערך $f(3.01,1.02)$.

ג. (5 נק') האם קיים וקטור $\vec{s}$ בעל נורמה 1 עבורו מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3,1)=9$?

<u>פתרון</u> :

$$x(u,v)=2u+v^3$$
$$x(1,1)=3$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)=2\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial u}(1,1)=2$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)=3v^2\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial v}(1,1)=3$$
$$y(u,v)=e^{(u-v^2)}$$
$$y(1,1)=e^0=1$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)=e^{(u-v^2)}\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial u}(1,1)=1$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)=e^{(u-v^2)}(-2v)\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial v}(1,1)=-2$$

א. מתקיימים תנאי כלל השרשרת בנקודה $P=(1,1)$ כי לפונקציות $x(u,v)$ ו $y(u,v)$ יש נגזרות חלקיות בנקודה $(1,1)$ והפונקציה f היא דיפרנציאבילית לפי הנתון בנקודה $\big(x(1,1),y(1,1)\big)=(3,1)$.

ולכן :

$$4=\frac{\partial g}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)\frac{\partial x}{\partial u}(1,1)+\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)\frac{\partial y}{\partial u}(1,1)=2\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)+\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)$$

$$6=\frac{\partial g}{\partial v}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)\frac{\partial x}{\partial v}(1,1)+\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)\frac{\partial y}{\partial v}(1,1)=3\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)-2\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)$$

נובע מהמשוואות ש : $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)=2$ ו $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)=0$. לכן : $\nabla f(3,1)=(2,0)$

ב. $f(\underset{x}{3.01},\underset{y}{1.02})\cong f(3,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)(x-3)+\frac{\partial f}{\partial y}(3,1)(y-1)=5+2(3.01-3)=5.02$

ג. הפונקציה f היא דיפרנציאבילית בנקודה $(3,1)$ ואז הנגזרת הכיוונית הכי גדולה מכולן היא בכיוון של הוקטור $\vec{n}=\frac{\overrightarrow{\nabla f}(3,1)}{\left\|\overrightarrow{\nabla f}(3,1)\right\|}=\frac{(2,0)}{\sqrt{4}}=(1,0)$, והערך של הנגזרת הכיוונית בכיוון הזה שווה ל- $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(3,1)=\left\|\overrightarrow{\nabla f}(3,1)\right\|=2<9$, ולכן **לא קיים** וקטור $\vec{s}$ בעל נורמה 1 כך ש- $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3,1)=9$.

__**שאלה 4 - (20 נק')**__

חשבו את הנפח של הגוף G, כאשר :

$$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 10-x^2-y^2\le z\le 10+x^2+y^2,\quad x^2+y^2\le 4\right\}$$

__**פתרון**__ :

הנפח המבוקש שווה לתוצאת האינטגרל $\iiint_G 1\,dx\,dy\,dz$. נעבור לקואורדינטות גליליות :

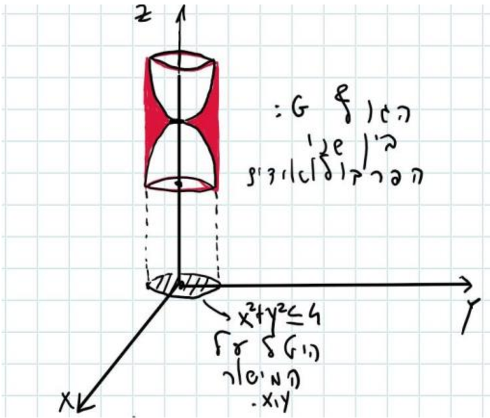
$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z,\quad |J|=r$.

ייצוג נקודות הגוף בגליליות :

$$\left\{(r,\theta,z):0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le r\le 2,\ \ 10-r^2\le z\le 10+r^2\right\}$$

$$VOL(G)=\iiint_G 1\,dxdydz=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{r=0}^{2}dr\int_{z=10-r^2}^{10+r^2}r\,dz=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{r=0}^{2}r\left(z\Big|_{10-r^2}^{10+r^2}\right)dr=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{r=0}^{2}r\left(10+r^2-10+r^2\right)dr=$$

$$=2\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{r=0}^{2}r^3dr=2\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^2 d\theta=8\int_{\theta=0}^{2\pi}1d\theta=16\pi$$



שאלה 5 - (20 נק')

נתון השדה הוקטורי : $\vec{F}(x,y)=\left(\sqrt{y}-y+\sqrt{x}\ ,\ \dfrac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y}+\alpha x^2\right)$, כאשר α פרמטר ממשי.

א. (7 נק') מצאו את הערך של הפרמטר α עבורו השדה $\vec{F}$ הינו שדה משמר בתחום : $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0\}$

ב. (8 נק') עבור הערך של α שמצאתם בסעיף **א.** חשבו את העבודה שמבצע השדה $\vec{F}$ על חלקיק הנע לאורך העקומה: $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=9-2(x-1)^2\}$, מהנקודה $A=(1,9)$ עד הנקודה $B=(3,1)$, כלומר הכיוון מ- A ל- B.

ג. (5 נק') עבור $\alpha=1$ חשבו את העבודה שמבצע השדה $\vec{F}$ על חלקיק הנע לאורך אותה עקומה C כמו בסעיף הקודם.

רמז : $\int_C(\vec{F_1}+\vec{F_2})\cdot d\vec{r}=\int_C\vec{F_1}\cdot d\vec{r}+\int_C\vec{F_2}\cdot d\vec{r}$.

פתרון :

א. נסמן : $Q(x,y)=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y}+\alpha x^2$, $P(x,y)=\sqrt{y}-y+\sqrt{x}$

לרכיבי השדה יש נגזרות חלקיות רציפות ב- D שהוא תחום פשוט קשר . אז הוא שדה משמר ב- D אם ורק אם : $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ב- D . ונבדוק מתי זה מתקיים :

$$P_y(x,y)=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}-1$$

$$Q_x(x,y)=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}-1+2\alpha x$$

השוויון $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ מתקיים בכל נקודה ב- D אם ורק אם $2\alpha x=0$ לכל $x>0$ ולכן $\boxed{\alpha=0}$.

ב. $\vec{F}(x,y)=\left(\sqrt{y}-y+\sqrt{x}\ ,\frac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y}\right)$ שדה משמר בתחום והעקומה מוכלת ב- D**.**

דרך 1 : נמצא פונקציית פוטנציאל $\varphi(x,y)$ המקיימת : $\vec{F}(x,y)=\vec{\nabla}\varphi(x,y)$ לכל נקודה ב- D .

כלומר : $\varphi_y=Q \quad \varphi_x=P$.

$$\varphi_x=P\Rightarrow\varphi(x,y)=\int P(x,y)dx=\int\left(\sqrt{y}-y+\sqrt{x}\right)dx=\left(\sqrt{y}-y\right)x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C(y)$$

$$\varphi_y=Q\Rightarrow x\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-1\right)+C'(y)=\frac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y}\rightarrow C'(y)=\sqrt{y}\Rightarrow C(y)=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+K$$

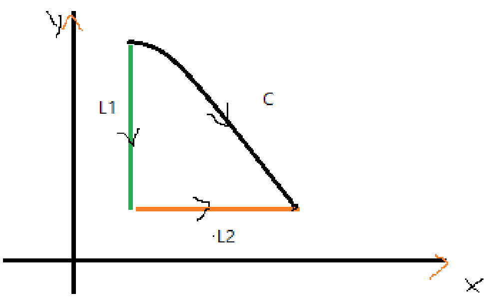
$$\varphi(x,y)=\left(\sqrt{y}-y\right)x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+K$$

ניעזר בפונקצית הפוטנציאל אשר חישבנו כדי לחשב את האינטגרל הקווי בעקומה הנתונה :

$$W=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(3,1)-\varphi(1,9)=\frac{2}{3}\sqrt{27}-12.$$

דרך 2 : השדה משמר לכן העבודה לא משתנה אם נבחור מסלול חילופי המחבר את הנקודות A עם B :

$$L=L_1\cup L_2$$



$L_1=\{(x,y)\ \big|\ x=1, y=t, t:9\to 1\}$, נחשב עבודה לאורך L_1 :

$$\int_{L_1}(\sqrt{y}-y+\sqrt{x})dx+(\frac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y})dy=-\int_1^9\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-1+\sqrt{t}\right)dt=-\sqrt{t}+t-\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^9=-12+\frac{2}{3}$$

$$L_2=\{(x,y)\ \big|\ y=1, x=t,\ 1\le t\le 3\}$$

$$\int_{L_2}(\sqrt{y}-y+\sqrt{x})dx+(\frac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y})dy=\int_{L_2}\sqrt{t}dt=\int_1^3\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^3=\frac{2}{3}\sqrt{27}-\frac{2}{3}$$

$$\int_{L}(\sqrt{y}-y+\sqrt{x})dx+(\frac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y})dy=$$

$$=\int_{L_1}(\sqrt{y}-y+\sqrt{x})dx+(\frac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y})dy+\int_{L_2}(\sqrt{y}-y+\sqrt{x})dx+(\frac{x}{2\sqrt{y}}-x+\sqrt{y})dy=$$

$$=-12+\frac{2}{3}\sqrt{27}$$

ג.. נסמן ב $\vec{F_1}$ את השדה $\vec{F}$ עבור הפרמטר שווה 0 ו ב $\vec{F_2}$ את השדה : $F_2(x,y)=(0,x^2)$. ואז השדה עבור $\alpha=1$ הוא הסכום שלהם. לכן :

$$\int_C(\vec{F_1}+\vec{F_2})\cdot d\vec{r}=\int_C\vec{F_1}\cdot d\vec{r}+\int_C\vec{F_2}\cdot d\vec{r}.$$

נחשב את $\int_C\vec{F_2}\cdot d\vec{r}$. הצגה פרמטרית של C

$$\left.\begin{aligned}&r(t)=\left(t,9-2(t-1)^2\right)\\&t\in[1,3]\\&d\vec{r}=r'(t)dt=\left(1,-4(t-1)\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\int_C\vec{F_2}\cdot d\vec{r}=\int_1^3F_2\ (t,9-2(t-1)^2)\bullet(1,-4t+4)dt=\int_1^3(0,t^2)\cdot(1,-4t+4)dt=\int_1^3\ (-4t^3+4t^2)dt=-t^4+\frac{4}{3}t^3\ \Big|_1^3$$

$$=117-\frac{1}{12}$$

$$\int_C(\vec{F_1}+\vec{F_2})\cdot d\vec{r}=\frac{2}{3}\sqrt{27}+105-\frac{1}{12}$$

<u>שאלה 6 - (20 נק')</u>

חשבו את השטף של השדה הוקטורי : $\vec{F}(x,y,z)=\left(y^2z^2\right)\hat{i}+\left(x^2z^2\right)\hat{j}+\left(z+1\right)\left(x^2+y^2\right)\hat{k}$

דרך המשטח <u>הפתוח</u> σ : $z=4-x^2-y^2$, $z\ge 0$.

כיוון הנורמליים למשטח הוא "כלפי מעלה" כלומר לכיוון החיובי של ציר $\overrightarrow{OZ}$.

.

פתרון : רכיבי השדה הן פונקציות בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל נקודה, ולכן נוכל להשתמש במשפט גאוס אם נסגור את המשטח (פרבולואיד) ע"י העיגול: $x^2+y^2\le 4$ הנמצא במישור $z=0$. נסמן אותו ב- σ_1. נתבונן במשטח הסגור עם כיוון הוקטורים הנורמלים כלפי חוץ.
המשטח הסגור הוא חלק למקוטעין. ואז אנחנו בתנאים של משפט גאוס:
(נסמן ב- G את הגוף הכלוא בתוך המשטח הסגור).

$$\iint_{\sigma\cup\sigma_1}\vec{F}\cdot n\,dS=\iiint_G\left(x^2+y^2\right)dV \underset{GAUSS}{\Leftarrow} div\vec{F}=x^2+y^2$$

נעבור **לקואורדינאטות גליליות** ונקבל:

$$\iint_{\sigma\cup\sigma_1}\vec{F}\cdot n\,dS=\iiint_G\left(x^2+y^2\right)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_0^{4-r^2}r^2 r dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3 z\Big|_0^{4-r^2}dr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(4r^3-r^5\right)dr=.$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\left(r^4-\frac{r^6}{6}\right)_0^2=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta=\frac{16}{3}2\pi=\frac{32\pi}{3}$$

נמצא $\iint_{\sigma_1}\vec{F}\cdot n\,dS$, כלומר נמצא את השטף דרך המכסה התחתון שהוספנו , ונשים לב שהמכוון שלו הוא כלפי מטה כי למשטח הסגור יש מכוון כלפי חוץ. הצגה פרמטרית של המכסה הזה :

$$\left\{\begin{array}{l} r(x,y)=(x,y,0)\\ (x,y)\in D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 4\right\}\\ r_x\times r_y=(0,0,1)\end{array}\right\}$$

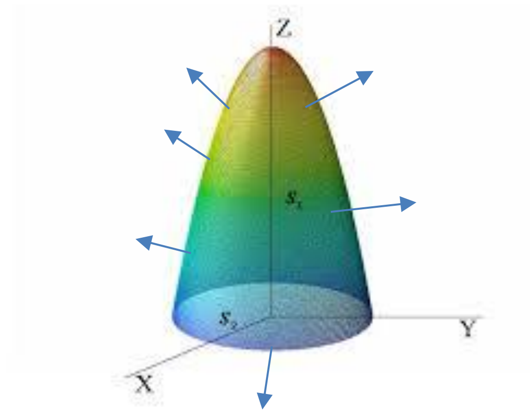
$$\iint_{\sigma_1}\vec{F}\cdot n\,dS \underset{\begin{cases}D: z=0\\ x^2+y^2\le 4\end{cases}}{=} -\iint_D(y^2 0^2,x^2 0^2,(0+1)(x^2+y^2))\bullet(0,0,1)dxdy=-\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2 r dr=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 d\theta=-\int_0^{2\pi}4\,d\theta=-4\int_0^{2\pi}1\,d\theta=-8\pi$$

(סימון " – " לפני האינטגרל כי המכוון ב - σ_1 צריך להיות כלפי מטה כדי שהמכוון במשטח הסגור יהיה כלפי חוץ).

מקבלים: $$\boxed{\iint_{\sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\sigma\cup\sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS-\iint_{\sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{56\pi}{3}}$$

בציור מלמטה רואים את המשטח הסגור מלמטה עם נורמלים כלפי חוץ. (בציור $S_1=\sigma$ והמכסה התחתון S_2 הוא σ_1).


Z
s_1
s_2
Y
X