מרצים : ד״ר דבורה קפלן, ד״ר רוני ביתן, פרופסור יוני סטאנצ׳סקו.
מתרגלים : מר עמית בנגיאט ,מר ולדימיר גלמן, מר שי כרמון .

פתרון X

<u>שאלה 1</u>: (20 נקודות)

א. (10 נק׳) הוכיחו כי לכל $0<a<b$ מתקיים : $e^{b^2}-e^{a^2}<2be^{b^2}(b-a)$.

ב. (10 נק׳) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n-3}{n^2+2n+5}\right)^{6n}$.

<u>פתרון</u> :

א . נשתמש במשפט לגרנז׳ : הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ היא רציפה בקטע $[a,b]$ כאלמנטרית שמוגדרת בקטע , וגזירה בקטע (a,b) (הרכבה של גזירות ב- $\mathbb{R}$) ולכן קיים $c\in(a,b)$ כך ש :

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\Rightarrow e^{b^2}-e^{a^2}=e^{c^2}2c(b-a)\underset{\substack{0<a<c<b\\ THEN:\\ 0<e^{c^2}<e^{b^2}\\ 0<2c<2b\\ 0<b-a}}{<}e^{b^2}2b(b-a)$$

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n-3}{n^2+2n+5}\right)^{6n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+5+2n-8}{n^2+2n+5}\right)^{6n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-8}{n^2+2n+5}\right)^{6n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n-8}{n^2+2n+5}\right)^{\frac{n^2+2n+5}{2n-8}}\right]^{\left(\frac{2n-8}{n^2+2n+5}\right)6n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n-8}{n^2+2n+5}\right)^{\frac{n^2+2n+5}{2n-8}}\right]^{\left(\frac{12n^2-48n}{n^2+2n+5}\right)}=e^{12}$$

הסבר תוצאת הגבול :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-8}{n^2+2n+5}\right)^{\frac{n^2+2n+5}{2n-8}}=e \quad \text{כי} \quad x_n=\frac{2n-8}{n^2+2n+5}\xrightarrow{n\to\infty}0 \text{ (EULER).}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2-48n}{n^2+2n+5}\underset{/:n^2}{\overset{/:n^2}{=}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{12-\frac{48}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)=12$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n-3}{n^2+2n+5}\right)^{6n}=e^{12}$$

<u>שאלה 2</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') נתונה סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, כך ש- $a_n=\dfrac{5n+\sqrt{1}}{n^2+1}+\dfrac{5n+\sqrt{2}}{n^2+2}+....+\dfrac{5n+\sqrt{n}}{n^2+n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל : $\int\left(\dfrac{1}{(\tan x-1)(\tan x-2)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$.

פתרון:

א. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים **:** $n\cdot\dfrac{5n+\sqrt{1}}{n^2+n}\le a_n\le n\cdot\dfrac{5n+\sqrt{n}}{n^2+1}$.

(הסבר : כל איבר בסדרה מורכב מ- n מחוברים. ומחובר מספר j מקיים :
$\dfrac{5n+\sqrt{1}}{n^2+n}\le\dfrac{5n+\sqrt{j}}{n^2+j}\le\dfrac{5n+\sqrt{n}}{n^2+1}$).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n\sqrt{1}}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2\left(1+\boxed{\frac{n}{5n^2}}^{\nearrow 0}\right)}{n^2\left(1+\boxed{\frac{n}{n^2}}_{\searrow 0}\right)}=5$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n\sqrt{n}}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2\left(1+\boxed{\frac{n\sqrt{n}}{5n^2}}^{\nearrow 0}\right)}{n^2\left(1+\boxed{\frac{1}{n^2}}_{\searrow 0}\right)}=5$$

ואז לפי כלל הסנדוויץ' נובע ש - $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5}$.

ב.

$$\int\frac{1}{(\tan x-1)(\tan x-2)}\,\frac{1}{\cos^2 x}dx\underset{\substack{\tan x=t\\ \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt}}{=}\int\frac{1}{(t-1)(t-2)}dt\underset{\substack{\frac{1}{(t-1)(t-2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2}\\ A=-1\\ B=1}}{=}\int\left(\frac{1}{(t-2)}-\frac{1}{(t-1)}\right)dt=$$

$$=\ln|t-2|-\ln|t-1|+C=\ln|\tan x-2|-\ln|\tan x-1|+C$$

שאלה 3 : (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו כמה פתרונות ממשיים קיימים למשוואה : $\ln\left(x^2+1\right)=\arctan x$

ב. (10 נק') נתונה פונקציה f בעלת נגזרות עד סדר 3 רציפות ב- $\mathbb{R}$.
ידוע שהפולינום טיילור-מקלורין שלה מסדר שני הוא $T_2(x)=2+4x+8x^2$, ו - $\left|f'''(x)\right|\le 1$ לכל x ממשי.

ב.1) הוכיחו שהנקודה $x_0=0$ היא לא נקודה קריטית וגם לא נקודת פיתול של הפונקציה f^2 .

ב.2) מצאו קירוב של הערך $f\left(\frac{1}{2}\right)$ והעריכו את השגיאה בקירוב שמצאתם .

פתרון :

א.נתבונן בפונקציה $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\arctan x$. מספיק לבדוק כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $f(x)=0$. f פונקציה אלמנטרית שמוגדרת לכל x ממשי, לכן f רציפה לכל x ממשי. בנוסף מתקיים : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$.

$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$, ואז הנגזרת היא חיובית בקטע $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, שלילית בקטע $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ ו $f'(\frac{1}{2})=0$
לכן הפונקציה יורדת ממש בקטע $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ ועולה ממש בקטע $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

בנוסף לפי הגבולות האינסופיים שחישבני אפשר להסיק שקיימים נקודות $b>\frac{1}{2}$, $a<\frac{1}{2}$ עבורן הפונקציה חיובית, ובנוסף $f(\frac{1}{2})<0.$.

אם נפעיל משפט ערך הביניים בקטעים $\left[a,\frac{1}{2}\right]$ ו $\left[\frac{1}{2},b\right]$ ונסיק שבכל אחד קיים פתרון למשוואה $f(x)=0$, וכל אחד הוא פתרון היחיד בקטעים $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ ו $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ בהתאמה, זה נובע מהמונוטוניות ממש בכל אחד מהקטעים האלה.

מסקנה : **למשוואה קיימים בדיוק שני פתרונות .**

ב.1 לפי המקדמים של הפולינום מקלורין (המקדם של x^k שווה ל $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$) מסיקים ש :

$f(0)=2$, $f'(0)=4$, $f''(0)=16$.

בנוסף מתקיים :
$$\left.\begin{aligned}&\left(f^2\right)'(0)=2f(0)f'(0)\\&\left(f^2\right)''(0)=2\left(f'(0)\right)^2+2f(0)f''(0)\end{aligned}\right\}$$

כלומר הנגזרת של f^2 ב- 0 היא שונה מ-0 לכן אין ב- 0 נקודה קריטית, וגם הנגזרת השנייה שונה מ- 0 בנקודה $x=0$ לכן אין נקודת פיתול ב- 0.

ב. 2

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\cong T_2\left(\frac{1}{2}\right)=6$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-6\right|=\left|r_2\left(\frac{1}{2}\right)\right|\underset{0<c<\frac{1}{2}}{=}\left|\frac{f'''(c)\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!}\right|=\frac{|f'''(c)|\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!}\le\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{48}$$

<u>שאלה 4</u> : (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$.

א. (10 נק') מצאו תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון מקומי של הפונקציה f בתחום ההגדרה שלה $(0,\infty)$.

ב. (10 נק') האם קיים לפונקציה f מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט בתחום:

ב.1) $(0,\infty)$?

ב.2) $[1,\infty)$?

נמקו היטב את תשובתכם.

<u>פתרון :</u>

א. הפונקציה גזירה בכל נקודה בתחום ההגדרה ומתקיים :

$$f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$$

הנקודות קיצון מקומי חייבות להיות בין הנקודות הקריטיות, שבמקרה הזה הן הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת : יש שתיים כאלו : $x=1, x=e^2$.
נבדוק מהו סימן הנגזרת בתחומים ביניהם
ונסיק לגבי תחומי העלייה והירידה :

	$0<x<1$	$1<x<e^2$	$e^2<x$
$\ln x$	-	+	+
$2-\ln x$	+	+	-
f'	-	+	-
f	יורדת	עולה	יורדת

מסיקים :
הפונקציה יורדת ממש בקטעים $(0,1]$ ו- $[e^2,\infty)$
(נגזרת קטנה או שווה ל- 0 ומתאפסת בנקודות בודדות).
ועולה ממש בקטע $[1,e^2]$ (נגזרת גדולה או שווה ל 0 ומתאפסת בנקודות בודדות).

מכאן : בנקודה $x=1$ יש מינימום מקומי, ובנקודה $x=e^2$ יש מקסימום מקומי.

ב1.

בקטע $(0,\infty)$: לפי תחומי עליה וירידה ובנוסף לפי הגבול :

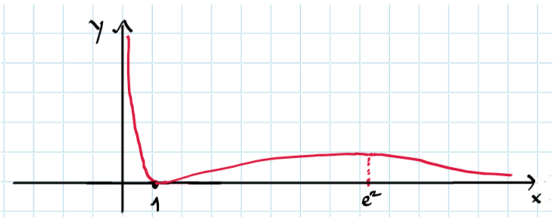
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=(\frac{\infty}{\infty},LOPITAL)=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x}=(\frac{\infty}{\infty},LOPITAL)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{1}=0$$

מסיקים שבנקודה $x=1$ יש לפונקציה מינימום מוחלט ששווה ל 0 $f(1)=0$) בעצם הפונקציה חיובית בכל נקודה שונה מ-1).

אין לה מקסימום מוחלט בתחום $(0,\infty)$ כי $\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)^2}{x}=\infty$.

ב2. בקטע $[1,\infty)$: לפי תחומי עליה וירידה ובנוסף $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ מסיקים שבנקודה $x=1$ יש לפונקציה מינימום מוחלט ששווה ל 0 $f(1)=0$) בעצם הפונקציה חיבית בכל נקודה השונה מ- 1).

ובנקודה $x=e^2$ יש לפונקציה מקסימום מוחלט בקטע הנתון, והוא שווה לערך $f(e^2)=\frac{4}{e^2}$.



שאלה 5 : (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $F(x)=\int_{\pi}^{x}\frac{(\sin t)^2}{t}dt$.

א. (10 נק') הוכיחו ש-F גזירה בכל $x\in(0,\infty)$ ומצאו את הנגזרת שלה.

ב. (10 נק') נגדיר פונקציה חדשה :

$$G(x)=\begin{cases}\frac{F(x)}{x-\pi} & x>\pi\\ 0 & x=\pi\\ \frac{\ln(1+(\pi-x)^2)}{\pi-x} & x<\pi\end{cases}$$

האם הפונקציה G היא רציפה בנקודה $x_0=\pi$?

פתרון: **א .** הפונקציה $f(t)=\frac{(\sin t)^2}{t}$ רציפה בקטע $(0,\infty)$ כי מוגדרת בקטע והיא אלמנטרית. ובנוסף $\pi\in(0,\infty)$.

ואז לפי הממשפט היסודי הפונקציה F היא גזירה לכל $x\in(0,\infty)$ ומתקיים:

$F'(x)=\dfrac{(\sin x)^2}{x}$.

ב.

$$\lim_{x\to\pi^+}G(x)=\lim_{x\to\pi^+}\left(\frac{F(x)}{x-\pi}\right)\underset{*}{=}\left(\frac{0}{0},LOPITAL\right)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{(\sin x)^2}{x}=\frac{(\sin\pi)^2}{\pi}=0$$

*נימוק על הגבול של F: הפונקציה F גזירה ולכן רציפה לכל $x\in(0,\infty)$, לכן:

$$\lim_{x\to\pi}F(x)=F(\pi)=\int_{\pi}^{\pi}\frac{(\sin t)^2}{t}dt=0$$

$$\lim_{x\to\pi^-}G(x)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\ln\left(1+(\pi-x)^2\right)}{\pi-x}=\left(\frac{0}{0},LOPITAL\right)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\frac{1}{1+(\pi-x)^2}2(\pi-x)(-1)}{-1}=0$$

ואז הפונקציה G מקיימת: $\lim_{x\to\pi^+}G(x)=\lim_{x\to\pi^-}G(x)=G(\pi)$ לכן היא רציפה ב $x=\pi$.

<u>שאלה 6</u> : (20 נקודות)

א.(10 נק') נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x^{5x} & (x>0)\\ x+1 & (x\le 0)\end{cases}$$

א.1) הוכיחו שהפונקציה היא רציפה בנקודה $x_0=0$.

א.2) האם היא גזירה בנקודה $x_0=0$?

ב. (10 נק') לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$ העבירו משיק בנקודה $(1,f(1))$.
חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר המשיק וציר ה-x.

פתרון :

א 1.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x^{5x} \underset{0^0}{=} \lim_{x\to0^+} e^{5x\ln x}=\lim_{x\to0^+} e^{\frac{5\ln x}{x^{-1}}}=e^0=1$$

$$\left(\lim_{x\to0^+}\frac{5\ln x}{x^{-1}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\ Lopital\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{5}{x}}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-5x^2}{x}=\lim_{x\to0^+}-5x=0\right)$$

$$f(0)=1$$

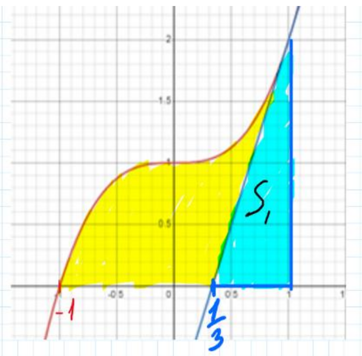
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1$$

ואז הפונקציה רציפה ב-0 כי הגבולות החד צדדיים שווים לערך שלה ב -0.

2.א נבדוק גזירות לפי ההגדרה : נבדוק האם הגבול $\lim_{h\to0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)$ קיים וסופי :

$$\lim_{h\to0^+}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h}\right)=\lim_{h\to0^+}\left(\frac{h^{5h}-1}{h}\right)=\left(\frac{0}{0},LOPITAL\right)=\lim_{h\to0^+}\frac{\left(e^{5h\ln h}\right)'}{1}=\lim_{h\to0^+}\underbrace{e^{5h\ln h}}_{\searrow1}\underbrace{(5\ln h+5)}_{\searrow-\infty}=-\infty$$

נובע שהפונקציה לא גזירה ב -0.



ב. נמצא משוואת המשיק.

$$f'(x)=3x^2\to f'(1)=3 \quad \text{ו-} \quad f(1)=2$$

משוואת המשיק : $y=f(1)+f'(1)(x-1)=2+3(x-1)\longrightarrow\boxed{y=3x-1}$

נחשב שטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע $[-1,1]$

ונחסיר את שטח המשולש המסומן ב- S_1 :

$$S=\int_{-1}^{1}(x^3+1)dx-S_1$$

$$\int_{-1}^{1}(x^3+1)dx=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)_{-1}^{1}=2$$

$$S_1=\frac{\frac{2}{3}\cdot2}{2}=\frac{2}{3}$$

$$S=2-\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$$

דרך שנייה לפתור : $S=\int_{-1}^{\frac{1}{3}}(x^3+1)\,dx+\int_{\frac{1}{3}}^{1}(x^3+1-(3x-1))\,dx$