יונתן כהן

אלגברה לינארית

תרגול מספר 11

טרנספורמציות לינאריות

גרעין ותמונה של טרנספורמציה לינארית

מטריצה מייצגת של טרנספורמציה לינארית לפי בסיסים

טרנספורמציות לינאריות

.1

$T(a+bx+cx^2)=(a+2b,3c)$ $\quad T:P_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, לבדוק האם T לינארית.

נבדוק האם T שומרת על חיבור וקטורי: $T(\underline{u}+\underline{v})=T(\underline{u})+T(\underline{v})$

נסמן

$$u=a+bx+cx^2$$
$$v=\alpha+\beta x+\gamma x^2$$
$$\Rightarrow\quad u+v=(a+bx+cx^2)+(\alpha+\beta x+\gamma x^2)=(a+\alpha)+(b+\beta)x+(c+\gamma)x^2$$

אז

$$T(u)=T(a+bx+cx^2)=(a+2b,3c)$$
$$T(v)=T(\alpha+\beta x+\gamma x^2)=(\alpha+2\beta,3\gamma)$$
$$T(u)+T(v)=(a+2b+\alpha+2\beta,3c+3\gamma)$$

מצד שני

$$T(u+v)=T\left((a+\alpha)+(b+\beta)x+(c+\gamma)x^2\right)=$$
$$=\left((a+\alpha)+2(b+\beta),3(c+\gamma)\right)=(a+\alpha+2b+2\beta,3c+3\gamma)$$

ומתקבל

$$T(u+v)=T(u)+T(v)$$

נבדוק האם T שומרת על כפל בסקלר: $T(k\underline{u})=kT(\underline{u})$

$$u=a+bx+cx^2$$
$$\Rightarrow\quad ku=k(a+bx+cx^2)=(ka)+(kb)x+(kc)x^2$$

אז

$$T(u)=T(a+bx+cx^2)=(a+2b,3c)$$
$$kT(u)=(ka+2kb,3kc)$$

מצד שני

$$T(ku)=T\left((ka)+(kb)x+(kc)x^2\right)=(ka+2kb,3kc)$$

ומתקבל

$$T(ku)=kT(u)$$

הטרנספורמציה T שומרת על חיבור וקטורי ועל כפל בסקלר, ולכן היא טרנספורמציה לינארית.

.2

$T(p)=p(x)-2p''(x)\quad T:P_2(\mathbb{R})\to P_2(\mathbb{R})$, לבדוק האם T לינארית.

נבדוק האם T שומרת על חיבור וקטורי: $T(p+q)=T(p)+T(q)$

$$T(p)=p(x)-2p''(x)$$
$$T(q)=q(x)-2q''(x)$$
$$T(p)+T(q)=p(x)-2p''(x)+q(x)-2q''(x)$$

מצד שני

$$T(p+q)=(p(x)+q(x))-2\left(p(x)+q(x)\right)''=p(x)+q(x)-2\left(p''(x)+q''(x)\right)=$$
$$=p(x)+q(x)-2p''(x)-2q''(x)$$

ומתקבל

$$T(p+q)=T(p)+T(q)$$

נבדוק האם T שומרת על כפל בסקלר: $T(\alpha p(x))=\alpha T(p(x))$

$$T(p(x))=p(x)-2p''(x)$$
$$\alpha T(p(x))=\alpha\left(p(x)-2p''(x)\right)=\alpha p(x)-2\alpha p''(x)$$

מצד שני

$$T(\alpha p(x))=\alpha p(x)-2\left(\alpha p(x)\right)''=\alpha p(x)-2\alpha p''(x)$$

ומתקבל

$$T(\alpha p(x))=\alpha T(p(x))$$

הטרנספורמציה T שומרת על חיבור וקטורי ועל כפל בסקלר, ולכן היא טרנספורמציה לינארית.

הערה:
ניתן לכתוב את הטרנספורמציה ברכיבים.
וקטור כללי ב $P_2(\mathbb{R})$ הוא $p(x)=a+bx+cx^2$ ואז

$$T(p(x))=T(a+bx+cx^2)=a+bx+cx^2-2(a+bx+cx^2)''=$$
$$=a+bx+cx^2-2(2c)=(a-4c)+bx+cx^2$$

כלומר נוסחה אלטרנטיבית לטרנספורמציה T (מנוסחת במונחי רכיבי הוקטור הכללי $p(x)=a+bx+cx^2$) היא

$$T(a+bx+cx^2)=(a-4c)+bx+cx^2$$

וניתן להוכיח את לינאריות הטרנספורמציה T באופן דומה לדוגמה הקודמת.

הערה:
ההוכחה (הראשונה) אינה תלויה כלל במעלת הפולינומים.
כלומר עבור הטרנספורמציה

$$T:P_n(\mathbb{R})\to P_n(\mathbb{R})\quad T(p)=p(x)-2p''(x)$$

או

$$T:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})\quad T(p)=p(x)-2p''(x)$$

ההוכחה ללינאריות הטרנספורמציה זהה לחלוטין.

.3

$T(A)=(A_{11},|A|)$ $\quad T: M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, לבדוק האם T לינארית.

$$T\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)=\left(1,\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\right)=(1,-2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\right)=\left(5,\begin{vmatrix}5&6\\7&8\end{vmatrix}\right)=(5,-2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\right)=(1,-2)+(5,-2)=(6,-4)$$

מצד שני

$$T\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}\right)=\left(6,\begin{vmatrix}6&8\\10&12\end{vmatrix}\right)=(6,-8)$$

ולכן

$$T\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\right)\neq T\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\right)$$

הטרנספורמציה T אינה שומרת על חיבור וקטורי, ולכן היא אינה טרנספורמציה לינארית.

.4

$T(x,y,z)=(x,xy,xyz)$ $\quad T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, לבדוק האם T לינארית.

$$T(1,2,3)=(1,1\cdot 2,1\cdot 2\cdot 3)=(1,2,6)$$
$$4\cdot T(1,2,3)=4\cdot(1,2,6)=(4,8,24)$$

מצד שני

$$T\left(4\cdot(1,2,3)\right)=T(4,8,12)=(4,4\cdot 8,4\cdot 8\cdot 12)=(4,32,384)$$

ולכן

$$T\left(4\cdot(1,2,3)\right)\neq 4\cdot T(1,2,3)$$

הטרנספורמציה T אינה שומרת על כפל בסקלר, ולכן היא אינה טרנספורמציה לינארית.

5.

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ להוכיח ש T העתקה לינארית.

נבדוק האם T שומרת על חיבור וקטורי: $T(x+y) = T(x)+T(y)$

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax+Ay = T(x)+T(y)$$

נבדוק האם T שומרת על כפל בסקלר: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$$T(\alpha x) = A\cdot(\alpha x) = \alpha \cdot Ax = \alpha \cdot T(x)$$

הטרנספורמציה T שומרת על חיבור וקטורי ועל כפל בסקלר, ולכן היא טרנספורמציה לינארית.

.6

$T(x,y,z)=(x-2y+3z,4x+5z)$ $\quad T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, לבדוק האם T לינארית.

נוסחת הטרנספורמציה

$$T(x,y,z)=(x-2y+3z,4x+5z)$$

בכתיב אחר

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-2y+3z\\4x+5z\end{bmatrix}$$

ניתן לכתוב זאת כך

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x-2y+3z\\4x+5z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\4&0&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

אם נסמן

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\4&0&5\end{bmatrix}$$

ומתקבל

$$T(\underline{x})=A\underline{x}$$

מתקבל ש A מטריצה מסדר 2×3 , ו

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\quad T(\underline{x})=A\underline{x}\ \ ,\ \ A\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

וראינו (בדוגמה הקודמת) שטרנספורמציה זו היא לינארית.

הערה :

ניתן להוכיח את לינאריות הטרנספורמציה T באופן דומה לדוגמה הראשונה.

.7

$T(x,y,z)=(x+2y+3z,4x+5)$ $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, לבדוק האם T לינארית.

טענה :

אם $T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית, אז $T(\underline{0}_V)=\underline{0}_W$

נפעיל את הטרנספורמציה T על וקטור האפס של $\mathbb{R}^3$

$$T(0,0,0)=(0+2\cdot 0+3\cdot 0,4\cdot 0+5)=(0,5)\neq(0,0)$$

הטרנספורמציה T אינה מעבירה את וקטור האפס של $\mathbb{R}^3$ לוקטור האפס של $\mathbb{R}^2$, ולכן היא אינה טרנספורמציה לינארית.

גרעין ותמונה של טרנספורמציה לינארית

1.
נתונה טרנספורמציה לינארית

$$T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = b + (a+2d)x + (3b-c)x^2$$

למצוא בסיס ומימד ל $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Ker} T$.

$\operatorname{Ker} T$:

שלב ראשון: נבין מהו $\operatorname{Ker} T$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} T$$

$$\Leftrightarrow \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad b + (a+2d)x + (3b-c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a + 2d = 0 \\ 3b - c = 0 \end{cases} \quad (*)$$

וקטור כללי $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נמצא ב $\operatorname{Ker} T$ אם ורק אם רכיביו מקיימים את מערכת המשוואות $(*)$.

$\operatorname{Ker} T$ הוא תת המרחב של כל המטריצות מסדר 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ המקיימות את התנאים $(*)$.

כלומר $\operatorname{Ker} T$ 'מזוהה' עם מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות $(*)$.

שלב שני: נמצא בסיס ומימד ל $\operatorname{Ker} T$.

נמצא בסיס לתת המרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ של הוקטורים שרכיביהם מקיימים את התנאים $(*)$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.
איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3$, ולכן המשתנים a,b,c הם משתנים קשורים, d משתנה חופשי.
ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.
המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases} a + 2d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -2d \,,\, b = 0 \,,\, c = 0$$

ולכן הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$(-2d, 0, 0, d) = d(-2, 0, 0, 1)$$

ומכאן שוקטור כללי ב $\operatorname{Ker} T$ הוא מהצורה

$$\begin{bmatrix} -2d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ומשמעות הדבר היא ש

$$\operatorname{Ker}T=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

הקבוצה $\left\{\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ היא בת"ל – קבוצה בת וקטור יחיד השונה מוקטור האפס היא בת"ל.

לסיכום הקבוצה $\left\{\begin{bmatrix}-2&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ בת"ל ופורשת את $\operatorname{Ker}T$, ולכן היא בסיס של $\operatorname{Ker}T$.

$$\dim\operatorname{Ker}T=1$$

$\operatorname{Im}T$:

שלב ראשון: נבין מהו $\operatorname{Im}T$.

טענה:

$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית, $\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ קבוצה הפורשת את התחום V

$$V=\operatorname{span}\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$$

אז $\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_k)\}$ פורשת את $\operatorname{Im}T$

$$\operatorname{Im}T=\operatorname{span}\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_k)\}$$

נבחר קבוצה הפורשת את התחום $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

הקבוצה הפשוטה ביותר הפורשת את $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ היא הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$\left\{E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

נחשב את תמונות אברי הבסיס הסטנדרטי ע"י T

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=b+(a+2d)x+(3b-c)x^2$$

$$T(E_{11})=T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=x$$

$$T(E_{12})=T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=1+3x^2$$

$$T(E_{21})=T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=-x^2$$

$$T(E_{22})=T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=2x$$

ולכן

$$\operatorname{Im}T=\operatorname{span}\{T(E_{11}),T(E_{12}),T(E_{21}),T(E_{22})\}=\operatorname{span}\{x,1+3x^2,-x^2,2x\}$$

שלב שני: נמצא בסיס ומימד ל $\operatorname{Im}T$.

כדי למצוא בסיס ל $\operatorname{Im}T$, נבנה מטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים הפורשים את $\operatorname{Im}T$

$[x,1+3x^2,-x^2,2x]$.

$$\begin{array}{c}1\to\\x\to\\x^2\to\end{array}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&2\\0&3&-1&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

(כבר דרגנו מטריצה זו, בעת מציאת הבסיס של $\operatorname{Ker}T$).

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3$.

ולכן נובע שעמודות $1,2,3$ של המטריצה הן בסיס של מרחב עמודות שלה.

ולכן הוקטורים (הפולינומים) המתאימים לעמודות $1,2,3$ של המטריצה הן בסיס של תת המרחב $\operatorname{Im} T$.

כלומר בסיס של $\operatorname{Im} T$ נתון ע"י

$$\{x, 1+3x^2, -x^2\}$$
$$\dim \operatorname{Im} T = 3$$

הערה:

את מימד $\operatorname{Im} T$ אפשר היה גם לקבל ממשפט המימד (לטרנספורמציות לינאריות).

משפט המימד (לטרנספורמציות לינאריות): $T: V \to W$ טרנספורמציה לינארית, אז $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

בתרגיל זה:

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$$

מכיוון שכבר מצאנו ש $\dim \operatorname{Ker} T = 3$ נובע

$$\dim \operatorname{Im} T = 4 - \dim \operatorname{Ker} T = 4 - 1 = 3$$

הערה:

קיבלנו את אותה המטריצה

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

גם בעת מציאת בסיס ל $\operatorname{Ker} T$ וגם בעת מציאת בסיס ל $\operatorname{Im} T$.

(זה תמיד יקרה אם נבחר עבור קבוצה הפורשת את מרחב התחום להיות הבסיס הסטנדרטי של התחום).

$\operatorname{Ker} T$ 'מזוהה' עם מרחב הפתרונות של מטריצה זו.

$\operatorname{Im} T$ 'מזוהה' עם מרחב העמודות של מטריצה זו.

.2

נתונה טרנספורמציה לינארית

$$T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad T(w,x,y,z)=(w-x+y+z, w+2y-z, w+x+3y-3z)$$

למצוא בסיס ומימד ל $\mathrm{Ker}\,T$, $\mathrm{Im}\,T$.

נוסחת הטרנספורמציה

$$T(w,x,y,z)=(w-x+y+z, w+2y-z, w+x+3y-3z)$$

בכתיב אחר

$$T\left(\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} w-x+y+z \\ w+2y-z \\ w+x+3y-3z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

אם נסמן

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

ומתקבל

$$T(\underline{x})=A\underline{x}$$

מתקבל ש A מטריצה מסדר 3×4 , ו

$$T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \quad T(\underline{x})=A\underline{x} \ , \ A\in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

טענה :

$T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad T(\underline{x})=A\underline{x} \ , \ A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ טרנספורמציה לינארית.

אז

$\mathrm{Ker}\,T$, שהוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$, שווה למרחב הפתרונות של המטריצה A

$$\mathrm{Ker}\,T=\ker A \quad , \quad \dim \mathrm{Ker}\,T = n-\mathrm{rank}\,A$$

$\mathrm{Im}\,T$, שהוא תת מרחב של $\mathbb{R}^m$, שווה למרחב העמודות של המטריצה A

$$\mathrm{Im}\,T=\mathrm{col}\,A \quad , \quad \dim \mathrm{Im}\,T = \mathrm{rank}\,A$$

נדרג את המטריצה A לצורה קנונית כדי למצוא בסיסים למרחב הפתרונות ולמרחב העמודות שלה.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_2]{R_1\to R_1+R_2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\,T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המטריצה A .

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$, ולכן המשתנים w,x הם משתנים קשורים, y,z משתנים חופשיים.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases} w \quad +2y \ -z=0 \\ \quad x \ +y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad w=-2y+z \ , \ x=-y+2z$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(w,x,y,z)=(-2y+z,-y+2z,y,z)=$$
$$= y(-2,-1,1,0)+z(1,2,0,1)$$

מהפתרון הכללי נובע שבסיס של מרחב הפתרונות $\ker A$ נתון ע"י

$$\{(-2,-1,1,0)\ ,\ (1,2,0,1)\}$$

מימד מרחב הפתרונות $\ker A$ הוא

$\dim\ker A = 2$

כאמור, $\operatorname{Ker} T$ שווה למרחב הפתרונות של המטריצה A, ולכן בסיס של $\operatorname{Ker} T$ נתון ע"י

$\{(-2,-1,1,0)\ ,\ (1,2,0,1)\}$

$\dim \operatorname{Ker} T = 2$

$\operatorname{Im} T$:

נמצא בסיס ומימד למרחב העמודות של המטריצה A.

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$.

ולכן נובע שעמודות $1,2$ של המריצה A הן בסיס של מרחב עמודות $\operatorname{col}(A)$.

כלומר בסיס של $\operatorname{col}(A)$ נתון ע"י

$\{(1,1,1)\ ,\ (-1,0,1)\}$

מימד מרחב העמודות $\operatorname{col}(A)$ הוא

$\dim\operatorname{col}(A) = 2$

כאמור, $\operatorname{Im} T$ שווה למרחב העמודות של המטריצה A, ולכן בסיס של $\operatorname{Im} T$ נתון ע"י

$\{(1,1,1)\ ,\ (-1,0,1)\}$

$\dim\operatorname{Im} T = 2$

מטריצה מייצגת של טרנספורמציה לינארית לפי בסיסים

.1

נתונה טרנספורמציה לינארית

$$T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) \quad T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = b + (a+2d)x + (3b-c)x^2$$

E הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$E = \left\{ E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

P הבסיס הסטנדרטי של $P_2(\mathbb{R})$.

$$P = \{1, x, x^2\}$$

למצוא את המטריצה המייצגת של ההעתקה T לפי הבסיסים הסטנדרטיים E, P, $[T]_P^E$.

$T: V \to W$ טרנספורמציה לינארית, כאשר

$\dim V = n$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ בסיס של V,

$\dim W = m$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ בסיס של W.

המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה T לפי הבסיסים B, C, היא מטריצה מסדר $m\times n$ הנתונה ע"י

$$[T]_C^B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ [b_1]_C & [b_2]_C & \cdots & [b_n]_C \\ | & | & & | \end{array}\right]$$

נחשב את תמונות אברי הבסיס E של התחום $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ע"י T

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = b + (a+2d)x + (3b-c)x^2$$

$$T(E_{11}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x$$

$$T(E_{12}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 3x^2$$

$$T(E_{21}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -x^2$$

$$T(E_{22}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2x$$

נחשב את הקואורדינטות של התמונות האלה לפי הבסיס P של הטווח $P_2(\mathbb{R})$.
נשים לב שזהו הבסיס הסטנדרטי של הטווח ולכן חישוב הקואורדינטות מיידי.

$$T(E_{11}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x \qquad \Rightarrow \quad [T(E_{11})]_P = (0,1,0)$$

$$T(E_{12}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1+3x^2 \quad \Rightarrow \quad [T(E_{12})]_P = (1,0,3)$$

$$T(E_{21}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -x^2 \qquad \Rightarrow \quad [T(E_{21})]_P = (0,0,-1)$$

$$T(E_{22}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2x \qquad \Rightarrow \quad [T(E_{22})]_P = (0,2,0)$$

נרשום וקטורי קואורדינטות אלה בעמודות:

$$\left[T\right]_P^E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$