יונתן כהן

חדו"א 2

תרגול מספר 2

טורים חיוביים/אי-שליליים

מבחני השוואה הראשון והשני

.1

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}>0$.

$$2^n>1 \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{n}$$

אבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ זהו הטור ההרמוני והוא מתבדר, ולכן אי השוויון אינו מועיל לקבוע את התכנסות הטור באמצעות מבחן ההשוואה הראשון.

$$n\ge 1 \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ זהו טור הנדסי עם $-1<q=\frac{1}{2}<1$ ולכן מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה הראשון, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ מתכנס.

.2

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$ מתכנס או מתבדר.

$$a_n=\frac{1}{n+\ln n}$$

$$n\ge 1 \quad\Rightarrow\quad \ln n\ge 0 \quad\Rightarrow\quad n+\ln n>0$$

ולכן a_n מוגדר לכל $n\ge 1$ וגם $a_n>0$.

פתרון I – מבחן ההשוואה הראשון

$$\ln n\ge 0 \quad\Rightarrow\quad n+\ln n\ge n \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n+\ln n}\le\frac{1}{n}$$

אבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ זהו הטור ההרמוני והוא מתבדר, ולכן אי השוויון אינו מועיל לקבוע את התכנסות הטור באמצעות מבחן ההשוואה הראשון.

נשתמש באי שוויון ידוע: לכל $x>0$ מתקיים $\ln x<x$.

$$\ln n<n \quad\Rightarrow\quad n+\ln n<n+n=2n \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{1}{n+\ln n}>\frac{1}{2n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר, וכפל ב $\frac{1}{2}$ לא משנה את ההתבדרות כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ מתבדר.

לפי מבחן ההשוואה הראשון, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$ מתבדר.

פתרון II – מבחן ההשוואה השני

עבור n גדולים מאוד $\ln n$ זניח לעומת n ולכן $a_n=\frac{1}{n+\ln n}$ מאוד 'דומה' ל $\frac{1}{n}$.

נסמן $b_n=\frac{1}{n}>0$.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\ln n}="\frac{\infty}{\infty}"$$

נעבור למשתנה רציף x

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\ln n}="\frac{\infty}{\infty}"=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\ln x}="\frac{\infty}{\infty}"\overset{\text{L'hospital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

קיבלנו $0<L=1<\infty$, ולפי מבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. זהו הטור ההרמוני והוא מתבדר, ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$ מתבדר.

.3

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}>0$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, ולכן עבור n מאוד גדולים $\sqrt[n]{n}$ מאוד קרוב ל 1 ולכן $a_n=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$ מאוד קרוב ל $\frac{1}{n}$.

נסמן $b_n=\frac{1}{n}>0$.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1$$

קיבלנו $0<L=1<\infty$, ולפי מבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. זהו הטור ההרמוני והוא מתבדר, ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$ מתבדר.

.4

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n = 1-\cos\frac{1}{n}$. לכל n, $\cos\frac{1}{n} \le 1$ ולכן $a_n = 1-\cos\frac{1}{n} \ge 0$.

עבור n מאוד גדולים, $\frac{1}{n}$ מאוד קטן וקרוב ל 0.

עבור x קרוב ל 0 מתקיים, עפ״י פיתוח מקלרין של הפונקציה $\cos$:

$$\cos x \sim 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

נציב $x=\frac{1}{n}$ ונקבל שעבור n מאוד גדולים

$$\cos\frac{1}{n} \sim 1-\frac{(\frac{1}{n})^2}{2!} = 1-\frac{1}{2n^2} \quad \Rightarrow \quad 1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$$

כלומר עבור n גדולים, a_n מתנהג איכותית כמו $\frac{1}{n^2}$.

נסמן $b_n = \frac{1}{n^2} > 0$.

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = "\frac{0}{0}"$$

נעבור למשתנה רציף x

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = "\frac{0}{0}" \overset{\text{L'hospital}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

נבצע החלפת משתנה $t=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0^+$ ולכן

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

קיבלנו $0 < L = \frac{1}{2} < \infty$, ולפי מבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. זהו טור מסוג $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (טור הרמוני מוכלל) עם $p=2>1$ ולכן הוא מתכנס, ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n}$ מתכנס.

.5

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5+(-1)^n)^n}{7^n}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n=\frac{(5+(-1)^n)^n}{7^n}=\left(\frac{5+(-1)^n}{7}\right)^n$.

לכל n, $(-1)^n$ שווה ל 1 או ל -1 ולכן

$$-1\le(-1)^n\le 1 \quad\Rightarrow\quad 4\le 5+(-1)^n\le 6 \quad\Rightarrow\quad a_n>0$$

כעת לכל n

$$-1\le(-1)^n\le 1 \quad\Rightarrow\quad 4\le 5+(-1)^n\le 6 \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{7}\le\frac{5+(-1)^n}{7}\le\frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{4}{7}\right)^n\le\left(\frac{5+(-1)^n}{7}\right)^n\le\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

וקיבלנו שלכל n

$$0<a_n\le\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n$ זהו טור הנדסי עם $-1<q=\frac{6}{7}<1$ ולכן זהו טור מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה הראשון, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5+(-1)^n)^n}{7^n}$ מתכנס.

קריטריון המנה של d'Alembert, קריטריון השורש של Cauchy

.1

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{8^n}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n = \frac{n^9}{8^n} > 0$.

פתרון I – מבחן השורש / מבחן Cauchy

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^9}{8^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^9}}{\sqrt[n]{8^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^9}{8} = \frac{1^9}{8} = \frac{1}{8} < 1$$

ולפי מבחן השורש של Cauchy הטור מתכנס.

פתרון II – מבחן המנה של d'Alembert

$$a_n = \frac{n^9}{8^n} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^9}{8^{n+1}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^9\cdot 8^n}{8^{n+1}\quad\cdot n^9} = \lim_{n\to\infty}\frac{8^n}{8^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^9}{n^9} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^9 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^9 =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 1^9 = \frac{1}{8} < 1$$

ולפי מבחן המנה של d'Alembert הטור מתכנס.

.2

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n = \frac{n^n}{n!} > 0$.

בביטוי של a_n יש עצרת ולכן מתבקש להשתמש במבחן המנה של d'Alembert.

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \ \cdot n^n}$$

נשתמש בזהות $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)\cdot n! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

ולפי מבחן המנה של d'Alembert הטור מתבדר.

.3

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}>0$.

נשתמש במבחן השורש של Cauchy.

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1$$

ולפי מבחן השורש של Cauchy הטור מתבדר.

.4

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ מתכנס או מתבדר.

$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0$.

תרגיל זה דומה מאוד לתרגיל הקודם, מתבקש שוב להשתמש במבחן השורש של Cauchy.

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n} = 1$$

ולכן מבחן השורש של Cauchy לא עובד – לא נותן תשובה.
נשים לב

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

כלומר $\lim_{n\to\infty}a_n \neq 0$, ולכן לפי התנאי ההכרחי הטור מתבדר.

.5

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n = \frac{n^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} > 0$.

בביטוי של a_n יש ביטוי דמוי עצרת ולכן מתבקש להשתמש במבחן המנה של d'Alembert.

$$a_n = \frac{n^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n^{100}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdot\frac{(n+1)^{100}}{n^{100}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} = 0\cdot 1^{100} = 0 < 1$$

ולפי מבחן המנה של d'Alembert הטור מתכנס.

.6

לבדוק האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}>0$.

פתרון I – מבחן המנה של d'Alembert

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n} \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}+3^{n+1})\cdot(4^n+5^n)}{(4^{n+1}+5^{n+1})\cdot(2^n+3^n)}=\cdots=\frac{3}{5}<1$$

ולפי מבחן המנה של d'Alembert הטור מתכנס.

פתרון II – מבחן ההשוואה השני

עבור n מאוד גדולים 2^n זניח לעומת 3^n ו 4^n זניח לעומת 5^n ולכן שעבור n מאוד גדולים

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}\sim\frac{3^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

נסמן $b_n=\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{3^n}{5^n}>0$.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}\cdot\frac{5^n}{3^n}=\cdots=1$$

קיבלנו $0<L=1<\infty$, ולפי מבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$. זהו טור הנדסי עם $-1<q=\frac{3}{5}<1$ ולכן מתכנס, ולכן גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתכנס.

פתרון III – מבחן ההשוואה הראשון

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}<\frac{2^n+3^n}{5^n}<\frac{3^n+3^n}{5^n}=2\cdot\frac{3^n}{5^n}=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ זהו טור הנדסי עם $-1<q=\frac{3}{5}<1$ ולכן מתכנס, וכפל ב 2 לא משנה את ההתכנסות כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$ מתכנס.

לפי מבחן ההשוואה הראשון, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתכנס.

קריטריון האינטגרל

.1

לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ מתכנס או מתבדר.

$a_n=\frac{n}{e^{n^2}}>0$.

נגדיר את הפונקציה $f(x)=\frac{x}{e^{x^2}}$. מתקיים:

1. f מוגדרת בכל $\mathbb{R}$ ובוודאי מוגדרת בקטע $[1,\infty)$.
2. לכל n טבעי, $f(n)=\frac{n}{e^{n^2}}=a_n$.
3.

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^{x^2}-x\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{(e^{x^2})^2}=\frac{1-2x^2}{e^{x^2}}$$

לכל $x\ge 1$ מתקיים

$$x\ge 1 \quad\Rightarrow\quad x^2\ge 1 \quad\Rightarrow\quad 2x^2\ge 2>1 \quad\Rightarrow\quad 1-2x^2<0 \quad\Rightarrow\quad f'(x)<0$$

ולכן f יורדת בקטע $[1,\infty)$.

ולכן לפי קריטריון האינטגרל, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ מתכנס יחד עם האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx$.

נבדוק אם כן את התכנסות האינטגרל.

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{x}{e^{x^2}}dx$$

נבצע החלפת משתנה

$$y=x^2 \quad\Rightarrow\quad dy=2xdx\,,\frac{1}{2}dy=xdx$$

$$x=1 \quad\Rightarrow\quad y=1 \quad , \quad x=b \quad\Rightarrow\quad y=b^2$$

ונקבל

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b^2}\frac{\frac{1}{2}}{e^{y}}dy=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b^2}\frac{1}{2}e^{-y}dy=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-y}\Big|_1^{b^2}=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-1}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2e}-\frac{1}{2e^{b^2}}=\frac{1}{2e}-"\frac{1}{2\cdot e^{\infty}}"=\frac{1}{2e}-0=\frac{1}{2e}$$

כלומר האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty}\frac{x}{e^{x^2}}dx$ מתכנס (למספר $\frac{1}{2e}$).

ומכיוון שכך מקריטריון האינטגרל נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$ מתכנס.

הערה: אפשר להוכיח את התכנסות טור זה גם באמצעות מבחני השורש והמנה.