



סגל בריטן

אפקה המכללה האקדמית לרפואה בית אבי AFEKA

DEPARTMENT OF
EXACT SCIENCES

המחלקה
לדעי מדויקות

2016

שם הקורס: מבוא להסתברות קוד הקורס: 90911

בחנית סמסטר קיץ:
השנה: 2016
מועד: ב'

הוראות לנבחן:

- חומר עזר שימושי לבחינה
4 דפי נוסחאות...

תאריך הבחינה: 13/11/2016
שעת הבחינה: 17:00
משך הבחינה: 3 שעות

- אין לכתוב בעפרון
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
- אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

השאלון לא ייבדק בתום הבחינה ע"י המרצה

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור את כל השאלות.

יש להסביר, לנמק, לפרט, את כל הפתרונות בכל אחת מהשאלות ובכל אחד מהסעיפים.

חישובים יש לבצע בדיוק של 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית,
חישובי הסתברויות בדיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית,

בהצלחה

שאלה מס' 1

בניסוי נמדדים שני משתנים, X ו Y , (שניהם נמדדים במטרים), ונמצא כי פונקציית הצפיפות המשותפת של משתנים אלה היא:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a \cdot (1+x+2y) & 0 \leq x \leq 2 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- מהו הערך של הקבוע a ?
- מהי פונקציית הצפיפות של X ?
- האם X ו Y הם משתנים בלתי תלויים?
- מהם התוחלת והשונות של X ?
- מהי ההסתברות לכך שבניסוי $X < 1.5$ וגם $Y > 0.5$?
- אם בניסוי נמדד X וערכו היה 0.5, מהי ההסתברות לכך ש Y יהיה גדול מ X ?

שאלה מס' 2

לפנינו סביבון מאוזן שעל שלוש מדפנותיו רשום 'נס' ועל הדופן הרביעית רשום 'פלא', וקופסא שבה 8 כדורים לבנים ו 2 כדורים שחורים. בניסוי מסובבים את הסביבון, ואז:

- אם יוצא 'נס' לוקחים את הקופסא ומוציאים ממנה 5 כדורים ללא החזרה, ותוצאת הניסוי - X - מוגדרת כמספר הכדורים הלבנים שהוצאו,
- אם יוצא 'פלא' לוקחים את הקופסא ומוציאים ממנה כדורים עם החזרה עד להוצאת כדור שחור, ותוצאת הניסוי - X - מוגדרת כמספר הכדורים שהוצאו מן הקופסא.

א. אם יצא 'נס' בסביבון, מהי ההסתברות לכך ש $X=3$, מהן התוחלת והשונות של X ?

ב. אם יצא 'פלא' בסביבון, מהי ההסתברות לכך ש $X=3$, מהן התוחלת והשונות של X ?

בניסוי כולו:

ג. מהי ההסתברות לכך ש X יהיה גדול מ 3?

ד. מהי התוחלת של X ?

ה. מהי סטיית התקן של X ?

(אם תזדקקו לתוצאות אלה בהמשך, יש להניח כי

ההסתברות בסעיף ג' היא 0.7, התוחלת בסעיף ד' היא 4.5, וכי סטיית התקן בסעיף ה' היא 2.4...)

בניסוי המתואר משתתפים 80 אנשים, וכל אחד מקבל בסוף הניסוי 15 ש"ח פחות $2X$,

(לדוגמא, אם בניסוי $X=4$ מקבל המשתתף $15-2\cdot 4=7$ ש"ח)

(הערה: שימו לב, ערכי X , וגם התקבול הכספי, הם ערכים שלמים בלבד...)

ו. מהי ההסתברות לכך שלפחות 20 מבין המשתתפים בניסוי, יקבלו (כל אחד) לפחות 8 ש"ח?

ז. מהי ההסתברות לכך שבסך הכל ישולמו למשתתפי הניסוי לפחות 400 ש"ח?

פתרון

פתרון
ק 381N

מבוא להסתברות (90911)

פתרון בחינת סמסטר קיץ מועד ב' 13/11/2016

שאלה מס' 1

בניסוי נמדדים שני משתנים, X ו Y , (שניהם נמדדים במטרים), ונמצא כי פונקציית הצפיפות המשותפת של משתנים אלה היא:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a \cdot (1+x+2y) & 0 \leq x \leq 2 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

א. מהו הערך של הקבוע a ?

תשובה: $\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^2 a(1+x+2y) dx dy = a \cdot 6 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$

ב. מהי פונקציית הצפיפות של X ?

תשובה: $f_X(x) = \int_{y=0}^1 \frac{(1+x+2y)}{6} dy = \dots = \frac{x+2}{6}$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{6} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

ג. האם X ו Y הם משתנים בלתי תלויים?

תשובה: $f_Y(y) = \int_{x=0}^2 \frac{(1+x+2y)}{6} dx = \dots = \frac{2}{3}(y+1)$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{x+2}{6} \cdot \frac{2(y+1)}{3} \neq \frac{(1+x+2y)}{6}$$

ולכן המשתנים אינם בלתי תלויים (כלומר תלויים...)

ד. מהם התוחלת והשונות של X ?

תשובה: $E[X] = \int_0^2 x \cdot \frac{(x+2)}{6} dx = \dots = \frac{10}{9} = 1.111$

$$E[X^2] = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{(x+2)}{6} dx = \dots = \frac{14}{9} \Rightarrow V[X] = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{26}{81} = 0.32$$

ה. מהי ההסתברות לכך שבניסוי $X < 1.5$ וגם $Y > 0.5$?

תשובה: $\int_{y=0.5}^1 \int_{x=0}^{1.5} \frac{1+x+2y}{6} dx dy = \dots = \frac{13}{32} = 0.40625$

ו. אם בניסוי נמדד X וערכו היה 0.5, מהי ההסתברות לכך ש Y יהיה גדול מ X ?

תשובה: $f_{Y/X=0.5}(y/x=0.5) = \frac{(1+x+2y)}{6} = \dots = \frac{1.5+2y}{2.5}$

$$\Rightarrow P\{Y > 0.5/X = 0.5\} = \int_{y=0.5}^1 \frac{1.5+2y}{2.5} dy = \dots = 0.6$$

שאלה מס' 2

לפנינו סביבון מאוזן שעל שלוש מדפנותיו רשום 'נס' ועל הדופן הרביעית רשום 'פלא', וקופסא שבה 8 כדורים לבנים ו 2 כדורים שחורים. בניסוי מסובבים את הסביבון, ואז אם יוצא 'נס' לוקחים את הקופסא ומוציאים ממנה 5 כדורים ללא החזרה, ותוצאת הניסוי - X - מוגדרת כמספר הכדורים הלבנים שהוצאו, ואם יצא 'פלא' לוקחים את הקופסא ומוציאים ממנה כדורים עם החזרה עד להוצאת כדור שחור, ותוצאת הניסוי - X - מוגדרת כמספר הכדורים שהוצאו מן הקופסא.

א. אם יצא 'נס' בסביבון, מהי ההסתברות לכך ש $X=3$, מהן התוחלת והשונות של X ?

תשובה: $X \sim \text{HG}(10, 8, 5)$

$$E[X] = 5 \cdot \frac{8}{10} = 4 \quad ; \quad V[X] = 5 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{10-5}{10-1} = \frac{4}{9} = 0.44$$

$$P\{X=3\} = \frac{\binom{8}{3} \binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9} = 0.2222$$

ב. אם יצא 'פלא' בסביבון, מהי ההסתברות לכך ש $X=3$, מהן התוחלת והשונות של X ?

תשובה: $X \sim G(0.2)$

$$E[X] = \frac{1}{0.2} = 5 \quad ; \quad V[X] = \frac{0.8}{0.2^2} = 20 \quad ; \quad P\{X=3\} = 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.128$$

בניסוי כולו:

ג. מהי ההסתברות לכך ש X יהיה גדול מ 3?

$$P\{X > 3\} = 0.75 \cdot \frac{7}{9} + 0.25 \cdot 0.8^3 = 0.7113$$

תשובה:

ד. מהי התוחלת של X ?

$$E[X] = 0.75 \cdot 4 + 0.25 \cdot 5 = 4.25$$

תשובה:

ה. מהי סטיית התקן של X ?

$$E[X^2] = 0.75 \cdot \left(\frac{4}{9} + 4^2\right) + 0.25 \cdot (20 + 5^2) = 23.58$$

תשובה:

$$\Rightarrow V[X] = E[X^2] - E^2[X] = 23.58 - 4.25^2 = 5.52 = 2.35^2$$

(אם תזדקקו לתוצאות אלה בהמשך, יש להניח כי

ההסתברות בסעיף ג' היא 0.7, התוחלת בסעיף ד' היא 4.5, וכי סטיית התקן בסעיף ה' היא 2.4...)

בניסוי המתואר משתתפים 80 אנשים, וכל אחד מקבל בסוף הניסוי 15 ש"ח פחות $2X$, (לדוגמא, אם בניסוי $X=4$ מקבל המשתתף $15-2 \cdot 4=7$ ש"ח)

ו. מהי ההסתברות לכך שלפחות 20 מבין המשתתפים בניסוי, יקבלו (כל אחד) לפחות 8 ש"ח?

תשובה: $Y = 15 - 2X \sim \text{Bin}(80, 0.3)$ שכן

$$P\{15 - 2X \geq 8\} = P\{X \leq 3.5\} = 1 - P\{X > 3\} = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P\{Y \geq 20\} = 1 - \Phi\left(\frac{20 - 0.5 - 80 \cdot 0.3}{\sqrt{80 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) = \Phi(1.1) = 0.8643$$

ז. מהי ההסתברות לכך שבסך הכל ישולמו למשתתפי הניסוי לפחות 400 ש"ח?

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{80} T_i \sim N(80 \cdot 4.5, 80 \cdot 2.4^2) \sim N(360, 21.466^2)$$

תשובה:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{80} T_i \geq 400\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{400 - 360}{21.466}\right) = 1 - \Phi(1.86) = 1 - 0.9686 = 0.0314$$