מבחן באלגברה לינארית שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & a\,y & + & 5z & + & w & = & 1 \\ x & + & (2a-1)\,y & + & (a+3)\,z & + & 2w & = & a+1 \\ a\,x & + & a^2\,y & + & 5az & + & w & = & a^2+a \end{array}\right.$$

א. (8 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי a עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

ב. (7 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות עבור $a=2$

ג. (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a וקטור העמודה $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (10 נקודות) נתונה ההעתקה הלינארית

$$\begin{array}{rcl} T: \quad M_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) & = & \begin{pmatrix} a + 3b + 4c - 3d \\ b + 3c - 2d \\ 3a + 7b + 6c - 5d \end{pmatrix} \end{array}$$

(i) (5 נקודות) מצאו את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים הסטנדרטיים של המרחבים

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},\ C=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(ii) (5 נקודות) מצאו את כל המטריצות $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ שמקיימות $T(A)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. האם קבוצה זאת היא תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

ב. (10 נקודות) יהי V מרחב וקטורי, ו־$B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V. עבור $m\in\mathbb{R}$ נתונה ההעתקה הלינארית $T:V\to V$ שמקיימת

$$T(v_1)=2v_1+v_2-v_3,\quad T(v_2)=2v_2,\quad T(v_3)=mv_1+v_2-v_3$$

(i) (5 נקודות) הראו כי עבור $m\neq 2$ ההעתקה הפיכה.

(ii) (5 נקודות) עבור $m=2$ מצאו וקטור ב $\mathrm{Ker}(T)$.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. (10 נקודות) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$. הוכיחו שהמטריצה לכסינה, כלומר הוכיחו כי קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש־$D=P^{-1}AP$ (אין צורך למצוא את P,D).

ב. (5 נקודות) מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו הוקטור $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&0&2\\1&1&a\end{pmatrix}$$

ג. (5 נקודות) הוכיחו שאם A מקיימת את השוויון $A^2+5I=0$, אז ל־A אין ערכים עצמיים ממשיים.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ נגדיר $A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\\alpha\end{pmatrix}\right\}$

(i) (5 נקודות) הוכיחו כי לכל ערך של α הקבוצה A היא קבוצה אורתוגונלית, לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^3$.

(ii) (5 נקודות) מצאו ערך של $\alpha\in\mathbb{R}$ עבורו הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\\alpha\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha-4\\\alpha-1\\\alpha\end{pmatrix}\right\}$$

היא בסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^3$ לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ומצאו את וקטור הקואורדינטות של הוקטור $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ לפי בסיס זה.

ב. (10 נקודות) יהי V מרחב עם מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ממימד $\dim V=2$. תהי $\{u,v\}\subset V$ קבוצה בת"ל כך שמתקיים כי $\langle u,u\rangle=\langle v,v\rangle$, הראו כי $\{u+v,u-v\}$ בסיס אורתוגונלי של V.

שאלה 5. (20 **נקודות**) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית.
נתון כי לכל וקטור $v \in V$ מתקיים כי $v \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

א. (5 **נקודות**) הוכיחו כי $\dim V = 3$.

ב. (5 **נקודות**) נגדיר $w_1 = v_1 + v_2 + v_3,\ w_2 = -v_1 + v_2 - v_3,\ w_3 = v_1 + 3v_2 + v_3$. הוכיחו כי $\{w_1, w_2, w_3\} \subset V$ קבוצה תלויה לינארית.

ג. (5 **נקודות**) קבעו האם $v_2 \in \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$.

ד. (5 **נקודות**) מצאו בסיס של $U = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ והשלימו אותו לבסיס של V.

שאלה 6. (20 **נקודות**) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. (10 **נקודות**) יהיו $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_1[x] = P_1(\mathbb{R})$ שלושה פולינומים ממעלה לכל היותר 1.

(i) (5 **נקודות**) הראו כי הקבוצה $\{p(x), q(x), r(x)\}$ תלויה לינארית.

(ii) (5 **נקודות**) חשבו את

$$\begin{vmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \\ q(0) & q(1) & q(2) \\ r(0) & r(1) & r(2) \end{vmatrix}$$

ב. (5 **נקודות**) תהיינה $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שתי מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. נתון כי B הפיכה, ומתקיים השוויון

$$ABA^T = -B$$

הראו כי A הפיכה וש־ n זוגי.

ג. (5 **נקודות**) הראו כי אם $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שתי מטריצות ממשיות סימטריות מסדר $n \times n$, אזי $AB + BA$ סימטרית.

בהצלחה

מבחן באלגברה לינארית שאלון X

שאלה 1. (20 **נקודות**) נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x + ay + 5z + w = 1 \\ x + (2a-1)y + (a+3)z + 2w = a+1 \\ ax + a^2y + 5az + w = a^2+a \end{cases}$$

א. (8 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי a עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

פתרון

נכתוב את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת ונדרג אותה.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 & a+3 & 2 & a+1 \\ a & a^2 & 5a & 1 & a^2+a \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-aR_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 5 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & a^2 \end{array}\right)$$

הגענו למטריצה מדורגת. הדרגה היא לכל היותר 3, כלומר תמיד קטנה ממספר המשתנים, ולכן למערכת לא ייתכן מצב של פתרון יחיד. עבור $a\neq 1$ דרגת המטריצה המצומצמת שווה לדרגת המטריצה המורחבת, ולכן יש למערכת אינסוף פתרונות. עבור $a=1$ המטריצה המצומצמת היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן דרגתה היא 2. המטריצה המורחבת היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן דרגתה היא 3, כלומר דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ומכאן שאין למערכת פתרון.

ב. (7 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות עבור $a=2$

פתרון

נציב $a=2$ ונמצא את הפתרון של המערכת ע"י דירוג של המטריצה המורחבת של המטריצה, כאשר נעזר בדירוג הקודם כי לא הנחנו ש$a\neq 2$ בדירוג זה

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 5 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & a^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to -R_3]{R_1\to R_1-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-R_3]{R_1\to R_1+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

למטריצות שקולות שורות מתאימות מערכות משוואות עם אותה קבוצת פתרונות, ולכן אפשר לפתור את מערכת המשוואות שמתאימה למטריצה בסוף הדירוג שהיא מדורגת קנונית. מערכת המשוואות שמתאימה לה היא

$$\begin{cases} x + 5z = -7 \\ y = 6 \\ w = -4 \end{cases}$$

וקבוצת הפתרונות שלה היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t : t\in\mathbb{R} \right\}$$

ג. (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a וקטור העמודה $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת

פתרון נציב את הפתרון במערכת.

$$\begin{cases} 6 + 2a + 5\cdot(-1) + 0 = 1 \\ 6 + 2(2a-1) - (a+3) + 0 = a+1 \\ 6a + 2a^2 - 5a + 0 = a^2+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 2a = 0 \\ a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=0$$

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה ההעתקה הלינארית

$$\begin{aligned} T: \quad M_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a + 3b + 4c - 3d \\ b + 3c - 2d \\ 3a + 7b + 6c - 5d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) מצאו את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים הסטנדרטיים של המרחבים

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\},\ C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון נמצא את התמונות של איברי הבסיס, ואת וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי הבסיס הסטנדרטי

$$\left[T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)\right]_C=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\left[T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\right]_C=\left[\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix},$$

$$\left[T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)\right]_C=\left[\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix},\left[T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\right]_C=\left[\begin{pmatrix}-3\\-2\\-5\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}-3\\-2\\-5\end{pmatrix}$$

ומכאן שהמטריצה המייצגת לפי הבסיסים הנתונים היא

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ [Tv_1]_C&[Tv_2]_C&[Tv_3]_C&[Tv_4]_C\\ |&|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&4&-3\\0&1&3&-2\\3&7&6&-5\end{pmatrix}$$

(ii) מצאו את כל המטריצות $A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ שמקיימות $T(A)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. האם קבוצה זאת היא תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$?

פתרון את המקורות של העמודה $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ נמצא בעזרת פתרון של המערכת $T(A)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&1\\0&1&3&-2&2\\3&7&6&-5&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-3R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&1\\0&1&3&-2&2\\0&-2&-6&4&-4\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&4&-3&1\\0&1&3&-2&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-5&3&-5\\0&1&3&-2&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

קבוצת הפתרונות של מערכת המשוואות המתאימה היא

$$\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-3\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\1\end{pmatrix}s:t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

אלו הקואורדינטות לפי הבסיס B של מטריצות שתמונתן היא $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, ולכן המטריצות עצמן הן איברי הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}-5 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -3\\1 & 0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-3 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}s : t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

קבוצה זו היא לא תת מרחב כי מטריצה האפס לא נמצאת שם, כי תמונתה היא עמודת אפסים, ולא $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

ב. יהי V מרחב וקטורי, ו־$B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V. עבור $m\in\mathbb{R}$ נתונה ההעתקה הלינארית $T:V\to V$ שמקיימת

$$\begin{cases}T(v_1)=2v_1+v_2-v_3\\T(v_2)=2v_2\\T(v_3)=mv_1+v_2-v_3\end{cases}$$

(i) הראו כי עבור $m\neq 2$ ההעתקה הפיכה.

(ii) עבור $m=2$ מצאו וקטור ב $\mathrm{Ker}(T)$

פתרון נמצא תחילה את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס B:

$$(T)_B^B=\begin{pmatrix}| & | & |\\ [Tv_1]_B & [Tv_2]_B & [Tv_3]_B\\ | & | & |\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}| & | & |\\ [2v_1+v_2-v_3]_B & [2v_2]_B & [mv_1+v_2-v_3]_B\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & m\\1 & 2 & 1\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

(i) העתקה T היא הפיכה אם"ם המטריצה מייצגת שלה היא הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה:

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & m\\1 & 2 & 1\\-1 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & m\\-1 & -1\end{vmatrix}=2\,(-2+m)$$

ולכן ההעתקה הפיכה אם"ם $m\neq 2$.

(ii) כדי למצוא את הגרעין של T נמצא תחילה את הפתרונות של המערכת ההומוגנית שמתאימה למטריצה

המייצגת, ע"י דירוג המטריצה

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון של המערכת יינתן בקואורדינטות ביחס לבסיס , כלומר הפתרון הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ולכן

$$\ker T = Span\{-1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3\} = Span\{-v_1 + v_3\}$$

ומכאן ש־$v_1 - v_3$, למשל, בגרעין של T.

דרך נוספת: עבור $m = 2$ מתקיים כי $T(v_1) = T(v_3) = 2v_1 + v_2 - v_3$, ומלינאריות של T נובע כי $T(v_1 - v_3) = T(v_1) - T(v_3) = 0$, ולכן $v_1 - v_3 \in \mathrm{Ker}T$.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. הוכיחו שהמטריצה לכסינה, כלומר הוכיחו כי קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש־$D = P^{-1}AP$

פתרון נמצא תחילה את הפולינום האפייני של המטריצה:

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2$$

השורשים של הפולינום האפייני, שהם הערכים העצמיים של המטריצה, הם $0, -1$. מכיוון שהפולינום האפייני מתפרק לגורמים ממעלה 1, כדי לבדוק אם המטריצה לכסינה צריך לבדוק האם הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי האלגברי שלו. הריבוי האלגברי של 0 הוא 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו הוא 1, כי לכל ערך עצמי מתקיים כי

$$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$$

($m_a(\lambda)$ מסמן את הריבוי האלגברי של λ ו־$m_g(\lambda)$ מסמן את הריבוי הגיאומטרי שלו).

נותר לבדוק את הריבוי הגיאומטרי של -1: הריבוי האלגברי של (-1) הוא 2, ולכן המטריצה לכסינה אם"ם

הריבוי הגיאומטרי של (-1) שווה ל-2. הריבוי הגיאומטרי שווה למימד של מרחב הפתרונות של $A-\lambda I$, כלומר $n-rank(A-\lambda I)$ ולכן מספיק לבדוק אם הדרגה של $A+I$ שווה ל-1

$$A+I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מהדירוג אכן נובע כי הדרגה של $A+I$ היא 1, ולכן המטריצה לכסינה.

ב. מצאו את הערך של הפרמטר a שעבורו נתון כי הוקטור $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&0&2\\1&1&a\end{pmatrix}$$

פתרון נבדוק מתי הוקטור הוא וקטור עצמי ע"י הכפלה של המטריצה והוקטור

$$\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&0&2\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\a+1\end{pmatrix}$$

התוצאה של המכפלה היא מהצורה $\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ אם $\lambda=-1$ (זה נובע מהקואורדינטה העליונה של שני הוקטורים),

ולכן רק עבור $a+1=-1$, כלומר $a=-2$ הוקטור הנתון הוא וקטור עצמי של המטריצה.

ג. הוכיחו שאם A היא מטריצה שמקיימת את השוויון $A^2+5I=0$, אז ל-A אין ערכים עצמיים ממשיים

פתרון נניח כי $v\in\mathbb{R}^n$ הוא וקטור עצמי של A, כלומר $Av=\lambda v$, אזי

$$0v=(A^2+5I)v=(\lambda^2+5)v$$

כלומר $\lambda^2+5=0$, אבל לשוויון זה אין פתרונות ממשיים, ולכן אין למטריצה ערכים עצמיים ממשיים.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ נגדיר $A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\\alpha\end{pmatrix}\right\}$

(i) הוכיחו כי לכל ערך של α הקבוצה A היא קבוצה אורתוגונלית, לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^3$.

(ii) מצאו עבור איזה ערך של $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-4 \\ \alpha-1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}$$

היא בסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^3$ לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ומצאו את וקטור הקואורדינטות של הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ לפי בסיס זה.

פתרון

ב. (i) נחשב את המכפלה הפנימית של שני הוקטורים:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha - 2\alpha + \alpha = 0$$

כלומר הקבוצה היא אורתוגונלית.

(ii) הקבוצה היא בסיס אורתוגונלי אם היא קבוצה אורתוגונלית כי מספר האיברים בה שווה למימד של $\mathbb{R}^3$. נבדוק עבור אילו ערכים של α הקבוצה היא אורתוגונלית. מכיוון ששני הוקטורים הראשונים בקבוצה הם אורתוגונליים לכל ערך של α מספיק לבדוק מתי הוקטור השלישי אורתוגונלי לשניהם:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-4 \\ \alpha-1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle = 2\alpha^2 - 4\alpha = 2\alpha(\alpha-2), \quad 0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-4 \\ \alpha-1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha^2 - \alpha - 2 = (\alpha-2)(\alpha+1)$$

המכפלות הפנימיות שוות לאפס רק עבור $\alpha = 2$ ולכן רק עבור ערך זה הקבוצה היא בסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^3$. כדי למצוא את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו עבור בסיס אורתוגונלי מספיק לבדוק את המכפלה הפנימית שלו עם כל אחד מהוקטורים בבסיס ולחלק בריבוע הנורמה, כלומר אם

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אז

$$a_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{10}{9}, \quad a_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{5}{9}, \quad a_3 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{8}{9}$$

ולכן וקטור הקואורדינטות הוא

$$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right]_B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}10\\5\\8\end{pmatrix}$$

ג. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ ממימד $\dim V = 2$. תהי $\{u,v\} \subset V$ קבוצה בת"ל כך שמתקיים כי $\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle$, הראו כי $\{u+v, u-v\}$ בסיס אורתוגונלי של V.

פתרון הוקטורים $u+v, u-v \neq 0$, אחרת $u=v$ או $u=-v$ בסתירה לכך שהקבוצה בת"ל, ולכן מספיק לבדוק שהם אורתוגונליים כדי להראות שהם מהווים בסיס אורתוגונלי של V. נחשב את המכפלה הפנימית בין שני הוקטורים

$$\langle u+v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle = 0$$

כאשר השוויון האחרון נובע כי נתון כי $\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle$, וכן $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ מסימטריות של מכפלה פנימית ממשית.

שאלה 5. (20 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $\{v_1,v_2,v_3\} \subset V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית.

נתון כי לכל וקטור $v \in V$ מתקיים כי $v \in \text{Span}\{v_1,v_2,v_3\}$

א. (5 נקודות) הוכיחו כי $\dim V = 3$.

פתרון נסמן $B = \{v_1,v_2,v_3\}$. מהנתון, הקבוצה B בת"ל, ולכן היא בסיס אם"ם היא פורשת, אבל לפי הנתון השני היא קבוצה פורשת, ולכן בסיס. מצאנו אם כן בסיס של V, ולכן המימד הוא מספר האיברים בבסיס הוא המימד, כלומר $\dim V = 3$

ב. (5 נקודות) נגדיר $w_1 = v_1+v_2+v_3,\ w_2 = -v_1+v_2-v_3,\ w_3 = v_1+3v_2+v_3$. הוכיחו כי $\{w_1,w_2,w_3\} \subset V$ תלויה לינארית.

פתרון וקטורי הקואורדינטות של איברי הקבוצה לפי הבסיס B הם

$$[w_1]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad [w_2]_B = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad [w_1]_B = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

מכיוון שתלויות לינאריות של וקטורי הקואורדינטות ושל הוקטורים עצמן זהות, כדי לבדוק אם הקבוצה ת"ל מספיק לבדוק אם קבוצת וקטורי הקואורדינטות תלויה לינארית. נבדוק זאת ע"י דירוג של וקטורי הקואורדינטות כשורות מטריצה

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\1&3&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&2&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

דירוג שורות שומר על מרחב השורות, ושורות שונות מאפס במטריצה מדורגת הן קבוצה בת"ל, ולכן השורות השונות מאפס במטריצה המדורגת מהוות בסיס של מרחב השורות של המטריצה. מכאן אנחנו מסיקים כי השורות במטריצה המקורית הן קבוצה של 3 איברים במרחב ממימד 2, ולכן תלויות לינארית, ולכן גם קבוצת הוקטורים ב־V היא קבוצה תלויה לינארית.

ג. (5 נקודות) קבעו האם $v_2 \in \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$

פתרון מהדירוג של המטריצה הקודמת נובע כי בסיס למרחב השורות של המטריצה הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.
אלו וקטורי קואורדינטות של בסיס של $\text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ לפי הבסיס B, ולכן בסיס של מרחב זה הוא $\{w_1 = v_1 + v_2 + v_3, v_2\}$, ובפרט v_2 נמצא במרחב זה.

ד. (5 נקודות) מצאו בסיס של $U = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$ והשלימו אותו לבסיס של V

פתרון בסעיף הקודם מצאנו כי $\{w_1 = v_1 + v_2 + v_3, v_2\}$ בסיס של U. כמו כן, מהדירוג של המטריצה בסעיף ב ניתן לראות שהוספה של וקטור הקואורדינטות של v_3, שוקטור הקואורדינטות שלו הוא $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ תשלים את המטריצה למטריצה שדרגתה היא 3, ולכן תשלים את קבוצת וקטורי הקואורדינטות לבסיס של $\mathbb{R}^3$, ולכן הוספה של v_3 תשלים את הבסיס הנתון לבסיס של V, כלומר ההשלמה לבסיס היא $\{w_1, v_2, v_3\}$

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

א. יהיו $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_1[x] = P_1(\mathbb{R}) = \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$ שלושה פולינומים ממעלה לכל היותר 1.

(i) הראו כי הקבוצה $\{p(x), q(x), r(x)\}$ תלויה לינארית

(ii) חשבו את

$$\begin{vmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \\ q(0) & q(1) & q(2) \\ r(0) & r(1) & r(2) \end{vmatrix}$$

פתרון

(i) המימד של מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 1 הוא 2, ולכן כל קבוצה עם שלושה איברים חייבת להיות תלויה לינארית.

(ii) מכיוון שקבוצת הפולינומים היא תלויה לינארית, נובע כי אחד הפולינומים הוא צירוף לינארי של השאר. נניח ש$r(x)$ תלוי לינארית בשאר, כלומר קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $r(x) = ap(x) + bq(x)$. נובע מכך כי

לכל

$$\begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \end{pmatrix}$$

באותו אופן, אם $q(x)$ או $p(x)$ תלוי לינארית בשאר, אז

$$\begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{pmatrix} q(0) \\ q(1) \\ q(2) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \end{pmatrix}$$

בכל מקרה שלושת העמודות הן קבוצה תלויה לינארית, ולכן הדטרמיננטה של המטריצה ששורותיה הן עמודות אלה שווה ל0.

ב. תהיינה $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שתי מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. נתון כי B הפיכה, ומתקיים השוויון

$$ABA^T = -B$$

הראו כי A הפיכה וש־ n זוגי.

פתרון מהשוויון הנתון, ומתכונות הדטרמיננטה (כפליות וכפל בסקלר) נובע כי

$$\left|ABA^T\right| = |-B| \Leftrightarrow |A| \cdot |B| \left|A^T\right| = (-1)^n |B|$$

מכיוון שהדטרמיננטה של מטריצה ושל המטריצה משוחלפת שוות, ומכך שהדטרמיננטה של B שונה מאפס (כי היא הפיכה) נקבל כי

$$|A|^2 |B| = (-1)^n |B| \Leftrightarrow |A|^2 = (-1)^n$$

כלומר הדטרמיננה של A שונה מאפס, וכן, מכיוון ש־ $(-1)^n$ חיובי, שכן הוא שווה לריבוע של מספר ממשי (הדטרמיננטה של A ממשית כי המטריצה A ממשית) שונה מאפס, אז n חייב להיות זוגי.

ג. הראו כי אם $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שתי מטריצות ממשיות סימטריות מסדר $n \times n$, אזי $AB + BA$ סימטרית

פתרון כדי לבדוק אם $AB + BA$ סימטרית נחשב את המטריצה המשוחלפת שלה

$$(AB + BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = BA + AB = AB + BA$$

ולכן המטריצה סימטרית

בהצלחה