שאלה 3

באיזה כיוון הנגזרת הכיוונית בנקודה $(0,1)$ של הפונקציה $f(x,y)=ye^{-xy}$ שווה ל – 1?

$$P_0 = (0,1)$$

$$f(x,y) = ye^{-xy}$$

1. נחשב נגזרות חלקיות:

$$f_x = y\cdot e^{-xy}\cdot -y = -(y^2)\cdot e^{-xy} \quad ; \quad D_{f_x} = \mathbb{R}^2$$

$$f_y = e^{-xy} + y\cdot e^{-xy}\cdot -x = e^{-xy} - xy\cdot e^{-xy} \quad ; \quad D_{f_y} = \mathbb{R}^2$$

2. f_x, f_y אלמנטריות, מוגדרות ב-$\mathbb{R}^2$ $\Leftarrow$ רציפות ב-$\mathbb{R}^2$, בפרט ב-P_0

$\Leftarrow$ f פונקציה מסוג C^1 $\Leftarrow$ f דיפרנציאבילית.

3. נחשב את וקטור הגרדיאנט של f בנק' P_0.

$$\vec{\nabla} f(0,1) = \left(f_x(0,1), f_y(0,1)\right) = (-1, 1)$$

4. נמצא את $\underline{V}$ וקטור הכיוון. מכיוון ש-f דיפרנציאבילית, הנגזרת הכיוונית נתונה ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{V}}(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0)\cdot \hat{\underline{V}} = (-1,1)\cdot \hat{\underline{V}} = (-1,1)\cdot(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha - \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = 1$$

$$2\sin\left(\tfrac{\alpha}{2} - \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\right)_{=1} \Longrightarrow 2\sin\left(-\tfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \tfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Longrightarrow \sin\left(\alpha - \tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \begin{cases} \alpha = \tfrac{\pi}{2} \\ \alpha = -\pi \end{cases}$$

מתקבל שהנגזרת הכיוונית שווה ל-1 בכיוונים:

$$\hat{V}_1 = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right), \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\hat{V}_2 = \left(\sin(-\pi), \cos(-\pi)\right) \longrightarrow \hat{V}_1 = (1,0), \quad \hat{V}_2 = (0,-1)$$

שאלה 4

תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הוכח שכל הנגזרות המכוונות בנקודה $(x,y)=(0,0)$ קיימות אבל הפונקציה היא לא רציפה בנקודה.

הערה חשובה לשאלה: את הנגזרות ב $(x,y)=(0,0)$ צריך לחשב על פי ההגדרה. אחרת תקבלו אולי תוצאות לא נכונות כי הפונקציה היא **לא דיפרנציאבילית** בנקודה (היא לא רציפה).

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\cancel{t}u_1\cdot(tu_2)^2}{(tu_1)^2+(tu_2)^4}-0}{\cancel{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{u_1\cdot t^2u_2^2}{t^2u_1^2+t^4u_2^4}=\lim_{t\to0}\frac{\cancel{t^2}(u_1\cdot u_2^2)}{\cancel{t^2}(u_1^2+t^2u_2^4)}=\lim_{t\to0}\frac{u_1\cdot u_2^2}{u_1^2+\cancel{t^2u_2^4}^{\,0}}$$

$$=\frac{\cancel{u_1}\cdot u_2^2}{\cancel{u_1^2}}\Bigg|{:u_1\neq0}=\frac{u_2^2}{u_1},\quad u_1\neq0$$

כעת נפריך רציפות ב-$(0,0)$, ע"י הוכחת אי-קיום גבול הפונקציה בנק' $(0,0)$.

$$\lim_{x,y\to0,0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\underset{x=0}{\equiv}\lim_{x,y\to0,0}\frac{0}{y^4}=0$$

$$\neq$$

$$\underset{x=y^2}{\equiv}\lim_{x,y\to0,0}\frac{y^2\cdot y^2}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}$$

התקבלו 2 גבולות שונים, לכן מיחידות הגבול ⇐ לא קיים גבול ב-$(0,0)$ ⇐ אי-רציפות עיקרית.

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^3-xy^2-4x^2+3x+x^2y$.

א. מצאו את הערך המינימלי ואת הערך המקסימלי של נגזרת כיוונית $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0.5,1)$ ביחס לוקטור הכיוון $\vec{s}$, בהנחה כי $\|\vec{s}\|=1$. מהם הכיוונים, שבהם מתקבלים הערך המינימלי והערך המקסימלי ?

ב. מצאו את כל הכיוונים $\vec{s}$ ($\|\vec{s}\|=1$), כך ש – $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0.5,1)=0$.

$P_0=(1/2,\,1)$

א) 1. נגזרות חלקיות:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2-y^2-8x+3+2xy \\ f_y &= -2xy+x^2 \end{aligned}\right\}$$

רציפות ב-$\mathbb{R}^2$. f דיפרנציאבילית

2. א. וקטור הגרדיאנט:

$$\nabla f(1/2,1)=(f_x(1/2,1),\,f_y(1/2,1))=(-1/4,\,-3/4)$$

ב. וקטור הגרדיאנט המנורמל:

$$\|w\|=\sqrt{(-1/4)^2+(-3/4)^2}=\sqrt{1/16+9/16}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\hat{w}=\frac{(-1/4,\,-3/4)}{\sqrt{10}/4}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

3. כעת ידוע כי: הערך המקסימלי מתקבל בכיוון:

$$M \Rightarrow \hat{w}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

הערך המינימלי מתקבל בכיוון:

$$m \Rightarrow -\hat{w}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\,\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

4. א. חישוב הערך המקסימלי:

$$M=\|w\|=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

ב. חישוב הערך המינימלי:

$$m=-\|w\|=-\frac{\sqrt{10}}{4}$$

ג

$I: \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{s}}(1/2, 1) = (-1/4, -3/4) \cdot \underline{s} \implies : -1/4 S_1 - 3/4 S_2 = 0$

$II: \quad \|s\| = 1 \implies \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = 1 \implies S_1^2 + S_2^2 = 1$

$1/4 S_1 = -3/4 S_2 \quad \Big|\cdot 4 \qquad S_1 = -3S_2$

$\implies (-3S_2)^2 + S_2^2 = 1 \implies 9S_2^2 + S_2^2 = 1 \implies S_2^2 = 1/10 \implies S_2 = 1/\sqrt{10}, -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$S_2 = -1/\sqrt{10} \implies S_1 = 3/\sqrt{10}$

$S_2 = 1/\sqrt{10} \implies S_2 = -3/\sqrt{10}$

לכן הכיוונים המבוקשים הם: $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

שאלה 10

עבור הפונקציות הבאות חשבו את $\frac{df}{dt}$ על ידי שימוש בכלל שרשרת :

א. $f(x,y)=e^{3x+2y}$, $x=\cos t$, $y=t^2$.

ב. $f(x,y,z)=xyz$, $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\tan t$.

ג. $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=H$.

א $f(x,y)=e^{3x+2y}$, $f(t)=e^{3\cos t+2t^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3e^{3x+2y} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2e^{3x+2y}$$

רציפות ⟸ f דיפרנציאבילית

לכן ניתן להשתמש בכלל השרשרת.

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{t}$$

$$=3e^{3x+2y}\cdot -\sin t+2e^{3x+2y}\cdot 2t$$

$$=3e^{3\cos t+2t^2}\cdot -\sin t+2e^{3\cos t+2t^2}\cdot 2t$$

$$=e^{3\cos t+2t^2}(4t-3\sin t)$$

ק

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = yz \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy$

2) $\frac{dx}{dt} = 2t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$

כעת נציב:

$$\frac{df}{dt} = yz \cdot 2t + xz \cdot \frac{1}{t} + xy \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{df}{dt} = \ln t \cdot \tan t \cdot 2t + \frac{\tan t\,(t^2+1)}{t} + \frac{\ln t\,\cancel{(t^2+1)}}{\cancel{(1+t^2)}}$$

$$\Longrightarrow \frac{df}{dt} = \ln t\,(2t \cdot \tan(t) + 1) + \frac{\tan t\,(t^2+1)}{t}$$

$$\left((x^2+y^2)^{1/2}\right)' =$$

ג

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

1) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-z\cdot x\cdot(2x)^{-1/2}}{x^2+y^2}=\frac{-zx}{\sqrt{2x}\cdot 2(x^2+y^2)}$$

2) $$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-z\cdot y\cdot(2y)^{-1/2}}{x^2+y^2}=\frac{-zy}{\sqrt{2y}\cdot 2(x^2+y^2)}$$

3) $$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

4) $$\frac{dx}{dt}=-R\sin t\quad;\quad\frac{dy}{dt}=R\cos t\quad;\quad\frac{dz}{dt}=0$$

כעת נציב:

$$\frac{df}{dt}=\frac{zx\cdot \overset{y}{\overset{\parallel}{R\sin t}}}{\sqrt{2x}\cdot 2(x^2+y^2)}-\frac{zy\cdot \overset{x}{\overset{\parallel}{R\cos t}}}{\sqrt{2x}\cdot 2(x^2+y^2)}+\cancel{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot 0}$$

$$=\frac{zxy-zyx}{\sqrt{2R\cos t}\cdot 2(R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t)}=\frac{0}{\sqrt{2R\cos t}\cdot 2R^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}=0$$

שאלה 17

עבור הפונקציות הבאות מצאו פולינום טיילור מסדר נתון סביב נקודה נתונה:

א. $f(x,y)=(x-y)^3+1$ סדר: 3, נקודה: $(x_0,y_0)=(-1,1)$.

ב. $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ סדר: 2, נקודה: $(x_0,y_0)=(-2,1)$. **(רשות)**

ג. $f(x,y)=y^x$ סדר: 2, נקודה: $(x_0,y_0)=(1,1)$.

ד. $f(x,y)=\frac{y^3}{x}$ סדר: 2, נקודה: $(x_0,y_0)=(1,-1)$. **(רשות)**

1) $$T_3 f(-1,1) = f(-1,1) + d^1 f(-1,1) + \frac{d^2 f(-1,1)}{2} + \frac{d^3 f(-1,1)}{6} + R_n(-1,1)$$

2) $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3(x-y)^2\cdot\Delta x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -3(x-y)^2\cdot\Delta y \end{aligned}\right\} \quad df(x,y) = 3(x-y)^2\cdot\Delta x - 3(x-y)^2\cdot\Delta y$$

3) $$\left.\begin{aligned} f_{xx} &= 6(x-y)\cdot\Delta x^2 \\ f_{xy} &= -6(x-y)\cdot\Delta x\Delta y \\ f_{yx} &= -6(x-y)\cdot\Delta y\Delta x \\ f_{yy} &= 6(x-y)\cdot\Delta y^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &d^2f(x,y) = \\ &6(x-y)\cdot\Delta x^2 - 12(x-y)\cdot\Delta x\Delta y + 6(x-y)\cdot\Delta y^2 \end{aligned}$$

4) $f_{xxx} = 6 \cdot \Delta x^3$

$3 \cdot f_{xxy} = 3 \cdot -6 \cdot \Delta x^2 \Delta y$

$3 \cdot f_{xyy} = 3 \cdot 6 \cdot \Delta x \Delta y^2$

$f_{yyy} = -6 \cdot \Delta y^3$

$d^3 f(x,y) =$

$6 \Delta x^3 - 18 \Delta x^2 \Delta y + 18 \Delta x \Delta y^2 - 6 \Delta y^3$

5) $f(-1,1) = -7$

$df(-1,1) = 12(x+1) - 12(y-1)$

$d^2 f(-1,1) = -12(x+1)^2 + 24(x+1)(y-1) - 12(y-1)^2$

$d^3 f(-1,1) = 6(x+1)^3 - 18(x+1)^2(y-1) + 18(x+1)(y-1)^2 - 6(y-1)^3$