

# פתרון

## Y

	שאלה 1		שאלה 2		שאלה 3	
	ה	ד	ה	ד	ד	ג
1						
2						
3						
4						

## שאלה 1 (35 נקודות)

הילי, חנה ודבי מכינות עוגיות כדי לחלק בין החברים לכיתה.

הבנות נפגשו אצל הילי והכינו עוגיות ב-3 טעמים שונים: וניל, תפוז ושוקולד.

א. (9 נקודות) הבנות הכינו 12 חבילות ובכל חבילה בסך הכל 6 עוגיות: 2 עוגיות מכל סוג. ידוע כי משקל כל עוגייה בטעם וניל הוא 50 גרם, משקל כל עוגייה בטעם תפוז הוא 50 גרם ומשקל של כל עוגייה בטעם שוקולד שווה ל-40 גרם עם סיכוי 0.6 ו 60 גרם בסיכוי 0.4. בהנחה שמשקל כל עוגייה בטעם שוקולד הוא בלתי תלוי מהמשקל של העוגיות האחרות, חשבו את ההסתברות שבדיוק 6 מתוך 12 החבילות ישקלו לפחות 300 גרם.

ב. (8 נקודות) הבנות חילקו את העוגיות שנשארו לשלוש קופסאות. בקופסא של הילי יש 4 עוגיות וניל ו-3 עוגיות שוקולד. בקופסא של חנה יש 2 עוגיות וניל ו-4 עוגיות שוקולד, ובקופסא של דבי יש 4 עוגיות וניל ו-2 עוגיות שוקולד. הילי בוחרת באקראי עוגייה מהקופסא שלה ומעבירה אותה לקופסא של חנה. לאחר מכן חנה בוחרת באקראי עוגייה מהקופסא שלה ומעבירה אותה לקופסא של דבי. דבי מוציאה מהקופסא שלה עוגייה שנבחרה באקראי. מה ההסתברות שזו עוגית שוקולד?

ג. (8 נקודות) בכיתה 14 חברים (לא כולל הילי, חנה ודבי). הבנות מפרסמות בקבוצת הווטסאפ של הכיתה שכל הילדים מוזמנים להגיע לבית של הילי, בכל רגע שהם רוצים בין 16:00 ל-19:00, כדי לקבל חבילה של עוגיות. הן כמובן מזהירות שיש רק 12 חבילות, וכל הקודם זוכה. טליה (אחת מבין 14 החברים) מגיעה בשעה 18:00. מה ההסתברות שכבר לא נשארת חבילה כדי לתת לה? הניחו שכל ילד מגיע לבד בזמן אקראי בין 16:00 ל-19:00 ושזמני ההגעה של הילדים הם בלתי תלויים.

ד. (5 נקודות) בערב, לאחר שכל 12 החבילות חולקו לחברים, הילי הבחינה בכך שהטבעת שלה נעלמה. הבנות בודקות ומחפשות היטב בבית, והטבעת אינה נמצאה. הבנות מגיעות למסקנה שהטבעת נמצאת באחת החבילות שהחברים לקחו. הבנות מתקשרות אחד אחד ובסדר אקראי אל 12 החברים שלקחו עוגיות, כדי לבקש שיבדקו אם הטבעת נמצאת אצלם. ואכן במהלך התהליך הטבעת נמצאת.

יהיה  $X$  - מספר הילדים שהבנות התקשרו אליהם עד למציאת הטבעת. בחרו את הטענה הנכונה:

1. הטבעת נמצאה אצל הילד השלישי שאליו התקשרו בהסתברות  $\frac{1}{12}$

2. הטבעת נמצאה אצל הילד השלישי שאליו התקשרו בהסתברות  $\frac{1}{10}$

3.  $X \sim G\left(\frac{1}{12}\right)$

4.  $X \sim \text{Bin}\left(12, \frac{1}{12}\right)$

ה. (5 נקודות) לאור ההצלחה של העוגיות בקרב החברים, הבנות מחליטות להכין חבילות כדי למכור אותם ולאסוף כסף לקראת מסיבת סיום בית ספר יסודי. הבנות הכינו הפעם 35 חבילות, והשקיעו בסך הכל 75 שקל במרכיבים (לכל החבילות יחד). הבנות מביאות את החבילות למכור בבית הספר במחיר 10 ש"ח לחבילה. מה שלא יימכר בבית הספר, הבנות ימכרו אחרי הצהריים בגינה הציבורית במחיר של 8 ש"ח לחבילה. אם ידוע כי מספר הממוצע של חבילות שהבנות יכולות למכור בבית הספר הוא 20. הרווח המצופה הוא

1. 165      2. 245      3. 205      4. 195

### פתרון שאלה 1:

א. נגדיר  $Y$  - מספר החבילות (מתוך 12 החבילות שהבנות הכינו) שמשקלן לפחות 300 גרם. מתקיים  $Y \sim \text{Bin}(12, p)$  כאשר  $p$  היא ההסתברות שחבילה כלשהי תשקול לפחות 300 גרם. רוצים לחשב  $P(Y = 6)$ . נשים לב שכדי שחבילה תשקול לפחות 300 גרם צריך ששתי עוגיות בטעם שוקולד ישקלו לפחות 100 גרם. נחשב את  $p$ :

$$p = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64$$

נחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P(Y = 6) = \binom{12}{6} \cdot 0.64^6 \cdot 0.36^6 = 0.1382$$

ב. נגדיר מאורעות:

$A$  - הילי מעבירה עוגייה בטעם שוקולד לחני.

$B$  - חנה מעבירה עוגייה בטעם שוקולד לדבי.

$C$  - דבי מוציאה עוגייה בטעם שוקולד.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{129}{343} = 0.3761 \end{aligned}$$

ג. נגדיר  $W$  - מספר הילדים בכיתה (לא כולל את טליה) שהגיעו לפני השעה 18:00. אם  $p$  זו ההסתברות שילד כלשהו יגיע תוך שעתיים לכל היותר, אז  $W \sim \text{Bin}(13, p)$  ועלינו לחשב  $P(W \geq 12)$ .

זמן ההגעה של כל ילד (בשעות) מתפלג לפי התפלגות אחידה בקטע  $[0, 3]$  ולכן  $p = \frac{2}{3}$ .

$$P(W \geq 12) = \binom{13}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{13} = 0.0334$$

ד.  $X \sim U(12)$  ולכן  $P(X = 3) = \frac{1}{12}$ .

ה. אם  $X$  - מספר החבילות הנמכרות בבית הספר ו- $Y$  - הרווח, אז  $Y = 10X + 8(35 - X) - 75$ . לכן

$$E(Y) = E(10X + 8 \cdot 35 - 8X - 75) = 205 + 2E(X) = 205 - 40 = 245$$

## שאלה 2 (35 נקודות)

יוני מגדל בחווה שלו 4 תרנגולות: שרה (תרנגולת 1), לאה (תרנגולת 2), רחל (תרנגולת 3) וסמנתה (תרנגולת 4).

א. (9 נקודות) ביום רביעי בערב מגיע עובד החווה ללול, לאסוף את הביצים שהתרנגולות הטילו באותו היום. הוא מבחין כי שרה הטילה 11 ביצים, לאה הטילה 13 ביצים, רחל הטילה 11 ביצים וסמנתה הטילה 15 ביצים. הוא שם את כל הביצים בסל ומביא אותו ליוני. יוני בוחר ביצה באקראי ושוקל אותה. ידוע כי משקל כל ביצה מתפלג נורמלית.

נגדיר משתנים מקריים  $Y_i$  - משקל בגרמים של ביצה שהטילה התרנגולת ה- $i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). אם נתון

$$Y_4 \sim N(80, 2^2), Y_3 \sim N(80, 3^2), Y_2 \sim N(77, 3^2), Y_1 \sim N(82, 2^2)$$

חשבו את ההסתברות שהביצה שיוני בחר שקלה לפחות 80 גרם.

ב. (8 נקודות) יוני מוכר את הביצים של רחל (תרנגולת 3) בחבילות של 30 ביצים כל אחת. חשבו את ההסתברות שהמשקל של חבילה אחת יהיה לפחות 2450 גרם. (הניחו כי המשקל של כל ביצה הוא ב"ת מהמשקל של הביצים האחרות).

ג. (8 נקודות) עבור  $i = 1, 2, 3, 4$  נגדיר משתנים מקריים  $X_i$  - כמות הביצים שהתרנגולת ה- $i$  מטילה ביום. ידוע

כי מספר הביצים שתתרנגולת מטילה ביום מתפלג לפי התפלגות פואסון. נתון כי

$$X_4 \sim \text{Pois}(12), X_3 \sim \text{Pois}(9), X_2 \sim \text{Pois}(11), X_1 \sim \text{Pois}(8)$$

חשבו את תוחלת מספר הביצים שיהיו ליוני לאחר שבוע.

ד. (5 נקודות) באותו יום רביעי המתואר בסעיף א, יוני הביא את סל הביצים לאשתו, כדי שהיא תוכל לבחור 8 ביצים להכנת עוגה. היא בוחרת באקראי 8 ביצים מהסל. מהי ההסתברות שהיא בחרה בדיוק 2 ביצים מכל אחת התרנגולות?

$$1. \frac{11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 2^4}{50^8}$$

$$2. \frac{11 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 2^4}{8^{50}}$$

$$3. \frac{\binom{4}{1} \binom{11}{2}^2 \binom{13}{2} \binom{15}{2} 2^4}{\binom{50}{8}}$$

$$4. \frac{\binom{11}{2}^2 \binom{13}{2} \binom{15}{2}}{\binom{50}{8}}$$

ה. (5 נקודות) יהי  $X \sim N(2,1)$ . הפרמטרים  $a, b, c$  ( $a > 0$ ) מקיימים  $P(aX + b \leq c) \leq 0.95$ . בחרו את הטענה הנכונה:

1.  $c \leq b + 2a + a \cdot z_{0.95}$

2.  $c > b + 2a + a \cdot z_{0.95}$

3.  $c \leq b + 2a + a \cdot z_{0.05}$

4.  $c \leq b + a + a \cdot z_{0.95}$

## פתרון שאלה 2:

א. נגדיר מאורעות

$A_i$  = יוני בחר ביצה שהטילה התרנגולת ה- $i$ .

$B$  - משקל הביצה הוא לפחות 80 גרם.

ממשפט ההסתברות השלמה נקבל כי

$$P(B) = \sum_{i=1}^4 P(Y_i \geq 80)P(A_i)$$

$$P(B) = P(Y_1 \geq 80)\frac{11}{50} + P(Y_2 \geq 80)\frac{13}{50} + P(Y_3 \geq 80)\frac{11}{50} + P(Y_4 \geq 80) = \frac{15}{50}$$

$$P(Y_1 \geq 80) = P\left(\frac{Y_1 - 82}{2} \geq \frac{80 - 82}{2}\right) = 1 - \phi(-1) = \phi(1) = 0.8413$$

$$P(Y_2 \geq 80) = P\left(\frac{Y_2 - 77}{3} \geq \frac{80 - 77}{3}\right) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P(Y_3 \geq 80) = P(Y_4 \geq 80) = 0.5$$

$$P(B) = 0.8413\frac{11}{50} + 0.1587\frac{13}{50} + 0.5\frac{11}{50} + 0.5\frac{15}{50} = 0.1851 + 0.0413 + 0.26 = 0.4864$$

ב. אם נגדיר משתנים  $W_j$  = משקל של הביצה ה- $j$  בחבילה ( $j=1, \dots, 30$ ) אז המשקל הנקי של החבילה הוא .

$$\sum_{j=1}^{30} W_j \text{ לפי משפט הגבול המרכזי } \left( N(30 \cdot 80, 30 \cdot 3^2) \right) \text{ לכן } \sum_{j=1}^{30} W_j \approx$$

$$P\left(\sum_{j=1}^{30} W_j \geq 2450\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2450 - 2400}{16.43}\right) = 1 - \Phi(3.04) = 1 - 0.9988 = 0.0012$$

ג. עבור כל  $1 \leq i \leq 4$  נגדיר משתנים מקריים  $T_i$  = כמות הביצים שהתרנגולת ה- $i$  מטילה בשבוע (7 ימים). לכן

$$T_i \sim \text{Pois}(\lambda_i, t) \text{ כאשר } t = 7 \text{ ז"א}$$

$$T_4 \sim \text{Pois}(84), T_3 \sim \text{Pois}(63), T_2 \sim \text{Pois}(77), T_1 \sim \text{Pois}(56)$$

אם  $Z$  - כמות שבועית של ביצים בחווה של יוני אז  $Z = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$$E(Z) = E(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) + E(T_4) = 56 + 77 + 63 + 84 = 280$$

## פתרון שאלה 2:

ד. יש  $\binom{50}{8}$  קבוצות שונות של 8 ביצים מתוך 50 הביצים שנאספו ביום רביעי. אנחנו מעוניינים לספור בכמה מהן

יש בדיוק 2 ביצים מכל אחת מהתרנגולות. המספר הזה הוא  $\binom{11}{2}\binom{11}{2}\binom{13}{2}\binom{15}{2}$ . לכן התשובה הנכונה:  $\frac{\binom{11}{2}^2\binom{13}{2}\binom{15}{2}}{\binom{50}{8}}$

ה.

$$P(aX + b \leq c) = P\left(X \leq \frac{c-b}{a}\right) = \Phi\left(\frac{c-b}{a} - 2\right) \leq 0.95$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{c-b}{a} - 2 \leq z_{0.95}$$

$\Leftrightarrow$

$$c \leq b + 2a + a \cdot z_{0.95}$$



### שאלה 3 (30 נקודות)

נתונים 3 מטבעות: שניים מהם הוגנים (בהם עץ מתקבל בסיכוי 0.5), והמטבע השלישי מוטה כך שמתקבל בו עץ בסיכוי 0.7. בוחרים מבניהם באקראי שני מטבעות ומטילים כל אחד מהם פעם אחת. נגדיר:

$X$  - מספר המטבעות ההוגנים שנבחרו,

$Y$  - מספר פעמים שהופיעה התוצאה 'עץ' בהטלת שני המטבעות שנבחרו.

א. (12 נקודות) מהי ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ ?

ב. (8 נקודות) חשבו את התוחלת המותנית  $E[Y | X = 2]$ .

ג. (5 נקודות) יהיו  $Z$  ו- $W$  מ"מ המקיימים  $Var(Z + W) = 15$ ,  $Var(Z - W) = 5$ . מה השונות המשותפת שלהם,  $COV(Z, W)$ ? סעיף זה לא קשור לסעיפים הקודמים.

1. אין מספיק נתונים ולכן לא ניתן לדעת

2.  $COV(Z, W) = 10$

3.  $COV(Z, W) = 2.5$

4.  $COV(Z, W) = 5$

ד. (5 נקודות) בקלמר 2 עטים כחולים, עט אחד אדום ועט אחד ירוק. מוציאים עטים מהקלמר ללא החזרה עד שמוציאים את העט הירוק (כולל). יהי  $U$  = מספר העטים הכולל שהוצאו מהקלמר, ויהי  $V$  = מספר העטים הכחולים שהוצאו מהקלמר עד שיצא העט הירוק. איזו מהטענות הבאות נכונה?

1.  $U$  ו- $V$  בלתי תלויים

2.  $P(U = 2 | V = 0) = 1/12$

3.  $P(V = 0 | U = 2) = 1/4$

4.  $P(V = 0 | U = 2) = 1/3$

**פתרון שאלה 3:**

א. מהי ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ ?

	$\frac{2}{3} \cdot 0.3 \cdot 0.5$ $= 0.1$	$\frac{2}{3}(0.7 \cdot 0.5 + 0.3$ $\cdot 0.5) = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot 0.7 \cdot 0.5 = \frac{7}{30}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 0.5$ $= \frac{1}{12}$	$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot 0.5 = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{11}{60}$	$\frac{30}{60}$	$\frac{19}{60}$	

ב. נשים לב כי  $Y | X = 2 \sim \text{Bin}(2, 0.5)$  ולכן,  $E[Y | X = 2] = 2 \cdot 0.5 = 1$ .

ג. תשובה נכונה היא תשובה מס' 3.

הסבר:

$$V(Z + W) - V(Z - W) = 15 - 5 = 10$$

$$= V(z) + V(W) + 2\text{Cov}(Z, W) - (V(z) + V(W) - 2\text{Cov}(Z, W))$$

$$= 4\text{Cov}(Z, W)$$

$$4\text{Cov}(Z, W) = 10 \Rightarrow \text{Cov}(Z, W) = 2.5, \text{ לכן}$$

ד. תשובה נכונה היא תשובה מס' 4.

הסבר: נשים לב כי  $U$  הוא משתנה אחיד, ולכן  $P(U = 2) = \frac{1}{4}$ , כמו כן,  $P(V = 0 \cap U = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ .