מבחן באלגברה לינארית תשפ"ד סמסטר א שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. אם לא צוין אחרת, יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 **נקודות**) **אין קשר בין סעיפים א,ב**

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה
$$\begin{cases} x + y + (k+4)z = k+1 \\ -2x + (2k+4)y + (-3k-10)z = 4-2k \\ kx + (3k+6)y + (k-2)z = 4k^2+14k+6 \end{cases}$$

(i) (9 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי k עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

(ii) (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k (אם קיימים) וקטור העמודה $\begin{pmatrix} 31 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) נתון כי דירוג של המטריצה $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ מגיע אל המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. קבעו (אם אפשר) כמה פתרונות יש למערכות המשוואות הבאות, אין צורך לנמק. אם לא ניתן לקבוע כתבו זאת.

(i) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}$.

פתרון

א. (i) נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k+4 \\ -2 & 2k+4 & -3k-10 \\ k & 2k+6 & k-2 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - kR_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & k+4 \\ 0 & 2k+6 & -k-2 \\ 0 & 2k+6 & -k^2-3k-2 \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - R_2}{=}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k+4 \\ 0 & 2k+6 & -k-2 \\ 0 & 0 & -k^2-2k \end{vmatrix} = -(2k+6)(k+2)k$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שווה ל-$-(2k+6)(k+2)k$. המטריצה הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן המטריצה הפיכה אם"ם $k \neq 0, -2, -3$. ידוע כי למערכת עם מטריצה מצומצמת ריבועית יש פתרון יחיד אם"ם המטריצה הפיכה, כלומר למטריצה יש פתרון יחיד אם"ם $k \neq 0, -2, -3$. נבדוק עבור שאר הערכים:
עבור $k=-3$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 10 \\ -3 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2+2R_1 \; R_3 \to R_3+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת גדולה מדרגת המטריצה המצומצמת (ישנה שורת סתירה) ולכן למערכת אין פתרון.
עבור $k=-2$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & -4 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת גדולה מדרגת המטריצה המצומצמת (ישנה שורת סתירה) ולכן למערכת אין פתרון.
עבור $k=-3$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -10 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2+2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת והיא שווה ל-2 (כי במטריצה המדורגת יש רק שתי שורות שונות מאפס), כלומר הדרגה קטנה ממספר המשתנים 3, ולכן למערכת הזו יש אינסוף פתרונות.
נסכם:
עבור $k \neq 0, -2, -3$ למערכת יש פתרון יחיד
עבור $k = -2, -3$ למערכת אין פתרונות.
עבור $k=0$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ii) נציב את הערכים המתאימים $x=31, y=-1, z=-10$ במערכת ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 31 & + & (-1) & + & (k+4)(-10) & = & k+1 \\ -2(31) & + & (2k+4)(-1) & + & (-3k-10)(-10) & = & 4-2k \\ 31k & + & (3k+6)(-1) & + & (k-2)(-10) & = & 4k^2+14k+6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -11k & = & 11 \\ 30k & = & -30 \\ -4k^2+4k+8 & = & 0 \end{array}\right.$$

מהשורה הראשונה נקבל כי אין $k=-1$. ערך זה נותן שוויון גם בשתי המשוואות הנוספות ולכן זה הערך היחיד שעבורו ההצבה הזו היא פתרון.

ב. (i) **לא ניתן לקבוע**

(ii) **פתרון יחיד**.

(iii) **אין פתרונות**.

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (15 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ בסיס של V.
נסמן $w_1 = v_1 + 2v_2 + v_3,\ w_2 = v_1 + v_2 - v_3,\ w_3 = 5v_1 + 8v_2 + v_3$.

(i) (5 נקודות) הראו כי הקבוצה $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ תלויה לינארית.

(ii) (5 נקודות) מצאו בסיס של $U = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$.

(iii) (5 נקודות) תנו דוגמה לוקטור $v \in V$ שמקיים כי $v \notin U$.

ב. (5 נקודות) תהי A מטריצה מסדר 3×5. עבור כל אחת מהאפשרויות הבאות מצאו דוגמה המקיימת אותה, או הסבירו מדוע היא לא אפשרית

(i) דרגת המטריצה היא 4, ומימד מרחב העמודות הוא 4.

(ii) מימד מרחב העמודות, ומימד מרחב הפתרונות שווים ל2.

(iii) דרגת המטריצה היא 2, ומימד מרחב הפתרונות שווה 1

פתרון

א. וקטורי הקואורדינטות של איברי הקבוצה לפי הבסיס B הם

$$[w_1]_B = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad [w_2]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad [w_1]_B = \begin{pmatrix}5\\8\\1\end{pmatrix}$$

(i) מכיוון שתלויות לינאריות של וקטורי הקואורדינטות ושל הוקטורים עצמן זהות, כדי לבדוק אם הקבוצה ת"ל מספיק לבדוק אם קבוצת וקטורי הקואורדינטות תלויה לינארית. נדרג אם כן את המטריצה הבאה, שעמודותיה הן וקטורי הקואורדינטות של איברי הקבוצה C:

$$\begin{pmatrix}1&1&5\\2&1&8\\1&-1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1&1&5\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2\ R_3\to R_3-2R_2} \begin{pmatrix}1&1&5\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

דירוג שורות שומר על תלויות לינאריות של העמודות, ובמטריצה המדורגת ניתן לראות כי העמודה האחרונה היא צירוף לינארי של העמודות הראשונות. מכאן ניתן להסיק כי גם w_3 הוא צ"ל של w_1, w_2, ובפרט קבוצת העמודות היא ת"ל, ולכן גם קבוצת הוקטורים המקורית היא ת"ל.

(ii) לפי החישוב בסעיף הקודם, קיבלנו כי w_3 הוא צירוף לינארי של w_1, w_2. כמו כן הוקטורים w_1, w_2 בת"ל כי וקטורי הקואורדינטות שלהם בת"ל לפי סוף הדירוג בסעיף הקודם, ומאותה הסיבה. מכאן שהקבוצה $\{w_1, w_2\}$ קבוצה פורסת (הסרת וקטור שהוא צירוף לינארי של שאר איברי הקבוצה לא משנה את המרחב הנפרס) ובת"ל ולכן בסיס של U.

(iii) נראה כי $v_1 \notin U$. נראה זאת ע"י כך שנראה כי הוספת v_1 לקבוצה $\{w_1, w_2\}$ תשאיר אותה בת"ל. נראה זאת ע"י כך שנראה כי קבוצת וקטורי הקואורדינטות שלהם לפי הבסיס B היא בת"ל ע"י חישוב הדטרמיננטה של המטריצה המתאימה:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&0\end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

ב. עבור מטריצה כלשהי, דרגת המטריצה שווה למימד מרחב העמודות. כמו כן הדרגה לא יכולה להיות גדולה ממספר העמודות, וממספר השורות, כלומר קטנה מהקטן מבין השניים. כמו כן מימד מרחב הפתרונות שווה למספר העמודות פחות דרגת המטריצה.

(i) **לא יתכן** : המטריצה מסדר 3×5 ולכן הדרגה היא לכל היותר 3, כלומר לא יכולה להיות שווה ל4.

(ii) **לא יתכן** : מימד מרחב העמודות שווה לדרגת המטריצה, ומימד מרחב הפתרונות שווה למספר העמודות פחות דרגת המטריצה, כלומר סכומם צריך להיות 3, ולא 4.

(iii) **יתכן** : דוגמה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב הפתרונות נפרש ע"י שתי העמודות הראשונות שהן בת"ל, ומרחב בפתרונות נפרש ע"י $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 3. (20 נקודות)

תהי $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ העתקה אשר מוגדרת ע"י:

$$\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;:\; T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A - A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

א. (8 נקודות) הוכיחו ש- T העתקה לינארית.

ב. (7 נקודות) מצאו בסיסים ומימדים עבור הגרעין והתמונה של T.

ג. (5 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

$$\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;:\; T(A^t) = -T(A)^t$$

פתרון

א. תהיינה $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ זוג מטריצות ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ זוג סקלרים. נחשב:

$$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta B) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\alpha A + \beta B) - (\alpha A + \beta B) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B - \alpha A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \beta B \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) + \beta \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B - B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha T(A) + \beta T(B) \end{aligned}$$

וההעתקה אכן לינארית.

ב. ראשית נחשב את ההעתקה בעבור מטריצה כללית $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} T(A) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כעת

$$\begin{aligned} KerT &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a-d = b-c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \right\} \\ &= Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

זוג המטריצות הפורשות הן בת"ל ולכן מהוות בסיס לגרעין ומימדו 2. באופן דומה

$$\begin{aligned} ImT &= \left\{T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}\right\} \\ &= Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

גם כאן המטריצות הפורשות הן בת"ל ומהוות בסיס לתמונה ומימדה 2.

ג. הטענה נכונה. נקח $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ונחשב

$$\begin{aligned} T\left(A^t\right) &= T\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b-c & d-a \\ a-d & c-b \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} c-b & a-d \\ d-a & b-c \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}^t \\ &= -T(A)^t \end{aligned}$$

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב, ג

א. (7 נקודות) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

ב. (7 נקודות) תהי A מטריצה מסדר 5×5 המקיימת $A^t = -A$. הראו שבהכרח $rank(A) < 5$.

ג. (6 נקודות) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$ המקיימות $BA = B \quad AB = A,$. הראו ש-

$$A^2 = A, \quad B^2 = B$$

פתרון

א. נבצע את סדרה הפעולות הבאה על עמודות המטריצה: נחסר מעמודה מס 6 את עמודה מס 5. מעמודה מס 5 נחסר את עמוד מס 4 וכך הלאה. כל פעולה כזו שומרת על הדטרמיננטה, ולכן נקבל

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -6 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -6$$

כאשר השוויון השני מתקבל מפיתוח הדטרמיננטה לפי השורה האחרונה.

ב. מתכונות הדטרמיננטה ידוע ש-$\det(A) = \det(A^t)$ ומהנתון נקבל

$$\det(A) = \det(-A) = (-1)^5 \det(A) = -\det(A)$$

כלומר $2\det(A) = 0$ ולכן A אינה הפיכה. מכאן הדרגה של A בהכרח קטנה מ-5.

ג. נשים לב ש

$$A^2 = AA = (AB)A = A(BA) = AB = A$$

ובאותו אופן עבור B^2.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (10 נקודות) נתונות המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&a&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\a-1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ האם קיים ערך של a שעבורו גם A וגם B לכסינות?

ב. (10 נקודות) נתונה מטריצה ריבועית A המקיימת $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. מצאו מטריצה הפיכה P כך שהמטריצה $P^{-1}AP$ אלכסונית, ומצאו את הדטרמיננטה $|A^3|$.

פתרון

א. הפולינום האופייני של A הוא

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

הריבוי האלגברי של $\lambda=2$ הוא 1 ולכן שווה לריבוי הגיאומטרי שלו. הריבוי האלגברי של $\lambda=1$ הוא 2 והריבוי הגיאומטרי שלו שווה למימד מרחב הפתרונות של המטריצה $A-I$ ולכן שווה ל $3-\text{rank}(A-I)$. מכאן ש-A לכסינה אם ורק אם $\text{rank}(A-I)=1$.

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\\0&a&0\end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה לכסינה אם"ם $a=0$. נציב $a=0$ במטריצה B ונבדוק אם היא לכסינה עבור ערך זה. הפולינום האפייני במקרה זה הוא

$$\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

הדרגה של

$$B-2I=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

הוא 2 ולכן B לא לכסינה (כי הריבוי הגיאומטרי של $\lambda=2$ שווה ל-1, והריבוי האלגברי שלו הוא 2). מכאן שאין ערכים עבורם שתי המטריצות לכסינות.

ב. מהנתון נובע כי

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

כלומר $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ וקטור עצמי עם ערך עצמי 2, ו $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ וקטור עצמי עם ערך עצמי 3. מכאן ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$ המורכב מוקטורים עצמיים ולכן עבור $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ מתקיים כי

$$A=PDP^{-1}\Rightarrow|A^3|=|PD^3P^{-1}|=|P|\,|D|^3\,|P|^{-1}=6^3=216$$

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) נתון המרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו וקטור בעל נורמה שווה ל 1 שאורתוגונלי לוקטורים

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

(i) (8 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו u,v שני וקטורים השונים זה מזה כך ש $\langle u,v\rangle=\langle v,v\rangle=1$

i. הראו כי $\{v-u,-v\}$ קבוצה אורתוגונלית של וקטורים השונים מוקטור האפס.

ii. חשבו את הנורמה של u, כלומר $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$, אם נתון בנוסף שהקבוצה $\{2u-v,u\}$היא גם אורתוגונלית.

פתרון

א. הוקטור $v=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ אורתוגונלי לוקטורים $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ אם הוא פתרון למערכת המשוואות

$$\begin{cases}a-2b+3c=0\\2a+b-2c=0\end{cases}$$

קבוצת הפתרונות של המערכת היא

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix}c: \quad c\in\mathbb{R}\right\}$$

נמצא כעת c כך שההוקטור יהיה בנורמה 1.

$$\left((1)^2+8^2+5^2\right)c^2=1\Rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt{90}}$$

ולכן וקטור נדרש הוא

$$\frac{1}{\sqrt{90}}\begin{pmatrix}1\\8\\5\end{pmatrix}$$

ב. (i) u,v הם וקטורים בת"ל, ולכן $-u,v-u\neq 0$. כעת,

$$\langle v-u,-v\rangle=-\langle v,v\rangle+\langle u,v\rangle=-1+1=0$$

(ii) מהסעיף הקודם ומהנתון הנוסף נקבל כי

$$\langle 2u-v,u\rangle=2\langle u,u\rangle-\langle v,u\rangle=0\Rightarrow 2\|u\|^2-\overline{\langle u,v\rangle}=0\Rightarrow 2\|u\|^2-1=0\Rightarrow\|u\|=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

בהצלחה