

אריתמטיקה של גבולות

נניח  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  כאשר הגבולות קיימים וסופיים. אז:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ ,  $b_n, b \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ ,  $a \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$  (עבור פונקציה רציפה ("יפה")

אריתמטיקה של גבולות אינסופיים

כאשר  $a, b$  קבועים

חִיבּוּר	כּפּל	חִילּוּק	חִזְקָה	
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$ $a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$	$\frac{0}{\infty} = 0$ , $\frac{a}{\infty} = 0$ $\frac{\infty}{0} = \pm\infty$	$a^\infty = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 0 & 0 \leq a < 1 \end{cases}$ $\infty^b = \begin{cases} \infty & b > 0 \\ 0 & b < 0 \end{cases}$	מקרים מוגדרים
$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$	$\infty^0$ $1^\infty$ $0^0$	מקרים שאינם מוגדרים (כל מקרה לגופו)

גבולות בסיסיים

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \pm\infty$  תלוי בסימן של מקדם החזקה הגבוהה ביותר בפולינום
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & -1 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & 1 < a \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$
- הסבר:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln\left(\frac{1}{n^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ ,  $p(n)$  פולינום

מתקיימים יחסי הסדר  $c \ll (\ln n)^a \ll n^k \ll b^n \ll n! \ll n^n$  , זאת אומרת:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\ln^a(n)} = 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^a(n)}{n^k} = 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{b^n} = 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ שימוש בנוסחת סטרלינג}$$

• בכל הגבולות הקבועים  $a, c, k > 0$  ,  $b > 1$  כלשהם.