פתרונות לתרגיל בית 10 – אינדוקציה

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. הוכיחו שלכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n \geq 1$ המספר $n^7 - n$ מתחלק ב – 7 ללא שארית.

פתרון

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים: $1^7 - 1 = 0$ מתחלק ב – 7 ללא שארית.
הנחת האינדורקציה: נניח כי עבור $n \geq 1$ טבעי מסויים המספר $n^7 - n$ מתחלק ב – 7 ללא שארית.
מעבר האידוקציה: על סמך ההנחה נוכיח כי גם המספר $(n+1)^7 - (n+1)$ מתחלק ב – 7 ללא שארית.
מתקיים

$$\begin{aligned}(n+1)^7 - (n+1) &= (n+1)\left((n+1)^6 - 1\right) = (n+1)\left((n+1)^3 - 1\right)\left((n+1)^3 + 1\right) = \\ &= (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n)(n^3 + 3n^2 + 3n + 2) = \\ &= (n+1)(n^6 + 6n^5 + 15n^4 + 20n^3 + 15n^2 + 6n) = \\ &= n^7 + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 6n = \\ &= (n^7 - n) + 7n^6 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n = \\ &= (n^7 - n) + 7(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + n)\end{aligned}$$

המחובר $(n^7 - n)$ מתחלק ב – 7 לפי הנחת האינדוקציה, והמחובר $7(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + n)$ מתחלק ב – 7, כי הוא כפולה שלמה של 7. לכן גם הסכום של המחוברים האלה מתחלק ב – 7. זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.
מסקנה: לפי עיקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.

2. הוכיחו שלכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n \geq 1$ המספר 13 מחלק את הביטוי $10^{2n-1} + 3^{2n-1}$ ללא שארית.

פתרון

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים: $10^{2\cdot1-1} + 3^{2\cdot1-1} = 13$ מתחלק ב – 13 ללא שארית.
הנחת האינדורקציה: נניח כי עבור $n \geq 1$ טבעי מסויים המספר $10^{2n-1} + 3^{2n-1}$ מתחלק ב – 13 ללא שארית.
מעבר האידוקציה: על סמך ההנחה נוכיח כי גם המספר $10^{2n+1} + 3^{2n+1}$ מתחלק ב – 13 ללא שארית.
מתקיים

$$\begin{aligned}10^{2n+1} + 3^{2n+1} &= 10^2 \cdot 10^{2n-1} + 3^{2n+1} = \\ &= 10^2 \cdot (10^{2n-1} + 3^{2n-1} - 3^{2n-1}) + 3^{2n+1} = \\ &= 10^2 \cdot (10^{2n-1} + 3^{2n-1}) - 10^2 \cdot 3^{2n-1} + 3^{2n+1} \\ &= 10^2 \cdot (10^{2n-1} + 3^{2n-1}) - 3^{2n-1}(10^2 - 3^2) = \\ &= 10^2 \cdot (10^{2n-1} + 3^{2n-1}) - 91 \cdot 3^{2n-1} = \\ &= 10^2 \cdot (10^{2n-1} + 3^{2n-1}) - 13 \cdot 7 \cdot 3^{2n-1}\end{aligned}$$

הביטוי $10^2 \cdot (10^{2n-1} + 3^{2n-1})$ מתחלק ב – 13 לפי הנחת האינדוקציה, והביטוי $13 \cdot 7 \cdot 3^{2n-1}$ מתחלק ב – 13, כי הוא כפולה שלמה של 13. לכן גם ההפרש של הביטויים האלה מתחלק ב – 13. זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.
מסקנה: לפי עיקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.

3. הוכיחו כי לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n > 1$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

פתרון

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ מתקיים:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1.5 > \sqrt{2}$$

הנחת האינדורקציה: נניח כי עבור $n > 1$ טבעי מסויים מתקיים $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

מעבר האידוקציה: על סמך ההנחה נוכיח כי גם $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$.

מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{induction\,assumption}{>} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

נראה כי $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} &= \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1} + 1 - \sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2+n} + 1 - (n+1)}{\sqrt{n+1}} = \\ &= \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n^2} - n}{\sqrt{n+1}} = \frac{n-n}{\sqrt{n+1}} = 0\end{aligned}$$

זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.

מסקנה: לפי עיקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n > 1$ טבעי.

4. יהיו $x \neq y \in \mathbb{R}$ כלשהם. הוכיחו כי הביטוי $(x-y)$ מחלק את $x^{2n} - y^{2n}$ לכל מספר טבעי $n \geq 1$.

פתרון

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ מתחלק ב - $(x-y)$ ללא שארית.

הנחת האינדורקציה: נניח כי עבור $n \geq 1$ טבעי מסויים $x^{2n} - y^{2n}$ מתחלק ב - $(x-y)$ ללא שארית.

מעבר האידוקציה: על סמך ההנחה נוכיח כי גם $x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)}$ מתחלק ב - $(x-y)$ ללא שארית.

מתקיים

$$\begin{aligned}x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)} &= x^2 \cdot x^{2n} - y^2 \cdot y^{2n} = \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n} + y^{2n}) - y^2 \cdot y^{2n} = \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n}) + x^2 \cdot y^{2n} - y^2 \cdot y^{2n} = \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n}) + y^{2n}(x^2 - y^2) = \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n}) + y^{2n}(x-y)(x+y)\end{aligned}$$

המחובר $x^2(x^{2n} - y^{2n})$ מתחלק ב - $(x-y)$ לפי הנחת האינדוקציה, והמחובר $y^{2n}(x-y)(x+y)$ מתחלק ב - $(x-y)$, כי הוא כפולה שלמה של $(x-y)$. לכן גם הסכום של המחוברים האלה מתחלק ב - $(x-y)$. זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.

מסקנה: לפי עיקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.

5. נסמן ב – P_n את הטענה

$$P_n: \ 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+3$$

(א) האם הטענה P_n נכונה לכל $n \geq 1$?

(ב) הוכיחו כי אם $P_k = True$ אז עבור מספר מסויים k אז גם $P_{k+1} = True$.

פתרון

(א) לא. כבר עבור $n=1$ הטענה לא נכונה: האגף השמאלי הינו 1, האגף הימני הינו $1^2+3=4$. גם עבור $n=2$ הטענה לא נכונה: $1+3 \neq 2^2+3$.

(ב) נניח כי $P_k = True$, כלומר $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2+3$. מכאן עבור $(k+1)$ נקבל:

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{k^2+3}+(2k+1)=k^2+3+(2k+1)=$$

$$=(k^2+2k+1)+3=(k+1)^2+3$$

כלומר גם $P_{k+1} = True$.
בדוגמה הזאת רואים כי מעבר האינדוקציה ללא בסיס האינדוקציה לא יכול להוות הוכחה.

6. **כל החתולים בעולם הם מאותו צבע** בתרגיל זה נראה איך אפשר להוכיח באינדוקציה שכל החתולים בעולם הם מאותו צבע. מכיוון שברור שהטענה הזו אינה נכונה, **המשימה שלכם בתרגיל זה הוא למצוא את הטיעון השגוי ב"הוכחה" הבאה:**

(א) נוכיח באינדוקציה על מספר החתולים את הטענה הבאה: כל החתולים בעולם הם מאותו צבע.

(ב) **בסיס האינדוקציה:** נתבונן בקבוצה שיש בה חתול אחד. אז כל החתולים בקבוצה זו הם מאותו צבע.

(ג) **הנחת האינדוקציה:** נתבונן בקבוצה שיש בה n חתולים. אז כל החתולים בקבוצה הם מאותו צבע.

(ד) **צעד האינדוקציה:** נוכיח כי בקבוצה X שיש בה $n+1$ חתולים - כל החתולים הם מאותו צבע. אכן, נסמן את החתולים הקבוצה X באופן הבא

$$X=\{c_1,c_2....,c_n,c_{n+1}\}$$

כעת, נתבונן בתת הקבוצה A

$$A=\{c_1,c_2....,c_n\}=X\setminus\{c_{n+1}\}$$

זוהי קבוצה עם n חתולים מתוך הקבוצה X ולכן כל החתולים בקבוצה A הם מאותו צבע. נתבונן בתת קבוצה נוספת של X

$$B=\{c_2....,c_n,c_{n+1}\}=X\setminus\{c_1\}$$

גם הקבוצה B היא קבוצה עם n חתולים ולכן כל החתולים ב B הם מאותו צבע. מכיוון שהחתול c_2 נמצא גם ב A וגם ב B,

$$c_2 \in A \cap B$$

אז כל החתולים שבקבוצה A בצבע של החתול c_2 וגם כל החתולים בקבוצה B הם בצבע של החתול c_2 ולכן כל החתולים בקבוצה X הם באותו צבע.

(ה) **מסקנה:** כל החתולים בעולם הם מאותו צבע.

פתרון

ההוכחה מסתמכת על כך ש – $c_2 \in A \cap B$. הדבר יהיה נכון רק כאשר $n \geq 2$, לכן בסיס האינדוקציה אמור להתבצע גם עבור $n=2$. כלומר אמורים לבדוק שכל 2 חתולים הם מאותו צבע. זה בוודאות לא נכון. כמו בתרגיל הקודם משתכנעים כי הוכחת מעבר האינדוקציה ללא בסיס מתאים יכולה להביא למסקנות שגויות.

7. **אינדוקציה עם אובייקטיים גיאומטריים** נתבונן באוסף סופי של ישרים במישור. בתרגיל זה נוכיח באינדוקציה את הטענה הבאה: ניתן לצבוע את האזורים שבין הישרים בשני צבעים שחור ולבן, כך שאין שני חלקים צמודים (כלומר עם גבול משותף) שצבועים באותו צבע.

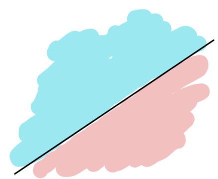
(א) ציירו ישר אחד במישור והסבירו למה הטענה נכונה.

(ב) ציירו ישר נוסף לציור שציירתם בסעיף הקודם והסבירו למה הטענה נשארת נכונה.

(ג) נניח כי הטענה נכונה עבור n ישרים. כלומר, נניח כי ניתן לצבוע את האזורים שבין כל n ישרים בשני צבעים שונים כך שאין חלקים צמודים הצבועים באותו צבע. התבוננו כעת ב $n+1$ ישרים. נשים בצד לרגע ישר אחד, ℓ. כעת, יש לנו n ישרים במישור ולכן ניתן לצבוע בשני צבעים. כעת, נחזיר את הישר שהוצאנו לציור. כל האזורים שמצד אחד של הישר ℓ ישארו בצביעה הקודמת וכל האזורים שמהצד השני של הישר יהפכו את הצבע שלהם) שחור ללבן ולהיפך(. הסבירו למה הצביעה הסופית שהתקבלה היא צביעה בה אין חלקים צמודים הצבועים באותו צבע.

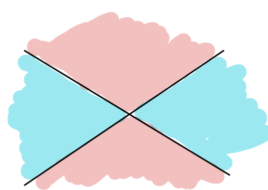
פתרון

(א) נצייר ישר אחד:



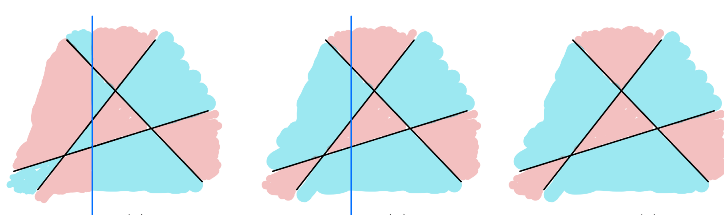
הישר מחלק את המישור לשני חלקים. צובעים אותם בצבעים שונים. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$.

(ב) נצייר ישר נוסף



כעת יש 4 איזורים, ורואים שהצביעה המבוקשת אפשרית. בדיקת המקרה שבו ישר נוסף מקביל לישר הראשון נשאיר לקורא.

(ג) נניח כי הטענה נכונה עבור n ישרים. כלומר, נניח כי ניתן לצבוע את האזורים שבין כל n ישרים בשני צבעים שונים, כך שאין חלקים צמודים הצבועים באותו צבע. באיור (1) ממחישים עבור 3 ישרים. נוסיף את הישר ה - $(n+1)$ לאחר שהורדנו אותו. איור (2).



(3) (2) (1)

בכל אחד מהצדדים ביחס לישר הזה הצביעה תקינה. אבל לאורך הישר לאיזורים יש אותו צבע. כדי לטפל בבעיה נהפוך צבעים בצד אחד של הישר. איור (3). הצביעה בצד הזה עדיין תקינה, וגם לאורך הישר הצבעים כבר לא זהים. זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.
לפי עיקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.

.8

(א) הוכיחו כי הטענה הבאה נכונה לכל מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ כאשר $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(ב) נתבונן בסדרה

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

הראו כי הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה החסומה ע"י 2.

(ג) האם ניתן להוכיח **באינדוקציה** שהסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה ע"י 2?

פתרון

(א) **בסיס האינדוקציה:** עבור $n = 1$ מתקיים:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$$

הנחת האינדורקציה: נניח כי עבור $n \geq 1$ טבעי מסויים מתקיים $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
מעבר האידוקציה: על סמך ההנחה נוכיח כי גם $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.
מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} \underset{induction\, assumption}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{2n(n+1) - (n+1) + n}{n+1} = \frac{2n^2 + 2n - 1}{n+1} = \\ &= \frac{2n^2 + 2n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2n(n+1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 2n - \frac{1}{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.
מסקנה: לפי עיקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.

(ב) בסעיף הקודם הראינו כי $x_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ לכל $n \geq 1$ טבעי. לכן $x_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$ לכל $n \geq 1$ טבעי. זה מוכיח שהסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה (מלמעלה) על ידי 2.

(ג) מההנחה $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$ אי אפשר להוכיח שגם $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2$, כי באגף השמאלי התווסף מחובר חיובי, ואילו האגף הימני לא השתנה. לכן אי אפשר להוכיח באינדוקציה ישירה שהסדרה חסומה על ידי 2.

.9 נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת באופן הבא

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},\ n \geq 3$$
$$a_1 = 11$$
$$a_2 = 21$$

הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n \geq 1$ מתקיים

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1$$

פתרון

בסיס האינדוקציה:

עבור $n=1$ מתקיים: $a_1 = 5 \cdot 2^1 + 1 = 11$.

עבור $n=2$ מתקיים: $a_2 = 5 \cdot 2^2 + 1 = 21$.

בדקנו את נכונות הטענה עבור $n = 1, 2$.

הנחת האינדורקציה: נניח כי עבור $n-1, n-2 \geq 1$ טבעיים מסוימים הטענה נכונה, כלומר $a_{n-2} = 5 \cdot 2^{n-2} + 1$ וגם $a_{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1} + 1$.

מעבר האידוקציה: על סמך ההנחה נוכיח כי $a_n = 5 \cdot 2^n + 1$.

ואכן

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} - 2a_{n-2} = \{induction\, assumption\} = \\
&= 3 \cdot (5 \cdot 2^{n-1} + 1) - 2 \cdot (5 \cdot 2^{n-2} + 1) = \\
&= 15 \cdot 2^{n-1} + 3 - 10 \cdot 2^{n-2} - 2 = \\
&= 2^{n-2}(15 \cdot 2 - 10) + 1 = 20 \cdot 2^{n-2} + 1 = 5 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-2} + 1 = 5 \cdot 2^n + 1
\end{aligned}$$

זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.

מסקנה: לפי עיקרון האינדוקציה המתמטית הטענה נכונה לכל $n \geq 1$ טבעי.