פתרון

X

	שאלה 1		שאלה 2		שאלה 3	
	ה	ד	ה	ד	ד	ג
1						
2						
3						
4						

שאלה 1 (38 נקודות)

ההסתברות שמכשיר מסוים יעבוד לכל היותר שנה שווה ל-0.5, ההסתברות שהוא יעבוד בין שנה ושנתיים שווה ל-0.3 וההסתברות שהוא יעבוד בין שנתיים ושלוש שנים שווה ל-0.2. אם מכשיר מתקלקל לפני סוף שנה הראשונה החברה היצרנית מתחיבת לתקן אותו ללא תשלום. אם מכשיר מתקלקל אחרי שנה ולפני שנתיים עלות התיקון תהיה 100 ₪ ועלות התיקון של מכשיר שיעבוד יותר משנתיים תהיה 200 ₪. זמני עבודה של מכשירים בלתי תלויים. אמיר רכש שלושה מכשירים האלה.

נגדיר משתנים מקריים:

X - מספר המכשירים מתוך שלושה שיעבדו לכל היותר שנתיים.

Y - עלות תיקון הכוללת של שלושת המכשירים.

הערה: כדי לענות על השאלות הבאות לא צריך לבנות טבלת ההתפלגות המשותפת.

א. (8 נקודות) חשבו את ההסתברות $P(X=0\,|\,X\le 2)$.

ב. (10 נקודות) חשבו את פונקציית הסתברות המותנית של Y בהינתן $X=3$.

ג. (10 נקודות) חבר של אמיר רכש 100 מכשירים. מהי ההסתברות שלכל היותר 40 מהמכשירים יעבדו פחות משנה?

ד. (5 נקודות) נגדיר משתנה מקרי: Z - מספר מכשירים שיעבדו יותר משנתיים לפני שיתקלקלו בפעם הראשונה. מקדם המתאם שווה:

1. $\rho(X,Z)=-1$
2. $\rho(X,Z)=1$
3. $\rho(X,Z)=0$
4. $\rho(X,Z)=0.5$

ה. (5 נקודות) יהי S משתנה מקרי המקיים $S\sim G(p)$. בחרו את הטענה הנכונה (אין קשר לשאר הסעיפים).

1. $P(S>3)=(1-p)^2$
2. $P(S\ge 3\,|\,S>4)=p$
3. $P(S\le 5\,|\,S>4)=p$
4. $P(S<5)=(1-p)^5$

פתרון:

א. מתקיימים: $X \sim Bin(3,0.8)$. לכן ההסתברות המבוקשת שווה ל:

$$P(X=0 \mid X \le 2) = \frac{P(X=0)}{1-P(X=3)} = \frac{0.2^3}{1-0.8^3} = 0.0164$$

ב. נחשב את פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X=3$. נגדיר מ"מ X_1 - מספר המכשירים מתוך שלושה שיתקלקלו לפני שנה הראשונה ו- X_2 - מספר המכשירים שיעבדו בין שנה ושנתיים.

$$P(Y=0 \mid X=3) = \frac{P(X_1=3, X_2=0)}{P(X=3)} = \frac{0.5^3}{0.8^3} = 0.244$$

$$P(Y=100 \mid X=3) = \frac{P(X_1=2, X_2=1)}{P(X=3)} = \frac{3\cdot 0.3\cdot 0.5^2}{0.8^3} = 0.439$$

$$P(Y=200 \mid X=3) = \frac{P(X_1=1, X_2=2)}{P(X=3)} = \frac{3\cdot 0.3^2\cdot 0.5}{0.8^3} = 0.264$$

$$P(Y=300 \mid X=3) = \frac{P(X_1=0, X_2=3)}{P(X=3)} = \frac{0.3^3}{0.8^3} = 0.053$$

ג. בסעיף הקודם הגדרנו מ"מ X_1 . נשים לב שמתקיים: $X_1 \sim Bin(100,0.5)$.
נבדוק את התנאים:

$$100\cdot 0.5 = 50 > 5$$

$$100\cdot 0.5 = 50 > 5$$

נעבור לקירוב נורמלי: $X_1 \sim N(50,25)$. נחשב את ההסתברות:

$$P(X \le 40) = \Phi\left(\frac{40+0.5-50}{\sqrt{25}}\right) = 1-\Phi(1.9) = 1-0.9713 = 0.0287$$

ד. מתקיים $Z = 3-X$ לכן תשובה נכונה $\rho(X,Z) = -1$.

ה. מתקיים $(S \le 5 \cap S > 4) = (S=5)$ ולכן תשובה נכונה $P(S \le 5 \mid S > 4) = p$.

שאלה 2 (38 נקודות)

ליאורה מתאמנת לקראת תחרות ספורטיבית. זמן האימון שלה ביום בהיר מתפלג נורמלית עם תוחלת 4 שעות וסטיית התקן 1. ביום גשום זמן האימון מתפלג מעריכית עם שונות השווה ל- 4 שעות. ההסתברות ליום בהיר שווה ל-0.6. זמני אימון בימים שונים בלתי תלויים.

א. (10 נקודות) מהי ההסתברות לכך שמחר ליאורה תתאמן יותר מחמש שעות?

ב. (10 נקודות) חמישה ימים הבאים יהיו **בהירים**. מהי ההסתברות שלפחות בשניים מהימים האלה ליאורה תתאמן פחות מארבע שעות?

ג. (8 נקודות) **היום יום גשום**. ליאורה התחילה להתאמן בשעה 9:00. אמא שלה הגיעה לבקר אותה בשעה 12:00 וליאורה עדיין הייתה באימונים. מהי ההסתברות שאמא תצטרך להמתין יותר משעה אחת עד שליאורה תסיים להתאמן?

ד. (5 נקודות) מהו העשירון העליון של זמן האימון ביום **בהיר**:

1. אף תשובה אינה נכונה
2. 5.645
3. 6
4. 5.282

ה. (5 נקודות) תהי $F_X(t)$ פונקציית ההתפלגות של זמן האימון ביום אקראי. מצאו את $\lim_{t\to 4} F_X(t)$.

1. 0.5
2. 0.354
3. 0.3
4. 0.581

פתרון:

א. נגדיר משתנים מקריים: X - זמן אימון ביום בהיר ו- Y - זמן אימון ביום גשום. מתקיים: $X \sim N(4,1)$, $Y \sim \exp(0.5)$. נחשב את ההסתברות:

$$p = 0.6 \cdot P(X > 5) + 0.4 \cdot P(Y > 5) = 0.6 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{5-4}{1}\right)\right) + 0.4 \cdot e^{-0.5 \cdot 5} =$$

$$0.6 \cdot (1 - 0.8413) + 0.4 \cdot e^{-0.5 \cdot 5} = 0.128$$

ב. נגדיר מ"מ Z מספר ימים מתוך חמישה שבהם ליאורה תתאמן פחות מארבע שעות. מתקיים $Z \sim Bin(5,0.5)$.

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) = 1 - 0.5^5 - 5 \cdot 0.5^5 = 0.8125$$

ג. לפי תכונת חוסר הזיכרון צריך לחשב: $P(Y > 1) = e^{-0.5} = 0.6065$

ד. $x_{0.9} = 4 + z_{0.9}$ ולכן תשובה נכונה היא תשובה 4

ה. פונקציית התפלגות המצטברת רציפה ולכן צריך לחשב את הערך שלה ב-4:

$$F_X(4) = 0.6 \cdot P(X < 4) + 0.4 \cdot P(Y < 4) = 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot e^{-0.5 \cdot 4} = 0.354$$

שאלה 3 (24 נקודות)

יהיו $X_1, \ldots, X_n$ n תצפיות ב"ת מהתפלגות אחידה עם פרמטר N.

א. (7 נקודות) האם $T = 2\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - 1$ אומד חסר הטיה עבור N ? נמקו.

ב. (7 נקודות) על סמך 40 תצפיות $X_1, \ldots, X_{40}$ מהתפלגות אחידה עם פרמטר N רוצים לבדוק שתי השערות: $H_0\colon\ N = 10,\ \ H_1\colon N < 10$. האם מבחן הבא הוא מבחן ברמת המובהקות 0.05:
דחה את H_0 אם $\max\{X_1, \ldots., X_{40}\} \le 9$?

ג. (5 נקודות) לקחו מדגם בגודל 100 כדי למצוא רווח בר סמך עבור תוחלת האוכלוסייה. ידוע שסטיית התקן שווה ל- 10. מצאו רמת הסמך כך שאורך של הרווח בר סמך יהיה שווה ל-4.

1. 0.9772
2. 0.0456
3. 0,9544
4. 0.8753

ד. (5 נקודות) נתון שאנחנו יכולים להסתפק ברמת מובהקות של 0.05. איזה מהמבחנים הבאים נעדיף?

1. $\alpha = 0.02, \beta = 0.3$
2. $\alpha = 0.04, \beta = 0.2$
3. $\alpha = 0.05, \beta = 0.3$
4. $\alpha = 0.1, \beta = 0.05$.

פתרון:

א. נחשב תוחלת של האומד:

$$E(T)=E\left(2\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-1\right)=2E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)-1=2\left(\frac{N+1}{2}\right)-1=N$$

לכן T אומד חסר הטיה עבור N.

ב. נחשב את ההסתברות של טעות מסוג I:

$$\alpha=P_{H_0}(C)=P_{H_0}(\max\{X_1,...,X_{40}\}\le 9)=P_{H_0}(X_1\le 9)\cdots P_{H_0}(X_{40}\le 9)=0.9^{40}=0.015<0.05$$

לכן המבחן ברמת המובהקות 0.05.

ג. מתקיים $z_{1-\alpha/2}=2$ לכן $1-\alpha=0.9544$

ד. התשובה הנכונה היא 2.