פתרון X

מבוא להסתברות

שאלה 1 (32 נקודות)

בקופסה יש ארבעה כדורים הממוספרים: 1,2,3,4. מטילים מטבע עם הסתברות p לקבלת עץ. אם יוצא עץ מוציאים שלושה כדורים עם החזרה ואם יוצא פלי מוציאים שני כדורים עם החזרה.

א. מהו p אם ההסתברות המותנת לקבל עץ בהינתן שהמספר 3 התקבל פעמיים שווה ל-0.5?

ב. נניח $p = 0.4$. מהי ההסתברות לכך שסכום המספרים על הכדורים שהוצאו שווה ל-3?

ג. נניח $p = 0.4$. בהטלת המטבע התקבל עץ. מה ההסתברות שבהוצאת הכדורים נקבל את המספר 3 לכל היותר פעם אחת?

ד. נניח $p = 0.4$. מהי ההסתברות לכך שמספר המקסימלי על הכדורים שהוצאו קטן שווה 3?

פתרון

א.

נסמן: X = מספר פעמים לקבל מספר 3.

אם יוצא עץ אז: $X \sim B(3,\ 0.25)$

אם יוצא פלי אז: $X \sim B(2,\ 0.25)$

לכן מתקיים:

$$P(tree\,|\,X=2)=\frac{P(X=2\,|\,tree)P(tree)}{P(X=2)}=\frac{\binom{3}{2}\cdot 0.25^2\cdot 0.75\cdot p}{\binom{3}{2}\cdot 0.25^2\cdot 0.75\cdot p+\binom{2}{2}\cdot 0.25^2\cdot(1-p)}=$$

$$=\frac{\frac{9}{4}p}{\frac{9}{4}p+(1-p)}=\frac{9p}{9p+4(1-p)}$$

$$\frac{9p}{9p+4(1-p)}=0.5 \quad\Rightarrow\quad \frac{9p}{5p+4}=0.5 \quad\Rightarrow\quad 9p=2.5p+2 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{4}{13}=0.3077$$

ב.

אם יוצא עץ מוציאים שלושה כדורים עם החזרה ואפשר לקבל סכום 3 רק אם כולם שווים ל-1. אם יוצא פלי אז מוציאים שני כדורים עם החזרה ויש שתי אפשרויות לקבל סכום 3: המספר הראשון שווה ל-1 והשני שווה ל-2 או להיפך. לכן את ההסתברות המבוקשת ניתן לחשב באופן הבא:

$$0.4\times 0.25^3+0.6\times 2\times 0.25^2=0.0813$$

ג.

אם יוצא עץ אז $X \sim B(3,\ 0.25)$. לכן נקבל:

$$P(X \le 1 | tree) = P(X = 0 | tree) + P(X = 1 | tree) = 0.75^3 + \binom{3}{1} \times 0.25 \times 0.75^2 = \frac{54}{64} = 0.8438$$

ד.

נסמן: $Y=$ מספר פעמים לקבל מספר קטן שווה 3.

אם יוצא עץ אז $Y \sim B(3,\ 0.75)$,

אם יוצא פלי אז $Y \sim B(2,\ 0.75)$.

המספר המקסימלי יהיה קטן שווה מ- 3 אם בכל הוצאה נקבל מספר קטן שווה מ-3.

$$p \cdot P(Y = 3 | tree) + (1 - p) \cdot P(Y = 2 | tree) = 0.4 \cdot 0.75^3 + 0.6 \cdot 0.75^2 = 0.5063$$

שאלה 2 (24 נקודות)

X משתנה מקרי רציף עם פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ax, & 0 \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

נתון: $P(0 < X < 1) = 0.25$

א. חשבו את הערכים של a, b.

ב. מהו החציון של X?

ג. מה ההסתברות ש-X קטן מ- 0.5?

פתרון

א.

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 ax dx = \frac{a}{2} = 0.25 \quad \Rightarrow \quad a = 0.5$$

$$\int_0^b ax dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2}\left[x^2\right]_0^b = 0.25b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

ב.

$$\int_0^m 0.5x dx = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.25\left[x^2\right]_0^m = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.25m^2 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{2}$$

ג.

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} 0.5x dx = 0.25\left[x^2\right]_0^{0.5} = 0.25 \times 0.5^2 = 0.0625$$

שאלה 3 (24 נקודות)

יהי X משך זמן המתנה במרפאה. X הוא משתנה מקרי המתפלג מעריכית עם תוחלת של 15 דקות.

א. מה ההסתברות שזמן ההמתנה יהיה פחות מחצי שעה בהינתן שהוא יותר מרבע שעה?

ב. חשבו את $E(e^{-X})$.

ג. מה ההסתברות שממוצע זמני המתנה של 40 חולים במרפאה יהיה לכל היותר 20 דקות? הניחו כי אין תלות בין זמני המתנה של חולים שונים.

פתרון

$$E(X) = 15 \Rightarrow X \sim \exp\left(\frac{1}{15}\right)$$

א.

$$P(X < 30|X > 15) = \frac{P(15<X<30)}{P(X>15)} = \frac{F(30)-F(15)}{1-F(15)} = \frac{1-e^{-\frac{1}{15}\cdot 30}-\left(1-e^{-\frac{1}{15}\cdot 15}\right)}{e^{-\frac{1}{15}\cdot 15}} = \frac{e^{-1}-e^{-2}}{e^{-1}} =$$

$$0.6321$$

ב.

מנוסחת השונות :

$$E(e^{-X}) = \int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx = \frac{1}{15}\int_0^\infty e^{-\frac{16}{15}x}dx =$$

$$= \frac{1}{15}\cdot\frac{15}{16}\int_0^\infty \frac{16}{15}e^{-\frac{16}{15}x}dx = \frac{1}{16}$$

המעבר האחרון : $\int_0^\infty \frac{16}{15}e^{-\frac{16}{15}x}dx = 1$ אינטגרל של פונקציית צפיפות של משתנה מקרי $\exp\left(\frac{16}{15}\right)$.

ג.

יהיו X_i , i=1,..,40 , זמני המתנה של 40 החולים. X_i בלתי תלויים.

מהנתון : $X_i \sim \exp\left(\frac{1}{15}\right)$, $E(X_i) = 15$, $Var(X_i) = 225$,

נסמן $\bar{X}$ ממוצע זמני המתנה של 40 חולים.

$$E(\bar{X}) = 15, \qquad Var(\bar{X}) = \frac{225}{40}$$

X_i משתנים מקריים בלתי תלויים מאותה התפלגות, לכן , לפי משפט הגבול המרכזי $\bar{X}$ מתפלג בקירוב נורמלית עם תוחלת השווה ל- 15 דקות ושונות השווה ל-$\frac{225}{40}$ דקות.

$$P(\bar{X} \le 20) = \Phi\left(\frac{20-15}{\sqrt{\frac{225}{40}}}\right) = \Phi(2.11) = 0.9826$$

ההסתברות שממוצע זמן המתנה של 40 חולים במרפאה יהיה לכל היותר 20 דקות היא 0.9826.

שאלה 4 (20 נקודות)

משך הזמן שמכונה אורזת קופסת רכיבים מתפלג נורמלית עם תוחלת 40 שניות וסטיית תקן של 5 שניות.

מהנדס המפעל מציע לרכוש מכונה חדשה עבורה תוחלת משך הזמן לאריזת קופסא אמורה להיות 37 שניות עם סטיית תקן של 5 שניות. הוחלט לבדוק משך זמן אריזה של 36 קופסאות במכונה החדשה ואז, אם ממוצע משך זמן אריזה לקופסא יהיה קטן מהערך הקריטי c, ירכשו את המכונה החדשה.

א. (6 נקי) נסחו שתי השערות.

ב. (7 נקי) מהו הערך הקריטי עבור מבחן ברמת מובהקות של 5%?

ג. (7 נקי) מהי עוצמת המבחן?

פתרון

נגדיר: T = משך זמן לאריזת קופסת רכיבים, $T \sim N\left(\mu,\, 5^2\right)$

א.

$$H_0:\ \mu = 40$$
$$H_0:\ \mu = 37$$

ב.

נדחה את השערת האפס אם $\bar{X}_{36} < c$. $\quad \bar{X}_{36} \sim N\left(\mu,\, \frac{5^2}{36}\right)$

$$\alpha = P\left(\bar{X}_{36} < c\,; H_0\right) = 0.05$$

$$P_{\mu=40}\left(\bar{X}_{36} < c\right) = \Phi\left(\frac{c-40}{5/6}\right) = 0.05 \ \Rightarrow\ \Phi\left(-\frac{c-40}{5/6}\right) = 0.95 \ \Rightarrow\ -\frac{c-40}{5/6} = 1.645 \ \Rightarrow\ c = 38.63$$

ג.

$$1-\beta = P_{\mu=37}\left(\bar{X}_{36} < 38.63\right) = \Phi\left(\frac{38.63-37}{5/6}\right) = \Phi\left(1.96\right) = 0.975$$