

המחלקה למדעי היסוד - מתמטיקה  
Department of Basic Sciences

חדו"א 2

תרגיל מספר 2 - טורי חזקות

**שאלה 1**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$$

נתון טור חזקות :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$  מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. ( כולל בדיקת הקצוות ).

**שאלה 2**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\ln n}$$

נתון הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\ln n}$  מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור. מצאו את התחום המקסימלי שבו הטור מתכנס בהחלט. האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההיתכנסות ?

**\*\* שאלה 3**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{n^2}$$

נתון הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{n^2}$  מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות). האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההיתכנסות?

**שאלה 4**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} (2x+1)^n$$

מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא :

**שאלה 5**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

ידוע שטור החזקות  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$  מתכנס לכל  $x \in (-1, 1]$  וסכומו שווה ל-

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

מצאו קירוב של  $\ln 1.2$ , כך שהשגיאה לא תעלה על  $10^{-4}$ .

פתרו את השאלה בשתי דרכים :

א. בעזרת הערכה של השארית בצורת Lagrange.

ב. בעזרת טור Leibnitz מתאים.

**\*\* שאלה 6**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$$

נתון הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$  מצאו את תחום ההתכנסות של הטור. (כולל בדיקת הקצוות). האם הטור מתבדר/ מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט עבור  $x = -1$  או  $x = 5$  ? מצאו את סכום הטור עבור  $x = 5$ .

## שאלה 7

מצאו את הסכום של הטורים : 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$  2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n+n!)}{(n+1)!}$

## שאלה 8

נתון הטור  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{n} + 1 \right) x^n$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.  
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?  
ב. מצאו את סכום הטור עבור כל  $|x| < 1$  ששיך לתחום ההתכנסות.

ג. מצאו טור Leibnitz שמתכנס לאינטגרל  $\int_0^{1/2} S(x) dx$

## \*\* שאלה 9

נתון הטור  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{6^n n} x^n = \frac{1}{6} x - \frac{1}{72} x^2 + \frac{1}{648} x^3 - \dots$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.  
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?  
ב. מצאו את סכום הטור עבור כל  $x$  ששיך לתחום ההתכנסות.

ג. מצאו טור Leibnitz שמתכנס ל-  $I = \int_0^1 S(x) dx$  ונמקו למה המספר  $\frac{1}{6 \cdot 2} - \frac{1}{36 \cdot 6} = \frac{17}{216}$

מהווה קרוב של האינטגרל  $I$ .

## שאלה 10

נתון הטור  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n!} \right) \frac{x^n}{2^n}$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות של הטור.  
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?  
ב. מצאו את סכום הטור עבור כל  $0 < x < 2$ .

ג. מצאו טור מספרי שמתכנס לאינטגרל  $\int_0^1 S(x) dx$

## שאלה 11

נתון הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots$

- א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.  
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל-  $\frac{\ln(1+x)}{x}$  , לכל  $0 < |x| < 1$

ג. בדקו ש-  $\left| \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx - \frac{31}{36} \right| < 0.0625$

## **\*\* שאלה 12**

נתון הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^3}{4! \cdot 3} - \frac{x^4}{6! \cdot 4} \pm \dots$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל-  $f(x) = \int_0^x \cos(\sqrt{t}) dt$ , לכל  $x > 0$ .

ג. הוכיחו ש-  $\left| \int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt - \frac{55}{72} \right| \leq \frac{1}{6! \cdot 4} = \frac{1}{2880}$

ז"א המספר  $I = \frac{55}{72}$  מהווה קירוב של האינטגרל  $\int_0^1 \cos(\sqrt{t}) dt$  והשגיאה לא עולה על  $\frac{1}{2880}$ .

## **\*\* שאלה 13**

נתון הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2n+1} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \dots$

א. מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור.

האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ?

ב. הוכיחו שסכום הטור שווה ל-  $\frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ , לכל  $0 < x \leq 1$ .

ג. בדקו האם  $\left| \int_0^1 \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx - \frac{76}{105} \right| < 0.1111\dots$

## **שאלה 14**

א. מצאו את תחום ההתכנסות של טור החזקות הבא:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}}$

חקרו את ההתנהגות של הטור בקצוות של תחום ההתכנסות.

ב. נסמן  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{3n+1}}$ , לכל  $-1 < x < 0$ . מצאו סדרה של מספרים ממשיים  $(a_n)_{n \geq 0}$

כך שהנגזרת של  $f(x)$  שווה ל-  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( x + \frac{1}{2} \right)^n$

## **שאלה 15**

נתון הטור חזקות הבא:

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  (לכל  $x \in [-1, 1]$ )

חשב את הסכום של הטור הבא:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \left( \frac{1}{3} \right)^{2n-1}$

\*\*\*\* התרגילים המסומנים עם 2 כוכביות הם ללימוד עצמי.