מרצים: פרופסור יוני סטאנצ'סקו, ד"ר דבורה קפלן

מתרגלים: מר בועז וינר, גב' אירנה נמירובסקי, גב' נטליה גרינשטין

מבחן X

פתרון

שאלה 1 - (20 נק')

א.(15נק') מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^2}\right)(x-3)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

ב. (5 נק') נסמן ב - $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^2}\right)(x-3)^n=S(x)$. מצאו טור מספרי המתכנס למספר $S'(3.5)$

(כלומר לערך של הנגזרת הראשונה בנקודה $x=3.5$).

פתרון:

א:

מציאת הרדיוס:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+2}{n^2}\right|}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{(1+\frac{2}{n})}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}=\frac{1}{1}\to R=1$$

$x_0=3$ ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל x השייך לקטע $(2,4)$ ומתבדר לכל $x\notin[2,4]$.

בקצוות: $\boxed{x=4}\leftarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^2}\right)$. זהו טור **מתבדר**, על פי **מבחן השוואה השני** עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

שני הטורים חיובים ומתקיים שהגבול הבא סופי ושונה מ-0: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n+2}{n^2}}{\frac{1}{n}}\right)=1$.

$\boxed{x=2}\leftarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^2}\right)(-1)^n$, זהו טור <u>**מחליף סימן שמקיים את תנאי ליבניץ**</u> <u>**(נבדוק בהמשך) לכן**</u>

<u>**מתכנס:**</u>

הסדרה $b_n = \dfrac{n+2}{n^2}$ היא לא שלילית, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right) = 0$, ובנוסף היא

סדרה יורדת : $b_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} = b_n$ לכל n טבעי.

לכן הטור מתכנס אבל ההתכנסות היא " בתנאי" כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\dfrac{n+2}{n^2}\right)(-1)^n\right|$ הוא

טור מתבדר (נשאר אותו טור כמו בקצה השני) .

ב :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^2}\right)(x-3)^n = S(x) \Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^2}\right)n(x-3)^{n-1} = S'(x)\\ x\in(2,4)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)(3.5-3)^{n-1} = S'(3.5)\\ x = 3.5\end{cases} \Rightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\,2^{n-1}} = S'(3.5)\right.$$

<u>שאלה 2 - (20 נק')</u>

נתונה פונקציה $z = f(x,y)$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2$. נגדיר פונקציה g באופן הבא : $g(t) = f(t^3+1,\ \sin t)$.

ידוע כי $g'(0) = 2$ ובנוסף $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) = 0$ עבור הוקטור $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

א. (12 נק') מצאו את $\vec{\nabla} f(1,0)$.

ב. (8 נק') האם קיים וקטור $\vec{s}$ בעל נורמה 1 עבורו מתקיים $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1,0) = 3$?

(<u>נמקו היטב את התשובה</u>).

<u>פתרון :</u>

א. הפונקציות $x(t)=t^3+1$ ו $y(t)=\sin t$ הן גזירות ב $t=0$ ו - f היא דיפרנציאבילית בנקודה $(x(0),y(0))=(1,0)$ ולכן קיימת הנגזרת של g ב-0 ומתקבלת על ידי כלל השרשרת באופן הבא :

$$2=\frac{dg}{dt}(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{dx}{dt}(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\frac{dy}{\partial t}(0)=0\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+1\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$$

פה השתמשנו בנגזרות :

$$x'(t)=3t^2\to x'(0)=0$$
$$y'(t)=\cos t\to y'(0)=1$$

קבלנו : $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=2$.

בנוסף על פי הדיפרנציאביליות של f בכל נקודה, והנתונים, נובע :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0)=0=\vec{\nabla} f(1,0)\bullet\vec{v}=\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=-\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-2}$$

מסקנה : $\vec{\nabla} f(1,0)=(-2,2)$.

ב. הפונקציה f היא דיפרנציאבילית בנקודה $(1,0)$ ואז הנגזרת הכיוונית הכי גדולה מכולן היא בכיוון של הוקטור $\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}f(1,0)}{\left\|\vec{\nabla}f(1,0)\right\|}=\frac{(-2,2)}{\sqrt{8}}=\left(\frac{-2}{\sqrt{8}},\frac{2}{\sqrt{8}}\right)$, והערך של הנגזרת הכיוונית בכיוון הזה שווה ל- $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(1,0)=\left\|\vec{\nabla}f(1,0)\right\|=\sqrt{8}<3$, ולכן **<u>לא קיים</u>** וקטור $\vec{s}$ בעל נורמה 1 כך ש $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(1,0)=3$.

<u>שאלה 3 - (20 נק')</u>

נתונה הפונקציה $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+2y^2-2x+2y-2xy$.

א. (8 נק') מצאו את הנקודות הקריטיות של f וסווגו אותן.

ב. (12 נק') מצאו את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של f בתחום :

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 2,\ -x\le y\le x\right\}$.

<u>פתרון:</u>

א) הנקודות הקריטיות הן המאפסות את הנגזרות החלקיות (כי הנגזרות מוגדרות בכל נקודה).

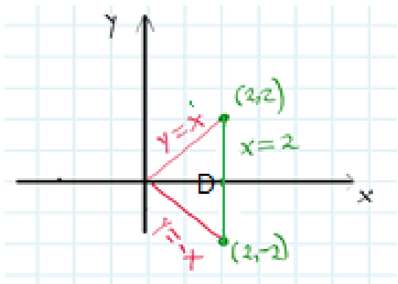
$$\begin{cases} f_x = 2x-2y-2=0 \\ f_y=-2x+4y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (x,y)=(1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}&=2>0 \\ f_{xy}&=-2 \\ f_{yy}&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4>0$$

הנקודת הקריטית היחידה $(1,0)$ ובה יש מינימום מקומי.

הערה : יכולנו לסווג לפי הדטרמיננטה של המטריצה ההסיאנית כי לפונקציה יש נגזרות עד סדר 2 כולן רציפות בסביבה של הנקודה הקריטית.

ב) הפונקציה רציפה כפולינום בכל נקודה, והתחום D חסום (D מוכל בעיגול עם מרכז הראשית ורדיוס5) וסגור (מכיל את השפה) ולכן יש ל f מקסימום ומינימום מוחלטים בתחום D לפי משפט וירשטרס .



נמצא ערכים חשודים לקיצון מוחלט :

1) מהפנים יש רק נקודה קריטית אחת : $(1,0)$, ולכן $\boxed{f(1,0)=-1}$ הוא הערך החשוד היחיד מהפנים (בעצם חשוד למינימום מוחלט כי יש פה מינימום מקומי) .

2) נלמד את השפה : נמצא מקסימום ומינימום בכל עקומה שמרכיבה את השפה.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=f(x,x)=x^2 \\ 0\le x\le 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \min = f(0,0)=0, \quad \max = f(2,2)=4$$

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=f(x,-x)=5x^2-4x \\ 0\le x\le 2 \\ h'(x)=10x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5} \\ h(0)=0; \quad h(2)=12; \ h(\frac{2}{5})=\frac{-4}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \min = f\left(\frac{2}{5},\frac{-2}{5}\right)=\frac{-4}{5}, \quad \max = f(2,-2)=12$$

$$\left.\begin{array}{l} t(y)=f(2,y)=2y^2-2y \\ -2\le y\le 2 \\ t'(y)=4y-2=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \\ t(-2)=12; \quad t(2)=4 \\ t(\frac{1}{2})=\frac{-1}{2} \end{array}\right\} \min = f(2,\frac{1}{2})=\frac{-1}{2}, \quad \max = f(2,-2)=12$$

3) נשווה את הערכים מהפנים ומהשפה : הכי גדול הוא $f(2,-2)=12$ ואז הוא המקסימום המוחלט ב D והכי קטן הוא $f(1,0)=-1$ ואז הוא המינימום המוחלט ב D .

<u>שאלה 4 - (20 נק')</u>

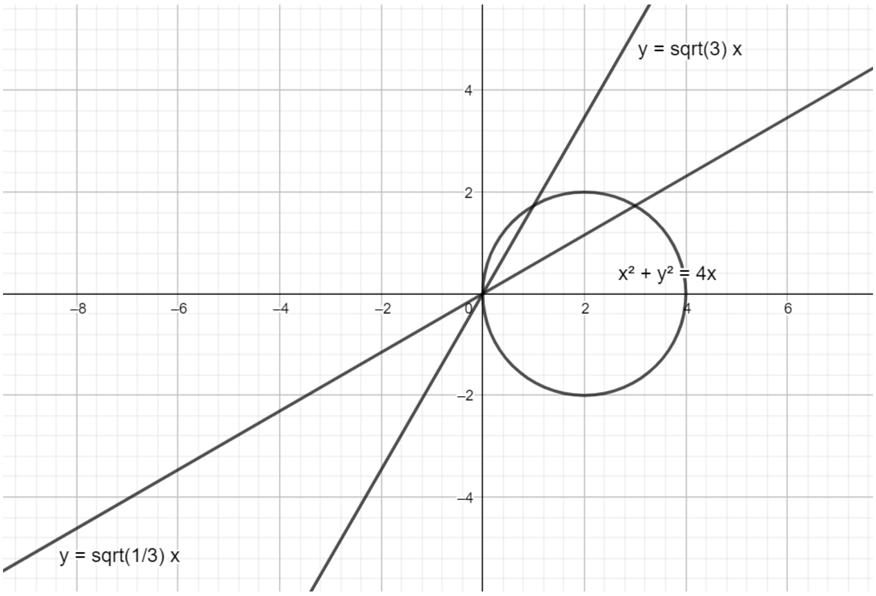
מצאו , בעזרת שימוש באינטגרל כפול, את שטח התחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$ החסום על ידי המעגל $x^2+y^2=4x$ והישרים $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$.

רמז : $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; $\tan(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

<u>פתרון :</u>

השטח של התחום שווה לאינטגרל הכפול : $AREA(D)=\iint\limits_D 1dA$

$$x^2+y^2\le 4x \Leftrightarrow x^2-4x+y^2\le 0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2\le 4 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\le 4$$



נחשב את האינטגרל הכפול בעזרת החלפת משתנים לקאורדינטות קוטביות :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ J = r \end{cases}$$

הנקודות עם זווית הכי קטנה θ_1 נמצאות על הישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ (ו x לא שלילי באזור שלנו) : לכן

$$\theta_1=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

הנקודות עם זוית הכי גדולה θ_2 נמצאות על הישר $y=\sqrt{3}x$ (ו x לא שלילי באזור שלנו) לכן :

$$\theta_2=\arctan\frac{y}{x}=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

לכן מקבלים ש $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$.

$$x^2+y^2\le 4x \Leftrightarrow r^2\le 4r\cos\theta \Leftrightarrow r\le 4\cos\theta$$

לכן מקבלים (לפי משפט פוביני) : $0\le r\le 4\cos\theta$

$$AREA(D)=\iint\limits_{D}1\,dA=\iint\limits_{D^*}|J|\,dA=\iint\limits_{D^*}r\,dA=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int\limits_{0}^{4\cos\theta}r\,dr\right)d\theta=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{4\cos\theta}\right)d\theta=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}8\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}4(1+\cos(2\theta))\,d\theta=\left(4\theta+2\sin(2\theta)\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}+0=\frac{2\pi}{3}$$

<u>שאלה 5 - (20 נק׳)</u>

נתון השדה הוקטורי במישור : $\vec{F}(x,y)=\left(e^{2x+y}(2x+1)\ ,\ x\,e^{2x+y}\right)$.

א. (8 נק׳) האם השדה $\vec{F}$ הוא שדה משמר ב- $\mathbb{R}^2$?

ב. (12נק׳) חשבו את העבודה של השדה $\vec{F}$ על חלקיק הנע לאורך עקומה C, כאשר C הינה החלק של גרף הפונקציה $y=\arcsin x$ מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(1,\frac{\pi}{2})$.

<u>פתרון</u> :

א.

$$\begin{cases}P(x,y)=e^{2x+y}(2x+1)\\ Q(x,y)=x\cdot e^{2x+y}\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&P_y(x,y)=e^{2x+y}(2x+1)\\&P_x(x,y)=e^{2x+y}(4x+4)\\&Q_x(x,y)=e^{2x+y}+x\cdot e^{2x+y}\cdot 2=e^{2x+y}(2x+1)\\&Q_y(x,y)=e^{2x+y}x\end{aligned}\right.$$

נשים לב ש- : $P_y(x,y)=Q_x(x,y)=e^{2x+y}(2x+1)$

<u>ואז מתקיים</u> : לרכיבי השדה יש נגזרות חלקיות רציפות ב- $\mathbb{R}^2$ (**תחום פשוט קשר כמובן**) ובנוסף $Q_x(x,y)=P_y(x,y)$ בכל נקודה ולכן $\vec{F}$ **הוא כן שדה משמר ב - $\mathbb{R}^2$.**

ב. השדה הוא משמר לכן נמצא פונקציית פוטנציאל $\varphi(x,y)$ המקיימת : $\vec{F}(x,y)=\vec{\nabla}\varphi(x,y)$ לכל נקודה ב- $\mathbb{R}^2$

כלומר: $\varphi_y=Q \quad \varphi_x=P$.

$$\varphi_y = Q \Rightarrow \varphi(x,y) = \int Q(x,y)\,dy = \int e^{2x+y} x\,dy = e^{2x+y}x + C(x)$$

$$\varphi_x = P \Rightarrow e^{2x+y}2x + e^{2x+y} + C'(x) = e^{2x+y}(2x+1) \Rightarrow C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = K$$

$$\varphi(x,y) = e^{2x+y}x + K$$

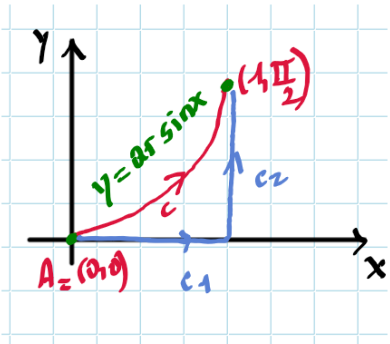
ניעזר בפונקצית הפוטנציאל אשר חישבנו כדי לחשב את האינטגרל הקווי :

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(1,\frac{\pi}{2}) - \varphi(0,0) = e^{2+\frac{\pi}{2}}.$$

<u>הערה: היינו יכולים לפתור את סעיף ב. על ידי שינוי המסלול:</u>

השדה הוא משמר ולכן חישוב העבודה אינו תלוי במסלול המחבר את שתי הנקודות הנתונות .

נחשב את האינטגרל על העקומה אשר מתחילה בנקודה $(0,0)$ ומסתיימת בנקודה $(1,\frac{\pi}{2})$ שמוגדרת כאיחוד של שתי עקומות מקבילות לצירים.



$$\int_C e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy = \int_{C_1} e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy + \int_{C_2} e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy$$

1. הצגה פרמטרית של העקומה C_1 :

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\int_{C_1} e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy = \int_0^1 (e^{2t}(2t+1)\cdot 1 + t\cdot e^{2t}\cdot 0)dt = \int_0^1 e^{2t}(2t+1)dt = \begin{Bmatrix} u=2t+1 & u'=2 \\ v'=e^{2t} & v=\frac{e^{2t}}{2} \end{Bmatrix} =$$

$$= (2t+1)\frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2t}}{2}2dt = 3\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^1 = 3\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = e^2$$

2.

הצגה פרמטרית של עקומה C_2 :

$$C_2: \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ 0\le t\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_{C_2} e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2+t}(2+1)\cdot 0 + 1\cdot e^{2+t}\cdot 1)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2+t}dt = e^{2+t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{2+\frac{\pi}{2}} - e^2$$

לסיכום :

$$\int_C e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy = \int_{C_1} e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy + \int_{C_2} e^{2x+y}(2x+1)dx + x\cdot e^{2x+y}dy =$$

$$= e^{2+\frac{\pi}{2}} - e^2 + e^2 = e^{2+\frac{\pi}{2}}$$

<u>שאלה 6 - (20 נק׳)</u>

חשבו את שטף השדה $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}$ דרך המשטח Σ המוגדר באופן הבא :

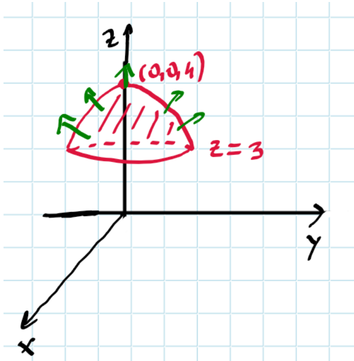
$\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2,\ z\ge 3\}$. כיוון הנורמליים למשטח הוא ״כלפי מעלה״

כלומר לכיוון החיובי של ציר $\overrightarrow{OZ}$.

<u>הערה</u> : המשטח Σ **<u>פתוח</u>** מלמטה .

<u>פתרון :</u>

בציור מופיע המשטח :



נחשב את השטף $\Phi\left(\vec{F}\right)=\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot n\,dS$ כאשר Σ הוא המשטח הנתון.

לרכיבי השדה $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+2\vec{k}$ יש נגזרות החלקיות רציפות ב- $\mathbb{R}^3$.

ואז : נוכל להשתמש במשפט גאוס אם נסגור את המשטח (פרבולואיד) על ידי העיגול $\Sigma_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=3\,,\,x^2+y^2\le 1\right\}$ ונתן מכוון כלפי חוץ למשטח הסגור. (החיתוך של המשטח הנתון והמישור $z=3$ הוא המעגל $x^2+y^2=1$) .

ואז נתבונן במשטח הסגור $\Sigma\cup\Sigma_1$, שהוא חלק למקוטעין, עם כיוון הוקטורים הנורמלים כלפי חוץ, ונסמן ב G ה

$$\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+2\vec{k}\quad\Rightarrow\quad P(x,y,z)=x,\quad Q(x,y,z)=y,\quad R(x,y,z)=2$$

$$\Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1}\left(\vec{F}\right)=\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}\vec{F}\cdot n\,dS=\iiint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iiint\limits_{G}(1+1+0)\,dV=\iiint\limits_{G}2\,dV$$

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x=r\cos\theta\,,\;y=r\sin\theta\,,\;z=z,\quad J=r$$

$$\Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1}\left(\vec{F}\right)=\iiint\limits_{G}2\,dV=2\iiint\limits_{G}dV=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_3^{4-r^2}r\,dz=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\cdot z\Big|_3^{4-r^2}dr=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(r-r^3\right)dr=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\theta=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\theta=\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi}=\pi$$

נמצא את השטף דרך העיגול Σ_1 :

$$z=3,\quad \vec{n}=-\vec{k}$$

$$\Phi_{\Sigma_1}\left(\vec{F}\right) = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot n \, dS = \iint_{\Sigma_1} \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}\right)\left(-\vec{k}\right) dS = \iint_{\Sigma_1} (-2)\, dS = -2\iint_{\Sigma_1} 1\, dS = \begin{bmatrix} r = 1 \\ S = \pi r^2 \end{bmatrix} = -2\pi$$

השטף הנדרש הוא :

$$\Phi_{\Sigma}\left(\vec{F}\right) = \Phi_{\Sigma \cup \Sigma_1}\left(\vec{F}\right) - \Phi_{\Sigma_1}\left(\vec{F}\right) = \pi - (-2\pi) = 3\pi$$