אפקה המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב
AFEKA TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING

מס' נבחן

שם הקורס: מבוא להסתברות

קוד הקורס: 90911

הוראות לנבחן:
-חומר עזר שימושי לבחינה: דפי נוסחאות מצורפים לבחינה
-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
-אין להשתמש בטלפון סלולארי
-אין להשתמש במחשב אישי או נייד
-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: 2018 ב'
השנה: תשע"ח
מועד: א'
תאריך הבחינה: 2/7/18
שעת הבחינה: 17:00
משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר חנה קלבנר,
ד"ר מאיר אזור,
ד"ר לובה טטראשווילי,
ד"ר אלכס סגל

*** שאלון הבחינה לא ייבדק ע"י המרצה, לא ייסרק ולא יישמר ***

*** לא יינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה ***

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לענות על כל השאלות, משקל כל שאלה רשום ליד השאלה.

יש לנמק היטב את הפתרון. תשובה לא מנומקת לא תזכה במלוא הניקוד.

כל שאלה להתחיל בעמוד חדש: יש לציין את מספר השאלה, ויש לציין את מספר הסעיף אותו פותרים.

שאלה 1 (20 נקודות: סעיף א' – 6 נק', סעיף ב' – 7 נקודות, סעיף ג' – 7 נק')

קופסא מכילה 3 כדורים לבנים ושניים שחורים. מוציאים מהקופסא כדור ראשון באקראי. אם יצא כדור לבן משאירים אותו מחוץ לקופסא, ואם יצא כדור שחור מחזירים אותו לקופסא ומוסיפים כדור לבן. כעת מוציאים מהקופסא כדור שני.

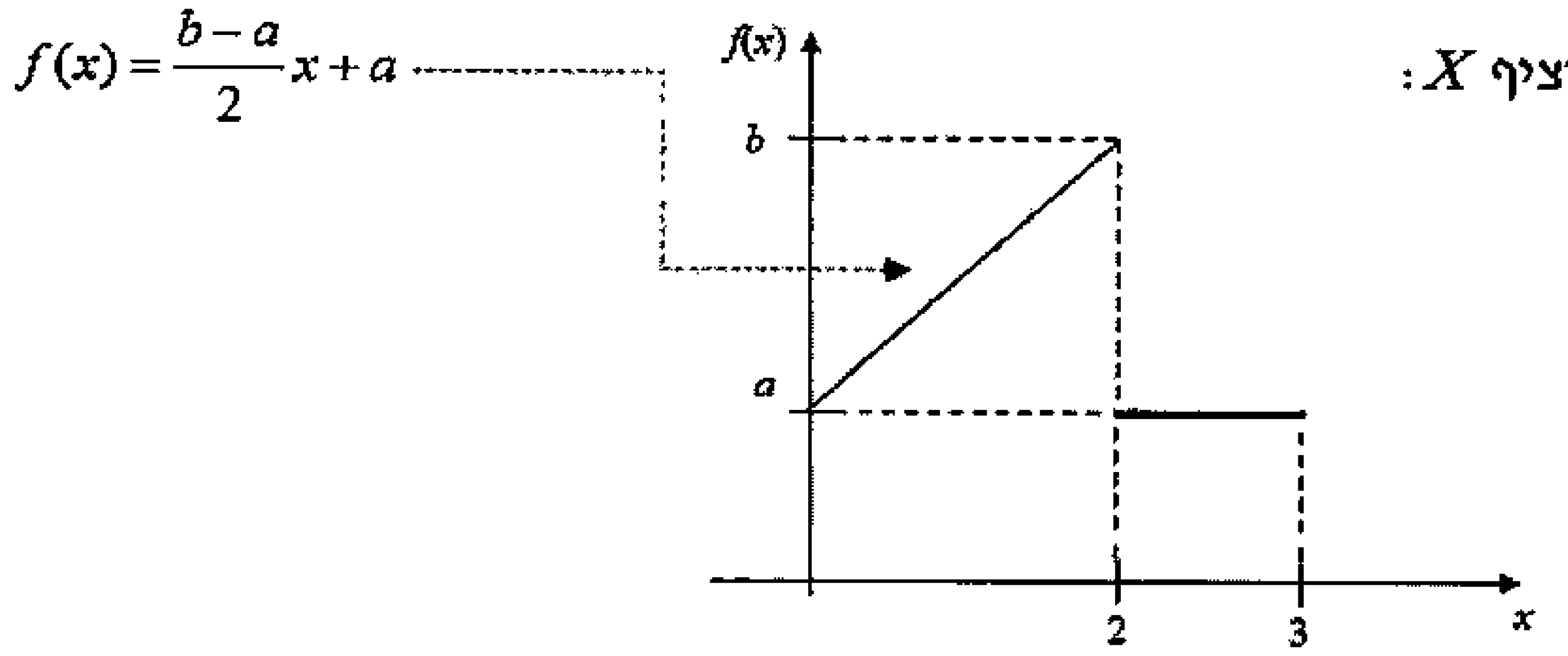
א. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם לבנים?

ב. אם הכדור השני שהוצא הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור הראשון שהוצא היה שחור?

ג. מהקופסא המקורית מוציאים כדורים עם החזרה עד שנוציא 5 כדורים שחורים. מה ההסתברות שנוציא 12 כדורים?

שאלה 2 (32 נקודות – כל סעיף 8 נק')

נתונה פונקציית הצפיפות של מ"מ רציף X:



א. נתון: $P(X\le 2)=4P(X>2)$. חשבו את הערכים של a, b.

ב. חשבו את התוחלת של X.

ג. חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F(x)$.

ד. חשבו את ההסתברות: $P(X<2.5/X>1)$.

שאלה 3 (48 נקודות – כל סעיף 8 נק')

חברה למכירת מכשיר חשמלי מפעילה שירות טלפוני. 40% מהלקוחות המתקשרים לחברה מעוניינים ברכישת מכשיר חדש וזמן השיחה מתפלג נורמלית עם תוחלת 5 דקות וסטיית תקן 7 דקות. 60% מהלקוחות מתקשרים בנוגע לשאלות לגבי מכשיר שרכשו וזמן השיחה מתפלג מעריכית עם תוחלת 8 דקות.

א. מה ההסתברות שזמן שיחה של לקוח אקראי ארכה מעל 6 דקות?

ב. מהי תוחלת זמן שיחה ללקוח אקראי?

ג. מהי שונות זמן שיחה ללקוח אקראי?

ד. 64 לקוחות התקשרו ביום מסוים. מה ההסתברות שממוצע משך זמן השיחה הוא מעל 6 דקות?

ה. 64 לקוחות התקשרו ביום מסוים. מה ההסתברות שלפחות 40 מהם היו בשיחה שארכה מעל 6 דקות?

ו. איש שירות שעונה לשיחה מקבל תשלום של 35 ₪ אם השיחה ארכה לכל היותר 6 דקות, ותשלום של 30 ₪ אם השיחה ארכה מעל 6 דקות. מהו ממוצע תשלום לאיש שירות עבור שיחה אקראית?

בהצלחה!

נוסחאות עזר – מבוא להסתברות

חוקי הפילוג: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

חוקי דה מורגן: $\overline{(\bigcup_i A_i)}=(\bigcap_i \overline{A_i})$ $\quad$ $\overline{(\bigcap_i A_i)}=(\bigcup_i \overline{A_i})$

A, B **מאורעות זרים** אם $A\cap B=\phi$,

סדרת מאורעות תקרא **זרים בזוגות** אם **כל** זוג מאורעות מתוכה הם זרים.

חוקי ההסתברות: $P\{\overline{A}\}=1-P\{A\}$; $P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}$

אם: $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ סדרת מאורעות **זרים בזוגות** אז: $P\{\bigcup_{i=1}^{n} Ai\}=\sum_{i=1}^{n}P\{Ai\}$

נוסחת **התכלה וההוצאה** (inclusion exclusion):

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C\cup D)&=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-\\&-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-P(B\cap D)-P(C\cap D)+\\&+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P\{A\cap C\cap D\}+P(B\cap C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

כללים קומבינטוריים:

כלל המכפלה: אם ניסוי ניתן להצגה כמתבצע ב n שלבים, ובשלב k יש n_k תוצאות אפשריות וסימטריות, ואם מרחב המדגם מוגדר כוקטורים באורך n כאשר הרכיב ה k שלו הוא תוצאת השלב ה k, אז במרחב המדגם יש $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ תוצאות אפשריות סימטריות.

מספר האפשרויות לדגימה של k מתוך n איברים:

	התחשבות בסדר הדגימה	ללא התחשבות בסדר
עם החזרה	n^k	(מרחב מדגם לא סימטרי)
ללא החזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

הסתברות מותנית: $P\{A/B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$, **נוסחת הכפל**: $P\{A\cap B\}=P\{A\}P\{B/A\}$

נוסחת ההסתברות השלמה:

אם: $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של מרחב המדגם, אז: $P\{A\}=\sum_{i=1}^{n}P\{A/Bi\}P\{Bi\}$

נוסחת בייס: $P\{B_k/A\}=\frac{P\{A/B_k\}P\{B_k\}}{P\{A\}}$ כאשר: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P\{A/B_i\}P\{B_i\}$

אי תלות: A ו B הם מאורעות **בלתי תלויים** אם מתקיים: $P\{A/B\}=P(A)$ או $P\{A\cap B\}=P(A)P(B)$
קבוצת מאורעות הם בלתי תלויים אם כל קבוצה חלקית שלהם מקיימת שהסתברות החיתוך שלהם שווה למכפלת ההסתברויות.

סדרת ניסויי ברנולי: סדרת ניסויים זהים ובלתי תלויים, כשבכל ניסוי שתי תוצאות אפשריות: הצלחה וכשלון, וכאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p.

משתנים מקריים:

משתנה מקרי בדיד: פונקצית ההסתברות: $P(X=k)$ פונקצית ההתפלגות המצטברת: $F(k)=P(X\le k)$

התוחלת של X: $E[X]=\sum_k k\cdot P\{X=k\}$; התוחלת של פונקציה של X, g(X) היא: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P\{X=k\}$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בעל ההסתברות הגבוהה ביותר, **החציון** הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (בדידים) מיוחדים:

אחיד (בדיד): X~U(N), מתאר משתנה המקבל את הערכים: 1,2,...,N בהסתברויות שוות.

עבור משתנה זה: $V[X]=\frac{N^2-1}{12}$; $E[X]=\frac{N+1}{2}$; $k=1,2,\dots,N$; $P\{X=k\}=\frac{1}{N}$

בינומי: $X\sim B(n,p)$, מתאר את מספר **ההצלחות** ב- n ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה: $V[X]=npq$; $E[X]=np$; $k=0,1,\dots,n$; $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

גיאומטרי: $X\sim G(p)$, מתאר את מספר הניסויים **עד** להצלחה (כולל) בסדרת ניסויי ברנולי.
עבור משתנה זה:

$P(X=k)=pq^{k-1}$ $k=1,2,\dots$; $P(X\le k)=1-q^k$ $k=1,2,\dots$; $E[X]=\frac{1}{p}$; $V[X]=\frac{q}{p^2}$

היפרגיאומטרי: $X\sim H(N,R,n)$ מתאר את מספר האיברים המיוחדים שיתקבלו בבחירת n איברים ללא החזרה מאוכלוסיה בגודל N שבה R איברים מיוחדים.

עבור משתנה זה:

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad k=0,1,2,\dots n\ ;\quad E(X)=n\frac{R}{N}\ ;\quad V(X)=n\frac{R}{N}\frac{(N-R)}{N}\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

פואסוני: $X\sim Pois(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור מספר אירועים בתחום מוגדר.

עבור משתנה זה: $E(X)=V(X)=\lambda$; $k=0,1,2,\dots$; $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

משתנה מקרי רציף: פונקצית צפיפות: $f(x)$, פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=P\{X\le t\}=\int_{x=-\infty}^{t}f(x)dx\,.$$

התוחלת של X: $E[X]=\int xf(x)dx$; **התוחלת של פונקציה של X**, g(X) היא: $E[g(X)]=\int g(x)f(x)dx$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בו הצפיפות היא מקסימלית, החציון הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (רציפים) מיוחדים:

אחיד (רציף): $X \sim U(a,b)$ מתאר משתנה המקבל ערכים בין a ל- b כך שההסתברות לערך בקטע פרופורציונית לאורך הקטע.

עבור משתנה זה: $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$; $E(X)=\frac{a+b}{2}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$; $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$

מעריכי (אקספוננציאלי): $X \sim \mathrm{ezp}(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור אורך חיי רכיבים ומערכות אלקטרוניות.

עבור משתנה זה: $V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$; $E(X)=\frac{1}{\lambda}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & 0\le x\end{cases}$; $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

נורמלי: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, משמש לצרכים רבים....

עבור משתנה זה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty\le x\le\infty$; $E(X)=\mu$; $V(X)=\sigma^2$

חישוב הסתברויות עבור משתנה זה בעזרת טבלת ההתפלגות המצטברת של המשתנה הסטנדרטי

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, והחישוב מתבצע על ידי: $P\{X\le t\}=P\{Z\le\frac{t-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$,

את הערך $\Phi(t)$ קוראים בטבלה, הוא מקיים: $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

משתנה דו ממדי בדיד: פונקצית ההסתברות המשותפת: $P(X=x_i,Y=y_j)=P_{X,Y}(x_i,y_j)$

פונקצית **ההסתברות השולית** של X: $P_X(k)=P\{X=k\}=\sum_j P\{X=k,Y=j\}$

פונקצית **ההסתברות המותנית** של X בהינתן Y=j: $P_{X/Y}(k/j)=P\{X=k/Y=j\}=\frac{P\{X=k,Y=j\}}{P\{Y=j\}}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $P_{X,Y}(x_i,y_j)=P_X(x_i)P_Y(y_j)$ לכל הערכים האפשריים i ו- j.

משתנה דו ממדי רציף: פונקצית הצפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y)$

פונקצית **הצפיפות השולית** של X: $f_X(x)=\int f_{X,Y}(x,y)dy$

פונקצית **הצפיפות המותנית** של X בהינתן Y=y: $f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ **לכל** הערכים האפשריים x,y.

תכונות התוחלת והשונות:

$$E[aX+b]=aE[X]+b\quad;\quad V[aX+b]=a^2V[X]$$

$$E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]\quad;\quad V[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}V[X_i]+\sum_{i\neq j}^{"n^2-n"}Cov(X_i,X_j)$$

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)\quad;\quad \rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

$$Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y)\ ;\quad Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)$$

סכום מקרי של משתנים מקריים: $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$; $E[S_N]=E[N]E[X]$; $V[S_N]=E[N]V[X]+V[N]E^2[X]$

נוסחת התוחלת השלמה: $E[X]=\sum_j E(X/Y=j)P\{Y=j\}=\sum_j E(X/B_j)P\{B_j\}$

מדגם מקרי פשוט הוא אוסף של מ״מ בלתי תלויים, לכולם אותה התפלגות.

ממוצע המדגם הוא: $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, והוא מקיים: $V[\overline{X_n}]=\frac{V[X]}{n}$; $E[\overline{X_n}]=E[X]$

אי שוויונים וחוקי גבול:

אי שוויון מרקוב: אם X משתנה מקרי אי שלילי ולו תוחלת E[X] אז קיים: $P\{X\geq t\}\leq\frac{E[X]}{t}$.

אי שוויון צ'בישב: אם X משתנה שלו תוחלת E[X] ושונות V (X) אז קיים: $P\{|X-E[X]|\geq t\}\leq\frac{V[X]}{t^2}$

(ה)חוק (החלש של) המספרים הגדולים: כאשר n שואף לאינסוף, ממוצע המדגם שואף לתוחלת המשתנה.

משפט הגבול המרכזי: עבור מדגם מקרי פשוט קיים, עבור n מספיק גדול ($n\geq 30$):

אם X משתנה מקרי עם תוחלת $E(X)=\mu$ ושונות $V(X)=\sigma^2$ אזי:

$$\overline{X_n}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

קרוב נורמלי למשתנה בינומי: עבור X משתנה בינומי: $X\sim B(n,p)$

כאשר n מספיק גדול, כך ש: $np>5$ וגם: $nq>5$, מתקיים: $X\sim N(np,npq)$

תיקון רציפות: $P\{X<k\}=\Phi\left(\frac{k-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$; $P\{X\leq k\}=\Phi\left(\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$

ומספר נוסחאות מתמטיות לסיום:

- טור חשבוני (אריתמטי):

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} \qquad ; \qquad a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

ולדוגמא סכום המספרים הטבעיים הוא:

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{(1+n)\cdot n}{2}.$$

- טור הנדסי (גיאומטרי):

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a\frac{(1-q^n)}{1-q} \qquad ; \qquad a_n=a\cdot q^{n-1}$$

ובפרט כאשר $0\leq q<1$

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i=a\frac{1}{1-q}$$

Table of Normal Commulative Distribion Function

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

$\phi(Z)$	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995	0.999
z	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090

פתרון

פתרון מועד א
909M

מבוא להסתברות

פתרון בחינה

שאלה 1 (20 נקודות)

קופסא מכילה 3 כדורים לבנים ושניים שחורים. מוציאים מהקופסא כדור ראשון באקראי. אם יצא כדור לבן משאירים אותו מחוץ לקופסא, ואם יצא כדור שחור מחזירים אותו לקופסא ומוסיפים כדור לבן.
כעת מוציאים מהקופסא כדור שני.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם לבנים?

ב. אם הכדור השני שהוצא הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור הראשון שהוצא היה שחור?

ג. מהקופסא המקורית מוציאים כדורים עם החזרה עד שנוציא 5 כדורים שחורים. מה ההסתברות שנוציא 12 כדורים?

פתרון

א.

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=0.3$$

ב.

נגדיר: W2 = כדור שני לבן, B1 = כדור ראשון שחור

$$P(B1|W2)=\frac{P(B1\cap W2)}{P(W2)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}}=\frac{8}{17}$$

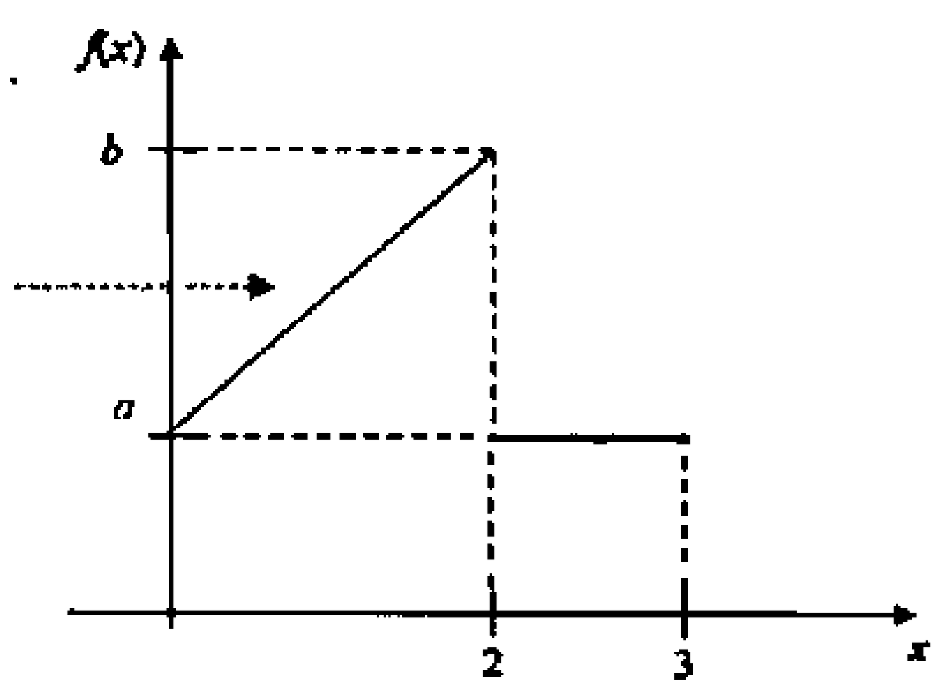
ג.

$$\binom{11}{4}\times 0.4^4\times 0.6^7\times 0.4=0.0946$$

שאלה 2 (32 נקודות)

נתונה פונקציית הצפיפות של מ"מ רציף X:

$$f(x)=\frac{b-a}{2}x+a$$



א. נתון: $P(X \le 2) = 4P(X > 2)$. חשבו את הערכים של a, b.
ב. חשבו את התוחלת של X.
ג. חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F(x)$.
ד. חשבו את ההסתברות: $P(X < 2.5 / X > 1)$.

פתרון

א.

$$P(X \le 2) = 2a + b - a = a + b$$
$$P(X > 2) = a$$

$$a + b = 4a \quad \Rightarrow \quad b = 3a$$
$$a + b + a = 1 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad 5a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0.2 \quad \Rightarrow \quad b = 0.6$$

ב.

$$f(x) = 0.2x + 0.2$$

$$E(X) = \int_0^2 (0.2x^2 + 0.2x)dx + \int_2^3 0.2x dx = \left[\frac{0.2}{3}x^3 + 0.1x^2\right]_0^2 + \left[0.1x^2\right]_2^3 = 1.43$$

ג.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.1x^2 + 0.2x, & 0 \le x \le 2 \\ 0.8 + 0.2(x-2) & 2 \le x \le 3 \\ 1, & 3 \le x \end{cases}$$

ד.

$$P(X < 2.5 | X > 1) = \frac{P(1 < X < 2.5)}{P(X > 1)} = \frac{F(2.5) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{0.9 - 0.3}{1 - 0.3} = \frac{6}{7}$$

שאלה 3 (48 נקודות)

חברה למכירת מכשיר חשמלי מפעילה שירות טלפוני. 40% מהלקוחות המתקשרים לחברה מעוניינים ברכישת מכשיר חדש וזמן השיחה מתפלג נורמלית עם תוחלת 5 דקות וסטיית תקן 7 דקות. 60% מהלקוחות מתקשרים בנוגע לשאלות לגבי מכשיר שרכשו וזמן השיחה מתפלג מעריכית עם תוחלת 8 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך זמן שיחה של לקוח אקראי ארכה מעל 6 דקות?
ב. מהי תוחלת זמן שיחה ללקוח אקראי?
ג. מהי שונות זמן שיחה ללקוח אקראי?

ד. 64 לקוחות התקשרו ביום מסוים. מה ההסתברות שממוצע משך זמן השיחה הוא מעל 6 דקות?

ה. 64 לקוחות התקשרו ביום מסוים. מה ההסתברות שלפחות 40 מהם היו בשיחה שארכה מעל 6 דקות?

ו. איש שירות שעונה לשיחה מקבל תשלום של 35 ₪ אם השיחה ארכה לכל היותר 6 דקות, ותשלום של 30 ₪ אם השיחה ארכה מעל 6 דקות. מהו ממוצע תשלום לאיש שירות עבור שיחה אקראית?

פתרון

נגדיר: T = זמן שירות ללקוח

A = לקוח מעוניין ברכישת מכשיר חדש

B = לקוח מתקשר לשאול שאלה

$$T \mid A \sim N(5, 49)$$
$$T \mid B \sim \exp(0.125)$$

א.

$$P(T>6)=P(T>6\mid A)P(A)+P(T>6\mid B)P(B)=\left(1-\Phi\left(\frac{6-5}{7}\right)\right)\times 0.4+e^{-6/8}\times 0.6=0.4611$$

ב.

$$E(T)=E(T\mid A)P(A)+E(T\mid B)P(B)=5\times 0.4+8\times 0.6=6.8$$

ג.

$$V(T)=E(T^2)-E^2(T)$$
$$E(T^2)=E(T^2\mid A)P(A)+E(T^2\mid B)P(B)=$$
$$=\left(V(T\mid A)+E^2(T\mid A)\right)P(A)+\left(V(T\mid B)+E^2(T\mid B)\right)P(B)=$$
$$=\left(7^2+5^2\right)\times 0.4+\left(8^2+8^2\right)\times 0.6=106.4$$

$$V(T)=106.4-6.8^2=60.16$$

ד.

$$\bar{X}_{64}\sim N\left(6.8,\ \frac{60.16}{64}\right)$$

$$P\left(\bar{X}_{64}>6\right)=1-\Phi\left(\frac{6-6.8}{\sqrt{60.16/64}}\right)=1-\Phi\left(-0.83\right)=\Phi\left(0.83\right)=0.7967$$

ה.

נגדיר: Y = מספר השיחות שארכו מעל 6 דקות: $Y \sim B(64,\ 0.4611)$

$$64 \times 0.4611 > 5, \quad 64 \times 0.5389 > 5$$

קירוב נורמלי לבינומי: $Y \sim N(29.51,\ 15.9)$

$$P(Y \geq 40) = 1 - P(Y \leq 39) \doteq 1 - \Phi\left(\frac{39 + 0.5 - 29.51}{\sqrt{15.9}}\right) = 1 - \Phi(2.51) = 1 - 0.994 = 0.006$$

ו.

נגדיר R = תשלום לאיש המכירות

$$E(R) = 35P(T \leq 6) + 30P(T > 6)$$

$$P(X \leq 6) = 1 - 0.4611 = 0.5389$$

$$E(R) = 35 \times 0.5389 + 30 \times 0.4611 = 32.7$$