

**אלגברה לינארית**  
**תרגיל מספר 2 - מערכת משוואות**

**שאלה 1**

נתונות 3 מערכות משוואות לינאריות שונות:

$$\begin{cases} 2y+3z-4w = 1 \\ 2z+3w = 4 \\ 2x+2y-5z+2w = 4 \\ 2x-6z+9w = 7 \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} -x-y+z = 2 \\ 2x+2y-4z = -4 \\ -x-2y+3z = 5 \\ 2x+2y-2z = 2 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 2x-3y+2z = 0 \\ x-y+z = 7 \\ -x+5y+4z = 4 \\ 2x-2y+2z = 14 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

לגבי כל מערכת, בדקו האם יש פתרון ע"י דירוג (אלימינציה של גאוס), ופרטו כל מעבר בדירוג. אם קיים פתרון – כתבו את הפתרון הכללי של המערכת.

יש לרשום אותו בשתי צורות: (1) על ידי פירוט ערכי המשתנים, לדוגמא:  $x = 1 + 4t$ ,  $y = 2 + 5t$  (2) בצורת וקטור

עמודה, לדוגמא:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  כאשר  $t$  הוא פרמטר חופשי.

**שאלה 2**

האם המטריצות הבאות מדורגות? מדורגות קנונית? העבירו לצורה מדורגת קנונית ורשמו את הפתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ד.}$$

**שאלה 3**

מבלי לפתור את מערכת המשוואות הנתונה, העריכו כמה פתרונות יתכנו:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z = b_4 \end{cases} \quad \text{א.} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

**שאלה 4**

א. פתרו את מערכת המשוואות הנתונה:

$$\begin{cases} x+2y-z = 6 \\ 2x+3y+z = 10 \end{cases}$$

ב. פתרו את המערכת אחרי הוספת משוואה שלישית:  $x+2y+z = 4$

ג. מה הקשר בין הפתרונות של סעיפים א' ו-ב'?

### שאלה 5

נתונים המישורים:  $7x + 11y + 2z = 36$ ,  $4x + 6y + 2z = 20$ ,  $x + 2y - z = 6$ .  
מצאו את החיתוך בין שלושת המישורים, איזו צורה גיאומטרית מיצג החיתוך?

### שאלה 6 (מבחן)

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} (a-1)x_1 + (a^2+1)x_2 + ax_3 = 4a \\ -8x_2 + (a^2-4)x_3 = a^2-18 \\ (a^2-16)x_3 = (a-4)(a-6) \end{cases}$$

- א. עבור אילו ערכים ממשיים של  $a$  יש למערכת: (i) פתרון יחיד, (ii) אף פתרון, (iii) אינסוף פתרונות?  
ב. עבור  $a = 1$ , מצאו פתרון למערכת, אם קיים.  
ג. עבור  $a = 0$  חשבו את הערך של הנעלם  $x_2$ .

### שאלה 7 (מבחן)

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + (a^2-1)x_2 + x_3 = 0 \\ -ax_1 + 2x_2 + (a^2-2)x_3 = a \end{cases}$$

- א. עבור אילו ערכים ממשיים של  $a$  יש למערכת: (i) פתרון יחיד, (ii) אף פתרון, (iii) אינסוף פתרונות?  
(במקרה זה יש לרשום פתרון בצורה  $\vec{x} = \vec{u} + t\vec{v}$ )  
ב. עבור  $a = 0$ , מצאו פתרון למערכת, אם קיים.  
ג. עבור  $a = 2$  חשבו את הערך של הנעלם  $x_2$ .

### שאלה 8

שאלה זו עוסקת בקשר בין פתרונות של מערכת לא הומוגנית ופתרונות של מערכת הומוגנית מתאימה.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

נתונה מערכת משוואות לא הומוגנית  $(b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, b_3 \neq 0)$ , נסמנה ב- (1):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

נסמן את המערכת ההומוגנית המתאימה ב- (2):

נתונים שני פתרונות של המערכת הלא הומוגנית (1):  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

בנוסף, נתון פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה (2):  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

א. הראו ש-  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  הוא גם פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה (2).

ב. האם בהכרח  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  הם גם פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה (2)? נמקו.

### שאלה 9

יהיו  $a, b$  פרמטרים ממשיים.

א. קבעו עבור אילו ערכי הפרמטרים יש למערכת פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

$$\begin{cases} x + 3z = 1 \\ ax - by + (3a - 2)z = 0 \\ (1 - a)x + by + (3 - 2a)z = a^2 - 3 \end{cases}$$

ב. רשמו את הפתרון של המערכת עבור  $a = 2, b = 1$ .