פתרונות לתרגיל בית 9 – יחסי סדר

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. תהא $A = \{1, 2, 3\}$.

(א) נסמן ב $\mathcal{A}$ את קבוצת **כל יחסי השקילות על A.**

i. תנו דוגמא לאיבר ב $\mathcal{A}$ ודוגמא לאיבר שאינו ב $\mathcal{A}$.

ii. מה מספר האיברים ב $\mathcal{A}$? כיתבו במפורש את כל איברי $\mathcal{A}$ - אפשר לכתוב את איברי $\mathcal{A}$ באמצעות מחלקות השקילות השונות.

(ב) נגדיר יחס R על הקבוצה $\mathcal{A}$ באופן הבא

$$(X, Y) \in R \iff X \subseteq Y$$

ראינו בכיתה שזהו יחס סדר חלקי.

i. תנו דוגמא לאיבר ששייך ל R ולאיבר שאינו שייך ל R.

ii. היחס $T = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\} \in \mathcal{A}$. מיצאו את האיבר העוקב של T.

iii. ציירו את דיאגרמת הסה המתאימה.

iv. מצאו את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר.

פתרון

(א)

i. $S = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\} \in \mathcal{A}$, כי S יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי – יחס שקילות על A.

$T = \{(1,1), (2,2), (1,2)\} \notin \mathcal{A}$, כי T יחס לא רפלקסיבי (ולא סימטרי) – לא יחס שקילות על A.

ii. קיימות 5 חלוקות שונות של A, לכן יש 5 יחסי שקילות שונים ב – $\mathcal{A}$.

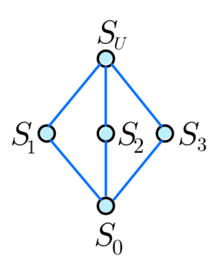
יחס שקילות של $\mathcal{A}$	חלוקה של A
$S_0 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$	$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$
$S_1 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$	$\{1\} \cup \{2,3\}$
$S_2 = \{(2,2), (1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$	$\{2\} \cup \{1,3\}$
$S_3 = \{(3,3), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$	$\{3\} \cup \{1,2\}$
$S_U = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$	$\{1,2,3\}$

(ב)

i. $(S_0, S_1) \in R$, כי $S_0 \subseteq S_1$. $(S_1, S_2) \notin R$, כי $S_1 \nsubseteq S_2$.

ii. מתקיים $(T, S_U) \in R$, כי $T \subseteq S_U$. כמו כן, אין יחס נוסף שמכיל את T ומוכל ב – S_U. לכן S_U הוא האיבר העוקב של T.

iii. דיאגרמת הסה המתאימה:



iv. S_0 הוא האיבר הקטן ביותר ב - $\mathcal{A}$, כי S_0 מוכלת בכל שאר הקבוצות.
S_U הוא האיבר הגדול ביותר ב - $\mathcal{A}$, כי S_U מכילה את כל שאר הקבוצות.

2. תהא $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. נגדיר את היחס S על A באופן הבא

$$(a, b) \in S \iff \exists n \in \mathbb{N}. \frac{a}{b} = 2^n$$

(א) תנו דוגמא לשני איברים ביחס S ושני איברים שאינם ביחס S.

(ב) מצאו איברים עוקבים למספרים הבאים $1, 2, 3, 16, 24$.

(ג) בידקו כי S הוא יחס סדר. קיבעו האם זהו יחס סדר מלא.

פתרון

(א) $(48, 3) \in S$, כי $\frac{48}{3} = 16 = 2^4$ ו - $4 \in \mathbb{N}$.
$(9, 3) \notin S$, כי $\frac{9}{3} = 3 \neq 2^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(ב) האיבר העוקב של 1 הינו 2, כי $\frac{2}{1} = 2^1$ ולאף מספר $m \neq 1, 2$ לא מתקיים $\frac{m}{1} = 2^{n_1}$ וגם $\frac{2}{m} = 2^{n_2}$, כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
האיבר העוקב של 2 הינו 4, כי $\frac{4}{2} = 2^1$ ולאף מספר $m \neq 2, 4$ לא מתקיים $\frac{m}{2} = 2^{n_1}$ וגם $\frac{4}{m} = 2^{n_2}$, כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
האיבר העוקב של 3 הינו 6, כי $\frac{6}{3} = 2^1$ ולאף מספר $m \neq 3, 6$ לא מתקיים $\frac{m}{3} = 2^{n_1}$ וגם $\frac{6}{m} = 2^{n_2}$, כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
האיבר העוקב של 16 הינו 32, כי $\frac{32}{16} = 2^1$ ולאף מספר $m \neq 16, 32$ לא מתקיים $\frac{m}{16} = 2^{n_1}$ וגם $\frac{32}{m} = 2^{n_2}$, כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
האיבר העוקב של 24 הינו 48, כי $\frac{48}{24} = 2^1$ ולאף מספר $m \neq 24, 48$ לא מתקיים $\frac{m}{24} = 2^{n_1}$ וגם $\frac{48}{m} = 2^{n_2}$, כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

(ג) **רפלקסיב**: לכל $a \in A$ מתקיים $\frac{a}{a} = 1 = 2^0$, לכן $(a, a) \in S$.
אנטיסימטרי: יהיו $(a, b) \in S$ וגם $(b, a) \in S$, כלומר $\frac{a}{b} = 2^{n_1}$ וגם $\frac{b}{a} = 2^{n_2}$, כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
מכאן $2^{n_1+n_2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, כלומר $n_1 + n_2 = 0$ ומכיוון ש - $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ מסיכים כי $n_1 = n_2 = 0$.
זה גורר $a = b$ שזה מוכיח אנטיסימטריות.
טרנזיטיבי: יהיו $(a, b) \in S$ וגם $(b, c) \in S$, כלומר $\frac{a}{b} = 2^{n_1}$ וגם $\frac{b}{c} = 2^{n_2}$, כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
מכאן $2^{n_1+n_2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$. מכיוון ש - $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$ מסיקים כי $(a, c) \in S$.
S יחס רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי, לכן S יחס סדר.
S לא יחס סדר מלא, כי למשל $(1, 3) \notin S$ וגם $(3, 1) \notin S$ וגם $1 \neq 3$.

3. תהא $A = \mathbb{N}$. כל מספר טבעי $p \in \mathbb{N}$ ניתן לכתוב בצורה $p = 2^l \cdot n$ כאשר $l \in \mathbb{N}$ מספר טבעי כלשהו ו - n הוא מספר טבעי אי זוגי. נגדיר יחס R על A באופן הבא: עבור $p = 2^l \cdot n$ ו - $q = 2^k \cdot m$

$$(p, q) \in R \iff (l \leq k)$$

(א) תנו דוגמא לשני איברים ביחס R ולשנים שאינם ביחס R.

(ב) מצאו איברים עוקבים למספרים הבאים $1, 2, 3, 4$.

(ג) בידקו האם R הוא יחס סדר. אם כן - קיבעו האם זהו יחס סדר מלא או חלקי. אם לא - תנו דוגמא ספציפית לתכונה שאינה מתקיימת.

פתרון

(א) $(12, 20) = (2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5) \in R$, מכיוון ש - $l = k = 2$.
$(4, 22) = (2^2 \cdot 1, 2^1 \cdot 11) \notin R$, מכיוון ש - $l = 2 > k = 1$.

(ב) לאף מספר כאן לא ניתן למצוא מספר עוקב.

(ג) היחס אינו יחס סדר כי הוא לא אנטיסימטרי: $(1, 3) \in R$ וגם $(3, 1) \in R$ וגם $1 \neq 3$. זה גם מסביר את התשובה לסעיף הקודם.

4. תהא $A=\mathbb{N}$. תנו דוגמא ליחס סדר מלא על A כך שהמספר 2 הוא האיבר הקטן ביותר.

פתרון

פשוט נסדר את האיברים של A באופן הבא: $2,0,1,3,4,5,6,7,8,9,\ldots$. סדר הופעת האיברים מגדיר יחס סדר מלא S על A. אפשר לתאר את היחס באופן הבא: $(a,b)\in S$, אם ורק אם b לא מופיע לפני a ברשימה.

5.

(א) תהא $A=\{1,2,3\}$.

i. כמה יחסי סדר מלאים יש על הקבוצה A? הסבירו את תשובתכם.

ii. האם יש יותר יחסי סדר מלאים או יותר יחסי סדר חלקיים על A? האם תוכלו לספור את מספר יחסי הסדר החלקיים על A?

(ב) תהא B קבוצה סופית עם m איברים.

i. כמה יחסי סדר מלאים יש על הקבוצה B?

ii. יהא $b\in B$ איבר כלשהו. האם בהכרח קיים יחס סדר מלא על B כך שהאיבר b הוא האיבר הקטן ביותר? הסבירו את תשובתכם.

פתרון

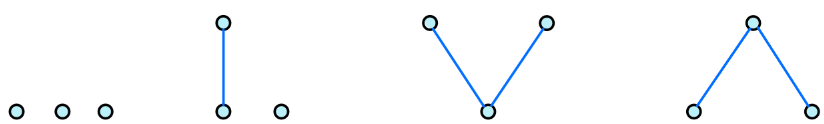
(א)

i. כל יחס סדר מלא על קבוצה קובע סידור של כל אברי הקבוצה לפי סדר מסוים. עבור הקבוצה בת 3 איברים יש $3!=6$ סידורים שונים, לכן יש 6 יחסי סדר מלא שונים.

ii. יחס סדר חלקי הינו תת קבוצה של יחס סדר מלא בעלת תכונת הטרנזיטיביות. למשל ליחס סדר מלא $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ אפשר ליצור 6 יחסי סדר חלקיים:

$$\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$
$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$$
$$\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$$
$$\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,3)\}$$
$$\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$$
$$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

חלק מהיחסים האלה יופיעו גם כיחסים חלקיים של יחסי סדר אחרים.
למשל יחס הסדר החלקי $\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ הוא גם יחס סדר חלקי עבור יחס סדר מלא $\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(2,1),(3,1)\}$. כדי לא לספור יחסים יותר מפעם אחת אפשר לספור דיאגרמות האסה שונות:



$\times 1$ $\quad \times 6$ $\quad \times 3$ $\quad \times 3$

סה"כ 13 יחסי סדר חלקי שונים.

(ב)

i. בדומה לסעיף קודם עבור הקבוצה בת m איברים יש $m!$ סידורים שונים, לכן יש $m!$ יחסי סדר מלא שונים.

ii. כן, בהכרח קיים יחס סדר מלא כזה. כל סידור אברי הקבוצה B שבו $b\in B$ יהיה האיבר הראשון מתאים ליחס סדר מלא, כך שהאיבר b הוא האיבר הקטן ביותר.

6. בטבלה שמילאתם בתרגיל הקודם, עבור כל אחד מהיחסים קיבעו האם הוא יחס סדר וכיתבו את האיברים המיוחדים

היחס	סדר	מינימלי	קטן ביותר	מקסימלי	גדול
$a,b \in \mathbb{Z}.\ (a,b) \in R \iff (a-b)$ זוגי	$\times$	$-$	$-$	$-$	$-$
$a,b \in \mathbb{R}.\ \ (a,b) \in R \iff a+b>6$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$-$
$A,B \subseteq \mathbb{R}\ (A,B) \in R \iff A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ (f,g) \in R \iff \forall a \in \mathbb{R},\ f(a) \geq g(a)$	$\checkmark$	אין	אין	אין	אין
$a,b \in \mathbb{N}\ (a,b) \in R \iff a \leq b$	$\checkmark$	0	0	אין	אין

פתרון

משתמשים בתוצאות של תרגיל בית מספר 7. כל יחס שהוא רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי הוא יחס סדר.
ביחס סדר של השוואת הפונקציות תמיד אפשר "להגדיל" על ידי הוספת 1 לביטוי של פונקציה ו - "להקטין" על ידי הורדת 1. זה מסביר מדוע אין איברים מיוחדים.
ביחס סדר של השוואת מספרים טבעיים לכל מספר טבעי קיים מספר טבעי עוקב ולכן אין איבר מקסימלי ואין איבר גדול ביותר.