

שאלון Y

1. נתון טור החזקות $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n} (3x+1)^n$

(א) (12 נק') מהו תחום ההתכנסות של הטור? קבעו את סוג ההתכנסות (התכנסות בהחלט, בתנאי או התבדרות) בכל נקודה.

(ב) (8 נק') מצאו נוסחה מפורשת לפונקציה $S(x)$ בתחום בו הטור מתכנס

2. (א) (14 נק') נתונה $f(x, y) = x^2 + ay^2$. מהו ערכו של a כך שהנגזרת הכונית בנקודה $(1, 2)$ תהיה מקסימלית בכוון $\mathbf{v} = (4, 3)$? מה ערך הנגזרת בנקודה זו?

(ב) (6 נק') חשבו את הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^3}$ או הוכיחו כי אינו קיים.

3. (20 נק') נתונה ספירה $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ובתוכה חסומה תיבה שקדקדיה בנקודות $(\pm x, \pm y, \pm z)$.

(א) (5 נק') מצאו את נפח התיבה.

(ב) (15 נק') מצאו את הנפח המקסימלי האפשרי של התיבה.

4. (20 נק') נתון השדה $\mathbf{F} = (\ln(y^2 z^2 + 1), \ln(x^2 z^2 + 1), \ln(z^2 + 1))$

(א) (5 נק') מצאו את השטף של השדה דרך הדיסקה $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ בכוון החיובי של ציר z .

(ב) (15 נק') חשבו את השטף של השדה דרך המשטח הפתוח $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ בכוון החיובי (רמז: את הפונקציה $f(t) = \frac{t^3}{t^2+1}$ ניתן לרשום בצורה $f(t) = t - \frac{t}{t^2+1}$).

5. (א) (12 נק') חשבו את מסת הגוף החסום בין החרוט $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ והפרבולואיד $\rho(x, y, z) = x^2$ כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י $z = 1 - \frac{5}{4}(x^2 + y^2)$

(ב) (8 נק') חשבו את אורך העקום הנתון ע"י $\pi \leq t \leq 2\pi$, $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$

6. אין קשר בין סעיפים (א) ו (ב).

(א) (15 נק') חשבו את העבודה הדרושה להביא חלקיק נקודתי מהנקודה $(0, -1)$ לנקודה $(0, 1)$ לאורך העקום $(x-1)^2 \cos(\frac{\pi}{2}y) - xy^2 = 0$ עבור השדה

$$\mathbf{F} = (\sin x e^y + \cos x, -\cos x e^y + y^2).$$

(ב) (5 נק') נתון השדה

$$\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = (a \ln(x^2 + y^2), \arctan(x/y)).$$

עבור אילו ערכים של a השדה משמר בתחום $D = \{(x, y) : y > 0\}$?