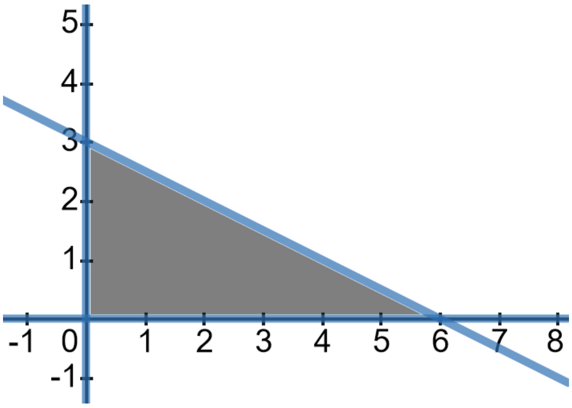
יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 8

קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה
קיצון תחת אילוץ, שיטת כופלי Lagrange
אינטגרל כפול, שימושי אינטגרל כפול (נפח)

קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

.1

למצוא את ערכי ונקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ בתחום הסגור החסום ע"י הישרים $x=0$, $y=0$, $x+2y=6$.



הקבוצה D היא המשולש שמעל הישר $y=0$, מימין לישר $x=0$ ומתחת לישר $x+2y=6$.

הקבוצה D חסומה, למשל מוכלת בעיגול שמכרזו הראשית ורדיוסו $R=10$. הקבוצה D סגורה (כך היא נתונה).

נשים לב $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ וזהו פולינום בשני משתנים ולכן f רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ ובפרט רציפה ב D . ולכן לפי משפט Weierstrass ל f יש מקסימום ומינימום מוחלטים ב D .

נמצא הנקודות החשודות כקיצון של f ב D .

ראשית נמצא הנקודות החשודות כקיצון מקומי של f ב D הנמצאות בפנים D . אלו הנקודות הקריטיות של f שהן פנימיות לקבוצה D , כלומר נקודות פנימיות בהן f_x ו/או f_y לא קיימות, או בהן $f_x=f_y=0$. f פולינום בשני משתנים ולכן f_x, f_y קיימות בכל $\mathbb{R}^2$, ולכן הנקודות הקריטיות של f הן הנקודות הפנימיות בהן $f_x=f_y=0$.

נחשב הנגזרות החלקיות מסדר 1:

$$f_x=2-2x$$
$$f_y=2-2y$$

ולכן נקבל

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2x=0 \\ 2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x=2 \\ 2y=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$$

למערכת המשוואות ישנו פתרון יחיד $(1,1)$.

נוודא שהנקודה הזו אכן נקודה פנימית של D . התנאים המגדירים את D הם $x\ge 0$, $y\ge 0$, $y\le 3-\frac{1}{2}x$ ולכן נקודות פנימיות של D הן נקודות המקיימות $x>0$, $y>0$, $y<3-\frac{1}{2}x$. הנקודה $(1,1)$ מקיימת $x=1>0$, $y=1>0$, $y=1<2\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}x$ ולכן הנקודה אכן נקודה פנימית.

כעת נמצא הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות על השפה של D .

נפריד הטיפול בשפה לשלושת חלקי השפה.

חלק 1 של השפה: הצלע $y=0$, $0\le x\le 6$.

ניתן להציב האילוץ $y=0$ בתוך הפונקציה f , כלומר ערכי f בחלק 1 של השפה נתונים ע"י הנוסחא $h(x)=f(x,0)=2+2x-x^2$ עבור $x\in[0,6]$.

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,6]$ הן הנקודות הפנימיות של הקטע $0<x<6$ בהן $h'(x)=0$ וכן שני הקצוות $x=0$, $x=6$.

$$h'(x)=2-2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=1$$

ו $x=1$ אכן נקודה פנימית של הקטע $[0,6]$, ונוסיף הקצוות $x=0$, $x=6$.

ולכן הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות בחלק 1 של השפה הן $(0,0)$, $(1,0)$, $(6,0)$.

חלק 2 של השפה: הצלע $0 \le y \le 3$, $x = 0$.

ניתן להציב האילוץ $x = 0$ בתוך הפונקציה f , כלומר ערכי f בחלק 2 של השפה נתונים ע"י הנוסחא $h(y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2$ עבור $y \in [0,3]$.

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,3]$ הן הנקודות הפנימיות של הקטע $0 < y < 3$ בהן $h'(y) = 0$ וכן שני הקצוות $y = 3$, $y = 0$.

$$h'(y) = 2 - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1$$

ו $y = 1$ אכן נקודה פנימית של הקטע $[0,3]$, ונוסיף הקצוות $y = 3$, $y = 0$.

ולכן הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות בחלק 2 של השפה הן $(0,3)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

חלק 3 של השפה: הצלע $0 \le y \le 3$, $0 \le x \le 6$, $x + 2y = 6$.

ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ $x = 6 - 2y$ ולהציב בתוך הפונקציה f , כלומר ערכי f בחלק 3 של השפה נתונים ע"י הנוסחא $h(y) = f(6-2y, y)$ עבור $y \in [0,3]$.

הערה: כמובן ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ $y = 3 - \frac{1}{2}x$ ולקבל שערכי f בחלק 3 של השפה נתונים ע"י הנוסחא $h(x) = f(x, 3 - \frac{1}{2}x)$ עבור $x \in [0,6]$.

$$h(y) = f(6-2y, y) = 2 + 2(6-2y) + 2y - (6-2y)^2 - y^2 = -5y^2 + 22y - 22$$

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,3]$ הן הנקודות הפנימיות של הקטע $0 < y < 3$ בהן $h'(y) = 0$ וכן שני הקצוות $y = 3$, $y = 0$.

$$h'(y) = -10y + 22 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10y = 22 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{11}{5} = 2.2$$

ו $y = 2.2$ אכן נקודה פנימית של הקטע $[0,3]$, ונוסיף הקצוות $y = 3$, $y = 0$.

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 2y = 6$$
$$y = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 2y = 0$$
$$y = 2.2 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - 2y = 6 - 2 \cdot 2.2 = 1.6$$

ולכן הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות בחלק 3 של השפה הן

$(6,0)$, $(1.6, 2.2)$, $(0,3)$

לסיכום, הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הן:

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(6,0)$, $(0,3)$, $(1.6, 2.2)$, $(1,1)$

כעת נחשב את ערך הפונקציה f בנקודות החשודות.

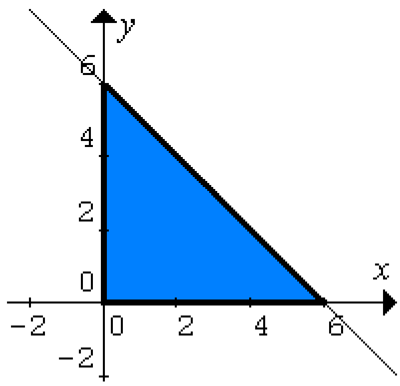
$$f(0,0) = 2$$
$$f(1,0) = f(0,1) = 3$$
$$f(6,0) = -22$$
$$f(0,3) = -1$$
$$f(1.6, 2.2) = 2.2$$
$$f(1,1) = 4$$

ולכן:

המקסימום של f ב D הוא 4, מתקבל בנקודה $(1,1)$.

המינימום של f ב D הוא -22, מתקבל בנקודה $(6,0)$.

2. למצוא את ערכי ונקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)+11$ בקבוצה D שהינה המשולש הסגור שקודקודיו הם $A=(0,0)$, $B=(6,0)$, $C=(0,6)$.



שרטוט של התחום :

משוואת הצלע AB היא $y=0$.
משוואת הצלע AC היא $x=0$.
משוואת הצלע BC : זו משוואת הישר העובר דרך הנקודות $B=(6,0)$, $C=(0,6)$, המשוואה היא $x+y=6$ או $y=6-x$.
ולכן אפיון אחר לקבוצה D הוא $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, y\le 6-x\}$.

הקבוצה D בברור חסומה, למשל מוכלת בעיגול שמכרזו הראשית ורדיוסו $R=10$. הקבוצה D סגורה (כך היא נתונה).
נשים לב $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)+11=6x^2y^3-x^3y^3-x^2y^4+11$ וזהו פולינום בשני משתנים ולכן f רציפה בכל $\mathbb{R}^2$ ובפרט רציפה ב D . ולכן לפי משפט Weierstrass ל f יש מקסימום ומינימום מוחלטים ב D .

נמצא הנקודות החשודות כקיצון של f ב D .
ראשית נמצא הנקודות החשודות כקיצון מקומי של f ב D הנמצאות בפנים D . אלו הנקודות הקריטיות של f שהן פנימיות לקבוצה D , כלומר נקודות פנימיות בהן f_x ו/או f_y לא קיימות, או בהן $f_x=f_y=0$. f פולינום בשני משתנים ולכן f_x, f_y קיימות בכל $\mathbb{R}^2$, ולכן הנקודות הקריטיות של f הן הנקודות הפנימיות בהן $f_x=f_y=0$.
נחשב הנגזרות החלקיות מסדר 1 :

$$f_x=12xy^3-3x^2y^3-2xy^4=xy^3(12-3x-2y)$$
$$f_y=18x^2y^2-3x^3y^2-4x^2y^3=x^2y^2(18-3x-4y)$$

ולכן נקבל

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^3(12-3x-2y)=0 \\ x^2y^2(18-3x-4y)=0 \end{cases}$$

אנו מחפשים נקודות קריטיות פנימיות של D . התנאים המגדירים את D הם $x\ge 0, y\ge 0, y\le 6-x$ ולכן נקודות פנימיות של D הן נקודות המקיימות $x>0, y>0, y<6-x$, ובפרט $x,y\ne 0$. ולכן ניתן לחלק המשוואה הראשונה ב xy^3 והשניה ב x^2y^2 ונקבל

$$\begin{cases} 12-3x-2y=0 \\ 18-3x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=12 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$$

זו מערכת משוואות לינארית ויש לה פתרון יחיד. אפשר למשל לחסר המשוואה הראשונה מהשניה ולקבל $2y=6 \;\Rightarrow\; y=3$ ואז להציב $y=3$ במשוואה הראשונה ולקבל $3x+6=12 \;\Rightarrow\; x=2$. כלומר למערכת המשוואות ישנו פתרון יחיד $(2,3)$.
נוודא שהנקודה הזו אכן נקודה פנימית של D . $x=2>0$, $y=3>0$, $y=3<4=6-x$ ולכן הנקודה אכן נקודה פנימית.

כעת נמצא הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות על השפה של D .
נפריד הטיפול בשפה לשלושת חלקי השפה.

חלק 1 של השפה : הצלע AB , כלומר $0\le x\le 6$, $y=0$.
ניתן להציב האילוץ $y=0$ בתוך הפונקציה f , כלומר ערכי f בחלק 1 של השפה נתונים ע"י הנוסחה $h(x)=f(x,0)$ עבור $x\in[0,6]$.

הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,6]$ הן הנקודות הפנימיות של הקטע $0<x<6$ בהן $h'(x)=0$ וכן שני הקצוות $x=6$, $x=0$. אך $h(x)=f(x,0)=11$, זו פונקציה קבועה והנגזרת שלה מתאפסת לכל $0<x<6$ ולכן כל $0<x<6$ נקודות חשודות כנקודות קיצון מקומי של h בקטע $[0,6]$.
נוסיף הקצוות $x=6$, $x=0$ ונקבל שכל $0\le x\le 6$ הן נקודות חשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,6]$. ולכן הנקודות $(x,0)$ עבור כל $0\le x\le 6$ הן הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות בחלק 1 של השפה (כלומר: כל חלק 1 של השפה הוא נקודות חשודות).

חלק 2 של השפה: הצלע AC , כלומר $0\le y\le 6$, $x=0$.
ניתן להציב האילוץ $x=0$ בתוך הפונקציה f , כלומר ערכי f בחלק 2 של השפה נתונים ע״י הנוסחה $h(y)=f(0,y)$ עבור $y\in[0,6]$.
הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,6]$ הן הנקודות הפנימיות של הקטע $0<y<6$ בהן $h'(y)=0$ וכן שני הקצוות $y=6$, $y=0$. אך $h(y)=f(0,y)=11$, זו פונקציה קבועה והנגזרת שלה מתאפסת לכל $0<y<6$ ולכן כל $0<y<6$ נקודות חשודות כנקודות קיצון מקומי של h בקטע $[0,6]$.
נוסיף הקצוות $y=6$, $y=0$ ונקבל שכל $0\le y\le 6$ הן נקודות חשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,6]$. ולכן הנקודות $(0,y)$ עבור כל $0\le y\le 6$ הן הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות בחלק 2 של השפה (כלומר: כל חלק 2 של השפה הוא נקודות חשודות).

חלק 3 של השפה: הצלע BC , כלומר $0\le x,y\le 6$, $x+y=6$.
ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ $y=6-x$ ולהציב בתוך הפונקציה f , כלומר ערכי f בחלק 3 של השפה נתונים ע״י הנוסחה $h(x)=f(x,6-x)$ עבור $x\in[0,6]$.
הערה: כמובן ניתן לחלץ ממשוואת האילוץ $x=6-y$ ולקבל שערכי f בחלק 3 של השפה נתונים ע״י הנוסחה $h(y)=f(6-y,y)$ עבור $y\in[0,6]$.
הנקודות החשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,6]$ הן הנקודות הפנימיות של הקטע $0<x<6$ בהן $h'(x)=0$ וכן שני הקצוות $x=6$, $x=0$. אך
$h(x)=f(x,6-x)=x^2(6-x)^3(6-x-(6-x))+11=11$, זו פונקציה קבועה והנגזרת שלה מתאפסת לכל $0<x<6$ ולכן כל $0<x<6$ נקודות חשודות כנקודות קיצון מקומי של h בקטע $[0,6]$. נוסיף הקצוות $x=6$, $x=0$ ונקבל שכל $0\le x\le 6$ הן נקודות חשודות כנקודות קיצון של h בקטע $[0,6]$.
ולכן הנקודות $(x,6-x)$ עבור כל $0\le x\le 6$ הן הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הנמצאות בחלק 3 של השפה (כלומר: כל חלק 3 של השפה הוא נקודות חשודות).

לסיכום, הנקודות החשודות כקיצון של f ב D הן:

$(2,3)$
$(x,0)$ $\quad 0\le x\le 6$
$(0,y)$ $\quad 0\le y\le 6$
$(x,6-x)$ $\quad 0\le x\le 6$

כעת נחשב את ערך הפונקציה f בנקודות החשודות.

$$f(2,3)=2^2\cdot 3^3\cdot(6-2-3)+11=119$$
$f(x,0)=11$ $\quad 0\le x\le 6$
$f(0,y)=11$ $\quad 0\le y\le 6$
$f(x,6-x)=11$ $\quad 0\le x\le 6$

ולכן:
המקסימום של f ב D הוא 119, מתקבל בנקודה $(2,3)$.
המינימום של f ב D הוא 11, מתקבל בנקודות $0\le x\le 6$, $(x,0)$, $0\le y\le 6$, $(0,y)$ ו $0\le x\le 6$, $(x,6-x)$.

<u>קיצון תחת אילוץ, שיטת כופלי Lagrange</u>

1.
מבין כל המלבנים בעלי אלכסון באורך p ($p > 0$ פרמטר), למצוא את המלבן ששטחו מקסימלי.

נסמן את רוחב המלבן ב x וגובה המלבן ב y. אז שטח המלבן נתון ע"י $A(x,y) = xy$.
הקשר בין אורכי הצלעות x, y והאלכסון p נתון ע"י נוסחת פיתגורס $x^2 + y^2 = p^2$.
אורכי הצלעות הם מספרים חיוביים $x > 0, y > 0$.
לסיכום:
צריך למצוא את המקסימום של הפונקציה $A(x,y) = xy$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 = p^2$ והמגבלות $x > 0$, $y > 0$.

קבוצת הנקודות המקיימת את האילוץ $x^2 + y^2 = p^2$ והמגבלות $x > 0, y > 0$ – זהו רבע מעגל (ברביע הראשון) לא כולל נקודות הקצה של רבע המעגל, זו קבוצה חסומה אבל אינה סגורה כי אינה כוללת את כל נקודות השפה שלה – את הקצוות של רבע המעגל $(p,0)$ ו $(0,p)$.
נשנה מעט את התרגיל: נוסיף את נקודות הקצה $(p,0)$ ו $(0,p)$, כלומר נשנה את המגבלת ל $x \ge 0$, $y \ge 0$. ואז קבוצת הנקודות המקיימת את האילוץ $x^2 + y^2 = p^2$ והמגבלות $x \ge 0$, $y \ge 0$ – זהו רבע מעגל (ברביע הראשון) כולל נקודות הקצה של רבע המעגל, זו קבוצה חסומה וגם סגורה כי היא כוללת את כל נקודות השפה שלה.
למעשה הוספנו כאן לאוסף המלבנים שבודקים את שני ה"מלבנים" שצלעותיהם הם $x = p$, $y = 0$ ו $x = 0$, $y = p$. אבל זה לא ישנה את המקסימום של שטחי המלבנים, כי בברור עבור שני "מלבנים" אלה השטח הוא 0, ושם לא יהיה המקסימום כי עבור כל שאר המלבנים $x > 0$, $y > 0$ ולכן השטח חיובי.
לסיכום:
צריך למצוא את המקסימום של הפונקציה $A(x,y) = xy$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 = p^2$ והמגבלות $x \ge 0$, $y \ge 0$.

כפי שהוסבר, קבוצת הנקודות המקיימת את האילוץ והמגבלות היא קבוצה סגורה וחסומה. הפונקציה $A(x,y)$ רציפה בקבוצה זו. ולכן לפי משפט Weierstrass ל $A(x,y)$ יש מקסימום ומינימום מוחלטים תחת האילוץ והמגבלות.

נבנה את הלגרנז'יאן המתאים לבעיית קיצון זו:
$$L(x,y,\lambda) = A(x,y) - \lambda g(x,y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - p^2)$$
נמצא הנקודות הקריטיות מסדר I של L:
$$\begin{cases} L_x = y - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L_y = x - \lambda \cdot 2y = 0 \\ L_\lambda = -(x^2 + y^2 - p^2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 2\lambda x & (1) \\ x = 2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 = p^2 & (3) \end{cases}$$
צריך לפתור את מערכת משוואות זו.

נחלץ λ ממשוואה (1) וגם ממשוואה (2). לשם כך צריך לחלק את משוואה (1) ב x ואת משוואה (2) ב y. ולכן צריך להפריד ל 3 מקרים: $x = 0$, $y = 0$, $x, y \ne 0$.

מקרה 1: $x = 0$
במקרה זה ממשוואה (1) נקבל $y = 0$. ולכן $x = y = 0$ אבל אז משוואה (3) לא מתקיימת. ולכן אין פתרונות במקרה זה.

מקרה 2: $y = 0$
במקרה זה ממשוואה (1) נקבל $2\lambda x = 0$, ולכן $x = 0$ או $\lambda = 0$.
אם $x = 0$ אז $x = y = 0$ ומשוואה (3) לא מתקיימת.
אם $\lambda = 0$ אז ממשוואה (2) נקבל $x = 0$ ושוב $x = y = 0$ ומשוואה (3) לא מתקיימת.

ולכן בכל מקרה משוואה (3) לא מתקיימת, אין פתרונות במקרה זה.

מקרה 3: $x, y \neq 0$.

נחלק משוואה (1) ב x ואת משוואה (2) ב y ונקבל

$$y = 2\lambda x \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = \frac{y}{x}$$

$$x = 2\lambda y \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$$

אם $y = x$, נציב במשוואה (3) ונקבל

$$x^2 + x^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{2}} = \pm\frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{p}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = x = \frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{p}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = x = -\frac{p}{\sqrt{2}}$$

אם $y = -x$, נציב במשוואה (3) ונקבל

$$x^2 + (-x)^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{p^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{2}} = \pm\frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{p}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = -x = -\frac{p}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{p}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = -x = \frac{p}{\sqrt{2}}$$

לסיכום קיבלנו 4 פתרונות של המערכת

$$\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) \ , \ \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right) \ , \ \left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) \ , \ \left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, -\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$$

כמובן שרק הנקודה $\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ מקיימת את המגבלות $y \geq 0$, $x \geq 0$.

כמובן שצריך להוסיף את נקודות הקצה של רבע המעגל, הנקודות $(p,0)$ ו $(0,p)$.

לסיכום, הנקודות החשודות כנקודות קיצון של הפונקציה $A(x,y) = xy$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 = p^2$ והמגבלות $y \geq 0$, $x \geq 0$ הן

$$\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) \ , \ (p,0) \ , \ (0,p)$$

כעת נחשב את ערך הפונקציה $A(x,y)$ בנקודות החשודות.

$$A\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right) = \frac{p}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p}{\sqrt{2}} = \frac{p^2}{2}$$

$$A(p,0) = p \cdot 0 = 0$$

$$A(0,p) = 0 \cdot p = 0$$

ולכן המקסימום של הפונקציה $A(x,y) = xy$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 = p^2$ והמגבלות $y \geq 0$, $x \geq 0$ הוא $\frac{p^2}{2}$, מתקבל בנקודה $\left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$.

ומכאן:

מבין כל המלבנים בעלי אלכסון באורך p , המלבן ששטחו מקסימלי הוא המלבן שאורכי צלעותיו הם $y=\frac{p}{\sqrt{2}}$, $x=\frac{p}{\sqrt{2}}$ כלומר הריבוע שאורך אלכסונו הוא p .

אינטגרל כפול, שימושי אינטגרל כפול (נפח)

.1

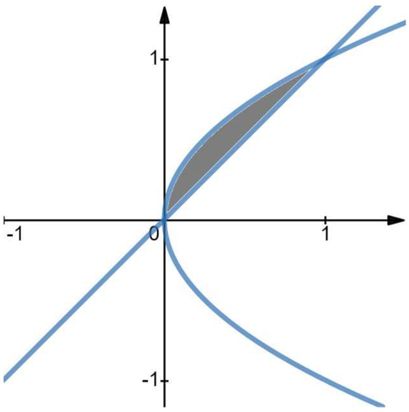
לחשב נפח הגוף G החסום בין מישור xy לבין גרף הפונקציה $f(x,y)=x^3y$ מעל התחום D המוגדר ע״י $y=x$, $x=y^2$.

התחום D החסום בין $y=x$ ו $x=y^2$ נמצא כולו ברביע הראשון, ולכן לכל נקודה (x,y) בתחום מתקיים $y\ge 0$, $x\ge 0$, ולכן $f(x,y)=x^3y\ge 0$. כלומר הגרף של f נמצא כולו מעל מישור xy .

ולכן נפח הגוף G החסום בין מישור xy לבין גרף הפונקציה f מעל התחום D נתון ע״י

$$\text{volume}(G)=\iint_D f(x,y)dA=\iint_D x^3y\,dA$$

איפיון התחום D :



נמצא את נקודות החיתוך של העקומות $y=x$, $x=y^2$:

$$\begin{cases} y=x \\ x=y^2 \end{cases}$$

$$x=x^2$$

$$x-x^2=0$$

$$x(1-x)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0 \text{ or } x=1$$

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y=x=0$$

$$x=1 \quad\Rightarrow\quad y=x=1$$

ולכן איפיון הקבוצה D :

איפיון ראשון (קבוצה x-פשוטה)

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1\,,\,x\le y\le \sqrt{x}\}$$

איפיון שני (קבוצה y-פשוטה)

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1\,,\,y^2\le x\le y\}$$

ולכן נפח הגוף נתון ע״י

$$\text{volume}(G)=\iint_D f(x,y)dA=\iint_D x^3y\,dA=\int_{x=0}^{1}dx\int_{y=x}^{\sqrt{x}}x^3y\,dy$$

או ע״י

$$\text{volume}(G)=\iint_D f(x,y)dA=\iint_D x^3y\,dA=\int_{y=0}^{1}dy\int_{x=y^2}^{y}x^3y\,dx$$

נחשב לפי האיפיון השני:

$$\text{volume}(G)=\iint_D f(x,y)dA=\iint_D x^3y\,dA=\int_{y=0}^{1}dy\int_{x=y^2}^{y}x^3y\,dx=\int_{y=0}^{1}dy\,\frac{1}{4}x^4y\Big|_{x=y^2}^{y}=$$

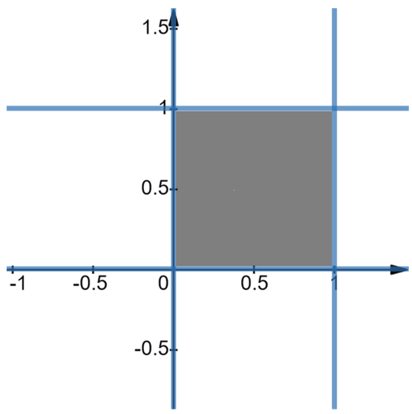
$$=\int_{y=0}^{1}dy\left(\frac{1}{4}y^4\cdot y-\frac{1}{4}(y^2)^4\cdot y\right)=\int_{y=0}^{1}\frac{1}{4}(y^5-y^9)dy=\frac{1}{4}\left(\frac{y^6}{6}-\frac{y^{10}}{10}\right)\Bigg|_{y=0}^{1}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{60}$$

.2

לחשב נפח הגוף G החסום בין המישורים $x=0\,,\,x=1\,,\,y=0\,,\,y=1$ והמשטחים

$h(x,y)=1+x^{\gamma}y^{\delta}$, $g(x,y)=2+x^{\alpha}+y^{\beta}$, כאשר $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ פרמטרים חיוביים.



ארבעת המישורים $x=0\,,\,x=1\,,\,y=0\,,\,y=1$ ניצבים למישור xy וחותכים אותו בריבוע

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1\,,\,0\le y\le 1\}$$

הגוף G ׳בנוי מעלי׳ הקבוצה D, וחסום מלמעלה ומלמטה ע״י משטחים מתאימים.

לכל $(x,y)\in D$ מתקיים:

$$0\le x\le 1\,,\,0\le y\le 1$$

ולכן

$$0\le x^{\alpha}\le 1\ ,\ 0\le y^{\beta}\le 1\ \Rightarrow\ 2+x^{\alpha}+y^{\beta}\ge 2$$

$$0\le x^{\gamma}\le 1\ ,\ 0\le y^{\delta}\le 1\ \Rightarrow\ 0\le x^{\gamma}y^{\delta}\le 1\ \Rightarrow\ 1+x^{\gamma}y^{\delta}\le 2$$

כלומר לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $h(x,y)\le g(x,y)$.

ומכאן שהגוף G ׳בנוי מעלי׳ הקבוצה D, וחסום מלמטה ע״י המשטח $z=h(x,y)$ ומלמעלה ע״י המשטח $z=g(x,y)$.

ולכן נפח הגוף G נתון ע״י

$$\text{volume}(G)=\iint\limits_{D}\left[g(x,y)-h(x,y)\right]dA=\iint\limits_{D}\left[(2+x^{\alpha}+y^{\beta})-(1+x^{\gamma}y^{\delta})\right]dA=$$

$$=\iint\limits_{D}\left[1+x^{\alpha}+y^{\beta}-x^{\gamma}y^{\delta}\right]dA$$

איפיון הקבוצה D, שהינה ההיטל של הגוף D למישור xy, הוא

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1\,,\,0\le y\le 1\}$$

ולכן

$$\text{volume}(G)=\iint\limits_{D}\left[1+x^{\alpha}+y^{\beta}-x^{\gamma}y^{\delta}\right]dA=\int\limits_{x=0}^{1}dx\int\limits_{y=0}^{1}(1+x^{\alpha}+y^{\beta}-x^{\gamma}y^{\delta})dy=$$

$$=\int\limits_{x=0}^{1}dx\left(y+x^{\alpha}y+\frac{1}{\beta+1}y^{\beta+1}-x^{\gamma}\frac{1}{\delta+1}y^{\delta+1}\right)\Bigg|_{y=0}^{1}=$$

$$=\int\limits_{x=0}^{1}\left(1+x^{\alpha}+\frac{1}{\beta+1}-x^{\gamma}\frac{1}{\delta+1}\right)dx=$$

$$=x+\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}x-\frac{1}{\gamma+1}\frac{1}{\delta+1}x^{\gamma+1}\Bigg|_{x=0}^{1}=1+\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{(\gamma+1)(\delta+1)}$$