

## תרגיל בית 9 – יחסי סדר

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. תהא  $A = \{1, 2, 3\}$ .

(א) נסמן ב  $A$  את קבוצת כל יחסי השקילות על  $A$ .

i. תנו דוגמא לאיבר ב  $A$  ודוגמא לאיבר שאינו ב  $A$ .

ii. מה מספר האיברים ב  $A$ ? כיתבו במפורש את כל איברי  $A$  - אפשר לכתוב את איברי  $A$  באמצעות מחלקות השקילות השונות.

(ב) נגדיר יחס  $R$  על הקבוצה  $A$  באופן הבא

$$(X, Y) \in R \iff X \subseteq Y$$

ראינו בכיתה שזהו יחס סדר חלקי.

i. תנו דוגמא לאיבר ששייך ל  $R$  ולאיבר שאינו שייך ל  $R$ .

ii. היחס  $T = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\} \in A$  מיצאו את האיבר העוקב של  $T$ .

iii. ציירו את דיאגרמת הסה המתאימה.

iv. מצאו את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר.

2. תהא  $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . נגדיר את היחס  $S$  על  $A$  באופן הבא

$$(a, b) \in S \iff \exists n \in \mathbb{N}. \frac{a}{b} = 2^n$$

(א) תנו דוגמא לשני איברים ביחס  $S$  ושני איברים שאינם ביחס  $S$ .

(ב) מצאו איברים עוקבים למספרים הבאים 1, 2, 3, 16, 24.

(ג) בידקו כי  $S$  הוא יחס סדר. קיבעו האם זהו יחס סדר מלא.

3. תהא  $A = \mathbb{N}$ . כל מספר טבעי  $p \in \mathbb{N}$  ניתן לכתוב בצורה  $p = 2^l \cdot n$  כאשר  $l \in \mathbb{N}$  מספר טבעי כלשהו ו  $n$  הוא מספר טבעי אי זוגי. נגדיר יחס  $R$  על  $A$  באופן הבא: עבור  $p = 2^l \cdot n$  ו  $q = 2^k \cdot m$

$$(p, q) \in R \iff (l \leq k)$$

(א) תנו דוגמא לשני איברים ביחס  $R$  ולשנים שאינם ביחס  $R$ .

(ב) מצאו איברים עוקבים למספרים הבאים 1, 2, 3, 4.

(ג) בידקו האם  $R$  הוא יחס סדר. אם כן - קיבעו האם זהו יחס סדר מלא או חלקי. אם לא - תנו דוגמא ספציפית לתכונה שאינה מתקיימת.

4. תהא  $A = \mathbb{N}$ . תנו דוגמא ליחס סדר מלא על  $A$  כך שהמספר 2 הוא האיבר הקטן ביותר.

5.

(א) תהא  $A = \{1, 2, 3\}$ .

i. כמה יחסי סדר מלאים יש על הקבוצה  $A$ ? הסבירו את תשובתכם.

ii. האם יש יותר יחסי סדר מלאים או יותר יחסי סדר חלקיים על  $A$ ? האם תוכלו לספור את מספר יחסי הסדר החלקיים על  $A$ ?

(ב) תהא  $B$  קבוצה סופית עם  $m$  איברים.

i. כמה יחסי סדר מלאים יש על הקבוצה  $B$ ?

ii. יהא  $b \in B$  איבר כלשהו. האם בהכרח קיים יחס סדר מלא על  $B$  כך שהאיבר  $b$  הוא האיבר הקטן ביותר? הסבירו את תשובתכם.

6. בטבלה שמילאתם בתרגיל הקודם, עבור כל אחד מהיחסים קיבעו האם הוא יחס סדר וכיתבו את האיברים המיוחדים

היחס	סדר	מינימלי	קטן ביותר	מקסימלי	גדול
$a, b \in \mathbb{Z}. (a, b) \in R \iff (a - b)$ זוגי					
$a, b \in \mathbb{R}. (a, b) \in R \iff a + b > 6$					
$A, B \subseteq \mathbb{R} (A, B) \in R \iff A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}$					
$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (f, g) \in R \iff \forall a \in \mathbb{R}, f(a) \geq g(a)$					
$a, b \in \mathbb{N} (a, b) \in R \iff a \leq b$					