המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב אפקה

בחינות – היחידה למתמטיקה

מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X

שאלה 1 (20 נקודות)

א. (10 נק') חשבון את הגבול: $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

ב. (10 נק') חשבון את האינטגרל: $\int \frac{e^x}{30+e^x-e^{2x}}dx$.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו שלכל $x\in\mathbf{R}$ מתקיים $4x\arctan(2x)\ge \ln(1+4x^2)$.

ב. (10 נק') חשבון את $\lim_{n\to\infty} a_n$ עבור הסדרה:

$$n\in\mathbf{N}:\quad a_n=\frac{\cos^2(n)}{\sqrt{9n^3+1}}+\frac{\cos^2(n-1)}{\sqrt{9n^3+2}}+\frac{\cos^2(n-2)}{\sqrt{9n^3+3}}+\cdots+\frac{\cos^2(1)}{\sqrt{9n^3+n}}$$

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו פולינום Taylor-Maclaurin מסדר 2 של $f(x)=(1+2x)\sqrt{1+2x}$.

הוכיחו שלכל $0<x<\frac{1}{4}$ מתקיים $\left|(1+2x)^{\frac{3}{2}}-1-3x-1.5x^2\right|<0.01$.

ב. (10 נק') הוכיחו שלמשוואה $\ln(1+x^2)=4x-5$ יש פתרון יחיד בקטע $[0,3]$.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. (10 נק') תהי $y=f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b) כך שמתקיים: $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$. הוכיחו שלמשוואה $f(x)f'(x)=x$ יש לפחות פתרון אחד בקטע (a,b).

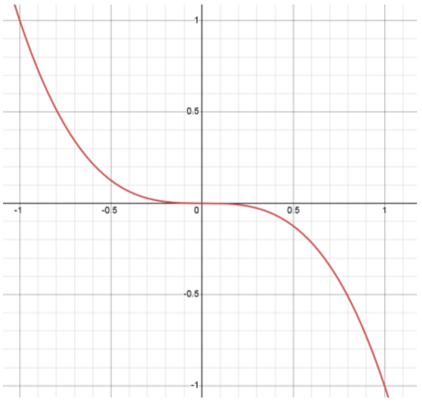
<u>רמז</u>: היעזרו במשפט Lagrange / משפט Rolle עבור $g(x)=f^2(x)-x^2$.

ב. (10 נק') נתונה פונקציה <u>רציפה</u> $f:[0,1]\to\mathbf{R}$. הוכיחו שאם $f(0)>0$, $f(1)<1$, אז קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש- $f(c)=c$.

שאלה 5 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) תהי $y=f(x)$ פונקציה גזירה ב- $\mathbf{R}$.

נתון גרף של הנגזרת ונתון ש $f(0)=-2$.



הגרף של הנגזרת של f

- מצאו את תחומי העליה והירידה של f.
- האם קיים מקסימום מוחלט של f ? האם קיים מינימום מוחלט של f ?
- כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$?

ב. (10 נק׳) נתונה הסדרה $a_n=\dfrac{4^{n+1}-2^n}{4^n}$, $n\ge 1$.

בדקו ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$ לפי הגדרת הגבול של סדרה. הוכיחו שלאי-שיוויון $|a_n-3.5|<0.01$ יש מספר סופי של פתרונות.

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (10 נק׳) נגדיר את הפונקציה $F(x)=\displaystyle\int_0^{\cos x}\frac{\arccos t}{t^4+1}dt$, לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

באיזה נקודות של הקטע הסגור $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הפונקציה F מקבלת את המקסימום ואת המינימום המוחלטים בקטע ? <u>רמז</u>: $\arccos(\cos x)=x$, לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ב. (10 נק׳) חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות: $y=\sin x$, $y=\cos x$,

בתחום: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

בהצלחה!

זהויות טריגונומטריות:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha\cos\beta=1/2\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta=1/2\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cos\beta=1/2\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha,\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$$
$$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$$
$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$
$$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

הבינום של Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k;\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ \ 0!=1$$

פונקציות- מבוא

פונקציה זוגית // אי-זוגית - $f(-x)=f(x)$ // $f(-x)=-f(x)$.

פונקציה מחזורית - $f(x+T)=f(x)$.

פונקציה חח"ע - אם לכל $x_1\neq x_2$ בתחום מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$.

פונקציה על - אם התמונה של f שווה לטווח של f .

נגזרות מיידיות:

$(e^x)'=e^x$	$arc\cot'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$	$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin' x=\cos x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arccos' x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos' x=-\sin x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$\cot'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh' x=\cosh x$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$			$\cosh' x=\sinh x$

אינטגרלים מיידים:

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$$
$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$$
$$\int(x-a)^m dx=\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}+c,\quad m\neq-1$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$$
$$\int\sin x dx=-\cos x+c$$
$$\int\cos x dx=\sin x+c$$
$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c$$
$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+c$$
$$\int\tan x dx=-\ln|\cos x|+c$$
$$\int\cot x dx=\ln|\sin x|+c$$

סדרות והתכנסות $\{a_n\}_{n\geq0}$

סדרה חשבונית: $a_n=a_0+n\cdot d,\ \ S_n=a_0+...+a_n=(a_0+a_n)\cdot\frac{n+1}{2}$

סדרה הנדסית: $a_n=a_0\cdot q^n;\ S_n=a_0+...+a_n=a_0\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\ if\ \ q\neq1$

סדרה מונוטונית:

1. **סדרה עולה** - קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים: $a_{n+1}-a_n\geq0$.
2. **סדרה יורדת** - קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים: $a_{n+1}-a_n\leq0$.
3. **עולה ממש // יורדת ממש** - קיום התנאים הנ"ל ללא ה"שווה" בהתאמה.

הגדרת הגבול של סדרה: מספר ממשי L הוא הגבול של סדרה $\{a_n\}_{n\geq1}$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים n_ε כך שלכל $n\geq n_\varepsilon$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$.

התכנסות של סדרה ומונוטוניות:

1. כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת .
2. סדרה מונוטונית ולא חסומה שואפת ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

משפטי התכנסות של סדרה:

1. סדרה לא יכולה להתכנס ל- 2 גבולות שונים.
2. כל סדרה מתכנסת היא חסומה (אך לא להפך).
3. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות אינסופיות ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim_{n\to\infty}b_n=B$:

א. $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B,\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$.

ב. אם $B\neq0$ אז $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n/\lim_{n\to\infty}b_n=A/B$.

4. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ו- $\{b_n\}$ סדרה חסומה, אז $\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$.
5. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.
6. אם $A>0$ אז $\lim_{n\to\infty}a_n^{b_n}=A^B$.
7. $\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$; $-1<q<1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}q^n=0;\ a>1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0;$
8. גבולו של **Euler** : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

משפט הסנדוויץ': אם $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$ ומתקיים $b_n\leq a_n\leq c_n$ עבור n מספיק גדול, אז הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n$ קיים ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

תת סדרה: $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}=\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

1. אם הסדרה המקורית מתכנסת אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול .
2. אם לסדרה קיימות לפחות 2 תתי סדרות המתכנסות לגבולות שונים, אז הסדרה המקורית מתבדרת.

גבול חלקי = גבול של תת-סדרה.

משפט בולזנו-ויירשטרס (Bolzano-Weierstrass):

אם סדרה חסומה, אז יש לה תת סדרה מתכנסת.

קריטריון קושי (Cauchy) להתכנסות סדרה:

סדרה אינסופית $\{a_n\}$ מתכנסת אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיים n_ε כך שעבור $n\geq n_\varepsilon$ ו- p טבעי כלשהו מתקיים: $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

גבולות פונקציות

הגדרת גבול פונקציה לפי Heine:

L הוא גבול של פונקציה F בנקודה a אם לכל סדרה $x_n\neq a$ שמתכנסת ל- a, אז מתקיים $f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}L$.

הגדרת גבול פונקציה לפי Cauchy: הפונקציה f בעלת גבול L בנק' a אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך ש: $|f(x)-L|<\varepsilon$, לכל $0<|x-a|<\delta$.

משפט:

$$\lim_{x\to a}\alpha\cdot f(x)=\alpha\cdot L_f\ ;\ \lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=L_f\pm L_g$$
$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=L_f\cdot L_g\ ;\ \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{L_f}{L_g}\ ,L_g\neq0$$

גבול חד צדדי:

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x),\quad \lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)$$

משפט:

לפונקציה יש גבול בנקודה, אם ורק אם קיימים 2 גבולות חד צדדיים בנק', והם שווים.

חישובי גבולות:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ ,\ \lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e\ ,\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

כלל הסנדוויץ':

$$\left\{\begin{array}{l}f(x)\leq g(x)\leq h(x)\\ \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=C\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to a}g(x)=C$$

גבול של הרכבה: אם $\lim_{x\to x_0}g(x)=a$ והפונקציה f רציפה בנקודה a ,

אז $\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0}g(x))=f(a)$.

רציפות פונקציות

<u>הגדרה</u>: תהי פונקציה מוגדרת בסביבת נקודה x_0 כולל הנקודה עצמה. אומרים שהפונקציה רציפה בנקודה x_0 אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים את $|x-x_0|<\delta$ יתקיים גם $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

משפט:
1. אם f,g רציפות אז $f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad f(x)/g(x)$ רציפות גם כן. (לגבי המנה, מניחים ש- $g(x)\neq 0$).
2. אם שתי פונקציות רציפות בנקודה מתאימות אז ההרכבה שלהן גם כן רציפה.
3. כל פונקציה אלאמנטרית רציפה. בפרט, כל פולינום או מנת פולינומים רציפים (בתחום ההגדרה) סינוס, קוסינוס ופונקצית המעריכית רציפים לכל x.
4. אם פונקציה f "חח"ע" ו-"על" ורציפה בנקודה x_0 אז הפונקציה הופכית g גם רציפה בנקודה y_0, כאשר $f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow g(y_0)=x_0$.

משפט: אם f פונקציה רציפה אז $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

אי רציפות של פונקציה <u>בנקודה ששייכת לתחום ההגדרה:</u>
אי רציפות סליקה: ערך הפונק' בנקודה שונה מערך הגבול של הפונק' בנקודה.
אי רציפות מסוג ראשון: לפונקציה יש 2 גבולות חד צדדיים אך הם שונים זה מזה.
אי רציפות מסוג שני: <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיים או שווה ל- $\pm\infty$.

תכונות של פונקציות רציפות:

משפט ערך הביניים של Cauchy לגבי רציפות פונקציות:
אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ו- γ נמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$, אז קיימת לפחות נקודה אחת c בקטע $[a,b]$ כך ש- $f(c)=\gamma$.

<u>מסקנה:</u> אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ מקיימת $f(a)\cdot f(b)<0$, אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=0$. (ז"א הגרף של f חותך את ציר ה- x.)

משפט Weierstrass
1. אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא גם חסומה בקטע זה.
2. אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אז היא בעלת נקודות קיצון מוחלטות בקטע זה.

גזירת פונקציות

הפונקציה גזירה בנק' x אם הגבול $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ סופי.

משוואת משיק : $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

משוואת נורמל : $x-x_0+f'(x_0)(y-y_0)=0$.

דיפרנציאל: $df=f'(x_0)dx$.

קירוב לינארי ודיפרנציאל:
$$f(x)=f(x_0+dx)\approx f(x_0)+df = f(x_0)+f'(x_0)\cdot dx=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

משפט: אם הפונקציה גזירה בנקודה אז היא גם רציפה בנקודה זו (לא להפך).

אריתמטיקה של נגזרות, כלל Leibnitz , כלל השרשרת, נגזרת מסדר גבוה:
$$(f\pm g)'=f'\pm g';\quad (fg)'=f'g+fg';\quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$
$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x);\quad [f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$$

נגזרת של פונקציה הפוכה
f היא פונקציה הפוכה של g ו- $g'(y)\neq 0$.אז $y'=f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$.

משפט Fermat:
אם x_0 היא נקודת קיצון מקומי של הפונקציה f ואם f גם גזירה בנקודה זו, אז הנגזרת של f שווה אפס בנק' זו, בתנאי ש- f מוגדרת בקטע פתוח שמכיל את x_0.

משפט Rolle:
אם $f(a)=f(b)$ עבור פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה בקטע פתוח (a,b), אז קיימת נקודה c בתחום (a,b) שבה הנגזרת מתאפסת : $f'(c)=0$.

הוכחת שורש אחד ויחיד לפונקציה:
מוצאים נקודה שבה הפונקציה חיובית, ונקודה שבה הפונקציה שלילית, ואז מוכיחים שהפונקציה מונוטונית יורדת / עולה ממש בקטע מתאים.

משפט Lagrange (משפט הערך הממוצע):
אם פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), אז קיימת לפחות נקודה אחת c בין a ל- b כך ש- $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הגדרה פונקציה קמורה בקטע J (convex)
אם לכל $x,x_0\in J$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

הגדרה פונקציה קעורה בקטע J (concave)
אם אם לכל $x,x_0\in J$ מתקיים $f(x)\le f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

משפט:
אם $f'(x)>0$ // $f'(x)<0$ בקטע, אז הפונקציה עולה // יורדת ממש בקטע זה.
אם $f''(x)>0$ // $f''(x)<0$ בקטע, אז הפונקציה קמורה // קעורה בקטע זה.

משפט:
אם $f'(a)=0$ ו- $f''(x)>0$ בקטע פתוח סביב a, אז a נק' מינימום מקומי.
אם $f'(a)=0$ ו- $f''(x)<0$ בקטע פתוח סביב a, אז a נק' מקסימום מקומי.

חקירת פונקציה $y=f(x)$ כאשר $x\in D_f$, D_f = תחום ההגדרה.
1. $x=a$ אסימפטוטה אנכית אם <u>לפחות</u> אחד מהגבולות החד צדדיים שווה ל- $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\pm\infty$ ו/או $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$.
2. אסימפטוטות משופעות ב- $\pm\infty$:
$$y=mx+n,\quad m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$$
3. תחום הגדרה של הנגזרת, תחומי עליה // ירידה+ נקודות קיצון .
4. תחום הגדרה של הנגזרת השנייה, תחומי קמירות // קעירות+נק' פיתול.
5. גרף (וחיתוך עם הצירים).

כלל לופיטל L'Hopital במצב לא מוגדר $\dfrac{0}{0},\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

אם $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ אז $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

פולינום Taylor $f(x)=T_{n,a}(x)+R_n(x),\quad f(x)\cong T_{n,a}(x)$
$$T_{n,a}(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

שארית Lagrange: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, c בין a ל- x.

דוגמאות:
$$\frac{1}{1-x}\cong T_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n,\qquad e^x\cong T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},$$
$$\sin x\cong T_{2n+1}(x)=T_{2n+2}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\cos x\cong T_{2n}(x)=T_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$
$$\ln(1+x)\cong T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k},$$
$$\arctan x\cong T_{2n+1}(x)=T_{2n+2}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$
$$(1+x)^m\cong T_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!}x^k,$$
$$\arcsin x\cong T_{2n+1}(x)=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k)}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

אינטגרלים

סכומי Riemann של פונקציה $y=f(x)$, כאשר $x\in[a,b]$. נגדיר

$$\begin{cases} S_n = f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n^*)\Delta x_n, \\ \Delta x_k = (x_k - x_{k-1});\quad x_{k-1}\le x_k^* \le x_k;\ a=x_0,\ b=x_n \end{cases}$$

אם f אינטגרבילית Riemann ב- $[a,b]$ ואם $\|\Delta\| = \max_{1\le k\le n}\Delta x_k \underset{n\to\infty}{\to} 0$,

אז $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

1. כל פונקציה $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ אינטגרבילית לפי Riemann היא פונקציה חסומה.
2. **משפט** אם פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ אז היא אינטגרביליתRiemann ב-$[a,b]$.
3. **משפט** אם פונקציה חסומה ורציפה למקוטעין ב- $[a,b]$ (מס' סופי של נקודות אי רציפות) , אז הפונקציה אינטגרבילית.

תכונות אינטגרל מסוים

1. $\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$.
2. $\left(f(x)\le g(x), \forall x\in[a,b]\right) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
3. $m\le f(x)\le M \quad\Rightarrow\quad m(b-a)\le \int_a^b f(x)\le M(b-a)$.
4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.
5. אם f פונקציה זוגית, אז $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

   אם f פונקציה אי-זוגית, אז $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
6. אדיטיביות האינטגרל: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
7. קיימת נקודה c כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

משפט Newton-Leibnitz: תהי $y=f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$.

1. אם $S(x)=\int_a^x f(t)dt$, אז $S'(x)=f(x)$, לכל $x\in[a,b]$.

   (כל פונקציה רציפה בעלת פונקציה קדומה).
2. אם F פונקציה קדומה של f , ז"א אם $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,b]$,

   אז $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$.

שימושים של אינטגרלים

1. שטח : $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$
2. אורך עקומה : $L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$
3. נפח סיבוב סביב ציר x : $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

אינטגרציה בחלקים: $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$

החלפת משתנים: אם $x=x(t)$, אז $\int f(x)dx = \int f\left(x(t)\right)x'(t)dt$

הצבה טריגונומטרית

$$u=\tan\frac{x}{2},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

חזקה אי-זוגית: $\int \sin^n x\cos^3 x dx = \int \sin^n x(1-\sin^2 x)\cos x dx$

רק חזקות זוגיות: שימוש בנוסחאות זווית כפולה פעמיים כדי להוריד חזקות:

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

פונקציה רציונאלית (פולינום/פולינום) **דוגמא:**

$$\frac{x^7}{x^2(x-4)(3x+1)(x^2+7)} = $$
$$=(mx+n)+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-4}+\frac{D}{3x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+7}$$

השלמת מכנה לריבוע: $\int\frac{dx}{x^2+x+3} = \int\frac{dx}{(x+1/2)^2+11/4} = \ldots\ldots$

אינטגרל לא אמיתי סוג ראשון:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx\ ,\quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

אינטגרל לא אמיתי סוג שני:

a נקודה שבסביבתה הפונקציה f לא חסומה: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

b נקודה שבסביבתה הפונקקציה f לא חסומה: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

קריטריון ההשוואה: אם $0\le|f(x)|\le g(x)$ בקטע (a,b) ואם

$\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אז גם $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

דוגמאות:

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $p>1$.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $0<p<1$.

נוסחאות שימושיות $|a+b|\le|a|+|b|,\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

לוגריתמים : יהי $0<a\ne1$, $D_f: x>0$, $y=f(x)=\log_a x$

$a^{\log_a x}=x,\ \log_a a^x = x$; $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}, 0<b\ne1;\ \ \ln x=\log_e x$

$\log_a xy = \log_a x+\log_a y\ ,\ \log_a x^k = k\log_a x,\ \log_a 1=0,$

אם a>1 // 0<a<1 , אז פונקצית הלוגריתם עולה ממש // יורדת ממש.

$$\lim_{x\to0+}\ln x=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}\ln x=+\infty$$