פתרונות לתרגיל בית 16 – קומבינטוריקה בסיסית

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. בכיתה יש 12 תלמידים.

(א) מה מספר האפשרויות לחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות בנות 3 תלמידים כל אחת?

(ב) מה מספר האפשרויות לחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות בנות 3 תלמידים כך שבכל קבוצה יש ראש קבוצה?

(ג) מה מספר האפשרויות לחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות כך שבכל קבוצה יש לפחות 4 תלמידים?

פתרון

(א) בוחרים קבוצה ראשונה של 3 תלמידים: $\binom{12}{3} = 220$ אפשרויות.
בוחרים קבוצה שניה של 3 תלמידים מאלה שנשארו: $\binom{9}{3} = 84$ אפשרויות.
בוחרים קבוצה שלישית של 3 תלמידים מאלה שנשארו: $\binom{6}{3} = 20$ אפשרויות.
בוחרים קבוצה רביעית של 3 תלמידים מאלה שנשארו: $\binom{3}{3} = 1$ אפשרויות.
סה"כ $\frac{1}{4!}\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 15400$ אפשקויות. (מחלקים ב – $4!$, כדי לא לספור בחירות של אותן קבוצות לפי סדר שונה).

(ב) לאחר בניה של קבוצה של 3 תלמידים צריך לבחור את ראש הקבוצה: $\binom{3}{1} = 3$ אפשרויות. וזה עושים בכל אחת מ – 4 קבוצות שמתקבלות. לכן התשובה היא $15400 \cdot 3^4$.

(ג) לא ייתכן שיש יותר מ – 3 קבוצות עם לפחות 4 תלמידים.
יש אפשרות אחת לחלק את התלמידים לקבוצה אחת כזאת – כל התלמידים.
יש $\frac{1}{3!}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$ אפשרויות לחלק את התלמידים ל – 3 קבוצות כאלה.
נספור את האפשרויות לחלק אותם ל – 2 קבוצות:
קבוצה של 4 וקבוצה של 8: $\binom{12}{4}$ אפשרויות.
קבוצה של 5 וקבוצה של 7: $\binom{12}{5}$ אפשרויות.
שתי קבוצות של 6: $\frac{1}{2!}\binom{12}{6}$ אפשרויות.
תשובה סופית: $1 + \left[\binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \frac{1}{2!}\binom{12}{6}\right] + \frac{1}{3!}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}$.

2. כמה סידורים שונים יש ל 9 כדורים כאשר מתוכם 4 אדומים זהים, 3 ירוקים זהים ו – 2 כחולים זהים?

(א) כיתבו תחילה שני סידורים שונים כאלו. הסבירו מה המשמעות ש – 4 הכדורים האדומים הם זהים מבחינת ספירת מספר האפשרויות לסידור הכדורים.

(ב) כמה אפשרויות יש?

(ג) רישמו נוסחא כללית עבור הבעיה הבאה: מהו מספר האפשרויות לסדר בשורה n עצמים אשר מחולקים ל – l סוגים שונים (כלומר, יש k_1 עצמים זהים מסוג 1, k_2 עצמים זהים מסוג 2, ..., k_l עצמים זהים מסוג l)?

פתרון

(א) סידור אחד: $RRRRGGGBB$, סידור אחר: $BRGRGRGRB$. עבור סידור נתון כל שינוי סדר בין הכדורים האדומים לא ישנה את הסידור. לכן יש $4!$ אפשרויות לרשום אותו סידור, אם משנים רק במקומות של כדורים אדומים בינם לבין עצמם.

(ב) מספר האפשרויות: $\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}$. חלוקה בעצרות קיימת עקב ספירה חוזרת של אפשרויות שמתקבלות על ידי שינוי סדר בין כדורים זהים.

(ג) במקרה כללי: $\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_l!}$.

3. מחלקים n כדורים לבנים זהים ו – n כדורים צבעוניים בצבעים שונים ל – $2n$ תאים שונים. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים ענו על שאלה: כמה אפשרויות יש לחלק את הכדורים לתאים כך ש –"

(א) בכל תא יש לכל היותר כדור אחד.

(ב) בכל תא יש לכל היותר כדור לבן אחד.

(ג) בכל תא יש לכל היותר כדור צבעוני אחד.

(ד) בכל תא יש מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים.

פתרון

(א) התנאי הנתון שקול לכך שבכל תא יש בדיוק כדור אחד, לכן זה כמו לסדר בשורה $2n$ כדורים: ישנם $\frac{(2n)!}{n!\cdot 1!\cdot \ldots \cdot 1!} = \frac{(2n)!}{n!}$ אפשרויות. (ראו את השאלה הקודמת).

(ב) התנאי אומר שבכל תא יש כדור לבן אחד או אין כדורים לבנים בכלל. לכן נבחר קודם תאים שבהם יהיה כדור לבן אחד: $\binom{2n}{n}$ אפשרויות. כל אחד מ – n כדורים צבעוניים יכול להיות בכל אחת מ – $2n$ תאים: $\underbrace{2n\cdot 2n\cdot \ldots \cdot 2n}_{n} = (2n)^n$ אפשרויות. מכאן יש סה"כ $\binom{2n}{n}\cdot (2n)^n$ אפשרויות.

(ג) בוחרים מקום לכדורים צבעוניים: $\binom{2n}{n}$ אפשרויות. מספר סידורים של כדורים צבעוניים במקומות האלה: $n!$. מסדרים n כדורים לבנים זהים ל – $2n$ מקומות ללא הגבלות: $D(n,2n) = \binom{n+2n-1}{n}$ אפשרויות. סה"ב: $\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot \binom{3n-1}{n}$.

(ד) נצמיד לכל כדור צבעוני כדור לבן אחד כדי להבטיח שבכל תא מספר הכדורים הצבעוניים יהיה שווה למספר הכדורים הלבנים. יש אפשרות אחת לבצע את הצמדה כזאת. לכל צמד יש $2n$ מקומות אפשריים. לכן יש $\underbrace{2n\cdot 2n\cdot \ldots \cdot 2n}_{n} = (2n)^n$ אפשרויות לסדר את הכדורים בצורה הנדרשת.

4. לפו הדב שמונה חברים. בכל ערב הוא מזמין בדיוק 4 חברים לארוחת ערב. בכמה דרכים פו יכול להזמין את חבריו לסעודה במשך שבוע?

פתרון

בחירת אורכים לארוחה אחת: $\binom{8}{4}$ אפשרויות. וכך במשך 7 ימים: $\binom{8}{4}^7$.

5. כמה מספרים בין 1000 ל – 9999 כולל מכילים את שתי הספרות 0 ו – 2 לפחות פעם אחת? (למשל, 1101 לא בספירה ואילו 1202 כן).

פתרון

אם 2 במקום הראשון, אז ל – 0 יש 3 מקומות אפשריים ובשני המקומות שנשארו ניתן לשים כל ספרה: $3\cdot 10^2 = 300$.

אם 2 לא במקום הראשון (כמובן גם 0 לא), אז יש $3\cdot 2$ אפשרויות לסדר אותם במספר. לספרה ראשונה יש 9 אפשרויות, ולספרה החסרה 10 אפשרויות. סה"כ: $3\cdot 2\cdot 9\cdot 10 = 540$.

תשובה סופית: $300 + 540 = 840$.

6. נתונה קבוצה של $3n$ ילדים בגילאי $6,7,8$.אם ישנם n ילדים בכל אחד מהגילאים מהו מספר האפשרויות לסדרם בשורה, כך שלא יהיו בני 8 סמוכים זה לזה?

פתרון

נתייחס לבני 6 ו – 7 כלמחיצות שמגדירות $2n+1$ תאים. ניתן לסדר אותם ב – $(2n)!$ דרכים. כעת צריך לבחור n תאים עבור בני 8: $\binom{2n+1}{n}$ אפשרויות. ולכל בחירה יש $n!$ סידורים של בני 8 בינם לבין עצמם. סה"כ: $(2n)!\cdot \binom{2n+1}{n}\cdot n!$ סידורים.

7. נתונה קבוצה של $2n$ כדורים ממוספרים. מה מספר האפשרויות לסדרם בשורה כך שלא יהיו שני כדורים סמוכים בעלי אותה זוגיות?

פתרון

אם המספר הראשון הינו אי זוגי, אז יש עבורו n אפשרויות. אחריו יש מספר זוגי, שגם עבורו יש n אפשרויות. המספר הבא הוא שוב אי זוגי ויש כבר $(n-1)$ אפשרויות וכו'. מקבלים $n\cdot n\cdot (n-1)\cdot (n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = (n!)^2$ אפשרויות.

אותו מספר אפשרויות יש גם אם המספר הראשון הינו זוגי, לכן סה"כ יש $2(n!)^2$ אפשרויות.

8. מהו מספר האפשרויות לצבוע n שולחנות בשלושת הצבעים אדום, כחול וירוק?

פתרון

אם השולחנות שונים זה מזה, אז יש $3^n = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n}$ אפשרויות צביעה.

אם השולחנות זהים, אז יש $D(n,3) = \binom{n+2}{2}$ אפשרויות. (כמו לסדר n כדורים זהים ל – 3 תאים שונים).

9. בכמה דרכים ניתן לחלק 10 אנשים ל – 5 זוגות שונים?

פתרון

ראו את השאלה הראשונה. תשובה: $945 = \frac{1}{5!}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ דרכים.

10. סוכן נוסע צריך לבקר ב – 4 ערים שונות כאשר בכל עיר הוא צריך לבקר 5 פעמים. בכמה דרכים הוא יכול לעשות זאת אם אסור לו להתחיל ולסיים באותה העיר?

פתרון

צריכים ליצור סדרה של $20 = 4 \cdot 5$ מקומות (לא כולם שונים), כך שהאיבר הראשון יהיה שונה מהאיבר האחרון.
סה"כ יש $\frac{20!}{(5!)^4}$ סדרות כאלה בלי התחשבות לתנאי לעיל.

אם נבחר בהתחלה ובסוף מקום זהה מסוים (4 אפשרויות), נקבל $\frac{18!}{3!\cdot(5!)^3}$ אפשרויות עבור שאר המקומות.

לכן התשובה לשאלה היא: $\frac{20!}{(5!)^4} - 4 \cdot \frac{18!}{3!\cdot(5!)^3}$.

11. בכמה מספרים שש־ספרתיים זוגיים הספרה 2 מופיעה בדיוק פעמיים כאשר ייתר הספרות שונות זו מזו? העזרו בהדרכה הבאה:

(א) כמה מספרים 6 ספרתיים כאלו יש כאשר הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובסוף?

(ב) כמה מספרים 6 ספרתיים כאלו יש כאשר הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובאמצע?

(ג) זהו את שני המצבים האפשריים הנוספים וכיתבו כמה מספרים יש בכל אחד מהמצבים שמצאתם.

(ד) ענו על השאלה :)

פתרון

(א) אם הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובסוף, אז עבור הספרה השניה יש 9 אפשרויות, עבור הספרה השלישית יש 8 אפשרויות, עבור הספרה הרביעית יש 7 אפשרויות ועבור הספרה החמישית יש 6 אפשרויות. סה"כ: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

(ב) אם הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובאמצע, אז יש 4 מקומות אפשריים לספרה 2 השניה. ספרת האחדות חייבת להיות זוגית (ושונה מ – 2). יש 4 אפשרויות כאלה. ולשאר הספרות מספרי האפשרויות הן 8, 7, 6. סה"כ: $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5376$.

(ג) אם הספרה 2 מופיעה בסוף ובאמצע, אז יש 4 מקומות אפשריים לספרה 2 השניה. הספרה הראשונה חייבתת להיות שונה מ – 0 (ושונה מ – 2). יש 8 אפשרויות כאלה. ולשאר הספרות מספרי האפשרויות הן 8, 7, 6. סה"כ: $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 10752$.
אם שתי הספרות 2 מופיעות לא בסוף ולא בהתחלה, אז יש $6 = \binom{4}{2}$ אפשרויות למקומם.
אם ספרת האחדות הינה 0, אז לספרה הראשונה יש 8 אפשרויות, ולשאר הספרות מספרי האפשרויות הן 7, 6. סה"כ: $6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2016$.
אם ספרת האחדות שונה מ – 0 (ושונה מ – 2), אז יש 3 אפשרויות כאלה. לספרה הראשונה יש 7 אפשרויות, ולשאר הספרות מספרי האפשרויות הן 7, 6. סה"כ: $6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 5292$.

(ד) ישנם $3024 + 5376 + 10752 + 2016 + 5292 = 26460$ מספרים כאלה.

12. בכמה דרכים ניתן לחלק 10 כדורים צבעוניים שונים ו – 10 כדורים לבנים זהים ל – 6 תאים, כך שבכל תא יהיה מספר שווה של כדורים לבנים וכדורים צבעוניים?

פתרון

נצמיד לכל כדור צבעוני כדור לבן אחד כדי להבטיח שבכל תא מספר הכדורים הצבעוניים יהיה שווה למספר הכדורים הלבנים. יש אפשרות אחת לבצע את הצמדה כזאת. לכל צמד יש 6 מקומות אפשריים. לכן יש $6^{10} = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}_{10}$ אפשרויות לסדר את הכדורים בצורה הנדרשת.

.13

(א) כמה יש סידורים שונים של האותיות המופיעות במילה $MISSISSIPPI$?

(ב) כמה סידורים שונים כאלו יש כאשר חייב להופיע הרצף PP?

(ג) כמה סידורים כאלו יש בהם לא מופיע הרצף SS?

פתרון

(א) מדובר בתמורות עם חזרות. סה"כ 11אותיות, M – 1, I – 4, S – 4, P – 2. תשובה: $\frac{11!}{1!\cdot4!\cdot4!\cdot2!}$.

(ב) מתיחסים לרצף PP כלאות אחת ומקבלים: $\frac{10!}{1!\cdot4!\cdot4!\cdot1!}$.

(ג) נתייחס לאותיות M, P ו – I כלמחיצות שמגדירות 8 תאים. את האותיות האלה ניתן לסדר ב – $\frac{7!}{1!\cdot4!\cdot2!}$ דרכים. נסדר את 4 אותיות S ל – 8 תאים, כך שבכל תא תהיה לכול היותר אות S אחת. כלומר נבחר 4 תאים שבהם נשים אות אחת. יש $\binom{8}{4}$ דרכים.
תשובה: $\binom{8}{4}\cdot\frac{7!}{1!\cdot4!\cdot2!}$.

.14 נתונים n אחדים ו – m אפסים. הוכיחו כי מספר הסדרות האפשריות של $m+n$ האפסים והאחדים בהן אין שני אחדים צמודים הוא $\binom{m+1}{n}$.

פתרון

נציין כי המצב ייתכן רק כאשר $n \le m+1$, כי אחרת אין מספיק אפסים כדי לרווח בין אחדים.
נתייחס לאפסים כלמחיצות שמגדירות $m+1$ תאים. צריכים לשים את האחדים לתאים האלה, כך שבכל תא יהיה לכל היותר 1 אחד. פשוט צריכים לבחור n תאים שבהם יופיעו אחדים: $\binom{m+1}{n}$ אפשרויות.

.15 בקופסא יש: 4 קוביות בצבעים אדום,ירוק כחול ולבן. 3 כדורים בצבע כחול ירוק וצהוב. 10 חישוקים בצבע לבן. מה מספר האפשרויות לבחירת פריטים מתוך המגירה כאשר דורשים שמספר הפריטים יהיה:

(א) 10

(ב) 5

(ג) 3

פתרון

(א) נבחר תת קבוצה כלשהי של חפצים מקוביות וכדורים. יש דרך אחת להשלים אותה ל – 10 חפצים על ידי הוספת כמות מתאימה של חישוקים. מתוך קבוצה של 7 חפצים יש 2^7 אפשרויות לבחור תת קבוצה, לכן יש 2^7 אפשרויות לבחור 10 פריטים.

(ב) נחלק למקרים:
בחרנו 5 חישוקים. אפשרות אחת.
בחרנו 4 חישוקים. יש 7 אפשרויות להשלים ל – 5 פריטים.
בחרנו 3 חישוקים. יש $\binom{7}{2}$ אפשרויות להשלים ל – 5 פריטים.
בחרנו 2 חישוקים. יש $\binom{7}{3}$ אפשרויות להשלים ל – 5 פריטים.
בחרנו חישוק אחד. יש $\binom{7}{4}$ אפשרויות להשלים ל – 5 פריטים.
לא בחרנו חישוקים. יש $\binom{7}{5}$ אפשרויות להשלים ל – 5 פריטים.
סה"כ: $1+7+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}=120$ אפשרויות.

(ג) נחלק למקרים:
בחרנו 3 חישוקים. אפשרות אחת.
בחרנו 2 חישוקים. יש 7 אפשרויות להשלים ל – 3 פריטים.
בחרנו חישוק אחד. יש $\binom{7}{2}$ אפשרויות להשלים ל – 3 פריטים.
לא בחרנו חישוקים. יש $\binom{7}{3}$ אפשרויות להשלים ל – 3 פריטים.
סה"כ: $1+7+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=64$ אפשרויות.