2. (שאלת הכד של פוליה) בכד יש 5 כדורים לבנים ו – 10 שחורים. מוציאים כדור, בודקים את צבעו, ומחזירים אותו לכד עם עוד 5 כדורים באותו הצבע. עתה מוציאים כדור נוסף, מהי ההסתברות לכך שהכדור הנוסף יהיה לבן?
נסה להכליל את הפתרון עבור W לבנים, B שחורים, ו – A כדורים נוספים.

לפי עיקרון המכפלה

נחלק את הפתרון ל-2:

1. הראשון שנשלף הוא לבן: $P(W)\cdot P(A_1|W) = \frac{P(A_1\cap W)}{P(W)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{\frac{1}{3}}}{\cancel{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{6}$

2. הראשון שנשלף הוא שחור: $P(B)\cdot P(A_2|B) = \frac{P(A_2\cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{2}{3}}}{\cancel{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6}$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

5. אדם בוחר באופן מקרי לבקר באחת משלוש ערים C,B,A. ההסתברות שבA ירד גשם היא 1/3, ההסתברות לגשם ב B היא 1/4, וההסתברות לגשם ב C היא 1/6. הוא חזר כשמכוניתו רטובה. מהי ההסתברות שביקר בעיר C?

נגדיר את מרחב המדגם (ירד/לא ירד גשם):

$$\Omega = \{\underset{1/4}{\overset{=\bar{N}}{Y}}, \underset{3/4}{\overset{=\bar{Y}}{N}}\}$$

$$P(Y) = \frac{1}{3}\overset{A}{\cdot}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\overset{B}{\cdot}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\overset{C}{\cdot}\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}\right) = \frac{9}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$P(N) = P(\bar{Y}) = 1-P(Y) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

אנחנו רוצים לחשב את: $P(C|Y)$, אבל C קורה לפני Y.

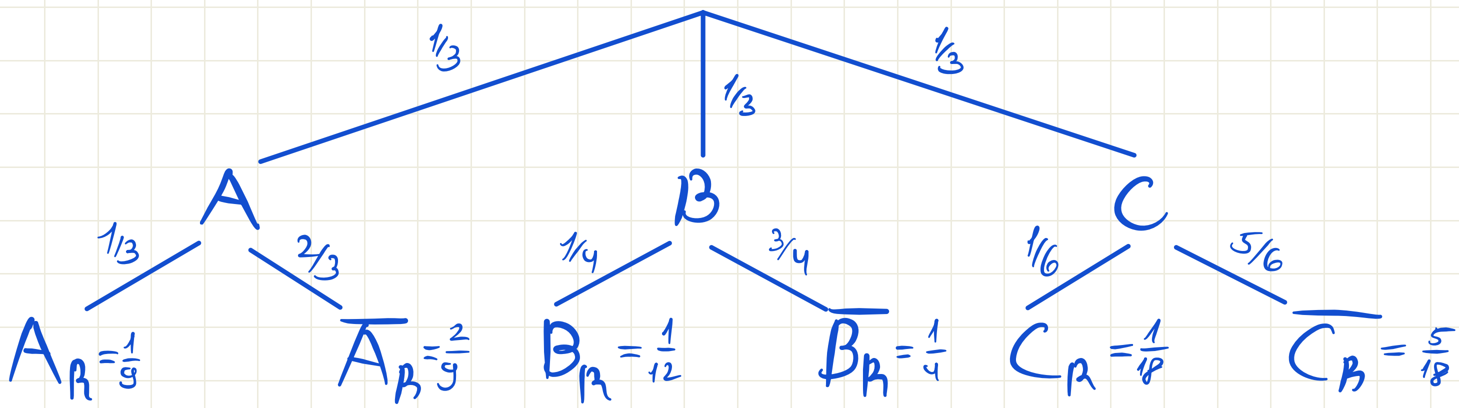
לכן נשתמש בנוסחה של Bertrand:

$$P(C|Y) = \frac{P(C\cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(C|Y) = \frac{P(C\cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(C\cap Y)}{P(C\cap Y)+P(\bar{C}\cap Y)}$$

$$= \frac{P(C\cap Y)}{P(Y|C)\cdot P(C)+P(Y|\bar{C})\cdot P(C)} \Longrightarrow = \frac{P(C\cap Y)}{P(Y|C)\cdot P(C)+P(Y|\bar{C})\cdot P(C)}$$

5. אדם בוחר באופן מקרי לבקר באחת משלוש ערים C,B,A. ההסתברות שבA ירד גשם היא 1/3, ההסתברות לגשם ב B היא 1/4, וההסתברות לגשם ב C היא 1/6. הוא חזר כשמכוניתו רטובה. מהי ההסתברות שביקר בעיר C?



$$P(R) = 1/9 + 1/12 + 1/18 = 1/4$$

$$P(C \mid R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{\overset{=C_R}{P(C \cap R)}}{\underset{C_R}{P(C \cap R)} + \underset{A_R + B_R}{P(\bar{C} \cap R)}} = \frac{1/18}{1/18 + \underset{B_R}{1/12} + \underset{A_R}{1/9}} = 0.222$$

6. משחקים במשחק הבא, לפניך קופסא ובה 7 כדורים שחורים ו 3 כדורים לבנים. מן הקופסא מוציאים, בזה אחר זה ועם החזרה, כדורים. תחילה מוציאים שני כדורים, ואז אם שני הכדורים שהוצאו לבנים מוציאים כדור נוסף (שוב, עם החזרה).

א. מהי ההסתברות לכך שהכדור האחרון יהיה שחור? *{0.763}*

ב. אם הכדור האחרון שהוצא הוא שחור, מהי ההסתברות לכך שהכדור הראשון שהוצא היה לבן? *{0.3578}*

ג. אם הוצא כדור שחור (לפחות אחד) , מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא היה שחור?

ד. ידוע כי הכדור האחרון שהוצא היה כדור לבן, מהי ההסתברות לכך שבהוצאות הקודמות התקבל כדור שחור (לפחות אחד)

$$\left.\begin{matrix} 7 \text{ Black} \\ 3 \text{ White} \end{matrix}\right\} \text{Total } 10$$

$$\underset{\text{כללי}}{P(B)} = 7/10 \quad ; \quad P(b_1) = 7/10 \quad ; \quad P(b_2) = 7/10$$

$$P((W,W)) \xrightarrow[\text{המכפלה}]{\text{עקרון}} 3/10 \cdot 3/10 = 9/100$$

$$P(b_3) = 9/100 \cdot P(B) = 63/1000$$

כעת נחשב את ההסתברות שהוצא כדור שחור אחד לפחות:

$$P(b_1 \cup b_2 \cup b_3) = P(b_1) + P(b_2) + P(b_3) - P(b_1 \cap b_2) = \frac{14}{10} + \frac{63}{1000} - \frac{49}{100}$$

$$= \frac{1400+63-490}{1000} = \frac{973}{1000} = \underline{\underline{0.973}} \underset{\text{נסמן}}{=} P(Q)$$

לבסוף, נרצה לחשב:

$$P(b_2 \mid Q) = \frac{\overbrace{P(b_2 \cap Q)}^{=P(b_2)}}{P(Q)} = \frac{P(b_2)}{P(b_2 \cap Q) + \underbrace{P(\overline{b_2} \cap Q)}_{\substack{=P((b_1 \cup b_3) \cap \overline{b_2}) \\ =P(b_3 \cup [b_1 \cap \overline{b_2}]}}} = \frac{7/10}{7/10 + \frac{273}{1000}}$$

$$= \frac{700}{973} = 0.7194$$

(ד) בעצם רוצים לחשב את

$$P(b_1 \cup b_2 \mid \overline{b_3}) = \emptyset$$

$$P(b_1 \mid \overline{b_2}) = \frac{P(b_1 \cap \overline{b_2})}{P(\overline{b_2})} = \frac{P(b_1 \cap \overline{b_2})}{P(b_1 \cap \overline{b_2}) + P(\overline{b_1} \cap \overline{b_2})} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

9. "מכונת אמת" מגלה סטודנט שהעתיק בבחינה בהסתברות של 90%. אם הוא לא העתיק, המכונה "תסכים" לכך בהסתברות של 95%. ההערכה היא ש 20% מהסטודנטים מעתיקים בבחינות. בוחרים סטודנט באקראי, המכונה טוענת שהוא העתיק. מה הסיכוי שהסטודנט אכן העתיק?

$M =$ המכונה אמרה שהעתיק

$\overline{M} =$ המכונה אמרה שלא העתיק

$S =$ הסטודנט אכן העתיק $= 0.2$

$\overline{S} =$ הסטודנט לא העתיק. $= 0.8$

רוצים לחשב: $P(S|M)$

$$P(S|M) = \frac{P(S\cap M)}{P(M)} = \frac{\overset{0.18}{P(S\cap M)}}{\underset{0.18}{P(S\cap M)} + \underset{0.04}{P(\overline{S}\cap M)}} = 0.8181$$

10. הסתברות המעבר בבי"ס תלת שנתי הן: משנה ראשונה לשנייה 0.75, משנה שנייה לשלישית 0.8 ולסיים בהצלחה שנה שלישית : 0.9.

א. מה ההסתברות שתלמיד שהתקבל לבי"ס מסוים יסיים את לימודיו?

ב. מה ההסתברות שתלמיד שהתקבל לבית ספר מסוים למד בו לכל היותר שנתיים?

ג. אם ידוע שתלמיד לא הצליח לסיים לימודיו, מה הסיכוי שהוא לא עבר משנה שנייה לשנה שלישית?

ד. אם ידוע שהתלמיד לא הצליח לסיים את לימודיו, מה הסיכוי שהוא עבר משנה ראשונה לשנה שנייה?

א $0.75\cdot 0.8\cdot 0.9 = 0.54$ סיים $= A$

ב $0.75\cdot 0.8\cdot 0.1 = 0.06$ נשר שנה 3 B

$0.75\cdot 0.2 = 0.15$ נשר שנה 2 C

0.25 נשר שנה 1 D

$P(\text{ב}) = 1-0.54-0.06 = 0.4$

ג $$P(C|\overline{A}) = \frac{P(C\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(C)}{P(\overline{A})} = \frac{0.15}{0.46} = 0.326$$

$$= \frac{0.069}{0.069+0.391} = 0.15$$

(3) $P(\bar{D}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{D}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{D}\cap\bar{A})}{P(D\cap\bar{A})+P(\bar{D}\cap\bar{A})} = \frac{0.2\cdot 0.46}{0.2\cdot 0.46+0.8\cdot 0.46}$

$\bar{D}\cup\bar{A} = \bar{A}+\bar{D} - (\bar{D}\cap\bar{A})$

$= 0.46 + 0.25 -$