יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 12

שדות משמרים
משפט Green

שדות משמרים

.1

נתון השדה $\vec{F}(x,y)=2xy^3\hat{i}+(y+3x^2y^2)\hat{j}$.

א. להוכיח ש $\vec{F}$ שדה משמר ב $\mathbb{R}^2$.

ב. לחשב את העבודה של השדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ שהינה הגרף של הפונקציה $\varphi(x)=1+\sin^2(\pi x)$ מ $x=0$ ל $x=3$.

ג. למצוא פונקציית פוטנציאל לשדה $\vec{F}$ ב $\mathbb{R}^2$.

ד. לחשב שוב את העבודה מסעיף ב' באמצעות פונקציית הפוטנציאל.

.א

רכיבי השדה הם הפונקציות

$$P(x,y)=2xy^3 \quad , \quad Q(x,y)=y+3x^2y^2$$

אלו פולינומים בשני משתנים ולכן הן רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל תחום הגדרתן, כלומר בכל $\mathbb{R}^2$.

נחשב הנגזרות החלקיות

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3\cdot 2x\cdot y^2=6xy^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\cdot 3y^2=6xy^2$$

ולכן מתקיים $Q_x=P_y$ בכל $\mathbb{R}^2$.

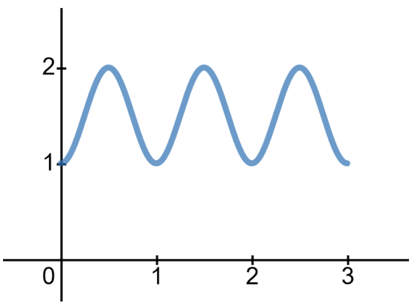
$\mathbb{R}^2$ הוא תחום פשוט קשר (ללא חורים), רכיבי השדה $\vec{F}$ (כלומר הפונקציות P,Q) הם בעלי נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbb{R}^2$, בכל $\mathbb{R}^2$ מתקיים $Q_x=P_y$, ו ולכן השדה $\vec{F}$ משמר ב $\mathbb{R}^2$.

.ב

עבודת השדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ נתונה ע"י

$$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\gamma 2xy^3dx+(y+3x^2y^2)dy$$

המסילה γ :



פרמטריזציה של המסילה γ בתור גרף של הפונקציה $y=\varphi(x)=1+\sin^2(\pi x)$:

$$x=t \quad , \quad y=1+\sin^2(\pi t) \quad , \quad t:0\to 3$$

ולכן עבודת השדה $\vec{F}$ לאורך המסילה γ נתונה ע"י

$$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=$$

$$=\int_{t=0}^{3}\left[\underbrace{2t(1+\sin^2(\pi t))^3}_{P}\cdot\underbrace{1}_{x'}+\underbrace{\left((1+\sin^2(\pi t))+3t^2(1+\sin^2(\pi t))^2\right)}_{Q}\cdot\underbrace{(2\sin(\pi t)\cos(\pi t)\cdot\pi)}_{y'}\right]dt$$

נראה לא נחמד.

מכיוון שהשדה משמר ב $\mathbb{R}^2$ אין תלות במסילה, אפשר להחליף את המסילה הנתונה במסילה אחרת המתחילה ומסתיימת באותן נקודות שבהן המסילה γ מתחילה ומסתיימת.

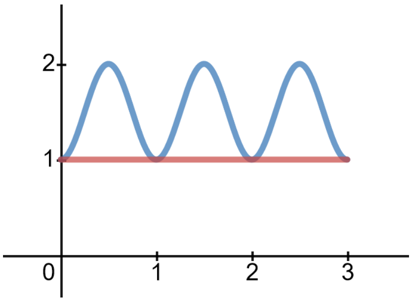
נקודת ההתחלה של γ :

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad x=0\,,\ y=1+\sin^2(\pi\cdot 0)=1$$

נקודת הסיום של γ :

$$t=3 \quad \Rightarrow \quad x=3\,,\ y=1+\sin^2(\pi\cdot 3)=1$$

נגדיר מסילה γ_1 שהינה הקטע הישר מהנקודה $(0,1)$ לנקודה $(3,1)$.



γ ו γ_1 שתי מסילות שלהן אותן נקודות התחלה וסיום, ושתיהן מוכלת כולן בתחום $\mathbb{R}^2$ בו $\vec{F}$ שדה משמר, ולכן $\int\limits_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

פרמטריזציה למסילה γ_1 :

$$x=t \;\;,\;\; y=1 \;\;,\;\; t:0\to 3$$

ולכן

$$W=\int\limits_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$=\int\limits_{t=0}^{3}\left[\underbrace{2t\cdot 1^3}_{P}\cdot\underbrace{1}_{x'}+\underbrace{\left(1+3t^2\cdot 1^2\right)}_{Q}\cdot\underbrace{0}_{y'}\right]dt=\int\limits_{t=0}^{3} 2t dt = t^2\Big|_0^3 = 3^2-0^2=9$$

ג.

נמצא לשדה $\vec{F}$ פונקציית פוטנציאל $\phi(x,y)$ בתחום D , כלומר נמצא פונקציה $\phi(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות שתקיים

$$\phi_x(x,y)=P(x,y)=2xy^3$$
$$\phi_y(x,y)=Q(x,y)=y+3x^2y^2$$

$$\phi_x(x,y)=P(x,y)=2xy^3$$
$$\Rightarrow \quad \phi(x,y)=\int P(x,y)dx=\int 2xy^3dx = x^2y^3+\alpha(y)$$

כאשר $\alpha(y)$ קבוע האינטגרציה.

$$\Rightarrow \quad \phi_y(x,y)=3x^2y^2+\alpha'(y)$$

אבל דורשים

$$\phi_y(x,y)=Q(x,y)$$
$$3x^2y^2+\alpha'(y)=y+3x^2y^2$$
$$\alpha'(y)=y$$

נמצא את $\alpha(y)$

$$\alpha(y)=\int y dy=\frac{1}{2}y^2+c$$

ולכן

$$\phi(x,y)=x^2y^3+\frac{1}{2}y^2+c$$

ד.

נוסחת Newton-Leibniz:

יהי $\vec{F}$ שדה משמר בתחום D ו $\phi(x,y)$ פונקציית פוטנציאל עבור השדה $\vec{F}$ בתחום D.

אם γ מסילה המוכלת כולה בתחום D המתחילה בנקודה A ומסתיימת בנקודה B, אז

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(B)-\phi(A)$$

מצאנו בסעיף א' שהשדה $\vec{F}$ משמר ב $\mathbb{R}^2$.

ראינו שהמסילה γ מתחילה בנקודה $A=(0,1)$ ומסתיימת בנקודה $B=(3,1)$, ולכן

$$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(B)-\phi(A)=\phi(3,1)-\phi(0,1)=$$

$$=\left(3^2\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2\right)-\left(0^2\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2\right)=9\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=9$$

.2

המסילה γ היא הקטע הישר מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(1,1)$, המסילה δ היא הקטע הישר מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(1,0)$ וממנה הקטע הישר לנקודה $(1,1)$.

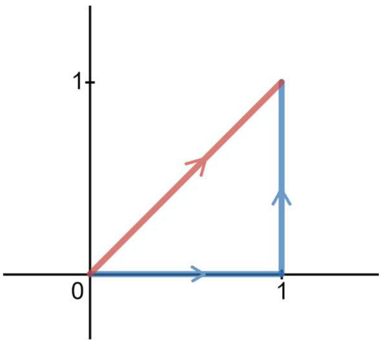
א. נתון השדה $\vec{F}=\left(\sin y+x+1\,,\cos y\right)$. לחשב $\int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ ו $\int_{\delta}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

ב. האם השדה $\vec{F}$ משמר ב $\mathbb{R}^2$?

ג. למצוא פונקציה $h(x)$ שגזירה ברציפות ב $\mathbb{R}$ כך שהשדה $\vec{G}=\left(h(x)(\sin y+x+1)\,,h(x)\cos y\right)$ יהיה משמר ב $\mathbb{R}^2$.

ד. עבור $h(x)$ זו, למצוא פונקציית פוטנציאל עבור השדה $\vec{G}$ ב $\mathbb{R}^2$, ולחשב $\int_{\gamma}\vec{G}\cdot d\vec{r}$ ו $\int_{\delta}\vec{G}\cdot d\vec{r}$.

א.



פרמטריזציה למסילה γ נתונה ע״י

$$x=t\ ,\ y=t\ ,\ t:0\to 1$$

ולכן

$$\int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\left[(\sin t+t+1)\cdot 1+\cos t\cdot 1\right]dt=\int_0^1(\sin t+t+1+\cos t)dt=-\cos t+\frac{1}{2}t^2+t+\sin t\Big|_0^1=$$

$$=\left(-\cos 1+\frac{1}{2}+1+\sin 1\right)-\left(-\cos 0+\sin 0\right)=\sin 1-\cos 1+\frac{5}{2}$$

נפצל את המסילה δ ע״י $\delta=\delta_1+\delta_2$ כאשר δ_1 היא הקטע הישר מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(1,0)$ ו δ_2 היא הקטע הישר מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(1,1)$.

פרמטריזציה למסילה δ_1 נתונה ע״י

$$x=t\ ,\ y=0\ ,\ t:0\to 1$$

ולכן

$$\int_{\delta_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\left[(\sin 0+t+1)\cdot 1+\cos 0\cdot 0\right]dt=\int_0^1(t+1)dt=\frac{1}{2}t^2+t\Big|_0^1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

פרמטריזציה למסילה δ_2 נתונה ע״י

$$x=1\ ,\ y=t\ ,\ t:0\to 1$$

ולכן

$$\int_{\delta_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1\left[(\sin t+1+1)\cdot 0+\cos t\cdot 1\right]dt=\int_0^1\cos t\,dt=\sin t\Big|_0^1=\sin 1-\sin 0=\sin 1$$

ומכאן

$$\int_{\delta}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\delta_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\delta_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{3}{2}+\sin 1$$

ב.
פתרון I:
נשים לב $\cos 1 \neq 1$ ולכן $\sin 1-\cos 1+\frac{5}{2} \neq \frac{3}{2}+\sin 1$.
γ, δ הן שתי מסילות המתחילות באותה נקודה $(0,0)$ ומסתיימות באותה נקודה $(1,1)$ (ומוכלות כולן ב $\mathbb{R}^2$), אבל $\int_{\delta} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, ולכן השדה $\vec{F}$ אינו משמר ב $\mathbb{R}^2$.

באופן דומה ניתן להסיק שהשדה $\vec{F}$ אינו משמר באף תחום במישור המכיל בתוכו את המסילות γ, δ.
לדוגמא $\vec{F}$ אינו משמר בריבוע $D=\{(x, y) \mid -2<x<2,-2<y<2\}$.
פתרון II:
רכיבי השדה $\vec{F}$ הם הפונקציות

$$P(x, y)=\sin y+x+1 \ , \ Q(x, y)=\cos y$$

נחשב הנגזרות החלקיות

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \ , \ \frac{\partial P}{\partial y}=\cos y$$

ולכן

$$Q_x=P_y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{\pi}{2}+\pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

כדי שהשדה יהיה משמר ב $\mathbb{R}^2$ צריך שיתקיים $Q_x=P_y$ בכל $\mathbb{R}^2$ אבל כאמור זה לא מתקיים, ולכן השדה אינו משמר ב $\mathbb{R}^2$.

הערה:
באופן כללי יותר, ניתן להסיק שהשדה $\vec{F}$ אינו משמר באף תחום במישור.
אם $\vec{F}$ שדה משמר בתחום D אז בכל נקודה ב D צריך להתקיים $Q_x=P_y$, כלומר צריך להתקיים $y=\frac{\pi}{2}+\pi k \ , \ k \in \mathbb{Z}$, כלומר הקבוצה D צריכה להיות מוכלת בתוך הישרים האופקיים $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$.
אבל תחום הוא קבוצה פתוחה, וקבוצה פתוחה אינה יכולה להיות בתוך קו ישר.
ולכן השדה $\vec{F}$ אינו משמר באף תחום במישור.

ג.
נסמן רכיבי השדה $\vec{G}$ ב

$$P(x, y)=h(x)(\sin y+x+1)=h(x) \sin y+h(x) x+h(x)$$
$$Q(x, y)=h(x) \cos y$$

$h(x)$ גזירה ברציפות ב $\mathbb{R}$ ולכן $P(x, y), Q(x, y)$ פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^2$.

$$P_y=h(x) \cos y$$
$$Q_x=h'(x) \cos y$$
$$Q_x=P_y \quad \Leftrightarrow \quad h'(x) \cos y=h(x) \cos y$$

והשוויון הזה מתקיים לכל x, y אם ורק אם מתקיים

$$h'(x)=h(x)$$

פונקציה $h(x)$ שגזירה ברציפות ב $\mathbb{R}$ ומקיימת $h'(x)=h(x)$: אפשר לבחור $h(x)=e^x$.
ואז עבור $h(x)=e^x$ מתקבל:
$Q(x, y)=e^x \cos y$, $P(x, y)=e^x \sin y+x e^x+e^x$ פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל $\mathbb{R}^2$
ומקיימות $Q_x=P_y$ בכל $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ הוא תחום פשוט קשר (ללא חורים) ולכן מתקבל שהשדה $\vec{G}$ משמר ב $\mathbb{R}^2$.

ד.

נסמן פונקציית פוטנציאל של השדה $\vec{G}$ ב $\phi(x,y)$. אז $\phi(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות שצריכה לקיים

$$\phi_x(x,y) = P(x,y) = e^x \sin y + xe^x + e^x$$
$$\phi_y(x,y) = Q(x,y) = e^x \cos y$$

נמצא פונקציה $\phi(x,y)$ שכזו:

$$\phi_y(x,y) = Q(x,y) = e^x \cos y$$
$$\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \int e^x \cos y dy = e^x \sin y + \alpha(x)$$

כאשר $\alpha(x)$ קבוע האינטגרציה.

$$\Rightarrow \quad \phi_x(x,y) = e^x \sin y + \alpha'(x)$$

מצד שני

$$\phi_x(x,y) = P(x,y) = e^x \sin y + xe^x + e^x$$
$$\Rightarrow \quad e^x \sin y + \alpha'(x) = e^x \sin y + xe^x + e^x$$
$$\Rightarrow \quad \alpha'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

ע״י אינטגרציה בחלקים

$$\Rightarrow \quad \alpha(x) = \int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int 1 \cdot e^x dx = (x+1)e^x - e^x + c = xe^x + c$$
$$\Rightarrow \quad \phi(x,y) = e^x \sin y + xe^x + c$$

כעת נחשב האינטגרלים המבוקשים, לפי המשפט היסודי של האינטגרל הקווי (נוסחת Newton-Leibniz).

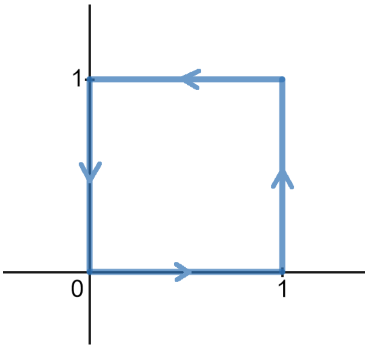
$\vec{G}$ שדה משמר ב $\mathbb{R}^2$, γ, δ הן שתי מסילות המתחילות בנקודה $(0,0)$ ומסתיימות בנקודה $(1,1)$ ולכן

$$\int_\gamma \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_\delta \vec{G} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \phi(1,1) - \phi(0,0) = (e^1 \sin 1 + 1 \cdot e^1) - (e^0 \sin 0 + 0 \cdot e^0) = e \sin 1 + e$$

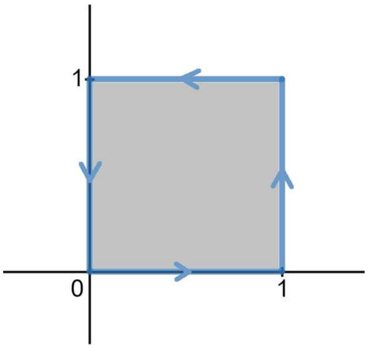
משפט Green

.1

לחשב עבודת השדה $W=\int_{\gamma} xydy-y^2dx$ כאשר המסילה γ היא הריבוע שצלעותיו הן הישרים $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ נגד כוון השעון.



המסילה γ היא מסילה סגורה.
כל אחת מצלעות הריבוע היא מסילה חלקה, ולכן המסילה γ היא מסילה חלקה למקוטעין.



נסמן ב D את התחום החסום בתוך המסילה הסגורה γ, זהו הריבוע
$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1\,,\,0\le y\le 1\}$
זהו תחום פשוט קשר (ללא חורים)
השפה של התחום D, עם הכוון החיובי במובן משפט Green (כאשר מתקדמים על המסילה γ בכוון זה רואים את התחום D הכלוא בתוכה בצד שמאל), הוא בדיוק המסילה הסגורה γ.

האינטגרל המבוקש הוא $\int_{\gamma} xydy-y^2dx$, כלומר רכיבי השדה הם הפונקציות

$$P(x,y)=-y^2 \quad , \quad Q(x,y)=xy$$

אלו פולינומים בשני משתנים ולכן פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור $\mathbb{R}^2$, ובפרט בתחום D ועל השפה של D.

לסיכום: $\vec{F}$ שדה וקטורי שרכיביו בעלי נגזרות חלקיות רציפות בתחום D ועל השפה של D, שהינו תחום פשוט קשר, שפת D היא המסילה הסגורה וחלקה למקוטעין γ עם הכוון החיובי במובן משפט Green. מתקיימות כל דרישות משפט Green ולכן

$$\oint_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{D}(Q_x-P_y)dA$$

נחשב הנגזרות החלקיות

$$Q_x=y \quad , \quad P_y=-2y$$

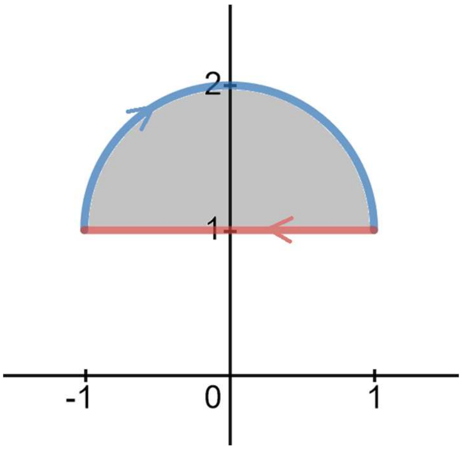
ולכן

$$\oint_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{D}(Q_x-P_y)dA=\iint_{D}(y-(-2y))dA=\iint_{D}3ydA=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 3ydy=\int_0^1 dx\frac{3}{2}y^2\Big|_{y=0}^{1}=\int_0^1\frac{3}{2}dx=\frac{3}{2}(1-0)=\frac{3}{2}$$

.2

לחשב $\int_\gamma \frac{(x^4-2xy+y^2)dx+(x^2+x^4y+y^3)dy}{x^4+y^2}$ כאשר המסילה γ הינה החצי העליון של המעגל שמרכזו $(0,1)$ ורדיוסו 1, עם כוון השעון.



המסילה γ הנתונה בשאלה אינה סגורה. נפתור התרגיל ע״י סגירתה ושימוש במשפט Green.

המסילה γ היא החצי העליון של המעגל שמרכזו $(0,1)$ ורדיוסו 1 עם כוון השעון, ולכן נקודת ההתחלה של γ היא $(-1,1)$ ונקודת הסיום היא $(1,1)$.

נגדיר מסילה γ_0, זהו הקטע הישר מהנקודה $(1,1)$ לנקודה $(-1,1)$.

נגדיר מסילה $\gamma^*=\gamma+\gamma_0$. אז γ^* הינה מסילה סגורה. הכוון הנתון בחצי המעגל γ הוא עם כוון השעון, ולפי הכוון שהגדרנו על γ_0 מתקבל שהכוון על המסילה הסגורה γ^* הוא עם כוון השעון.

נשים לב שהמסילות γ, γ_0 הינן חלקות ולכן γ^* מסילה חלקה למקוטעין.

נסמן ב D את התחום החסום בתוך המסילה הסגורה γ^*, זהו המחצית העליונה של העיגול $x^2+(y-1)^2\le 1$, וזהו תחום פשוט קשר. וכמו כן γ^* (בהתעלם מהכוון) הינה השפה של התחום D.

אבל נשים לב שהכוון על γ^* הוא הפוך מהכוון של השפה של D במובן משפט Green. כלומר השפה של D עם הכוון החיובי במובן משפט Green היא למעשה $-\gamma^*$.

נסמן את השדה הוקטורי $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{x^4-2xy+y^2}{x^4+y^2},\frac{x^2+x^4y+y^3}{x^4+y^2}\right)$.

רכיבי השדה הן הפונקציות

$$P(x,y)=\frac{x^4-2xy+y^2}{x^4+y^2}=\frac{(x^4+y^2)-2xy}{x^4+y^2}=1-\frac{2xy}{x^4+y^2}$$

$$Q(x,y)=\frac{x^2+x^4y+y^3}{x^4+y^2}=\frac{x^2+(x^4+y^2)y}{x^4+y^2}=\frac{x^2}{x^4+y^2}+y$$

אלו פונקציות רציונליות בשני משתנים ולכן הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור $\mathbb{R}^2$ פרט לראשית, ובפרט בתחום D ועל השפה של D.

לסיכום: $\vec{F}$ שדה וקטורי שרכיביו בעלי נגזרות חלקיות רציפות בתחום D ועל השפה של D, שהינו תחום פשוט קשר, שפת D היא המסילה הסגורה וחלקה למקוטעין $-\gamma^*$ עם הכוון החיובי במובן משפט Green. מתקיימות כל דרישות משפט Green ולכן

$$\oint_{-\gamma^*}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D(Q_x-P_y)dA \Rightarrow -\oint_{\gamma^*}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D(Q_x-P_y)dA \Rightarrow \oint_{\gamma^*}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\iint_D(Q_x-P_y)dA$$

נחשב הנגזרות החלקיות

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2x(x^4+y^2)-x^2\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2}+0=\frac{2x^5+2xy^2-4x^5}{(x^4+y^2)^2}=\frac{-2x^5+2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0-\frac{(2x)\cdot(x^4+y^2)-(2xy)\cdot 2y}{(x^4+y^2)^2}=-\frac{2x^5+2xy^2-4xy^2}{(x^4+y^2)^2}=\frac{-2x^5+2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$$

ומתקבל $Q_x=P_y$ כלומר $Q_x-P_y=0$, ולכן לפי משפט Green

$$\oint_{\gamma^*} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\iint_D (Q_x - P_y)dA = -\iint_D 0dA = -0 = 0$$

נחשב את האינטגרל של השדה $\vec{F}$ על המסילה γ_0.

פרמטריזציה למסילה γ_0 נתונה ע״י

$x = t \ , \ y = 1 \ , \ t: 1 \to -1$

ולכן

$$\int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_0} Pdx + Qdy = \int_1^{-1} [P(t,1)\cdot x'(t) + Q(t,1)\cdot y'(t)]dt =$$

$$= \int_1^{-1} \left[\left(1 - \frac{2t\cdot 1}{t^4+1^2}\right)\cdot 1 + \left(\frac{t^2}{t^4+1^2}+1\right)\cdot 0\right]dt = \int_1^{-1}\left(1-\frac{2t}{t^4+1}\right)dt = \int_1^{-1} 1dt - \int_1^{-1}\frac{2t}{t^4+1}dt =$$

$$= (-1-1) - \int_1^{-1}\frac{2t}{t^4+1}dt = -2 - \int_1^{-1}\frac{2t}{t^4+1}dt$$

האינטגרל האחרון אפשר לחשב ישירות ע״י החלפת משתנה

$u = t^2 \ \Rightarrow \ du = 2tdt \ , \ t = 1 \to u = 1 \ , \ t = -1 \to u = 1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{2t}{t^4+1}dt = \int_1^1 \frac{1}{u^2+1}du = \arctan u\Big|_1^1 = 0$$

לחילופין, $\frac{2t}{t^4+1}$ פונקציה אי-זוגית ולכן האינטגרל שלה בקטע הסימטרי $[-1,1]$ שווה לאפס.

ולכן

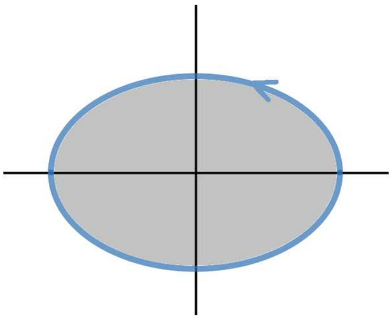
$$\int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -2 - \int_{-1}^{1}\frac{2t}{t^4+1}dt = -2 - 0 = -2$$

$\gamma^* = \gamma + \gamma_0$, ולפי תכונת האדיטיביות של האינטגרל הקווי מהסוג השני

$$\oint_{\gamma^*} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma+\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma^*} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 - (-2) = 2$$

לחשב שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.



נשתמש בנוסחאות הבאות לחישוב שטח קבוצה D במישור.
נניח שהשפה של D , עם הכוון החיובי במובן משפט Green, היא מסילה חלקה למקוטעין γ .
אז השטח של D נתון ע"י הנוסחאות הבאות :

$$(1)\quad \text{area}(D)=\frac{1}{2}\oint_\gamma -ydx+xdy$$

$$(2)\quad \text{area}(D)=\oint_\gamma xdy$$

$$(3)\quad \text{area}(D)=-\oint_\gamma ydx$$

הסבר נוסחה (1) : נשתמש בנוסחת Green עבור השדה $\vec{F}(x,y)=(-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x)$. עבור שדה זה מתקבל $Q_x-P_y=\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=1$ ולכן ממשפט Green :

$$\frac{1}{2}\oint_\gamma -ydx+xdy=\oint_\gamma -\frac{1}{2}ydx+\frac{1}{2}xdy=\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D (Q_x-P_y)dA=\iint_D 1dA=\text{area}(D)$$

הסברים דומים לנוסחאות (2) ו (3).

תהי D האליפסה (המלאה) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$. אז השפה שלה γ , עם הכוון החיובי במובן משפט Green (כאשר מתקדמים על המסילה γ בכוון זה רואים את התחום D הכלוא בתוכה בצד שמאל), היא האליפסה (הטבעת האליפטית) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, נגד כוון השעון.

פרמטריזציה לאליפסה γ נתונה ע"י

$$x=a\cos t\ \ ,\ \ y=b\sin t\ \ ,\ \ t:0\to 2\pi$$

ולכן ע"י נוסחה (1) :

$$\text{area}(D)=\frac{1}{2}\oint_\gamma -ydx+xdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(-b\sin t)\cdot(-a\sin t)+(a\cos t)\cdot(b\cos t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot 2\pi=\pi ab$$

פתרון ע"י נוסחא (2) :

$$\text{area}(D)=\oint_\gamma xdy=\int_0^{2\pi}(a\cos t)\cdot(b\cos t)dt=\int_0^{2\pi} ab\cos^2 tdt=ab\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt=ab\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=ab\cdot\left[\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi}=ab\cdot\pi=\pi ab$$

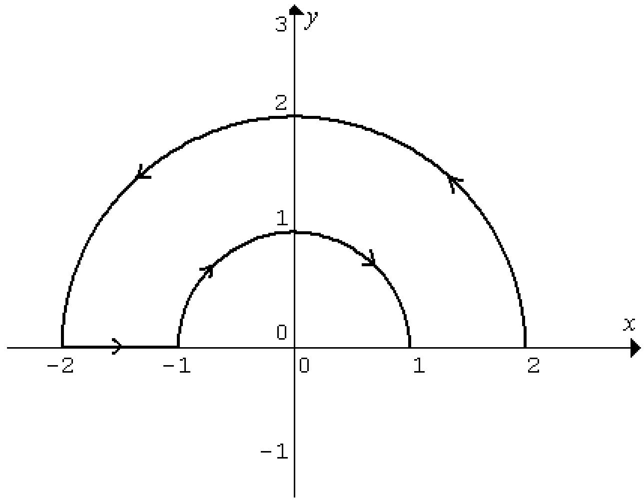
.4

לחשב $\int_\gamma \left(x-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ כאשר γ היא המסילה מהנקודה $(2,0)$ לנקודה $(-2,0)$

לאורך המעגל $x^2+y^2=4$ נגד כוון השעון, אח"כ מהנקודה $(-2,0)$ לנקודה $(-1,0)$ לאורך ציר x,

ולבסוף מהנקודה $(-1,0)$ לנקודה $(1,0)$ לאורך המעגל $x^2+y^2=1$ עם כוון השעון (ראו תרשים).

רמז: להוכיח $Q_x-P_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.



המסילה γ הנתונה בשאלה אינה סגורה. נפתור התרגיל ע"י סגירתה ושימוש במשפט Green.

נגדיר מסילה γ_0, זהו הקטע הישר מהנקודה $(1,0)$ לנקודה $(2,0)$.

נגדיר מסילה $\gamma^*=\gamma+\gamma_0$, אז γ^* הינה מסילה סגורה.

נשים לב שהמסילות γ, γ_0 הינן חלקות למקוטעין ולכן γ^* מסילה חלקה למקוטעין.

נסמן ב D את התחום הסגור בתוך γ^*. לפי הכוון הנתון על γ והכוון שהגדרנו על γ_0 ומתקבל שהכוון על המסילה הסגורה γ^* הוא עם הכוון החיובי במובן משפט Green – כאשר מתקדמים על המסילה γ^* בכוון זה רואים את התחום D הכלוא בתוכה בצד שמאל.

נסמן את השדה הוקטורי $\vec{F}=\left(x-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. רכיבי השדה הן הפונקציות

$$P(x,y)=x-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ Q(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ואלו פונקציות בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור פרט לראשית.

לסיכום: $\vec{F}$ שדה וקטורי שרכיביו בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום המכיל בתוכו את D, שהינו תחום פשוט קשר, שפת D היא המסילה הסגורה וחלקה למקוטעין γ^* עם הכוון החיובי במובן משפט Green. מתקיימות כל דרישות משפט Green ולכן

$$\oint_{\gamma^*}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D (Q_x-P_y)dA$$

$$Q_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

$$P_y=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

$$\Rightarrow\quad Q_x-P_y=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2+y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ולכן

$$\oint_{\gamma^*} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y)dA = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$$

התחום D הוא החצי העליון של הטבעת הכלואה בין המעגלים $x^2+y^2=2^2$, $x^2+y^2=1^2$ כלומר

$$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2^2\ ,\ y\ge 0\}$$

נחשב את האינטגרל הכפול הזה בקואורדינטות פולריות. התנאי $1\le x^2+y^2\le 2^2$ פרושו $1\le r\le 2$

והתנאי $y\ge 0$ פרושו $0\le\theta\le\pi$, ולכן התחום D הוא

$$D=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,1\le r\le 2\ ,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

וחישוב האינטגרל הכפול

$$\oint_{\gamma^*} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{r=1}^{2} \frac{1}{r}\cdot r dr = \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{r=1}^{2} 1dr = \int_{\theta=0}^{\pi} 1d\theta \cdot \int_{r=1}^{2} 1dr = \pi\cdot(2-1)=\pi$$

נחשב את האינטגרל של השדה $\vec{F}$ על המסילה γ_0 .

פרמטריזציה למסילה γ_0 נתונה ע"י

$$x=t\ \ ,\ \ y=0\ \ ,\ \ t:1\to 2$$

ולכן

$$\int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left[\left(t-\frac{0}{\sqrt{t^2+0^2}}\right)\cdot 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+0^2}}\cdot 0\right]dt = \int_1^2 tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(2^2-1^2)=\frac{3}{2}$$

$\gamma^*=\gamma+\gamma_0$, ולפי תכונת האדיטיביות של האינטגרל הקווי מהסוג השני

$$\oint_{\gamma^*} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma+\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow\quad \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma^*} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \pi - \frac{3}{2}$$