יונתן כהן
אלגברה לינארית
תרגול מספר 8

תלות ואי-תלות לינארית
span וקבוצה פורשת
בסיס

תלות ואי-תלות לינארית

1.

$\mathbf{v}_3=(1,-1,-1)$, $\mathbf{v}_2=(-1,0,1)$, $\mathbf{v}_1=(1,1,1)$, האם הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ ת"ל או בת"ל ?

נבדוק עבור איזה ערכים של x,y,z מתקיים $x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$.

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

בכל העמודות $1-3$ יש איברים פותחים, ולכן כל המשתנים הם משתנים קשורים. ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

ולכן $x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$ מתקיים אך ורק כאשר $x=y=z=0$, ומכאן שהקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

.2

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, האם הקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ ת״ל או בת״ל ?

נבדוק עבור איזה ערכים של x, y, z מתקיים $xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,1)\rightarrow \\ (1,2)\rightarrow \\ (2,1)\rightarrow \\ (2,2)\rightarrow \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

בעמודה 3 אין איבר פותח, ולכן משתנה z הוא משתנה חופשי. ומכאן שלמערכת יש פתרון לא טריביאלי.

כלומר קיימים x, y, z שלא כולם 0 כך שמתקיים $xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0$, ומכאן שהקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ היא תלויה לינארית.

span וקבוצה פורשת

.1

. $\mathbf{v}_1=(1,2,3)$, $\mathbf{v}_2=(1,1,1)$, $\mathbf{v}_3=(-1,0,1)$

א. למצוא את $\text{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$.

ב. האם הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$?

א.

וקטור כללי ב $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{w}=(a,b,c)$.

הוקטור הכללי $\mathbf{w}=(a,b,c)$ הוא צרוף לינארי של $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\,|\,\mathbf{w}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 3 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-2a \\ 0 & -2 & 4 & c-3a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-2(b-2a) \end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

למערכת יש פתרון אם ורק אם אין שורת סתירה, וזה קורה אם ורק אם

$$c-3a-2(b-2a)$$

$$a-2b+c=0$$

לסיכום, הוקטור הכללי $\mathbf{w}=(a,b,c)$ הוא צרוף לינארי של $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ אם ורק אם רכיביו מקיימים את התנאי

$$a-2b+c=0$$

$\text{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ הוא קבוצת כל הוקטורים ב $\mathbb{R}^3$ שהינם צירוף לינארי של $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.

משמעות הדבר היא ש

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}=\{\,(a,b,c)\,|\,a-2b+c=0\,\}$$

ב.

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}=\{\,(a,b,c)\,|\,a-2b+c=0\,\}\neq\mathbb{R}^3$$

ולכן הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ אינה פורשת את $\mathbb{R}^3$.

.2

$p(x)=1+x+x^2$, $q(x)=1+2x+3x^2$, $r(x)=1+4x+9x^2$, $s(x)=2+3x+4x^2$.

האם הקבוצה $\{p,q,r,s\}$ פורשת את $P_2(\mathbb{R})$?

וקטור כללי ב $P_2(\mathbb{R})$: $w(x)=a+bx+cx^2$.

הוקטור הכללי $w(x)=a+bx+cx^2$ הוא צרוף לינארי של p,q,r,s אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $p,q,r,s\,|\,w$.

$$\begin{array}{c} \\ 1\rightarrow \\ x\rightarrow \\ x^2\rightarrow \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p & q & r & s & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 4 & 3 & b \\ 1 & 3 & 9 & 4 & c \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 & 1 & b-a \\ 0 & 2 & 8 & 2 & c-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & 0 & c-a-2(b-a) \end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

למערכת יש פתרון אם ורק אם אין שורת סתירה.

לכל a,b,c אין שורת סתירה ולכן למערכת יש פתרון.

לסיכום, עבור כל a,b,c הוקטור הכללי $w(x)=a+bx+cx^2$ הוא צרוף לינארי של p,q,r,s .

משמעות הדבר היא שכל וקטור ב $P_2(\mathbb{R})$ הוא צרוף לינארי של p,q,r,s , כלומר

$$\operatorname{span}\{p,q,r,s\}=P_2(\mathbb{R})$$

ולכן הקבוצה $\{p,q,r,s\}$ פורשת את $P_2(\mathbb{R})$.

.3

$A_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

א. האם הקבוצה $\{A_1,A_2,A_3\}$ פורשת את $M_{2\times2}(\mathbb{R})$?

ב. למצוא קבוצה הפורשת את המרחב $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

א.

וקטור כללי ב $M_{2\times2}(\mathbb{R})$: $W=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$.

הוקטור הכללי $W=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ הוא צרוף לינארי של A_1,A_2,A_3 אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $A_1,A_2,A_3\,|\,W$.

$$\begin{array}{c} \\ (1,1)\to\\ (1,2)\to\\ (2,1)\to\\ (2,2)\to\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}A_1 & A_2 & A_3 & W\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & \alpha\\ -1 & 1 & 1 & \beta\\ 0 & 1 & 2 & \gamma\\ 1 & 0 & 1 & \delta\end{array}\right]\end{array}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{R_2\to R_2+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & \alpha\\ 0 & 1 & 2 & \alpha+\beta\\ 0 & 1 & 2 & \gamma\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+\delta\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & \alpha\\ 0 & 1 & 2 & \alpha+\beta\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-\beta+\gamma\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha+\delta\end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

למערכת יש פתרון אם ורק אם אין שורת סתירה, וזה קורה אם ורק אם

$$\begin{cases}-\alpha-\beta+\gamma & =0\\ -\alpha & +\delta=0\end{cases}$$

לסיכום, הוקטור הכללי $W=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ הוא צרוף לינארי של A_1,A_2,A_3 אם ורק אם רכיביו מקיימים את התנאי

$$\begin{cases}-\alpha-\beta+\gamma & =0\\ -\alpha & +\delta=0\end{cases}$$

$\mathrm{span}\{A_1,A_2,A_3\}$ הוא קבוצת כל הוקטורים ב $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ שהינם צירוף לינארי של A_1,A_2,A_3 .

משמעות הדבר היא ש

$$\mathrm{span}\{A_1,A_2,A_3\}=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\ \middle|\ -\alpha-\beta+\gamma=0\,,-\alpha+\delta=0\right\}\neq M_{2\times2}(\mathbb{R})$$

ולכן הקבוצה $\{A_1,A_2,A_3\}$ אינה פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ב.

כדי שקבוצת וקטורים $\{B_1,B_2,\ldots,B_k\}$ תפרוש את המרחב, צריך שעבור כל $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ יהיה פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $B_1,B_2,\ldots,B_k\,|\,W$.

נבחר וקטורים $B_1,B_2,\ldots,B_k$ כך שכשנרשום את המטריצה שעמודותיה הן $B_1,B_2,\ldots,B_k\,|\,W$, עבור כל $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ יהיה פתרון.

לדוגמה: המטריצה

$$\begin{array}{c} \\ (1,1)\rightarrow \\ (1,2)\rightarrow \\ (2,1)\rightarrow \\ (2,2)\rightarrow \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & W \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & \alpha \\ 0 & 3 & 5 & 8 & \beta \\ 0 & 0 & 6 & 9 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 10 & \delta \end{array}\right] \end{array}$$

המטריצה כבר מדורגת (לא קנונית).

לכל $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ אין שורת סתירה ולכן למערכת יש פתרון.

משמעות הדבר היא שכל וקטור ב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ הוא צרוף לינארי של $B_1,B_2,\ldots,B_k$, כלומר

$$\operatorname{span}\{B_1,B_2,B_3,B_4\}=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

ולכן הקבוצה $\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ פורשת את $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

מסקנה: קבוצה הפורשת את $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ נתונה ע"י

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}2&3\\0&0\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}4&5\\6&0\end{bmatrix},\ B_4=\begin{bmatrix}7&8\\9&10\end{bmatrix}$$

<u>בסיס</u>

.1

האם הקבוצה $\{\mathbf{v}_1=(1,2,3)\ ,\ \mathbf{v}_2=(1,1,1)\ ,\ \mathbf{v}_3=(-1,0,1)\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$?

ראינו בדוגמה קודמת שהקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ אינה פורשת את $\mathbb{R}^3$, ולכן אינה בסיס של $\mathbb{R}^3$.
(הערה: קבוצה זו גם אינה בת"ל).

.2

האם הקבוצה $\left\{A_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

ראינו בדוגמה קודמת שהקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ תלויה לינארית, כלומר אינה בלתי תלויה לינארית, ולכן אינה בסיס של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(הערה: קבוצה זו גם אינה פורשת את $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$).

.3

האם הקבוצה $\{p(x)=1+x+x^2\ ,\ q(x)=1+2x+3x^2\ ,\ r(x)=1+4x+9x^2\}$ בסיס של $P_2(\mathbb{R})$?

נבדוק האם הקבוצה $\{p,q,r\}$ בלתי תלויה לינארית.

נבדוק עבור איזה ערכים של α,β,γ מתקיים $\alpha p(x)+\beta q(x)+\gamma r(x)=0$.

נבדוק את מטריצת המקדמים של המערכת, המטריצה שעמודותיה הן p,q,r .

$$\begin{array}{c} \\ 1\to \\ x\to \\ x^2\to \end{array}\begin{array}{c} p\quad q\quad r \\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\end{array} \overset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\ R_3\to R_3-R_1}}{=} \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3-2R_2}{=} \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{vmatrix} \overset{\text{TRIANGULAR}}{=} 1\cdot 1\cdot 2=2\neq 0$$

הדטרמיננט של המטריצה שונה מ 0 ולכן המטריצה הפיכה, ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

ולכן $\alpha p(x)+\beta q(x)+\gamma r(x)=0$ מתקיים אך ורק כאשר $\alpha=\beta=\gamma=0$, ומכאן שהקבוצה $\{p,q,r\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

נבדוק האם הקבוצה $\{p,q,r\}$ פורשת את $P_2(\mathbb{R})$.

וקטור כללי ב $P_2(\mathbb{R})$: $w(x)=a+bx+cx^2$.

הוקטור הכללי $w(x)=a+bx+cx^2$ הוא צרוף לינארי של p,q,r אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $p,q,r\,|\,w$

$$\begin{array}{c} \\ 1\to \\ x\to \\ x^2\to \end{array}\begin{array}{c} p\quad q\quad r\quad w \\ \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&2&4&b\\1&3&9&c\end{array}\right]\end{array}$$

כבר מצאנו שמטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת הפיכה, ולכן לכל a,b,c למערכת יש פתרון.

לסיכום, עבור כל a,b,c הוקטור הכללי $w(x)=a+bx+cx^2$ הוא צרוף לינארי של p,q,r .

משמעות הדבר היא שכל וקטור ב $P_2(\mathbb{R})$ הוא צרוף לינארי של p,q,r , כלומר

$$\text{span}\{p,q,r\}=P_2(\mathbb{R})$$

ולכן הקבוצה $\{p,q,r\}$ פורשת את $P_2(\mathbb{R})$.

מצאנו שהקבוצה $\{p,q,r\}$ בלתי תלויה לינארית וגם פורשת את $P_2(\mathbb{R})$, ולכן היא בסיס של $P_2(\mathbb{R})$.

4.

$K=\left\{k_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ k_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&t\end{bmatrix},\ k_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ k_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$.

עבור איזה ערכים של t תהיה K בסיס של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$?

נבדוק את המטריצה שעמודותיה הן k_1,k_2,k_3,k_4, נקרא לה A .

$$\begin{array}{c} \\ (1,1)\rightarrow \\ (1,2)\rightarrow \\ (2,1)\rightarrow \\ (2,2)\rightarrow \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&t&0&0\end{bmatrix} \end{array}=A$$

נבדוק את הפיכות המטריצה A ע"י חישוב הדטרמיננט שלה

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&t&0&0\end{vmatrix}\overset{\text{ROW 1}}{=}\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&-1\\t&0&0\end{vmatrix}\overset{\text{ROW 3}}{=}t\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2t$$

$|A|=0 \iff 2t=0 \iff t=0$.

ולכן:

אם $t\neq0$ אז המטריצה A הפיכה.

מכיוון ש A הפיכה, למערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן k_1,k_2,k_3,k_4 יש פתרון יחיד, הטריביאלי, ולכן הקבוצה K בלתי תלויה לינארית.

כמו כן מכיוון ש A הפיכה, אז עבור כל a,b,c,d למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $k_1,k_2,k_3,k_4\,|\,W$ (כאשר $W=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$) יש פתרון, ולכן הקבוצה K פורשת את $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

הקבוצה K בלתי תלויה לינארית וגם פורשת את $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, ולכן היא בסיס של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

אם $t=0$ אז המטריצה A אינה הפיכה.

מכיוון ש A אינה הפיכה, למערכת ההומוגנית יש פתרון לא טריביאלי, ולכן הקבוצה K תלויה לינארית.

כמו כן מכיוון ש A אינה הפיכה, אז לא נכון שעבור כל a,b,c,d למערכת המשוואות האי-הומוגנית יש פתרון, ולכן הקבוצה K אינה פורשת את $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

הקבוצה K אינה בלתי תלויה לינארית וגם אינה פורשת את $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, ולכן היא אינה בסיס של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

בסיס של תת מרחב

.1

W היא קבוצת כל המטריצות האנטי-סימטריות מסדר 3×3.

א. להוכיח ש W תת מרחב של $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ולמצוא לה קבוצה פורשת.

ב. למצוא בסיס של תת המרחב W.

א.

איבר כללי ב W הוא מטריצה מסדר 3×3 שהיא אנטי-סימטרית, איבר כללי שכזה נראה כך :

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

(הסבר : במטריצה אנטי-סימטרית אברי האלכסון שווים ל 0.
ניתן לבחור את האיברים שמעל אלכסון באופן שרירותי, ומהאנטי-סימטריה נקבעים האיברים שמתחת לאלכסון).

נשים לב שניתן לרשום את האיבר הכללי ניתן להיכתב ב'כתיב וקטורי' כך :

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} \quad (*)$$

כלומר האיבר הכללי של הקבוצה W הוא צרוף לינארי של A_1, A_2, A_3, כאשר המקדמים הם הרכיבים a,b,c.

הערה : נשים לב שהמטריצות A_1, A_2, A_3 הן איברים של W כלומר מטריצות אנטי-סימטריות מסדר 3×3 (אפשר לבדוק באופן ישיר שהן מטריצות אנטי-סימטריות. לחילופין אפשר לשים לב שהמטריצה A_1 היא בדיוק איבר הכללי בו הצבנו $a=1, b=0, c=0$, ובדומה לגבי A_1, A_2).

קבוצת כל המטריצות שבצד שמאל של השוויון $(*)$ (עבור כל $a,b,c\in\mathbb{R}$) – זו בדיוק הקבוצה W.

קבוצת כל המטריצות שבצד ימין של השוויון $(*)$ (עבור כל $a,b,c\in\mathbb{R}$) – זו בדיוק קבוצת כל הצירופים הלינאריים של A_1, A_2, A_3, כלומר $\mathrm{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

כלומר מהשוויון $(*)$ נובע

$$W = \mathrm{span}\{A_1, A_2, A_3\}$$

מתקבל שהקבוצה W היא span של וקטורים במרחב הוקטורי $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, ולכן (לפי משפט) W היא תת מרחב של $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

כמו כן מתקבל שהקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ פורשת את תת המרחב W.

ב.

נבדוק האם הקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

פתרון I:

נבדוק את מטריצת המקדמים של המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן A_1, A_2, A_3

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,1)\rightarrow \\ (1,2)\rightarrow \\ (1,3)\rightarrow \\ (2,1)\rightarrow \\ (2,2)\rightarrow \\ (2,3)\rightarrow \\ (3,1)\rightarrow \\ (3,2)\rightarrow \\ (3,3)\rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

בכל העמודות $1-3$ יש איברים פותחים, ולכן כל המשתנים הם משתנים קשורים. ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

ולכן $xA_1 + yA_2 + zA_3 = 0$ מתקיים אך ורק כאשר $x = y = z = 0$, ומכאן שהקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

פתרון II:

נעזר בשוויון

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} \quad (*)$$

נבדוק עבור איזה a, b, c מתקיים $aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0$. נניח

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0$$

מהשוויון $(*)$ מתקבל

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ומשוויון זה נובע ש $a = b = c = 0$, ומכאן שהקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

לסיכום, הקבוצה $\{A_1, A_2, A_3\}$ בלתי תלויה לינארית וגם פורשת את תת המרחב W, ולכן היא בסיס של תת המרחב W.