# פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"א סמסטר א שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא (אלא אם כתוב במפורש שלא צריך)

## שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (14 נקודות) נתונה מערכת המשוואות
$$\begin{cases} x & +2y & +(3a+3)z & = & 1 \\ x & +(2a+2)y & +3z & = & a+1 \\ (a+1)x & +2y & +3z & = & 1-a \end{cases}$$

(i) מצאו את הערכים של הפרמטר $a$ עבורם יש למערכת פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרון.

(ii) מצאו האם קיימים ערכים של הפרמטר $a$ כך שוקטור העמודה $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק

(i) תהי $A$ מטריצה לא ריבועית. אם למשוואה $Ax=b$ יש אינסוף פתרונות, אז ל-$A$ יש שורת אפסים.

(ii) תהי $A$ מטריצה לא ריבועית. אם למשוואה $Ax=b$ יש פתרון יחיד, אז ל-$A$ אין שורת אפסים.

## פתרון

א. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a+3 \\ 1 & 2a+2 & 3 \\ a+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-(a+1)R_1}}{=}$$

$$6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & -a^2-2a \end{vmatrix} = 6a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a \end{vmatrix} = -6a^2(3+a)$$

אם $a\neq 0,-3$ הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן המטריצה המצומצמת הפיכה ולמערכת יש פתרון יחיד.

(i) עבור $a=0$ דרגת המטריצה המורחבת והמצומצמת היא 1, ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ii) עבור $a=-3$ דרגת המטריצה המורחבת היא 3, ודרגת המטריצה המצומצמת היא 2, ולכן למערכת אין פתרונות.

ב. נציב את העמודה כפתרון ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} 1 & +2\cdot 0 & +(3a+3)\cdot 1 & = & 1 \\ 1 & +(2a+2)\cdot 0 & +3\cdot 1 & = & a+1 \\ (a+1)\cdot 1 & +2\cdot 0 & 3\cdot 1 & = & 1-a \end{cases}$$

נקבל כי $a=0, a=4, a=-\frac{1}{2}$ כלומר העמודה אינה פתרון, כי קיבלנו שתי שורות סתירה.

ג. שתי הטענות לא נכונות

(i) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}, b=1$

(ii) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

## שאלה 2. ($20$ נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. ($14$ נקודות) תהי $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. נתבונן בקבוצה $U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | \ AM = MA\}$

(i) הראו כי $U$ הוא תת-מרחב וקטורי של מרחב המטריצות הממשיות מסדר $2 \times 2$.

(ii) מיצאו בסיס ומימד ל $U$.

(iii) יהיה $W = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right\}$. חשבו את המימד של $W + U$.

ב. ($6$ נקודות) נתון מרחב וקטורי $V$ מעל $\mathbb{R}$ שמימדו $\dim V = 3$, ובסיס שלו $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. הוכיחו כי עבור כל $w \in \text{Span}(v_2, v_3)$ מתקיים כי $C = \{v_1 + w, v_2, v_3\}$ בסיס של $V$.

# פתרון

א. נראה כי אכן $U$ תת מרחב של $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(i) נבדוק כי מתקיימות שלוש הדרישות לתת מרחב:

i. $O \in U$: אכן, תהא $O_{2\times 2}$ מטריצת האפס מסדר $2 \times 2$. אז מתקיים,

$$O \cdot M = M \cdot O = O$$

ii. **סגירות לחיבור:** יהיו $A, B \in U$ צריך להראות כי $A + B \in U$. אכן,

$$(A + B) \cdot M = A \cdot M + B \cdot M = M \cdot A + M \cdot B = M \cdot (A + B)$$

iii. **סגירות לכפל בסקלר:** תהא $A \in U$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$. צריך להראות כי $\alpha A \in U$. אכן,

$$(\alpha A) \cdot M = \alpha A \cdot M = \alpha \cdot M \cdot A = M \cdot (\alpha A)$$

(ii) תהא $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה $2 \times 2$. מחפשים תנאים על $a, b, c, d$ עבורם $A \in U$. כלומר, רוצים כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2b & a + 3b \\ 2d & c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix}$$

נקבל מכאן כי

$$\begin{aligned} 2b &= c \\ a + 3b &= d \\ 2d &= 2a + 3c \\ c + 3d &= 2b + 3d \end{aligned}$$

והמטריצה $A$ היא מהצורה

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+3b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$U = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

מכיוון ששתי המטריצות הנ"ל אינן כפולה בסקלר אחת של השנייה, מתקיים כי המטריצות הן בת"ל ולכן מהוות בסיס ל $U$. ומתקיים כי $\dim U = 2$.

(iii) נציין תחילה כי המימד של $W$ הוא 2, כי הקבוצה הפורסת הנתונה של $W$ היא בת"ל (האיברים אינם כפולה אחד של השני) ולכן בסיס, כלומר המימד של $W$ הוא 2. המטריצה $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ מקיימת את התנאי $MI = IM$ ולכן היא ב-$U$, והיא בקבוצה הפורשת של $W$ ולכן גם ב-$W$, כלומר בחיתוך $U \cap W$. מכאן שמימד החיתוך הוא לפחות 1. מימד החיתוך לא יכול להיות 2, כי אז שני המרחבים היו שווים ($U \cap W$ תת מרחב של $U, W$, ואם מימדו שווה, אז $U = U \cap W = W$, כלומר הם שווים), אבל המטריצה $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ לא מקיימת $MB = BM$ ולכן מימד החיתוך שווה 1, ולכן ממשפט המימד נקבל כי

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

ב. נתון כי $w \in \mathrm{Span}(v_2, v_3)$ ולכן קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כל ש $w = \alpha v_1 + \beta v_2$. המימד של $V$ הוא 3, ולכן מספיק להראות שהקבוצה $C$ היא בת"ל. כדי להראות זאת מספיק להראות שוקטורי הקואורדינטות של איברי הקבוצה הם בת"ל.

$$[v_1 + w]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \; [v_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; [v_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קבוצת עמודות היא בת"ל אם"ם דרגת המטריצה שהן עמודותיה שווה למספר העמודות. במקרה שלנו

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

כלומר המטריצה הפיכה, ולכן הדרגה שווה למספר העמודות, כלומר קבוצת העמודות היא בת"ל ולכן גם הקבוצה $C$ היא בת"ל ומכאן - בסיס.

## שאלה 3. ($20$ נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. ($10$ נקודות) נסמן $V = \mathbb{R}_2[x] = P_2(\mathbb{R})$. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית המקיימת כי $[T]_C^B = I$, כאשר

$$B = \left\{-1+2x, -2x-x^2, 1+x+x^2\right\}, \; C = \left\{x, 1-5x-x^2, -2+6x+x^2\right\}$$

שני בסיסים סדורים של $V$, ($I$ היא מטריצת היחידה מסדר 3×3).

(i) חשבו את $T(-2+6x+x^2)$.

(ii) הוכיחו כי $T$ הפיכה וחשבו את $T^{-1}(-2+6x+x^2)$.

ב. ($10$ נקודות) יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ שמימדו $\dim V = 3$, ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של $V$.
נתונה העתקה לינארית $T: V \to V$ המקיימת $T(v_1) = v_2, \; T(v_2) = v_3, \; T(v_3) = v_1$

(i) הוכיחו כי $T \circ T \circ T$ היא העתקת הזהות על $V$, כלומר $T(T(T(v))) = v$ לכל $v \in V$

(ii) קבעו האם $T$ הפיכה.

# פתרון

א. מהנתון ומהגדרת המטריצה המייצגת נובע כי

$$T(-1+2x) = x, T(-2x-x^2) = 1-5x-x^2, T(1+x+x^2) = -2+6x+x^2$$

(i) כדי למצוא את $T(-2+6x+x^2)$ צריך למצוא את וקטור הקואורדינטות של $-2+6x+x^2$ לפי הבסיס $B$. נמצא זאת ע"י מציאת התלויות הלינאריות של וקטור הקואורדינטות של $-2+6x+x^2$ לפי הבסיס הסטנדרטי $St = \{1, x, x^2\}$ בוקטורי הקואורדינטות של איברי הבסיס $B$ (גם לפי הבסיס $St$). כלומר איך העמודה $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ תלויה לינארית בעמודות

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

עמודה כלשהי $b$ תלויה לינארית בקבוצת עמודות אם"ם למערכת $Ax = b$ יש פתרון (כאשר המטריצה $B$ היא המטריצה שעמודותיה היא קבוצת העמודות הנתונה), והעמודה $x$ היא עמודת המקדמים, ולכן יש למצוא פתרון למערכת שהמטריצה המורחבת שלה היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר קיבלנו כי וקטור הקואורדינטות הוא

$$\left[-2+6x+x^2\right]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left[T(-2+6x+x^2)\right]_C = [T]_C^B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(-2+6x+x^2) = 2x - (1-5x-x^2) = x^2+7x-1$$

(ii) העתקה לינארית היא הפיכה אם"ם קיימת מטריצה מייצגת שלה שהיא הפיכה. מטריצת היחידה היא הפיכה, ולכן ההעתקה $T$ הפיכה. כמו כן ידוע כי $T(1+x+x^2) = -2+6x+x^2$, ולכן מהגדרת ההפכית $T^{-1}(-2+6x+x^2) = 1+x+x^2$.

ב. נראה כי לכל $v \in V$ מתקיים כי $T \circ T \circ T(v) = v$: יהי $v \in V$, אזי קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, ולכן

$$T(v) = T(av_1 + bv_2 + cv_3) = aT(v_1) + bT(v_2) + cT(v_3) = av_2 + bv_3 + cv_1 \Rightarrow$$
$$T \circ T(v) = T(av_2 + bv_3 + cv_1) = av_3 + bv_1 + cv_2 \Rightarrow$$
$$T \circ T \circ T(v) = T(T(T(v))) = T(av_3 + bv_1 + cv_2) = av_1 + bv_2 + cv_3 = v$$

כלומר $T \circ T$ היא ההפכית של $T$, ולכן $T$ הפיכה.

## שאלה 4. ($20$ נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. ($10$ נקודות) תהי $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית מסדר $3\times 3$ המקיימת

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad |A|=3$$

חשבו את $\begin{vmatrix} a_{12} & 1 & a_{11}+2a_{13} \\ a_{22} & 2 & a_{21}+2a_{23} \\ a_{32} & 7 & a_{31}+2a_{33} \end{vmatrix}$

ב. ($10$ נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור כל טענה, אם היא נכונה הוכיחו אותה, ואם היא לא נכונה מצאו דוגמה נגדית שמפריכה אותה

(i) אם $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצות ריבועיות הפיכות מאותו סדר אי זוגי ($n$ אי זוגי), אז $A^2+B^2\neq 0$

(ii) אם $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ הפיכה, אז $I+A^2\neq 0$.

## פתרון

א. נתון כי

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a_{11}+2a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+2a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+2a_{32}+a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+2a_{12}+a_{13} & a_{11}+2a_{13} \\ a_{22} & a_{21}+2a_{22}+a_{23} & a_{21}+2a_{23} \\ a_{32} & a_{31}+2a_{32}+a_{33} & a_{31}+2a_{33} \end{vmatrix}\underbrace{=}_{C_2\to C_2-2C_1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{13} & a_{11}+2a_{13} \\ a_{22} & a_{21}+a_{23} & a_{21}+2a_{23} \\ a_{32} & a_{31}+a_{33} & a_{31}+2a_{33} \end{vmatrix}\underbrace{=}_{C_3\to C_3-C_2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11}+a_{13} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21}+a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31}+a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+0=-|A|=-3$$

ב. (i) הטענה נכונה: תהיינה $A,B$ מטריצות ריבועיות מסדר אי זוגי, והפיכות. אז

$$A^2+B^2=0\Leftrightarrow A^2=-B^2\Rightarrow |A|^2=(-1)^n|B|^2\Rightarrow |A|^2+|B|^2=0$$

ולשוויון האחרון אין פתרון עבור זוג מספרים ממשיים שונים מאפס.

(ii) הטענה לא נכונה כי

$$I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

מהווה דוגמה נגדית.

**שאלה 5. ($20$ נקודות)** נתונה מטריצה ממשית $A$ לא הפיכה מסדר $3 \times 3$ המקיימת: $\text{rank}(A - I) < \text{rank}(A)$.

א. ($15$ נקודות) הוכיחו ש-$A$ לכסינה.

ב. ($5$ נקודות) מצאו את הפולינום האפייני של $A$.

## פתרון

א. מכיוון ש- $A$ לא הפיכה אז 0 הוא ערך עצמי שלה ו- $\text{rank}(A) < 3$ . בנוסף, $rank(A-I) \geqslant 1$ כי אחרת $rank(A-I) = 0$ כלומר $A - I = 0$ ואז $A$ היתה הפיכה, זו סתירה לנתון. קיבלנו שיש אפשרות אחת בלבד :

$$rank(A-I) = 1,\ rank(A) = 2$$

נובע :

$$\dim Ker(A-I) = 3-1 = 2, \quad \dim Ker(A) = 3-2 = 1$$

ואז : 1 הוא ערך עצמי של $A$ בעל ריבוי גיאומטרי 2 ו0 הוא ערך עצמי של $A$ בעל ריבוי גיאומטרי1. מכך ניתן להסיק כי הסכום של הריבויים הגיאומטריים הוא 3 ( ואין יותר ערכים עצמיים כי לא יתכן שסכום הריבויים יהיה גדול מ 3 ולכן, המטריצה לכסינה (קיים בסיס של $\mathbb{R}$ שמורכב מווקטורים עצמיים של $A$ ).

ב. מכיוון שהמטריצה לכסינה הריבויים האלגבריים והגיאומטריים שווים לכל ערך עצמי

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \lambda$$

**שאלה 6. ($20$ נקודות)** במרחב מכפלה פנימית ממשי $V$ שמימדו $\dim V = 3$. נתון בסיס אורתונורמלי

$$B = \{u_1, u_2, u_3\}$$

יהיו

$$v = u_1 - 2u_2 + 2u_3,\ w = mu_1 + 2u_2 + 2u_3$$

($m \in \mathbb{R}$ מספר ממשי כלשהו).

א. ($15$ נקודות) מצאו את הנורמה של $v, w$, כלומר $\|w\| = \sqrt{\langle w, w\rangle}, \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, ואת $\langle v, w\rangle$.

ב. ($5$ נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של $m$ הקבוצה $\{v, w\}$ היא בסיס אורתוגונלי של $\text{Span}\{v, w\}$.

# פתרון

א. עבור וקטור כלשהו $u = au_1 + bu_2 + cu_3$ מתקיים כי

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\langle au_1 + bu_2 + cu_3, au_1 + bu_2 + cu_3\rangle} =$$
$$\sqrt{a^2\|u_1\|^2 + b^2\|u_2\|^2 + c^2\|u_3\|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

כי הבסיס $B$ הוא אורתונורמלי. ולכן

$$\|v\| = \|u_1 - 2u_2 - 2u_3\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\|w\| = \|mu_1 + 2u_2 - 2u_3\| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{m^2 + 8}$$
$$\langle v, w\rangle = \langle u_1 - 2u_2 - 2u_3, mu_1 + 2u_2 - 2u_3\rangle = m\langle u_1, u_1\rangle + 2\langle u_1, u_2\rangle - 2\langle u_1, u_3\rangle$$
$$- 2m\langle u_2, u_1\rangle - 4\langle u_2, u_2\rangle + 4\langle u_2, u_3\rangle - 2m\langle u_3, u_1\rangle - 4\langle u_3, u_2\rangle + 4\langle u_3, u_3\rangle = m - 4 + 4 = m$$

ב. לפי החישוב בסעיף הקודם המכפלה הפנימית בין $v, w$ שווה $m$, ולכן הוקטורים אורתוגונליים אם"ם $m = 0$.

# בהצלחה