

## תרגילי בית 21,22 – נוסחאות נסיגה, מציאת כלל נסיגה

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1.

(א) מחשב שולח בכל דקה אותות. בכל דקה, נשלחים פי שניים אותות מהדקה שקדמה לה. אם בדקה הראשונה נשלחו 2 אותות, כמה אותות נשלחו בדקה העשירית?

i. נסמן ב-  $a_k$  את מספר האותות שנשלחו בדקה ה-  $k$ . חשבו את  $a_1, a_2, a_3$ .

ii. חשבו את  $a_{10}$ .

iii. רישמו נוסחא ל-  $a_k$ . חשבו את  $a_0$  בעזרת הנוסחא שקיבלתם ובעזרת האיברים שמצאת בסעיף הראשון.

(ב) כעת, בכל דקה המחשב שולח שני אותות על כל אות שנשלח בדקה שלפני ושלושה אותות על כל אות שנשלח שתי דקות לפני. נתון כי בדקה הראשונה נשלח אות אחד ובדקה השנייה נשלחו שני אותות.

i. נסמן ב-  $a_k$  את מספר האותות שנשלחו בדקה ה-  $k$ . חשבו את  $a_1, a_2, a_3$ .

ii. חשבו את  $a_6$ .

iii. רישמו נוסחא ל-  $a_k$  ובידקו שהתשובה שקיבלתם בסעיפים הקודמים תואמת את הנוסחא. חשבו את  $a_0$  בעזרת הנוסחא שקיבלתם ובעזרת האיברים שמצאת בסעיף הראשון.

2. נתונות קוביות מ- 3 צבעים שונים: כחול, לבן וסגול. סדרה חוקית באורך  $n$  של הקוביות היא סדרה בה אסור שיופיעו שתי קוביות כחולות צמודות או שתי קוביות לבנות צמודות ובנוסף קוביה כחולה לא יכולה להיות ליד קוביה לבנה. כלומר, אסור שיופיעו בסדרה הרצפים: כחול כחול, לבן לבן, כחול לבן או לבן כחול. נסמן ב-  $a_n$  את מספר הסדרות החוקיות באורך  $n$ .

(א) כיתבו במפורש את האפשרויות לסדרות חוקיות באורך 1 ומיצאו את  $a_1$ .

(ב) כיתבו במפורש את האפשרויות לסדרה חוקית באורך 2 ומיצאו את  $a_2$ .

(ג) כיתבו את כלל הנסיגה המתאים לבעיה. בעזרת כלל הנסיגה והאיברים הראשונים שמצאתם חשבו את  $a_0$ .

(ד) כיתבו במפורש את נוסחת הנסיגה.

(ה) הוכיחו באינדוקציה כי הנוסחא שמצאתם בסעיף הקודם אכן נכונה.

3. מיצאו נוסחת נסיגה לחישוב מספר תתי-הקבוצות של הקבוצה  $\{1, 2, \dots, n\}$  אשר אין בהן שני מספרים עוקבים.

4. נתבונן בסדרה סופית של סימנים הלקוחים מקבוצת סימני הפעולות  $\{+, -, \times, \div\}$  ומהספרות 0, 1. סדרה תקנית היא סדרה המקיימת את התנאים הבאים:

- כל סדרה מתחילה ומסתיימת בספרה.
- אין שני סימני פעולה עוקבים.

(א) כיתבו במפורש את כל הסדרות התקניות באורך 1, 2, 3. כיתבו את  $a_1, a_2, a_3$ .

(ב) כתבו והסבירו את כלל הנסיגה.

(ג) פתרו את כלל הנסיגה.

5. נתונות שתי סדרות המקיימות

$$\begin{aligned}a_0 &= 1, b_0 = 1 \\a_n &= 2a_{n-1} - 5b_{n-1} \\b_n &= \frac{1}{3}a_{n-1} - \frac{2}{3}b_{n-1}\end{aligned}$$

(א) כתבו את איברי הסדרה  $a_n$  כתלות ב-  $a_{n-1}, a_{n-2}$ .

(ב) כתבו את איברי הסדרה  $b_n$  כתלות ב-  $b_{n-1}, b_{n-2}$ .

(ג) פתרו את אחת מהסדרות  $a_n$  או  $b_n$ . שימו לב כי ייתכן ותזדקקו לתנאי התחלה נוספים.

6. מצאו נוסחה מפורשת עבור כלל הנסיגה

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= 6a_{n+1} - 9a_n \\a_1 &= 3, a_2 = 9\end{aligned}$$