

שם הקורס: מבוא להסתברות

קוד הקורס: 90911

הוראות לנבחן:

-חומר עזר שימושי לבחינה:
מותר שימוש בשלושה דפי נוסחאות,
ודף טבלת התפלגות נורמלית.
-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
-אין להשתמש בטלפון סלולארי
-אין להשתמש במחשב אישי או נייד
-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או
מכשיר מדיה אחר
-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: 2018א

השנה: תשע"ח

מועד: ק

תאריך הבחינה: 8/3/18
שעת הבחינה: 17:00

משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר חנה קלבנר,

ד"ר מאיר אזור,

ד"ר לובה טראשווילי,

ד"ר אלכס סגל

***** שאלון הבחינה לא ייבדק ע"י המרצה, לא ייסרק ולא יישמר *****

***** לא יינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לענות על כל השאלות, משקל כל שאלה רשום ליד השאלה.

יש לנמק היטב את הפתרון. תשובה לא מנומקת לא תזכה במלוא

הניקוד.

כל שאלה להתחיל בעמוד חדש: יש לציין את מספר השאלה, ויש לציין

את מספר הסעיף אותו פותרים.

שאלה 1 (46 נקודות)

- מפעל מייצר מוצר במשך חמישה ימים בשבוע: שני עד שישי. ההסתברות לייצר מוצר פגום ביום שני היא θ . ההסתברות לייצר מוצר פגום ביום אחר (לא שני) היא 0.4θ . בכל אחד מימי השבוע המפעל מייצר אותו מספר מוצרים. ההסתברות לקבל מוצר פגום בתוצרת של כל השבוע היא 0.008. (המוצרים בלתי תלויים).
- מה ערכו של θ ? בהמשך אם יש צורך, השתמשו ב: $\theta = 0.02$.
 - מהם תוחלת והשונות של מספר הפגומים במשלוח של 400 מוצרים שהם תוצרת של יום שני? מתוך משלוח שמכיל 400 מוצרים תוצרת של יום שני ו-1600 מוצרים תוצרת של הימים האחרים, נבחר מוצר באקראי והוא נמצא פגום, מה ההסתברות שהוא שייך לתוצרת של יום שני?
 - בתוצרת של כל השבוע של 2000 מוצרים, מה ההסתברות שיהיו לכל היותר 14 פגומים? על מוצר תקין המפעל מרוויח 4 ₪, ועל מוצר פגום המפעל מפסיד 46 ₪. מה היא תוחלת הרווח ושונות הרווח למוצר של יום שני?
 - בסוף יום שני המפעל מכר 600 מוצרים שהם תוצרת של יום שני. מה ההסתברות שסך הרווח גדול מ-1300 ₪?

שאלה 2 (22 נקודות)

- מנוע חיפוש באינטרנט מחפש מילת מפתח בסדרה של אתרים בלתי תלויים. מניחים ש-20% מהאתרים מכילים אותה מילת מפתח.
- נגדיר: X = מספר האתרים בהם עורכים חיפוש עד למציאת המילה המבוקשת.
- מה ההסתברות שמנוע החיפוש יתור מ-8 אתרים עד למציאת המילה המבוקשת?
 - מתוך 10 האתרים הראשונים, נגדיר: Y = מספר האתרים בהם נמצאה המילה המבוקשת. מהם התוחלת והשונות של Y .
 - מה ההסתברות שהמנוע חיפש ב-15 אתרים עד למציאת האתר הרביעי שמכיל את המילה המבוקשת?

שאלה 3 (32 נקודות)

X, Y משתנים מקריים בעלי פונקציית צפיפות משותפת: $f_{X,Y}(x,y)$ המוגדרת בתחום:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x, \quad \text{נתון: } f_Y(y) = 2-2y, \quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{c}{2-2y}.$$

- מהו הקבוע c ?
- חשבו את פונקציית הצפיפות השולית של X : $f_X(x)$.
- חשבו את ההסתברות $P(Y \leq 0.2 | X = 0.6)$.
- חשבו את: $E(Y | X = 0.6)$.

בהצלחה!

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה

פתרון

פתרון מלא
90911

שם הקורס: מבוא להסתברות

פתרון בחינה

שאלה 1 (46 נקודות)

מפעל מייצר מוצר במשך חמישה ימים בשבוע: שני עד שישי. ההסתברות לייצר מוצר פגום ביום שני היא θ . ההסתברות לייצר מוצר פגום ביום אחר (לא שני) היא 0.4θ . בכל אחד מימי השבוע המפעל מייצר אותו מספר מוצרים. ההסתברות לקבל מוצר פגום בתוצרת של כל השבוע היא 0.008. (המוצרים בלתי תלויים).

- מה ערכו של θ ? בהמשך אם יש צורך, השתמשו ב: $\theta = 0.02$.
- מהם התוחלת והשונות של מספר הפגומים במשלוח של 400 מוצרים שהם תוצרת של יום שני?
- מתוך משלוח שמכיל 400 מוצרים תוצרת של יום שני ו-1600 מוצרים תוצרת של הימים האחרים, נבחר מוצר באקראי והוא נמצא פגום, מה ההסתברות שהוא שייך לתוצרת של יום שני?
- בתוצרת של כל השבוע של 2000 מוצרים, מה ההסתברות שיהיו לכל היותר 14 פגומים?
- על מוצר תקין המפעל מרוויח 4 ₪, ועל מוצר פגום המפעל מפסיד 46 ₪. מהם תוחלת הרווח ושונות הרווח למוצר של יום שני?
- בסוף יום שני המפעל מכר 600 מוצרים שהם תוצרת של יום שני. מה ההסתברות שסך הרווח גדול מ-1300 ₪?

פתרון

א.

נגדיר: F = מוצר פגום, נתון: $P(F) = 0.008$

נגדיר: M = מוצר של יום שני.

$$P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|\bar{M})P(\bar{M}) = \theta \times 0.2 + 0.4\theta \times 0.8 = 0.008 \\ \Rightarrow \theta = 0.0154$$

ב.

Y = מספר הפגומים בתוצרת של יום שני: $Y \sim B(400, 0.02)$

$$Y \sim B(400, 0.02) \Rightarrow E(Y) = 8, V(Y) = 7.84$$

ג.

$$P(M|F) = \frac{P(F|M)P(M)}{P(F)} = \frac{0.02 \times 0.2}{0.008} = 0.5$$

ד.

Y = מספר הפגומים בתוצרת של שבוע: $Y \sim B(2000, 0.008)$

$$2000 \times 0.008 = 16 > 5, \quad 2000 \times 0.992 > 5$$

קרוב נורמלי לבינומי: $Y \sim N(16, 15.872)$

$$P(Y \leq 14) = \Phi\left(\frac{14 + 0.5 - 16}{\sqrt{15.872}}\right) = \Phi(-0.38) = 1 - \Phi(0.38) = 1 - 0.648 = 0.352$$

ה.

$$\left. \begin{array}{l} P(R=4)=0.98 \\ P(R=-46)=0.02 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E(R)=4 \times 0.98 - 46 \times 0.02 = 3 \\ E(R^2)=4^2 \times 0.98 + (-46)^2 \times 0.02 = 58 \\ V(R)=58 - 3^2 = 49 \end{array}$$

ו.

$$\sum_{i=1}^{600} X_i \sim N(600 \times 3, 600 \times 49)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{600} X_i > 1300\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1300 - 1800}{7\sqrt{600}}\right) = 1 - \Phi(-2.92) = \Phi(2.92) = 0.9982$$

שאלה 2 (22 נקודות)

מנוע חיפוש באינטרנט מחפש מילת מפתח בסדרה של אתרים בלתי תלויים. מניחים ש- 20% מהאתרים מכילים אותה מילת מפתח.

נגדיר: X = מספר האתרים בהם עורכים חיפוש עד למציאת המילה המבוקשת.

א. מה ההסתברות שמנוע החיפוש יחפש יותר מ- 8 אתרים עד למציאת המילה המבוקשת?

ב. מתוך 10 האתרים הראשונים, נגדיר: Y = מספר האתרים בהם נמצאה המילה

המבוקשת. מהם התוחלת והשונות של Y .

ג. מה ההסתברות שהמנוע חיפש ב- 15 אתרים עד למציאת האתר הרביעי שמכיל את המילה המבוקשת?

פתרון

א.

$$P(X > 8) = 0.8^8 = 0.1678$$

ב.

$$Y \sim B(10, 0.2) \Rightarrow E(Y) = 2, V(Y) = 1.6$$

ג.

$$\binom{14}{3} \times 0.2^3 \times 0.8^{11} \times 0.2 = 0.05$$

שאלה 3 (32 נקודות)

X, Y משתנים מקריים בעלי פונקציית צפיפות משותפת: $f_{X,Y}(x,y)$ המוגדרת בתחום:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{c}{2-2y}, \quad f_Y(y) = 2-2y, \quad 0 \leq y \leq 1-x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

א. מהו הקבוע c ?

ב. חשבו את פונקציית הצפיפות השולית של X : $f_X(x)$.

ג. חשבו את ההסתברות: $P(Y \leq 0.2 | X = 0.6)$.

ד. חשבו את התוחלת של Y .

פתרון

א.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = c$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} f_{X,Y}(x,y) dy dx = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} c dy dx = c \int_0^1 (1-x) dx = c \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}c = 1 \Rightarrow c = 2$$

ב.

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2 dy = 2 - 2x$$

ג.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2-2x}$$

$$P(Y \leq 0.2 | X = 0.6) = \int_0^{0.2} f_{Y|X}(y|0.6) dy = \int_0^{0.2} \frac{2}{0.8} dx = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

ד.

$$E(Y | X = 0.6) = \int_0^{0.4} \frac{2}{0.8} y dy = \frac{y^2}{0.8} \Big|_0^{0.4} = 0.2$$