מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות)

א. (10 נק') נתונה סדרה $a_n=\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{\frac{n^2-4}{n+1}}$, $n\ge 1$.

1. מצאו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. נמקו !

2. האם לכל סדרה חסומה $\{b_n\}_{n\ge1}$, המכפלה $\{a_nb_n\}_{n\ge1}$ מהווה סדרה חסומה ?
אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת. אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית. נמקו !

הערה: הסדרה $a_n=\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{\frac{n^2-4}{n+1}}$, $n\ge 1$ תקפה בשני הסעיפים הנ"ל.

ב. (10 נק') תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)=\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}$. מצאו את $F(x)$.
האם הפונקציה $F(x)$ בעלת נקודות קיצון מוחלט בקטע $[1,20]$? נמקו !

שאלה 2 (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו את הגבולות $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3\sqrt{x}}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+8}-3\sqrt{x}}{x-1}$. נמקו !

ב. (10 נק') הראו כי $\left|6e^{-x}-6+6x-3x^2+x^3\right|\le\frac{1}{2500}$, לכל $0\le x\le 0.2$. נמקו !

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו שהפונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x-e^{-2x}$ חד-חד-ערכית.
מצאו את מספר הפתרונות הממשים של המשוואה $x=e^{-2x}$. נמקו !

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל המסוים $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$. נמקו !

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x)=x\ln x$. נסמן ב- $L: y=mx+n$ קו המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\frac{1}{e}$.

א. (10 נק׳) מצאו את משוואת הקו המשיק L והוכיחו ש- $f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$, לכל $\frac{1}{e}\le x\le 1$.

ב. (10 נק׳) מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

- גרף הפונקציה $y=f(x)$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\frac{1}{e}$;
- הקו $x=1$.

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות)

א. (10 נק׳) הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים: $\frac{x}{e}\ge \ln x$. נמקו !

ב. (10 נק׳) נתונה הפונקציה $F(x)=\int_1^x \frac{1+\ln t}{e^t}\,dt$. מצאו את משוואת המשיק לגרף של F בנקודה $a=1$

ובדקו ש- F עולה ממש בקטע $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$. נמקו!

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות)

א. (10 נק׳) הראה כי לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים $x\le \tan x\le \frac{x}{\cos^2 x}$. נמקו !

<u>רמז</u>: אפשר להשתמש במשפט Lagrange.

ב. (10 נק׳) האם קיימות שתי פונקציות *<u>שונות</u>* $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ בעלת אותו פולינום Taylor-Maclaurin

מסדר $n=4$: $T(x)=\sum_{k=0}^{4}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$?

אם התשובה ״כן״, רשמו באופן מפורט שתי פונקציות שונות שמקיימות את התנאי. נמקו !

אם התשובה ״לא״, נמקו למה !

בהצלחה!

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון Y

פתרון 1א:

.1

$$a_n=\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{\frac{n^2-4}{n+1}}=\left(1+\frac{-4}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-4}\cdot\frac{-4}{n+2}\cdot\left(\frac{n^2-4}{n+1}\right)}=\left[\left(1+\frac{-4}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-4}}\right]^{(-4)\left(\frac{n-2}{n+1}\right)}$$

נסמן ב- $x_n=\dfrac{-4}{n+2}$ ונקבל $x_n=\dfrac{-4}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}0$.

הסדרה הנתונה שווה ל- $\left[\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{y_n}$, כאשר המעריך $y_n=\dfrac{-4(n-2)}{n+1}$.

משפט Euler טוען ש- $\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\xrightarrow{n\to\infty}e$.

המעריך מתכנס: $y_n=\dfrac{-4(n-2)}{n+1}=\dfrac{-4(1-2/n)}{1+1/n}\xrightarrow{n\to\infty}-4$.

לפי אריתמטיקה של גבולות מסיקים ש-

$$a_n=\left[\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{(-4)\left(\frac{n-2}{n+1}\right)}=\left[\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{y_n}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-4}$$

.2

הוכחנו שהסדרה $\{a_n\}_{n\geq 1}$ מתכנסת. נובע שהיא בהכרח חסומה, ז"א:

קיים מספר חיובי A כך ש- $|a_n|<A$, לכל $n\geq 1$.

נתון שגם הסדרה $\{b_n\}_{n\geq 1}$ חסומה ולכן:

קיים מספר חיובי B כך ש- $|b_n|<B$, לכל $n\geq 1$.

מסיקים שהמכפלה $\{a_nb_n\}_{n\geq 1}$ מהווה סדרה חסומה כי:

$|a_nb_n|=|a_n||b_n|<AB$, לכל $n\geq 1$.

פתרון 1ב:

נחשב פונקציה קדומה של $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}$.

$$F(x)=\int\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}dx=\int\frac{2\ln x}{(1+\ln^2 x)}\frac{1}{x}dx\overset{y=\ln x}{\underset{dy=(1/x)dx}{=\!=\!=\!=\!=}}\int\frac{2y}{1+y^2}dy=\ln\left(1+y^2\right)\Big|_{y=\ln x}=\ln\left(1+\ln^2 x\right).$$

נחקור את נקודות הקיצון של $F(x)=\ln\left(1+\ln^2 x\right)$ בקטע $x\ge 1$.

הנגזרת של $F(x)$ שווה ל-

$$F'(x)=f(x)=\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}$$

והיא מתאפסת רק כאשר $\ln x=0$, ז"א כאשר $x=1$.

ברור ש-

$$F'(x)=f(x)=\frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\ge 0,$$

בכל נקודה ששייכת לקטע $x\ge 1$.

מסיקים ש- F <u>פונקציה עולה</u> בקטע $[1,\infty)$ ולכן $F(1)\le F(x)\le F(20)$, לכל $1\le x\le 20$.

<u>המסקנה:</u>

הפונקציה F בעלת <u>שתי נקודות קיצון מוחלט</u> בקטע חסום וסגור $[1,20]$:

נק' מינימום מוחלט: $x=1$.

נק' מקסימום מוחלט: $x=20$.

<u>פתרון 2א:</u>

נחשב את שני הגבולות :

$$l_1=\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+8}-3\sqrt{x}}{x-1}\overset{:x}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1$$

ו-

$$l_2=\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3\sqrt{x}}{x-1}=[***]=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+8-9x}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x-8}{\sqrt{x^2+8}+3\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-8)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+8}+3\sqrt{x}\right)}=\frac{-7}{6}$$

(הערה : בשלב (***) השתמשנו בכפל בצמוד) .

<u>הערה נוספת :</u>

אפשר לנסח את התוצאה בצורה שקולה :

1. הקו $x=1$ לא מהווה אסימפטוטה אנכית של g (מפני שהגבול $l_2=\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ סופי).

ו-

2. הקו $y=1$ אכן מהווה אסימפטוטה אופקית של g ב- $+\infty$ (מפני שהגבול $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$).

פתרון 2ב:

בוחרים פונקציה

$$f(x)=e^{-x}$$

לכן

$$f'(x)=-e^{-x},\ f''(x)=e^{-x},\ f'''(x)=-e^{-x},\ f^{(4)}(x)=e^{-x}$$

מציבים ומקבלים:

$$f(0)=0,\ f'(0)=-1,\ f''(0)=1,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=1$$

מקבלים שפולינום Taylor-Maclaurin (סביב 0) מסדר $n=3$ של $f(x)=e^{-x}$ שווה ל-

$$T_3(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$$

והשארית מקיימת:

$$\left|e^{-x}-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\right|=\left|R_3(x)\right|=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right|=\left|\frac{e^{-c}}{24}x^4\right|\overset{0\le c\le 0.2}{\le}\frac{1}{24}x^4\underset{0\le x\le 0.2}{\le}\frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{1}{15000}$$

לכל $0\le x\le 0.2$.

מכפילים ב- 6 ומסיקים ש-

$$\left|6e^{-x}-6+6x-3x^2+x^3\right|\le\frac{6}{15000}=\frac{2}{5000}=\frac{1}{2500}$$

לכל $0\le x\le 0.2$.

פתרון 3א:

נגדיר $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x-e^{-2x}$ ונוכיח ש- f עולה ממש ב- $\mathbf{R}$.

לכל x מתקיים:

$$f'(x)=1+\underbrace{2e^{-2x}}_{>0}>0$$

ז"א הנגזרת הראשונה חיובית ממש בקטע $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$.

מכאן נובע ש- f עולה ממש ב- $\mathbf{R}$, ז"א לכל שני מספרים ממשיים: $a<b\longrightarrow f(a)<f(b)$.

זה גורר שהפונקציה f חח"ע בקטע $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$.

נגדיר $f(x)=x-e^{-2x}$ ונוכיח ש- f מתאפסת פעם אחת בלבד ב- $\mathbf{R}$.

אכן

$$f(0)=0-e^{0}=-1<0\ ,$$

$$f(1)=1-e^{-2}=1-\frac{1}{e^{2}}>0\ .$$

f פונקציה רציפה המקבלת ערכים מנוגדי-סימן בקצות הקטע $[0,1]$.

ממשפט ערך הביניים של Cauchy נובע שהיא מתאפסת **לפחות** פעם אחת בקטע.

מצד שני, לכל x הוכחנו ש- $f'(x)=1+\underbrace{2e^{-2x}}_{>0}>0$. לכן היא מתאפסת **לכל היותר** פעם אחת בקטע $[0,1]$.

בסך הכל קיבלנו שיש **בדיוק שורש אחד** ב- $\mathbf{R}$.

פתרון 3ב:

נמצא פונקציה קדומה של $f(x)=e^{\sqrt{x}}$:

$$F(x)=\int f(x)dx=\int e^{\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix} y=\sqrt{x} \\ dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx, dx=2ydy \end{bmatrix}=\int e^{y}2ydy=2\int\left(e^{y}\right)'\cdot ydy=$$

$$=2(e^{y}y-\int e^{y}\cdot 1dy)=2e^{y}(y-1)=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+const.$$

פונקציה $y=e^{\sqrt{x}}$ רציפה בקטע $[1,4]$ ולכן לפי משפט Newton-Leibniz :

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx=F(4)-F(1)=2e^{\sqrt{4}}(\sqrt{4}-1)-2e^{\sqrt{1}}(\sqrt{1}-1)=2e^{2}.$$

<u>פתרון 4</u>

א.

נוכיח שהפונקציה $f(x)=x\ln x$ בעלת נקודת מינימום מוחלט בקטע $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

ברור ש- $f'(x)=\ln x+1\ge 0$ לכל $x\ge\frac{1}{e}$. נובע ש- f עולה בקטע $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

לכן $\frac{1}{e}\le x\le 1$ גורר $-\frac{1}{e}=f\left(\frac{1}{e}\right)\le f(x)\le f(1)=0$.

הנגזרת מתאפסת בנקודה $x=e^{-1}$ ולכן משוואת המשיק $L: y=mx+n$ בנקודה $x=e^{-1}$ שווה ל-

$$L: y=-\frac{1}{e}\Leftrightarrow L: y=mx+n=0x+f(e^{-1})=f(e^{-1})=-e^{-1}$$

ב.

השטח שווה ל-

$$S=\int_{1/e}^{1}\left(f(x)-f\left(\frac{1}{e}\right)\right)dx=\int_{1/e}^{1}\left(x\ln x-f\left(\frac{1}{e}\right)\right)dx=\int_{1/e}^{1}x\ln x dx-f\left(\frac{1}{e}\right)\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

נחשב את הפונקציה הקדומה של $x\ln x$ לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int x\ln x dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}(\ln x)'dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}.$$

ולפי נוסחת Leibnitz-Newton נובע ש-

$$S=\int_{1/e}^{1}x\ln x dx-f(e^{-1})\left(1-e^{-1}\right)=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{e}}^{x=1}-f(e^{-1})\left(1-e^{-1}\right)$$

$$=\left(\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^2}\right)\right)-\left(e^{-1}\ln e^{-1}\right)\left(1-e^{-1}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4e^2}+e^{-1}\left(1-e^{-1}\right).$$

<u>פתרון 5א:</u>

מספיק לבדוק ש- $f(x)=x-e\ln x\geq 0$ לכל $x>0$.

ברור ש- $f'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}$.

מקבלים ש-

1.

$f'(x)=\frac{x-e}{x}\geq 0$, לכל $x\geq e$ ולכן f עולה בקטע $[e,\infty)$.

מסיקים שעבור $x\geq e$ מתקיים $f(x)\geq f(e)=0$.

2.

$f'(x)=\frac{x-e}{x}\leq 0$, לכל $0<x\leq e$ ולכן f יורדת בקטע $(0,e]$.

מסיקים שעבור $0<x\leq e$ מתקיים $f(x)\geq f(e)=0$.

לכן f בעלת נקודת מינימום מוחלט בנקודה $x=e$,

ז"א :

$f(x)\geq f(e)=e-e\ln e=e-e=0$ לכל $x>0$, מ.ש.ל.

<u>פתרון נוסף :</u>

הקו $L: y=\frac{x}{e}$ <u>משיק</u> לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה e . (נמקו !)

הפונקציה $f(x)=\ln x$ <u>קעורה</u> בקטע $x>0$ (נמקו !)

מסיקים הקו המשיק $L: y=\frac{x}{e}$ נמצא <u>מעל גרף</u> הפונקציה $f(x)=\ln x$, לכל $x>0$,

ז"א

$\frac{x}{e}\geq \ln x$, לכל $x>0$, מ.ש.ל.

פתרון 5ב:

הפונקציה $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{e^x}$ רציפה בקטע $x>0$.

לפי משפט היסודי Newton-Leibniz מקבלים שהנגזרת של $F(x)=\int_1^x \dfrac{1+\ln t}{e^t}\,dt$ שווה ל-

$F'(x)=\dfrac{1+\ln x}{e^x}$ ובפרט : $F'(1)=\dfrac{1+\ln 1}{e^1}=\dfrac{1}{e}$.

משוואת המשיק לגרף של F בנקודה $a=1$

$$y-F(1)=F'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-F(a)=F'(a)(x-a)$$

$$y-0=\frac{1}{e}(x-1)$$

ז"א :

$$y=\frac{x-1}{e}$$

נחקור את *סימן הנגזרת* $F'(x)$:

$$x\in\left(\frac{1}{e},\infty\right)\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow 1+\ln x>0\Leftrightarrow F'(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}>0 .$$

מסיקים שבקטע $x>\dfrac{1}{e}$ הנגזרת חיובית :

$F'(x)>0$ ולכן F עולה ממש בקטע $x>\dfrac{1}{e}$. מ.ש.ל.

פתרון 6א:

נתבונן בפונקציה $f(x)=\tan x$, כאשר $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

1. בוחר קטע $[a,b]$ מוכל ב- $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. הפונקציה f מקיימת את תנאי משפט Lagrange בקטע $[a,b]$:

(ז"א f רציפה בקטע $[a,b]$ ו- f גזירה בקטע (a,b)) .

לכן :

קיימת c נקודה בקטע $[a,b]$ כך ש : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

כלומר:

$$\frac{\tan b-\tan a}{b-a}=f'(c)=\frac{1}{\cos^2 c} \qquad (1)$$

2. הפונקציה $\cos x$ מונוטונית יורדת וחיובית בקטע $[a,b]$ וכן,

$$\frac{1}{\cos^2 a}<\frac{1}{\cos^2 c}<\frac{1}{\cos^2 b} \qquad (2)$$

מ-(1) ו-(2) נקבל: $\frac{1}{\cos^2 a}<\frac{\tan b-\tan a}{b-a}<\frac{1}{\cos^2 b}$,

ולכן :

$\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$, לכל $0<a<b<\frac{\pi}{2}$.

בפרט , עבור הבחירה $a=0<b=x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים

$$\frac{x-0}{\cos^2 0}\le\tan x-\tan 0\le\frac{x-0}{\cos^2 x},$$

ז"א

$x\le\tan x\le\frac{x}{\cos^2 x}$, לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$, מ.ש.ל.

פתרון 6ב:

נגדיר שתי פונקציות שונות :

$$f(x)=T(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 \quad \neq \quad g(x)=x^5+f(x)$$

מתקיים :

$$\begin{array}{lll} f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^{39} & , & g'(x)=5x^4+f'(x) \\ f''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x^1+4\cdot 3a_4x^2 & , & g''(x)=5\cdot 4x^3+f''(x) \\ f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x^1 & , & g'''(x)=5\cdot 4\cdot 3x^2+f'''(x) \\ f^{(4)}(x)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4 & , & g^{(4)}(x)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x+f^{(4)}(x) \end{array}$$

ולכן

$$f(0)=a_0=g(0)$$

$$f'(0)=a_1=g'(0)$$

$$f''(0)=2\cdot 1a_2=2!a_2=g''(0)$$

$$f'''(0)=3\cdot 2\cdot 1a_3=3!a_3=g'''(0)$$

$$f^{(4)}(0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4=4!a_4=g^{(4)}(0)$$

זה גורר שהפולינומים Taylor-Maclaurin של $y=f(x)$ ושל $y=g(x)$ שווים לפולינום הנתון :

$$T(x)=\sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{4}\frac{k!a_k}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{4}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4.$$