יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 1 – חלקי ולא כל הדוגמאות נכונות

טורים חיוביים

טורים חיוביים

.1

טורים ידועים:

טור גיאומטרי

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q \ge 1 \\ \dfrac{q}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{diverges} & q \le -1 \end{cases} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q \ge 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{diverges} & q \le -1 \end{cases}$$

טור הרמוני מוכלל

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \infty & p \ge 1 \\ \text{converges} & p < 1 \end{cases}$$

.2

לחשב את סכום הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ הוא טור הנדסי עם $-1 < q = -\frac{1}{3} < 1$ ולכן הוא מתכנס ו

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 2\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{1-(-\frac{1}{3})} = 2\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}$$

.3

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ זהו טור מסוג $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (טור הרמוני מוכלל) עם $p = 3 > 1$ ולכן הוא מתכנס.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ זהו טור הנדסי עם $-1 < q = \frac{1}{3} < 1$ ולכן הוא מתכנס.

ולכן טור הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n}$ מתכנס.

.4

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2}$$

משפט :
אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
מסקנה :
אם $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

$$a_n=\sqrt[n]{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1\neq 0$$

לא מתקיים התנאי ההכרחי ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2}$ מתבדר.

טורים טלסקופיים

.1
לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$$

$$a_n=\frac{1}{n^2+7n+12}=\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}$$

ולכן

$$\begin{aligned}s_n&=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=\\&=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}\end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}="\frac{1}{4}-\frac{1}{\infty}"=\frac{1}{4}$$

ולכן הטור מתכנס ו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}=\frac{1}{4}$.

.2
לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = -\ln n + \ln(n+1)$$

ולכן

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = \\ &= \left(-\ln 1 + \ln 2\right) + \left(-\ln 2 + \ln 3\right) + \left(-\ln 3 + \ln 4\right) + \cdots \\ &\qquad \ldots + \left(-\ln(n-2) + \ln(n-1)\right) + \left(-\ln(n-1) + \ln n)\right) + \left(-\ln n + \ln(n+1)\right) = \\ &= -\ln 1 + \ln(n+1) = \ln(n+1) \end{aligned}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \text{"}\ln(\infty)\text{"} = \infty$$

ולכן הטור מתבדר ו $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

קריטריון האינטגרל

.1
לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$$

$$a_n=\frac{\ln n}{n}\geq 0$$

נסמן $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

הפונקציה f מקיימת:

1. f מוגדרת בקטע $[1,\infty)$.
2. לכל n טבעי מתקיים $f(n)=\frac{\ln n}{n}=a_n$.
3.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x}$$

לכל $x\geq 3$ מתקיים

$$x\geq 3 \quad\Rightarrow\quad \ln x>1 \quad\Rightarrow\quad f'(x)<0$$

ולכן f יורדת בקטע $[3,\infty)$.

ולכן לפי קריטריון האינטגרל נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ מתכנס ומתבדר יחד עם האינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

נבדוק את התכנסות אינטגרל זה.
נבצע החלפת משתנה

$$y=\ln x$$
$$dy=\frac{1}{x}dx$$
$$x=1\rightarrow y=0$$
$$x=\infty\rightarrow y=\infty$$

ולכן

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^{\infty}ydy=\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\infty}="\infty-0"=\infty$$

קיבלנו שהאינטגרל $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ מתבדר, ולכן לפי קריטריון האינטגרל נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ מתבדר.

מבחני ההשוואה

.1
לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$$

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}>0$$

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ זהו טור הנדסי עם $-1<q=\frac{1}{2}<1$ ולכן הוא מתכנס.

ממבחן ההשוואה הראשון נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ מתכנס.

.2

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n}{3^n-2^n}$$

$$a_n=\frac{4^n+n}{3^n-2^n}>0$$

נבחר

$$b_n=\frac{4^n}{3^n}=\left(\frac{4}{3}\right)^n>0$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n+n}{3^n-2^n}}{\frac{4^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4^n+n)\cdot 3^n}{(3^n-2^n)\cdot 4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12^n+n\cdot 3^n}{12^n-8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{4^n}}{1-\left(\frac{8}{12}\right)^n}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

קיבלנו $0<L=1<\infty$, ולכן ממבחן ההשוואה השני נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n}{3^n-2^n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

זהו טור הנדסי עם $q=\frac{4}{3}>1$ ולכן הוא מתבדר, ומכאן שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n}{3^n-2^n}$ מתבדר.

.3

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n}$$

$$a_n = 1-\cos\frac{1}{n}$$

לכל n , $\cos\frac{1}{n} \le 1$ ולכן $a_n \ge 0$.

עבור x קרובים ל 0 מתקיים

$$\cos x \sim 1-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

ולכן עבור n גדולים

$$\cos\frac{1}{n} \sim 1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{24n^4}+\cdots$$

$$\Rightarrow \quad 1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$$

ולכן נבחר

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = "\frac{0}{0}" \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

קיבלנו $0 < L = \frac{1}{2} < \infty$, ולכן ממבחן ההשוואה השני נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

זהו טור מסוג $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (טור הרמוני מוכלל) עם $p = 2 > 1$ ולכן הוא מתכנס, ומכאן שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n}$ מתכנס.

.4

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$$

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}>0$$

פתרון I :

נבחר

$$b_n=\frac{3^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}\right)^n>0$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}}{\frac{3^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+3^n)\cdot 5^n}{(4^n+5^n)\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n+15^n}{12^n+15^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{10}{15}\right)^n+1}{\left(\frac{12}{15}\right)^n+1}=\frac{0+1}{0+1}=1$$

קיבלנו $0<L=1<\infty$, ולכן ממבחן ההשוואה השני נובע שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

זהו טור הנדסי עם $-1<q=\frac{3}{5}<1$ ולכן הוא מתכנס, ומכאן שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתכנס.

פתרון II :

$$0<a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}<\frac{2^n+3^n}{5^n}<\frac{3^n+3^n}{5^n}=\frac{2\cdot 3^n}{5^n}=2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ זהו טור הנדסי עם $-1<q=\frac{3}{5}<1$ ולכן הוא מתכנס, ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$ מתכנס.

ממבחן ההשוואה הראשון נובע שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתכנס.

קריטריון המנה של d'Alembert, קריטריון השורש של Cauchy

.1
לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{8^n}$$

$$a_n=\frac{n^9}{8^n}>0$$

פתרון I :

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^9}{8^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^9}}{\sqrt[n]{8^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^9}{8}=\frac{1^9}{8}=\frac{1}{8}<1$$

קיבלנו $L=\frac{1}{8}<1$, ולכן ממבחן השורש של Cauchy נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{8^n}$ מתכנס.

פתרון II :

$$a_n=\frac{n^9}{8^n}\quad,\quad a_{n+1}=\frac{(n+1)^9}{8^{n+1}}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^9\cdot 8^n}{8^{n+1}\cdot n^9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\cdot\frac{(n+1)^9}{n^9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{n+1}{n}\right)^9=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{n}\right)^9=\frac{1}{8}\cdot 1^9=\frac{1}{8}<1$$

קיבלנו $L=\frac{1}{8}<1$, ולכן ממבחן המנה של d'Alembert נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{8^n}$ מתכנס.

2.

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$a_n=\frac{n!}{n^n}>0$$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

קיבלנו $L=\frac{1}{e}<1$, ולכן ממבחן המנה של d'Alembert נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{8^n}$ מתכנס.

.3

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}>0$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e>1$$

קיבלנו $L=e>1$, ולכן ממבחן השורש של Cauchy נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ מתבדר.

.4

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>0$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}=1$$

קיבלנו $L=1$, ולכן מבחן השורש של Cauchy לא עובד.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$$

לא מתקיים התנאי ההכרחי ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ מתבדר.

5.

לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

$$a_n = \frac{n^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)} > 0$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{100}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n+1)^{100}}{n^{100}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} = "\frac{1}{\infty}\cdot 1^{100}" = 0 < 1$$

קיבלנו $L = 0 < 1$, ולכן ממבחן המנה של d'Alembert נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^9}{8^n}$ מתכנס.

.6
לקבוע האם הטור מתכנס או מתבדר

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$$

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}>0$$

$$a_{n+1}=\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}}=\frac{2\cdot 2^n+3\cdot 3^n}{4\cdot 4^n+5\cdot 5^n}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot 2^n+3\cdot 3^n)(4^n+5^n)}{(4\cdot 4^n+5\cdot 5^n)(2^n+3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n+3\cdot 3^n}{2^n+3^n}\cdot\frac{4^n+5^n}{4\cdot 4^n+5\cdot 5^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\cdot\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}{4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n+5}=\frac{0+3}{0+1}\cdot\frac{0+1}{0+5}=\frac{3}{5}<1$$

קיבלנו $L=\frac{3}{5}<1$, ולכן ממבחן המנה של d'Alembert נובע שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$ מתכנס.