

פתרון

Y

שאלה 1 (24 נקודות)

בארון יש 10 מגירות ובאחת מהן נמצא מפתח. ליאת מחפשת את המפתח, ולכן בודקת את המגירות, כך שהיא לא חוזרת למגירות אותן היא כבר בדקה.

א. חשבו את ההסתברות שהמפתח איננו באחת משלוש המגירות הראשונות שהיא בדקה.
ב. ליאת ממשיכה לבדוק את המגירות עד שהיא מוצאת את המפתח. נסמן ב- Y את מספר המגירות שלא נפתחו. מהי התוחלת של Y ?

ג. ביום אחר אלון, שותף של ליאת בדירה, חזר מהעבודה מאוד עייף והתחיל לחפש את המפתח. הוא לא זכר איזה מהמגירות הוא כבר בדק וכל פעם בחר מגירה באקראי מתוך 10 המגירות. מהי ההסתברות שהוא בדק לכל היותר 20 מגירות עד שמצא את המפתח?

פתרון:

א. ההסתברות שמפתח לא יהיה בשלושת המגירות הראשונות היא: $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = 0.7$
ב. מספר המגירות X שליאת תפתח עד שתמצא את המפתח מתפלג באופן אחיד $X \sim U(10)$. מתקיים: $Y = 10 - X$. לכן נקבל

$$E(Y) = E[10 - X] = 10 - E[X] = 10 - 5.5 = 4.5$$

ג. מספר המגירות Z שאלון יפתח עד שימצא את המפתח מתפלג באופן גאומטרי $Z \sim G(0.1)$.

$$P(Z \leq 20) = 1 - P(Z > 20) = 1 - 0.9^{20} = 0.1216$$

שאלה 2 (16 נקודות)

כל יום בערוץ ילדים משודרים 10 סרטי אנימציה שונים. מתוכם יש 5 סרטים על גיבורי על, 3 סרטים על דרקונים ו-2 סרטים על חתולים. אימא מרשה לאריאל לצפות בשלושה סרטים שונים ביום שאותם היא בוחרת באופן אקראי ובלי החזרה.

א. סרט על דרקונים נמשך 10 דקות וכל סרט אחר נמשך 12 דקות. מהי התוחלת זמן הצפייה היומית של אריאל?

ב. יום שבו אריאל רואה לפחות סרט אחד על גיבורי על הוא יום "נפלא". מהי ההסתברות שבמשך 70 ימים הבאים יהיו לפחות 60 ימים נפלאים?

פתרון:

א. נסמן ב- X את מספר סרטים על דרקונים בתוך מדגם של שלושה. מתקיים: $X \sim \text{HG}(10, 3, 3)$.

נסמן ב- Y את משך זמן הצפייה היומית. מתקיים:

$$Y = 10X + 12(3 - X) = 36 - 2X$$

לכן נקבל

$$E(Y) = 36 - 2E(X) = 36 - 2 \cdot 3 \cdot 0.3 = 34.2$$

ב. נסמן ב- W מספר ימים נפלאים במשך 70 ימים הבאים. מתקיים: $W \sim \text{Bin}(70, p)$, כאשר p היא ההסתברות ליום נפלא ושווה ל:

$$p = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{110}{120}$$

בשאלה נדרש לחשב את ההסתברות הבאה: $P(W \geq 60)$.

נבדוק את התנאים:

$$np = 70 \cdot 0.9167 = 64.17 > 5$$

$$nq = 70 \cdot 0.0833 = 5.83 > 5$$

נעבור לקירוב נורמלי: $W \sim N(64.17, 5.35)$.

$$P(W \geq 60) = 1 - P(W \leq 59) = 1 - \Phi\left(\frac{59 + 0.5 - 64.17}{\sqrt{5.35}}\right) = \Phi(2.02) = 0.9783$$

שאלה 3 (21 נקודות)

מוצר עובר בתהליך הייצור שלו 3 שלבים:

השלב הראשון נמשך זמן המתפלג מעריכי עם תוחלת 16 דקות,

השלב השני נמשך זמן המתפלג אחיד (רציף) בין 2 ל- a דקות ($a > 2$), עם אחוזון 80 השווה ל-10 דקות, השלב השלישי נמשך זמן המתפלג נורמלי עם תוחלת של 20 דקות וסטיית תקן 4 דקות. זמני כל השלבים הם בלתי תלויים.

א. מה ההסתברות שהשלב הראשון יימשך מעל לרבע שעה, אם ידוע שהוא נמשך כבר 7 דקות?

ב. מהי שונות זמן השלב השני?

ג. עבור 49 מוצרים, נמדד אורך השלב השלישי שהם עוברים. מהי ההסתברות שהזמן הממוצע של השלב השלישי של 49 מוצרים אלה לא יעלה על 21 דקות?

פתרון:

זמן השלב הראשון $X \sim \exp(1/16)$, זמן השלב השני $Y \sim U(2, a)$, זמן השלב השלישי $Z \sim N(20, 16)$.

א. לפי תכונת חוסר הזיכרון בהתפלגות מעריכית נקבל:

$$P(X > 15 | X > 7) = P(X > 15 - 7) = P(X > 8) = e^{-\frac{1}{16} \cdot 8} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.6065$$

ב. ראשית נמצא את a , $a = 12 \Rightarrow P(Y < 10) = \frac{10-2}{a-2} = 0.8$. כעת נמצא את השונות

$$Var(Y) = \frac{(12-2)^2}{12} = 8\frac{1}{3}$$

ג. נשים לב כי $\bar{Z}_{49} \sim N(20, \frac{16}{49})$, כעת $P(\bar{Z}_{49} \leq 21) = \Phi\left(\frac{21-20}{\sqrt{\frac{16}{49}}}\right) = \Phi(1.75) = 0.9599$.

שאלה 4 (16 נקודות)

שירה הכינה פלייליסט ובו 10 שירים. ברשימה ישנם 5 שירים בעברית, 4 שירים באנגלית, ושיר אחד בצרפתית. בכל בוקר נבחר שיר אחד באקראי להיות השיר הפותח של היום (בחירה עם החזרה).

נגדיר:

X – מספר השירים בעברית שייבחרו בימים שישי ושבת בסוף השבוע הקרוב,

Y – מספר השירים באנגלית שייבחרו בימים שישי ושבת בסוף השבוע הקרוב.

א. (10 נקודות) מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים X, Y .

ב. (6 נקודות) חשבו את ההסתברות $P(|X - Y| \geq 2)$.

פתרון:

א.

$X \setminus Y$	0	1	2
0	0.01	0.08	0.16
1	0.1	0.4	0
2	0.25	0	0

חישוב ההסתברויות בתוך הטבלה:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{10^2} = 0.01$$

בשני הימים ייבחר שיר בצרפתית

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{5 \cdot 1 \cdot 2}{10^2} = 0.1$$

ייבחר שיר בעברית ושיר בצרפתית

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{5 \cdot 5}{10^2} = 0.25$$

ייבחרו שני שירים בעברית

$$P(X = 0, Y = 1) = \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{10^2} = 0.08$$

ייבחר שיר באנגלית ושיר בצרפתית

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{10^2} = 0.4$$

ייבחר שיר בעברית ושיר באנגלית

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{4 \cdot 4}{10^2} = 0.16$$

ייבחרו שני שירים באנגלית

ב.

$$P(|X - Y| \geq 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 0, Y = 2) = 0.25 + 0.16 = 0.41$$

שאלה 5 (23 נקודות)

סטיית התקן של משקל שקית קפה היא 5 גרם. השערת האפס היא שהמכונה תקינה ותוחלת משקל שקית קפה היא 100 גרם. תקלה במכונה גורמת לעליית תוחלת משקל שקית קפה ל-103 גרם שזאת ההשערה האלטרנטיבית.

לצורך בדיקת תקינות המכונה בודקים ממוצע משקל של 40 שקיות קפה. אם ממוצע המשקל גדול מ- c , עוצרים את המכונה ובודקים אותה.

א. (8 נקודות) מה ערכו של c אם מעוניינים ברמת מובהקות של 0.05?

ב. (8 נקודות) מהי עוצמת המבחן עבור c שחישבתם?

ג. (7 נקודות) עבור c שחישבתם, ממוצע של כמה שקיות יש לבדוק אם מעוניינים ברמת מובהקות לכל היותר 0.02?

פתרון:

א.

$$H_0: \mu = 100$$

$$H_1: \mu = 103$$

$$\bar{X}_{40} \sim N\left(\mu, \frac{5^2}{40}\right) \quad \text{לפי משפט הגבול המרכזי:}$$

$$\alpha = P_{\mu=100}(\bar{X}_{40} > c) = 1 - \Phi\left(\frac{c-100}{5/\sqrt{40}}\right) = 0.05$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{c-100}{5/\sqrt{40}}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{c-100}{5/\sqrt{40}} = 1.645 \Rightarrow c = 101.3$$

ב.

$$1 - \beta = P_{\mu=103}(\bar{X}_{40} > 101.3) = 1 - \Phi\left(\frac{101.3-103}{5/\sqrt{40}}\right) = 1 - \Phi(-2.15) = \Phi(2.15) = 0.9842$$

ג.

$$P_{\mu=100}(\bar{X}_n > 101.3) = 1 - \Phi\left(\frac{101.3-100}{5/\sqrt{n}}\right) \leq 0.02$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{101.3-100}{5/\sqrt{n}}\right) \geq 0.98 \Rightarrow \frac{101.3-100}{5/\sqrt{n}} \geq 2.054 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 7.9 \Rightarrow n = 63$$