

אלגברה ליניארית

תרגיל מספר 11 - ייצוג העתקות על ידי מטריצות

**שאלה 1**

תהי  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  העתקה ליניארית, הנתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay + bz \\ ax + y + cz \\ bx + cy + z \end{pmatrix}$$

א. מצאו ערכים של  $a, b, c$ , כך ש-  $(1, 1, 1) \in \ker T$ .

ב. יהי  $a = 0$ . מצאו ערכים של  $b, c$ , כך ש-  $(0, 1, c) \in \operatorname{Im} T$ .

ג. עבור  $a = b = c = -\frac{1}{2}$  מצאו בסיס ל-  $\operatorname{Im} T$  ול-  $\ker T$ .

**שאלה 2**

נתונה העתקה  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  המוגדרת על ידי:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+2 & -1 \\ -1 & -4 & a^2-3 \\ 1 & a+2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

א. מצאו את המימד של  $\ker T$  כפונקציה של הפרמטר  $a$ .

ב. עבור אילו ערכים של  $a$  הווקטור  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a^2-7 \end{pmatrix}$  שייך ל-  $\operatorname{Im} T$ ?

**שאלה 3**

תהי  $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  העתקה ליניארית, הנתונה על ידי  $T(A) = A + A^T$ .

א. מצאו את  $[T]_E^E$ , כאשר  $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

ב. בדקו האם  $T$  הפיכה.

ג. אם  $T$  הפיכה מצאו את  $T^{-1} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$  לכל  $a, b, c, d$  ממשיים, אם  $T$  לא הפיכה מצאו בסיסים

של  $\ker T$  ושל  $\operatorname{Im} T$ .

#### שאלה 4

תהי  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  העתקה ליניארית, כך ש-  $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  היא המטריצה המייצגת שלה ביחס

לבסיס  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  ויהי  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

א. חשבו את  $T(v)$ .

ב. מצאו בסיס לגרעין של ההעתקה.

ג. מצאו בסיס לתמונה של ההעתקה.

ד. האם  $T$  חח"ע? על? הפיכה?

#### שאלה 5

תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית, כאשר  $\dim V = 3$ . יהי  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  בסיס של  $V$ . נתון כי

$$T(v_1) = 2v_1 + v_2 - v_3$$

$$T(v_2) = v_1 + 2v_2 - v_3$$

$$T(v_3) = \alpha v_1 + v_2 - v_3$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת  $[T]_B^B$ .

ב. עבור אילו ערכי  $\alpha$  ההעתקה  $T$  הינה הפיכה?

ג. עבור  $\alpha = 2$  הוכיחו כי  $\ker T = \text{Span}\{v_1 - v_3\}$ .

#### שאלה 6

נתונה העתקה  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  המוגדרת על ידי:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -\alpha \\ 2\alpha & 4\alpha & -4\alpha \\ \alpha^2 & -2\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

א. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  ההעתקה  $T$  תהייה חח"ע?

ב. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  ההעתקה  $T$  לא תהייה על?

ג. עבור  $\alpha = 2$  מצאו שני וקטורים שונים  $v_1 \neq v_2$  כך ש:  $T(v_1) = T(v_2)$ .

#### שאלה 7

נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow U$ .

נתון  $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  בסיס ל- $V$ ,  $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$  בסיס ל- $U$ .

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} : B_2, B_1$$

א. מצאו בסיס ל- $\ker T$ .

ב. מצאו בסיס ל-  $\text{Im } T$ .

ג. האם  $(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \in \ker T$ ?

ד. האם  $(u_1 + 2u_2 + u_3) \in \text{Im } T$ ?

### שאלה 8

תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית. נתון  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  בסיס ל-  $V$ .

א. הראו ש-  $S = \{v_1, v_1 - v_2, v_1 + v_2 - v_3\}$  מהווה בסיס ל-  $V$ .

ב. נתונה המטריצה המייצגת של  $T$  לפי הבסיס  $B$ :  $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

מצאו את  $[T]_S$  המטריצה המייצגת של  $T$  לפי הבסיס  $S$ .

ג. האם  $T$  הפיכה? אם לא, מצאו בסיס ל-  $\ker T$ . אם כן, חשבו את  $T^{-1}(v_1 + v_2 + v_3)$ .

### שאלה 9

יהי  $V$  מרחב וקטורי בעל בסיס  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ , ותהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית המקיימת:

$$T(v_1) = v_1 + v_2, \quad T(v_2) = v_1 + v_3, \quad T(v_3) = v_3$$

א. מצאו את הגרעין של ההעתקה.

ב. מצאו את התמונה של העתקה.

ג. האם ההעתקה חח"ע? על?

ד. האם  $T$  הפיכה? אם כן, חשבו את  $T^{-1}(v_1)$ .

### שאלה 10

תהי  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  העתקה ליניארית, הנתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + az \\ 2x + bz \\ -ax - by + 3z \end{pmatrix}$$

ד. מצאו את כל הערכים של  $a, b \in \mathbb{R}$ , כך שההעתקה  $T$  תהיה הפיכה.

ה. בדקו כי  $T$  הפיכה עבור  $a = 1, b = 2$  ומצאו את  $T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

ו. נגדיר  $S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3z \end{pmatrix}$ . מצאו את  $\dim(\ker S)$  ו-  $\dim(\text{Im } S)$ .