

אלגברה לינארית
תרגיל מספר 5 - דטרמיננטות

שאלה 1

חשבו דטרמיננטה של כל אחת מהמטריצות הבאות, וקבעו אם היא הפיכה או לא.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ א.} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix} \text{ ב.} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ג.}$$

שאלה 2

תהי $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ מקיימת $|A| = \alpha$. חשבו את הדטרמיננטות הבאות :

$$\begin{vmatrix} 3a-2c & a+4c \\ 3b-2d & b+4d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2a+3b & 5a-b \\ 2c+3d & 5c-d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2a & 3a+2b \\ 2c & 3c+2d \end{vmatrix}, |-3A^{-1}|$$

שאלה 3

חשבו דטרמיננטה של כל אחת מהמטריצות הבאות. עבור אילו ערכי x ממשי המטריצה הפיכה ?

$$A = \begin{bmatrix} e^{-x} & e^{2x} & e^{5x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} & 5e^{5x} \\ e^{-x} & 4e^{2x} & 25e^{5x} \end{bmatrix} \text{ א.} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix} \text{ ב.} \quad C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} - xI_3 \text{ ג.}$$

שאלה 4

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_3 & c_3 & 3b_3 + 3ma_3 - 3nc_3 \\ a_2 & c_2 & 3b_2 + 3ma_2 - 3nc_2 \\ a_1 & c_1 & 3b_1 + 3ma_1 - 3nc_1 \end{bmatrix}, \text{ כך ש- } |A| = p \neq 0. \\ \text{חשבו את } |-2B^2 A^T B^{-1}|.$$

שאלה 5

A, B מטריצות מסדר $n \times n$ שמקיימת $|A| = 3, |B| = -2$. חשבו את הדטרמיננטות הבאות :

$$|A^T B^2|, |2A^2 B^{-2}|, |A^2 B|, |2A|$$

שאלה 6

א. יהיו a, b פרמטרים ממשיים. קבעו עבור אילו ערכי הפרמטרים יש למערכת פתרון יחיד, יש אינסוף פתרונות או אין פתרונות :

$$\begin{cases} -ay + z = a^2 - b \\ ax + b^2 y + az = b^2 \\ -x - ay = a + b \end{cases}$$

ב. מצאו את הפתרון של המערכת עבור $b = 0, a = 1$.

שאלה 7 (מבחן)

נתונה מערכת המשוואות הבאה :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2\alpha^2 \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

- א. עבור אילו ערכים ממשיים של α יש למערכת : (i) פתרון יחיד, (ii) אף פתרון, (iii) אינסוף פתרונות?
ב. במקרים של אינסוף פתרונות, מצאו את הפתרון הכללי ורשמו אותו בצורה פרמטרית.