אפקה המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון Y

פתרון שאלה 1א: זה גבול מהצורה "1^{∞}". נתאים אותו לגבול של Euler (אוילר):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-1}{n^3-2n}\right)^{\sqrt{4n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2n+3n-1}{n^3-2n}\right)^{\sqrt{4n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-1}{n^3-2n}\right)^{\sqrt{4n^4+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3-2n}{3n-1}}\right)^{\sqrt{4n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3-2n}{3n-1}}\right)^{\sqrt{4n^4+1}\left(\frac{n^3-2n}{3n-1}\right)\left(\frac{3n-1}{n^3-2n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^3-2n}{3n-1}}\right)^{\frac{n^3-2n}{3n-1}}\right)^{\left(\frac{3n-1}{n^3-2n}\right)\sqrt{4n^4+1}}$$

נשתמש בגבול של אוילר:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

עבור הסדרה: $a_n=\frac{n^3-2n}{3n-1}$. נקבל: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3-2n}{3n-1}}\right)^{\frac{n^3-2n}{3n-1}}=e$. לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-1}{n^3-2n}\right)^{\sqrt{4n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{\left(\frac{3n-1}{n^3-2n}\right)\sqrt{4n^4+1}}\right)=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{n^3-2n}\right)\sqrt{4n^4+1}}=$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^2\left(3-\frac{1}{n}\right)\sqrt{4+\frac{1}{n^4}}}{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3-\frac{1}{n}\right)\sqrt{4+\frac{1}{n^4}}}{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2}{1}}=\boxed{e^6}$$

פתרון שאלה 1ב:

$$F(x)=\int\frac{x^2+4x}{x^2+4x-5}dx=\int 1+\frac{5}{x^2+4x-5}dx=\int 1+\frac{5}{(x-1)(x+5)}dx=x+\frac{5}{6}\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}dx=$$

$$=x+\frac{5}{6}\left(\ln|x-1|-\ln|x+5|\right)+C$$

<u>פתרון שאלה 2א:</u>

1. נשתמש בשינוי המשתנים $y=\frac{1}{x+3}\to\infty$, כאשר $x\to(-3)^+$. לכן

$$L=\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=\lim_{x\to(-3)^+}(x+3)^2\left(1-2\ln(x+3)\right)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-2\ln(1/y)\right)=$$

$$=-2\lim_{y\to\infty}\frac{\ln(1/y)}{y^2}=2\lim_{y\to\infty}\frac{\ln(y)}{y^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2\lim_{y\to\infty}\frac{1/y}{2y}=2\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2y^2}=0$$

(הערה: נובע שהקו $x=-3$ לא מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף של f .)

2. בקטע $(-3,\infty)$ מתקיים:

$$f(x)=(x+3)^2(1-2\ln(x+3))\Rightarrow f'(x)=2(x+3)(1-2\ln(x+3))+(x+3)^2\left(\frac{-2}{x+3}\right)$$

$$f'(x)=-4(x+3)\ln(x+3)$$

הסימן של הנגזרת הוא: $f'(x):(_{x=-3}\ ++++++\ \underset{x=-2}{0}\ ----------$

ולכן הפונקציה עולה בקטע $(-3,-2]$ ויורדת בקטע $[-2,\infty)$. אין מינימום כי $\lim_{x\to\infty}(f(x))=-\infty$.

לפי הטבלה מסיקים ש- $f(-2)=1$ הוא המקסימום המוחלט של הפונקציה.

<u>פתרון שאלה 2ב:</u>

נתון

$$a_n=\frac{3n+\sqrt{1}}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{3n+\sqrt{2}}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{3n+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^4+(n-1)}}+\frac{3n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+n}}$$

לכל $1\le j,k\le n$ מתקיים $\frac{3n+1}{\sqrt{n^4+n}}\le\frac{3n+\sqrt{j}}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{3n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}}$ ולכן:

$$n\frac{3n+\sqrt{1}}{\sqrt{n^4+n}}\le a_n\le n\frac{3n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{3n+1}{\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3+1/n)n^2}{n^2\sqrt{(\underbrace{\boxed{1+\frac{1}{n^4}}}_{\to 1})}}=3$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{3n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n^{1.5}}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^3})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3+n^{-0.5})n^2}{n^2\sqrt{(\underbrace{\boxed{1+\frac{1}{n^3}}}_{\to 1})}}=3$$

ואז לפי כלל הסנדוויץ' נובע: $\lim_{n\to\infty}a_n=3$.

<u>פתרון 3א:</u> נחשב פולינום Taylor (טיילור) מסדר 2 של $f(x)$:

$$f(x)=\arctan x \quad \Rightarrow \quad f(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-2x\left(1+x^2\right)^{-2}=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(1)=-\frac{1}{2}$$

הפונקציה ונגזרותיה רציפות לכל x ממשי ובפרט בסביבת $x_0=1$.

מכאן שפולינום טיילור מסדר 2 יהיה:

$$T_2(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2$$

נמצא ביטוי לשארית מסדר 1: $R_1(x)=\frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2=-\frac{2c}{2\left(1+c^2\right)^2}(x-1)^2=-\frac{c(x-1)^2}{\left(1+c^2\right)^2}$

$$\Rightarrow \arctan(x)=f(x)=T_1(x)+R_1(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{c(x-1)^2}{\left(1+c^2\right)^2},\quad |x-1|<0.2$$

$$\Rightarrow \arctan(x)-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-1)=-\frac{c(x-1)^2}{\left(1+c^2\right)^2},\qquad 0.8<x<1.2,\quad c \text{ between } x \text{ and } 1$$

$$\Rightarrow \left|\arctan(x)-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-1)\right|=\left|-\frac{c(x-1)^2}{\left(1+c^2\right)^2}\right|\le\frac{|c|}{\left(1+c^2\right)^2}\underbrace{|x-1|^2}_{<0.2^2}\le\frac{|c|}{25}\le\frac{12}{10\cdot 25}=\frac{6}{125}$$

<u>פתרון שאלה 3ב:</u>

נגדיר פונקציה הבאה: $f(x)=x^2\cdot\arctan x-1$. נבדוק האם גרף של הפונקציה חותך את ציר ה-x
ונחקור את המשוואה $f(x)=x^2\cdot\arctan x-1=0$ **(#)**

נגזור את הפונקציה: $f'(x)=2x\cdot\arctan x+\frac{x^2}{1+x^2}$. ניתן לראות שלכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים
$f'(x)>0$, ז״א f פונקציה מונוטונית <u>עולה ממש</u> בקטע $[0,\infty)$.

(I) נובע שהפונקציה f <u>חח״ע</u> בקטע $[0,\infty)$ ולכן למשוואה (#) יש <u>מקסימום</u> פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

ברור ש- $f(0)=0^2\cdot\arctan 0-1=-1<0$ ו- $f(10)=10^2\cdot\arctan 10-1>0$
הפונקציה $f(x)=x^2\cdot\arctan x-1$ רציפה לכל x.

(II) ע״פ משפט על ערך ביניים של Cauchy מסיקים שלמשוואה (#) יש <u>לפחות</u> פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

<u>מסקנה</u>: למשוואה $x^2\cdot\arctan x=1$ יש <u>בדיוק</u> פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

<u>פתרון שאלה 4א:</u>

$f(x)$ פונקציה גזירה על כל הישר הממשי . כזכור, גזירות בנקודה גוררת רציפות בנקודה. מכאן, ניתן לומר שאם $a<b$ אז $f(x)$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b) ומתקיימים תנאי משפט Lagrange. בפרט, קיימות נקודות $c\in(7,9)$ ו- $d\in(1,7)$ כך ש :

$$\left|\frac{f(9)-f(7)}{9-7}\right|=|f'(c)|\le 6\Rightarrow\left|\frac{68-f(7)}{2}\right|\le 6\Rightarrow|68-f(7)|\le 12\Rightarrow f(7)\ge 56 .$$

$$\left|\frac{f(7)-f(1)}{7-1}\right|=|f'(d)|\le 6\Rightarrow\left|\frac{f(7)-20}{6}\right|\le 6\Rightarrow|f(7)-20|\le 36\Rightarrow f(7)\le 56$$

ובסה"כ נסיק ש $f(7)=56$.

<u>פתרון שאלה 4ב:</u>

מספיק למצוא את המספרים m,n כך ש- f רציפה וגזירה ב- 0.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$. לכן $f(0)=n=\frac{1}{2}$.

בנוסף, לפי נוסחת טיילור של $\cos x$ נקבל

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{x^2/2+R_4(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{R_4(x)}{x^2}, & x>0\\[2ex] mx+\dfrac{1}{2}, & x\le 0\end{cases}$$

לכן

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1/2}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{R_4(x)}{x^3}=0\quad(***)$$

ו-

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1/2}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{mx}{x}=m$$

<u>מסקנה</u> : f רציפה וגזירה ב- 0 אם ורק אם $m=0, n=0.5$.

<u>הערה</u> : אפשרלחשב את הגבול (***) בעזרת כלללופיטל וללא שימוש בנוסחת טיילור (נמקו !)

פתרון שאלה 5א:

הטענה נכונה.

לפי כלל השרשרת נובע שהפונקציה g גזירה ומתקיים: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

ברור ש- $2\sqrt{f(x)}>0$, לכל x ממשי ולכן

$$\begin{cases} g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \\ g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>0 \\ g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<0 \end{cases}$$

לכן (לפי מבחן הנגזרת הראשונה) לשתי הפונקציות g, f יש אותן נקודות קריטיות ואותם תחומי עליה/ירידה.

מסיקים לשתי הפונקציות g, f ישאותן נקודות קיצון בתחום $\mathbf{R}$.

פתרון שאלה 5ב:

מתקיים $a_n=\dfrac{4\sqrt{n}+6n}{2n+\sqrt{n}}=\dfrac{6n+4\sqrt{n}}{2n+\sqrt{n}}=\dfrac{6+\left(4/\sqrt{n}\right)}{2+\left(1/\sqrt{n}\right)}\xrightarrow[n\to\infty]{}3$.

נוכיח שהמספר $L=3$ שווה לגבול הסדרה a_n , לפי הגדרת הגבול:

מתקיים $\left|a_n-3\right|=\left|\dfrac{4\sqrt{n}+6n}{2n+\sqrt{n}}-3\right|=\left|\dfrac{4\sqrt{n}+6n-6n-3\sqrt{n}}{2n+\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{n}}{2n+\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{1}{2\sqrt{n}+1}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $N_\varepsilon=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$. אם $n>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$, אז $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ ולכן $\left|a_n-3\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$.

<u>מסקנה:</u> אם $n>N_\varepsilon$ אז $\left|a_n-3\right|<\varepsilon$, ז"א בדקו שהגבול $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$ לפי הגדרת הגבול של סדרה.

נובע שאם $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le 0.01$ אז גם $\left|a_n-3\right|<0.01$. לכן אם $n>\left(\dfrac{1}{0.01}\right)^2=10000$ אז $\left|a_n-3\right|<0.01$.

תשובה סופית: $N=10001$.

<u>פתרון שאלה 6א:</u>

פונקציה רציפה בנקודה $x=0$ כאשר $\lim\limits_{x\to 0} y(x)=y(0)$.

נסמן ב- $F=F(t)$ את הפונקציה הקדומה של $f(t)=e^{t^2}$.

לפי משפט Newton-Leibniz וכלל L'Hôpital נקבל:

$$\lim_{x\to 0} y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2+3x} e^{t^2}dt}{3x}=\left[f(t)=e^{t^2}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{F(x^2+3x)-F(0)}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x^2+3x)\cdot(2x+3)-0}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2+3x)\cdot(2x+3)}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x^2+3x)^2}\cdot(2x+3)}{3}=1$$

מ.ש.ל.

<u>פתרון שאלה 6ב:</u>

לפי הנתון $f(x)=x+\arctan x$ נובע ש-

$$f'(x)=1+\frac{1}{x^2+1},\ f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

הנגזרת השנייה היא שלילית לכל $x\in(0,1]$ ושווה 0 ב - $x=0$.

לכן הפונקציה קעורה בקטע $[0,1]$ ואז הגרף <u>מתחת למשיק</u> המבוקש (חוץ מבנקודת ההשקה שהוא מתלכד עם המשיק).

משוואת המשיק:

$$y=\underbrace{f(0)}_{0}+\underbrace{f'(0)}_{2}x=2x$$

נובע:

$$AREA=\int_0^1 2x-(x+\arctan x)dx=\int_0^1(x-\arctan x)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1-\int_0^1\arctan x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}-\left(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-(\arctan 1-\frac{1}{2}\ln 2)=\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right).$$

הערה: השתמשנו באינטגרציה בחלקים:

$$\int\arctan x dx=\int(x)'\arctan x dx=x\arctan x-\int(x)\frac{1}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

בהצלחה!