תרגיל בית 18 – עקרון הכלה הפרדה

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. כל אחד מהאורחים במסעדה מזמין לפחות מנה אחת מבין מרק, סושי ואגרול. ההזמנה מפורטת בטבלה הבאה:

מנה	מספר מנות להוציא
מרק	25
סושי	20
אגרול	33
מרק וסושי	15
מרק ואגרול	20
סושי ואגרול	25
מרק, סושי ואגרול	15

כמה אורחים יושבים במסעדה?

2. מטילים 10 קוביות זהות. מה מספר האפשרויות שבהטלה יופיעו כל המספרים מ – 1 עד 6?

3. בבית חולים יש n רופאות ו – n אחיות. כל רופאה בוחרת בדיוק אחות אחת לעבוד איתה. כל אחות בוחרת בדיוק רופאה אחת לעבוד איתה. אם האחות בחרה ברופאה שבחרה בה (כלומר, שתיהן בחרו לעבוד אחת עם השנייה) הן זוכות ביום חופש. מה מספר האפשרויות ש –
   (א) כולן זוכות ביום חופש.
   (ב) אף אחת לא זוכה ביום חופש.
   (ג) בדיוק k זוגות זוכים ביום חופש.

4. בכמה דרכים ניתן לסדר את המספרים $1, 2, ..., 8$ בשורה באופן כזה שאף מספר **זוגי** אינו נמצא במקומו? למשל, 14368725 עונה על הדרישה ואילו 12786543 אינו עונה על הדרישה.

5. כמה יש מספרים טבעיים הזרים למספר 120 וקטנים ממנו?

6. **פונקציית אוילר:** שני מספרים טבעיים שונים מאפס a, b נקראים **זרים** אם המחלק המשותף המקסימלי (gcd) שלהם הוא 1. נסמן

$$\gcd(a, b) = 1$$

למשל, $2, 3$ הם מספרים זרים ואילו $4, 6$ אינם מספרים זרים, כלומר

$$\gcd(2, 3) = 1, \ \gcd(4, 6) = 2 \neq 1$$

בשאלה זו נתייחס למספרים הטבעיים בלי אפס (בכדי להמנע מסימונים מיותרים). נתבונן ב**פונקציית אוילר** המוגדרת באופן הבא:

$$\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\Phi(a) = |\{b \in \mathbb{N} \ |b \leq a, \ \gcd(a, b) = 1\}|$$

כלומר פונקציית אוילר סופרת כמה יש מספרים הקטנים או שווים למספר נתון a וזרים לו. בשאלה זו נחקור את פונקציית אוילר בעזרת עקרון הכלה והפרדה.

   (א) חשבו את פונקציית אוילר במקרים הבאים:
      i. $\Phi(1)$

ii. $\Phi(2)$

iii. $\Phi(5)$

iv. $\Phi(12)$

v. $\Phi(p)$ כאשר p הוא מספר ראשוני כלשהו.

vi. $\Phi(p^2)$ כאשר p הוא מספר ראשוני כלשהו.

vii. $\Phi(p^k)$ כאשר p הוא מספר ראשוני כלשהו ו k מספר טבעי.

(ב) נחשב את $\Phi(23000)$ לפי השלבים הבאים:

i. רישמו את הגורמים הראשוניים של 23000.

ii. לכל אחד משלושת הגורמים הראשוניים שנסמנם p_1, p_2, p_3 שמצאת בסעיף הקודם נגדיר את הקבוצה הבאה

$$A_i = \{1 \leq a \leq 23000 \, | p_i | a\}$$

כלומר ב – A_iיש את כל המספרים שלא עולים על 23000 שהמספר p_i מחלק אותם. חשבו את הגודל של כל אחת משלושת הקבוצות A_i.

iii. כעת, נתבונן בקבוצה $A_i \cap A_j$. בקבוצה זו יש את כל המספרים שלא עולים על 23000 אשר המספרים p_i **וגם** p_j מחלקים אותם. כלומר

$$A_i \cap A_j = \{1 \leq a \leq 23000 \, | p_i | a, \, p_j | a\}$$

חשבו את הגודל של $A_i \cap A_j$ עבור כל האפשרויות לקבוצות A_i ו – A_j. כמה קבוצות (של זוגות של חיתוכים) כאלו יש?

iv. נתבונן בקבוצה $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. כיתבו במילים מיהם איברי הקבוצה. כיתבו תיאור מתמטי של הקבוצה וחשבו את גודלה.

v. הסבירו למה

$$\Phi(23000) = 23000 - \left(\sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \right)$$

vi. חשבו את $\Phi(23000)$

vii. הראו ע"י הצבה כי

$$\Phi(23000) = 23000 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$$

כאשר p_1, p_2, p_3 הגורמים הראשוניים שמצאנו בסעיפים הקודמים.

viii. יהא n מספר טבעי כלשהו ויהיו p_1, p_2, p_3 הגורמים הראשוניים של n. נגדיר את הקבוצות A_i בדומה לקבוצות שהגדרנו עבור $n = 23000$. הוכיחו את השיוון הבא:

$$n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) = n - \left(\sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \right)$$

(ג) **נוסחה לפונקציית אוילר:** יהא n מספר טבעי ויהיו $p_1, p_2, ..., p_k$ הגורמים הראשוניים השונים של n. אז

$$n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \Phi(n) = n - \left(\sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \cdots (-1)^{k+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_k| \right)$$

נסו להוכיח את הנוסחא (אבל אם לא תצליחו לא נורא. הסעיף הזה הוא רשות ומומלץ להעזר בויקיפדיה לאמיצים שיינסו :)).