# <u>מבחן סוף סמסטר בקורס ״אלגברה לינארית ״</u> מועד Y

# בהצלחה!

## שאלה 1

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ x + y - az = a \end{cases}$$
 נק. ) נתונה המערכת הבאה: 2x - 4y + 2az = -2

. כאשר a הוא פרמטר

מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת

- א) פתרון יחיד
- ב) אינסוף פתרונות
  - ג) אין פתרון.
- ד) במקרה ולמערכת יש אינסוף פתרונות, מצא אותם

$$U = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
 הבא:

 $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ ים המוגדרת כך: $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ ים המוגדרת כך:

- W א. (5 נק.) מצא בסיס ומימד של
- . U+W בסיס ומימד של (8 נק.) מצא בסיס ומימד
  - $U\cap W$  ג. (4 נק.) מצא מימד של
- . נמק.  $W+W'\neq V$  תת מרחב של  $W'\neq W-W'\neq V$  ממימד  $W'\neq W$  ממימד  $W'\neq W$  ממימד  $W'\neq W$  ממימד מרחב של  $W'\neq W$

# <u>שאלה 3</u>

 $W=\mathbb{R}^3$  יהי ( 2-טוה קטנה או ממעלה אווה הפולינומים מרחב ויהי )  $V=P_2(x)$  יהי (א ידי: דית המוגדרת העל ליניארית העתקה  $T:V \to W$  העתלה

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(0) \\ p'(1) \\ p'(0) \end{pmatrix}$$

 $\ker(T)$  -א בסיס ל- (1 נק.) מצא (1 נק.)

. אמת המימדים המשפט את את  $\operatorname{Im}(T)$  -ל בסיס ל- (2 נק.) מצא משפט המימדים ואמת (2 נק.)

 $\dim(Im(T)) = 4$  - כך ש $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$  אם אומת העתקה לינארית פון בדוק האם קיימת העתקה לינארית אומרים (8 נק.) כן, בנה אותה, אם לא, הסבר למה.

## שאלה 4

ידי:  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$  המוגדרת על ידי: בתונה ההעתקה הליניארית

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 7y - 4z \\ 3x + y + 4z \\ 6x - 8y + z \end{pmatrix}$$

- א) (5 נק.) מצא את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הרגיל.
  - (5 נק.) בדוק שהקבוצה

$$S = \{ oldsymbol{u_1} = (1,1,0), oldsymbol{u_2} = (1,2,3), oldsymbol{u_3} = (1,3,5) \}$$
מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ 

ג) מצא את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס: (10 נק.) מצא את המטריצה המייצגת את

$$S = \{u_1 = (1,1,0), u_2 = (1,2,3), u_3 = (1,3,5)\}$$

(הערה: בסעיף זה אין צורך לעשות חישוב סופי. אפשר להציג רק כי מכפלה של מטריצות)

## <u>שאלה 5</u>

הפולינומים הפולינומים ונתונה ל-2. ונתונה או ממעלה ממעלה פולינומים ארחב ער או יהי  $V=P_2[x]$ יהי

$$B = \{1, 1 - x, 1 + x^2\}$$

- $P_2[x]$  ל- פסיס ל- B מהווה בסיס ל- (5 נק.) א.
- ב. (5 נק. ) נתון פולינום  $p(x)=5-x+4x^2$  בבסיס הסטנדרטי. מצא הצגה של פולינום ב. (5 נק. ) נתון פולינום שלו (קואורדינאטות שלו ) לפי הבסיס פו
  - V של מטריצת לבסיס לבסיס B לבסיס מטריצת מטריצת מטריצת (10 נק.) ג.

## שאלה 6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
. נתונה המטריצה

- . A של העצמיים הערכים את הערכים את הפולינום את הפולינום א) (א
  - A של העצמיים העצמיים של המרחבים של את מצא (ב, 6) (ב
- ג) (8 נק.) בדוק האם המטריצה לכסינה. במידה וכן, מצא את המטריצה המלכסנת. במידה ולא, הסבר למה היא לא לכסינה

## מבחן סוף סמסטר בקורס ״אלגברה לינארית ״ אלגברה לינארית ״אלגברה לינארית ״אלגברה לינארית ״

# בהצלחה!

## שאלה 1

$$\begin{cases} x+ay-z=1\\ x+y-az=a\\ 2x-4y+2az=-2 \end{cases}$$
 המערכת הבאה:

. כאשר a הוא פרמטר

מערכת שי a יטי אילו עבור מצא מצא

א1) פתרון יחיד

א2) אינסוף פתרונות

אין פתרון.

אותם מצא אותם (4א למערכת ויש למערכת אינסוף פתרונות, מצא אותם

$$\begin{pmatrix}
1 & a & -1 & | & 1 \\
1 & 1 & -a & | & a \\
2 & -4 & 2a & | & -2
\end{pmatrix}
\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \atop R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}
\begin{pmatrix}
1 & a & -1 & | & 1 \\
0 & 1 - a & -a + 1 & | & a - 1 \\
0 & -4 - 2a & 2a + 2 & | & -4
\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 / (1 - a)}
\begin{pmatrix}
1 & a & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & | & -1 \\
0 & -4 - 2a & 2a + 2 & | & -4
\end{pmatrix}
\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - (-4 - 2a)R_2}
\begin{pmatrix}
1 & a & -1 & | & 1 \\
0 & 1 & 1 & | & -1 \\
0 & 0 & 4a + 6 & | & -8 - 2a
\end{pmatrix}$$

אם a = -1.5 למערכת אין פחרונ.

: נקבל (במהלך הלוקה לעשתה (במהלך הדירוג נעשתה עבור a=1). נקבל (במהלך את המערכת עבור במהלך הדירוג נעשתה המערכת עבור

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & | & 1 \\
0 & 0 & 0 & | & 0 \\
0 & -6 & 4 & | & -4
\end{pmatrix}$$

. כלומר למערכת יש אינסוף פתרונות. כאשר  $a \neq 1, -1.5$  יש פתרון יחיד למערכת

a=1 נקבל:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -6y + 4z = -4 \\ z = t \end{cases}$$

ופתרון כללי הוא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

תת מרחב של V המוגדר (מוסף תת מסדר אוסף המטריצות הריבועיות (אוסף המטריצות אוסף אוסף  $V=M_{2 imes2}$  $U=Sp\left\{ egin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, egin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} 
ight\}:$  באופן הבא

 $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$ י תת קבוצה של V המוגדרת כך: W

א. (5 נק.) מצא בסיס ומימד של

 $U\cap W$  של את המימד את ומצא על של של עU+W ב. המרחב של תתי המימד מצא (ב. 12 נק.) ב.

. נמק.  $W+W'\neq V$  תת מרחב של  $W'\neq W'$  ממימד 3 כך ש $W'\neq W'$ . האם יתכן ש $W'\neq W'$  נמק.

### פתרון:

כיון שהרכיבים השונים מ-0 בכל מטריצה הם במקומות שונים – אנו יודעים שהמטריצות בלתי-W- תלויות לינארית, ולכן קבלנו בסיס ל

$$W = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

 $\pm U + W$  ב. נחשב את

קבוצה פורשת ל-
$$U+W$$
 היא איחוד הבסיסים שלהם. לכן: 
$$U+W=Sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

: ולכן ניתן הבסיס הסטנדרטי ולכן ניתן לבחור את  $\dim(U+W)=4$ 

$$U + W = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

: על פי משפט המימדים:  $U \cap W$  נחשב את

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1$$

W + W' = V ג. לא ייתכן. נראה שתמיד מתקיים

, שונים, W,W' שונים, כיון שנתון ש- "W,W' הוא ממימד 3. כעת ממימד 3. כעת החא הוא W, W = W + W' מתקיים בוודאי  $W \subset W + W'$  הכלה אמיתית), שכן אילו היה מתקיים שוויון בסתירה לנתון W, בסתירה לנתון W,W' ומכיוון שמימדי W', ומכיוון שמימדי שווים, נקבל ש-שונים. W.W' שונים.

 $W=R^3$  יהי (ביהי שווה ל-2 אין ממעלה ממעלה הפולינומים מרחב (ביהי  $V=P_2(x)$ ידי: על ידי המוגדרת המוגדרת ליניארית  $T\colon V o W$ 

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(0) \\ p'(1) \\ p'(0) \end{pmatrix}$$

- $\ker(T)$  -א. (6 נק.) מצא בסיס ל
- המתאים. בסיס ל-  $\operatorname{Im}(T)$  ואמת את משפט המימדים בסיס ל- ב.
- אם  $\dim (Im(T)) = 4$  כך ש-  $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$  אם לינארית העתקה קיימת העתקה לינארית (8 נק.) בדוק האם לא, הסבר למה.

כדי למצוא את הגרעין של העתקה נשווה את

$$T(p(x) = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

:מכאן

$$ker(T) = Sp\{1\}$$

$$Im(T) = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$dim(ker(T)) + dim(Im(T)) = 1 + 2 = 3$$

ג) לא קיימת. לפי משפט הממדים

$$3 = dim(ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(ker(T)) + 4$$
 מיימד לא יכול להיות שלילי

## שאלה 4

: נתונה ההעתקה הליניארית  $T\colon\mathbb{R}^3 o\mathbb{R}^3$  נתונה ההעתקה הליניארית

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 7y - 4z \\ 3x + y + 4z \\ 6x - 8y + z \end{pmatrix}$$

- א) (5 נק.) מצא את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס הרגיל.
  - ב) (5 נק.) בדוק שהקבוצה

$$S = \{ \boldsymbol{u_1} = (1,1,0), \boldsymbol{u_2} = (1,2,3), \boldsymbol{u_3} = (1,3,5) \}$$

 $\mathbb{R}^3$ מהווה בסיס ל

פתרון:

: ביחס לבסיס מצא את המטריצה המייצגת את  ${
m T}$  ביחס לבסיס

$$S = \{ \pmb{u_1} = (1,1,0), \pmb{u_2} = (1,2,3), \pmb{u_3} = (1,3,5) \}$$
 (הערה: אין צורך לעשות חישוב סופי, אפשר רק להציג כמכפלה של מטריצות)

א. המטריצה המייצגת לפי הבסיס הרגיל היא:

$$[T]_{E} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{R}^3$  ב. הקבוצה בתייל, לכן מהווה בסיס
- $\cdot$  ג. כדי לחשב את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס

$$S = \{ \vec{u}_1 = (1,1,0), \ \vec{u}_2 = (1,2,3), \ \vec{u}_3 = (1,3,5) \}$$

נחשב את מטריצות המעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ואז על פי משפט, נוכל לחשב את המטריצה המייצגת בבסיס החדש:

$$[T]_{s} = P^{-1}[T]_{E}P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 15 & 65 & 104 \\ -49 & -219 & -351 \\ 29 & 130 & 208 \end{pmatrix}$$

## <u>שאלה</u> 5

יהי הפולינומים ל-2. ונתונה קבוצת ממעלה פולינומים ממעלה או אר מרחב ע  $V=P_2[x]$ יהי הפולינומים  $B=\{1,1-x,1+x^2\}$ 

- $P_2[x]$  ל- (5 נק.) הוכח כי B מהווה בסיס ל-
- ב. (5 נק. ) נתון פולינום  $p(x)=5-x+4x^2$  בבסיס הסטנדרטי. מצא הצגה של פולינום בסיס ל נק. ) נתון פולינום (קואורדינאטות שלו לפי הבסיס בסיס לקואורדינאטות שלו לפי הבסיס פון אונו (קואורדינאטות שלו לקואורדינאטות שלו לפי הבסיס פון אונו (קואורדינאטות שלו לקואורדינאטות של לקואורדינאטות ש
  - על של D לבסיס סטנדרטי של B אמעבר מבסיס מטנדרטי של 10 ג. (10 נק.) מצא מטריצת המעבר
    - א. הקבוצה בתייל, לכן מהווה בסיס ל-V.

ב.

$$p(x) = 5 - x + 4x^{2} = 0 \cdot 1 + 1(1 - x) + 4(1 + x^{2})$$
$$p(x) = 5 - x + 4x^{2} = (0,1,4)_{B}$$

٦.

$$[I]_E^B = ([I]_B^e)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### מאלה 6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
. נתונה המטריצה ( א

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0$$

$$|A - 1I| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = Sp\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$|A - 2I| = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ניתן לראות שקיימים שני וקטורים עצמיים בת"ל ו:

$$m{V}_{\lambda=2} = Sp egin{cases} 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \ 0 \ 1 \ 0 \end{pmatrix},$$
מכאן נובע ש-  $A$  לכסינה והמטריצה המלכסנת היא: 
$$P = egin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \ 1 & 1 & 0 \ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$