יונתן כהן
חדו״א 2
תרגול מספר 5

גבולות ורציפות של פונקציות בשני משתנים
נגזרות חלקיות

<u>גבולות ורציפות של פונקציות בשני משתנים</u>

.1

$f(x,y)=\dfrac{x^4-y^4}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

א. לחשב $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

ב. האם f רציפה ב $(0,0)$?

ג. האם ניתן להגדיר את f ב $(0,0)$ כך שתהיה רציפה ב $(0,0)$?

אם כן לעשות זאת ולהוכיח ש $\tilde{f}$ רציפה ב $(0,0)$.

א.

לפי אריתמטיקה של גבולות של פונקציות בשני משתנים,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

ע"י "כפל בצמוד"

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^4-y^4)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}{(1-\sqrt{1-x^2-y^2})(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^4-y^4)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}{1^2-(\sqrt{1-x^2-y^2})^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^4-y^4)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}{1-(1-x^2-y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2-y^2)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})=0\cdot(1+\sqrt{1})=0$$

ב.

f אינה מוגדרת בנקודה $(0,0)$ כי בנקודה זו המכנה שווה ל

$$1-\sqrt{1-0^2-0^2}=1-\sqrt{1}=1-1=0$$

ומכיוון שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $(0,0)$, היא בוודאי אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

ג.

מכיוון שלפונקציה f יש גבול סופי בנקודה $(0,0)$, ניתן להגדיר אותה בנקודה $(0,0)$ כך שתהיה רציפה בנקודה.

נגדיר:

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{1-\sqrt{1-x^2-y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נוכיח ש $\tilde{f}$ אכן רציפה ב $(0,0)$.

מכיוון שלכל $(x,y)\neq(0,0)$ $\tilde{f}(x,y)$ זהה ל $f(x,y)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tilde{f}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = \tilde{f}(0,0)$$

ולכן $\tilde{f}$ רציפה בנקודה $(0,0)$.

.2

$$. \; f(x,y)=\begin{cases} xy^3\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}+e^x+e^y\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 3 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

א. האם f רצפיה ב $(x,y)\neq(0,0)$?

ב. האם f רציפה ב $(x,y)=(0,0)$?

א.

בכל $(x,y)\neq(0,0)$ $f(x,y)$ זהה לפונקציה $xy^3\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}+e^x+e^y\right)$.

הפונקציה $xy^3\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}+e^x+e^y\right)$ מוגדרת בכל $(x,y)\neq(0,0)$ (הביטוי x^4+y^4 מתאפס אך ורק בראשית). זו פונקציה אלמנטרית ולכן היא רציפה בכל תחום הגדרתה, כלומר רציפה בכל $(x,y)\neq(0,0)$.

ומכאן ש f רצפיה בכל $(x,y)\neq(0,0)$.

ב.

f בברור מוגדרת בנקודה $(0,0)$ (היא מוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$).

כדי לבדוק אם היא רציפה בנקודה $(0,0)$ נחשב את הגבול שלה בנקודה.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^3\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}+e^x+e^y\right)$$

נשים לב:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^3=0$$

הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}+e^x+e^y\right)$ אמנם לא קיים (כי הביטוי בתוך ה $\sin$ שואף ל ∞), אך הפונקציה $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}+e^x+e^y\right)$ חסומה (לכל t, $-1\le\sin t\le 1$), לפי "חסומה × אפסה" מתקבל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^3\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}+e^x+e^y\right)=0$$

כעת,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\neq 3=f(0,0)$$

ולכן f אינה רציפה בנקודה $(0,0)$.

.3

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3+x^3y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}$$

א. היכן f רציפה ?

ב. לחשב $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

א.

$f(x,y)$ פונקציה רציונלית ולכן רציפה בכל תחום הגדרתה. תחום ההגדרה שלה הוא קבוצת הנקודות בהן המכנה שונה מ 0 .

נבדוק מתי המכנה מתאפס

$$\underbrace{4x^2}_{\geq 0}+\underbrace{5x^2y^2}_{\geq 0}+\underbrace{6y^2}_{\geq 0}=0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2=0\,,6y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=0\,,\,y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\,,\,y=0$$

$$\Rightarrow\quad (x,y)=(0,0)$$

ולכן המכנה שונה מ 0 בכל $(x,y)\neq(0,0)$.

ברור שבנקודה $(x,y)=(0,0)$ המכנה שווה ל 0 .

כעת,

בנקודה $(x,y)=(0,0)$ f אינה מוגדרת ולכן בוודאי שאינה רציפה.

בכל $(x,y)\neq(0,0)$ המכנה שונה מ 0 ולכן f מוגדרת, ולכן רציפה.

ב.

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3+x^3y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}=\frac{x^2y^2(y+x)}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}=\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\cdot(x+y)$$

בגלל שהפונקציה $x+y$ מקבלת גם ערכים שליליים כאשר $(x,y)\to(0,0)$ נשתמש בערך מוחלט.

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\cdot(x+y)\right|=\left|\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\right|\cdot|x+y|$$

נשים לב ש

$$\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\geq 0$$

ולכן

$$|f(x,y)|=\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\cdot|x+y|$$

כעת

$$\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\leq\frac{x^2y^2}{5x^2y^2}=\frac{1}{5}$$

ולכן

$$|f(x,y)|=\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\cdot|x+y|\leq\frac{1}{5}|x+y|$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{5}|x+y|\leq f(x,y)\leq\frac{1}{5}|x+y|$$

כעת לפי אריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y|=|0|=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \pm\frac{1}{5}|x+y|=\pm\frac{1}{5}\cdot 0=0$$

וממשפט הסנדוויץ׳ נובע

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

הערה:

ניתן לפתור את התרגיל בדרך נוספת.

הוכחנו

$$|f(x,y)|=\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\cdot|x+y|$$

הוכחנו גם ש

$$0\le\frac{x^2y^2}{4x^2+5x^2y^2+6y^2}\le\frac{1}{5}$$

כלומר זו פונקציה חסומה, ו $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y|=0$, ולפי ״חסומה × אפסה״ מתקבל

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

.4

לחשב $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+3y^4}{4x^2+5y^4}$.

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+3\cdot0^4}{4x^2+5\cdot0^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $x=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to0} f(0,y)=\lim_{y\to0}\frac{2\cdot0^2+3y^4}{4\cdot0^2+5y^4}=\lim_{y\to0}\frac{3y^4}{5y^4}=\lim_{y\to0}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

מכיוון שהגבולות של f לאורך שני המסלולים שונים, נובע שהגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2+3y^4}{4x^2+5y^4}$ אינו קיים.

.5

לחשב $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$.

ננסה לחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך כמה מסלולים.

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 0^2}{x^4+0^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $x=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2 y^2}{0^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

מכיוון שגבולות של f לאורך שני מסלולים הם שונים, נובע שהגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$ אינו קיים.

פתרון נוסף:

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=kx$, k פרמטר.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (kx)^2}{x^4+(kx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2 x^4}{x^4+k^4 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2}{1+k^4} = \frac{k^2}{1+k^4}$$

התוצאה תלויה בפרמטר k, כלומר עבור k שונים, דהיינו מסלולים שונים, מתקבלים גבולות שונים, ולכן הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4+y^4}$ אינו קיים.

.6

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^6}{(x-y^2)^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$, לחשב $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

ננסה לחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך כמה מסלולים.

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{0^6}{(x-0^2)^2+0^6}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $x=0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^6}{(0-y^2)^2+y^6}=\lim_{y\to 0}\frac{y^6}{y^4+y^6}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1+y^2}=\frac{0}{1}=0$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $y=kx$, k פרמטר.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{(kx)^6}{(x-(kx)^2)^2+(kx)^6}=\lim_{x\to 0}\frac{k^6x^6}{x^2-2k^2x^3+k^4x^4+k^6x^6}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^6x^4}{1-2k^2x+k^4x^2+k^6x^4}=\frac{0}{1}=0$$

נחשב את הגבול של $f(x,y)$ לאורך המסלול $x=y^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(y^2,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^6}{(y^2-y^2)^2+y^6}=\lim_{y\to 0}\frac{y^6}{y^6}=\lim_{y\to 0}1=1$$

מכיוון שגבולות של f לאורך שני מסלולים הם שונים, נובע שהגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ אינו קיים.

.7

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^4+y^4)e^{x^4+y^4+4}}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 4 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$, לחשב $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^4+y^4)e^{x^4+y^4+4}}{x^4+y^4}="\frac{0}{0}"=$$

נבצע החלפת משתנה

$$t=x^4+y^4$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4+y^4=0^+$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t\cdot e^{t+4}}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot e^{t+4}=1\cdot e^4=e^4$$

נגזרות חלקיות

.1

$u(x,y) = xye^{\frac{1}{2}x^2}$, להוכיח ש u מקיימת את המשוואה $xu_x - x^2yu_y = u$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = ye^{\frac{1}{2}x^2} + xye^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x = (y + x^2y)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

נראה שמתקיים השוויון המבוקש:

$$xu_x - x^2yu_y = x \cdot (y + x^2y)e^{\frac{1}{2}x^2} - x^2y \cdot xe^{\frac{1}{2}x^2} =$$

$$= xye^{\frac{1}{2}x^2} + x^3ye^{\frac{1}{2}x^2} - x^3ye^{\frac{1}{2}x^2} = xye^{\frac{1}{2}x^2} = u$$

.2

$$f(x,y)=\begin{cases}2x+e^{\frac{y}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$, לחשב f_y , f_x בכל $\mathbb{R}^2$, f_{xx} ב $(0,0)$.

נחשב את f_x .

בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$: נגזור לפי כללי הגזירה

$$f_x=2+e^{\frac{y}{x^2+y^2}}\cdot\left(y\cdot\frac{-1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x\right)=2-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

בנקודה $(x,y)=(0,0)$: נגזור לפי ההגדרה

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{[2x+e^{\frac{0}{x^2+0^2}}]-1}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{2x+e^0-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to0}2=2$$

לסיכום

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נחשב את f_y .

בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$: נגזור לפי כללי הגזירה

$$f_y=e^{\frac{y}{x^2+y^2}}\cdot\left(\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

בנקודה $(x,y)=(0,0)$: נגזור לפי ההגדרה

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{[2\cdot0+e^{\frac{y}{0^2+y^2}}]-1}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{e^{\frac{1}{y}}-1}{y}$$

נחשב הגבולות החד צדדיים

$$\lim_{y\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{y}}-1}{y}=\text{"}\frac{e^{\frac{1}{0^+}}-1}{0^+}\text{"}=\text{"}\frac{e^{\infty}-1}{0^+}\text{"}=\text{"}\frac{\infty-1}{0^+}\text{"}=\text{"}\frac{\infty}{0^+}\text{"}=\infty$$

$$\lim_{y\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{y}}-1}{y}=\text{"}\frac{e^{\frac{1}{0^-}}-1}{0^-}\text{"}=\text{"}\frac{e^{-\infty}-1}{0^-}\text{"}=\text{"}\frac{0-1}{0^-}\text{"}=\text{"}\frac{-1}{0^-}\text{"}=\infty$$

כלומר

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{e^{\frac{1}{y}}-1}{y}=\infty$$

ולכן ל f אין נגזרת חלקית לפי y בנקודה $(0,0)$.

לסיכום

$$f_y(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}\quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$. \ f_x(x,y)=\begin{cases} 2-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

נחשב את f_{xx} .

בנקודה $(x,y)=(0,0)$: נגזור לפי ההגדרה

$$f_{xx}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f_x(x,0)-f_x(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\left[2-\dfrac{2x\cdot0}{(x^2+0^2)^2}e^{\frac{0}{x^2+0^2}}\right]-2}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=\lim_{x\to0}0=0$$

בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$: נגזור לפי כללי הגזירה

$$f_{xx}=-\frac{2y\cdot(x^2+y^2)^2-2xy\cdot2(x^2+y^2)\cdot2x}{(x^2+y^2)^4}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}\cdot\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$=-\frac{(x^2+y^2)\left(2y(x^2+y^2)-2xy\cdot2\cdot2x\right)}{(x^2+y^2)^4}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)\left(-2y^3+6x^2y\right)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}=\frac{-2x^2y^3+6x^4y-2y^5+6x^2y^3+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{4x^2y^3+6x^4y-2y^5+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}e^{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

לסיכום

$$f_{xx}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4x^2y^3+6x^4y-2y^5+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}e^{\frac{y}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$. \ f_y(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{y}{x^2+y^2}} \quad (x,y)\neq(0,0)$$

נחשב את f_{yy} .

$$f_{yy}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f_y(0,y)-f_y(0,0)}{y-0}$$

f_y לא קיימת בנקודה $(0,0)$ ולכן אי אפשר לחשב את f_{yy} בנקודה $(0,0)$.

.3

$f(x,y)=\ln(e^x+y^e)$, לחשב f_x , f_y , f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} , f_{yx} .

$$f_x(x,y)=\frac{e^x}{e^x+y^e}$$

$$f_y(x,y)=\frac{ey^{e-1}}{e^x+y^e}$$

$$f_{xx}=\frac{e^x\cdot(e^x+y^e)-e^x\cdot e^x}{(e^x+y^e)^2}=\frac{e^x y^e}{(e^x+y^e)^2}$$

$$f_{xy}=e^x\cdot\frac{-1}{(e^x+y^e)^2}\cdot ey^{e-1}=\frac{-ee^x y^{e-1}}{(e^x+y^e)^2}$$

$$f_{yy}=\frac{e(e-1)y^{e-2}\cdot(e^x+y^e)-ey^{e-1}\cdot ey^{e-1}}{(e^x+y^e)^2}=\frac{-ey^{2e-2}+(e^2-e)e^x y^{e-2}}{(e^x+y^e)^2}$$

$$f_{yx}=ey^{e-1}\cdot\frac{-1}{(e^x+y^e)^2}\cdot e^x=\frac{-ee^x y^{e-1}}{(e^x+y^e)^2}=f_{xy}$$