פתרון שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (12 נק') בכמה דרכים אפשר לסדר בשורה 10 כדורים: 4 כחולים זהים, 3 אדומים זהים, 2 ירוקים זהים, 1 צהוב, כך שכל הכדורים מאותו צבע לא יהיו סמוכים כלומר שלא יהיו 2 ירוקים סמוכים, שלא יהיו 3 אדומים סמוכים וגם שלא יהיו 4 כחולים סמוכים ?

ב. (8 נק') נתונות 2 טענות . לכל טענה רשמו אם היא נכונה או אינה נכונה **ללא נימוק.**

(העתיקו את הטענה למחברת הבחינה ורשמו **נכון** או **לא נכון**)

טענה 1: מספר אפשרויות החלוקה של 10 כדורים לבנים לשלושה תאים כך שבכל תא לפחות כדור אחד הוא 36.

טענה 2: תהיינה $f:A\to B,\quad g:B\to C$ פונקציות ו- $g\circ f:A\to C$ פונקציית ההרכבה.

אם $g\circ f$ על אז g על.

פתרון שאלה 1

נסמן את הקבוצות הבאות:

U – קבוצת כל הסידורים של 10 כדורים הנתונים ללא הגבלה.

A_2 – קבוצת כל הסידורים של 10 כדורים הנתונים, כך ש – 2 כדורים ירוקים סמוכים.

A_3 – קבוצת כל הסידורים של 10 כדורים הנתונים, כך ש – 3 כדורים אדומים סמוכים.

A_4 – קבוצת כל הסידורים של 10 כדורים הנתונים, כך ש – 4 כדורים כחולים סמוכים.

בסימונים האלה שאנחנו מחפשים את מספר האיברים בקבוצה $\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4$.

לפי עקרון ההכלה וההדחה מקבלים:

$$|\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|=|U|-|A_2|-|A_3|-|A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|-|A_2\cap A_3\cap A_4|$$

נחשב את כל המחוברים שבנוסחה הנ"ל:

איברי הקבוצה U הם הסידורים השונים של 10 כדורים: 4 כחולים זהים, 3 אדומים זהים, 2 ירוקים זהים, 1 צהוב שזה תמורות עם חזרות וגודל הקבוצה הזאת שווה $\frac{10!}{1!2!3!4!}$.

בקבוצה A_2 2 כדורים הירוקים סמוכים, ולכן ניתן לחשוב עליהם ככדור ירוק אחד שמן, ולכן יש לנו 9 כדורים: 4 כחולים זהים, 3 אדומים זהים, 1 ירוק (רצף) , 1 צהוב וגודל הקבוצה הזאת שווה למספר התמורות עם חזרות $\frac{9!}{1!1!3!4!}$.

באופן דומה מקבלים שגודל הקבוצה A_3 שווה ל– $\frac{8!}{1!2!1!4!}$ וגודל הקבוצה A_4 שווה ל – $\frac{7!}{1!2!3!1!}$.

בקבוצה $A_2\cap A_3$ 2 כדורים הירוקים סמוכים ולכן ניתן לחשוב עליהם ככדור ירוק אחד ארוך וגם 3 כדורים אדומים סמוכים, ולכן ניתן לחשוב עליהם ככדור אדום אחד ארוך ולכן יש לנו 7 כדורים 4 כחולים זהים, 1 אדום (ארוך), 1 ירוק (ארוך) , 1 צהוב וגודל הקבוצה הזאת שווה למספר התמורות עם חזרות $\frac{7!}{1!1!1!4!}$. באופן דומה מקבלים שגודל הקבוצה $A_2\cap A_4$ שווה ל – $\frac{6!}{1!1!3!1!}$ וגודל הקבוצה $A_3\cap A_4$ שווה ל – $\frac{5!}{1!2!1!1!}$.

בקבוצה $A_2\cap A_3\cap A_4$ 2 כדורים הירוקים סמוכים ולכן ניתן לחשוב עליהם ככדור ירוק אחד ארוך, 3 כדורים אדומים סמוכים, ולכן ניתן לחשוב עליהם ככדור אדום אחד ארוך , וגם 4 כדורים כחולים סמוכים, ולכן ניתן לחשוב עליהם ככדור כחול אחד ארוך ולכן יש לנו 4 כדורים 1 כחול (ארוך) , 1 אדום (ארוך), 1 ירוק (ארוך), 1 צהוב וגודל הקבוצה הזאת שווה למספר התמורות ללא חזרות ושווה ל – $4!$.

נציב כל התוצאות שקיבלנו ונקבל:

$$|\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4| = \frac{10!}{1!2!3!4!} - \frac{9!}{1!1!3!4!} - \frac{8!}{1!2!1!4!} - \frac{7!}{1!2!3!1!} + \frac{7!}{1!1!1!4!} + \frac{6!}{1!1!3!1!} + \frac{5!}{1!2!1!1!} - 4!$$

ב. I. **הטענה נכונה**:

נשים בכל תא כדור לבן ונחלק את 7 הכדורים הנותרים לשלושת התאים:

$$D(3,7) = \binom{3-1+7}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

II. **הטענה נכונה**.

יהי $c \in C$ ונוכיח שקיים $b \in B$ כך ש $g(b) = c$. מכיוון ש $g \circ f$ על נסיק שקיים $a \in A$ כך ש

$(g \circ f)(a) = g\left(f\left(a\right)\right) = c$. עבור $b = f(a) \in B$ מתקיים $g(b) = g\left(f\left(a\right)\right) = c$.

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. אין קשר בין 2 תתי הסעיפים של א.

I. (5 נק') הפריכו את הטענה הבאה:

"אם הקבוצות A_1, B_1, A_2, B_2 מקיימות את התנאים

$|A_1| = |A_2|$ ו- $|B_1| = |B_2|$, אז בהכרח $|A_1 \oplus B_1| = |A_2 \oplus B_2|$."

II. (5 נק') תהי $\mathbb{R}$ קבוצת הממשיים, $\mathbb{Z}$ קבוצת השלמים ו- $\mathbb{Q}$ קבוצת הרציונליים.

חשבו באמצעות אריתמטיקה של עוצמות או כל דרך אחרת את:

$$|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}|$$

ב. (10 נק') לפארק קרוגר בדרום אפריקה חסרים קרנפים, נמרים ופילים. מכל סוג, דרושה חיה אחת לפחות ולכל היותר חמש חיות. בסה"כ דרושות עשר חיות. בכמה דרכים שונות יכול הספארי ברמת-גן לסייע?

הציגו את הבעיה באמצעות פונקציות יוצרות ופתרו.

פתרון שאלה 2

א.I. נציג דוגמה נגדית להפרכה:

יהיו $\mathbb{N}, N_1, N_2$, כאשר $\mathbb{N}$ קבוצת הטבעיים, N_1 קבוצת האי זוגיים N_2 קבוצת הזוגיים.

בוחרים:

$B_1 = N_2, B_2 = \mathbb{N}$, $A_1 = N_1, A_2 = \mathbb{N}$ ולכן $|A_1| = |A_2|$ ו- $|B_1| = |B_2|$.

השיוויון $|A_1 \oplus B_1| = |A_2 \oplus B_2|$ לא מתקיים כי:

$$|A_1 \oplus B_1| = |\mathbf{N}| = \aleph_0$$
$$|A_2 \oplus B_2| = |\phi| = 0$$

I. דרך א: חשבון עוצמות

$|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|=\aleph_0$

$|\mathbb{R}|=\aleph$

לפי הגדרת כפל עוצמות $|\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{R}|=\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph$

נשתמש בכך ש: $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ ו- $\aleph_0\cdot\aleph=\aleph$ ואסוציאטיביות כפל עוצמות:

$$|\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{R}|=\aleph_0\cdot\aleph_0\cdot\aleph=(\aleph_0\cdot\aleph_0)\cdot\aleph=\aleph_0\cdot\aleph=\aleph$$

דרך ב: שימוש במשפט קש"ב:

מתקיים: $\{1\}\times\{2\}\times R\subseteq Z\times Q\times R\subseteq R\times R\times R$

הקבוצה מימין היא מעוצמה $\aleph$. לכן עוצמת קבוצה הנתונה לכל היותר $\aleph$.

הקבוצה משמאל עוצמתה כעוצמת $\mathbb{R}$ כי קיימת פונקציה חח"ע ועל:

$$f:\mathbb{R}\to\{1\}\times\{2\}\times\mathbb{R}$$
$$f(x)=(1,2,x)$$

לכן עוצמת הקבוצה הנתונה אינה פחות מ- $\aleph$.

לפי משפט קש"ב עוצמת הקבוצה הנתונה בדיוק $\aleph$.

ב. נסמן ב- x_1 את מספר הקרנפים הדרושים, ב- x_2 את מספר הנמרים הדרושים וב- x_3 את מספר הפילים. עלינו למצוא את מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x_1+x_2+x_3=10$
כאשר $1\le x_1\le 5, 1\le x_2\le 5, 1\le x_3\le 5$. נעשה זאת באמצעות פונקציות יוצרות.

הפונקציה היוצרת המייצגת את המשתנים:

$$f(x)=\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^3=x^3\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)^3=x^3\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^3=$$

$$=x^3\left(1-x^5\right)^3\left(\frac{1}{1-x}\right)^3=x^3\left(1-3x^5+3x^{10}-x^{15}\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)^3.$$

כאשר בשוויון השלישי נעזרנו בנוסחה שח סכום של טור הנדסי סופי ובמעבר האחרון נעזרנו בבינום של ניוטון ונוסחה של טור הנדסי אינסופי.

קיבלנו ש $f(x)=x^3\left(1-3x^5+3x^{10}-x^{15}\right)\left(1+x+x^2+\cdots\right)^3$. נתבונן בביטוי האחרון ונתייחס אליו כמכפלה של שלושה גורמים ונרכיב את המקדם של x^{10}.

אפשרות א: מהגורם השמאלי נקבל x^3 שמקדמו הוא 1, מהאמצעי את הגורם 1, ומהימני את הגורם x^7 שמקדמו הוא $D(3,7)$. סה"כ המקדם של x^{10} הוא $D(3,7)$.

אפשרות ב: מהגורם השמאלי נקבל x^3 שמקדמו הוא 1, מהאמצעי את הגורם x^5 שמקדמו הוא -3, ומהימני את הגורם x^2 שמקדמו הוא $D(3,2)$. סה"כ המקדם של x^{10} הוא $-3D(3,2)$.

נחבר את המקדמים של x^{10} ונקבל $D(3,7)-3D(3,2)=36-3\cdot 6=18$.

תשובה סופית: 18 אפשרויות שונות.

<u>שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (12 נק') נגדיר יחס R מעל קבוצת הטבעיים הזוגיים A באופן הבא:

$R=\{(a,b)\in A^2:\quad 4\,|\,(a+b)\}$.

I. הוכיחו ש R יחס שקילות.

II. הציגו את כל מחלקות השקילות השונות. כמה מחלקות כאלה ישנן?

ב. (8 נק') יהי $G=(V,E)$ עץ אשר V קבוצת קודקודיו ו-E קבוצת קשתותיו.

הראו שאם כל דרגות קודקודי G אי זוגיות אז מספר קשתותיו אי זוגי.

<u>פתרון שאלה 3</u>

א. I. נוכיח שהיחס הינו יחס שקילות:

רפלקסיביות- יהי $a\in A$. אזי $a=2k$ כאשר $k\in\mathbb{N}$. מכאן, $a+a=4k$ ולכן $4|(a+a)$. זאת אומרת $(a,a)\in R$.

סימטריות- אם $(a,b)\in R$ אז $4|(a+b)$. מכיוון ש- $a+b=b+a$ נקבל $4|(b+a)$ ו- $(b,a)\in R$.

טרנזיטיביות- נניח ש $(a,b),(b,c)\in R$ אזי $4|(a+b)$ וגם $4|(b+c)$. מכיוון ש b זוגי נקבל שגם $4\,|\,2b$ (ראו הוכחת רפלקסיביות). מכאן, $4|\big((a+b)+(b+c)-2b\big)$. כלומר, $4|(a+c)$ ולכן $(a,c)\in R$.

II.

נראה שישנן רק 2 מחלקות שקילות שונות

$$[0]_R=\{0,4,8,...\}=\{4n\,|\quad n\in\mathbb{N}\}$$

$$[2]_R=\{2,6,10,\ldots\}=\{4n+2\,|\quad n\in\mathbb{N}\}$$

אכן, $a\in[0]_R$ אס"ם $4\,|\,a$ אס"ם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $a=4n$. ברור שעבור a כזה מתקיים $[0]_R=[a]_R$ כי שני איברים שקולים לפי יחס השקילות R קובעים את אותה מחלקת השקילות. באופן דומה, $a=2m\in[2]_R$ אס"ם $4|(2m+2)$. זה קורה אס"ם קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש $2m+2=4k$ (כאשר שוויון זה כמובן אפשרי רק אם $k\geq 1$). לבסוף, נקבל $a=2m\in[2]_R$ אס"ם $2m=4k-2=4(k-1)+2=4n+2$ עבור $n\in\mathbb{N}$ (ואז $k=n+1\geq 1$).

מסיבות דומות עבור $a=2m\in[2]_R$ מתקיים $[2]_R=[a]_R$.

כעת, לכל טבעי זוגי a קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $a=4n$ (שארית החלוקה ב-4 היא אפס) או $a=4n+2$ (שארית החלוקה ב-4 היא 2) ומכאן שישנן רק שתי מחלקות שקילות שונות.

ניתן גם להסביר ע"י העובדה ששתי המחלקות הנ"ל זרות ואיחודן הוא A.

ב. ממשפט לחיצות הידיים: $\sum\deg(v_i)=2|E|$ נובע שמספר הקודקודים זוגי.

ולכן: $|E|=|V|-1$, כלומר מספר הצלעות אי זוגי.

<u>שאלה 4 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (10 נק') יהיו : A, B, C, D, E פסוקים יסודיים.

האם הטיעון הבא תקף? כלומר, האם יש גרירה טאוטולוגית של המסקנה מהנתונים?

נתונים :

$$(1) \quad \sim(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$$
$$(2) \quad B \to (A \vee E)$$
$$(3) \quad E \to D$$
$$(4) \quad \sim B \to \sim A$$

מסקנה: D

ב. (10 נק') יהי S יחס מעל קבוצה D. הוכיחו ש : $S \cap S^{-1}$ יחס סימטרי.

<u>פתרון שאלה 4:</u>

א.

$$(1) \quad \sim(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$$
$$(2) \quad B \to (A \vee E)$$
$$(3) \quad E \to D$$
$$(4) \quad \sim B \to \sim A$$

המסקנה: D

נניח שהמסקנה שקרית ונראה אם קיימים ערכי אמת לפסוקים היסודיים עבורם ההנחות אמיתיות אך המסקנה שקרית.

(א) מ-(3) וטבלת האמת של גרירה $TT_{\to}$ נסיק ש-E שקרי.

(ב) נתבונן ב-(2) ונפצל ל-2 מקרים : מקרה 1 : A אמיתי מקרה 2 : A שקרי.

מקרה 1

ב1 : A אמיתי. אזי מטבלת האמת של "$\vee$" $A \vee E$ אמיתי.

ואז מטבלת האמת "$\to$" B אמיתי.

ג1 : מ-ב1 , $TT_{\vee}$ ו- $TT_{\sim}$ $\sim(A \wedge B)$ שקרי

ד1 : כיוון שD שקרי נקבל מ-ג1 ו- $TT_{\vee}$ ש-(1) שקרי בסתירה לכך שכל הנתונים אמיתיים.

מקרה 2

ב2 : A שקרי, מטבלת האמת של "$\vee$" $A \vee E$ שקרי.

ואז מ- $TT_{\to}$ B שקרי.

ג2 : מ-ב2 , $TT_{\vee}$ ו- $TT_{\sim}$ $\sim(A \wedge B)$ אמיתי

ד2 : מ-ב2 ומ- $TT_{\to}$ (4) אמיתי.

קבלנו שעבור ערכי האמת הבאים : A שקרי B שקרי E שקרי D שקרי ו-C יכול להיות גם אמיתי או שקרי.

כל ארבעת הנתונים אמיתיים אך המסקנה שקרית ולכן המסקנה אינה נובעת מהנתונים.

<u>**ב. סימטריות:**</u> $(S \cap S^{-1})^{-1} \overset{(1)}{=} S^{-1} \cap (S^{-1})^{-1} \overset{(2)}{=} S^{-1} \cap S \overset{(3)}{=} S \cap S^{-1}$

(1) תכונה של יחסים : $(R \cap T)^{-1} = R^{-1} \cap T^{-1}$ (2) תכונה של יחסים : $(R^{-1})^{-1} = R$

(3) קומוטטיביות החיתוך. לכן , הרלציה סימטרית מהתכונה : $R^{-1} = R$

<u>שאלה 5 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (12 נק') תהי $f:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(X)=X\cap\mathbb{Z}$ לכל $X\in P(\mathbb{R})$.

האם f על ? האם f חח"ע ? הוכיחו ש $\text{Im}(f)=P(\mathbb{Z})$.

ב. (8 נק')   הוכיחו ש :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$$ כאשר k טבעי זוגי.

הדרכה : ניתן לפצל את הסכום לשני סכומים.

<u>פתרון שאלה 5</u>

א. נוכיח ש $\text{Im}(f)=P(\mathbb{Z})$ ואז מכיוון ש $P(\mathbb{Z})\neq P(\mathbb{R})$ (כי למשל $\mathbb{R}\in P(\mathbb{R})\setminus P(\mathbb{Z})$) נסיק ש $\text{Im}(f)\neq P(\mathbb{R})$ ו- f אינה על. ראשית, לכל $X\in P(\mathbb{R})$ מתקיים $f(X)=X\cap\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$. כלומר, $f(X)\in P(\mathbb{Z})$. מכאן, $\text{Im}(f)\subseteq P(\mathbb{Z})$.
תהי $Y\in P(\mathbb{Z})$ אזי $Y\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ כלומר, $Y\in P(\mathbb{R})$ בנוסף מתקיים $f(Y)=Y\cap\mathbb{Z}=Y$ שכן $Y\subseteq\mathbb{Z}$ והוכחנו גם את ההכלה ההפוכה $P(\mathbb{Z})\subseteq\text{Im}(f)$. בסה"כ $\text{Im}(f)=P(\mathbb{Z})$ ו- f אינה על.

f אינה חח"ע כי למשל $f(\mathbb{Z})=f(\mathbb{R})=\mathbb{Z}$ ועם זאת $\mathbb{Z}\neq\mathbb{R}$.

ב.
$$2^n\underset{(1)}{=}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underset{(2)}{=}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{K\ \ even}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}}_{K\ odd}\underset{(3)}{=}2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{K\ \ even}$$

(1) סכום מקדמים בינומיים

(2) פיצול ל-2 סכומים של המקדמים הזוגיים וסכום המקדמים האי זוגיים.

(3) נשתמש בטענה שסכום המקדמים במקומות הזוגיים שווה לסכום המקדמים במקומות האי זוגיים.

נקבל:

$$\Rightarrow\quad 2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{K\ \ even}=2^n\Rightarrow\quad\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{K\ \ even}=\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$$

שאלה 6 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (12 נק') סופי הצורפת הצרפתייה תשבץ לכם תכשיטים בשורה מימין לשמאל. לרשותה 3 סוגי אבני חן : ברקת, ספיר ויהלום. יש לה כלל אחד- אם ישנה אבן ספיר בשורה אז כל האבנים שלשמאלה צריכות להיות גם הן אבני ספיר. יהי a_n מספר האפשרויות לשבץ n אבני חן בשורה.

I. מצאו את a_1 והוכיחו את כלל הנסיגה $a_n = 1 + 2a_{n-1}$.

II. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \ge 1$ מתקיים $a_n = 2^n + 1$.

ב. (8 נק') הוכיחו על הקבוצות : X,Y,Z :

$$(X - Y) \cup (Y - Z) = (X \cup (Y - Z)) - (Y \cap Z)$$

פתרון שאלה 6

א.I . ישנם 3 סוגי אבני חן שונים ללא מגבלה על האבן הראשונה (הימנית) ולכן $a_1 = 3$.

יתכנו שלושה מקרים בבואנו לשבץ n אבני חן :

1)האבן הראשונה היא ספיר ואז לפי הכללים של סופי כל שאר האבנים אמורות להיות אבני ספיר. כלומר ישנה רק דרך אחת לעשות זאת.

2)האבן הראשונה היא ברקת ואז מספר האפשרויות לשבץ את $n-1$ האבנים הבאות הוא a_{n-1}.

3)האבן הראשונה היא יהלום ואז מספר האפשרויות לשבץ את $n-1$ האבנים הבאות הוא a_{n-1}.

בסה"כ נסיק ש $a_n = 1 + a_{n-1} + a_{n-1} = 1 + 2a_{n-1}$.

II.בסיס האינדוקציה ($n=1$) : אכן מסעיף א נקבל $a_1 = 2^1 + 1 = 3$.

נניח נכונות הטענה עבור $n-1 \ge 1$. כלומר, נניח ש $a_{n-1} = 2^{n-1} + 1$ ונוכיח את הטענה עבור n. כלומר, נוכיח ש $a_n = 2^n + 1$.

אכן מנוסחת הנסיגה ומהנחת האינדוקציה נקבל ש :

$a_n = 1 + 2a_{n-1} = 1 + 2 \cdot 2^{n-1} = 1 + 2^n$.

ב.

$(X - Y) \cup (Y - Z) =$

$(X \cap Y^c) \cup (Y \cap Z^c) =$ שימוש ב $A - B = A \cap B^c$

$[(X \cap Y^c) \cup Y] \cap [(X \cap Y^c) \cup Z^c) =$ כלל הפילוג

$[(X \cup Y) \cup (Y \cup Y^c] \cap [(X \cup Z^c) \cap (Y^c \cup Z^c)] =$ כלל הפילוג

$[(X \cup Y) \cap (X \cup Z^c)] \cap (Y \cap Z)^c =$ שימוש ב : $B \cup U = B$ $A \cup A^c = U$

$[X \cup (Y \cap Z^c)] \cap (Y \cap Z)^c =$ כלל הפילוג

$[X \cup (Y - Z)] - (Y \cap Z)$ $A - B = A \cap B^c$

שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (12 נק') בכמה דרכים אפשר לסדר בשורה 10 כדורים: 4 כחולים זהים, 3 אדומים זהים, 2 ירוקים זהים, 1 צהוב, כך שכל הכדורים מאותו צבע לא יהיו סמוכים כלומר שלא יהיו 2 ירוקים סמוכים, שלא יהיו 3 אדומים סמוכים וגם שלא יהיו 4 כחולים סמוכים ?

ב. (8 נק') נתונות 2 טענות . לכל טענה רשמו אם היא נכונה או אינה נכונה **ללא נימוק.**

(העתיקו את הטענה למחברת הבחינה ורשמו **נכון** או **לא נכון**)

טענה 1: מספר אפשרויות החלוקה של 10 כדורים לבנים לשלושה תאים כך שבכל תא לפחות כדור אחד הוא 36.

טענה 2: תהיינה $f: A \to B, \quad g: B \to C$ פונקציות ו- $g \circ f : A \to C$ פונקציית ההרכבה.

אם $g \circ f$ על אז g על.

שאלה 2 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. אין קשר בין 2 תתי הסעיפים של א.

I. (5 נק')   הפריכו את הטענה הבאה:

"אם הקבוצות A_1, B_1, A_2, B_2 מקיימות את התנאים

$|A_1| = |A_2|$ ו- $|B_1| = |B_2|$, אז בהכרח $|A_1 \oplus B_1| = |A_2 \oplus B_2|$."

II. (5 נק') תהי $\mathbb{R}$ קבוצת הממשיים, $\mathbb{Z}$ קבוצת השלמים ו- $\mathbb{Q}$ קבוצת הרציונלים.

חשבו באמצעות אריתמטיקה של עוצמות או בכל דרך אחרת את:

$$|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}|$$

ב. (10 נק') לפארק קרוגר בדרום אפריקה חסרים קרנפים, נמרים ופילים. מכל סוג, דרושה חיה אחת לפחות ולכל היותר חמש חיות. בסה"כ דרושות עשר חיות. בכמה דרכים שונות יכול הספארי ברמת-גן לסייע?

הציגו את הבעיה באמצעות פונקציות יוצרות ופתרו.

שאלה 3 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (12 נק') נגדיר יחס R מעל קבוצת הטבעיים הזוגיים A באופן הבא:

$R = \{(a,b) \in A^2 : \quad 4 \mid (a+b)\}$.

I. הוכיחו ש R יחס שקילות.

II. הציגו את כל מחלקות השקילות השונות. כמה מחלקות כאלה ישנן?

ב. (8 נק') יהי $G = (V, E)$ עץ אשר V קבוצת קודקודיו ו- E קבוצת קשתותיו.

הראו שאם כל דרגות קודקודי G אי זוגיות אז מספר קשתותיו אי זוגי.

<u>שאלה 4 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (10 נק') יהיו : A,B,C,D,E פסוקים יסודיים.

האם הטיעון הבא תקף? כלומר, האם יש גרירה טאוטולוגית של המסקנה מהנתונים?

נתונים :

$$\begin{array}{ll} (1) & \sim(A\wedge B)\vee(C\wedge D) \\ (2) & B\rightarrow(A\vee E) \\ (3) & E\rightarrow D \\ (4) & \sim B\rightarrow\sim A \end{array}$$

מסקנה: D

ב. (10 נק') יהי S יחס מעל קבוצה D. הוכיחו ש : $S\cap S^{-1}$ יחס סימטרי.

<u>שאלה 5 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (12 נק') תהי $f:P(\mathbb{R})\rightarrow P(\mathbb{R})$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(X)=X\cap\mathbb{Z}$ לכל $X\in P(\mathbb{R})$.

האם f על ?   האם f חח"ע ? הוכיחו ש $\mathrm{Im}(f)=P(\mathbb{Z})$.

ב. (8 נק')   הוכיחו ש :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n-1}$$ כאשר k טבעי זוגי.

הדרכה : ניתן לפצל את הסכום לשני סכומים.

<u>שאלה 6 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (12 נק') סופי הצורפת הצרפתייה תשבץ לכם תכשיטים בשורה מימין לשמאל. לרשותה 3 סוגי אבני חן : ברקת, ספיר ויהלום. יש לה כלל אחד- אם ישנה אבן ספיר בשורה אז כל האבנים שלשמאלה צריכות להיות גם הן אבני ספיר.

יהי a_n מספר האפשרויות לשבץ n אבני חן בשורה.

I. מצאו את a_1 והוכיחו את כלל הנסיגה $a_n=1+2a_{n-1}$.

II. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 1$ מתקיים $a_n=2^n+1$.

ב. (8 נק') הוכיחו על הקבוצות : X,Y,Z :

$$(X-Y)\cup(Y-Z)=(X\cup(Y-Z))-(Y\cap Z)$$