

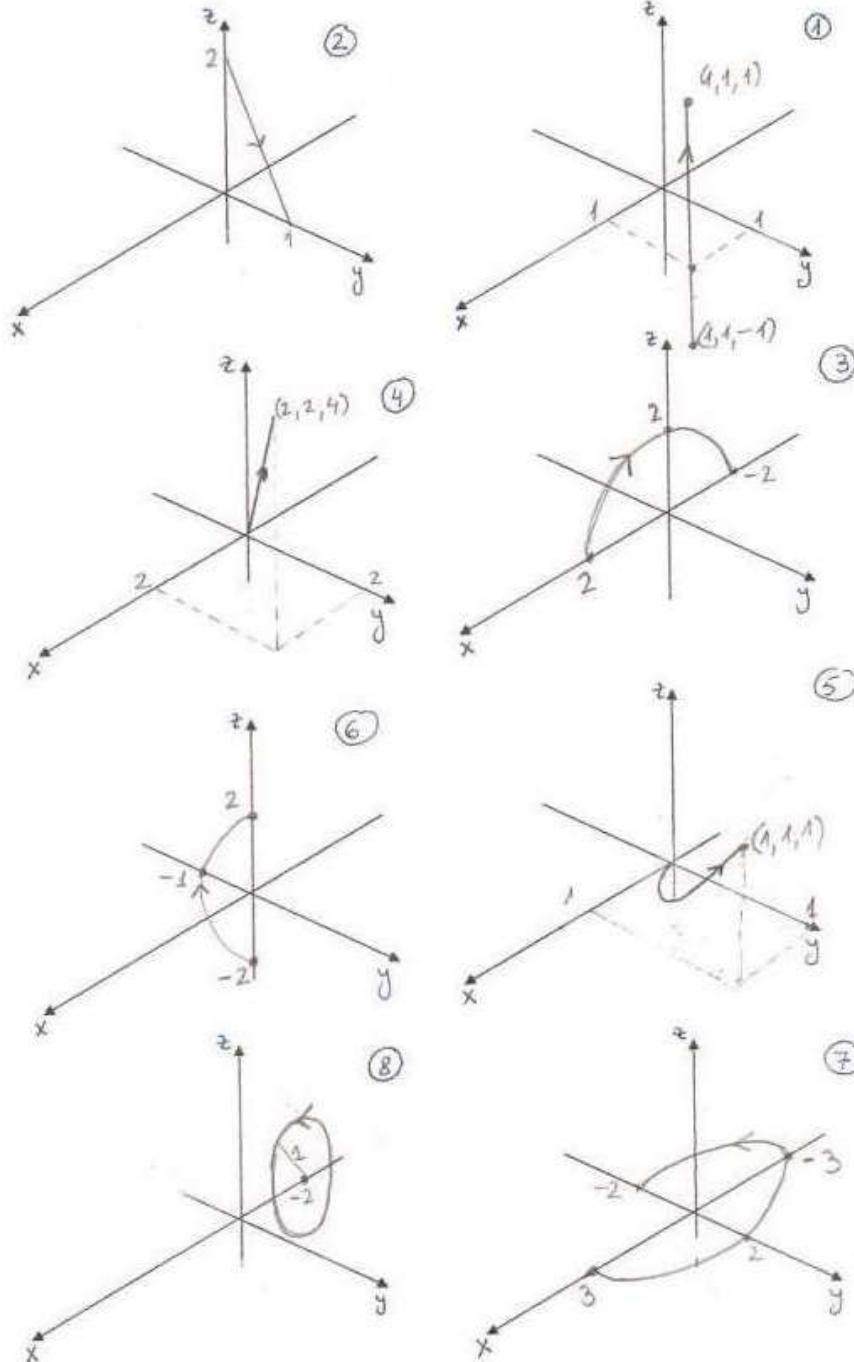
חדו"א 2

תרגיל מספר 11 - אינטגרלים קוויים מסוג ראשון ושני, נוסחת גרין

אינטגרל קווי מסוג ראשון

שאלה 1

התאימו בין שרטוטי המסילות ובין הפרמטריזציות שלהן (בעמוד הבא). שימו לב – יתכן ויש יותר מפרמטריזציה אחת המתאימה לאותה מסילה.



פרמטריזציות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k} & 0 \leq t \leq 1 \\ \text{ב. } \vec{r}(t) = \hat{i} + \hat{j} + t\hat{k} & -1 \leq t \leq 1 \\ \text{ג. } \vec{r}(t) = t\hat{j} + t\hat{j} + 2t\hat{k} & 0 \leq t \leq 2 \\ \text{ד. } \vec{r}(t) = t\hat{j} + (2-2t)\hat{k} & 0 \leq t \leq 1 \\ \text{ה. } \vec{r}(t) = 2\cos t\hat{i} + 2\sin t\hat{k} & 0 \leq t \leq \pi \\ \text{ו. } \vec{r}(t) = 3\cos t\hat{i} + 2\sin t\hat{j} & 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \\ \text{ז. } \vec{r}(t) = \hat{i} + \hat{j} + (t-1)\hat{k} & 0 \leq t \leq 2 \\ \text{ח. } \vec{r}(t) = \frac{1}{2}t\hat{j} + (2-t)\hat{k} & 0 \leq t \leq 2 \\ \text{ט. } \vec{r}(t) = (t^2-1)\hat{i} + 2t\hat{k} & -1 \leq t \leq 1 \\ \text{י. } \vec{r}(t) = -t\hat{i} + \sqrt{4-t^2}\hat{k} & -2 \leq t \leq 2 \\ \text{יא. } \vec{r}(t) = -2\hat{i} + \cos t\hat{j} + \sin t\hat{k} & 0 \leq t \leq 2\pi \end{array}$$

**שאלה 2**

חשבו את המסה של תיל שצפיפותו ליחידת אורך נתונה על ידי  $f(x, y) = (x + x^2)y^2$  וצורתו נתונה על ידי העקומות הבאות:

$$\begin{array}{l} \text{א. } C: \vec{r}(t) = 4\cos t\hat{i} + 4\sin t\hat{j} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{ב. } C = C_1 + C_2: \begin{cases} C_1: \vec{r}(t) = t\hat{i} + (t-4)\hat{j} & 0 \leq t \leq 4 \\ C_2: \vec{r}(t) = (4-t)\hat{i} + t\hat{j} & 0 \leq t \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

ציירו את צורת התיל בכל אחד מהסעיפים.

**שאלה 3 (רשות)**

מהו השטח המשתרע ממישור  $z=0$  עד מישור  $z(x, y) = 5 - \frac{5}{4}x$  מעל המעגל  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ?

**שאלה 4**

רשמו 2 פרמטריזציות מתאימות לתיאור קטע הישר  $C$  המחבר בין הנקודה  $(0, 0, 2)$  לנקודה  $(2, 1, 0)$

$$\text{וחשבו את האינטגרל } \int_C (xy + y + z) ds$$

**שאלה 5**

$$C: \vec{r}(t) = t\cos t\hat{i} + t\sin t\hat{j} + t\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 6\pi$$

חשבו את האורך ואת המסה שלו אם צפיפותו ליחידת אורך היא  $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} + 2z)$  שרטטו את צורת התיל (כדאי להעזר בדף הנוסחאות לחישוב האינטגרלים).

## אינטגרל קווי מסוג שני

### שאלה 6

נתון השדה הוקטורי  $F(x, y) = (x + 2y)\hat{i} + (x^2 - 2y)\hat{j}$ . חשבו את העבודה המתבצעת על ידי השדה על ידי העברת חלקיק:

- לאורך קטע ישר מהנקודה  $(0, 2)$  לנקודה  $(3, 5)$ .
- לאורך קטע הפרבולה  $y = x^2 - 2x + 2$  מהנקודה  $(0, 2)$  לנקודה  $(3, 5)$  וחזרה לאורך הישר המחבר את  $(3, 5)$  לנקודה  $(0, 2)$ .

### שאלה 7

נתון השדה הוקטורי  $F(x, y, z) = (x + z)\hat{i} + (xz - y^2)\hat{j} + 3\hat{k}$ . חשבו את העבודה המתבצעת על ידי השדה על ידי העברת חלקיק לאורך קטע ישר מהנקודה  $(-1, 2, 1)$  לנקודה  $(3, 0, 2)$ .

### שאלה 8

- מצאו פונקציה  $h(x) \neq 0$  כך שהשדה הוקטורי  $F(x, y) = h(x)(x \sin y + y \cos y)\hat{i} + h(x)(x \cos y - y \sin y)\hat{j}$  יהיה שדה משמר. האם יש פתרון יחיד לבעיה?
- חשבו את פונקציית הפוטנציאל עבור  $F(x, y)$  שחישבתם בסעיף א'.
- חשבו את העבודה שמתבצעת בהעברת חלקיק מנקודה  $(0, 0)$  לנקודה  $(3, \pi)$ :
  - על ידי חישוב אינטגרל קווי (בחרו מסלול מתאים)
  - על ידי שימוש בפונקציית הפוטנציאל שחישבתם בסעיף ב'.

### שאלה 9

- חשבו את העבודה המתבצעת על ידי השדה הוקטורי
- $$F(x, y, z) = (\cos x + 3y + 2xz)\hat{i} + (3x + e^{\sin y} \cos y + z)\hat{j} + (z \cos z + y + x^2)\hat{k}$$
- לאורך מסלול מעגלי סגור נגד כיוון השעון המתואר על ידי  $y^2 + z^2 = \pi^2 / 4$
  - לאורך החצי העליון של המסלול האליפטי בסעיף א', מהנקודה  $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$  לנקודה  $(0, -\frac{\pi}{2}, 0)$ .
  - לאורך ציר  $y$  - מהנקודה  $(0, -\frac{\pi}{2}, 0)$  לנקודה  $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ .

### שאלה 10

חשבו בעזרת משפט גרין את השטח התחום בין 4 הישרים  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y+2}{2}\}$

### שאלה 11

חשבו שוב את העבודה שהתבקשתם לחשב בשאלה ב' – הפעם בעזרת משפט גרין.

### שאלה 12

חשבו את העבודה המתבצעת על ידי  $\hat{i} + \hat{j}$   $F(x, y) = (2y + 2e^{2x}y^2 - e^y) \hat{i} + (6x + 2e^{2x}y - xe^y) \hat{j}$  לאורך המסלול  $C_1: x^2 + y^2 = 25, y \geq 0$  מהנקודה  $(5, 0)$  לנקודה  $(-5, 0)$ .

### שאלה 13

נתון שדה וקטורי  $F(x, y) = (3y^2x + 2x \sin y + \sin^2 x) \hat{i} + (-3x^2y + x^2 \cos y - \cos^2 y) \hat{j}$  א. חשבו את העבודה הנעשית על ידי השדה לאורך מסלול סגור בכיוון השעון, אשר הינו שפת התחום הנמצא בין הישרים:  $y = -2x + 4, y = -2x + 7, y = x - 2, y = x + 1$  ב. השתמשו במשפט גרין ובסגירה המתאימה כדי לחשב את האינטגרל  $\int F(x, y) \cdot dr$  לאורך הקטע (הפתוח) המוגדר על ידי:  $C: x(t) = t, y(t) = \frac{2}{3}t + 4, -6 \leq t \leq 0$ .

### שאלה 14

Find the work done by the gradient of  $f(x, y) = (xe^y - ye^{2x})^2$  counterclockwise around the closed curve which is defined by  $|x| + |y| = 3$  (square) from  $(3, 0)$  to itself.