שאלה 1

בדקו האם לפונקציות הבאות קיים גבול ב נקי' (0,0)

א. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

ב. $f(x,y)=\dfrac{2x^3-3y}{3x^3+2y}$

ג. $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{y}$

ד. $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{y^2+x^4}$

ה. $f(x,y)=\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}$

** סעיפים ללימוד עצמי : ב, ה

א) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x=0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x=0}}\frac{0-\cancel{y^2}}{0+\cancel{y^2}}=-1$$

$$\neq$$

$$\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ y=0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x=0}}\frac{x^2-0}{x^2+0}=1$$

הגבול לא קיים.

ב) $$\lim_{x,y\to 0,0}\frac{2x^3-3y}{3x^3+2y}$$

הגבול לא קיים

$$\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x=0}}\frac{0-3y}{0+2y}=-\frac{3}{2}\quad\neq\quad;\quad\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ y=0}}\frac{2x^3-0}{3x^3+0}=\frac{2}{3}$$

ג) $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{y}$; $D_f=\{x,y\mid y\neq 0\}\Longrightarrow$ נפרק את התחום ל-2:

$D_{1f}=(x,y)\neq(0,0)$, $D_{2f}=(0,y),\ y\neq 0$

$$D_1:\ \lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x\in D_1}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x\in D_1}}\underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{\text{חסומה}}\cdot\underbrace{x}_{\text{מאפס}}=\boxed{0}$$

$$D_2:\ \lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x\in D_2}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x\in D_2}}\frac{\sin 0\cdot y}{y}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ x\in D_2}}\frac{0}{y}=\boxed{0}$$

כעת, לפי משפט, התקבל גבול אחיד $L=0$ עבור שני תחומים שונים המהווים איחוד של תחום הפונקציה, לכן קיים הגבול והוא $L=0$.

ד

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x,y\to 0,0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

$$\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ y=kx^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ y=kx^2}}\frac{kx^4}{x^4+(kx^2)^2}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ y=kx^2}}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ y=kx^2}}\frac{\cancel{x^4}\cdot k}{\cancel{x^4}(k^2+1)}$$

$$=\lim_{\substack{x,y\to 0,0\\ y=kx^2}}\frac{k}{k^2+1}\Longrightarrow$$

התקבל גבול התלוי ב- k, לכן קיימים גבולות שונים במסלול זה, לפי הערך של k. $\Leftarrow$ מיחידות הגבול, לא קיים גבול

ה

$$f(x,y)=\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x,y\to 0,0}\frac{(x^2+y^2)}{(x+y^2)(x-y^2)}\cdot x$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}^{x=0}\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x,y\to 0,0}\frac{0}{y^4}=0$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}^{y=0}\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x,y\to 0,0}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x,y\to 0,0}x=0$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}^{x=y^{1\frac{1}{3}}}\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x,y\to 0,0}^{x=y^{1\frac{1}{3}}}\frac{y^4+y^{3\frac{1}{3}}}{y^{2\frac{2}{3}}+y^4}=1 \neq$$

לא קיים גבול

שאלה 2

האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$ כרציפות?
אם כן מהו הערך בנקודה זו כך שהפונקציה תהינה רציפה?

א. $f(x,y)=\dfrac{2x+3y}{3x-2y}$

ב. $f(x,y)=xy\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$

ג. $f(x,y)=\dfrac{2x^3}{3x^2+4y^2}$

א

$$f(x,y)=\frac{2x+3y}{3x-2y}$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}\frac{2x+3y}{3x-2y}=$$ לא קיים גבול בנק', לכן קיימת אי-רציפות עיקרית. לא ניתן לתקן.

ב

$$f(x,y)=x\cdot y\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}\underbrace{x\cdot y}_{\text{אפס}}\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\text{חסומה}}=0\ \xrightarrow{\text{נגדיר}}\ f(x,y)=\begin{cases}\dots, & x,y\neq 0,0\\ 0, & x,y=0,0\end{cases}$$

ג

$$f(x,y)=\frac{2x^3}{3x^2+4y^2}$$

$$\lim_{x,y\to 0,0}\frac{2x^3}{3x^2+4y^2}=\lim_{x,y\to 0,0}\overbrace{\frac{2x^2}{3x^2+4y^2}}^{\substack{\text{bounded}\\ 1\geq g\geq 0}}\cdot\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{x}=\boxed{0}$$

$$\xrightarrow{\text{נגדיר}}\ f(x,y)=\begin{cases}\dots, & x,y\neq 0,0\\ 0, & x,y=0,0\end{cases}$$

שאלה 3

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x,y) = xy + 3x^2 - 5y^5$

ב. $f(x,y) = e^{x/y}$

ג. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

ד. $f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

ה. $f(x,y) = e^{arctg\frac{x}{y}}$

א

$$f(x,y) = xy + 3x^2 - 5y^5$$

$$f_x = y - 5y^5$$

$$f_y = x - 25y^4$$

ב

$$f(x,y) = e^{x/y}$$

$$f_x = e^{x/y} \cdot \frac{y}{y^2} = \frac{e^{x/y}}{y}$$

$$f_y = e^{x/y} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-xe^{x/y}}{y^2}$$

ג

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$$

$$f_x = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2y = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

ד

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

$$f_x = \frac{y}{y^2} + \frac{y}{x^2} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \quad ; \quad f_y = -\frac{x}{y^2} - \frac{x}{x^2} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}$$

ה

$$f(x,y) = e^{\arctan(x/y)}$$

$$f_x = e^{\arctan(x/y)} \cdot \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{e^{\arctan(x/y)}}{y\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{e^{\arctan(x/y)}}{y + \frac{x^2}{y}}$$

$$f_y = e^{\arctan(x/y)} \cdot \frac{1}{1+(x/y)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{e^{\arctan(x/y)} \cdot -x}{y^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)} = \frac{-x \cdot e^{\arctan(x/y)}}{y^2+x^2}$$

שאלה 4

א .חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^3+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ב $(0,0)$.

ב.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

האם קיימות הנגזרות החלקיות של הפונקציה ב $(0,0)$?

א

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^3+y^2}, & x,y\neq 0,0\\ 0, & x,y=0,0\end{cases}$$

נגזור לפי הגדרה.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0/x^3-0}{x-0}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{x\to0}\frac{0/y^2-0}{y-0}=0$$

ב

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x,y\neq 0,0\\ 0, & x,y=0,0\end{cases}$$

נגזור לפי הגדרה.

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{|x|}-0}{x-0}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-y^2}{|y|}-0}{y-0}=\begin{matrix}0^+: -1\\ 0^-: 1\end{matrix}$$

שאלה 5

הוכיחו כי הפונקציה $f(x,y)=y^2\sin(x^2-y^2)$ מקיימת את המשוואה: $y^2 f_x + xyf_y = 2xf$.

$$\left.\begin{aligned}
f(x,y) &= y^2\sin(x^2-y^2)\\
f_x &= y^2\cdot 2x\cdot\cos(x^2-y^2) = 2xy^2\cdot\cos(x^2-y^2)\\
f_y &= 2y\sin(x^2-y^2) + y^2\cdot -2y\cdot\cos(x^2-y^2)\\
&= 2y\sin(x^2-y^2) - 2y^3\cdot\cos(x^2-y^2)
\end{aligned}\right\}$$

נציב הכל במשוואה

$$y^2\cdot 2xy^2\cdot\cos(x^2-y^2) + xy\left[2y\sin(x^2-y^2) - 2y^3\cdot\cos(x^2-y^2)\right]$$
$$= 2x\cdot y^2\sin(x^2-y^2)$$

$\Updownarrow$

$$2xy^4\cdot\cos(x^2-y^2) + 2xy^2\sin(x^2-y^2) - 2xy^4\cdot\cos(x^2-y^2) \quad |:y^2$$
$$= 2x\cdot y^2\sin(x^2-y^2)$$

$\Updownarrow$

$$\cancel{2x}y^2\cdot\cos(x^2-y^2) + \cancel{2x}\sin(x^2-y^2) - \cancel{2x}y^2\cdot\cos(x^2-y^2) = \cancel{2x}\cdot\sin(x^2-y^2)$$

$\Updownarrow$

$$\cancel{y^2\cdot\cos(x^2-y^2)} + \sin(x^2-y^2) - \cancel{y^2\cdot\cos(x^2-y^2)} = \sin(x^2-y^2)$$

$\Updownarrow$

$$y\sin(x^2-y^2) = \sin(x^2-y^2)$$ ✓ מתקיים