פתרון מועד Y

שאלה 1: תהא הפונקציה: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n+1)}$.

א. מצאו את תחום ההתכנסות של $f(x)$.

ב. מצאו את תחום ההתכנסות של $\int f(x)dx$.

פתרון:

א. נחשב ר"ה עפ"י נוסחת דלמבר: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n+2)}\Big/\frac{1}{\ln(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}}=1$ (נשים לב כי: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ והגבול נשאר אחד תחת השורש ה-n). אם כן הטור מתכנס בהחלט ב: $(-1,1)$. נבדוק בקצוות: בנקודה $x=1$ הטור מתבדר בהשוואה לטור ההרמוני, ובנקודה $x=-1$ מתקבל טור לייבניץ שמתכנס לכן בסה"כ תחום ההתכנסות הוא: $[-1,1)$.

ב. בתחום ההתכנסות ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר:

$$\int f(x)dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n+1)}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\int x^n\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}.$$

כיוון שאינטגרציה אינה משנה את ר"ה הטור החדש עדיין מתכנס בהחלט ב: $(-1,1)$.

לגבי הקצוות: עפ"י מבחן האינטגרל הטור מתבדר ב $x=1$ ובנקודה $x=-1$ שוב מתקבל טור לייבניץ שמתכנס לכן בסה"כ תחום התכנסות נותר $[-1,1)$.

שאלה 2:

א. חשבו את פולינום טיילור מסדר 2 עבור הפונקציה $f(x,y)=x^y$ סביב הנקודה $(1,1)$.

ב. חשבו בעזרת הפולינום שפיתחתם בסעיף א' את הערך של $1.1^{1.02}$.

פתרון:

א. נוסחת טיילור לפונקציה בשני משתנים היא:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+R_n$$

נחשב את הביטויים הנדרשים:

$$f(x_0,y_0)=1$$

$$\begin{cases}f_x(x,y)=y\cdot x^{y-1}\\ f_y(x,y)=x^y\cdot\ln x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_x(1,1)=1\\ f_y(1,1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f_{xx}(x,y)=y(y-1)x^{y-2}\\ f_{xy}(x,y)=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x\\ f_{yy}(x,y)=x^y\cdot\ln^2 x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_{xx}(1,1)=0\\ f_{xy}(1,1)=1\\ f_{yy}(1,1)=0\end{cases}$$

ונקבל: $f(x,y)=x^y\approx1+(x-1)+\frac{1}{2}\left[2(x-1)(y-1)\right]$.

ב. בנוסחה הנ"ל נציב: $\begin{cases}x=1.1\\ y=1.02\end{cases}\Leftarrow 1.1^{1.02}\approx1+0.1+0.1\cdot0.02=1.102$.

שאלה 3:
מצאו את המרחק המינימלי בין המשטח $x^2+2y^2=z^2+1$ לראשית הצירים.
פתרון:
נק' המינימום של פונקצית ריבוע המרחק מנקודה על המשטח לראשית הצירים: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ היא גם נק' המינימום של המרחק עצמו (ללא הריבוע). נחפש אם כן נק' מינימום של f תחת האילוץ $g(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2-1=0$. זו צריכה להיות נק' קריטית של: $L=f+\lambda g$.

נקבל אם כן : $\begin{cases} f_x+\lambda g_x=0 \\ f_y+\lambda g_y=0 \\ f_z+\lambda g_z=0 \\ g=0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x(1+\lambda)=0 \\ y(1+2\lambda)=0 \\ z(1-\lambda)=0 \\ x^2+y^2-z^2-1=0 \end{cases}$

כיוון שהראשית לא מקיימת את האילוץ נותרו שלושה מצבים:
<u>מצב ראשון</u>: $\lambda=-1 \Leftarrow y=z=0$ נציב באילוץ ונקבל: $(\pm1,0,0)$.

<u>מצב שני</u>: $\lambda=-\frac{1}{2} \Leftarrow x=z=0$ נציב באילוץ ונקבל: $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

<u>מצב שלישי</u>: $\lambda=1 \Leftarrow x=y=0$ אבל אז האילוץ יגרור פסוק שקר: $z^2=-1$.

קל לראות ששתי הנקודות $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ הן הכי קרובות לראשית והמרחק המתקבל בהן הוא: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

שאלה 4:
א. מצאו מישור המשיק למשטח $xyz=1$ המקביל למישור: $x+y+z=1$.
ב. חשבו את הנפח החסום ע"י המשטחים $x^2+y^2\le1$, $z=0$ והמישור שמצאתם בסעיף א'.
ג. כיצד תוכלו להסביר את התוצאה בסעיף ב'?

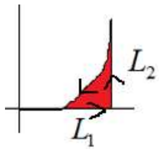
פתרון:
א. נתאר את המשטח ע"י: $F(x,y,z)=xyz-1=0$ ונקבל שהנורמל בכל נקודה הוא: $\nabla F=(yz,xz,xy)$.
זה צריך להיות מקביל לנורמל של המישור $(1,1,1)$, כלומר: $yz=xz=xy \Rightarrow x=y=z$. נבחר למשל את הנקודה $(1,1,1)$ על המשטח ונקבל שהמישור המשיק הוא: $x+y+z=3$.

ב. נתאר את המישור מלמעלה כפונקציה: $z=3-x-y$ ונעבור לקורדינטות פולריות:
$$|V|=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 r(3-r\cos t-r\sin t)dr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}(\cos t+\sin t)\right)dt=3\pi.$$

ג. קיבלנו נפח של הגליל בגובה 3 מעל לעיגול היחידה, וזה לא מפתיע שכן התחום סימטרי סביב הראשית ולכן אפשר לקחת מלמעלה את המישור המקביל למישור xy בגובה שמתקבל בראשית כלומר 3, שכן זהו הממוצע.

שאלה 5: חשבו את האינטגרל $\int_\gamma \left(2xy\cdot e^{x^2}+2\sin^2 x\right)dx+\left(e^{x^2}+e^{\sqrt{y}}\right)dy$ כאשר γ הוא חלק הפרבולה $y=x^2$ מהנקודה $A(0,0)$ לנקודה $B(1,1)$.

פתרון:



<u>דרך אחת</u>: נתייחס לתחום D ששפתו בכיוון החיובי היא: $L_1+L_2-\gamma$ וניעזר במשפט גרין:

$$\oint_{\partial D} F\cdot dr=\int_{L_1} F\cdot dr+\int_{L_2} F\cdot dr-\int_{\gamma} F\cdot dr \underset{Green}{=} \iint_D \left(Q_x-P_y\right)dxdy=0$$

ומכאן ש: $\int_{\gamma} F\cdot dr=\int_{L_1} F\cdot dr+\int_{L_2} F\cdot dr$. נחשב:

$$\int_{L_1} F\cdot dr=\int_0^1\left(2\sin^2 t,*\right)\cdot(1,0)\,dt=\int_0^1(1-\cos 2\alpha)\,dt=1-\frac{\sin(2)}{2}$$

$$\int_{L_2} F\cdot dr=\int_0^1\left(*,e+e^{\sqrt{t}}\right)\cdot(0,1)\,dt=\int_0^1\left(e+e^{\sqrt{t}}\right)dt=e+2e^{\sqrt{t}}\left(\sqrt{t}-1\right)\Big|_0^1=e+2$$

בסה"כ: $3+e-\frac{1}{2}\sin(2)$.

<u>דרך אחרת</u>: כיוון שהרוטור של השדה מתאפס בתחום פשוט קשר זהו שדה משמר וקיימת לו פונקציית פוטנציאל אותה אפשר לחשב בשיטה של מד"ר: $U(x,y)=ye^{x^2}+x-\frac{\sin(2x)}{2}+2e^{\sqrt{y}}\left(\sqrt{y}-1\right)+C$.

מכאן ש: $U(1,1)-U(0,0)=3+e-\frac{1}{2}\sin(2)$.