שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') על ידי אינדוקציה מתמטית הוכיחו כי n^2+2n מתחלק ב – 4 לכל מספר שלם חיובי זוגי n.

ב. (10 נק') תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו: $A\cap\left(B\setminus C\right)=\left(A\cap B\right)\setminus\left(A\cap C\right)$.

פתרון

א. בסיס האינדוקציה: עבור $n=2$ המספר $2^2+2\cdot 2=8$ מתחלק ב – 4.
נניח כי עבור k זוגי חיובי מסוים k^2+2k מתחלק ב – 4 ונוכיח על סמך זה כי עבור המספר הזוגי הבא $(k+2)$ המספר המתאים $(k+2)^2+2(k+2)$ מתחלק ב – 4. ואכן

$$(k+2)^2+2(k+2)=k^2+4k+4+2k+4=(k^2+2k)+4(k+2)$$

המחובר הראשון מתחלק ב – 4 לפי הנחת האינדוקציה והמחובר השני מתחלק ב – 4 כי הוא כפולה של 4. לכן $(k+2)^2+2(k+2)$ מתחלק ב – 4 כסכום המחוברים שמתחלקים ב – 4. זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.
על סמך עקרון האינדוקציה המתמטית מסיקים כי הטענה נכונה לכל מספר שלם חיובי זוגי n.

ב. מתקיים:

$$\left(A\cap B\right)\setminus\left(A\cap C\right)=\left(A\cap B\right)\cap\overline{\left(A\cap C\right)}=\left(A\cap B\right)\cap\left(\bar{A}\cup\bar{C}\right)=$$
$$=\underbrace{\left(A\cap B\cap\bar{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left(A\cap B\cap\bar{C}\right)=A\cap\left(B\cap\bar{C}\right)=A\cap\left(B\setminus C\right)$$

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') אדם נמצא בנקודה 0. בכל דקה הוא מתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה.
(1) מה עוצמת קבוצת הנקודות אליהן יכול האדם להגיע במשך זמן אינסופי?
(2) מהו מספר המסלולים האפשריים בני 50 צעדים?

ב. (10 נק') בתוך ריבוע בעל אורך צלע 1 נמצאות 10 נקודות. הוכיחו כי יש לפחות שתי נקודות, כך שהמרחק ביניהן קטן מ – 0.5.

פתרון

א. (1) האדם יכול להגיע לכל נקודה שמתאימה למספר שלם באופן הבא: מתחיל מ – 0 ועושה צעד אחד ימינה. מגיע ל – 1. עושה 2 צעדים שמאלה ומגיע ל – -1. עושה 3 צעדים ימינה ומגיע ל – 2. עושה 4 צעדים שמאלה ומגיע ל – -2 וכו'. לכן עוצמת קבוצת הנקודות שאליהן האדם יכול להגיע הינה $\left|\mathbb{Z}\right|=\aleph_0$.

(2) כל צעד יכול להיות או שמאלה או ימינה, כלומר לכל צעד יש 2 אפשרויות בחירה. מכיוון שיש 50 צעדים במסלול מקבלים 2^{50} מסלולים שונים.

ב. נחלק את הריבוע ל – 9 ריבועים זהים בעלי אורך צלע $1/3$. לפי עקרון שובך היונים לפחות 2 מ – 10 הנקודות הנתונות נמצאות בתוך אותו ריבוע. המרחק ביניהן לא יעלה על אורך אלכסון הריבוע שהוא $\sqrt{2}/3$, שזה קטן מ – 0.5.

<u>שאלה 3</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') תהינה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו – $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות ותהי $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ ההרכבה שלהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם f חח"ע ו – g לא חח"ע, אז $g\circ f$ לא חח"ע.

ב. (10 נק') מהו מספר הפתרונות השלמים של המשוואה $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6=25$, כאשר u_1,u_2,u_3 מספרים זוגיים לא שליליים ו – u_4,u_5,u_6 מספרים אי זוגיים לא שליליים?

<u>פתרון</u>

א. הטענה אינה נכונה. למשל נבחר $f(x)=e^x$ פונקציה חח"ע (הנגזרת תמיד חיובית, לכן הפונקציה עולה ממש ולכן חח"ע) ונבחר $g(x)=x^2$ פונקציה לא חח"ע. מתקיים $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(e^x)=(e^x)^2=e^{2x}$. הפונקציה שהתקבלה הינה חח"ע כי $(e^{2x})'=2e^{2x}>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן הפונקציה עולה ממש ב – $\mathbb{R}$.

ב. נסמן $u_1=2v_1$,$u_2=2v_2$,$u_3=2v_3$,$u_4=2v_4+1$,$u_5=2v_5+1$,$u_6=2v_6+1$, כאשר $v_k\ge 0$ מספר שלם לכל $k=1,2,...,6$. נציב את הביטויים במשוואה ונקבל:

$$2v_1+2v_2+2v_3+(2v_4+1)+(2v_5+1)+(2v_6+1)=25$$
$$v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+v_6=11$$

הפונקציה היוצרת המתאימה למשוואה הנ"ל הינה

$$f(x)=(1+x+x^2+x^3+...)^6=\frac{1}{(1-x)^6}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+5}{5}x^n$$

מספר הפתרונות של המשוואה הנתונה הוא המקדם של x^{11}, כלומר $\binom{16}{5}$.

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') סטודנטית לרפואה צריכה לעבוד 5 ימים בבית חולים בחודש ינואר. בכמה דרכים ניתן למצוא לה סידור עבודה בתנאי שהיא לא יכולה לעבוד יומיים רצוף? שימו לב: בחודש ינואר יש 31 ימים.

ב. (10 נק') נתון פסוק: $\forall x\in\mathbb{R}.\left(\exists m\in\mathbb{Z}.\left[m\le x<m+1\right]\right)$. קבעו מהו ערך האמת של הפסוק הנתון ורשמו את שלילת הפסוק. התשובה לא יכולה להכיל סימני שלילה "$\sim$" או תחליפים שלו.

<u>פתרון</u>

א. בחודש ינואר הסטודנטית לא עובדת ב – 26 ימים. נתייחס לימים האלה כלמחיצות שמגדירות 27 מקומות שמהם צריך לבחור 5 מקומות לימי עבודה. תשובה : $\binom{27}{5}$.

ב. הפסוק אומר שכל מספר ממשי נמצא בין זוג מספרים שלמים עוקבים (כולל הקטן מהם). זה פסוק אמת. שלילת הפסוק :

$$\sim\left[\forall x\in\mathbb{R}.\left(\exists m\in\mathbb{Z}.[m\le x<m+1)\right]\right)\right]\equiv\exists x\in\mathbb{R}.\sim\left(\exists m\in\mathbb{Z}.[m\le x<m+1)\right]\right)\equiv$$
$$\equiv\exists x\in\mathbb{R}.\left(\forall m\in\mathbb{Z}.\sim[m\le x<m+1)\right]\right)\equiv$$
$$\equiv\exists x\in\mathbb{R}.\left(\forall m\in\mathbb{Z}.[x<m\quad\vee\quad x\ge m+1)\right]\right)$$

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') הוכיחו **בדרך השלילה** כי בהנתן n מספרים $a_1,a_2,...,a_n$ לפחות אחד מהם גדול או שווה לממוצע שלהם.

ב. (10 נק') מהי הכמות של כל המספרים הטבעיים (לא כולל 0) הקטנים או שווים ל – 90 וזרים לו? (שני מספרים טבעיים נקראים זרים, אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הינו 1).

<u>פתרון</u>

א. נניח בשלילה כי כל המספרים $a_1,a_2,...,a_n$ קטנים מהממוצע שלהם $m=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$. מכאן מקבלים :

$$a_1+a_2+...+a_n<\underbrace{m+m+...+m}_{n}=m\cdot n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\cdot n=a_1+a_2+...+a_n$$

קיבלנו שסכום המספרים קטן מעצמו שזה, כמובן, סתירה. לכן ההנחה כי כל המספרים קטנים מהממוצע שלהם לא נכונה, משמע לפחות אחד מהמספרים האלה גדול או שווה לממוצע שלהם.

ב. נסמן ב – U את קבוצת כל המספרים הטבעיים מ – 1 עד 90 כולל. מכיוון ש – $90=2\cdot3^2\cdot5$ מספר טבעי n זר ל – 90, אם ורק אם n לא מתחלק ב – 2, 3 ו – 5. נסמן ב – A את קבוצת כל המספרים מ – U שמתחלקים ב – 2. נסמן ב – B את קבוצת כל המספרים מ – U שמתחלקים ב – 3. נסמן ב – C את קבוצת כל המספרים מ – U שמתחלקים ב – 5. בסימוני האלה צריכים לחשב את $\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right|$. מתקיים :

$$|U|=90$$
$$|A|=\frac{90}{2}=45\qquad|B|=\frac{90}{3}=30\qquad|C|=\frac{90}{5}=18$$
$$|A\cap B|=\frac{90}{6}=15\qquad|A\cap C|=\frac{90}{10}=9\qquad|B\cap C|=\frac{90}{15}=6$$
$$|A\cap B\cap C|=\frac{90}{30}=3$$

לפי עקרון הכלה והדחה מקבלים : $\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right|=90-(45+30+18)+(15+9+6)-3=24$.

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות)   אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. תהי $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. נגדיר מעל A יחס R באופן הבא: $(m_1,m_2)R(n_1,n_2)$ אם ורק אם $(m_1\le n_1)\wedge(m_1+m_2=n_1+n_2)$.

(1) (10 נק') הוכיחו כי R יחס סדר מעל A.

(2) (2 נק') קבעו (עם הסבר) האם R יחס סדר מלא.

ב. (8 נק') יהי G גרף פשוט בעל 7 קודקודים, כך שבין כל זוג קודקודים שונים קיימת קשת יחידה. האם G גרף אוילר? הסבירו את התשובה.

<u>פתרון</u>

א. (1) רפלקסיביות: לכל $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ מתקיים $(m_1\le m_1)\wedge(m_1+m_2=m_1+m_2)$ לכן $(m_1,m_2)R(m_1,m_2)$, כלומר היחס רפלקסיבי.

אנטיסימטריות: נניח כי $(m_1,m_2)R(n_1,n_2)$ וגם $(n_1,n_2)R(m_1,m_2)$ כלומר $(m_1\le n_1)\wedge(m_1+m_2=n_1+n_2)$ וגם $(n_1\le m_1)\wedge(n_1+n_2=m_1+m_2)$. מאי השוויונים $m_1\le n_1$ ו – $n_1\le m_1$ מסיקים כי $m_1=n_1$ ולכן מהשוויון $m_1+m_2=n_1+n_2$ נובע שגם $m_2=n_2$, כלומר מתקיים $(m_1,m_2)=(n_1,n_2)$. היחס אנטיסימטרי.

טרנזיטיביות: נניח כי $(m_1,m_2)R(n_1,n_2)$ וגם $(n_1,n_2)R(k_1,k_2)$ כלומר $(m_1\le n_1)\wedge(m_1+m_2=n_1+n_2)$ וגם $(n_1\le k_1)\wedge(n_1+n_2=k_1+k_2)$. מאי השוויונים $m_1\le n_1$ ו – $n_1\le k_1$ מסיקים כי $m_1=k_1$. מהשוויונים $m_1+m_2=n_1+n_2$ ו – $n_1+n_2=k_1+k_2$ מסיקים כי $m_1+m_2=k_1+k_2$. קיבלנו כי $(m_1\le k_1)\wedge(m_1+m_2=k_1+k_2)$, כלומר $(m_1,m_2)R(k_1,k_2)$ ולכן היחס טרנזיטיבי.

יחס R רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי, לכן R הוא יחס סדר.

(2) היחס לא מלא כי לדוגמא $(1,2)\ne(2,3)$, $\big((1,2),(2,3)\big)\notin R$ וגם $\big((2,3),(1,2)\big)\notin R$.

ב. בגרף הנתון כל קודקוד מחובר על ידי קשת אחת לכל אחד מ – 6 הקודקודים האחרים. זה אומר שדרגת כל קודקוד הינה 6 – מספר זוגי. קיבלנו גרף קשיר בעל קודקודים מדרגה זוגית בלבד. זה מבטיח כי הגרף הנתון הינו גרף אוילר.

שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') על ידי אינדוקציה מתמטית הוכיחו כי n^2+2n מתחלק ב – 4 לכל מספר שלם חיובי זוגי n.

ב. (10 נק') תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו: $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') אדם נמצא בנקודה 0. בכל דקה הוא מתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד שמאלה.
(1) מה עוצמת קבוצת הנקודות אליהן יכול האדם להגיע במשך זמן אינסופי?
(2) מהו מספר המסלולים האפשריים בני 50 צעדים?

ב. (10 נק') בתוך ריבוע בעל אורך צלע 1 נמצאות 10 נקודות. הוכיחו כי יש לפחות שתי נקודות, כך שהמרחק ביניהן קטן מ – 0.5.

שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') תהינה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו – $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות ותהי $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ ההרכבה שלהן.
הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם f חח"ע ו – g לא חח"ע, אז $g\circ f$ לא חח"ע.

ב. (10 נק') מהו מספר הפתרונות השלמים של המשוואה $u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6=25$, כאשר u_1,u_2,u_3 מספרים זוגיים לא שליליים ו – u_4,u_5,u_6 מספרים אי זוגיים לא שליליים?

שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') סטודנטית לרפואה צריכה לעבוד 5 ימים בבית חולים בחודש ינואר. בכמה דרכים ניתן למצוא לה סידור עבודה בתנאי שהיא לא יכולה לעבוד יומיים רצוף? שימו לב: בחודש ינואר יש 31 ימים.

ב. (10 נק') נתון פסוק: $\forall x\in\mathbb{R}.(\exists m\in\mathbb{Z}.[m\le x<m+1])$. קבעו מהו ערך האמת של הפסוק הנתון ורשמו את שלילת הפסוק. התשובה לא יכולה להכיל סימני שלילה "$\sim$" או תחליפים שלו.

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') הוכיחו **בדרך השלילה** כי בהנתן n מספרים $a_1, a_2, ..., a_n$ לפחות אחד מהם גדול או שווה לממוצע שלהם.

ב. (10 נק') מהי הכמות של כל המספרים הטבעיים (לא כולל 0) הקטנים או שווים ל – 90 וזרים לו? (שני מספרים טבעיים נקראים זרים, אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הינו 1).

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. תהי $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. נגדיר מעל A יחס R באופן הבא: $(m_1, m_2)R(n_1, n_2)$ אם ורק אם $(m_1 \le n_1) \wedge (m_1 + m_2 = n_1 + n_2)$.

(1) (10 נק') הוכיחו כי R יחס סדר מעל A.

(2) (2 נק') קבעו (עם הסבר) האם R יחס סדר מלא.

ב. (8 נק') יהי G גרף פשוט בעל 7 קודקודים, כך שבין כל זוג קודקודים שונים קיימת קשת יחידה. האם G גרף אוילר? הסבירו את התשובה.