מבחן סוף סמסטר בקורס ״אלגברה לינארית ״

מועד X

בהצלחה !

שאלה 1

(20 נק.) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x + 2ay = 1 \\ 2x + y + (5a-1)z = 3 \\ 2x + y + (a+3)z = 5 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר.

מצא עבור אילו ערכי a יש למערכת

א) פתרון יחיד

ב) אינסוף פתרונות

ג) אין פתרון.

ד) מצא את הפתרונות של המערכת עבור $a = 0$.

שאלה 2

יהי $V = P_3(x)$ (מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה מ- 3).

יהי W תת מרחב של V המוגדר כך: $W = Sp\{1+x, x-2x^2+x^3\}$

תהי U תת קבוצה של V מוגדרת כך : $U = \{p(x) \in V] \,|p(1) = p(0) = 0\}$

א. (6 נק.) מצא בסיס ומימד של U .

ב. (14 נק.) מצא בסיס ומימד של תתי המרחבים $U \cap W$ ו- $U+W$ של V

שאלה 3

יהי $V = P_3(x)$ (מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 3) ויהי $W = M_2(R)$ (מרחב המטריצות הריבועיות מסדר 2). תהי $T: V \to W$ העתקה המוגדרת ע"י

$$T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) = \begin{pmatrix} a-b & 2d-c \\ 0 & c-2d \end{pmatrix}$$

א. (8 נק.) מצא בסיס ומימד לגרעין של T

ב. (10 נק.) מצא בסיס ומימד לתמונה של T ואמת את משפט המימדים

ג. (2 נק.) האם העתקה T הפיכה?

שאלה 4

תהי $T: R^3 \to R^3$ העתקה ליניארית המקיימת:
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

א. (8 נק.) מצא $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ לכל $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3$

ב. (8 נק.) מצא בסיס ומימד ל- $\mathrm{Im}(T)$.

ג. (4 נק.) האם T חד-חד-ערכית?

<u>שאלה 5</u>

א) יהיו V, W מרחבים וקטוריים. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית

א1) (8 נק.) הוכח כי גרעין $Ker(T)$ של העתקה לינארית הוא תת-מרחב וקטורי של V.

א2) (8 נק.) הוכח כי תמונה $Im(T)$ של העתקה לינארית T היא תת-מרחב וקטורי של W.

ב) (4 נק.) חשב את הדטרמיננטה הבאה:
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & a & a \\ 1+b & 2 & b & a \\ 1+c & 3 & c & a \\ 1+d & 4 & d & a \end{vmatrix}$$

<u>שאלה 6</u>

א) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

א1) (6 נק.)חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .

א2) (6 נק.) מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A .

א3) (4 נק.) מצא את המטריצה המלכסנת P של A .

ב) (4 נק.) הוכח לפי ההגדרה של ערך עצמי שאם A מטריצה הפיכה ו-λ הוא ע"ע של A, אזי $1/\lambda$ הוא ע"ע של A^{-1} עם אותו וקטור עצמי.

מבחן סוף סמסטר בקורס "אלגברה לינארית"

מועד X

בהצלחה !

שאלה 1

(20 נק.) נתונה המערכת:
$$\begin{cases} x+2ay=1 \\ 2x+y+(5a-1)z=3 \\ 2x+y+(a+3)z=5 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר.

מצא האם קיים ערך של פרמטר a שעבורו יש למערכת

א1) פתרון יחיד

א2) אינסוף פתרונות

א3) אין פתרון.

א4) מצא את הפתרונות של המערכת עבור $a=0$.

פתרון:

א. נעביר למטריצה ונדרג:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5a-1 & 3 \\ 2 & 1 & 4a+3 & 5 \end{pmatrix} \overrightarrow{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5a-1 & 3 \\ 0 & 0 & 4a-4 & -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 & 1 \\ 0 & 1-4a & 5a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 4a-4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

לכן (על פי השורות 2,3):

עבור $a=\frac{1}{4},1$ למערכת אין פתרון .

לא קיים ערך של a עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות.

עבור $a\neq\frac{1}{4},1$ למערכת פתרון יחיד

ב. נציב $a=0$ במטריצה שקבלנו לאחר הדירוג:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

מכאן
$$\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{4} \\ z=1/2 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

שאלה 2

יהי $V = P_3(x)$ (מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה מ- 3).
יהי W תת מרחב של V המוגדר כך: $W = Sp\{1+x, x-2x^2+x^3\}$
תהי U תת קבוצה של V מוגדרת כך : $U = \{p(x) \in V] \,|p(1) = p(0) = 0\}$
א. (6 נק.) מצא בסיס ומימד של U .
ב. (14 נק.) מצא בסיס ומימד של תתי המרחבים $U \cap W$ ו- $U+W$ של V
א.

$$U = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : a + b + c + d = 0, d = 0\}$$
$$= \{ax^3 + bx^2 + (-a-b)x, \qquad a, b \in R\} = Sp\{x^3 - x, x^2 - x\}$$

כיון שהפולינומים בלתי-תלויים, זהו בסיס ל-U, ולכן מימד U הוא 2.

ב. כדי למצוא בסיס לחיתוך, נשווה בין איברים כלליים ב- U וב- W:

$$a(1+x) + b(x - 2x^2 + x^3) = c(x^3 - x) + d(x^2 - x)$$

על מנת שאיבר יהיה בחיתוך דרוש $a = 0, c = b, d = -2b$:

$$U \cap W = \{b(x - 2x^2 + x^3) | b \in \mathrm{R}\} =$$
$$= Sp\{x - 2x^2 + x^3\}$$

$$\dim(U \cap W) = 1$$
$$U + W = Sp\{1 + x, x - 2x^2 + x^3 \,, x^3 - x, x^2 - x\} = SpSp\{1 + x, x - 2x^2 + x^3 \,, x^3 - x\}$$
$$\dim(U + W) = 3$$

<u>שאלה 3</u>

יהי $V = P_3(x)$ (מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 3)ויהי $W = M_2(R)$ (מרחב המטריצות הריבועיות מסדר 2). תהי $T : V \to W$ העתקה המוגדרת ע"י

$$T\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \begin{pmatrix} a-b & 2d-c \\ 0 & c-2d \end{pmatrix}$$

א. (8 נק.) מצא בסיס ומימד לגרעין של T
ב. (10 נק.) מצא בסיס ומימד לתמונה של T ואמת את משפט המימדים
ג. (2 נק.) האם העתקה T הפיכה?

. נחשב את הגרעין:

$$\ker(T) = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \vec{0}\} =$$
$$= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \mid \begin{pmatrix} a-b & 2d-c \\ 0 & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a - b = c - 2d = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ a + ax + 2dx^2 + dx^3 \mid a, d \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ a(1+x) + d(2x^2 + x^3) \mid a, d \in \mathbb{R} \right\} = Sp\{1 + x, 2x^2 + x^3\}$$

כיון שהקבוצה $\{1 + x, 2x^2 + x^3\}$ אינה תלויה לינארית (כי וקטור אחד אינו כפולה של הוקטור השני), קבוצה זו מהווה בסיס לגרעין, ולכן $\dim(\ker(T)) = 2$

נחשב את התמונה:
התמונה נפרשת על ידי תמונות של איברי בסיס, ולכן:

$$\operatorname{Im}(T) = Sp\{T(1),T(x),T(x^2),T(x^3)\} =$$
$$= Sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&-2\end{pmatrix}\right\}$$

קל לראות שהמטריצות השניה והרביעית הן כפולה בסקלר של הראשונה והשלישית בהתאמה, ולכן הן תלויות לינארית וניתן לזרוק אותן. ולכן:

$$\operatorname{Im}(T) = Sp\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

כיון ששתי המטריצות הנותרות הן בלתי-תלויות (אחת אינה כפולה בסקלר של השניה), קבלנו בסיס לתמונה, ומכאן ש- $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$.

$$dim(\,ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = 2 \; + 2 = 4 = \dim V$$

ההעתקה אינה הפיכה, כי הגרעין לא טריויאלי ולכן ההעתקה אינה חד-חד-ערכית.

<u>שאלה 4</u>

תהי $T\colon \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ העתקה ליניארית המקיימת: $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

א. (8 נק.) מצא $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)$ לכל $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in R^3$

ב. (8 נק.) מצא בסיס ומימד ל- $\operatorname{Im}(T)$.

ג. (4 נק.) האם T חד-חד-ערכית?

א)

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

נפתור את המערכת ונקבל:

$$\alpha = \frac{x-y+z}{2}$$
$$\beta = \frac{-x+y+z}{2}$$
$$\gamma = \frac{x+y-z}{2}$$

מכאן:

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+2y\\ \dfrac{-x+y+z}{2}\\ \dfrac{3x-y+z}{2}\end{bmatrix}$$

ב) $$Im(T) = Sp\left(\left\{T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right\}\right) = Sp\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

כיון שקבלנו דירוג מלא, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$. על כך העתקה היא על. יתרה מי זה, לפי משפט המימדים

$$3 = \dim(R^3) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\ker(T)) + 3 \quad \Rightarrow \quad \dim(\ker(T)) = 0$$

ולכן $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. לכן העתקה היא חח"ע

שאלה 5

א) יהיו V, W מרחבים וקטוריים. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית

א1) (8 נק.) הוכח כי גרעין $Ker(T)$ של העתקה לינארית הוא תת-מרחב וקטורי של V.

א2) (8 נק.) הוכח כי תמונה $Im(T)$ של העתקה לינארית T היא תת-מרחב וקטורי של W.

א1) בשני המקרים נראה סגירות לחיבור ולכפל בסקלר

1. יהיו $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in Ker(T) \subseteq V \to T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}, T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \to T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(u) + T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \to \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in Ker(T)$

2. יהיו $\boldsymbol{v} \in Ker(T) \to T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \to T(\alpha\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \to \alpha\boldsymbol{u} \in Ker(T)$

א2)

1.

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in Im(T) \subseteq W \to \exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V |\ T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}, T(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V | T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in Im(T)$$

2.

$$\boldsymbol{v} \in Im(T) \to \exists \boldsymbol{x} \in V |\ T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v} \to \alpha\boldsymbol{x} \in V | T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{v} \to \alpha\boldsymbol{v} \in Im(T)$$

ב) (4 נק.) חשב את הדטרמיננטה הבאה: $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & a & a \\ 1+b & 2 & b & a \\ 1+c & 3 & c & a \\ 1+d & 4 & d & a \end{vmatrix}$

ג) לפי הגדרה תכונות של דטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & a & a \\ 1+b & 2 & b & a \\ 1+c & 3 & c & a \\ 1+d & 4 & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & 2 & b & a \\ 1 & 3 & c & a \\ 1 & 4 & d & a \end{vmatrix} = 0$$

שאלה 6

א) נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

א1) (6 נק.)חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .

א2) (6 נק.) מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A .

א3) (4 נק.) מצא את המטריצה המלכסנת P של A .

ב) (4 נק.) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: למטריצה A יש ערך עצמי $\lambda = 0$, אם ורק אם A לא הפיכה.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$|A - 3I| = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{\lambda=3} = \left\{\begin{bmatrix} t \\ t \\ 3t \end{bmatrix}, t \in \mathrm{R}\right\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\},$$

$$|A - I| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{\lambda=1} = \left\{\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathrm{R}\right\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$|A - 2I| = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{\lambda=2} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathrm{R}\right\} = Sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & `1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ד)

יהיה λ ע"ע של המטריצה. אז: קיים וקטור $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v}$: $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. כמו כן, נתון כי A הפיכה. לכן:

$$A^{-1}A\boldsymbol{v} = A^{-1}\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \neq 0, \rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{v}\,, \qquad \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$$

- $A^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$