פתרון

X

שאלה 3		שאלה 2		שאלה 1		
ג	ד	ד	ה	ד	ה	
						1
						2
						3
						4

שאלה 1 (35 נקודות)

בכיתה 8 בנות ו-10 בנים. כדי לחגוג את סיום שנת הלימודים, נסעו 18 הילדים, ביחד עם 3 מורות, לפארק שעשועים.

א. (9 נקודות) דן ורועי החליטו ללכת למכוניות המתנגשות. בפארק יש 10 מכוניות בצבעים שונים, שהילדים יבחרו באקראי: 2 אדומות, 3 סגולות ו-5 ירוקות.

ידוע שדן ורועי בחרו מכונית באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם בחרו במכונית בצבע אדום?

ב. (8 נקודות) המורות רצו להפתיע את הילדים עם מתנה מתוקה. הן קנו סוכריות בשני טעמים שונים, והכינו שקיות עם 7 סוכריות בכל שקית. כל מורה הכינה 6 שקיות זהות, לפי הטבלה הבאה:

	דפנה	ליה	נטע
לימון	3	2	5
ענבים	4	5	2

המורות מחלקות את השקיות באקראי, אחת לכל ילד .נטלי מוציאה סוכרייה באקראי מהשקית שלה, והיא סוכריה בטעם לימון. מה ההסתברות שהיא קיבלה שקית שהכינה המורה נטע?

ג. (8 נקודות) ידוע כי נטלי אכן קיבלה שקית שהכינה המורה נטע, וכי חברתה דריה קיבלה שקית שהכינה המורה דפנה. דריה מוציאה באקראי 2 סוכריות מהשקית שלה, ומכניסה אותן לשקית של נטלי. לאחר מכן נטלי מוציאה סוכריה אחת באקראי מהשקית שלה, מה ההסתברות שהסוכריה היא בטעם לימון?

ד. (5 נקודות) במשך היום דן ורועי חזרו 4 פעמים למכוניות המתנגשות, ובכל פעם הילדים בחרו באקראי את המכונית שלהם, ובאופן בלתי תלוי מהבחירות קודמות. נגדיר משתנה מקרי:

X - מספר הפעמים שדן בחר במכונית ירוקה. מהי התוחלת המשתנה X?

1. 6
2. 0.8
3. 2
4. 1

ה. (5 נקודות) ברכבת הרים יש מקום ל-8 ילדים בכל סיבוב. המורות בוחרות באקראי 8 ילדים מתוך 18 ילדי הכיתה, שיעלו לרכבת בתור הבא. מה ההסתברות שבדיוק 3 בנות יעלו על רכבת ההרים בתור הבא?

1. 0.4225
2. 0.2335
3. 0.1535
4. 0.3225

פתרון:

א. נגדיר מאורעות:

A – דן ורועי בחרו מכוניות באותו צבע,

B – דן ורועי בחרו מכוניות אדומות.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}}}{\frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}}=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{5}{2}}=\frac{1}{14}$$

ב. נגדיר מאורעות:

A_1 - נטלי קיבלה שקית שהכינה המורה נטע,

A_2 - נטלי קיבלה שקית שהכינה המורה ליה,

A_3 - נטלי קיבלה שקית שהכינה המורה דפנה,

B - נטלי מוציאה סוכריה בטעם לימון.

מתקיים:

$$P(A_i)=\frac{1}{3}, i=1,2,3$$

$$P(B|A_1)=\frac{5}{7}, P(B|A_2)=\frac{2}{7}, P(B|A_3)=\frac{3}{7}$$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1\cap B)}{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}}=0.5$$

ג. נגדיר מאורעות:

A_1 - דריה נתנה לנטלי שתי סוכריות בטעם לימון,

A_2 - דריה נתנה לנטלי שתי סוכריות בטעם ענבים,

A_3 - דריה נתנה לנטלי סוכריה בטעם לימון וסוכריה בטעם ענבים,

B - נטלי הוציאה סוכריה בטעם לימון מהשקית שלה.

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{7}{9}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{9}=\frac{41}{63}$$

ד. $X \sim Bin(4,0.5)$ כאשר ההסתברות לבחור מכונית ירוקה היא 0.5. לפי נוסחת התוחלת של משתנה מקרי בינומי $E(X) = 4 \cdot 0.5 = 2$.

ה. מספר בנות שיעלו על רכבת מתפלג לפי התפלגות היפרגאומטרית ולכן נקבל:

$$\frac{\binom{8}{3}\binom{10}{5}}{\binom{18}{8}} = 0.3225$$

שאלה 2 (35 נקודות)

בתחרות ריצת מרתון ישנם 3 מועמדים לזכייה.

להלן נכנה אותם: משתתף מספר 1, משתתף מספר 2, ומשתתף מספר 3.

נסמן X_i – זמן הריצה של משתתף מספר i. $i = 1,2,3$.

זמן הריצה של משתתף מספר 1 מתפלג נורמלית עם תוחלת 3.5 שעות וסטיית תקן של 10 דקות.

זמן הריצה של משתתף מספר 2 (בשעות) מתפלג אחיד בין a ל-b (פרמטרים שאינם נתונים), ידוע שהחציון שווה ל-3.5 והשונות שווה ל-$\frac{1}{12}$.

פונקציית הצפיפות של זמן הריצה של משתתף מספר 3 (בשעות) היא:

$$f_{X_3}(x) = \begin{cases} 4x - 12 & 3 \le x < 3.5 \\ -4x + 16 & 3.5 \le x < 4 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אין תלות בין זמני ריצה של משתתפים שונים.

א. (8 נקודות) מצא את פונקציית צפיפות של משתתף מספר 2.

ב. (9 נקודות) אם ידוע ששלושתם הגיעו תוך פחות משלוש וחצי שעות, מה ההסתברות ששלושתם הגיעו תוך פחות משלוש ורבע שעות?

ג. (8 נקודות) באופן כללי (עבור כל משתתף שאינו אחד משלושת המועמדים לעיל), לזמן הסיום, בדקות, של ריצת מרתון יש התפלגות לא ידועה עם תוחלת 224 וסטיית תקן 34 דקות. אם בתחרות ריצת מרתון יש 40 משתתפים, מה ההסתברות שסכום זמני הריצה שלהם הוא בין 9072 ל-9126 דקות?

ד. (5 נקודות) משתתף מספר 1 מתאמן למרתון במשך חצי שנה, בכל חודש אימון אחד של ריצת מרתון מלאה. נניח שאין תלות בין זמני ריצה באימונים שונים. מה ההסתברות שבמהלך ששה אימונים הוא יצליח בדיוק פעמיים לרוץ בזמן שנמוך משלוש שעות ועשרים דקות?

1. 0.0004
2. 0.1893
3. 0.0252
4. 0.0067

ה. (5 נקודות) קבעו מהי הטענה הנכונה:

1. $E(X_3) < Mode(X_3)$
2. $COV(X_1, X_2) > 0$
3. $E(X_3 \cdot X_2) \neq E(X_3) \cdot E(X_2)$
4. $P(X_1 > 3.6) + (X_1 > 3.4) = 1$

פתרון:

א. התפלגות אחידה היא בעלת פונקציית צפיפות סימטרית, ולכן התוחלת שווה לחציון ושווה ל-3.5.

נפתור את המערכת הבאה כדי למצוא את הפרמטרים הלא ידועים:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 3.5 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

נקבל $a = 3, b = 4$. לכן פונקציית הצפיפות:

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-3} = 1 & a < x < b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב. נסמן מאורעות:

A - שלושתם הגיעו תוך פחות משלוש ורבע שעות,

B - שלושתם הגיעו תוך פחות משלוש וחצי שעות.

יש לחשב את ההסתברות: $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

המעבר האחרון נובע מהגדרת המאורעות A, B.

$$P(B) = P(X_1 < 3.5, X_2 < 3.5, X_3 < 3.5) = P(X_1 < 3.5)P(X_2 < 3.5)P(X_3 < 3.5) = 0.5^3 = 0.125$$

המעבר הראשון נובע מאי תלות של המשתנים המקריים.

המעבר השני: לכל אחד מהמשתנים המקריים יש פונקציית צפיפות סימטרית סביב 3.5 , לכן החציון שווה 3.5 ולכן ההסתברות לקבל ערך קטן מ-3.5 שווה 0.5.

$$P(A) = P(X_1 < 3.25, X_2 < 3.25, X_3 < 3.25) = P(X_1 < 3.25)P(X_2 < 3.25)P(X_3 < 3.25) =$$
$$= 0.0668 \cdot 0.25 \cdot 0.125 = 0.0021$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = 0.0167$$

חישובי עזר:

$$P(X_1 < 3.25) = \Phi\left(\frac{3.25 - 3.5}{\frac{10}{60}}\right) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

$X_2 \sim U(3,4) \Longrightarrow P(\,X_2 < 3.25) = F_{X_2}(3.25) = \frac{3.25-3}{4-3} = 0.25$

$P(X_3 < 3.25) = \int_3^{3.25} (4x-12)dx = (2x^2-12x)|_3^{3.25} = 0.125$

ג. נסמן Y_i – זמן הריצה של משתתף i. $i = 1, \dots, 40$

נתון: $E(Y_i) = 224, \sigma(Y_i) = 34$.

$$E\left(\sum_{i=1}^{40} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{40} E(Y_i) = 40 \cdot 224 = 8{,}960$$

Y_i משתנים מקריים בלתי תלויים, לכן:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{40} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{40} Var(Y_i) = 40 \cdot 34^2 = 46{,}240$$

לפי משפט הגבול המרכזי : $\sum_{i=1}^{40} Y_i$ מתפלג בקירוב נורמלית עם תוחלת 8,960 ושונות 46,240

$$P\left(9072 \le \sum_{i=1}^{40} Y_i \le 9126\right) = \Phi\left(\frac{9126-8960}{\sqrt{46240}}\right) - \Phi\left(\frac{9072-8960}{\sqrt{46240}}\right) = \Phi(0.77) - \Phi(0.52) =$$

$$= 0.7794 - 0.6985 = 0.0809$$

ד. תשובה מספר 2 נכונה: ההסתברות שווה 0.1893

הסבר: $X_1 \sim N\left(3.5, \left(\frac{10}{60}\right)^2\right)$

ההסתברות שיצליח לרוץ בזמן שקטן משלוש שעות ועשרים דקות:

$$P(X_1 < 3.3334) = \Phi\left(\frac{3.3334-3.5}{\frac{10}{60}}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

ההסתברות שבמהלך ששה אימונים הוא יצליח בדיוק פעמיים לרוץ בזמן שנמוך שלוש שעות ועשרים דקות:

$$\binom{6}{2} 0.1587^2 0.8413^4 = 0.1893$$

ה. תשובה מספר 4 נכונה. נובע מסימטריות של ההתפלגות סביב 3.5. כלומר מתקיים:

$$P(X_1 > 3.6) = (X_1 < 3.4)$$

שאלה 3 (30 נקודות)

לפנינו שתי קופסאות: קופסה א' וקופסה ב'.

בקופסה א' יש עשרה כדורים: חמישה כדורים מסומנים במספר 1, שני כדורים מסומנים במספר 2, שלושה כדורים מסומנים במספר 3.

בקופסה ב': יש ארבעה כדורים: שני כדורים מסומנים במספר 1, שני כדורים מסומנים במספר 2.

מכל קופסה מוציאים כדור אחד באקראי.

נגדיר משתנים מקריים:

X – המספר המקסימלי מבין שני המספרים (אם שני המספרים זהים, המקסימום הוא המספר שהתקבל).

Y – סכום שני המספרים.

א. (12 נקודות) רשמו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X , Y.

ב. (8 נקודות) חשבו את התוחלת המותנית של Y בהינתן $X = 2$.

ג. (5 נקודות) ההסתברות $P(5X = 3Y)$ שווה ל:

1. 0.6
2. 0.15
3. 0.25
4. 0.9

ד. (5 נקודות) הסעיף לא קשור עם סעיפים הקודמים. יהיו X_1, X_2 שני מ"מ ביית. קבעו מהי הטענה הנכונה:

1. $E(2X_1^2 + X_2 - 1) = 2V(X_1) + E(X_2) + 2E(X_1)^2 - 1$
2. $V(X_1 - X_2) = V(X_1) - V(X_2)$
3. $\rho(X_1, X_2) = 1$
4. $E(X_1 X_2) > E(X_1)E(X_2)$

פתרון:

א.

$X \setminus Y$	2	3	4	5
1	$0.5^2 = 0.25$	0	0	0
2	0	$0.2 \cdot 0.5 + 0.5^2 = 0.35$	$0.2 \cdot 0.5 = 0.1$	0
3	0	0	$0.3 \cdot 0.5 = 0.15$	$0.3 \cdot 0.5 = 0.15$

ב. פונקציית ההסתברות המותנית של Y בהינתן $X = 2$:

$$P(Y = 3|X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 3)}{P(X = 2)} = \frac{0.35}{0.45} = \frac{7}{9}$$

$$P(Y=4|X=2)=\frac{P(X=2,Y=4)}{P(X=2)}=\frac{0.1}{0.45}=\frac{2}{9}$$

$$E(Y|X=2)=3\cdot\frac{7}{9}+4\cdot\frac{2}{9}=\frac{29}{9}$$

ג. תשובה מספר 2 נכונה.

הסבר:

$$P(5X=3Y)=P(X=3,Y=5)=0.3\cdot 0.5=0.15$$

ד. תשובה מספר 1 נכונה.

הסבר: השתמשו בנוסחה לחישוב שונות.