# מתמטיקה בדידה

## ספר הקורס

YegerMaster
קורסי אונליין ברמה אחרת

נכתב ונערך על ידי ירון יגר
כל הזכויות שמורות ©

ברוכים הבאים לספר הקורס האלקטרוני האינטרקטיבי של YegerMaster.

לספר הקורס האלקטרוני שתי מטרות עיקריות:

1. תצוגה נוחה ואינפורמטיבית של חומר הקורס, המאפשר התמקדות טובה יותר בחומר. למידה ממוקדת יותר במהלך הסמסטר וחזרה איכותית יותר בלמידה לקראת המבחן.
2. שילוב של סרטוני הקורס באתר עם ספר ייעודי מאפשר לגשת לכל תרגיל בלחיצת כפתור פשוטה. לחיצה על האייקון שמופיע בתחילת כל תרגיל/הגדרה מובילה לסרטון של אותו נושא.

בנוסף, הספר מאפשר לתלמידים הרוצים בכך את ההזדמנות להתמודד עם התרגילים לבד לפני הצפייה בסרטון. חלק מהתרגילים בספר מכילים את התשובות הסופיות בסמוך לשאלה. התרגילים שתשובותיהם מוצגות נבחרו בקפידה. לעיתים תשובה סופית מרמזת על דרך הפתרון ולכן תרגילים רבים מופיעים ללא תשובה סופית, אך הפתרון המלא, נמצא כמובן במרחק לחיצת כפתור 😊.

שילוב הספר האלקטרוני בתהליך הלמידה משפר את קצב הלמידה, חוסך בזבוז זמן במעבר בין סרטונים בחיפוש אחר תרגילים רלוונטיים ועוזר להתמקד בצורה איכותית בלמידה אפקטיבית באופן שלא נראה כמותו עדיין.

באפשרותכם גם לשלב עם תהליך הלמידה גרסה מודפסת של ספר הקורס של YegerMaster. כנסו כעת לאתר והזמינו עותק מודפס משלכם שישלח אליכם עד הבית.

צוות YegerMaster שוקד ללא הרף על שיפור איכות ההוראה. מעבר למאמץ לייצר תכנים איכותיים, ברורים, ממוקדים ומקיפים, YegerMaster מקדיש זמן רב ביצירת חדשנות בעולם החינוך כדי לספק את הפלטפורמה הטובה ביותר ללמידה מוצלחת של קורסי מתמטיקה ולעזור לכם לממש את מלוא הפוטנציאל שלכם כדי לעבור את הסמסטר בהצלחה.

בברכת סמסטר מוצלח!

YegerMaster

# תוכן הקורס

# לוגיקה מתמטית

**הגדרה**: פסוק הינו משפט חיווי שהינו אמיתי או שיקרי.

נבנה פסוקים בעזרת פסוקי יסוד וקשרים. בדרך כלל נסמן פסוקי יסוד באותיות $A, B$

**הגדרה**: תהליך הפיכת משפט לביטוי תבניתי נקרא הצרנה

**הגדרה**: האלמנטים הבסיסיים להרכבת פסוקים מורכבים מפסוקי היסוד נקראים קשרים

קשרים בסיסיים $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

דוגמא:

$A$ - היום יום שלישי

$B$ - היום יורד גשם

$\neg A \ , \ A \leftrightarrow B \ , A \rightarrow B \ , \ A \wedge B \ , \ A \vee B$

למשפט ערך אמת הנקבע על פי ערכי האמת של הפסוקים היסודיים ממנו הוא מורכב.

**מטרה**: בדיקת תקפותו של טיעון, כלומר מציאת ערך אמת של פסוק

**דרך**: נוכל לקבוע את ערך האמת של פסוק על ידי אחת משתי השיטות הבאות:

1. טבלת אמת – מיידי וישיר, נוח לפסוקים המרכיבים עד 3 פסוקים יסודיים.
2. מערכות הוכחה. מתבססות על שקלויות.

טבלת אמת

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \rightarrow B$ | $A \leftrightarrow B$ | $\bar{A}$ | $A \oplus B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ |

## הצרנות

1. הצרינו את הפסוקים:

א. אם לא ירד גשם ביום שני אצא לריצה.
ב. אם אצא לריצה ביום שני, לא ירד גשם
ג. אצא לריצה אם ורק אם לא ירד גשם ביום שני.

## טבלת אמת

1. מצאו את טבלת האמת של הפסוק $\left(\bar{B} \rightarrow A\right) \vee \left(A \wedge B\right)$

2. בעזרת טבלת אמת מצאו את ערכי האמת של הפסוק $\left(A \vee B\right) \wedge \left(A \rightarrow \bar{C}\right)$

3. בעזרת טבלת אמת מצאו את ערכי האמת של הפסוק $\left(A \vee B\right) \Leftrightarrow \left(\left(A \vee \bar{B}\right) \rightarrow \left(A \rightarrow B\right)\right)$

## עץ אמת

1. נתונים ערכי האמת $A = T, B = T, C = F$ ,

מצאו את ערך האמת של הפסוק $\left(\left(A \rightarrow B\right) \vee \left(C \vee B\right)\right) \rightarrow \left(\left(A \rightarrow \left(B \wedge C\right)\right) \vee C\right)$

2. נתונים ערכי האמת $A = T, B = F, C = T$ ,

מצאו את ערך האמת של הפסוק $\left((B \leftrightarrow A) \wedge (\bar{C} \rightarrow B)\right) \rightarrow \left(\left((C \leftrightarrow A) \wedge A\right) \vee B\right)$

3. נתונים ערכי האמת $A = T, B = F, C = T$

מצאו את ערך האמת של הפסוק $\left((B \rightarrow A) \wedge (\bar{C} \rightarrow B)\right) \rightarrow \left(\left((C \leftrightarrow A) \wedge A\right) \vee B\right)$

## שקלויות לוגיות

**הגדרה**: שקילות טאוטולוגית – נאמר על שני פסוקים שהם שקולים טאוטולוגית אם יש להם אותם ערכי אמת על הפסוקים היסודיים.

**הוכחה בשלילה**: שקילות חשובה $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

$$(A \to B) \wedge (B \to A) \equiv B \leftrightarrow A$$

$$A \to B \equiv \bar{A} \vee B$$

1. חוק החילוף:

$$A \vee B = B \vee A$$
$$A \wedge B = B \wedge A$$

2. אסוציאטיביות:

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$
$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

3. חוק הפילוג:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

4. חוקי דה מורגן:

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$
$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

**הגדרה**: טאוטולוגיה הוא פסוק שערכו אמת לכל ערכי האמת של פסוקיו היסודיים. למשל: $A \vee \bar{A}$

## שקילויות

1. הוכיחו את השקילות $A \to B \equiv \bar{A} \vee B$

2. הוכיחו את השקילות $\sim (A \wedge B) = \sim (A) \vee (\sim B)$

3. הוכיחו את השקילות $\left(A\wedge\bar{B}\right)=A\leftrightarrow\left(B\rightarrow\bar{A}\right)$

4. הראו בעזרת שקלויות כי $\left(A\rightarrow B\right)\rightarrow\left(\neg\left(B\rightarrow A\right)\right)=\left(A\oplus B\right)$

5. הראו בעזרת שקלויות כי $\sim\left(\left(p\wedge q\right)\rightarrow\left(\left(p\vee q\right)\wedge\left(\sim r\right)\right)\right)=p\wedge q\wedge r$

## טאוטולוגיה

1. קבעו האם הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה $\varphi=\left(P\wedge Q\right)\rightarrow\left(\left(Q\rightarrow P\right)\rightarrow Q\right)$

2. קבעו האם הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה $\varphi=\left(P\vee Q\right)\rightarrow\left(\left(Q\rightarrow P\right)\rightarrow Q\right)$

## מערכת הנחות

**הגדרה**: מערכת המכילה הנחות ומסקנה נקראת מערכת הנחות.

**מטרה**: במערכת הנחות נרצה לבדוק בדרך כלל האם המסקנה נובעת מן ההנחות.

נסמן את מערכת ההנחות ב- $P$

ואת המסקנה ב- $Q$

נרצה לבדוק האם: $P\rightarrow Q$

**דרך**: בעזרת השקילות $P\rightarrow Q\equiv\neg Q\rightarrow\neg P$ , נשלול את המסקנה ונבדוק האם בהכרח נקבל שלילה לאחת ההנחות.

אם כן נאמר שהמקנה נובעת מן ההנחות. אחרת, המסקנה איננה נובעת מן ההנחות.

תרגיל: קבעו האם המסקנה נובעת מן ההנחות

$$A \leftrightarrow (\sim B), B \rightarrow C, A \wedge C, (B \vee C \rightarrow A)\ \mid = A \rightarrow (B \wedge C)$$

1. נתונה מערכת ההנחות הבאה:

אם דני רופ לא משדר אז יורד גשם.

אם גל מתאמן אז לא יורד גשם.

מסקנה: אם דני רופ משדר גל לא מתאמן.

הצרינו את ההנחות ואת המסקנה וקבעו האם המסקנה נובעת מן ההנחות

2. מתן מתכנן את השבוע הקרוב שלו:

מתן ייצא לריצה ביום רביעי אם ורק אם לא יירד גשם ביום שלישי, אם הוא יצא לריצה ביום רביעי הוא ילך למסעדה ולא יראה סרט ביום חמישי. אם ילך למסעדה או יראה סרט ביום חמישי אז יוכל ללמוד ביום שישי, אם ירד גשם הוא יצא למסעדה ביום חמישי.

מסקנה: אם לא ירד גשם ביום שלישי או שילך למסעדה ביום רביעי אז הוא יוכל ללמוד ביום שישי.

הצרינו את הפסוק וקבעו האם המסקנה מתיישבת עם הנתונים.

## כמתים

**הגדרה**: נגדיר את הכמתים $\forall$ - לכל, $\exists$ - קיים

**הגדרה**: $P = P(x)$ הוא תכונה (פסוק) שערך האמת שלו נקבע על ידי $x$

דוגמא: $P(x)$ - $x$ הוא מספר ראשוני

$\forall x P(x)$ - כל $x$ הוא מספר ראשוני , $\exists x P(x)$ - קיים $x$ ראשוני

שקילות חשובה:

$$\sim \forall x P(x) = \exists x \sim P(x)$$
$$\sim \exists x P(x) = \forall x \sim P(x)$$

1. נתונים הפסוקים הבאים:

$P(x)$ – $x$ הוא מספר ראשוני

$Q(x): x^2 - 7x + 12 = 0$

קבעו האם

א. $\forall x. P(x) \to Q(x)$
ב. $\forall x. Q(x) \to P(x)$
ג. $\exists x. P(x) \to Q(x)$
ד. $\exists x. Q(x) \to P(x)$

2. קבעו האם הביטוי הבא נכון ובטאו את שלילתו ללא שימוש בסמן השלילה

$$\exists x\left(x \geq 1\right) \wedge \left(\forall y.x < y\right)$$

<u>פתרון</u>: $\forall x\left(x < 1\right) \vee \left(\exists .x \geq y\right)$

3. קבעו האם הביטוי הבא נכון ובטאו את שלילתו ללא שימוש בסמן השלילה

$$\left(\forall n.a_n > 0\right) \rightarrow \left(\exists m \forall n > m.a_n < 5\right)$$

<u>פתרון</u>: $\forall n.a_n > 0 \wedge \left(\forall m \exists n > m.a_n \geq 5\right)$

# תורת הקבוצות

**הגדרה:** קבוצה היא אוסף של איברים

**סימון:** $\{\ \}$ - מייצג קבוצה.

**דוגמאות:** $A=\{3,8,11\}$ - קבוצה המכילה 3 איברים. $B=\{a,2,c,11\}$ - קבוצה המכילה 4 איברים.

*בקבוצה אין חשיבות לסדר או לחזרות $\{3,8,11\}=\{8,11,3,8,11\}$

**סימונים נוספים:**

שייכות: $\in$ - שייך , $\notin$ - לא שייך. למשל: $4\notin A,\quad 3\in A$. גישה: קבוצה$\in$איבר

הכלה: $\subseteq$ - מוכל , $\not\subset$ - לא מוכל. למשל: $\{3,7\}\not\subset A,\quad \{8,11\}\subseteq A$. גישה: קבוצה $\subseteq$ קבוצה

- קבוצה יכולה להיות איבר בקובצה אחרת, למשל: $C=\{1,8,A\}$

קבוצות מוכרות:

הטבעיים - $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$

השלמים - $\mathbb{Z}=\{\ldots,-1,0,1,2,\ldots\}$

הרציונליים - $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}\}$ (תיאור בעזרת תנאי)

הקבוצה הריקה - $\varnothing=\{\ \}$ לכל קבוצה $A$ מתקיים $\varnothing\subseteq A$

נשים לב שמתקיים: $\varnothing\subseteq\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

**טענה:** $A=B$ אם $x\in A\leftrightarrow x\in B$

**הגדרה:** נאמר ש-$A$ היא תת קבוצה (קבוצה חלקית) של $B$ אם כל איבר של $A$ נמצא גם ב-$B$.
ונסמן $A\subseteq B$ , נאמר ש-$A$ מוכלת ב-$B$.

מוכלות ממש: נאמר ש-$A$ מוכלת ממש ב-$B$ אם כל איבר של $A$ נמצא גם ב-$B$ וכן ב-$B$ איבר שאיננו נמצא ב-$A$. נסמן $A\subset B$

## שייכות והכלה

1. תהי $A=\{1,\{1\},\varnothing,\{1,2\}\}$ קבעו נכון/לא נכון

$\varnothing\in A$, $\varnothing\subseteq A$, $1\in A$, $1\subseteq A$, $\{1\}\in A$, $\{1\}\subseteq A$, $2\in A$, $2\subseteq A$, $\{1,2\}\subseteq A$, $\{1,2\}\in A$,
$\{\varnothing\}\subseteq A$

2. תהי $A=\{0,2,\{1,2\}\}$ קבעו נכון/לא נכון

$\varnothing\in A$, $\varnothing\subseteq A$, $1\in A$, $1\subseteq A$, $2\in A$, $\{2\}\subseteq A$, $\{1,2\}\subseteq A$, $A\in\mathbb{N}$, $A\subseteq\mathbb{N}$, $\{0,2\}\subseteq A$,
$\{0\}\in A$

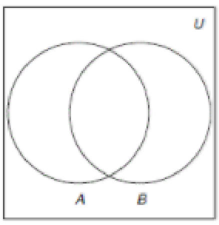
3. קבעו נכון/לא נכון עבור הקבוצות $A=\{1,2,\{2,3\},\{\emptyset\}\}$, $B=\{2,3\}$

א. $2\in A$, ב. $2\subseteq A$, ג. $3\in A$, ד. $3\subseteq A$, ה. $\{1,3\}\in A$, ו. $\{1,3\}\subseteq A$, ז. $B\in A$,
ח. $B\subseteq A$, ט. $\emptyset\in A$, י. $\emptyset\subseteq A$, יא. $\{\emptyset\}\in A$, יב. $\{\emptyset\}\subseteq A$, יג. $\{1,\emptyset\}\in A$, יד. $\{1,\emptyset\}\subseteq A$

4. אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$

5. אם $A\subseteq B$ וגם $B\subset C$ אז $A\subset C$

## פעולות על קבוצות




דיאגרמת ון היא כלי לתיאור יחסים בין קבוצות.

איחוד – $A\cup B$ מוגדרת להיות הקבוצה $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

חיתוך – $A\cap B$ מוגדרת להיות הקבוצה $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

משלים – $A^c=\bar{A}$ מוגדרת להיות הקבוצה $\bar{A}=\{x\mid x\notin A\}$

הפרש – $A\setminus B$ מוגדרת להיות הקבוצה $A\setminus B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

הפרש סימטרי - $A\oplus B$ , מוגדרת להיות הקבוצה

$$A\oplus B=\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)=\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)=\left\{x\,|\left(x\in A\cup B\right)\wedge\left(x\notin A\cap B\right)\right\}$$

סימון: - $|A|$ מייצא את הגודל (עוצמה) של $A$ , כלומר מספר האיברים שבה.

1. תהיינה $B=\{2,4,7,9\}$ , $A=\{1,2,6,7,8,11\}$ מהם

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A\backslash B$

ד. $A\oplus B$

2. תהיינה $A=\left\{\frac{1}{2},2,4\right\}$ , $\mathbb{N}$ מהם

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A\backslash B$

ד. $A\oplus B$

3. מהם $A\backslash B$ , $A\oplus B$ בקבוצות הבאות: $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,2<x<6\right\}$ , $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,1\leq x\leq 3\right\}$

4. הוכיחו $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$

5. הוכיחו $A\cup B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq C,B\subseteq C$

6. הוכיחו $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

7. הוכיחו $A\subseteq B\Leftrightarrow B^c\subseteq A^c$

# זהויות

חוק החילוף:

$$A\cup B=B\cup A$$
$$A\cap B=B\cap A$$

אסוציאטיביות:

$$A\cap\left(B\cap C\right)=\left(A\cap B\right)\cap C$$

חוק הפילוג:

$$A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$$
$$A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$$

חוקי דה מורגן:

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

# הוכיחו/הפריכו

1. הוכיחו/הפריכו $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$.

2. הוכיחו/הפריכו $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

3. הוכיחו/הפריכו: $\left(A\cap B\right)\cup\left(B\cap C\right)\setminus\left(A\cap B\cap C\right)=B\cap\left(A\cup C\right)$

4. הוכיחו/הפריכו: $\big(C\setminus(B\cap C)\big)\cup(A\cap \mathrm{B}\cap \mathrm{C})=(A\cap \mathrm{B}\cap \mathrm{C})\cup(A\cap C)$

5. הוכיחו/הפריכו: $C\setminus A=\left(C\setminus B\right)\cup\left(C\cap B\right)\cup\left(C\cap A\right)\Leftarrow A\subseteq B$

## קבוצות נוספות

**הגדרה**: קבוצת החזקה – תהי $A$ $B\subseteq A$ תת קבוצה של $A$.

$P(A)$ נקראת קבוצת החזקה ואיבריה הם כל תתי הקבוצות של $A$. גודלה של $P(A)$ הוא $|P(A)|=2^{|A|}$, $B\in P(A)$ ולכל $A$ מתקיים $\varnothing\in P(A)$

**הגדרה**: זוג סדור - $(a,b)$, זוג איברים עם חשיבות לסדר.

שני הזוגות הסדורים $(a,b)$, $(c,d)$ שווים זה לזה אם ורק אם $a=c,\quad b=d$

**הגדרה**: מכפלה קרטזית – תהיינה $A$, $B$ קבוצות. קבוצת כל הזוגות הסדורים $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge b\in B\}$ נקראת המכפלה הקרטזית.

*עבור $A\neq B$ נקבל $A\times B\neq B\times A$

אם $A$, $B$ סופיות אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$

ובאופן כללי $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,|\,a_i\in A_i\}$

1. עבור $A=\{\varnothing,1,\{1\}\}$ מהי $P(A)$?

2. הוכיחו הפריכו $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

3. הוכיחו הפריכו $P(A\backslash B)=P(A)\backslash P(B)$

4. נתון $A=\{1,4,6\}, B=\{a,b\}$ מהם $A\times B, B\times A$

5. תהיינה הקבוצות $A=\{2,7,9\}$, $A=\{\varnothing,1,7\}$ מהי $((A\cup B)\oplus A)\times P(A\cap B)$

## הוכחות נוספות

1 . הוכיחו $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

2. הוכיחו/הפריכו: $C\setminus A=(C\setminus B)\cup(C\cap B)\setminus(C\cap A)\Leftarrow A\subseteq B$

3. הוכיחו/הפריכו: $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

4. הוכיחו כי $(-\infty,b]\subseteq(-\infty,a]$ אם ורק אם $a\leq b$

# יחסים (רלציות)

**הגדרה**: כל תת קבוצה של המכפלה הקרטזית $A\times B$ היא יחס מ- $A$ ל- $B$. כלומר $R$ הוא יחס מ- $A$ ל- $B$ אם ורק אם $R\subseteq A\times B$

*יחס מקשר בין איברים המקיימים תכונה מסוימת אחד עם השני.

**סימון**: נהוג לסמן יחס באופן הבא - $R=\{(1,a),(2,a),(2,b)\}=\begin{pmatrix}1&2&2\\a&a&b\end{pmatrix}$

**סימון**: נסמן איבר הנמצא ביחס בצורה הבאה - $aRb,\quad (a,b)\in R$. באופן דומה נסמן שאיבר איננו ביחס $a\not R b,\quad (a,b)\notin R$

**מטרה**: ניתוח תכונות של יחסים.

**דוגמא**: אם $A=\{1,2,3\},B=\{a,b\}$

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

אז $R=\{(1,a),(2,a),(2,b)\}=\begin{pmatrix}1&2&2\\a&a&b\end{pmatrix}$ הוא יחס מ- $A$ ל- $B$

**הגדרה**: אם $R\subseteq A\times A$ נאמר ש- $R$ הוא יחס מעל $A$.

פרשנות - $R$ מקשר בין איברים באותה הקבוצה.

ניתן לתאר יחס גם בעזרת גרף או טבלה.

## יחסים מוכרים

$\le$ - מעל קבוצה כלשהי: $A,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R}$ למשל $\le=\{(1,3),(8,75),\ldots\}\quad 1\le 3,$

$\subseteq$ - מעל קבוצה כלשהי: $P(\mathbb{N}),P(\mathbb{R})$ למשל

$$\subseteq=\{(\{1\},\{1,3\}),(\{1,3,9\},\{1,2,3,9,14\}),\ldots\}\quad \{1\}\subseteq\{1,3\},$$

$=$ - מעל קבוצה כלשהי: $A,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R},P(\mathbb{N}),P(\mathbb{R})$

$\neq$ - מעל קבוצה כלשהי: $A,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R},P(\mathbb{N}),P(\mathbb{R})$

## יחסים נוספים

היחס המלא $R = A \times B$

היחס הריק $\varnothing \subseteq A \times B$

יחס השיוויון מעל $A$ : $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$

## תרגילי בסיס

1. תארו את היחס $R = \{(1,a),(2,a),(2,b),(3,b)\}$

א. בעזרת טבלה.
ב. בעזרת גרף.

2. נתון היחס הבא מעל $A = \{1,2,3\}$ , $xRy \Leftrightarrow y - x \in A$ . כתבו את $R$ באופן מפורש ותארו אותו בעזרת גרף.

<u>פתרון</u>: $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3. נתון היחס הבא מעל $A = \{1,2,4,5,8\}$ , $xRy \Leftrightarrow |y - x| \le 2$ . כתבו את $R$ באופן מפורש ותארו אותו בעזרת גרף.

<u>פתרון</u>: $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 5 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

## פעולות על יחסים

יחס הינו קבוצה של זוגות סדורים, לכן כל פעולה מתורת הקבוצות מוגדרת גם עבור יחסים.

**<u>הגדרה</u>**: יהי $R \subseteq A \times B$ יחס נגדיר את היחס ההפוך $R^{-1} \subseteq B \times A$ כך ש-
$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

**<u>הגדרה</u>**: יהיו $R,S$ יחסים נגדיר הרכבת היחסים כך
$RS = \{(a,c) \mid \exists b \in B : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$ כאשר $R \subseteq A \times B$ , $S \subseteq B \times C$

**טענה**: $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$

1. נתון היחס הבא $R=\{(1,a),(2,a),(2,b),(3,b)\}$ מהו היחס ההפוך $R^{-1}$

2. נתון היחס הבא $R=\{(1,a),(2,a),(2,b),(3,b)\}$ והיחס $S=\{(a,y),(b,z),(b,x)\}$ מהו היחס $RS$?

## תכונות של יחסים

__רפלקסיביות__ – יחס $R\subseteq A\times A$ יקרא רפלקסיבי על קבוצה $A$ אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$

יחס $R\subseteq A\times A$ יקרא אי-רפלקסיבי על קבוצה $A$ אם לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\notin R$

דוגמאות: $=$ $\leq$ יחסים רפלקסיביים, $\neq$ $<$ יחסים אנטי רפלקסיביים

__סימטריות__ – יחס $R$ יקרא סימטרי אם לכל $(a,b)\in R$ מתקיים $(b,a)\in R$

__אנטי-סימטריות__ – יחס $R$ יקרא אנטי-סימטרי אם לכל $(a,b)\in R$ מתקיים $(b,a)\notin R$

דוגמאות: $=$ יחס סימטרי, $<$ יחס אנטי סימטרי

__טרנזיטיביות__ – יחס $R$ יקרא טרנזיטיבי אם לכל $(a,b),(b,c)\in R$ גורר $(a,c)\in R$

דוגמאות: $=$ , $<$

**__תרגיל__**: כמה יחסים ישנם מ- $A=\{1,2,3\}$ ל- $B=\{a,b\}$ רשמו 3 מתוכם וקבעו אילו תכונות הם מקיימים.

## רפלקסיביות

1. נתון היחס $xRy \Leftrightarrow y-x\in A$ מעל $A=\{1,2,3\}$. האם היחס רפלקסיבי, אי-רפלקסיבי?

2. האם היחס $R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$ מעל $A=\{1,2,3\}$. הוא רפלקסיבי, אי-רפלקסיבי?

3. האם היחס $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=7x\}$ רפלקסיבי, אי-רפלקסיבי מעל $\mathbb{R}$?

4. נתון היחס הבא מעל $A=\{1,2,4,5,8\}$, $xRy \Leftrightarrow |y-x|\le 2$. האם $R$ הוא יחס רפלקסיבי, אי רפלקסיבי?

5. נתון היחס הבא מעל $\mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 2\mid(y-x)$. האם $R$ הוא יחס רפלקסיבי, אי רפלקסיבי?

6. נתון $R$ יחס אי-רפלקסיבי מעל $A$. הוכיחו כי גם $R^{-1}$ הוא אי רפלקסיבי.

## סימטריות

1. נתון היחס הבא מעל $A=\{1,2,3\}$, $xRy \Leftrightarrow y-x\in A$. האם $R$ הוא יחס סימטרי, אנטי סימטרי?

2. האם היחס $R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$ מעל $A=\{1,2,3\}$ הוא סימטרי, אנטי- סימטרי?

3. נתון היחס הבא מעל $A=\{1,2,4,5,8\}$, $xRy \Leftrightarrow |y-x|\le 2$. האם $R$ הוא יחס סימטרי, אנטי סימטרי?

4. נתון היחס הבא מעל $\mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow 2\mid(y-x)$. האם $R$ הוא יחס סימטרי, אנטי סימטרי?

5. נתונים שני יחסים $R,S$ מעל $A$ . שניהם סימטריים. הוכיחו כי גם היחס $R\cup S$ הוא יחס סימטרי.

6. נתון יחס רפלקסיבי וסימטרי R מעל A ו-S יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A. האם RS בהכרח רפלקסיבי? סימטרי?

## יחס שקילות

יחס המקיים את תכונות הרפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות – נקרא יחס שקילות

**הגדרה**: יהי $R$ יחס שקילות על $A$ ונניח כי $x\in A$ אז

1. מחלקת השקילות של $x$ לפי $R$ היא הקבוצה $[x]_R=\{y\in A\,|\,(x,y)\in R\}$
2. קבוצת המנה של $A$ לפי $R$ היא הקבוצה $A/R=\{[x]_R\in A\,|\,x\in A\}$

1. נתון היחס הבא מעל $A=\{1,2,3\}$ , $R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ . האם $R$ הוא יחס שקילות?

2. נתון היחס הבא מעל $A=\{1,2,3\}$ , $S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$ . האם $S$ הוא יחס שקילות?

3. נתון היחס הבא מעל $A=\{1,2,3\}$ , $R=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$ . האם $R$ הוא יחס שקילות?

4. תהי הקבוצה $A=\{1,2,3\}$

א. מצאו את כל יחסי השקילות מעל $A$ .

ב. לכל יחס שקילות, מצאו את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

5. יהי $R$ מעל $\mathbb{Z}$ יחס המוגדר על ידי $xRy \quad \Leftrightarrow \quad 3 | x+2y$

א. הוכיחו כי $R$ הוא יחס שקילות.

ב. מצאו את מחלקת השקילות של $R$ .

6. יהי $R$ מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ יחס המוגדר על ידי $x^2+y^2=x_1^2+y_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)R(x_1,y_1)$ . הוכיחו כי $R$ הוא יחס שקילות.

7. תהי הקבוצה $A=\{1,2,...,600\}$ ו- $R$ מעל $A$ יחס המוגדר על ידי

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \exists n,m\in\mathbb{Z}: a(2n-1)=b(2m-1)$$

א. הוכיחו כי $R$ הוא יחס שקילות.

ב. מצאו את מחלקת השקילות של $R$ .

## יחס סדר

יחס המקיים את תכונות הרפלקסיביות, אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות – נקרא יחס סדר

*באופן כללי ניתן לסמן יחס סדר בעזרת $\leq$

**הגדרה**: יהי $R$ יחס סדר מעל קבוצה $A$ , (נסמנו $\leq$) נאמר כי $a\in A$ הוא

1. איבר מינימלי אם לא קיים $b\in A$ כך ש- $b\leq a$
2. איבר מקסימלי אם לא קיים $b\in A$ כך ש- $a\leq b$
3. איבר מינימום אם לכל $b\in A$ מתקיים $a\leq b$
4. איבר מקסימום אם לכל $b\in A$ מתקיים $b\leq a$

**הגדרה**: גרף מכוון בו יש משמעות למיקום האיברים נקרא דיאגרמת הסה

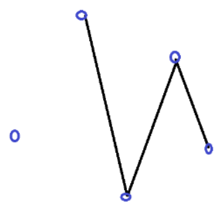
**הגדרה**: יחס סדר $R$ מעל קבוצה $A$ , בו בין כל שני איברים $a,b\in A$ מתקיים $(a,b)\in R$ או $(b,a)\in R$ נקרא יחס סדר מלא

*במילים – $R$ מקשר בין כל שני איברים ב- $A$

**הגדרה**: יחס סדר $R$ מעל קבוצה $A$ , בו קיימים שני איברים $a,b \in A$ עבורם $(a,b) \notin R$ וגם $(b,a) \notin R$ נקרא יחס סדר חלקי

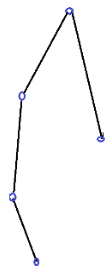
*במילים – קיימים ב- $A$ לפחות שני איברים ש- $R$ לא מקשר ביניהם.

1. מתואר יחס סדר $R$ מעל קבוצה $A=\{a,b,c,d,e\}$ בעזרת דיאגרמת הסה:



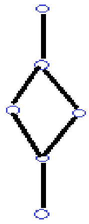
א. רשמו את $R$ באופן מפורש.
ב. מצאו איבר מקסימום, מינימום, במידה וקיימים.
ג. מצאו איברים מינימליים ומקסימליים.
ד. קבעו האם היחס הוא יחס סדר מלא או חלקי.

2. מתואר יחס סדר $R$ מעל קבוצה $A=\{a,b,c,d,e\}$ בעזרת דיאגרמת הסה:



א. רשמו את $R$ באופן מפורש.
ב. מצאו איבר מקסימום, מינימום, במידה וקיימים.
ג. מצאו איברים מינימליים ומקסימליים.
ד. קבעו האם היחס הוא יחס סדר מלא או חלקי.

3. מתואר יחס סדר $R$ מעל קבוצה $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ בעזרת דיאגרמת הסה:



א. רשמו את $R$ באופן מפורש.
ב. מצאו איבר מקסימום, מינימום, במידה וקיימים.
ג. מצאו איברים מינימליים ומקסימליים.
ד. קבעו האם היחס הוא יחס סדר מלא או חלקי.

## תרגילם ביחסי סדר

1. נתון $R$ יחס סדר מעל קבוצה $A$ הוכיחו שגם $R^{-1}$ הוא יחס סדר.

2. הוכיחו כי היחס $xRy \Leftrightarrow x \mid y$ מעל הקבוצה $A=\{1,2,\dots,600\}$ מהווה יחס סדר. האם הוא יחס סדר מלא או חלקי?

3. תהי הקבוצה $A=P(\{1,2,3\})\setminus\{\varnothing\}$ נגדיר את הקבוצה הבאה $X_{sum}$ כסכום כל איברי הקבוצה $X$. וכן נתון היחס $XRY \Leftrightarrow (X=Y)\vee(X_{sum}<Y_{sum})$.

א. האם $R$ הוא יחס סדר מעל הקבוצה.
ב. אם כן, שרטטו דיאגרמת הסה ומצאו איברים מינימליים, מקסימליים, מינימום ומקסימום.
ג. האם זהו יחס סדר מלא או חלקי?

4. יהי $R$ יחס מעל הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, המוגדר באופן הבא

$$(a,b)R(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,b)\le\max(c,d)$$

האם $R$ הוא יחס סדר?

5. יהי $R$ יחס מעל הקבוצה $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, המוגדר באופן הבא

$$(a,b)R(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,b)\le\min(c,d)$$

האם $R$ הוא יחס סדר?

6. יהי $R$ יחס מעל הקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא

$$(a,b)R(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a\le c \wedge b\le d$$

א. האם $R$ הוא יחס סדר?

ב. האם $S$ הוא יחס סדר מעל אותה הקבוצה, $(a,b)S(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2=c^2+d^2$

7. תהי הקבוצה $A=P\left(\{1,...,60\}\right)\setminus\{\varnothing\}$. וכן נתון היחס $XRY \Leftrightarrow (X\subseteq Y)\wedge(\min X=\min Y)$

א. הוכיחו כי $R$ הוא יחס סדר מעל הקבוצה.

ב. האם זהו יחס סדר מלא או חלקי?

ג. האם ישנם איברי מינימום ומקסימום.

8. תהי הקבוצה $A=\{60,...,600\}$. וכן נתון היחס הסדר $xRy \Leftrightarrow x\,|\,y$

א. כמה איברים מקסימליים בקבוצה.

ב. מצאו 5 איברים מינימליים בקבוצה זו.

ג. האם קיימים מינימום ומקסימום? אם לא, הוסיפו שני איברים לקבוצה שהם יהיו המינימום והמקסימום.

# הפונקציה

**תכונה**: יחס $R$ מ-$A$ ל-$B$ יקרא חד-ערכי אם לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד כך ש-$(a,b)\in R$
$(aRb\wedge aRc\Rightarrow b=c)$

**הגדרה**: יחס חד-ערכי $R$ מ-$A$ ל-$B$ נקרא פונקציה.

**סימון**: מקובל לסמן פונקציה באות $f$ , בצורה הבאה: $f:A\to B$ כאשר $A=D(f)$ - תחום, $B$ - טווח.

**הגדרה**: התמונה של $f$ מוגדרת בצורה הבאה: $\mathrm{Im}(f)=\{y\in B\mid \exists x\in A: f(x)=y\}$

**הגדרה**: תהיינה $f:A\to B$ , $g:B\to C$ פונקציות, נגדיר את ההרכבה $g\circ f(x)=g(f(x))$

## תכונות הפונקציה

**הגדרה:** $f$ נקראת חד-חד-ערכית (חח"ע) אם $f(x_1)=f(x_2)\quad\Rightarrow\quad x_1=x_2$

הגדרה חלופית $x_1\neq x_2\quad\Rightarrow\quad f(x_1)\neq f(x_2)$

**הגדרה:** $f$ נקראת על אם $\forall y\in B\quad \exists x\in A\quad f(x)=y$ *במילים אחרות $B=\mathrm{Im}(f)$

**הגדרה:** $f:A\to B$ היא הפיכה אם קיימת $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g(x)=x$ וכן $g\circ f(x)=x$ . $g$ נקראת ההופכית של $f$ ונסמן $g=f^{-1}$.

**טענה**: פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.

## תרגילי חימום

1. תהינה הקבוצות $B=\{1,2,3\}$, $A=\{1,2,3,4\}$ . תנו דוגמאות לפונקציות המקיימות:

א. $f:A\to B$ על.

ב. $f:B\to A$ חח"ע ועל.

ג. $f:B\to A$ חח"ע ואינה על.

ד. $f:A\to B$ איננה חח"ע ואיננה על.

2. תנו דוגמא ל- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימת:

א. חח"ע ולא על.
ב. על ואיננה חח"ע.

3. תהי $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$ המקיימת: $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$. הוכיחו כי $f$ הפיכה ומצאו את $f^{-1}$.

## תרגילים מרכזיים

1. נתונות הפונקציות $f,g$ חח"ע מעל $A$, $f:A\to B, g:B\to C$ האם $g(f(x))$ חח"ע?

2. תהי פונקציה $f:A\to B$ על, ופונקציה $g:B\to C$ על. האם ההרכבה $g(f(x))$ על?

3. נגדיר $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא $f(n_1,n_2)=n_1+n_2$, האם $f$ היא חח"ע? האם $f$ על?

4. נגדיר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$ פונקציות על ונגדיר $h:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$ באופן הבא $h(n,m)=f(n)+g(m)$.

א. האם $h$ היא חח"ע.
ב. הוכיחו כי $h$ היא על.

5. נגדיר $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא $f(A,B)=A\cup B$ האם $f$ היא חח"ע? האם $f$ על?

6. נגדיר $f:P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{N})$ באופן הבא $f(A,B)=(A\cup B,A\cap B)$

האם $f$ היא חח"ע? האם $f$ על?

( סרטון הסבר נוסף לשאלה 1)

7. נתונות הפונקציות $f,g$ חח"ע מעל $A$ , $f:A\to A$ האם $g(f(x))$ חח"ע?

(סרטון הסבר נוסף לשאלה 2)

8. תהי פונקציה $f:A\to B$ על, ופונקציה $g:B\to C$ על . האם ההרכבה $g(f(x))$ על?

# עוצמות

**הגדרה**: - נסמן ב- $|A|$ את עוצמת הקבוצה $A$ , כלומר מספר האיברים שבה. אם $A$ סופית אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כלשהו כך ש- $|A|=n$.

**הבחנה**: הקבוצה $\mathbb{N}$ היא אינסופית, הקבוצה $\mathbb{Z}$ היא אינסופית. האם באחת יש יותר איברים מבשנייה?

**טענה**: תהיינה $A,B$ קבוצות. אם קיימת פונקציה הפיכה מ- $A$ על- $B$ אז נאמר ש- $A,B$ שקולות עוצמה ונסמן $A\sim B$ או $|A|=|B|$

**משפט**: יחס שיוויון עוצמות הוא יחס שקילות.

**הגדרה**: נגדיר את עוצמת קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ בת-מנייה ונסמן $|\mathbb{N}|=\aleph_0$

**משפט**: עוצמת הקטע הפתוח $|(0,1)|$ איננה בת מנייה. נקרא לעוצמה זו עוצמת הרצף ונסמן $|(0,1)|=\aleph$. מתקיים $\aleph>\aleph_0$

**טענה**: עוצמת קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ היא $|\mathbb{R}|=\aleph$.

## קבוצה בת מנייה

1. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\setminus\{0\}$

2. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_{even}$

3. הוכיחו כי $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$

4. הוכיחו כי $|\{1,2,3\}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$

## עוצמת הרצף

1. הוכיחו כי $(0,1)\sim(0,1]$

2. הוכיחו כי כל הקטעים על הישר הם שווי עוצמה. $\left([0,1]\sim[a,b]\right)$

3. הוכיחו כי $(0,1)\sim[0,1]$

4. הוכיחו כי $(0,1)\sim\mathbb{R}$

## הסברים נוספים

**משפט**: עוצמת הרצף שווה לעוצמת קבוצת החזקה של המספרים הטבעיים, כלומר $\aleph=2^{\aleph_0}$

**משפט קנטור**: לכל קבוצה $A$ מתקיים $|A|<|P(A)|=2^{|A|}$

**מסקנה**: ישנן אינסוף עוצמות. $A,B$

### משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

תהיינה $a,b$ עוצמות כך ש- $b\le a,\quad a\le b,$ אז $a=b$

### סיכום

1. $|A|=|B|$ אם ורק אם קיימת $f:A\to B$ הפיכה.
2. $|A|\le|B|$ אם ורק אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע.
3. $|A|\ge|B|$ אם ורק אם קיימת $f:A\to B$ על.

### חשבון עוצמות

1. תהיינה $A,B$ קבוצות זרות אז $|A\cdot B|=|A|+|B|$
2. תהיינה $A,B$ קבוצות אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$
3. תהיינה $A,B$ קבוצות אז $|A\to B|=|B|^{|A|}$

## תרגילי חשבון עוצמות

1. הוכיחו פורמלית כי $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

2. הוכיחו פורמלית כי $\aleph \cdot \aleph_0 = \aleph$

3. חשבו את העוצמה הבאה $n \cdot \aleph_0$

4. חשבו את העוצמה הבאה $\aleph_0 + n$

5. חשבו את העוצמה הבאה $\aleph_0 + a$

6. חשבו את העוצמה הבאה $\aleph \cdot 2^{\aleph}$

7. חשבו את העוצמה הבאה $\aleph \cdot 2^{\aleph_0}$

8. חשבו את העוצמה הבאה ${\aleph_0}^{\aleph_0}$

## תרגילים מרכזיים

1. מהי עוצמת הקבוצה $(0,1)\cup\mathbb{Z}$

2. תהיינה 4 קבוצות זרות $A,B,C,D$ כך שמתקיים $|A|+|B|=|C|+|D|$ ונתון כי $|A|=|C|$ האם בהכרח $|B|=|D|$?

## עוצמות של קבוצות במישור

1. מהי עוצמת קבוצת הקטעים הפתוחים הזרים על הישר?
2. מהי עוצמת קבוצת העיגולים הזרים במישור?
3. מהי עוצמת קבוצת המעגלים הזרים במישור?

## סדרות בינאריות

1. מהי עוצמת קבוצת הסדרות הבינאריות האינסופיות

2. מהי עוצמת קבוצת הסדרות הבינאריות שאינן מכילות את 00.

3. מהי עוצמת קבוצת הסדרות הבינאריות שלא מופיע בהן 01.

4. מהי עוצמת קבוצת הסדרות הבינאריות המכילות 0 במקומות הזוגיים.

5. מהי עוצמת קבוצת הסדרות הבינריות האינסופיות שבכל סדרה התחלתית שלהן מספר האפסים גדול מהאחדות?

# אינדוקציה

**הקדמה**: האינדוקציה היא שיטת הסקה של טענה מהפרט על הכלל. להוכחה אינדוקטיבית מבנה ברור.

**הסבר**: תהי $A$ קבוצה וכן $P$ תכונה שאיבר ב-$A$ מקיים או שאינו מקיים. נרצה להראות שכל איבר ב-$A$ מקיים את $P$

**לא פורמלית**: בדרך כלל $A=\mathbb{N}$, ו-$P$ היא תכונה על המספרים הטבעיים. נראה כי תכונה $P$ מתקיימת עבור $n\in\mathbb{N}$ ונוכיח כי היא מתקיימת גם עבור $n+1$

## פורמלית

בסיס האינדוקציה\שלב הבדיקה: נראה כי עבור $n_0\in\mathbb{N}$ כלשהו מתקיימת תכונה $P$

טענת האינדוקציה\שלב ההנחה: נניח כי עד $n\in\mathbb{N}$ כלשהו מתקיימת תכונה $P$

צעד האינדוקציה\שלב ההוכחה: נוכיח כי עבור $n+1$ מתקיימת תכונה $P$

**מסקנה**: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיימת תכונה $P$

## תרגילים

1. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $1\le n$ $7^n+12n+7$ מתחלק ב-18.

2. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $1\le n$

$$2^{n+1}(n+1)!-2=3\cdot 2^1\cdot 1!+5\cdot 2^2\cdot 2!+7\cdot 2^3\cdot 3!+\ldots+(2n+1)\cdot 2^n\cdot n!$$

3. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $1\le n$ מתקיים $3\mid n^3-n$

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $1\le n$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$

5. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $1\le n$ מתקיים $2n+\sum_{k=1}^{2n}k\cdot 2^{2n-k}=2\left(2^{2n}-1\right)$

# קומבינטוריקה

קומבינטוריקה היא ענף במתמטיקה העוסק בספירת מספר העצמים בקבוצה המקיימת תנאים מסוימים.

**<u>תרגיל</u>**: כמה מלבנים בלוח שחמט?

**<u>הגדרה</u>**: תמורה – מספר הסידורים של $n$ איברים בשורה - $n!$

דוגמא: ישנם $4!$ אפשרויות לסדר 4 תלמידים בשורה.

## <u>קומבינטוריקה שימושית</u>

נרחיב ונתמקד בספירת מספר האפשרויות לבחור $k$ איברים מתוך $n$ איברים.

אפשר להתייחס לזה כבחירה לבחור $k$ איברים מקבוצה $A$ בעלת $n$ איברים וליצור קבוצה $B$ בעלת $k$ איברים.

### תכונות מרכזיות

האם ניתן לבחור מ- $A$ ללא הגבלה.

האם ב- $B$ יש חשיבות לסדר האיברים.

| קבוצה $A$ | | קבוצה $B$ |
|---|---|---|
| {עם חזרות} | $\leftarrow$ | יצירת n-יה $\left(a_1,a_2,\dots,a_k\right)$ = יש חשיבות לסדר |
| | $\nwarrow \swarrow$ | |
| {ללא חזרות} | $\leftarrow$ | יצירת קבוצה $\left\{a_1,a_2,\dots,a_k\right\}$ = אין חשיבות לסדר |

## <u>קומבינטוריקה שימושית</u>

### יצירת קבוצה בה יש חשיבות לסדר - חליפות

1. מספר האפשרויות לבחור $k$ איברים מתוך $n$ איברים ללא חזרות ועם חשיבות לסדר (חליפות) - $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

דוגמא: כמה מילים בנות 4 אותיות ניתן לבנות כך שכל אות מופיעה רק פעם אחת:

$$\underline{22}\cdot\underline{21}\cdot\underline{20}\cdot\underline{19}=\frac{22!}{(22-4)!}=\frac{22!}{18!}$$

2. מספר האפשרויות לבחור $k$ איברים מתוך $n$ איברים עם חזרות ועם חשיבות לסדר

(חליפות עם חזרות) - $n^k$

דוגמא: כמה מספרים תלת ספרתיים ניתן לבנות מהקבוצה $A=\{1,2,3,4\}$: $\underline{4}\cdot\underline{4}\cdot\underline{4}=4^3$

### יצירת קבוצה בה אין חשיבות לסדר

3. מספר האפשרויות לבחור $k$ איברים מתוך $n$ איברים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר

(צירופים) - $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

דוגמא: בכמה דרכים ניתן למלא לוטו: יש לבחור 6 מתוך 37 מספרים $\binom{37}{6}=\frac{37!}{6!31!}$

4. מספר האפשרויות לבחור $k$ איברים מתוך $n$ איברים עם חזרות וללא חשיבות לסדר

(חלוקות) - $\binom{n+k-1}{k}$

דוגמא: בכמה דרכים ניתן לפזר 3 כדורים זהים ב-6 תאים שונים: $k=3, n=6$ ולכן נקבל

$$\binom{6+3-1}{3}=\binom{8}{3}$$

## סיכום

| | ללא חזרות | עם חזרות |
|---|---|---|
| ללא חשיבות לסדר | $\binom{n}{k}$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |
| עם חשיבות לסדר | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $n^k$ |

שיוויון חשוב $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

**טענה**: מספר האפשרויות להושיב $n$ אנשים סביב שולחן עגול הוא $(n-1)!$

## תרגיל חימום

1. בכמה דרכים ניתן לסדר חפיסת קלפים?

2. בכיתה 10 תלמידים ו-12 תלמידות, בכמה דרכים ניתן להרכיב זוג המורכב מ:
   א. שני בנים.
   ב. שתי בנות.
   ג. בן ובת.
   ד. זוג כלשהו.

3. בשק כדורים ב-3 צבעים, 12 – כחולים, 16 – אדומים, 7 – ירוקים. כמה כדורים עלינו לשלוף באופן אקראי כדי לוודא שבידינו:
   א. שני כדורים כחולים
   ב. כדור כחול וכדור ירוק
   ג. 5 כדורים בצבע אחיד

4. בכמה דרכים ניתן להושיב קבוצה של 26 אנשים סביב שני שולחנות כאשר:
   א. 15 יושבים סביב שולחן עגול והיתר על ספסל.
   ב. 14 יושבים סביב שולחן עגול והיתר סביב שולחן עגול אחר.

5. בכמה דרכים ניתן לסדר את האותיות A,X,Y,Z,U,V,R בשורה, כך שהמחרוזות XYZ, ZYX לא תופענה בסידור?

6. כמה מלבנים בלוח שחמט? (לא משבצות)

## תרגילים מרכזיים

1. נתונים זוגות כדורים ב-8 צבעים שונים, כל זוג מחולק לגוון כהה וגוון בהיר.

בכמה דרכים ניתן לבחור 5 כדורים בצבעים שונים כך שלא כולם באותו הגוון?

<u>פתרון</u>: $30\binom{8}{5}$

2. בכמה דרכים ניתן לסדר את האותיות AAAABCCCDDEE בשורה כך ש-B לא תופיע בהתחלה.

פתרון: $\frac{16!-15!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}$

3. בכמה דרכים ניתן לחלק 35 כדורים זהים ל-6 ילדים כך שנועם לא תקבל יותר מ-6 כדורים?

פתרון: $\binom{40}{5}-\binom{33}{5}$

4. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+x_3=60$ מעל הטבעיים?

פתרון: $3\binom{30}{2}$

5. תהיינה הקבוצות $A=\{1,2,3,4\}\ B=\{a,b,c\}$

א. כמה פונקציות $f:A\to B$ קיימות?

ב. כמה מתוכן הן חח"ע?

פתרון: א. $3^4$, ב. $24$

6. בכמה דרכים ניתן לפזר n כדורים לבנים זהים ו-n כדורים ממוספרים $1,\dots,n$ ב-2n תאים כך שמתקיים:

א. בכל תא לכל היותר כדור ממוספר אחד ואין הגבלה על הכדורים הלבנים.

ב. בכל תא כדור לבן אחד לכל היותר.

ג. בכל תא מספר זהה של כדורים ממוספרים ולבנים.

# הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k a^{n-k} = (b+a)^n$$

$\binom{n}{k}$ - נקרא המקדם הבינומי.

1. הוכיחו משיקולים קומבינטוריים את השיוויון $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

2. הוכיחו משיקולים קומבינטוריים את השיוויון $\binom{360}{80} = \sum_{k=0}^{80}\binom{150}{k}\binom{210}{80-k}$

3. הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

4. הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k = n2^{n-1}$

5. הוכיחו כי עבור n זוגי מתקיים $\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k} = \sum_{k=1}^{n/2}\binom{n}{2k-1} = 2^{n-1}$

# עקרון ההכלה וההדחה

עבור $A,B$ קבוצות זרות $|A\cup B|=|A|+|B|$ , ובאופן כללי $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

עבור $A,B,C$ מתקיים

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

ובאופן כללי

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right|=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|A_k|-\sum_{1\le j<k\le n}|A_j\cap A_k|+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

1. תהי $A=\{1,2,\ldots,600\}$ כמה מספרים בקבוצה אינם מתחלקים ב-3 או ב-5 או ב-7?

<u>פתרון</u>: 275.

2. מהו מספר התמורות של הסדרה $1,2,\ldots,8$ כך שאף מספר זוגי איננו במקומו?

<u>פתרון</u>: $8!-\left(\binom{4}{1}\cdot 7!-\binom{4}{2}6!+\binom{4}{3}5!-\binom{4}{4}4!\right)$

3. בכמה דרכים ניתן לסדר את האותיות במילה Imaginatively כך ש- g אינה נמצאת ליד t, t איננה ליד n או n איננה ליד y.

<u>פתרון</u>: $\frac{13!}{3!\cdot 2!}-\frac{12!}{2}+\frac{2\cdot 11!}{3}-\frac{10!}{3!}$

4. בכמה דרכים ניתן לחלק 68 כדורים זהים ל-4 תאים, כך שבאף תא לא יהיו יותר מ-19 כדורים.

<u>פתרון</u>: $\binom{71}{3}-\left(\binom{4}{1}\binom{51}{3}-\binom{4}{2}\binom{31}{3}+\binom{4}{3}\binom{11}{3}\right)$

## עקרון שובך היונים

**טענה**: אם $|A|>|B|$ אז אין $f:A\to B$ חח"ע.

**עקרון שובך היונים**: בפיזור $n+1$ יונים ב- $n$ תאים, לפחות תא אחד יכיל שתי יונים לפחות.

באופן כללי: בחלוקת $n$ איברים ל- $m$ תאים, לפחות תא אחד יכיל לפחות איברים $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$

ניסוח שקול: אם הממוצע של $n$ מספרים הוא $x$ אז לפחות אחד המספרים שווה ל- $x$ או גדול ממנו.

1. בהינתן כי לאדם לכל היותר 100,000 שערות על הראש וכי בישראל יש 8,000,000 אנשים, הוכיחו כי יש בישראל לפחות שני אנשים עם אותה כמות שערות על ראשם.
הוכיחו כי בנוסף ישנם לפחות 80 אנשים שונים עם אותה כמות שערות על ראשם.

2. הוכיחו כי בבחירת 8 מספרים באופן אקראי, בהכרח קיימים שניים מתוכם שהפרשם מתחלק ב-7 ללא שארית. האם הטענה נכונה גם לגבי סכומם?

3. הוכיחו כי ישנה סדרה בינארית (שונה מאפס) שמתחלקת ב-17.

4. הוכיחו כי אם נפזר 10 כדורים בתוך ריבוע שאורך צלעו היא 3 אז בוודאות יהיו 2 נקודות שמרחקן אחת מהשנייה הוא לכל היותר הוא $\sqrt{2}$

## נוסחאות נסיגה

בעיות ספירה (קומבינטוריות) שונות נוח מאוד לתאר בעזרת נוסחת נסיגה.

נפתור את הבעיה בשני שלבים עיקריים:

1. תיאור הבעיה בצורה רקורסיבית.
2. מציאת נוסחה מפורשת עבור נוסחת הנסיגה.

### תיאור הבעיה בצורה רקורסיבית

<u>מטרה</u>: חישוב מספר קומבינציות, בדרך כלל באופן כללי עבור $n$ כלשהו.

<u>דרך</u>: נסמן ב- $a_n$ - <u>מספר הקומבינציות</u> לסידור (בדרך כלל – סדרה) באורך $n$.

נמצא תנאי התחלה, כלומר $a_1, a_2$ מספר הקומבינציות לסידור סדרות באורך 1,2 בהתאמה.

ונמצא את התלות של האיבר הבא בסדרה באיברים הקודמים לו.

### מציאת נוסחה מפורשת עבור נוסחת נסיגה

נוסחת נסיגה כללית:

$$a_n = c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} + \ldots c_1 a_1 + c_0 a_0$$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} = b_{n-1} \end{cases}$$

בדרך כלל נעסוק בנוסחת נסיגה מהצורה

$$a_{n+2} = c_{n+1}a_{n+1} + c_n a_n$$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

**<u>הגדרה</u>**: פולינום אופייני של נוסחת הנסיגה הנ"ל היא $P(r) = r^{n+2} - c_{n+1}r^{n+1} - c_n r^n$

**<u>הגדרה</u>**: המשוואה האופיינית של נוסחת הנסיגה הנ"ל היא

$$r^{n+2} - c_{n+1}r^{n+1} - c_n r^n = r^n\left(r^2 - c_{n+1}r - c_n\right) = 0$$

**<u>טענה</u>**: הנוסחה המפורשת עבור איבר כללי הנתון על ידי המערכת הנ"ל היא:

$$a_n = A\left(r_1\right)^n + B\left(r_2\right)^n$$

כעת נותר רק להציב תנאי התחלה, למציאת $A, B$ ולהציבם חזרה ולקבל את $a_n$ - שכאמור מתאר את <u>מספר הקומבינציות</u> באורך $n$.

ובאופן כללי יותר $a_n = A_1(r_1)^n + A_2(r_2)^n + \ldots + A_k(r_k)^n$

1. נתונה נוסחת נסיגה המוגדרת על ידי

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$
$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2$$

מצאו נוסחה לאיבר הכללי.

<u>פתרון:</u> $a_n = 2^{n-1}$

2. מצאו כמה סדרות באורך n ניתן לייצר מ- $a,b,c$ כך ש- $a,b$ מופיעות רק ברצף זוגי.

<u>פתרון:</u> $a_n = 2^n + (-1)^n$

3. מצאו כמה סדרות באורך n ניתן לייצר מ- $a,b,c$ כך ש- $a,b$ אינן מופיעות ברצף (גם ab אינו חוקי).

<u>פתרון:</u> $a_n = \frac{2^{n+2} - 2\cdot(-1)^n}{3}$

4. בונים גדר בגובה מטר ובאורך n מטרים משלושה סוגי לוחות עצים. לוח עץ ראשון – יחידה באורך מטר אחד בצבע חום. לוח שני – באורך 2 מטרים בצבע לבן וסוג שלישי – גם כן באורך 2 מטרים בצבע שחור. כל היחידות הן בגובה1 מטר אחד. מצאו נוסחה מפורשת עבור מספר הגדרות השונות באורך n שניתן לייצר.

<u>פתרון:</u> $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

5. רצף מעוניין לרצף שביל באורך 5 מטרים ורוחב מטר אחד בעזרת תשעה סוגים של מרצפות. הסוג הראשון הוא מרצפה בגווני פסטל באורך ורוחב של מטר אחד בארבעה צבעים שונים, והסוג השני הוא מרצפה באורך שני מטרים ורוחב של מטר אחד בגוון מט בחמישה צבעים שונים. בכמה דרכים הוא יכול לרצף שביל זה.

<u>פתרון:</u> 2,604

# פונקציות יוצרות

## הקדמה אלגברית

סכום של סדרה הנדסית אינסופית
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

ולכן גם
$$\frac{1}{1-x^n}=1+x^n+x^{2n}+x^{3n}+\ldots$$

סכום של סדרה הנדסית סופית
$$\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots x^{n-1}$$

בנוסף, בעזרת הבינום של ניוטון:

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

**מטרה**: חישוב מספר הקומבינציות האפשריות לתהליך מסוים.

**אמצעי**: פונקציה יוצרת המאפשרת תיאור פשוט למספר הקומבינציות בבעיה.

$$f(x)=\underbrace{\left(x^{a_0}+x^{a_1}+x^{a_2}+\ldots\right)}_{a}\underbrace{\left(x^{b_0}+x^{b_1}+x^{b_2}+\ldots\right)}_{b}\cdots\underbrace{\left(x^{k_0}+x^{k_1}+x^{k_2}+\ldots\right)}_{k}$$

כאשר $\left(x^{k_0}+x^{k_1}+x^{k_2}+\ldots\right)$ מתאר את האפשרויות השונות למשתנה $k$

תשובה סופית: את התשובה הסופית נקבל ממציאת המקדם של $x^n$ הרצוי.

**קושי עיקרי**: ההרכבה היא בדרך כלל פשוטה, הקושי הוא הפישוט האלגברי לפונקציה היוצרת.

1. מצאו את המקדם של $x^3$ בפיתוח הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ לטור

פתרון: $\binom{4}{3}$

2. מצאו את המקדם של $x^3$ בפיתוח הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(1-x^2)^6$ לטור

<u>פתרון</u>: $\binom{6}{1}\binom{3}{1}-\binom{6}{0}\binom{5}{3}$

3. מצאו את מספר הפתרונות $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=78$ מעל הטבעיים, כאשר $x_1$ הוא כפולה של 3, $0\le x_2\le 5$ , $0\le x_3\le 1$ ובנוסף $x_5$ הוא זוגי.

<u>פתרון</u>: $\binom{77}{75}+\binom{80}{78}$

4. בכמה דרכים ניתן לפזר 15 כדורים לבנים ו-32 שחורים ב- 7 תאים כך שבכל תא יהיו לכל היותר 5 כדורים לבנים ולכל הפחות 3 כדורים שחורים?

<u>פתרון</u>: $\binom{17}{11}\cdot\left(\binom{9}{3}\binom{7}{2}+\binom{15}{9}\binom{7}{1}-\binom{21}{15}\binom{7}{0}\right)$

# מבוא לתורת הגרפים

**<u>הגדרה</u>**: תהי $V$ קבוצה סופית לא ריקה $E\subseteq V\times V$ , הזוג $G=(V,E)$ נקרא גרף לא מכוון אם $E$ קבוצה של זוגות לא סדורים.

הזוג $G=(V,E)$ נקרא גרף מכוון אם $E$ קבוצה של זוגות סדורים.

כאשר - $V$ - קבוצה של קודקודים. $E$ - קבוצה של קשתות.

זוג בגרף לא מכוון מסומן $\{u,v\}$ , ובגרף מכוון $(u,v)$.

**<u>הגדרה</u>**: גרף נקרא מסדר $n$ אם מספר קודקודיו הוא $n$ .

**הגדרה**: נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. סדרה של קודקודים $\{v_0,\dots,v_k\}$ כך ש- $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$ לכל $1\le i\le k-1$ וכל הצלעות $\{v_i,v_{i+1}\}$ שונות זו מזו נקראת מסלול (מסילה). המסלול נקרא סגור או מעגל אם $v_0=v_k$

## הערות

1. מסלול יקרא פשוט אם כל קודקוד מופיע פעם אחת.
2. מסלול פשוט וסגור נקרא מעגל פשוט.
3. אורך מסלול הוא מספר צלעותיו.
4. מרחק בין שני קודקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם, ומסומן $d(u,v)$. אם אין מסלול בין שני קודקודים נגדיר $d(u,v)=\infty$.

**הגדרה**: דרגת קודקוד מסומנת ב-$\deg(v)$ והיא נקבעת על פי מספר הקודקודים אליו קודקוד זה מקושר באופן ישיר.

**משפט**: (משפט לחיצת ידיים) בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ מתקיים $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$

**הגדרה**: מסלול בגרף העובר בכל קשת ובדיוק פעם אחת בכל אחת נקרא מסלול אויילר

**הגדרה**: מסלול אויילר המתחיל ונגמר באותה נקודה נקרא מעגל אויילר

**משפט**: בגרף קיים מסלול אויילר אם ורק אם דרגת כל הקודקודים היא זוגית, או אם יש רק שני קודקודים שדרגתם אי-זוגית.

**משפט**: בגרף קיים מעגל אויילר אם ורק אם דרגת כל הקודקודים היא זוגית, כלומר לכל $v$ מתקיים $\deg(v)=2n$

**הגדרה**: גרף לא מכוון אשר כל קודקודיו מאותה דרגה נקרא גרף רגולרי. גרף אשר מקיים $\deg(v)=k$ לכל קודקוד, נקרא $k$-רגולרי.

## עצים

**הגדרה**: עץ הוא גרף קשיר שאין בו מעגלים. צומת בעץ נקרא עלה אם דרגתו היא 1.

**משפט**: יהי $G=(V,E)$ גרף. הטענות הבאות שקולות:

1. $G$ הוא עץ
2. בין כל 2 צמתים של $G$ יש מסלול יחיד.
3. $G$ הוא גרף קשיר מינימאלי (בהשמטה של קשת יתקבל גרף לא קשיר)
4. $G$ קשיר $|E|=|V|-1$
5. $G$ אינו מכיל מעגלים וכן $|E|=|V|-1$
6. $G$ אינו מכיל מעגלים וכל הוספת קשת בין צמתים בגרף תיצור מעגל.

## תרגילים

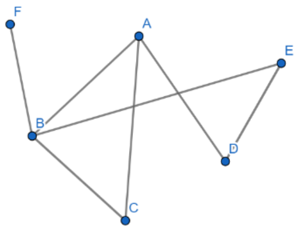
1. האם קיים גרף פשוט בן שבעה קודקודים שדרגותיהם הם 1,2,2,3,4,4,5

2. האם קיים גרף פשוט בן שבעה קודקודים שדרגותיהם הם 1,2,2,3,4,6,6

3. הוכיחו כי בכל גרף פשוט בעל $n \geq 2$ קודקודים, יש קודקודים שווי דרגה.

4. האם בגרף הבא קיים מסלול אויילר? האם קיים מעגל אויילר?

אם קיימים מסלול או מעגל אויילר, מהם? אם לא, מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף כדי לקיימם?

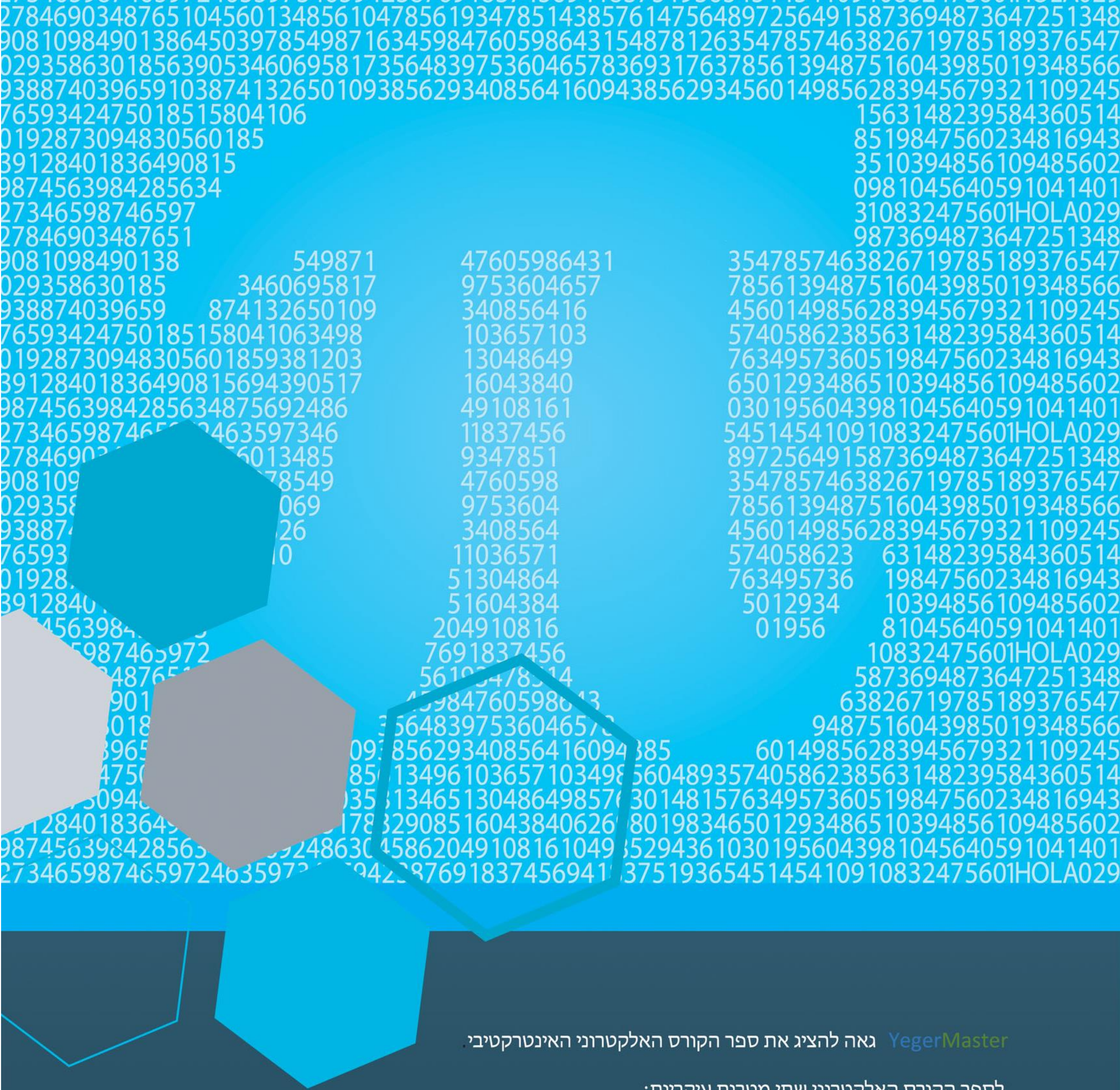



5. תהי $V=\{v_1,\ldots,v_9\}$, מהו מספר הגרפים הפשוטים מעל $V$?

<u>פתרון:</u> $2^{\binom{9}{2}}$

6. תהי $V=\{v_1,\ldots,v_9\}$, מהו מספר הגרפים הפשוטים מעל $V$ כך ש-$\deg(v_1)=3$ ?

<u>פתרון:</u> $2^{\binom{8}{2}}\cdot\binom{8}{3}$



YegerMaster גאה להציג את ספר הקורס האלקטרוני האינטרקטיבי.

לספר הקורס האלקטרוני שתי מטרות עיקריות:

1. תצוגה נוחה ואינפורמטיבית של חומר הקורס, המאפשר התמקדות טובה יותר בחומר. למידה ממוקדת יותר במהלך הסמסטר וחזרה איכותית יותר בלמידה לקראת המבחן.
2. שילוב של סרטוני הקורס באתר עם ספר ייעודי מאפשר לגשת לכל תרגיל בלחיצת כפתור פשוטה. לחיצה על האייקון שמופיע בתחילת כל תרגיל/ הגדרה מובילה לסרטון של אותו נושא.

בנוסף, הספר מאפשר לתלמידים הרוצים בכך את ההזדמנות להתמודד עם התרגילים לבד לפני הצפייה בסרטון. הפתרון המלא בסרטון מושקע וערוך מראש נמצא במרחק לחיצת כפתור .

שילוב הספר האלקטרוני בתהליך הלמידה משפר את קצב הלמידה, חוסך בזבוז זמן במעבר בין סרטונים בחיפוש אחר תרגילים רלוונטיים ועוזר להתמקד בצורה איכותית בלמידה אפקטיבית באופן שלא נראה כמותו עדיין.