המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב אפקה

בחינות – היחידה למתמטיקה

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון X

פתרון שאלה א1:

נשתמש בכלל L'Hôpital :

$$\lim_{x\to0^+} x^{\frac{6}{1+2\ln x}} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to0^+} e^{\ln x^{\frac{6}{1+2\ln x}}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{6}{1+2\ln x}\cdot\ln x} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{6\ln x}{1+2\ln x}\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{6\frac{1}{x}}{2\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{6x}{2x}} = e^3$$

פתרון שאלה ב1:

נסמן :

$$e^x = t$$
$$e^x dx = dt$$

לכן :

$$\int \frac{e^x}{30+e^x-e^{2x}}dx = \int \frac{dt}{30+t-t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{(6-t)(5+t)} = \frac{1}{11}\int\left(\frac{1}{5+t}+\frac{1}{6-t}\right)dt = \frac{1}{11}(\ln|5+t| - \ln|6-t|) + C$$

כלומר :

$$\int \frac{e^x}{30+e^x-e^{2x}}dx = \frac{1}{11}(\ln|5+e^x| - \ln|6-e^x|) + C$$

פתרון שאלה 2א:

נסמן $f(x)=4x\arctan(2x)-\ln(1+4x^2)$.

$$f'(x)=4\arctan(2x)+4x\cdot\frac{2}{1+(2x)^2}-\frac{8x}{1+4x^2}=4\arctan(2x)$$

(I) לכל $x>0$: $f'(x)=4\arctan(2x)>0$.

ולכן f עולה בקטע $[0,\infty)$.

ולכן לכל $x>0$ מתקיים $f(x)>f(0)$

$$f(0)=4\cdot0\cdot\arctan(0)-\ln(1)=0$$

ולכן לכל $x>0$ מתקיים $f(x)>0$.

(II) לכל $x<0$: $f'(x)=4\arctan(2x)<0$.

ולכן f יורדת בקטע $(-\infty,0]$.

ולכן לכל $x<0$ מתקיים $f(x)>f(0)=0$.

מכאן נובע שלכל x מתקיים:

$$f(x)=4x\arctan(2x)-\ln(1+4x^2)\ge0\quad\Rightarrow\quad 4x\arctan(2x)\ge\ln(1+4x^2)$$

פתרון שאלה 2ב:

נשים לב שכל מחובר ב- a_n הוא אי-שלילי. לכן, לכל $n\in\mathbf{N}$: $a_n\ge0$. בנוסף:

$$n\in\mathbf{N}:\quad 0\le a_n=\frac{\cos^2(n)}{\sqrt{9n^3+1}}+\frac{\cos^2(n-1)}{\sqrt{9n^3+2}}+\frac{\cos^2(n-2)}{\sqrt{9n^3+3}}+\cdots+\frac{\cos^2(1)}{\sqrt{9n^3+n}}\le$$

$$\underset{\forall x\in\mathbf{R}:\,-1\le\cos x\le1}{\le}\frac{1}{\sqrt{9n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{9n^3+2}}+\frac{1}{\sqrt{9n^3+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9n^3+n}}$$

$$\forall n\in\mathbf{N}:\quad \sqrt{9n^3+n}>\sqrt{9n^3+n-1}>\cdots>\sqrt{9n^3+2}\ge\sqrt{9n^3+1}>0$$

$$\Rightarrow\quad a_n<\frac{1}{\sqrt{9n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{9n^3+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9n^3+1}}=\frac{n}{\sqrt{9n^3+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{9n^3+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n\sqrt{9n+\frac{1}{n^2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{9n+\frac{1}{n^2}}}\right)="\frac{1}{\infty+0}"=0$$

בסה"כ:

$$\forall n\in\mathbf{N}:\quad 0<a_n=\frac{\cos^2(n)}{\sqrt{9n^3+1}}+\frac{\cos^2(n-1)}{\sqrt{9n^3+2}}+\frac{\cos^2(n-2)}{\sqrt{9n^3+3}}+\cdots+\frac{\cos^2(1)}{\sqrt{9n^3+n}}<\frac{n}{\sqrt{9n^3+1}}$$

ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{9n^3+1}}=0$$

לכן, לפי כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

<u>פתרון שאלה 3א:</u>

נמצא את פולינום Taylor-Maclaurin מסדר 2 של $f(x)=(1+2x)\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{\frac{3}{2}}$.

$$f(x)=(1+2x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}2(1+2x)^{\frac{1}{2}}=3(1+2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0)=3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}2(1+2x)^{-\frac{1}{2}}=3(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(0)=3$$

$$f'''(x)=-\frac{3}{2}2(1+2x)^{-\frac{3}{2}}=-3(1+2x)^{-\frac{3}{2}}$$

הפונקציה ונגזרותיה רציפות בקטע $1+2x>0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$ ובפרט רציפות בסביבת $x=0$.

לכן פולינום Taylor-Maclaurin מסדר 2 של $f(x)=(1+2x)^{\frac{3}{2}}$ שווה ל- $T_2(x)=1+3x+\frac{3}{2!}x^2=1+3x+1.5x^2$

להוכחת אי השוויון נשתמש בנוסחת השארית $R_2(x)$ בצורה של Lagrange:

$$f(x)=(1+2x)^{\frac{3}{2}}=T_2(x)+R_2(x)=\left(1+3x+1.5x^2\right)+\frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

$$\Rightarrow \left|(1+2x)^{\frac{3}{2}}-\left(1+3x+1.5x^2\right)\right|=\left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right|=\left|-\frac{3(1+2c)^{-\frac{3}{2}}}{6}x^3\right|=\frac{1}{2(1+2c)^{\frac{3}{2}}}x^3,\quad 0<c<x<\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left|(1+2x)^{\frac{3}{2}}-1-3x-1.5x^2\right|=\frac{1}{2(1+2c)^{\frac{3}{2}}}x^3\le\frac{1}{2}x^3\le\frac{1}{2\cdot 4^3}=\frac{1}{128}<0.01$$

<u>פתרון שאלה 3ב:</u>

נגדיר פונקציה רציפה וגזירה בקטע הנתון : $f(x)=\ln(1+x^2)-4x+5$.

מתקיים $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-4=\frac{2x-4-4x^2}{1+x^2}<0$.

הפונקציה f יורדת ממש ב- $\mathbf{R}$ ולכן למשוואה $f(x)=\ln(1+x^2)-4x+5=0$ <u>אין יותר</u> מפתרון אחד

(f יורדת ממש בקטע גורר ש- f חח״ע בקטע).

מצד שני $\left\{\begin{matrix} f(0)=5>0 \\ f(3)<0 \end{matrix}\right\}$ ולכן, לפי משפט ערך הביניים של Cauchy, קיים <u>לפחות</u> פתרון אחד.

מסיקים שלמשוואה $\ln(1+x^2)=4x-5$ יש פתרון יחיד בקטע $[0,3]$.

מ.ש.ל.

<u>פתרון שאלה 4א:</u>

נסמן $g(x)=f^2(x)-x^2$. מהנתון נובע ש- $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$ נקבל כי:
$g(a)=f^2(a)-a^2=f^2(b)-b^2=g(b)$. כמו כן, g היא פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b)
ומכאן, לפי משפט (Rolle) רול, נקבל שקיימת נקי' $c\in(a,b)$ כך ש-
$g'(c)=2f(c)f'(c)-2c=0$.
כלומר, קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)f'(c)=c$ ומכאן למשוואה $f(x)f'(x)=x$ קיים לפחות
פתרון אחד בקטע (a,b) כנדרש.

<u>פתרון שאלה 4ב:</u>

נסתכל על $h(x)=f(x)-x$.
זו פונקציה רציפה ב- $[0,1]$ בתור הפרש של פונקציות רציפות. מתקיים:

$$\begin{cases} h(0)=f(0)-0=f(0)>0 \\ h(1)=f(1)-1<1-1=0 \end{cases}$$

לכן לפי משפט ערך הביניים של Cauchy קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש-
$f(c)=c \Leftarrow f(c)-c=h(c)=0$ ■

<u>פתרון שאלה 5א:</u>

לפי הגרף הנתון, מסיקים ש-

$$\begin{cases} x<0 \Rightarrow f'(x)>0, \\ x>0 \Rightarrow f'(x)<0, \\ x=0 \Rightarrow f'(x)=0. \end{cases}$$

לכן, לפי מבחן הנגזרת הראשונה, f עולה בקטע $(-\infty,0)$ ו- f יורדת בקטע $(0,\infty)$.

מסיקים שאין נקודות מינימום ושיש נקודת מקסימום מוחלט יחידה
ב- $x=0$ ו- -2 $M=f(0)=-2$ מהווה מקסימום מוחלט של f, ז"א $f(x)\le -2$ לכל x ממשי.

נובע שלמשוואה $f(x)=0$ אין פתרונות.

<u>פתרון שאלה 5ב:</u>

הסדרה הנתונה שווה ל- $4-\frac{1}{2^n}=4-\frac{2^n}{4^n}=\frac{4^{n+1}-2^n}{4^n}=a_n$.

יהי $\varepsilon>0$. מתקיים $\frac{1}{2^n}=\left|-\frac{1}{2^n}\right|=\left|4-\frac{1}{2^n}-4\right|=|a_n-4|$.

לכן $|a_n-4|<\varepsilon$ אם ורק אם $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$, ז"א $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$. נסמן $N_\varepsilon=\log_2\frac{1}{\varepsilon}$

<u>מסקנה</u>: אם $n>N_\varepsilon$ אז $|a_n-4|<\varepsilon$, ז"א בדקנו ש- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$ לפי הגדרת הגבול של סדרה.

בנוסף, לאי-שיוויון $|a_n-3.5|<0.01$ יש <u>מספר סופי</u> של פתרונות מפני שכל איברי הסדרה a_n, פרט למספר סופי של איברים, נמצאים בקטע $|x-4|<0.1$.

יותר מדויק, האי-שיוויון $|a_n-3.5|<0.01$ מתקיים אם ורק אם $|a_n-3.5|=\left|4-\frac{1}{2^n}-3.5\right|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}<0.01$

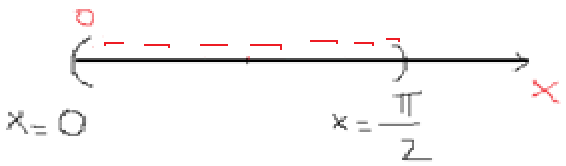
וזה נכון רק עבור $n=1$.

<u>פתרון שאלה 6א:</u>

הפונקציה $f(t)=\frac{\arccos t}{t^4+1}$ רציפה בקטע $[-1,1]$ כאלמנטרית שמוגדרת בקטע, לכן היא רציפה בקטע הסגור בעל קצוות 0 ו- $\cos x$, לכל x. $g(x)=\cos x$ היא גזירה לכל x. ואז F גזירה לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ על פי משפט היסודי המוכלל ומתקיים:

$$F'(x)=\frac{\arccos(\cos x)}{\cos^4 x\ +1}(-\sin x)=\frac{-x\sin x}{\cos^4 x\ +1}$$

סימן הנגזרת בקטע : לכל $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים : $\sin x$ חיובי או אפס ($\sin 0=0$) לכן סימן הנגזרת :



לכן הפונקציה F יורדת בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ואז המקסימום המוחלט מתקבל עבור $x=0$ והמינימום המוחלט מתקבל עבור $x=\frac{\pi}{2}$.

הערך של המינימום המוחלט הוא : $\displaystyle F(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0}\frac{\arccos t}{t^4+1}dt=0$.

<u>פתרון שאלה 6ב:</u>

בנקודה $x=\frac{\pi}{4}$ מתקיים: $\sin x=\cos x$. בנוסף:

$$\begin{cases}0\le x<\pi/4\Rightarrow\cos x\ge\sin x,\\ \pi/4<x<\pi/2\Rightarrow\sin x\ge\cos x\end{cases}$$

לכן השטח המבוקש מורכב משני שטחים: S_1,S_2 .

$$S_1+S_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-0-1-0-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}-2=2\sqrt{2}-2$$

בהצלחה!