

תרגיל בית 16 – קומבינטוריקה בסיסית

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. בכיתה יש 12 תלמידים.
 - (א) מה מספר האפשרויות לחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות בנות 3 תלמידים כל אחת?
 - (ב) מה מספר האפשרויות לחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות בנות 3 תלמידים כך שבכל קבוצה יש ראש קבוצה?
 - (ג) מה מספר האפשרויות לחלק את תלמידי הכיתה לקבוצות כך שבכל קבוצה יש לפחות 4 תלמידים?
2. כמה סידורים שונים יש ל 9 כדורים כאשר מתוכם 4 אדומים זהים, 3 ירוקים זהים ו- 2 כחולים זהים?
 - (א) כיתבו תחילה שני סידורים שונים כאלו. הסבירו מה המשמעות ש- 4 הכדורים האדומים הם זהים מבחינת ספירת מספר האפשרויות לסידור הכדורים.
 - (ב) כמה אפשרויות יש?
 - (ג) רישמו נוסחא כללית עבור הבעיה הבאה: מהו מספר האפשרויות לסדר בשורה n עצמים אשר מחולקים ל- l סוגים שונים (כלומר, יש k_1 עצמים זהים מסוג 1, k_2 עצמים זהים מסוג 2, ..., k_l עצמים זהים מסוג l)?
3. מחלקים n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים בצבעים שונים ל- $2n$ תאים שונים. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים ענו על שאלה: כמה אפשרויות יש לחלק את הכדורים לתאים כך ש-"
 - (א) בכל תא יש לכל היותר כדור אחד.
 - (ב) בכל תא יש לכל היותר כדור לבן אחד.
 - (ג) בכל תא יש לכל היותר כדור צבעוני אחד.
 - (ד) בכל תא יש מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים.
4. לפו הדב שמונה חברים. בכל ערב הוא מזמין בדיוק 4 חברים לארוחת ערב. בכמה דרכים פו יכול להזמין את חבריו לסעודה במשך שבוע?
5. כמה מספרים בין 1000 ל- 9999 כולל מכילים את שתי הספרות 0 ו- 2 לפחות פעם אחת? (למשל, 1101 לא בספירה ואילו 1202 כן).
6. נתונה קבוצה של $3n$ ילדים בגילאי 6, 7, 8. אם ישנם n ילדים בכל אחד מהגילאים מהו מספר האפשרויות לסדרם בשורה, כך שלא יהיו בני 8 סמוכים זה לזה?
7. נתונה קבוצה של $2n$ כדורים ממוספרים. מה מספר האפשרויות לסדרם בשורה כך שלא יהיו שני כדורים סמוכים בעלי אותה זוגיות?
8. מהו מספר האפשרויות לצבוע n שולחנות בשלושת הצבעים אדום, כחול וירוק?
9. בכמה דרכים ניתן לחלק 10 אנשים ל- 5 זוגות שונים?
10. סוכן נוסע צריך לבקר ב- 4 ערים שונות כאשר בכל עיר הוא צריך לבקר 5 פעמים. בכמה דרכים הוא יכול לעשות זאת אם אסור לו להתחיל ולסיים באותה העיר?
11. בכמה מספרים שש-ספרתיים זוגיים הספרה 2 מופיעה בדיוק פעמיים כאשר ייתר הספרות שונות זו מזו? העזרו בהדרכה הבאה:
 - (א) כמה מספרים 6 ספרתיים כאלו יש כאשר הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובסוף?
 - (ב) כמה מספרים 6 ספרתיים כאלו יש כאשר הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובאמצע?

- (ג) זהו את שני המצבים האפשריים הנוספים וכיתבו כמה מספרים יש בכל אחד מהמצבים שמצאתם.
- (ד) ענו על השאלה: (:
12. בכמה דרכים ניתן לחלק 10 כדורים צבעוניים שונים ו- 10 כדורים לבנים זהים ל- 6 תאים, כך שבכל תא יהיה מספר שווה של כדורים לבנים וכדורים צבעוניים?
- 13.
- (א) כמה יש סידורים שונים של האותיות המופיעות במילה *MISSISSIPPI* ?
- (ב) כמה סידורים שונים כאלו יש כאשר חייב להופיע הרצף *PP*?
- (ג) כמה סידורים כאלו יש בהם לא מופיע הרצף *SS*?
14. נתונים n אחדים ו- m אפסים. הוכיחו כי מספר הסדרות האפשריות של $m + n$ האפסים והאחדים בהן אין שני אחדים צמודים הוא $\binom{m+1}{n}$.
15. בקופסא יש: 4 קוביות בצבעים אדום, ירוק כחול ולבן. 3 כדורים בצבע כחול ירוק וצהוב. 10 חישוקים בצבע לבן. מה מספר האפשרויות לבחירת פריטים מתוך המגירה כאשר דורשים שמספר הפריטים יהיה:
- (א) 10
- (ב) 5
- (ג) 3