תרגיל בית 14 – עוצמת הממשיים, שיטת האלכסון של קנטור ומשפט קש"ב

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. **הרציונלים כקבוצה בת מנייה** כבר ראינו כי המספרים הרציונלים הם בני מנייה. בתרגיל זה נבחן מספר פונקציות נוספות ונשתמש במשפט קש"ב על מנת למצוא הוכחות נוספות.

   (א) הראו תחילה כי $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$.

   (ב) נחשוב על קבוצת הרציונליים באופן הבא:

   $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \; | a \in \mathbb{Z}, \, 0 \neq b \in \mathbb{N}, \, \gcd(a,b) = 1 \right\}$$

   הכוונה כאן היא שנחשוב על המונה כעל מספר שלם, על המכנה כמספר טבעי שונה מאפס, והשבר הוא שבר מצומצם) זו הכוונה ב $\gcd(a,b) = 1$.)

   i. מצאו פונקציה חח"ע

   $$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$$

   ii. הסבירו למה $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{Z}|$.

   (ג) על סמך הסעיפים הקודמים ושאלות קודמות הסיקו כי $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

   (ד) דרך נוספת להראות כי המספרים הרציונלים הם בני מנייה היא להשתמש בפונקציה הבאה:

   $$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$$
   $$g\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} 2^b 3^a & a \geq 0 \\ 2^b 5^a & a < 0 \end{cases}$$

   ודאו כי הפונקציה g היא חח"ע. הפונקציה g היא פונקציה שימושית במיוחד ורצוי ממש שתבינו אותה ואת השימוש בה.

2. בתרגיל זה תוכיחו ב – 3 דרכים שונות כי $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. ראניו כבר חלק מהדרכים, אולם כאן המקום להשוות בין שלושתן ולבחור את העדיפה עליכם.

   (א) **לפי הגדרה** מיצאו פונקציה חח"ע ועל

   $$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

   הוכיחו שהפונקציה שמצאתם אכן חח"ע ועל.

   (ב) **איחוד בן מנייה** הוכיחו כי ניתן לכתוב את $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כאיחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה.

   (ג) **קש"ב** מצאו שתי פונקציות חח"ע

   $$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
   $$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

   הוכיחו שהפונקציות שמצאתם אכן חח"ע.

   (ד) איזו דרך עדיפה עליכם? מה הדרך הכי פחות עדיפה? האם תוכלו לחשוב על דרך נוספת?

3. **קטעים בישר הממשי**

(א) הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|(a,\infty)| = |(0,1)| = \aleph$

(ב) הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|[a,\infty)| = |[0,1)| = \aleph$

(ג) הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $|(-\infty,a)| = |(0,1)| = \aleph$

4. **עוצמת המישור הממשי** בתרגיל זה תוכיחו כי $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \aleph$.

(א) מצאו פונקציה חח"ע $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. השתמשו בפונקציה הפשוטה ביותר שעולה על דעתכם והראו כי היא חח"ע.

(ב) כעת, נתבונן בפונקציה

$$g : (0,1) \times (0,1) \longrightarrow (0,1)$$
$$g\left(0.x_1x_2x_3...,0.y_1y_2y_3...\right) = 0.x_1y_1x_2y_2....$$

הוכיחו כי הפונקציה g היא חח"ע.

(ג) כיתבו הוכחה מלאה לטענה $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$.

(ד) חשבו את העוצמה של $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

(ה) חשבו את העוצמה של המספרים המרוכבים $|\mathbb{C}|$.