פתרון מועד X

שאלה 1: תהא הפונקציה: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+3}}{5^n}$.

א. חשבו תחום ההתכנסות של $f(x)$.

ב. חשבו את $f'(2)$.

פתרון:

א. נחשב ר"ה עפ"י נוסחת קושי: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{5^n}}=\frac{1}{5}\Rightarrow R=5$ אם כן הטור מתכנס בהחלט ב: $(-4,6)$.

בשני הקצוות: האיבר הכללי של הטור אינו שואף לאפס כלומר לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות. לכן בסה"כ תחום ההתכנסות הוא: $(-4,6)$.

ב. בתחום ההתכנסות ניתן לגזור איבר איבר:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{5^n}(x-1)^{n+2}\Rightarrow f'(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5^n}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n} .$$

נכתוב: $S\left(\frac{1}{5}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ באשר: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ ונחשב:

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\frac{x}{(1-x)^2} .$$

בסה"כ: $f'(2)=\frac{1/5}{(4/5)^2}+\frac{3}{4/5}=\frac{5}{16}+\frac{15}{4}=\frac{65}{16}$.

<u>דרך אחרת</u>: נרשום: $f(x)=(x-1)^3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{5}\right)^n=(x-1)^3\frac{1}{1-\frac{x-1}{5}}=\frac{5(x-1)^3}{6-x}$ ונקבל אם כן:

$$f'(x)=\left(\frac{5(x-1)^3}{6-x}\right)'=\frac{15(x-1)^2(6-x)+5(x-1)^3}{(6-x)^2}=5(x-1)^2\frac{3(6-x)+(x-1)}{(6-x)^2}=5(x-1)^2\frac{17-2x}{(6-x)^2}$$

ומכאן: $f'(2)=5\cdot\frac{13}{16}=\frac{65}{16}$.

שאלה 2: תהא הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. האם $f(x,y)$ רציפה ב-$(0,0)$?

ב. האם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$?

פתרון:

א. ניעזר בכלל הסנדוויץ' כדי להראות נבדוק שגבול הפונקציה בראשית הוא אפס, וזו הרציפות שם:

$$0\le\left|\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{2x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{2x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{2x^2}\right|+\left|\frac{y^3}{y^2}\right|=\frac{|x|}{2}+|y|\xrightarrow[y\to0]{x\to0}0$$

ב. נחשב נ"ח בראשית: $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{2h^2}-0}{h}=\frac{1}{2},\ f_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=1$. מכאן נקבל:

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\frac{\frac{\Delta x^3+\Delta y^3}{2\Delta x^2+\Delta y^2}-\frac{\Delta x}{2}-\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\frac{\Delta x^3+\Delta y^3-\Delta x^3-\frac{\Delta x\Delta y^2}{2}-2\Delta x^2\Delta y-\Delta y^3}{2\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=-\frac{\Delta x\Delta y\left(\frac{\Delta y}{2}+2\Delta x\right)}{\left(2\Delta x^2+\Delta y^2\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

לפונקציה הזו אין גבול בראשית: למשל עבור: $\Delta x=\Delta y$ נקבל שהגבול הוא $-\frac{\frac{5}{2}\Delta x^3}{3\sqrt{2}\Delta x^3}=-\frac{5}{3\sqrt{2}}$ בעוד שעבור $\Delta x=-\frac{\Delta y}{4}$ הגבול הוא אפס, לכן $f(x,y)$ אינה דיפרנציאבילית בראשית.

שאלה 3: סווגו נקודות קריטיות של הפונקציה: $f(x,y,z)=x^3-2x^2+y^2+z^2-2xy+xz-yz+3z$.

האם בין הנקודות שמצאתם יש נקודת קיצון מוחלטת של f ב-$\mathbb{R}^3$? נמקו!

פתרון:

נרשום את המשוואות לנקודת קיצון קריטית: $\begin{cases} f_x=3x^2-4x-2y+z=0 \\ f_y=2y-2x-z=0 \\ f_z=2z+x-y+3=0 \end{cases}$ ונקבל אחרי פישוט:

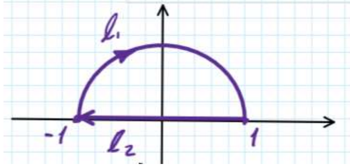
$\begin{cases} x(x-2)=0 \\ y=x-1 \\ z=2y-2x \end{cases}$ שתי נקודות קריטיות: $\begin{matrix} A(0,-1,-2) \\ B(2,1,-2) \end{matrix}$. ההסיאן באופן כללי הוא: $Hf=\begin{pmatrix} 6x-4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

ובנקודות הקריטיות: $Hf_B=\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $Hf_A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. מכאן עפ"י קריטריון סילבסטר A היא נק' אוכף בעוד ש B היא נק' מינימום מקומי. לא תיתכן נקודת קיצון מוחלטת של f ב-$\mathbb{R}^3$ שכן החזקה (הטוטאלית) הגדולה ביותר של f היא אי-זוגית לכן לא יתכנו חסם מלעיל וחסם מלרע לערכי הפונקציה.

שאלה 4: נתון השדה: $F(x,y)=\left(\frac{2x(2-e^y)}{(1+x^2)^2},\frac{e^y}{1+x^2}+3x\right)$. חשבו את העבודה הנצרכת להעברת חלקיק מהנקודה $(-1,0)$ עד לנקודה $(1,0)$ כאשר המסלול הוא החלק העליון של המעגל: $x^2+y^2=1$.

פתרון:

המסלול הנתון אותו נסמן ב-l_1 הוא פתוח. נסגור אותו ע"י הקטע l_2 על ציר ה- x מ-$(1,0)$ עד ל-$(-1,0)$.



נחשב את העבודה לאורך מסלול סגור l_1+l_2 ונחסיר את העבודה לאורך מסלול l_1.

$$W=\int_{l_1}F\cdot dr=\oint_{l_1+l_2}F\cdot dr-\int_{l_2}F\cdot dr$$

נחשב את האינטגרל הבא: $\oint_{l_1+l_2}F\cdot dr$. העקומה היא סגורה וחלקה למקוטעין.

לפונקציות השדה קיימות נגזרות חלקיות מסדר ראשון בתחום D.

ניעזר במשפט גרין: $W=\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$: $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3 \quad \Leftarrow$

$$\begin{cases}\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2x\cdot e^y}{\left(1+x^2\right)^2}+3\\ \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2x\cdot e^y}{\left(1+x^2\right)^2}\end{cases}$$

כיוון התנועה הוא עם השעון: $\oint_{l_1+l_2} F\cdot dr=-\iint_D 3dxdy=-3\iint_D dxdy=-3|D|$

התחום D הוא חצי עיגול עם רדיוס 1. שטח שווה: $\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi}{2} \quad \Leftarrow \quad \oint_{l_1+l_2} F\cdot dr=-\frac{3\pi}{2}$

נחשב איטגרל קווי מסוג השני: $\int_{l_2} F\cdot dr$: משוואת המסלול היא: $y=0$. פרמטריזציה של המסלול:

$$r(t)=(-t,0) \quad \Rightarrow \quad r'(t)=(-1,0): -1\le t\le 1$$

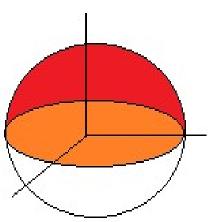
$$\int_{l_2} F\cdot dr=\int_{-1}^{1} F(t)\cdot r'(t)dt=\int_{-1}^{1}\left(P(t),Q(t)\right)\cdot(-1,0)dt=\int_{-1}^{1} P(t)dt, \quad P(t)=\frac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$\int_{l_2} F\cdot dr=\int_{-1}^{1}\frac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$. האינטגרל של פונקציה אי-זוגית בתחום סימטרי מתאפס: $\int_{l_2} F\cdot dr=0$.

לסיכום: $W=\int_{l_1} F\cdot dr=\oint_{l_1+l_2} F\cdot dr-\int_{l_2} F\cdot dr=-\frac{3\pi}{2}-0=-\frac{3\pi}{2}$.

שאלה 5: חשבו את שטף השדה $\left(e^{x^2+y+z},-2xe^{x^2+y+z},z+3\right)$ דרך החצי העליון של הספירה $x^2+y^2+z^2=4$ עם נורמל כלפי חוץ (המשטח אינו סגור !)

פתרון:



כדי להיעזר במשפט גאוס נסגור את המשטח ע"י הוספת הבסיס S_1 במישור $z=0$.

נשים לב כי: $div(F)=1$ לכן:

$$\oiint_{\partial V} F\cdot\hat{n}\,dS=\underbrace{\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS}_{\Phi}+\iint_{S_1} F\cdot\hat{n}\,dS \overset{Gauss}{=} \iiint_V div(F)dV=|V|$$

כלומר: $\Phi=\iiint_V dV-\iint_{S_1}(*,*,3)\cdot(0,0,-1)dS=|V|+3|S_1|=\frac{1}{2}\frac{4\pi\cdot 2^3}{3}+3\cdot\pi\cdot 2^2=\frac{52}{3}\pi$.