פונקציות שימושיות

גרפים ותכונות

פונקציה ליניארית

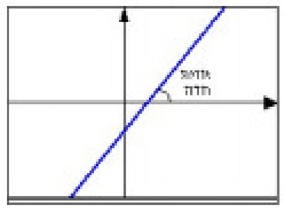
פונקציה שניתן להציג אותה בצורה $f(x)=m\cdot x+n$, כאשר m ו- n הם פרמטרים, נקראת **פונקציה ליניארית (פונקציה קווית)**.

הגרף של פונקציה ליניארית הוא קו ישר.

בפונקציה $f(x)=mx+n$ **המקדם m** נקרא **השיפוע** של גרף הפונקציה הליניארית.

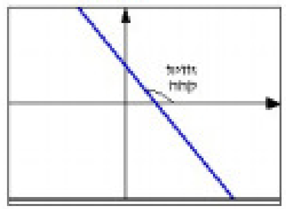
השיפוע m מציג את אופי הפונקציה (עולה או יורדת) ואת קצב ההשתנות שלה : ככל שערכו המוחלט של השיפוע גדול יותר, **קצב ההשתנות** של הפונקציה גדול יותר.

$m>0$



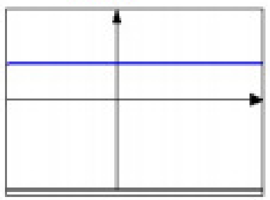
הקו הישר יוצר זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה –X.

$m<0$



הקו הישר יוצר זווית קהה עם הכיוון החיובי של ציר ה –X.

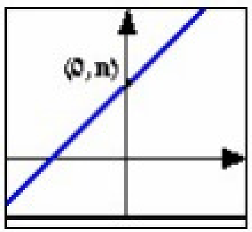
$m=0$



הקו הישר מקביל לציר ה –X.

בפונקציה $f(x)=mx+n$ **המקדם n** מגדיר את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- Y.

כל קו ישר במערכת צירים שאינו מקביל לציר ה - Y, מוגדר על ידי פונקציה ליניארית $f(x)= m\cdot x+n$, כאשר m הוא שיפוע הקו הישר ו -n הוא שיעור y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- Y.

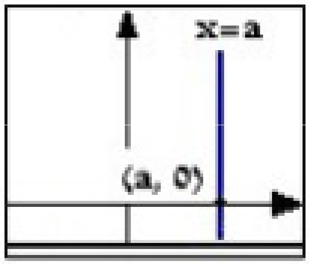


פונקציה ליניארית (המשך)

- **הערה חשובה:**

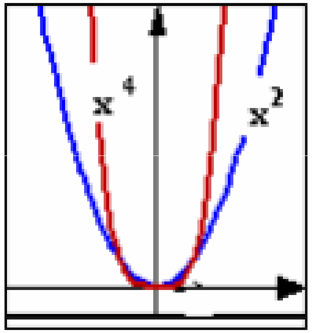
קו ישר המקביל לציר ה- Y אפשר לתאר על ידי משוואה מהצורה $x=a$ (כאשר a הוא פרמטר), והוא אינו פונקציה ליניארית (כי לאותו ערך של x מתאימים ערכים רבים של y).

הגרף אינו מתאר פונקציה:

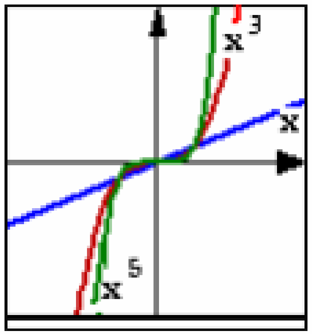


פונקציות חזקה

פונקצית החזקה היא פונקציה מהצורה $f(x)=x^n$, כאשר n הוא מספר טבעי קבוע.
צורת הגרף והמאפיינים של פונקציית חזקה תלויים בחזקה n.
קיימים שני מקרים:



1. אם n הוא מספר **זוגי**, הפונקציה $f(x)=x^n$ היא פונקציה זוגית והטווח שלה הוא $[0, \infty)$. כל ערכי הפונקציה הם מספרים לא שליליים.
   לכל פונקציה מהסוג הזה יש מינימום בנקודה $(0, 0)$.
   גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה-Y.

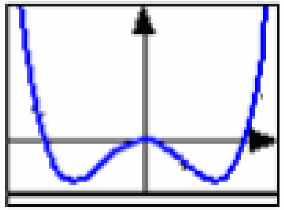


2. אם n הוא מספר אי-זוגי, הפונקציה $f(x)=x^n$ היא פונקציה אי- זוגית והטווח שלה הוא $(-\infty, \infty)$. הפונקציה מקבלת את כל הערכים הממשיים.
   כל פונקציה מהסוג זה עולה מונוטונית בכל התחום.
   גרף הפונקציה הוא בעל סימטריה סיבובית ביחס לראשית הצירים.

פונקציות פולינום

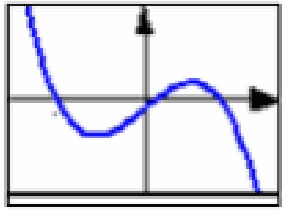
פונקציית פולינום היא פונקציה מהצורה
$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ כאשר $a_0, a_1,\ldots a_n$ הם מספרים כלשהם.
תחום ההגדרה של כל פונקציות הפולינום הוא כל המספרים הממשיים: $(-\infty, \infty)$.
הטווח של פונקציית פולינום ממעלה זוגי הוא אינטרוול אינסופי חצי פתוח: $[a, \infty)$ או $(-\infty, b]$.
הטווח של פונקציית פולינום ממעלה אי-זוגי הוא קבוצה של כל המספרים הממשיים: $(-\infty, \infty)$.
כל פונקציית פולינום היא **רציפה** בכל התחום.
לפולינום ממעלה n יכולות להיות לכל היותר $(n-1)$ **נקודות קיצון** (נקודות מקסימום או מינימום).
לגרף של פונקציית פולינום אין אסימפטוטות.
לחקירת פונקציית הפולינום נוח להשתמש בנגזרת.

להלן **דוגמאות של שלוש פונקציות פולינום**:



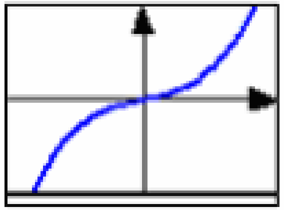
x^4-5x^2

שלוש נקודות קיצון
הטווח מוגבל מצד אחד



$6x-x^3-2$

שתי נקודות קיצון
הטווח אינסופי משני הצדדים



x^3+2x

אין נקודות קיצון
הטווח אינסופי משני הצדדים

פונקציות מנה

פונקציית מנה (פונקציה רציונאלית) היא פונקציה מהצורה $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ כאשר $p(x)$ ו- $q(x)$ הם פולינומים.

תחום ההגדרה של פונקציית מנה הוא כל המספרים הממשיים חוץ ממספרים שמאפסים את המכנה $q(x)$.

כל נקודות האפס של המכנה הן גם **נקודות אי-רציפות** של פונקציית המנה. במקרה כזה הגרף של פונקציית המנה מורכב מכמה ענפים.

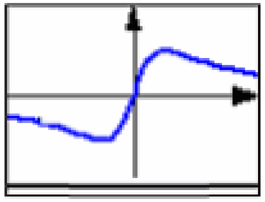
בכל נקודת אפס של המכנה שהמונה בה שונה מאפס, לגרף פונקציית המנה יש **אסימפטוטה אנכית**.

אם מעלת המונה קטנה או שווה למעלת המכנה, לגרף הפונקציה יש גם **אסימפטוטה אופקית**.

אם מעלת המונה גדולה באחד ממעלת המכנה, לגרף הפונקציה יש גם **אסימפטוטה משופעת**.

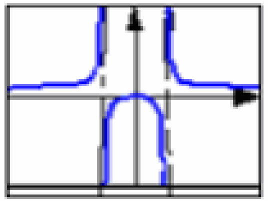
לחקירת פונקציה המנה יש להשתמש בנגזרת ובאסימפטוטות.

להלן **שלוש דוגמאות של פונקציית מנה**:



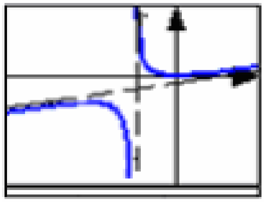
$\frac{x}{x^2+1}$

אסימפטוטה אופקית-ציר X
פונקציה רצופה
טווח מוגבל



$\frac{x^2}{x^2-1}$

שתי אסימפטוטות אנכיות
טווח אינסופי משני הצדדים
שלושה ענפים



$\frac{x^2}{x^2+2}$

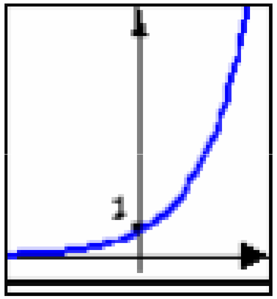
אסימפטוטה אחת אנכית
ואחת משופעת
טווח אינסופי משני הצדדים
שני ענפים

פונקציה מעריכית

פונקציה מעריכית היא פונקציה מהצורה $f(x) = a^x$, כאשר a הוא מספר חיובי השונה מ-1.

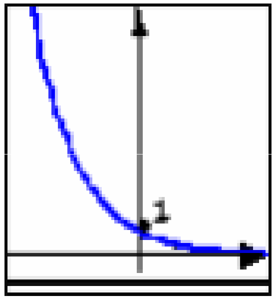
הגרף של כל פונקציה מעריכית
עובר דרך הנקודה $(0, 1)$.
אם $a>1$, הפונקציה a^x עולה
מונוטונית בכל התחום.
אם $a<1$, הפונקציה a^x יורדת
מונוטונית בכל התחום.

a>1



הפונקציה עולה

a<1



הפונקציה יורדת

תחום ההגדרה של כל הפונקציות המעריכיות הוא כל המספרים הממשיים : $(-\infty, \infty)$.
טווח הפונקציות המעריכיות הוא כל המספרים החיובים : $(0, \infty)$.

פונקציה לוגריתמית

הפונקציה הלוגריתמית היא פונקציה מהצורה $f(x) = \log_a x$, כאשר הבסיס a הוא מספר חיובי השונה מ-1.

הפונקציה $\log_a x$ היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה המעריכית a^x.

תחום ההגדרה של כל הפונקציות הלוגריתמיות הוא כל המספרים החיוביים: $(0, \infty)$.

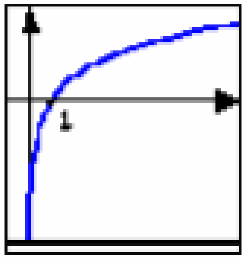
הטווח של כל הפונקציות הלוגריתמיות הוא כל המספרים הממשיים: $(-\infty, \infty)$.

הגרפים של כל הפונקציות הלוגריתמיות עוברים דרך הנקודה $(1, 0)$.

אם a>1, הפונקציה $\log_a x$ עולה מונוטונית בכל התחום.

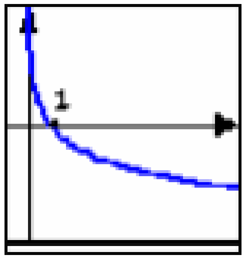
אם a<1, הפונקציה $\log_a x$ יורדת מונוטונית בכל התחום.

a>1



הפונקציה עולה

a<1

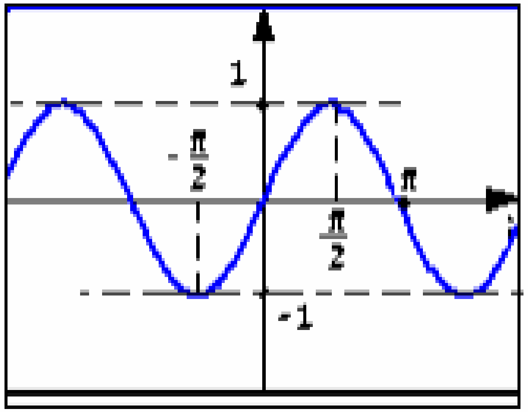


הפונקציה יורדת

פונקציות טריגונומטריות

הפונקציה f(x)=sin x

תחום הפונקציה: כל המספרים הממשיים $(-\infty, \infty)$.
טווח הפונקציה: $[-1, 1]$. לכל ערכי x, $-1 \le \sin x \le 1$.
פונקציה אי זוגית: $\sin(-x)=-\sin x$ לכל ערכי x. גרף הפונקציה הוא בעל סימטרייה סיבובית ביחס לראשית הצירים.
פונקציה מחזורית בעלת מחזור יסודי של 2π: $\sin(x+2\pi)=\sin x$ לכל ערכי x.
נקודות אפס: לפונקציה יש אינסוף נקודות אפס ששיעוריהן $x=\pi n$, כאשר n הוא מספר שלם.
תחומי חיוביות: $[2\pi n, \pi(2n+1)]$, כאשר n מספר שלם.
תחומי שליליות: $[\pi(2n-1), 2\pi n]$, כאשר n מספר שלם.
נקודות מקסימום: $(\frac{\pi}{2}+2\pi n, 1)$, כאשר n מספר שלם.
נקודות מינימום: $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, -1)$, כאשר n מספר שלם.
תחומי עלייה: $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.
תחומי ירידה: $(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.



גרף הפונקציה f(x)=sin x

פונקציות טריגונומטריות (המשך)

הפונקציה f(x)=cos x

תחום הפונקציה: כל המספרים הממשיים $(-\infty, \infty)$.

טווח הפונקציה: $[-1, 1]$. לכל ערכי x , $-1\le\cos x\le 1$.

פונקציה זוגית: $\cos(-x)=\cos x$ לכל ערכי x . גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה-Y.

פונקציה מחזורית בעלת מחזור יסודי של 2π : $\cos(x+2\pi)=\cos x$ לכל ערכי x.

נקודות אפס: לפונקציה יש אינסוף נקודות אפס ששיעוריהן $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, כאשר n מספר שלם.

תחומי חיוביות: $(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.

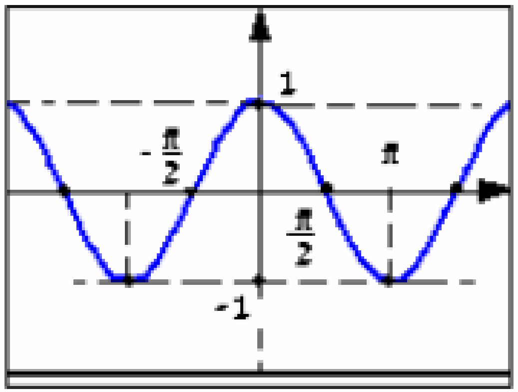
תחומי שליליות: $(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.

נקודות מקסימום: $(2\pi n, 1)$, כאשר n מספר שלם.

נקודות מינימום: $(\pi(2n-1), -1)$, כאשר n מספר שלם.

תחומי עלייה: $[\pi(2n-1), 2\pi n]$, כאשר n מספר שלם.

תחומי ירידה: $[2\pi n, \pi(2n+1)]$, כאשר n מספר שלם.



גרף הפונקציה f(x)=cos x

פונקציות טריגונומטריות (המשך)

<u>הפונקציה f(x)=tan x</u>

תחום הפונקציה: כל המספרים הממשיים חוץ ממספרים מהצורה $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

טווח הפונקציה: $(-\infty, \infty)$.

פונקציה אי זוגית: $\tan(-x)=-\tan x$ לכל ערכי x. גרף הפונקציה סימטרי ביחס לראשית הצירים.

פונקציה מחזורית בעלת מחזור יסודי של π: $\tan(x+\pi)=\tan x$ לכל ערכי x.

נקודות אפס: לפונקציה יש אינסוף נקודות אפס ששיעוריהן $x=\pi n$, כאשר n מספר שלם.

תחומי חיוביות: $(\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n)$, כאשר n מספר שלם.

תחומי שליליות: $(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n)$, כאשר n מספר שלם.

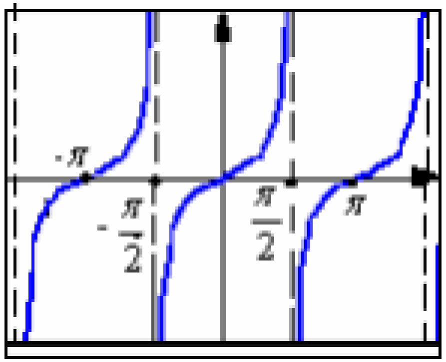
לפונקציה אין נקודות מקסימום או מינימום.

פונקציה רציפה בכל תחום $(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n)$,

כאשר n מספר שלם.

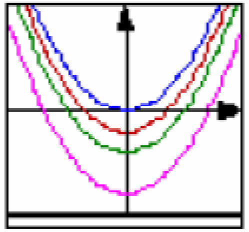
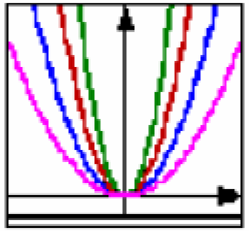
פונקציה עולה בכל תחום $(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n)$,

כאשר n מספר שלם.



גרף הפונקציה f(x)=tan x

משפחות של פונקציות

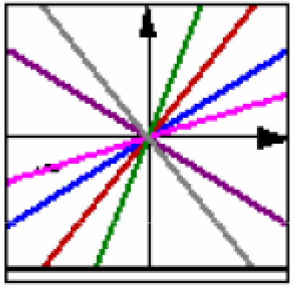
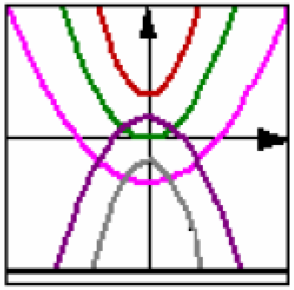
הגדרות ותיאורים	דוגמאות
אוסף של פונקציות בעלות תכונה משותפת כלשהי נקרא משפחה של פונקציות. אחת הדרכים ליצור **משפחה של פונקציות היא ביצוע שינויים גרפיים** (הזזות, מתיחות, וכדומה) על הגרף של פונקציה מסוימת.	המשפחה התקבלה על ידי הזזה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$.  המשפחה התקבלה על ידי מתיחה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$. 
אפשר להגדיר משפחה של פונקציות על ידי **התכונה המשותפת לכל הפונקציות במשפחה.**	1. משפחה של פונקציות זוגיות. 2. משפחה של פונקציות עולות בתחום [0, 1]. 3. משפחה של פונקציות ליניאריות העוברות דרך הנקודה (1, 1).

משפחות של פונקציות(המשך)

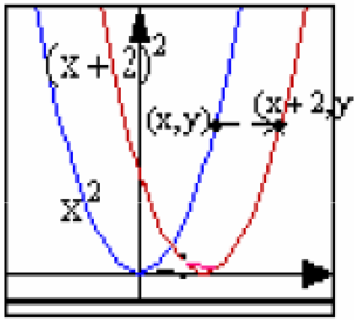
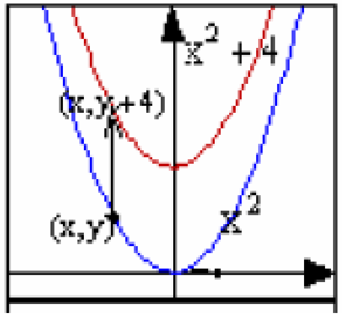
בייצוג אלגברי של משפחה של פונקציות מופיעים פרמטר אחד או כמה פרמטרים. לייצוג כזה קוראים ייצוג פרמטרי של המשפחה.

1. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=mx-2n$ (m ו-n הם שני פרמטרים.
לדוגמה, הפונקציות $f(x)=4x-6$, $f(x)=-3x-26$ שייכות למשפחה.
כל הפונקציות במשפחה הן פונקציות קוויות.
2. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=\begin{cases} ax, x \geq 2 \\ a-x, x<2 \end{cases}$
(a הוא פרמטר).
לדוגמה, הפונקציה $f(x)=\begin{cases} -2x, x \geq 2 \\ -2-x, x<2 \end{cases}$ שייכת למשפחה.
3. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $g(x)=ax^2+bx+c$
(באמצעות שלושה פרמטרים a, b ו-c).
לדוגמה, הפונקציות $f(x)=x^2-1$, $f(x)=-x^2+3x+4$ שייכות למשפחה.

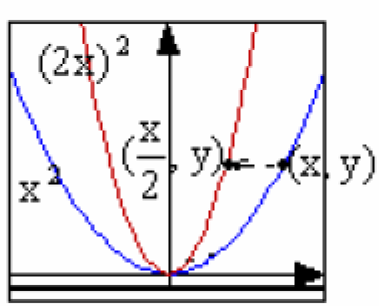
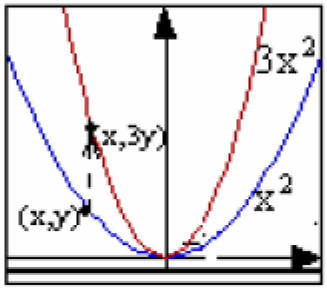
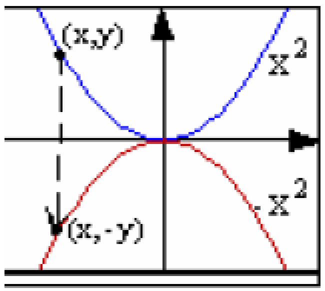
משפחות של פונקציות(המשך)

תכונות המשפחה	ייצוג גרפי		ייצוג פרמטרי
ערכי הפונקציות פרופורציוניים לערכי המשתנה הבלתי-תלוי: כל פונקציה f השייכת למשפחה מקיימת: $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1}{x_2}$		המשפחה התקבלה על ידי סיבוב גרף הפונקציה $f(x)=x$ סביב ראשית הצירים.	$f(x)=kx$ k - פרמטר
משפחת כל הפונקציות הריבועיות הזוגיות.		המשפחה התקבלה על ידי מתיחה והזזה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$.	$g(x)=ax^2+b$ a ו-b - פרמטרים

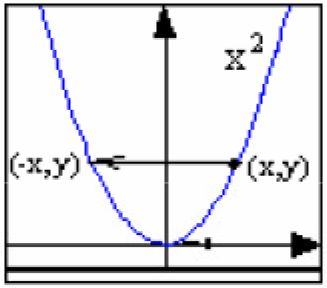
שינויים בגרף/ שינויים בביטוי אלגברי

טרנספורמציות של הגרף	שינוי הביטוי האלגברי	דוגמאות	
הזזה אופקית ב -a יחידות	$f(x-a)$	על ידי הזזה של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ב-2 יחידות ימינה על הציר האופקי, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=(x-2)^2$.	
הזזה אנכית ב -a יחידות	$f(x)+a$	על ידי הזזה של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ב-4 יחידות מעלה על הציר האנכי, מקבלים את הגרף של הפונקציה $h(x)=x^2+4$.	

שינויים בגרף/ שינויים בביטוי אלגברי

מתיחה אופקית בגורם מתיחה k.	$f(\frac{x}{k})$	על ידי מתיחה אופקית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בגורם $\frac{1}{2}$, מקבלים את הגרף של הפונקציה $h(x)=(2x)^2$	
מתיחה אנכית בגורם מתיחה k.	$k\cdot f(x)$	על ידי מתיחה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בגורם 3, מקבלים את ה גרף של הפונקציה $g(x)=3x^2$.	
שיקוף בציר ה-X	$-f(x)$	על ידי שיקוף גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בציר ה- X, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=-x^2$.	

שינויים בגרף/ שינויים בביטוי אלגברי

טרנספורמציות של הגרף	שינוי הביטוי האלגברי	דוגמאות	
שיקוף בציר ה-Y	$f(-x)$	על ידי שיקוף גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ בציר ה-Y, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=(-x)^2$. מאחר ש $(-x)^2=x^2$, מתקבל גרף זהה לגרף של $f(x)=x^2$.	
שיקוף בראשית הצירים	$-f(-x)$	על ידי שיקוף גרף הפונקציה $f(x)=x^2-2x+2$ בראשית הצירים, מקבלים את הגרף של הפונקציה $g(x)=-[(-x)^2-2(-x)+2]$.