יונתן כהן
חדו״א 2
תרגול מספר 13

אינטגרל משטחי מסוג ראשון, שני
משפט Gauss

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

.1

לחשב את מסת המשטח σ הנחתך מחצי הגליל $y^2+z^2=4\ ,\ z\ge 0$ ע"י המישורים $x=10\ ,\ x=0$,
כאשר צפיפות המסה ליחידת שטח נתונה ע"י $\rho(x,y,z)=xz$.

מסת המשטח σ נתונה ע"י

$$\text{mass}(\sigma)=\iint_\sigma \rho(x,y,z)dS=\iint_\sigma xzdS$$

החצי העליון של הגליל מתואר ע"י

$$y^2+z^2=4\ ,\ z\ge 0 \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{4-y^2}$$

כלומר זהו הגרף של הפונקציה

$$z=\varphi(x,y)=\sqrt{4-y^2}$$

המשטח σ הוא החלק של הגרף שמעל המלבן

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 10\ ,\ -2\le y\le 2\}$$

ולכן פרמטריזציה למשטח σ נתונה ע"י

$$z=\varphi(x,y)=\sqrt{4-y^2}$$
$$\vec{r}(x,y)=(x,y,\sqrt{4-y^2})$$

ותחום הפרמטריזציה הוא המלבן

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 10\ ,\ -2\le y\le 2\}$$

וקטור נורמל למשטח נתון ע"י

$$\vec{N}=(\varphi_x,\varphi_y,-1)=\left(0,-\frac{2y}{2\sqrt{4-y^2}},-1\right)=\left(0,-\frac{y}{\sqrt{4-y^2}},-1\right)$$

והנורמה שלו נתונה ע"י

$$\left\|\vec{N}\right\|=\sqrt{\varphi_x{}^2+\varphi_y{}^2+1}=\sqrt{0^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{y^2}{4-y^2}+1}=\sqrt{\frac{4}{4-y^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}$$

ולכן

$$\text{mass}(\sigma)=\iint_\sigma xzdS=\iint_D x\sqrt{4-y^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dA=\iint_D 2xdA=$$

נפתור את האינטגרל הכפול.
התחום D הוא המלבן

$$0\le x\le 10\ ,\ -2\le y\le 2$$

ולכן

$$=\int_{x=0}^{10}dx\int_{y=-2}^{2}2xdy=\int_{x=0}^{10}2x\cdot(2-(-2))dx=\int_{x=0}^{10}8xdx=4x^2\Big|_{x=0}^{10}=400-0=400$$

.2

לחשב את שטח המשטח σ הנתון ע״י $z \ge 1$, $z = 1 + a^2 - x^2 - y^2$, a פרמטר חיובי.

שטח המשטח σ נתון ע״י

$$\text{area}(\sigma) = \iint_\sigma 1 dS$$

$z = 1 + a^2 - x^2 - y^2$ זהו פרבולואיד שקודקודו בנקודה $(0,0,1+a^2)$ הוא ׳נפתח כלפי מטה׳.

החיתוך של הפרובלואיד עם המישור $z = 1$ הוא

$$\begin{cases} z = 1 + a^2 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 + a^2 - x^2 - y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2$$

זהו מעגל במישור xy שמרכזו הראשית ורדיוסו a .

ולכן ההיטל של המשטח σ למישור xy הוא העיגול

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$$

המשטח σ הוא ׳מעל׳ העיגול D במישור xy , הוא החלק של גרף הפונקציה

$$z = \varphi(x,y) = 1 + a^2 - x^2 - y^2$$

שמעל העיגול D .

ולכן פרמטריזציה למשטח σ נתונה ע״י

$$z = \varphi(x,y) = 1 + a^2 - x^2 - y^2$$

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1 + a^2 - x^2 - y^2)$$

ותחום הפרמטריזציה הוא העיגול

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$$

וקטור נורמל למשטח נתון ע״י

$$\vec{N} = (\varphi_x, \varphi_y, -1) = (-2x, -2y, -1)$$

והנורמה שלו נתונה ע״י

$$\left\|\vec{N}\right\| = \sqrt{{\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 + 1} = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}$$

ולכן

$$\text{area}(\sigma) = \iint_\sigma 1 dS = \iint_D 1 \cdot \sqrt{4(x^2+y^2)+1} dA =$$

נפתור את האינטגרל הכפול.

תחום האינטגרציה D הוא עיגול שמרכזו הראשית ולכן נוח לפתור אינטגרל זה בקואורדינטות פולריות.

איפיון התחום D בקואורדינטות פולריות: $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

ולכן

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{a} \sqrt{4r^2+1} \cdot \underbrace{r}_{J} dr = \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_{r=0}^{a} \sqrt{4r^2+1} r dr = 2\pi \cdot \int_{r=0}^{a} \sqrt{4r^2+1} r dr =$$

ע״י החלפת משתנה

$$u = 1 + 4r^2$$

$$du = 8rdr \quad \Rightarrow \quad rdr = \tfrac{1}{8} du$$

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1$$

$$r = a \quad \Rightarrow \quad u = 1 + 4a^2$$

נקבל

$$= 2\pi \cdot \int_{u=1}^{1+4a^2} \sqrt{u} \frac{1}{8} du = \frac{\pi}{4} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{u=1}^{1+4a^2} = \frac{\pi}{6}\left((1+4a^2)^{3/2} - 1\right)$$

אינטגרל משטחי מסוג שני

.1

לחשב שטף השדה $\vec{F} = xe^y \sin z\hat{i} + yz\hat{j} + z^2\hat{k}$ דרך המשטח σ הנחתך מחצי הגליל $y^2 + z^2 = 4\,,\, z \ge 0$ ע״י המישורים $x = 0\,,\, x = 10$ עם כוון כלפי חוץ מציר x.

שטף השדה $\vec{F}$ דרך המשטח σ נתון ע״י

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

החצי העליון של הגליל מתואר ע״י

$$y^2 + z^2 = 4\,,\, z \ge 0 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{4 - y^2}$$

כלומר זהו הגרף של הפונקציה

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{4 - y^2}$$

המשטח σ הוא החלק של הגרף שמעל המלבן

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 10\,,\, -2 \le y \le 2\}$$

ולכן פרמטריזציה למשטח σ נתונה ע״י

$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{4 - y^2}$$

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{4 - y^2})$$

ותחום הפרמטריזציה הוא המלבן

$$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 10\,,\, -2 \le y \le 2\}$$

הכוון של הנורמל למשטח הוא בכוון כלפי חוץ מציר x, כלומר 'כלפי מעלה' (עם רכיב z חיובי).
ולכן וקטור נורמל למשטח נתון ע״י

$$\vec{N} = (-\varphi_x, -\varphi_y, 1) = \left(0, \frac{2y}{2\sqrt{4 - y^2}}, 1\right) = \left(0, \frac{y}{\sqrt{4 - y^2}}, 1\right)$$

ולכן

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D} \vec{F}(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \vec{N} dA =$$

$$= \iint_{D} \left(xe^y \sin\sqrt{4 - y^2}, y\sqrt{4 - y^2}, (\sqrt{4 - y^2})^2\right) \cdot \left(0, \frac{y}{\sqrt{4 - y^2}}, 1\right) dA =$$

$$= \iint_{D} \left(y^2 + (4 - y^2)\right) dA = \iint_{D} 4dA = 4\iint_{D} 1dA = 4 \cdot \text{area}(D) = 4 \cdot 10 \cdot 4 = 160$$

.2

לחשב שטף השדה $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ דרך המשטח σ המוגדר ע"י $z \ge 2$, $z = 3 - x^2 - y^2$ עם כוון כלפי מעלה.

שטף השדה $\vec{F}$ דרך המשטח σ נתון ע"י

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$z = 3 - x^2 - y^2$ זהו פרבולואיד שקודקודו בנקודה $(0,0,3)$ הוא 'נפתח כלפי מטה'.

החיתוך של הפרובלואיד עם המישור $z = 2$ הוא

$$\begin{cases} z = 3 - x^2 - y^2 \\ z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3 - x^2 - y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

זהו מעגל במישור xy שמרכזו הראשית ורדיוסו 1.

ולכן ההיטל של המשטח σ למישור xy הוא העיגול

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

המשטח σ הוא 'מעלי' העיגול D במישור xy, הוא החלק של גרף הפונקציה

$$z = \varphi(x, y) = 3 - x^2 - y^2$$

שמעל העיגול D.

ולכן פרמטריזציה למשטח σ נתונה ע"י

$$z = \varphi(x, y) = 3 - x^2 - y^2$$

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 3 - x^2 - y^2)$$

ותחום הפרמטריזציה הוא העיגול

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

הכוון של הנורמל למשטח הוא 'כלפי מעלה' (עם רכיב z חיובי).

ולכן וקטור נורמל למשטח נתון ע"י

$$\vec{N} = (-\varphi_x, -\varphi_y, 1) = (2x, 2y, 1)$$

ולכן

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D} \vec{F}(x, y, \varphi(x, y)) \cdot \vec{N} dA = \iint_{D} (y, x, 3 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dA =$$

$$= \iint_{D} (4xy + 3 - x^2 - y^2) dA =$$

נפתור את האינטגרל הכפול.

תחום האינטגרציה D הוא עיגול שמרכזו הראשית ולכן נוח לפתור אינטגרל זה בקואורדינטות פולריות.

איפיון התחום D בקואורדינטות פולריות: $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

ולכן

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} (4 \cdot r\cos\theta \cdot r\sin\theta + 3 - r^2) \cdot \underbrace{r}_{J} \, dr = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} (2r^3 \sin 2\theta + 3r - r^3) dr =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left. \frac{1}{2} r^4 \sin 2\theta + \frac{3}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right|_{r=0}^{1} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{5}{4} \right) d\theta =$$

$$= -\frac{\cos 2\theta}{4} + \left. \frac{5}{4}\theta \right|_{\theta=0}^{2\pi} = -\frac{\cos 4\pi - \cos 0}{4} + \frac{5}{4}(2\pi - 0) = \frac{5}{2}\pi$$

משפט Gauss

.1

לחשב שטף השדה $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ דרך המשטח σ המוגדר ע"י $z \ge 2$, $z = 3 - x^2 - y^2$ עם כוון כלפי מעלה.

$z = 3 - x^2 - y^2$ זהו פרבולואיד שקודקודו בנקודה $(0,0,3)$ הוא 'נפתח כלפי מטה'.
החיתוך של הפרובלואיד עם המישור $z = 2$ הוא

$$\begin{cases} z = 3 - x^2 - y^2 \\ z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3 - x^2 - y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

המשטח σ הוא החלק של הפרבולואיד $z = 3 - x^2 - y^2$ שמעל המישור $z = 2$.
זהו משטח שאינו סגור.

נגדיר משטח σ_0 , זהו הדיסקה העגולה $z = 2$, $x^2 + y^2 \le 1$ (העיגול $x^2 + y^2 \le 1$ המוכל במישור $z = 2$).

נבחר למשטח σ_0 את הכוון כלפי מטה.

נגדיר משטח $\sigma_* = \sigma + \sigma_0$. אז σ_* הוא משטח סגור וחלק למקוטעין.

הכוון הנתון במשטח σ הוא כלפי מעלה וזה 'כלפי חוץ' מהמשטח הסגור σ_* .

הכוון שבחרנו במשטח σ_0 הוא כלפי מטה וזה 'כלפי חוץ' מהמשטח הסגור σ_* .

ולכן הכוון של המשטח הסגור σ_* הוא 'כלפי חוץ'.

נסמן ב G את התחום הכלוא בתוך המשטח הסגור σ_* , ולכן השפה של G עם הכוון החיובי במובן משפט Gauss היא σ_* .

רכיבי השדה $\vec{F}$ הם בעלי נגזרות חלקיות רציפות, המשטח σ_* הוא משטח סגור וחלק למקוטעין עם הכוון החיובי במובן משפט Gauss, ולכן מתקיימות דרישות משפט Gauss, מתקיים

$$\iint_{\sigma_*} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dV$$

נחשב $\operatorname{div} \vec{F}$:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 0 + 1 = 1$$

כלומר

$$\iint_{\sigma_*} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_G 1 dV$$

נחשב את האינטגרל המשולש בקואורדינטות גליליות.
היטל הגוף G למישור xy הוא העיגול

$$D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$$

המאופיין בקואורדינטות גליליות ע"י

$$0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le 1$$

הגוף G הוא 'מעל' ההיטל D , מוגבל 'מלמטה' ע"י המישור $z = 2$, ומלמעלה ע"י הפרבולאיד $z = 3 - x^2 - y^2$.

לסיכום, איפיון הגוף G בקואורדינטות גליליות הוא

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le r \le 1$$
$$2 \le z \le 3 - r^2$$

ולכן

$$\iint_{\sigma_*} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_G 1dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{1} dr \int_{z=2}^{3-r^2} 1\cdot \underbrace{r}_{J}\, dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} 1d\theta \cdot \int_{r=0}^{1} dr \int_{z=2}^{3-r^2} rdz = 2\pi\cdot \int_{r=0}^{1} r\cdot(3-r^2-2)dr =$$

$$= 2\pi\cdot \int_{r=0}^{1} (r-r^3)dr = 2\pi\left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_{r=0}^{1} = 2\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

כעת יש לחשב השטף דרך המשטח σ_0.

המשטח σ_0 מונח בתוך המישור $z=2$ כלומר בגרף הפונקציה $z=\varphi(x,y)=2$, ולכן פרמטריזציה של המשטח:

$$\vec{r}(x,y) = (x,y,\varphi(x,y)) = (x,y,2)$$

תחום הפרמטריזציה הזו הוא ההיטל של המשטח σ_0 למישור xy. σ_0 הוא הדיסקה העגולה $x^2+y^2\le 1$, $z=2$ ולכן היטלה למישור xy הוא

$$D = \{(x,y)\,|\, x^2+y^2\le 1\}$$

וקטור ניצב למשטח (לא מנורמל) בכוון כלפי מטה נתון ע"י

$$\vec{N} = (\varphi_x,\varphi_y,-1) = (0,0,-1)$$

ולכן השטף דרך המשטח σ_0 הוא

$$\iint_{\sigma_0} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(x,y,\varphi(x,y))\cdot \vec{N}dA = \iint_D (y,x,2)\cdot(0,0,-1)dA = \iint_D (-2)dA = -2\iint_D 1dA =$$
$$= -2\,\mathrm{area}(D) = -2\cdot\pi\cdot 1^2 = -2\pi$$

(מכיוון ש D הוא עיגול בעל רדיוס 1).

ולכן $\sigma_* = \sigma + \sigma_0$

$$\iint_{\sigma_*} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\sigma} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{\sigma_0} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad \iint_{\sigma} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\sigma_*} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{\sigma_0} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2} - (-2\pi) = \frac{5}{2}\pi$$

.2

לחשב שטף השדה $\vec{F}=3xy^2\hat{i}-(y^3+x)\hat{j}+2z\hat{k}$ דרך המשטח σ שהוא החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$ עם נורמל "פנימה" לחרוט, כלומר "כלפי מעלה" (עם רכיב z חיובי).

המשטח הנתון σ אינו סגור – זהו חרוט "פתוח למעלה". נסגור אותו ע"י משטח σ_0 שהינו דיסקה עגולה בגובה $z=1$, ואז $\sigma_*=\sigma+\sigma_0$ משטח סגור. חיתוך החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ עם המישור $z=1$ הוא המעגל $z=1$, $x^2+y^2=1$ ולכן המשטח הסוגר σ_0 הוא הדיסקה העגולה $z=1$, $x^2+y^2\le 1$.

הכוון המוגדר במשטח σ הוא "כלפי מעלה", ולכן כאשר נחשוב על המשטח הסגור $\sigma_*=\sigma+\sigma_0$ הנורמל הוא כלפי פנים המשטח הסגור, ולכן גם ב σ_0 הנורמל צריך להיות כלפי הפנים של המשטח הסגור σ_* , כלומר הנורמל במשטח σ_0 צריך להיות כלפי מטה.

כעת המשטח הסגור $\sigma_*=\sigma+\sigma_0$ הוא בעל נורמל כלפי פנים. נסמן ב G את התחום הכלוא בתוך המשטח הסגור σ_* , ולכן השפה של G עם הכוון הנכון במובן משפט Gauss היא $-\sigma_*$.

רכיבי השדה $\vec{F}$ הם בעלי נגזרות חלקיות רציפות, המשטח σ_* הוא משטח סגור וחלק למקוטעין ולכן מתקיימות דרישות משפט Gauss, מתקיים

$$\iint\limits_{-\sigma_*}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint\limits_{G}\operatorname{div}\vec{F}dV \quad\Rightarrow\quad -\iint\limits_{\sigma_*}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iiint\limits_{G}\operatorname{div}\vec{F}dV \quad\Rightarrow\quad \iint\limits_{\sigma_*}\vec{F}\cdot d\vec{S}=-\iiint\limits_{G}\operatorname{div}\vec{F}dV$$

נחשב $\operatorname{div}\vec{F}$:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(-y^3-x)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=3y^2-3y^2+2=2$$

התחום G : זהו הגוף הכלוא בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ לבין המישור $z=1$, ולכן נקודות בגוף G מקיימות $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ ולכן גם $x^2+y^2\le 1$, כלומר ההיטל של התחום G למישור xy הוא $x^2+y^2\le 1$. לסיכום

$$G=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1\,,\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$$

נוח לחשב האינטגרל בקואורדינטות גליליות. ההיטל למישור xy הוא $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$ והתחום G הוא

$$G=\{(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,|\,0\le\theta\le 2\pi\;,\;0\le r\le 1\;,\;r\le z\le 1\}$$

או

$$G=\{(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,|\,0\le\theta\le 2\pi\;,\;0\le z\le 1\;,\;0\le r\le z\}$$

חישוב השטף דרך המשטח הסגור σ_* :

$$\iint\limits_{\sigma_*}\vec{F}\cdot d\vec{S}=-\iiint\limits_{G}\operatorname{div}\vec{F}dV=-\iiint\limits_{G}2dV=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 2\cdot r dz=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\,2rz\Big|_r^1=$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 2r(1-r)dr=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2r-2r^2)dr=-\int_0^{2\pi}d\theta(r^2-\frac{2}{3}r^3)\Big|_0^1=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta=-\frac{1}{3}\cdot 2\pi=-\frac{2}{3}\pi$$

לחלופין, מכיוון ש G הוא חרוט בעל רדיוס 1 וגובה 1 (נפח חרוט בעל רדיוס r וגובה h הוא $\frac{1}{3}\pi r^2 h$):

$$\iint\limits_{\sigma_*}\vec{F}\cdot d\vec{S}=-\iiint\limits_{G}\operatorname{div}\vec{F}dV=-\iiint\limits_{G}2dV=-2\iiint\limits_{G}1dV=-2\,\mathrm{volume}(G)=-2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1=-\frac{2}{3}\pi$$

כעת יש לחשב השטף דרך המשטח σ_0 .

המשטח σ_0 מונח בתוך המישור $z=1$ כלומר בגרף הפונקציה $z=\varphi(x,y)=1$, ולכן פרמטריזציה של המשטח

$\vec{r}(x,y)=(x,y,\varphi(x,y))=(x,y,1)$

תחום הפרמטריזציה הזו הוא ההיטל של המשטח σ_0 למישור xy . σ_0 הוא הדיסקה העגולה $x^2+y^2\le 1$, $z=1$ ולכן היטלה למישור xy הוא

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$$

וקטור ניצב למשטח (לא מנורמל) נתון ע"י $\pm(\varphi_x,\varphi_y,-1)$. במקרה שלנו הנורמל ל σ_0 הוא כלפי מטה ולכן

$$\vec{N}=(\varphi_x,\varphi_y,-1)=(0,0,-1)$$

ולכן השטף הוא

$$\iint_{\sigma_0}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D\vec{F}(x,y,\varphi(x,y))\cdot\vec{N}dA=\iint_D(3xy^2,-y^3-x,2\cdot 1)\cdot(0,0,-1)dA=\iint_D(-2)dA$$

מכיוון ש D הוא עיגול בעל רדיוס 1

$$\iint_{\sigma_0}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D(-2)dA=-2\iint_D 1dA=-2\,\mathrm{area}(D)=-2\cdot\pi\cdot 1^2=-2\pi$$

$\sigma_*=\sigma+\sigma_0$ ולכן

$$\iint_{\sigma_*}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{\sigma}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{\sigma_0}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow\quad\iint_{\sigma}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_{\sigma_*}\vec{F}\cdot d\vec{S}-\iint_{\sigma_0}\vec{F}\cdot d\vec{S}=-\frac{2}{3}\pi-(-2\pi)=\frac{4}{3}\pi$$