מבחן באלגברה לינארית שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. **(20 נקודות)** נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ x + y + bz = -1 \\ x + y + 2bz = -2 \end{cases}$$

א. (8 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטרים הממשיים a, b עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (אין צורך לפתור את המערכת).

ב. (7 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות עבור $a = 1, b = 2$.

ג. (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a, b וקטור העמודה $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ היא פתרון של המערכת.

שאלה 2. **(20 נקודות)** אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש־$D = P^{-1}AP$ (אין צורך למצוא את P, D).

ב. (6 נקודות) תהי A מטריצה מסדר 3×3 כך ש־

(i) $\mathrm{rank}(A + I) = 2$

(ii) $|A - 2I| = 0$

(iii) ל־A יש שלושה ערכים עצמיים שונים, שסכומם 1.

הוכיחו כי A לא הפיכה, ומצאו את הדרגה שלה.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (10 נקודות) עבור ההעתקה הלינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, ועבור הבסיס $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ של $\mathbb{R}^3$ המטריצה המייצגת היא

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}3&a&0\\2&3&5\\3&a&b\end{pmatrix}$$

כאשר a,b פרמטרים ממשיים. נסמן $v=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.

(i) (5 נקודות) מצאו את $[v]_B$, כלומר את וקטור הקואורדינטות של הוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ לפי הבסיס B.

(ii) (5 נקודות) מצאו את הערכים של a,b עבורם $v\in\mathrm{Ker}T$.

ב. (10 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ו־ $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס של V. נתונה ההעתקה הלינארית $T:V\to V$ המקיימת

$$T(v_1)=v_1+v_2,\quad T(v_2)=v_1-v_2$$

קבעו האם T הפיכה.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) יהי V מרחב עם מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$, ו־ $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס **אורתוגונלי** של V. תהי $T:V\to\mathbb{R}$ העתקה לינארית. נסמן

$$a_1=\frac{T(v_1)}{\langle v_1,v_1\rangle},\quad a_2=\frac{T(v_2)}{\langle v_2,v_2\rangle}$$

ונגדיר $u=a_1v_1+a_2v_2$.

(i) (5 נקודות) עבור איברי הבסיס B חשבו את $\langle v_1,u\rangle,\ \langle v_2,u\rangle$, והראו כי

$$T(v_1)=\langle v_1,u\rangle, T(v_2)=\langle v_2,u\rangle.$$

(ii) (5 נקודות) הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים כי $T(v)=\langle v,u\rangle$.

ב. (10 נקודות) במרחב המטריצות הממשיות $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ תהי $\langle A,B\rangle=\mathrm{trace}(A^TB)$ מכפלה פנימית.

(i) (5 נקודות) מצאו ערך של הפרמטר $\alpha\in\mathbb{R}$ עבורו הקבוצה $S=\left\{I,\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&\alpha\\\alpha&1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה אורתוגונלית

(ii) (5 נקודות) עבור הערך שמצאתם בסעיף הקודם השלימו את הקבוצה S לבסיס אורתוגונלי של V.

שאלה 5. (20 **נקודות**) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ בסיס של V.
נסמן $w_1 = v_1 + 2v_2 + 3v_3,\ w_2 = 2v_1 - v_2 - v_3,\ w_3 = 5v_1 + v_3$.

א. (5 נקודות) מצאו את הקואורדינטות של w_1, w_2, w_3 לפי הבסיס B.

ב. (5 נקודות) הראו כי הקבוצה $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ תלויה לינארית.

ג. (5 נקודות) מצאו בסיס של $U = \text{Span}\,\{w_1, w_2, w_3\}$.

ד. (5 נקודות) תנו דוגמה לוקטור $v \in V$ שמקיים כי $v \notin U$.

שאלה 6. (20 **נקודות**) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} a_1x + a_4y + a_7z = 0 \\ a_2x + a_5y + a_8z = 0 \\ a_3x + a_6y + a_9z = 0 \end{cases}$$

מצאו כמה פתרונות יש למערכת המשוואות כאשר

(i) (5 נקודות) a_n סדרה חשבונית (כלומר קיים d כך ש $a_n = a_1 + (n-1)d$).

(ii) (5 נקודות) a_n סדרה הנדסית (כלומר קיים q כך ש-$a_n = a_1 q^{n-1}$).

ב. (10 נקודות) תהיינה $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שתי מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$.

(i) (5 נקודות) הוכיחו שאם A אנטיסימטרית, וn אי זוגי, אזי A לא הפיכה.

(ii) (5 נקודות) הוכיחו שאם $AB = -2BA$ אזי A לא הפיכה או B לא הפיכה.

בהצלחה

מבחן באלגברה לינארית שאלון Y

שאלה 1. (20 **נקודות**) נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} ax & + & y & & & = & 0 \\ x & + & y & + & bz & = & -1 \\ x & + & y & + & 2bz & = & -2 \end{cases}$$

א. (8 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטרים הממשיים a,b עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (אין צורך לפתור את המערכת).

פתרון כדי לחשב מתי למטריצה יש פתרון יחיד נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת של המערכת

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 2b \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 2b \end{vmatrix} = (a-1)b$$

קיבלנו שהדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת היא $b(a-1)$, ולכן כאשר $b\neq 0, a\neq 1$ המטריצה היא הפיכה למערכת יש פתרון יחיד. נבדוק מה קורה בשאר המקרים:

(i) כאשר $b=0$ נקבל כי המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה ולכן למערכת אין פתרונות במקרה זה.

(ii) כאשר $b\neq 0, a=1$ נקבל כי המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b & -1 \\ 1 & 1 & 2b & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & 2b & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המצומצמת שווה לדרגת המטריצה המורחבת שהיא 2, ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות במקרה זה.

נסכם:

(i) כאשר $a\neq 1, b\neq 0$ למערכת פתרון יחיד.

(ii) כאשר $b=0$ למערכת אין פתרונות.

(iii) כאשר $a=1, b\neq 0$ למערכת יש אינסוף פתרונות

ב. (7 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות עבור $a=1, b=2$.

פתרון עבור $a=1, b=2$ נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת, ונעזר בדירוג שעשינו קודם שמתאים להצבה הזו, כלומר המטריצה היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

למטריצות שקולות שורות יש מערכות משוואות עם אותן קבוצת פתרונות, ולכן מספיק לפתור את מערכת המשוואות של המטריצה המדורגת, שהיא

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ + z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

וקבוצת הפתרונות היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ג. (5 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a, b וקטור העמודה $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ היא פתרון של המערכת.

פתרון נציב את העמודה במשוואה ונבדוק מתי מתקיים שוויון

$$\begin{cases} 2a + (-2) = 0 \\ 2 + (-2) + (-4)b = -1 \\ 2 + (-2) + 2\cdot(-4)b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ (-4)b = -1 \\ 2\cdot(-4)b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = \frac{1}{4}$$

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (14 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה ו D אלכסונית, כך ש־$D = P^{-1}AP$ (אין צורך למצוא את P, D).

פתרון נחשב תחילה את הפולינום האפייני של המטריצה

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -a \\ 0 & \lambda - 1 & -a \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda - 1\right)\left(\lambda - (a-1)\right)$$

קיבלנו שהערכים העצמיים של המטריצה הם $0, 1, a-1$. כאשר שלושת הערכים הללו שונים נובע מיידית שהמטריצה לכסינה, כלומר כאשר $a \neq 1, 2$ המטריצה לכסינה. במקרה הכללי, מכיוון שהפולינום מתפרק לגורמים ממעלה 1, נותר לבדוק האם לכל ערך עצמי הריבוי הגיאומטרי שווה לריבוי האלגברי. לכל ערך עצמי מתקיים כי

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

($m_a(\lambda)$ מסמן את הריבוי האלגברי של λ ו־$m_g(\lambda)$ מסמן את הריבוי הגיאומטרי שלו), ולכן כאשר הריבוי האלגברי הוא 1 הריבוי הגיאומטרי גם שווה ל1. מכאן שיש לבדוק רק את הריבויים הגיאומטריים של הערכים העצמיים שהריבוי האלגברי שלהם גדול מאחת כדי לבדוק אם המטריצה לכסינה או לא.

כאשר $a=1$ הריבוי האלגברי של 1 הוא 1 והריבוי האלגברי של 0 הוא 2. נמצא אם כן את הריבוי הגיאומטרי של 0: הריבוי הגיאומטרי הוא מימד מרחב הפתרונות של המטריצה $A-\lambda I$, כלומר $n-rank(A-\lambda I)$.

$$A-0I=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה היא 2, (כי למטריצה יש שתי שורות זהות ולכן הדרגה לכל היותר 2, ויש לה שתי שורות שהן לא אחת כפולה של השניה, ולכן הדרגה היא לפחות 2). מכאן שהריבוי הגיאומטרי הוא $3-2=1$ והמטריצה לא לכסינה במקרה זה. כאשר $a=2$ הריבוי האלגברי של 1 הוא 2 והריבוי האלגברי של 0 הוא 1, ולכן, באותו אופן כמו במקרה קודם, יש לבדוק את הריבוי הגיאומטרי של 1:

$$A-I=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{2}R_2]{R_3\to R_3+R_1}\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה היא 2, מכאן שהריבוי הגיאומטרי הוא $3-2=1$ והמטריצה לא לכסינה במקרה זה.

ב. (6 נקודות) תהי A מטריצה מסדר 3×3 כך ש־

(i) $\textbf{rank}(A+I)=2$

(ii) $|A-2I|=0$

(iii) ל־A יש שלושה ערכים עצמיים שונים, שסכומם 1.

הוכיחו כי A לא הפיכה, ומצאו את הדרגה שלה.

פתרון לפי הנתון, עבור $\lambda=-1,2$ המטריצה $A-\lambda I$ לא הפיכה, ולכן אלו ערכים עצמיים של A. יש עוד ערך עצמי אחד, נסמנו a. נתון כי סכום הערכים העצמיים הוא 1, ולכן

$$2+(-1)+a=1\Leftrightarrow a=0$$

כלומר $\lambda=0$ הוא ערך עצמי של A, עם ריבוי אלגברי 1. קיבלנו ש־0 ערך עצמי של A, ולכן A לא הפיכה, ומכיוון שהריבוי האלגברי שווה ל־1, אז הריבוי הגיאומטרי שווה ל־1, כלומר הדרגה של $A=A-0I$ היא $3-1=2$.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (10 נקודות) עבור ההעתקה הלינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, ועבור הבסיס $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ של $\mathbb{R}^3$ המטריצה המייצגת היא

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}3&a&0\\2&3&5\\3&a&b\end{pmatrix}$$

כאשר a, b פרמטרים ממשיים. נסמן $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(i) (5 נקודות) מצאו את $[v]_B$, כלומר את וקטור הקואורדינטות של הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ לפי הבסיס B.

(ii) (5 נקודות) מצאו את הערכים של a, b עבורם $v \in \text{Ker}T$.

פתרון

(i) כדי למצוא את וקטור הקואורדינאטות, נציג את v כצירוף ליניארי של אברי הבסיס B

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$$

כעת יש לפתור מערכת:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_3 &= -3 \end{cases}$$

ולכן

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) נתון כי $v \in \text{Ker}T$, ולכן $[T]_B [v]_B = 0$, כלומר

$$\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+a \\ 2+3-5 \\ 3+a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = -3, b = 0$$

ב. (10 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ו־ $B = \{v_1, v_2\}$ בסיס של V. נתונה ההעתקה הלינארית $T : V \to V$ המקיימת

$$T(v_1) = v_1 + v_2, \quad T(v_2) = v_1 - v_2$$

קבעו האם T הפיכה.

פתרון נמצא תחילה את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס B:

$$[T(v_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [T(v_2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה המייצגת היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה שלה היא -2, כלומר היא הפיכה, ומכאן שההעתקה הפיכה.

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) יהי V מרחב עם מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$, ו־ $B = \{v_1, v_2\}$ **בסיס אורתוגונלי** של V. תהי $T : V \to \mathbb{R}$ העתקה לינארית. נסמן

$$a_1 = \frac{T(v_1)}{\langle v_1, v_1\rangle}, \quad a_2 = \frac{T(v_2)}{\langle v_2, v_2\rangle}$$

ונגדיר $u = a_1v_1 + a_2v_2$.

(i) (5 נקודות) עבור איברי הבסיס B חשבו את $\langle v_1, u\rangle,\ \langle v_2, u\rangle$, והראו כי

$$T(v_1) = \langle v_1, u\rangle, T(v_2) = \langle v_2, u\rangle.$$

(ii) (5 נקודות) הוכיחו כי לכל $v \in V$ מתקיים כי $T(v) = \langle v, u\rangle$.

פתרון

(i) נחשב את

$$\langle v_1, u\rangle = \langle v_1, a_1v_1 + a_2v_2\rangle = a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\underbrace{\langle v_1, v_2\rangle}_{=0} = \frac{T(v_1)}{\langle v_1, v_1\rangle}\langle v_1, v_1\rangle = T(v_1)$$

$$\langle v_2, u\rangle = \langle v_2, a_1v_1 + a_2v_2\rangle = a_1\underbrace{\langle v_2, v_1\rangle}_{=0} + a_2\langle v_1, v_2\rangle = \frac{T(v_2)}{\langle v_2, v_2\rangle}\langle v_2, v_2\rangle = T(v_2)$$

(ii) עבור $v \in V$ כלשהו קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$v = av_1 + bv_2$, ולכן לפי הסעיף הקודם

$$\langle v, u\rangle = \langle av_1 + bv_2, u\rangle = a\underbrace{\langle v_1, u\rangle}_{=T(v_1)} + b\underbrace{\langle v_2, u\rangle}_{=T(v_2)} = aT(v_1) + bT(v_2) = T(v)$$

ב. (10 נקודות) במרחב המטריצות הממשיות $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ תהי $\langle A, B\rangle = \mathrm{trace}(A^TB)$ מכפלה פנימית.

(i) (5 נקודות) מצאו ערך של הפרמטר $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורו הקבוצה $S = \left\{I, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה אורתוגונלית

(ii) (5 נקודות) עבור הערך שמצאתם בסעיף הקודם השלימו את הקבוצה S לבסיס אורתוגונלי של V.

פתרון

(i) נחשב את המכפלה הפנימית בין איברי הקבוצה

$$\left\langle I, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle = \textbf{trace}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\left\langle I, \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\right\rangle = \textbf{trace}\left(\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle = \textbf{trace}\left(\begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \alpha - 2$$

מהחישוב נובע שהמכפלה הפנימית מתאפסת, ואז הקבוצה אורתוגונלית, רק עבור $\alpha = 2$.

(ii) נשלים את הקבוצה לבסיס אורתוגונלי ע"י מציאת מטריצה אורתוגונלית לכל איברי ה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ שמקיימת

$$\begin{aligned}
\left\langle I, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\rangle &= \textbf{trace}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &&= a+d \\
\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\rangle &= \textbf{trace}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &&= -a+2b+2c+d \\
\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\rangle &= \textbf{trace}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &&= a+c-d
\end{aligned}$$

כלומר המקדמים צריכים לקיים

$$\begin{cases} a & & & & & + & d & = & 0 \\ -a & + & 2b & + & 2c & + & d & = & 0 \\ a & & & + & c & - & d & = & 0 \end{cases}$$

נפתור את מערכת המשוואות הזו ע"י דירוג המטריצה שמתאימה למערכת

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

קבוצת הפתרונות של המערכת היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t : t \in \mathbb{R} \right\}$$

מספיק לבחור איבר אחד מהקבוצה והוא מגדיר לנו מטריצה שהיא אורתוגונלית לכל איברי הקבוצה, למשל $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן ההשלמה היא

$$\left\{ I, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 5. (20 **נקודות**) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ בסיס של V.
נסמן $w_1 = v_1 + 2v_2 + 3v_3,\ w_2 = 2v_1 - v_2 - v_3,\ w_3 = 5v_1 + v_3$.

א. (5 נקודות) מצאו את הקואורדינטות של w_1, w_2, w_3 לפי הבסיס B.

ב. (5 נקודות) הראו כי הקבוצה $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ תלויה לינארית.

ג. (5 נקודות) מצאו בסיס של $U = \text{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$.

ד. (5 נקודות) תנו דוגמה לוקטור $v \in V$ שמקיים כי $v \notin U$.

פתרון

א. מהנתונים נובע כי

$$[w_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [w_2]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [w_3]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ב. כדי לבדוק שהקבוצה תלויה לינארית מספיק לבדוק שוקטורי הקואורדינטות של איברי הקבוצה תלויים לינארית, מכיוון שתלויות לינאריות של וקטורים ווקטורי הקואורדינטות זהות. כדי לבדוק אם הקבוצה תלויה לינארית נדרג את המטריצה שאיברי הקבוצה הם שורותיה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -10 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דירוג שורות שומר על מרחב השורות, ושורות שונות מאפס במטריצה מדורגת הן קבוצה בת"ל ולכן בסיס של מרחב השורות. קיבלנו אם כן כי מימד מרחב השורות של המטריצה הוא 2. השורות של המטריצה בתחילת הדירוג הן 3 איברים במרחב ממימד 2, ולכן קבוצה תלויה לינארית ומכאן שגם קבוצת הוקטורים היא קבוצה תלויה לינארית.

ג. ראינו בסעיף הקודם שהקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

היא בסיס למרחב וקטורי הקואורדינטות לפי הבסיס B של איברי הקבוצה, ולכן הקבוצה

$$\{v_1 + 2v_2 + 3v_3, -5v_2 - 7v_3\}$$

בסיס לU.

ד. כדי למצוא וקטור שלא נמצא ב־U מספיק למצוא וקטור שוקטור הקואורדינטות שלו לא תלוי לינארית בוקטורי הקואורדינטות של הבסיס שמצאנו בסעיף הקודם, כלומר משלים את המטריצה המדורגת למטריצה שדרגתה 3. השורה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ משלימה את המטריצה המדורגת למטריצה שדרגתה 3, ולכן היא מתאימה והיא וקטור קואורדינטות של v_3

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} a_1x + a_4y + a_7z = 0 \\ a_2x + a_5y + a_8z = 0 \\ a_3x + a_6y + a_9z = 0 \end{cases}$$

מצאו כמה פתרונות יש למערכת המשוואות כאשר

(i) (5 נקודות) a_n סדרה חשבונית (כלומר קיים d כך ש $a_n = a_1 + (n-1)d$).

פתרון נחשב את הדטרמיננטה במקרה של סדרה חשבונית

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1+3d & a_1+6d \\ a_1+d & a_1+4d & a_1+7d \\ a_1+2d & a_1+5d & a_1+8d \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_1+3d & a_1+6d \\ d & d & d \\ 2d & 2d & 2d \end{vmatrix} \overbrace{=}^{R_3 \to R_3 - 2R2} \begin{vmatrix} a_1 & a_1+3d & a_1+6d \\ d & d & d \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה מתאפסת, ולכן המטריצה לא הפיכה ולמערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות.

(ii) (5 נקודות) a_n סדרה הנדסית (כלומר קיים q כך ש-$a_n = a_1q^{n-1}$).

פתרון נחשב את הדטרמיננטה במקרה של סדרה הנדסית

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1q^3 & a_1q^6 \\ a_1q & a_1q^4 & a_1q^7 \\ a_1q^2 & a_1q^5 & a_1q^8 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_1q^3 \cdot a_1q^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & q & q \\ q^2 & q^2 & q^2 \end{vmatrix} = 0$$

כאשר הוצאנו מהעמודה הראשונה a_1, מהעמודה השנייה a_1q^3, ומהעמודה השלישית a_1q^6. קיבלנו כי הדטרמיננטה מתאפסת, ולכן המטריצה לא הפיכה ולמערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות.

ב. (5 נקודות) הוכיחו שאם A אנטיסימטרית, וn אי זוגי, אזי A לא הפיכה.

פתרון נתון כי A אנטיסימטרית כלומר $A^T = -A$, ולכן הדטרמיננטה של A מקיימת

$$\left|A^T\right| = |-A| \Leftrightarrow |A| = (-1)^n|A| = -|A|$$

כאשר השוויונות שקולים כי דטרמיננטה של מטריצה והמטריצה המשוחלפת לה שוות, והכפלת מטריצה בסקלר מכפילה את הדטרמיננטה בסקלר הזה בחזקת הסדר של המטריצה, והשוויון האחרון נובע כי n אי זוגי. קיבלנו, אם כן, כי $|A| = -|A|$, כלומר $|A| = 0$, כלומר המטריצה לא הפיכה.

ג. (5 נקודות) תהיינה $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שתי מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$. הוכיחו שאם $AB = -2BA$ אזי A לא הפיכה או B לא הפיכה.

פתרון נתון כי $AB = -2BA$. נשווה את הדטרמיננטות של שני הצדדים

$$|A| \cdot |B| = |AB| = |-2BA| = (-2)^n\, |B| \cdot |A| = (-2)^n\, |A| \cdot |B|$$

כאשר השתמשנו בכפליות הדטרמיננטה ותכונת הכפל בסקלר. מהשוויונות הקיצוניים נובע כי

$$\left(1 - (-2)^n\right) |A| \cdot |B| = 0 \Leftrightarrow |A| \cdot |B| = 0$$

$1 - (-2)^n \neq 0$, ולכן $|A| = 0$ או $|B| = 0$. כלומר אחת המטריצות לא הפיכה.

בהצלחה