יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 7

גרדיאנט ונגזרת כוונית
קיצון מקומי של פונקציות בשני משתנים
קיצון תחת אילוץ, שיטת כופלי Lagrange

גרדיאנט ונגזרת כוונית

.1

נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2e^{xy}$ והנקודה $A=(2,0)$.

א. לחשב הנגזרת הכוונית של f בנקודה $A=(2,0)$ בכוון מהנקודה A לנקודה $B=(5,-1)$.

ב. מהו הכוון בו קצב השינוי של f בנקודה A הוא מקסימלי? מינימלי?

ג. מהו קצב השינוי המקסימלי של f בנקודה A? המינימלי?

א.

$$f_x(x,y)=2xe^{xy}+x^2e^{xy}y=(2x+x^2y)e^{xy}$$
$$f_y(x,y)=x^2e^{xy}x=x^3e^{xy}$$

f_x, f_y אלמנטריות ורציפות בנקודה $A=(2,0)$ (למעשה הן רציפות בכל $\mathbb{R}^2$), ולכן f דיפרנציאבילית בנקודה $A=(2,0)$ (הערה: למעשה f_x, f_y רציפות כל $\mathbb{R}^2$ ולכן f דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$).

ולכן ניתן לחשב את הנגזרת הכוונית של f בנקודה $A=(2,0)$ ע"י מכפלה סקלרית של הגרדיאנט עם וקטור הכוון.

חישוב הגרדיאנט של f בנקודה $A=(2,0)$:

$$f_x(2,0)=(2\cdot 2+2^2\cdot 0)e^{2\cdot 0}=4$$
$$f_y(2,0)=2^3e^{2\cdot 0}=8$$
$$\vec{\nabla}f(2,0)=\left(f_x(2,0),f_y(2,0)\right)=(4,8)$$

חישוב וקטור הכוון $\vec{v}$ מהנקודה $A=(2,0)$ לנקודה $B=(5,-1)$:

$$\vec{v}=B-A=(5,-1)-(2,0)=(3,-1)$$

נבדוק האם הוקטור הוא וקטור יחידה:

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}\neq 1$$

זהו אינו וקטור יחידה, ולכן ננרמל אותו:

$$\hat{v}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{(3,-1)}{\sqrt{10}}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

כעת, הנגזרת הכוונית המבוקשת היא

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,0)=\vec{\nabla}f(2,0)\cdot\hat{v}=(4,8)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{12}{\sqrt{10}}-\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

ב+ג.

f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה P.   הכוון בו הנגזרת הכוונית של f בנקודה P היא מקסימלית, הוא כוון הגרדיאנט של f בנקודה P.   הכוון בו הנגזרת הכוונית של f בנקודה P היא מינימלית, הוא הכוון הנגדי לכוון הגרדיאנט של f בנקודה P.   הנגזרת הכוונית המקסימלית של f בנקודה P שווה לנורמת הגרדיאנט של f בנקודה P.   הנגזרת הכוונית המינימלית של f בנקודה P שווה למינוס נורמת הגרדיאנט של f בנקודה P.

מצאנו בסעיף א' שהגרדיאנט של f בנקודה A הוא $\vec{\nabla} f(A)=(4,8)$.

נסמן וקטור זה ב $\vec{w}=\vec{\nabla} f(A)=(4,8)$.

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}\neq 1$$

ננרמל את הגרדיאנט הזה

$$\hat{w}=\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}=\frac{(4,8)}{4\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

כעת:

הכוון בו קצב השינוי של f בנקודה A הוא מקסימלי, כלומר הכוון בו הנגזרת הכוונית של f בנקודה A היא מקסימלית, הוא כוון הגרדיאנט של f בנקודה A:

$$\hat{w}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

הכוון בו קצב השינוי של f בנקודה A הוא מינימלי, כלומר הכוון בו הנגזרת הכוונית של f בנקודה A היא מינימלית, הוא הכוון הנגדי לכוון הגרדיאנט של f בנקודה A:

$$-\hat{w}=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

קצב השינוי המקסימלי של f בנקודה A, כלומר הנגזרת הכוונית המקסימלית של f בנקודה A, שווה לנורמת הגרדיאנט של f בנקודה A:

$$\left\|\vec{\nabla} f(A)\right\|=\|\vec{w}\|=\sqrt{80}$$

קצב השינוי המינימלי של f בנקודה A, כלומר הנגזרת הכוונית המינימלית של f בנקודה A, שווה למינוס נורמת הגרדיאנט של f בנקודה A:

$$-\left\|\vec{\nabla} f(A)\right\|=-\|\vec{w}\|=-\sqrt{80}$$

.2

$u(x,y)=yf(x+y)+xg(x^2+y^2)$ כאשר f,g פונקציות גזירות.

נתון $g'(5)=7$, $g(5)=-28$, $f'(3)=2$, $f(3)=-14$.

א. האם קיים כוון בו הנגזרת הכוונית של u בנקודה $(2,1)$ שווה ל 40 ?
אם כן, למצוא כוון כזה, אם לא, לנמק מדוע לא.

ב. האם קיים כוון בו הנגזרת הכוונית של u בנקודה $(2,1)$ שווה ל 30 ?
אם כן, למצוא כוון כזה, אם לא, לנמק מדוע לא.

א.

נחשב את הגרדיאנט של $u(x,y)$ בנקודה $(2,1)$.

הפונקציות f,g גזירות, הפונקציות $x+y, x^2+y^2$ דיפרנציאביליות, ולכן ניתן לגזור את ההרכבות $f(x+y), g(x^2+y^2)$ לפי כלל השרשרת.

$$u_x(x,y)=yf'(x+y)\cdot 1+1\cdot g(x^2+y^2)+x\cdot g'(x^2+y^2)\cdot 2x=$$
$$=yf'(x+y)+g(x^2+y^2)+2x^2g'(x^2+y^2)$$
$$u_y(x,y)=1\cdot f(x+y)+y\cdot f'(x+y)\cdot 1+xg'(x^2+y^2)\cdot 2y=$$
$$=f(x+y)+yf'(x+y)+2xyg'(x^2+y^2)$$

$$u_x(2,1)=1\cdot f'(2+1)+g(2^2+1^2)+2\cdot 2^2\cdot g'(2^2+1^2)=$$
$$=f'(3)+g(5)+8g'(5)=$$
$$=2+(-28)+8\cdot 7=30$$
$$u_y(2,1)=f(2+1)+1\cdot f'(2+1)+2\cdot 2\cdot 1\cdot g'(2^2+1^2)=$$
$$=f(3)+f'(3)+4g'(5)=$$
$$=(-14)+2+4\cdot 7=16$$

כלומר

$$\vec{\nabla}u(2,1)=\big(u_x(2,1),u_y(2,1)\big)=(30,16)$$

כעת

$$\left\|\vec{\nabla}u(2,1)\right\|=\sqrt{30^2+16^2}=\sqrt{1156}=34$$

מכיוון שהפונקציות f,g גזירות, והפונקציות $x, y, x+y, x^2+y^2$ דיפרנציאבליות, נובע ש $u(x,y)$ דיפרנציאבילית.

קיבלנו ש $\left\|\vec{\nabla}u(2,1)\right\|=34$, כלומר הנגזרת הכוונית המקסימלית של הפונקציה $u(x,y)$ בנקודה $(2,1)$ שווה ל 34. ולכן אין אף כוון שבו הנגזרת הכוונית שווה למספר הגדול מ 34 .
ומכאן שאין אף כוון שבו הנגזרת הכוונית שווה ל 40 .

ב.

מכיוון ש $\left\|\vec{\nabla}u(2,1)\right\|=34$, נובע שהנגזרת הכוונית המקסימלית של הפונקציה $u(x,y)$ בנקודה $(2,1)$ שווה ל 34 , והנגזרת הכוונית המינימלית של הפונקציה $u(x,y)$ בנקודה $(2,1)$ שווה ל -34 .

הנגזרת הכוונית יכולה לקבל כל ערך בין ערך המקסימום וערך המינימום שלה, כלומר בין 34 ל -34 ,
ולכן יש כוון שבו הנגזרת הכוונית שווה ל 30 .
נסמן וקטור כוון (וקטור יחידה) כללי :

$$\hat{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$$

(θ היא הזוית בין כוון הוקטור לכוון החיובי של ציר x)

אז הנגזרת הכוונית של הפונקציה $u(x,y)$ בנקודה $(2,1)$ בכוון $\hat{v}$ שווה ל

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{v}}(2,1)=\vec{\nabla}u(2,1)\cdot\hat{v}=(30,16)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=30\cos\theta+16\sin\theta$$

אנו רוצים כוון שבו הנגזרת הכוונית שווה ל 30 , כלומר

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{v}}(2,1) = 30$$

$$30\cos\theta + 16\sin\theta = 30$$

ניתן לפתור משוואה טריגונומטרית זו ולקבל שיש לה שני פתרונות והם

$$\theta = 0^\circ \ , \ \theta = 56.145^\circ$$

ולכן ישנם שני כוונים בהם הנגזרת הכוונית שווה ל 30

$$\hat{v} = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) = (1,0)$$

$$\hat{v} = (\cos 56.145^\circ, \sin 56.145^\circ) = (0.557, 0.830)$$

קיצון מקומי של פונקציות בשני משתנים

.1
למצוא את הנקודות החשודות כנקודות קיצון מקומי של $f(x,y)=x^4+4xy+y^4$ ולמיין אותן.

נמצא הנקודות הקריטיות של f . אלו הנקודות בהן f_x ו/או f_y לא קיימות, או בהן $f_x=f_y=0$ (נקודות סטציונריות).
f פולינום בשני משתנים ולכן בעלת נגזרות חלקיות בכל $\mathbb{R}^2$, ולכן אין נקודה בה f_x או f_y לא קיימות.
כלומר הנקודות הקריטיות (מסדר I) של f הן הנקודות בהן מתקיים $f_x=f_y=0$.

$$f_x=4x^3+4y \quad , \quad f_y=4x+4y^3$$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3+4y=0 \\ 4x+4y^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+y=0 \\ x+y^3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x^3 & (1) \\ x=-y^3 & (2) \end{cases}$$

נפתור את מערכת המשוואות.
נחלץ את y ממשוואה (1) ונציב במשוואה (2)

$$y=-x^3$$
$$x=-y^3=-(-x^3)^3=-(-x^9)=x^9$$

וקיבלנו משוואה אחת בנעלם אחד.

$$x^9=x$$
$$x^9-x=0$$
$$x(x^8-1)=0$$
$$x=0 \quad \text{or} \quad x^8-1=0$$
$$x^8=1$$
$$x=\pm 1$$

לסיכום פתרונות המשוואה הם $x=-1$, $x=1$, $x=0$.
לכל x נמצא את ה y המתאים לו.

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y=-x^3=-0^3=0$$
$$x=1 \quad \Rightarrow \quad y=-x^3=-1^3=-1$$
$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad y=-x^3=-(-1)^3=1$$

לסיכום, הפתרונות של מערכת המשוואות, כלומר הנקודות הקריטיות (מסדר I) של f , הן
$(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$

כעת נמיין את הנקודות החשודות שמצאנו.

$$f_x=4x^3+4y \quad , \quad f_y=4x+4y^3$$
$$\Rightarrow \quad f_{xx}=12x^2 \quad , \quad f_{yy}=12y^2 \quad , \quad f_{xy}=f_{yx}=4$$
$$D=f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=12x^2\cdot 12y^2-4^2=144x^2y^2-16$$

הנקודה $(0,0)$:

$$D(0,0)=144\cdot 0^2\cdot 0^2-16=-16<0$$

ולכן הנקודה $(0,0)$ היא נקודת אוכף.
הנקודה $(1,-1)$:

$$D(1,-1)=144\cdot 1^2\cdot(-1)^2-16=144-16=128>0$$

ולכן הנקודה $(1,-1)$ היא נקודת קיצון מקומי.

$$f_{xx}(1,-1)=12\cdot 1^2=12>0$$

ולכן הנקודה $(1,-1)$ היא נקודת מינימום מקומי.
הנקודה $(-1,1)$:

$$D(-1,1)=144\cdot(-1)^2\cdot 1^2-16=144-16=128>0$$

ולכן הנקודה $(-1,1)$ היא נקודת קיצון מקומי.

$$f_{yy}(-1,1)=12\cdot1^2=12>0$$

ולכן הנקודה $(1,-1)$ היא נקודת מינימום מקומי.

2.

למצוא את הנקודות החשודות כנקודות קיצון מקומי של $f(x,y)=2\ln(2+x^2+y^2)-xy$ ולמיין אותן.

נשים לב שהביטוי שבתוך ה $\ln$ חיובי תמיד, ולכן f מוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$.

נמצא הנקודות הקריטיות של f. אלו הנקודות בהן f_x ו/או f_y לא קיימות, או בהן $f_x=f_y=0$.

לפונקציה f קיימות נגזרות חלקיות לפי x ולפי y בכל $\mathbb{R}^2$, ולכן אין נקודה בה f_x או f_y לא קיימות.

כלומר הנקודות הקריטיות (מסדר I) של f הן הנקודות בהן מתקיים $f_x=f_y=0$.

$$f_x=2\cdot\frac{1}{2+x^2+y^2}\cdot 2x-y=\frac{4x}{2+x^2+y^2}-y$$

$$f_y=2\cdot\frac{1}{2+x^2+y^2}\cdot 2y-x=\frac{4y}{2+x^2+y^2}-x$$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4x}{2+x^2+y^2}-y=0 \\ \dfrac{4y}{2+x^2+y^2}-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4x}{2+x^2+y^2}=y \\ \dfrac{4y}{2+x^2+y^2}=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=y(2+x^2+y^2) \quad (1) \\ 4y=x(2+x^2+y^2) \quad (2) \end{cases}$$

נרצה לפתור מערכת משוואות זו.

דרך אחת לפתור את המערכת היא לחלק את משוואה (1) ב y ואת משוואה (2) ב x, לשם כך צריך לבדוק בנפרד את המקרים בהם $y=0$, $x=0$.

מקרה I: $x=0$.

נציב $x=0$ במשוואה (2) ונקבל

$$4y=0\cdot(2+0^2+y^2)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$$

ונשים לב שגם משוואה (1) מתקיימת עבור $y=0$, $x=0$.

מקרה II: $y=0$.

נציב $y=0$ במשוואה (2) ונקבל

$$4\cdot 0=x(2+x^2+0^2) \quad\Rightarrow\quad 0=x\underbrace{(2+x^2)}_{>0} \quad\Rightarrow\quad x=0$$

ונשים לב שגם משוואה (1) מתקיימת עבור $y=0$, $x=0$.

מקרה III: $x,y\neq 0$.

במקרה זה נחלק כאמור את משוואה (1) ב y ואת משוואה (2) ב x

$$(1) \quad\Rightarrow\quad \frac{4x}{y}=2+x^2+y^2$$

$$(2) \quad\Rightarrow\quad \frac{4y}{x}=2+x^2+y^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{4x}{y}=\frac{4y}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{y}=\frac{y}{x} \quad\Rightarrow\quad y^2=x^2 \quad\Rightarrow\quad y=\pm x$$

במקרה $y=x$: נציב זאת במשוואה (1) (למשל) ונקבל

$$4x=x(2+x^2+x^2)=x(2+2x^2)$$

נשים לב שבשלב זה ניתן לחלק המשוואה ב x, אין בעיה של חילוק באפס כי אנחנו במקרה III בו $x\neq 0$.

$$4=2+2x^2$$

$$2=2x^2$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

לכל x נמצא את ה y המתאים לו.

אנחנו במקרה $y=x$ ולכן

$$x=1 \quad\Rightarrow\quad y=x=1$$

$$x=-1 \quad\Rightarrow\quad y=x=-1$$

במקרה $y=-x$: נציב זאת במשוואה (1) (למשל) ונקבל

$$4x=(-x)(2+x^2+(-x)^2)=-x(2+2x^2)$$
$$4=-(2+2x^2)=-2-2x^2$$
$$2x^2=-6$$
$$x^2=-3$$

ולמשוואה זו אין פתרון, כלומר אין למערכת פתרונות במקרה זה.

לסיכום הפתרונות של המערכת המשוואות, כלומר הנקודות הקריטיות (מסדר I) של f , הן

$(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$

כעת נמיין את הנקודות החשודות שמצאנו.

$$f_x=\frac{4x}{2+x^2+y^2}-y$$
$$f_y=\frac{4y}{2+x^2+y^2}-x$$
$$f_{xx}=\frac{4\cdot(2+x^2+y^2)-4x\cdot 2x}{(2+x^2+y^2)^2}-0=\frac{8-4x^2+4y^2}{(2+x^2+y^2)^2}$$
$$f_{yy}=\frac{4\cdot(2+x^2+y^2)-4y\cdot 2y}{(2+x^2+y^2)^2}-0=\frac{8+4x^2-4y^2}{(2+x^2+y^2)^2}$$
$$f_{xy}=-\frac{4x}{(2+x^2+y^2)^2}\cdot 2y-1=-\frac{8xy}{(2+x^2+y^2)^2}-1$$

הנקודה $(0,0)$:

$$f_{xx}(0,0)=\frac{8-4\cdot 0^2+4\cdot 0^2}{(2+0^2+0^2)^2}=\frac{8}{2^2}=2>0$$
$$f_{yy}(0,0)=\frac{8+4\cdot 0^2-4\cdot 0^2}{(2+0^2+0^2)^2}=\frac{8}{2^2}=2>0$$
$$f_{xy}(0,0)=-\frac{8\cdot 0\cdot 0}{(2+0^2+0^2)^2}-1=-1$$
$$\Rightarrow\quad D(0,0)=2\cdot 2-(-1)^2=3>0$$

ולכן הנקודה $(0,0)$ היא נקודת מינימום מקומי.

הנקודות $(1,1)$ ו $(-1,-1)$:

$$f_{xx}(1,1)=f_{xx}(-1,-1)=\frac{8-4\cdot 1^2+4\cdot 1^2}{(2+1^2+1^2)^2}=\frac{8}{4^2}=\frac{1}{2}$$
$$f_{yy}(1,1)=f_{yy}(-1,-1)=\frac{8+4\cdot 1^2-4\cdot 1^2}{(2+1^2+1^2)^2}=\frac{8}{4^2}=\frac{1}{2}$$
$$f_{xy}(1,1)=f_{xy}(-1,-1)=-\frac{8\cdot 1}{(2+1^2+1^2)^2}-1=-\frac{8}{4^2}-1=-\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow\quad D(1,1)=D(-1,-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=-2<0$$

ולכן הנקודות $(1,1)$ ו $(-1,-1)$ הן נקודות אוכף.

קיצון תחת אילוץ, שיטת כופלי Lagrange

1.

א. למצוא את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)=3x^2+2y^2+2x$ תחת האילוץ $x^2+y^2=4$.

ב. נתון שיש לפונקציה f קיצון מוחלט (מקסימום ומינימום מוחלטים) תחת האילוץ, למצוא אותם.

א.

נבנה את הלגרנז׳יאן המתאים לבעיית קיצון זו:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=3x^2+2y^2+2x-\lambda(x^2+y^2-4)$$

נמצא הנקודות הקריטיות מסדר I של L:

$$\begin{cases} L_x=6x+2-\lambda\cdot 2x=0 \\ L_y=4y-\lambda\cdot 2y=0 \\ L_\lambda=-(x^2+y^2-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+2=2\lambda x & (1) \\ 4y=2\lambda y & (2) \\ x^2+y^2=4 & (3) \end{cases}$$

צריך לפתור את מערכת משוואות זו.

ממשוואה (2)

$$4y=2\lambda y \quad\Rightarrow\quad 4y-2\lambda y=0 \quad\Rightarrow\quad 2y(2-\lambda)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0 \text{ or } \lambda=2$$

מקרה 1: $y=0$.

נציב במשוואת האילוץ (3) כדי למצוא את ה x המתאימים:

$$x^2+0^2=4 \quad\Rightarrow\quad x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$$

וקיבלנו שתי נקודות $(-2,0)$, $(2,0)$.

מקרה 2: $\lambda=2$.

נציב במשוואה (1):

$$6x+2=4x \quad\Rightarrow\quad 2x=-2 \quad\Rightarrow\quad x=-1$$

נציב במשוואת האילוץ (3) כדי למצוא את ה y המתאימים:

$$(-1)^2+y^2=4 \quad\Rightarrow\quad y^2=3 \quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{3}$$

וקיבלנו שתי נקודות $(-1,\pm\sqrt{3})$.

לסיכום, קיבלנו ארבעה פתרונות של המערכת

$$(2,0)\,,\,(-2,0)\,,\,(-1,\pm\sqrt{3})$$

ואלו הן הנקודות החשודות כנקודות קיצון של הפונקציה f תחת האילוץ.

ב.

מכיוון שידוע שקיימים מקסימום ומינימום מוחלטים תחת האילוץ, נמצא אותם ע״י חישוב ערך הפונקציה f בנקודות החשודות.

$$f(2,0)=3\cdot 2^2+2\cdot 0^2+2\cdot 2=16$$
$$f(-2,0)=3\cdot(-2)^2+2\cdot 0^2+2\cdot(-2)=8$$
$$f(-1,\pm\sqrt{3})=3\cdot(-1)^2+2\cdot(\pm\sqrt{3})^2+2\cdot(-1)=7$$

ולכן:

המקסימום של f תחת האילוץ הוא 16, מתקבל בנקודה $(2,0)$.

המינימום של f תחת האילוץ הוא 7, מתקבל בנקודות $(-1,\pm\sqrt{3})$.