מס' נבחן

שם הקורס: מבוא להסתברות

קוד הקורס: 90911

הוראות לנבחן:

-חומר עזר שימושי לבחינה:

מותר שימוש בשלושה דפי נוסחאות,

ודף טבלת התפלגות נורמלית.

-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק

-אין להשתמש בטלפון סלולארי

-אין להשתמש במחשב אישי או נייד

-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או

מכשיר מדיה אחר

-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: 2018ב

השנה: תשע"ח

מועד: ב

תאריך הבחינה: 23/7/18

שעת הבחינה: 17^{00}

משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר חנה קלבנר,

ד"ר מאיר אזור,

ד"ר לובה טטראשווילי,

ד"ר אלכס סגל

*** שאלון הבחינה לא ייבדק ע"י המרצה, לא ייסרק ולא יישמר ***

*** לא יינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה ***

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לענות על כל השאלות, משקל כל שאלה רשום ליד השאלה.

יש לנמק היטב את הפתרון. תשובה לא מנומקת לא תזכה במלוא הניקוד.

כל שאלה להתחיל בעמוד חדש: יש לציין את מספר השאלה, ויש לציין את מספר הסעיף אותו פותרים.

שאלה 1 (21 נקודות)

בקופסא יש 10 כדורים, חלקם לבנים. מוציאים מהקופסא 4 כדורים עם החזרה. ההסתברות להוציא כדור אחד לבן שווה להסתברות להוציא שני כדורים לבנים.

א. כמה כדורים לבנים יש בקופסא?

ב. מוציאים מהקופסא 4 כדורים ללא החזרה. מה ההסתברות להוציא 2 כדורים לבנים?

ג. מהקופסא מוציאם כדורים עם החזרה, עד שנוציא 4 כדורים לבנים. מה ההסתברות שהוצאנו 10 כדורים?

שאלה 2 (32 נקודות)

הטבלה הבאה מתארת התפלגות משותפת של Y, X :

Y / X	1	2	3
1	0.03	?	0.27
2	0.02	0.22	0.16

א. מהי ההסתברות החסרה בטבלה? האם Y, X בלתי תלויים?

ב. מהי התוחלת של Y אם נתון $X=2$?

ג. מהי השונות של X?

ד. חשבו את ההסתברות : $P(X+Y\le 3)$.

שאלה 3 (47 נקודות: סעיף א' 7 נק', כל סעיף אחר 8 נק')

באזור מסוים הטמפרטורה היומית בימות החורף מתפלגת נורמלית עם תוחלת $13°$, וסטיית תקן $4°$.

בודקים ממוצע טמפרטורה על פני 36 ימים. אם ממוצע הטמפרטורה יורד מתחת ל- $12°$, החורף נחשב קר במיוחד. נניח שימים שונים הם בלתי תלויים מבחינת הטמפרטורה הנמדדת בהם.

א. מה ההסתברות שחורף שנבדק, היה קר במיוחד?

ב. מה ההסתברות שבמשך חמישה ימים ברצף, הטמפרטורה היומית תהייה מעל $14°$?

ג. מתוך 60 ימים, מה ההסתברות שיהיו לכל היותר 25 ימים בהם הטמפרטורה היומית נמוכה מ- $14°$?

מפעל מעסיק 60 עובדים. בחורף קר במיוחד ממוצע ימי מחלה לעובד הוא 8 עם סטיית תקן 3, ובחורף רגיל ממוצע ימי מחלה לעובד הוא 4 עם סטיית תקן 2.

ד. מהי תוחלת מספר ימי מחלה לעובד?

ה. מהי שונות מספר ימי מחלה לעובד?

ו. מה ההסתברות שסך ימי המחלה של העובדים במפעל בחורף לא יעלה על 300?

בהצלחה!

נוסחאות עזר – מבוא להסתברות

חוקי הפילוג: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$;

חוקי דה מורגן: $(\overline{\bigcup_i A_i}) = (\bigcap_i \overline{A_i})$ $\quad$ $(\bigcap_i \overline{A_i}) = (\overline{\bigcup_i A_i})$

A, B **מאורעות זרים** אם $A\cap B=\phi$,

סדרת מאורעות תקרא **זרים בזוגות** אם **כל** זוג מאורעות מתוכה הם זרים.

חוקי ההסתברות: $P\{\overline{A}\}=1-P\{A\}$; $P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{A\cap B\}$

אם: $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ סדרת מאורעות **זרים בזוגות** אז: $P\{\bigcup_{i=1}^{n} Ai\}=\sum_{i=1}^{n} P\{Ai\}$

נוסחת **ההכלה וההוצאה** (inclusion exclusion):

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C\cup D)&=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-\\&-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-P(B\cap D)-P(C\cap D)+\\&+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P\{A\cap C\cap D\}+P(B\cap C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

כללים קומבינטוריים:

כלל המכפלה: אם ניסוי ניתן להצגה כמתבצע ב n שלבים, ובשלב k יש n_k תוצאות אפשריות וסימטריות, ואם מרחב המדגם מוגדר כוקטורים באורך n כאשר הרכיב ה k שלו הוא תוצאת השלב ה k, אז במרחב המדגם יש $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k$ תוצאות אפשריות סימטריות.

מספר האפשרויות לדגימה של k מתוך n איברים:

	התחשבות בסדר הדגימה	ללא התחשבות בסדר
עם החזרה	n^k	(מרחב מדגם לא סימטרי)
ללא החזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

הסתברות מותנית: $P\{A/B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$, **נוסחת הכפל**: $P\{A\cap B\}=P\{A\}P\{B/A\}$

נוסחת ההסתברות השלמה:

אם: $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ חלוקה של מרחב המדגם, אז: $P\{A\}=\sum_{i=1}^{n}P\{A/Bi\}P\{Bi\}$

נוסחת בייס: $P\{B_k/A\}=\frac{P\{A/B_k\}P\{B_k\}}{P\{A\}}$ כאשר: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P\{A/B_i\}P\{B_i\}$

אי תלות: A ו B הם מאורעות **בלתי תלויים** אם מתקיים: $P\{A/B\}=P(A)$ או $P\{A\cap B\}=P(A)P(B)$
קבוצת מאורעות הם בלתי תלויים אם כל קבוצה חלקית שלהם מקיימת שהסתברות החיתוך שלהם שווה למכפלת ההסתברויות.

סדרת ניסויי ברנולי: סדרת ניסויים זהים ובלתי תלויים, כשבכל ניסוי שתי תוצאות אפשריות: הצלחה וכשלון, וכאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p.

משתנים מקריים:

משתנה מקרי בדיד: פונקצית ההסתברות: $P(X=k)$ פונקצית ההתפלגות המצטברת: $F(k)=P(X\le k)$

התוחלת של X: $E[X]=\sum_k k\cdot P\{X=k\}$; התוחלת של פונקציה של X, g(X) היא: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P\{X=k\}$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בעל ההסתברות הגבוהה ביותר, **החציון** הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (בדידים) מיוחדים:

אחיד (בדיד): X~U(N), מתאר משתנה המקבל את הערכים: N,...,1,2 בהסתברויות שוות.

עבור משתנה זה: $V[X]=\frac{N^2-1}{12}$; $E[X]=\frac{N+1}{2}$; $k=1,2,...,N$ $P\{X=k\}=\frac{1}{N}$

בינומי: $X\sim B(n,p)$, מתאר את מספר **ההצלחות** ב- n ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה: $V[X]=npq$; $E[X]=np$; $k=0,1,...,n$ $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$

גיאומטרי: $X\sim G(p)$, מתאר את מספר הניסויים **עד** להצלחה (כולל) בסדרת ניסויי ברנולי.

עבור משתנה זה:

$P(X=k)=pq^{k-1}$ $k=1,2,...$; $P(X\le k)=1\text{-}q^k$ $k=1,2,...$; $E[X]=\frac{1}{p}$; $V[X]=\frac{q}{p^2}$

היפרגיאומטרי: $X\sim H(N,R,n)$ מתאר את מספר האיברים המיוחדים שיתקבלו בבחירת n איברים ללא החזרה מאוכלוסיה בגודל N שבה R איברים מיוחדים.

עבור משתנה זה:

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n\text{-}k}}{\binom{N}{n}}\quad k=0,1,2,...n\ ;\quad E(X)=n\frac{R}{N}\ ;\quad V(X)=n\frac{R}{N}\frac{(N-R)}{N}\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

פואסוני: $X\sim Pois(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור מספר אירועים בתחום מוגדר.

עבור משתנה זה: $E(X)=V(X)=\lambda$; $k=0,1,2,...$ $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

משתנה מקרי רציף: פונקצית הצפיפות: $f(x)$, פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F(t)=P\{X\le t\}=\int_{x=-\infty}^{t}f(x)dx.$$

התוחלת של X: $E[X]=\int xf(x)dx$; **התוחלת של פונקציה של X**, g(X) היא: $E[g(X)]=\int g(x)f(x)dx$

השונות של X: $V[X]=E[(X-E(X))^2]=E[X^2]-(E[X])^2$, **סטית התקן** של X: $\sigma[X]=\sqrt{V[X]}$

השכיח הוא הערך בו הצפיפות היא מקסימלית, החציון הוא הערך בו F(x)=0.5

משתנים (רציפים) מיוחדים:

אחיד (רציף): $X \sim U(a,b)$ מתאר משתנה המקבל ערכים בין a ל- b כך שההסתברות לערך בקטע פרופורציונית לאורך הקטע.

עבור משתנה זה: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \frac{x\text{-}a}{b\text{-}a} & a\le x\le b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$; $\mathrm{E}(X)=\frac{a+b}{2}$; $\mathrm{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

מעריכי (אקספוננציאלי): $\mathrm{X}\sim \mathrm{ezp}(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור אורך חיי רכיבים ומערכות אלקטרוניות.

עבור משתנה זה: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1\text{-}e^{-\lambda x} & 0\le x\end{cases}$; $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{\lambda}$; $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

נורמלי: $\mathrm{X}\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, משמש לצרכים רבים....

עבור משתנה זה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty\le x\le\infty$; $\mathrm{E}(X)=\mu$; $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$

חישוב הסתברויות עבור משתנה זה בעזרת טבלת ההתפלגות המצטברת של המשתנה הסטנדרטי $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, והחישוב מתבצע על ידי: $P\{X\le t\}=P\{Z\le\frac{t-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$,

את הערך $\Phi(t)$ קוראים בטבלה, הוא מקיים: $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

משתנה דו ממדי בדיד: פונקצית ההסתברות המשותפת: $P(X=x_i,Y=y_j)=P_{X,Y}(x_i,y_j)$

פונקצית **ההסתברות השולית** של X: $P_X(k)=P\{X=k\}=\sum_j P\{X=k,Y=j\}$

פונקצית **ההסתברות המותנית** של X בהינתן Y=j: $P_{X/Y}(k/j)=P\{X=k/Y=j\}=\frac{P\{X=k,Y=j\}}{P\{Y=j\}}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $P_{X,Y}(x_i,y_j)=P_X(x_i)P_Y(y_j)$ לכל הערכים האפשריים i ו- j.

משתנה דו ממדי רציף: פונקצית הצפיפות המשותפת: $f_{X,Y}(x,y)$

פונקצית **הצפיפות השולית** של X: $f_X(x)=\int f_{X,Y}(x,y)dy$

פונקצית **הצפיפות המותנית** של X בהינתן Y=y: $f_{X/Y}(x/y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

שני משתנים: X, Y יקראו **בלתי תלויים** אם $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ **לכל** הערכים האפשריים x,y.

תכונות התוחלת והשונות:

$$E[aX+b]=aE[X]+b \quad ; \quad \mathrm{V}[aX+b]=a^2V[X]$$

$$E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i] \quad ; \quad V[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}V[X_i]+\sum_{i\ne j}^{\text{"}n^2-n\text{"}}Cov(X_i,X_j)$$

$$\mathrm{Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)} \quad ; \quad \rho\mathrm{(X,Y)}=\frac{\mathrm{Cov(X,Y)}}{\sigma\mathrm{(X)}\sigma\mathrm{(Y)}}$$

$$\mathrm{Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y)} \quad ; \quad \mathrm{Cov(X,Y+Z)=Cov(X,Y)+Cov(X,Z)}$$

סכום מקרי של משתנים מקריים: $V[S_N]=E[N]V[X]+V[N]E^2[X]$; $\mathrm{E[S_N]}=E[N]E[X]$; $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$

נוסחת התוחלת השלמה : $E[X]=\sum_j E(X/Y=j)P\{Y=j\}=\sum_j E(X/B_j)P\{B_j\}$

מדגם מקרי פשוט הוא אוסף של מ״מ בלתי תלויים, לכולם אותה התפלגות.

ממוצע המדגם הוא : $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, והוא מקיים : $E[\overline{X_n}]=E[X]\ \ ;\ \ V[\overline{X_n}]=\frac{V[X]}{n}$

אי שויונים וחוקי גבול:

אי שויון מרקוב : אם X משתנה מקרי אי שלילי ולו תוחלת E[X] אז קיים : $P\{X\ge t\}\le\frac{E[X]}{t}$.

אי שויון צ'בישב : אם X משתנה שלו תוחלת E[X] ושונות V (X) אז קיים : $P\{|X-E[X]|\ge t\}\le\frac{V[X]}{t^2}$

(ה)חוק (החלש של) המספרים הגדולים : כאשר n שואף לאינסוף, ממוצע המדגם שואף לתוחלת המשתנה.

משפט הגבול המרכזי : עבור מדגם מקרי פשוט קיים, עבור n מספיק גדול ($n\ge 30$) :

אם X משתנה מקרי עם תוחלת $E(X)=\mu$ ושונות $V(X)=\sigma^2$ אזי :

$$\overline{X_n}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$$

קרוב נורמלי למשתנה בינומי : עבור X משתנה בינומי : $X\sim B(n,p)$

כאשר n מספיק גדול, כך ש : $np>5$ וגם : $nq>5$, מתקיים : $X\sim N(np,npq)$

תיקון רציפות : $P\{X<k\}=\Phi\left(\frac{k-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)\ \ ;\ \ P\{X\le k\}=\Phi\left(\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$

ומספר נוסחאות מתמטיות לסיום:

- טור חשבוני (אריתמטי):

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}\qquad ;\qquad a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

ולדוגמא סכום המספרים הטבעיים הוא:

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{(1+n)\cdot n}{2}$$

- טור הנדסי (גיאומטרי):

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a\frac{(1-q^n)}{1-q}\qquad ;\qquad a_n=a\cdot q^{n-1}$$

ובפרט כאשר $0\le q<1$

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i=a\frac{1}{1-q}$$

Table of Normal Commulative Distribion Function

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

$\phi(Z)$	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.98	0.99	0.995	0.999
z	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090

פתרון

פתרון מועד ב
90911

מבוא להסתברות

פתרון בחינה

שאלה 1 (21 נקודות)

בקופסא יש 10 כדורים, חלקם לבנים. מוציאים מהקופסא 4 כדורים עם החזרה.
ההסתברות להוציא כדור אחד לבן שווה להסתברות להוציא שני כדורים לבנים.

א. כמה כדורים לבנים יש בקופסא?

ב. מוציאים מהקופסא 4 כדורים ללא החזרה. מה ההסתברות להוציא 2 כדורים לבנים?

ג. מהקופסא מוציאם כדורים עם החזרה, עד שנוציא 4 כדורים לבנים. מה ההסתברות שהוצאנו 10 כדורים?

פתרון

א.

X = מספר הכדורים הלבנים שנוציא, $X \sim B(4,\ p)$

$$P(X=1)=P(X=2) \quad \Rightarrow \quad \binom{4}{1}p(1-p)^3=\binom{4}{2}p^2(1-p)^2$$

$$4(1-p)=6p \quad \Rightarrow \quad 10p=4 \quad \Rightarrow \quad p=0.4 \quad \Rightarrow \quad \frac{w}{10}=0.4 \quad \Rightarrow \quad w=4$$

בכך יש 4 כדורים לבנים.

ב.

Y = מספר הכדורים הלבנים שנוציא,

$$Y \sim H(10,\ 4,\ 4) \quad \Rightarrow \quad P(Y=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}}=\frac{6\times 15}{210}=0.4286$$

ג.

$$\binom{9}{3}\times 0.4^3\times 0.6^6\times 0.4$$

שאלה 2 (32 נקודות)

הטבלה הבאה מתארת התפלגות משותפת של Y, X :

X \ Y	1	2	3
1	0.03	?	0.27
2	0.02	0.22	0.16

א. מהי ההסתברות החסרה בטבלה? האם Y, X בלתי תלויים?

ב. מהי התוחלת של Y אם נתון $X=2$?

ג. מהי השונות של X?

ד. חשבו את ההסתברות : $P(X+Y\le 3)$.

פתרון

א.

X \ Y	1	2	3	$P_X(x)$
1	0.03	0.3	0.27	0.6
2	0.02	0.22	0.16	0.4
$P_Y(y)$	0.05	0.52	0.43	1

$$P(X=1,Y=2)=0.3\ne 0.312$$
$$P(X=1)P(Y=2)=0.6\times 0.52=0.312$$

Y,X תלויים.

ב.

$$E(Y\mid X=2)=1\times\frac{0.02}{0.4}+2\times\frac{0.22}{0.4}+3\times\frac{0.16}{0.4}=2.35$$

ג.

$$V(X)=1^2\times 0.6+2^2\times 0.4-\left(1\times 0.6+2\times 0.4\right)^2=0.24$$

ד.

$$P(X+Y\le 3)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=0.35$$

שאלה 3 (47 נקודות: סעיף א' 7 נק', כל סעיף אחר 8 נק')

באזור מסוים הטמפרטורה היומית בימות החורף מתפלגת נורמלית עם תוחלת $13°$, וסטיית תקן $4°$.

בודקים ממוצע טמפרטורה על פני 36 ימים. אם ממוצע הטמפרטורה יורד מתחת ל- $12°$, החורף נחשב קר במיוחד. נניח שימים שונים הם בלתי תלויים מבחינת הטמפרטורה הנמדדת בהם.

א. מה ההסתברות שחורף שנבדק, היה קר במיוחד?

ב. מה ההסתברות שבמשך חמישה ימים ברצף, הטמפרטורה היומית תהייה מעל $14°$?

ג. מתוך 60 ימים, מה ההסתברות שיהיו לכל היותר 25 ימים בהם הטמפרטורה היומית נמוכה מ- $14°$?

מפעל מעסיק 60 עובדים. בחורף קר במיוחד ממוצע ימי מחלה לעובד הוא 8 עם סטיית תקן 3, ובחורף רגיל ממוצע ימי מחלה לעובד הוא 4 עם סטיית תקן 2.

ד. מהי תוחלת מספר ימי מחלה לעובד?

ה. מהי שונות מספר ימי מחלה לעובד?

ו. מה ההסתברות שסך ימי המחלה של העובדים במפעל בחורף לא יעלה על 300?

פתרון

א.

$$\bar{T}_{36} \sim N\left(13,\ \frac{4^2}{36}\right)$$

$$P\left(\bar{T}_{36} < 12\right) = \Phi\left(\frac{12-13}{4/6}\right) = \Phi\left(-1.5\right) = 1-\Phi\left(1.5\right) = 1-0.9332 = 0.0668$$

ב.

נגדיר: T = טמפרטורה יומית, נתון: $T \sim N\left(13,\ 4^2\right)$

$$P(T > 14) = 1-\Phi\left(\frac{14-13}{4}\right) = 1-\Phi\left(0.25\right) = 1-0.5987 = 0.4013$$

ההסתברות שבמשך 5 ימים הטמפרטורה תהייה מעל $14°$ היא: $0.4013^5 = 0.0104$

ג.

נגדיר: Y = מספר הימים בהם הטמפרטורה היומית נמוכה מ- $14°$: $Y \sim B\left(60,\ 0.5987\right)$

$60 \times 0.4013 > 5,\ \ 60 \times 0.5987 > 5$ ולכן קרוב נורמלי לבינומי: $Y \sim N\left(35.92,\ 14.42\right)$

$$P(Y \le 25) = \Phi\left(\frac{25+0.5-35.92}{\sqrt{14.42}}\right) = \Phi\left(-2.74\right) = 1-\Phi\left(2.74\right) = 0.0031$$

ד.

נגדיר: X = מספר ימי מחלה לעובד

$$E(X) = E(X \mid \bar{T}_{36} < 12)P(\bar{T}_{36} < 12) + E(X \mid \bar{T}_{36} \ge 12)P(\bar{T}_{36} \ge 12) = 8 \times 0.0668 + 4 \times 0.9332 = 4.27$$

ה.

נגדיר: X = מספר ימי מחלה לעובד

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$E(X^2)=E(X^2\mid\overline{T}_{36}<12)P(\overline{T}_{36}<12)+E(X^2\mid\overline{T}_{36}\ge 12)P(\overline{T}_{36}\ge 12)=$$

$$=(9+64)\times 0.0668+(4+16)\times 0.9332=23.54$$

$$V(X)=23.54-4.27^2=5.31$$

ו.

$$\sum_{i=1}^{60} X_i \sim N(60\times 4.27,\ 60\times 5.31)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i \le 300\right)=\Phi\left(\frac{300-256.2}{\sqrt{318.6}}\right)=\Phi(2.45)=0.9929$$