המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב
אפקה
הנדסה במרכז
המחלקה למדעי היסוד- מתמטיקה
Department of Basic Sciences

חדו"א 2

תרגיל מספר 5 – דיפרנציאל, קירוב ליניארי, נגזרת מכוונת, כלל שרשרת, נגזרת מסדר גבוה, נוסחת טיילור

שאלה 1

בצעו קירוב ליניארי של פונקציה מתאימה בסביבה של נקודה מתאימה על מנת לחשב את הערך המקורב של הביטויים הבאים: (בחישובים הניחו כי $\pi \approx 3.14$, $e \approx 2.71$).

א. $1.08^{3.96}$

ב. $\dfrac{\sin 1.49 \cdot \arctan 0.07}{2^{2.95}}$ (רמז: כדאי לבחור $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$) (רשות)

ג. $2.68^{\sin 0.05}$

שאלה 2

תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בסביבה של הנקודה $(3,4)$. הקירוב הליניארי של f בסביבה של הנקודה נתון על ידי הנוסחה $f(x,y) \approx 0.6x + 0.8y$. מצאו את הקירוב הליניארי בסביבה של נקודה $(3,4)$ עבור הפונקציות הבאות:

א. $g(x,y) = 3f(x,y)$

ב. $h(x,y) = f^2(x,y)$

ג. $\varphi(x,y) = \ln f(x,y)$ (רשות)

שאלה 3

באיזה כיוון הנגזרת הכיוונית בנקודה $(0,1)$ של הפונקציה $f(x,y) = ye^{-xy}$ שווה ל -1?

שאלה 4

תהי
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

הוכח שכל הנגזרות המכוונות בנקודה $(x,y) = (0,0)$ קיימות אבל הפונקציה היא לא רציפה בנקודה.

הערה חשובה לשאלה: את הנגזרות ב $(x,y) = (0,0)$ צריך לחשב על פי ההגדרה. אחרת תקבלו אולי תוצאות לא נכונות כי הפונקציה היא **לא דיפרנציאבילית** בנקודה (היא לא רציפה).

שאלה 5 (רשות)

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה בשלושה משתנים, דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0,z_0). הוכיחו כי בנקודה הזאת הגרדיאנט $\vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0)$ מאונך למשטח גובה מתאים $f(x,y,z)=C$.
נסחו והוכיחו את הטענה גם למקרה של פונקצית שני משתנים.

שאלה 6

נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^3-xy^2-4x^2+3x+x^2y$.

א. מצאו את הערך המינימלי ואת הערך המקסימלי של נגזרת כיוונית $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0.5,1)$ ביחס לוקטור הכיוון $\vec{s}$, בהנחה כי $\|\vec{s}\|=1$. מהם הכיוונים, שבהם מתקבלים הערך המינימלי והערך המקסימלי ?

ב. מצאו את כל הכיוונים $\vec{s}$ ($\|\vec{s}\|=1$), כך ש – $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0.5,1)=0$.

שאלה 7

תהי $g(x,y,z)=x^2+yz$ פונקציה בשלושה משתנים.

א. מצאו את הכיוון מהנקודה $(2,-1,1)$, כך שבכיוון הזה קצב ירידת הפונקציה יהיה מקסימלי.

ב. רשמו את המשוואה הפרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה $(2,-1,1)$ בכיוון שמצאתם בסעיף הקודם.

ג. מצאו את כל נקודות החיתוך של הישר מסעיף ב׳ עם משטח הגובה $g(x,y,z)=2$.

ד. על הקו הישר שמצאתם בסעיף ב׳ מצאו נקודה (x_0,y_0,z_0) שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(2,-1,1)$, כך ש – $g(x_0,y_0,z_0)=2$.

ה. יהי $g_L(x,y,z)$ קירוב ליניארי של $g(x,y,z)$. על הקו הישר שמצאתם בסעיף ב׳ מצאו נקודה (x_0,y_0,z_0) שנמצאת על משטח הגובה $g_L(x,y,z)=2$ של הקירוב הליניארי והקרובה ביותר לנקודה $(2,-1,1)$.

שאלה 8

מצאו משוואה פרמטרית של הישר המשיק לקו החיתוך של המשטחים $4x^2+y^2+z^2=9$ ו – $z=x^2+y^2$ בנקודה $(-1,1,2)$. (רמז: המשיק המבוקש הינו ישר החיתוך בין המישורים המשיקים למשטחים הנתונים בנקודה.)

שאלה 9 (רשות)

יהי σ משטח הנתון על ידי המשוואה $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{c}$, כאשר $c>0$ קבוע. יהי π מישור משיק ל – σ בנקודה (x_0,y_0,z_0).

א. הוכיחו כי π נתון על ידי המשוואה $\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{c}$.

ב. הוכיחו כי סכום המרחקים מראשית הצירים לנקודות החיתוך של π עם צירי הקואורדינטות הינו קבוע.

שאלה 10

עבור הפונקציות הבאות חשבו את $\frac{df}{dt}$ על ידי שימוש בכלל שרשרת:

א. $f(x,y)=e^{3x+2y}$, $x=\cos t$, $y=t^2$.

ב. $f(x,y,z)=xyz$, $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\tan t$.

ג. $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=H$.

שאלה 11 (רשות)

תהיינה $u=f(x)$, $v=g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x_0. על ידי שימוש בכלל השרשרת הוכיחו כי:

א. $(uv)'=u'v+uv'$

ב. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, בהנחה כי $g(x_0)\neq 0$.

שאלה 12

חשבו לפי ההגדרה את הנגזרות המעורבות מסדר שני עבור הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$?

שאלה 13

הוכיחו כי הפונקציה $z=2\cos^2\left(y-\frac{x}{2}\right)$ מקיימת את המשוואה $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

שאלה 14 (רשות)

תהי f פונקציה גזירה ב $\mathbb{R}$ – , ותהי $u(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ פונקציה בשלושה משתנים.

א. הוכיחו כי $u_x^2+u_y^2+u_z^2=\left(f'\right)^2$.

ב. חשבו את $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

שאלה 15

תהינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ שתי פונקציות בעלות נגזרות רציפות עד סדר שני. נגדיר פונקציה $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על ידי $h(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$. הוכיחו כי h מקיימת את משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

<u>שאלה 16</u> (רשות)

תהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת את משוואת Laplace: $f_{xx}+f_{yy}=0$.
נגדיר $u(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. (כלומר $u(r,\theta)$ היא פונקציה $f(x,y)$ בקואורדינטות קוטביות). הוכיחו כי

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

<u>שאלה 17</u>

עבור הפונקציות הבאות מצאו פולינום טיילור מסדר נתון סביב נקודה נתונה:

א. $f(x,y)=(x-y)^3+1$ סדר: 3, נקודה: $(x_0,y_0)=(-1,1)$.

ב. $f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ סדר: 2, נקודה: $(x_0,y_0)=(-2,1)$. (רשות)

ג. $f(x,y)=y^x$ סדר: 2, נקודה: $(x_0,y_0)=(1,1)$.

ד. $f(x,y)=\frac{y^3}{x}$ סדר: 2, נקודה: $(x_0,y_0)=(1,-1)$. (רשות)

<u>שאלה 18</u>

רשמו את פיתוח טיילור מסדר 5 לפונקציה $f(x,y)=e^{x^2}\sin(2y)$ בסביבת הנקודה $(x_0,y_0)=(0,0)$. <u>רמז</u>: העזרו בטורי מקלורן ידועים $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ו – $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

<u>שאלה 19</u> (רשות)

Express the polynomial $p(x,y)=x^2+xy+y^2$ in terms of powers of $(x-a)$ and $(y-b)$, where a,b are given real parameters.