

מבחן סוף הקורס במבוא להסתברות (90911)

שעה: 17:00
מתרגלים:
גב' רבקה יעקובוב

תאריך הבחינה: 11.07.2016

מועד:
מרצים:

ד"ר אהרון גיטניק,
ד"ר חנה קלבנר,
ד"ר מאיר אזור.

מס' הקציון: 180 יקאר

הוראות למבחן:

משך המבחן: 180 דקות.

יש לענות על כל השאלות.

יש להתחיל פתרון של כל שאלה בדף חדש.

יש לנמק היטב את הפתרון. תשובה לא מנומקת לא תזכה במלוא הניקוד.

אין לכתוב בעפרון או בצבע אדום.

אין להשתמש במחשב אישי או נייד. אין להשתמש בטלפון סלולארי או סמארטפון.

אין להעביר חומר בין הנבחנים.

מותר השימוש ב 3 דפי נוסחאות ובטבלת התפלגות נורמלית

בהצלחה!

שאלה מס' 1

רינה מדברת עם אחותה בכל יום בנייד או ב-skype, אך לא בשניהם. **ברבע** מן הימים רינה מדברת עם אחותה ב-skype ובשאר הימים בנייד. זמן השיחה ב-skype מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות. זמן השיחה בשימוש בנייד מתפלג גם הוא מעריכית וידוע כי ההסתברות שמשך זמן השיחה יהיה קטן מ-15 דקות גדולה מההסתברות שמשך זמן השיחה יהיה לפחות 15 דקות ב-0.5.

א. חשבו את התוחלת ואת סטיית התקן של משך זמן השיחה בנייד.

(בהמשך אם יש צורך בנתונים אלה יש להשתמש בתוחלת של 10 דקות וסטיית תקן 10 דקות).

ב. נבחר יום אקראי, מהי ההסתברות שמשך זמן השיחה של רינה באותו היום גדול מ-10 דקות?

(בהמשך אם יש צורך בנתון זה יש להשתמש בהסתברות 0.4).

ג. בוחרים באקראי שבוע (7 ימים). מה ההסתברות שבאותו השבוע יהיו לפחות 2 ימים בהם משך זמן השיחה של רינה עם אחותה היה גדול מ-10 דקות?

ד. מהי תוחלת משך זמן שיחה יומית? **(בהמשך אם יש צורך בנתון זה יש להשתמש בתוחלת 12.5).**

ה. מהי סטיית התקן של משך זמן שיחה יומית? **(בהמשך אם יש צורך בנתון זה יש להשתמש בסטיית תקן 14).**

ו. מה ההסתברות שבמשך 60 ימים, סך משך השיחות יהיה לכל היותר 720 דקות?

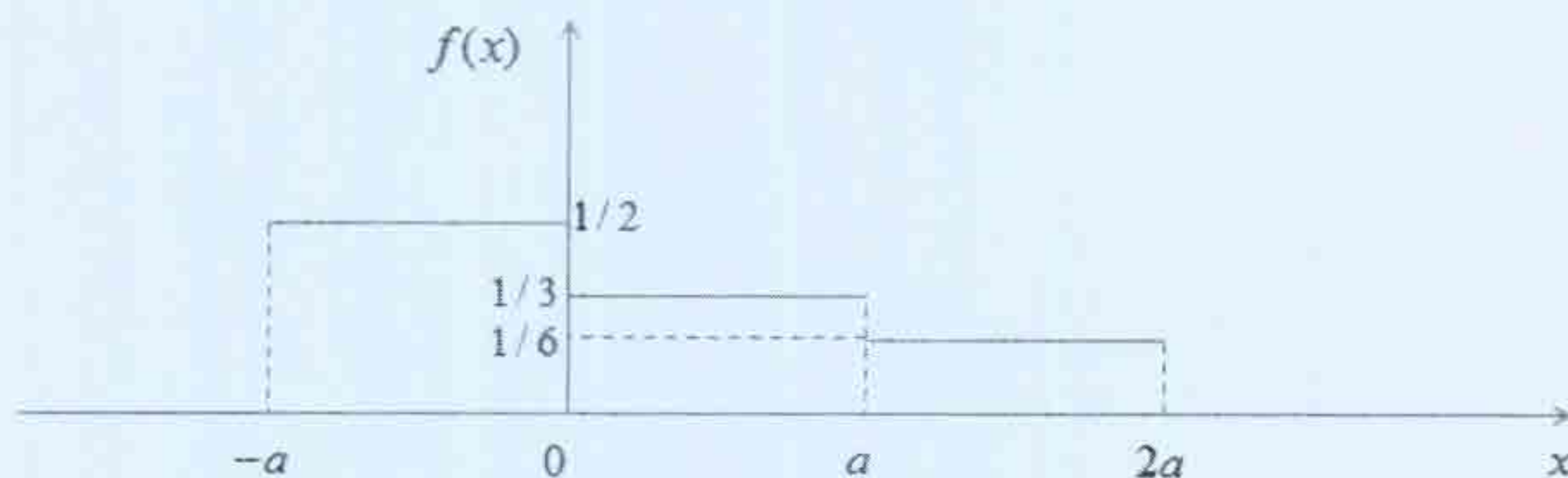
שאלה מס' 2

מספר הפניות המגיעות לתמיכה טכנית בשעה מתפלג פואסונית. נתון שההסתברות שבמשך שעה יגיעו לכל היותר שתי פניות היא פי 3.7 מההסתברות שבשעה תגיע בדיוק פניה אחת.

- חשבו את התוחלת ואת סטיית התקן של מספר הפניות בשעה, כאשר תוחלת מספר הפניות בשעה גדולה מ-3.
- (בהמשך, אם יש צורך בנתונים אלה, יש להשתמש בתוחלת 5 ובסטיית תקן 2.2).
- במשך השבוע התמיכה הטכנית עובדת 45 שעות. מהי ההסתברות שבמשך השבוע יגיעו לפחות 200 פניות?
- מהי ההסתברות שבמשך חודש של 180 שעות עבודה, יהיו לפחות 12 שעות שבכל אחת מהן הגיעה לכל היותר פניה אחת?

שאלה מס' 3

יוסי משתתף במשחק ברידג' פעם בשבוע. הרווח (במאות ₪) של יוסי במשחק שבועי (כאשר הפסד הוא רווח שלילי) מתפלג לפי פונקציית הצפיפות המתוארת בגרף הבא:



- מהו ערכו של הפרמטר a ?
- מהי תוחלת הרווח של יוסי במשחק?
- מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של הרווח של יוסי? בדוק את רציפות הפונקצייה.
- אם ידוע שבשבוע מסוים יוסי הרוויח לכל היותר 150 ₪, מהי ההסתברות שבאותו השבוע הרוויח יותר מ-80 ₪?

פתרון

פתרון מלא 3 ק'
11.07.2016

פתרון - מבחן סוף הקורס במבוא להסתברות (90911)

שאלה מס' 1

רינה מדברת עם אחותה בכל יום בנייד או ב-skype, אך לא בשניהם. **ברבע** מן הימים רינה מדברת עם אחותה ב-skype ובשאר הימים בנייד. זמן השיחה ב-skype מתפלג מעריכית עם תוחלת של 20 דקות. זמן השיחה בשימוש בנייד מתפלג גם הוא מעריכית וידוע כי ההסתברות שמשך זמן השיחה יהיה קטן מ-15 דקות גדולה מההסתברות שמשך זמן השיחה יהיה לפחות 15 דקות ב-0.5.

- א. חשבו את התוחלת ואת סטיית התקן של משך זמן השיחה בנייד.
(בהמשך אם יש צורך בנתונים אלה יש להשתמש בתוחלת של 10 דקות וסטיית תקן 10 דקות).
ב. נבחר יום אקראי, מהי ההסתברות שמשך זמן השיחה של רינה באותו היום גדול מ-10 דקות?
(בהמשך אם יש צורך בנתון זה יש להשתמש בהסתברות 0.4).
ג. בוחרים באקראי שבוע (7 ימים). מה ההסתברות שבאותו השבוע יהיו לפחות 2 ימים בהם משך זמן השיחה של רינה עם אחותה היה גדול מ-10 דקות?
ד. מהי תוחלת משך זמן שיחה יומית?
ה. מהי סטיית התקן של משך זמן שיחה יומית?
ו. מה ההסתברות שבמשך 60 ימים, סך משך השיחות יהיה לכל היותר 720 דקות?

פתרון

- א. נגדיר: T_s = משך זמן שיחה בסקייפ: $T_s \sim \exp(1/20)$
 T_n = משך זמן שיחה בנייד: $T_n \sim \exp(\lambda)$
 $P(T_n \leq 15) = P(T_n > 15) + 0.5$
 $1 - e^{-15\lambda} = e^{-15\lambda} + 0.5 \Rightarrow e^{-15\lambda} = 0.25 \Rightarrow \lambda = 0.0924$
 $\Rightarrow E(T_n) = 10.82, \quad \sigma(T_n) = 10.82$
ב.
 $P(T > 10) = P(T_s > 10) \times 0.25 + P(T_n > 10) \times 0.75 =$
 $= e^{-10/20} \times 0.25 + e^{-10/10} \times 0.75 = 0.4275$
ג. נגדיר Y = מספר הימים בהם זמן השיחה גדול מ-10: $Y \sim B(7, 0.4)$
 $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 0.6^7 - \binom{7}{1} 0.4 \times 0.6^6$
ד.
 $E(T) = E(T_s) \times 0.25 + E(T_n) \times 0.75 = 20 \times 0.25 + 10 \times 0.75 = 12.5$

ה.

$$\begin{aligned} E(T^2) &= E(Ts^2) \times 0.25 + E(Tn^2) \times 0.75 = \\ &= (20^2 + 20^2) \times 0.25 + (10^2 + 10^2) \times 0.75 = 350 \\ V(T) &= E(T^2) - E^2(T) = 350 - 12.5^2 = 193.75 \end{aligned}$$

ו.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{60} T_i &\sim N(60 \times 12.5, 60 \times 193.75) \\ P\left(\sum_{i=1}^{60} T_i \leq 720\right) &= \Phi\left(\frac{720 - 750}{\sqrt{60 \times 193.75}}\right) = \Phi(-0.28) = 1 - \Phi(0.28) = 0.3897 \end{aligned}$$

שאלה מס' 2

מספר הפניות המגיעות לתמיכה טכנית בשעה מתפלג פואסונית. נתון שההסתברות שבמשך שעה יגיעו לכל היותר שתי פניות היא פי 3.7 מההסתברות שבשעה תגיע בדיוק פניה אחת.

א. חשבו את התוחלת ואת סטיית התקן של מספר הפניות בשעה, כאשר תוחלת מספר הפניות בשעה גדולה מ-3.

(בהמשך, אם יש צורך בנתונים אלה, יש להשתמש בתוחלת 5 ובסטיית תקן 2.2).

ב. במשך השבוע התמיכה הטכנית עובדת 45 שעות. מהי ההסתברות שבמשך השבוע יגיעו לפחות 200 פניות?

ג. מהי ההסתברות שבמשך חודש של 180 שעות עבודה, יהיו לפחות 12 שעות שבכל אחת מהן הגיעה לכל היותר פניה אחת?

פתרון

$$X \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow P\{X=k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} P\{X \leq 2\} &= 3.7P(X=1) \Rightarrow e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) = 3.7 \cdot \lambda e^{-\lambda} \\ \Rightarrow \lambda^2 - 5.4\lambda + 2 &= 0 \Rightarrow \lambda = 2.7 \pm \sqrt{2.7^2 - 2} = 2.7 \pm 2.3 = 5 \quad (> 3) \end{aligned}$$

$$\lambda = 5 \Rightarrow E[X] = 5 ; \sigma_x = \sqrt{5} = 2.236$$

$$\sum_1^{45} X_n \sim N(45 \cdot 5, 45 \cdot 2.2^2) \sim N(225, 14.76^2) \quad \text{ב.}$$

$$P\left\{\sum_1^{45} X_n \geq 200\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{200 - 225}{14.76}\right) = 1 - \Phi(-1.69) = \Phi(1.69) = 0.9545$$

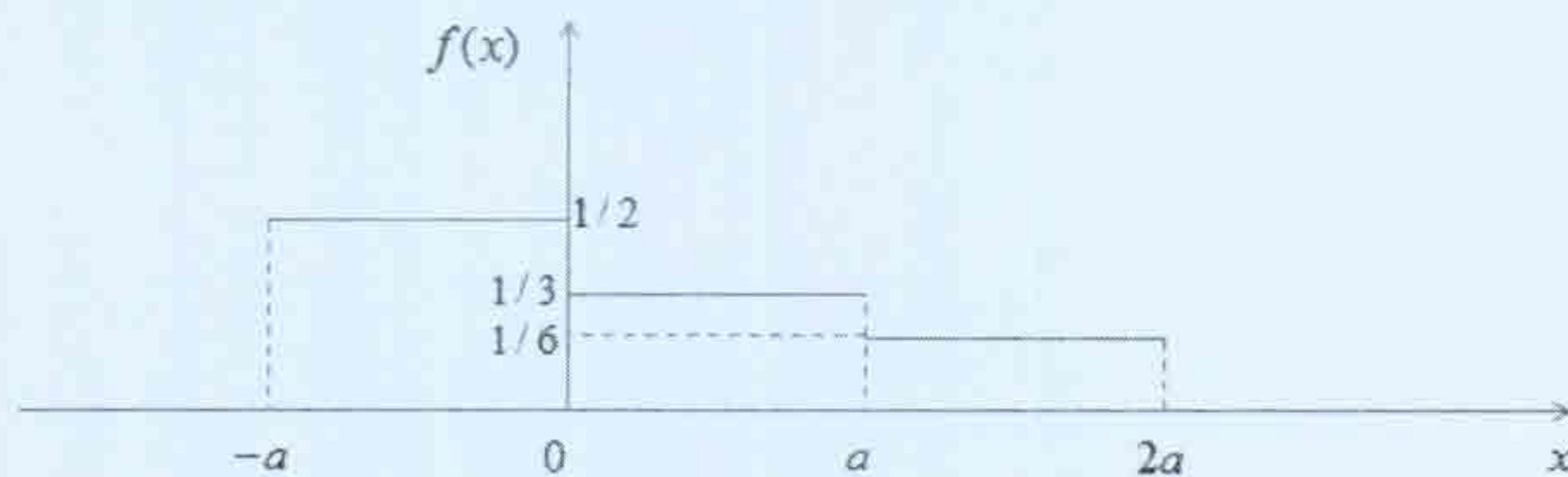
ג. נסמן ב Y את מספר השעות בהן...

$$P\{X \leq 1\} = e^{-5}(1+5) = 0.04 \Rightarrow Y \sim \text{Bin}(180, 0.04) \sim N(7.2, 2.63^2)$$

$$P\{Y \geq 12\} = 1 - \Phi\left(\frac{12 - 0.5 - 7.2}{2.63}\right) = 1 - \Phi(1.63) = 1 - 0.9484 = 0.0516$$

שאלה מס' 3

יוסי משתתף במשחק ברידג' פעם בשבוע. הרווח (במאות ₪) של יוסי במשחק שבועי (כאשר הפסד הוא רווח שלילי) מתפלג לפי פונקציית הצפיפות המתוארת בגרף הבא:



- מהו ערכו של הפרמטר a ?
- מהי תוחלת הרווח של יוסי במשחק?
- מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של הרווח של יוסי?
- אם ידוע שבשבוע מסוים יוסי הרוויח לכל היותר 150 ₪, מהי ההסתברות שבאותו השבוע הרוויח יותר מ-80 ₪?

פתרון

$$1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a = a \Rightarrow a = 1$$

ב.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-1}^2 xf(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{2}dx + \int_0^1 \frac{x}{3}dx + \int_1^2 \frac{x}{6}dx = \dots = \frac{1}{6}$$

.۲

$$F_X(x) = \int_{-1}^x f(x) dx \Rightarrow$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x+1}{2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2x+3}{6}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+4}{6}, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

.۳

$$P(X > 0.8 / X \leq 1.5) = \frac{P(0.8 < X \leq 1.5)}{P(X \leq 1.5)} = \frac{(5.5/6) - (4.6/6)}{(5.5/6)} = 0.1636$$