פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"א סמסטר א שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות.
יש לנמק את התשובות באופן מלא (אלא אם כתוב במפורש שלא צריך)

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה
$$\begin{cases} ax & +ay & +(1-a)z & = & 2a+3 \\ x & & -z & = & 2 \\ a^2x & +ay & +(1-a)z & = & 3a^2-4a+6 \end{cases}$$

(i) (8 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר a עבורם יש למערכת פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרונות.

(ii) (7 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a וקטור העמודה $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (5 נקודות) בסעיף זה המטריצה A היא מטריצה מסדר 4×5, b עמודה מסדר 1×5, והמטריצה $(A|b)$ היא המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת המשוואות $Ax=b$. בכל אחד מהמקרים הבאים קבעו כמה פתרונות יש למערכת המשוואות הנתונה. אין צורך לנמק.

(i) כמה פתרונות יש אם נתון שהדרגה של המטריצה $(A|b)$ שווה **5**, כלומר $\operatorname{rank}(A|b)=5$?

(ii) כמה פתרונות יש אם נתון שהדרגה של המטריצה A שווה **4**, כלומר $\operatorname{rank}(A)=4$?

פתרון

א. נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת של המערכת:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1-a \\ 1 & 0 & -1 \\ a^2 & a & 1-a \end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3-R_1}{=} \begin{vmatrix} a & a & 1-a \\ 1 & 0 & -1 \\ a^2-a & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a^2-a)(-a) = -a^2(a-1)$$

(i) קיבלנו כי המטריצה המצומצמת הפיכה כאשר $a\neq 0,1$ ולכן למערכת יש פתרון יחיד אם"ם $a\neq 0,1$.
נבדוק את המקרים הנותרים ע"י הצבה:

- עבור $a=0$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה, כלומר דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת אין פתרונות.

- עבור $a=1$ נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(ii) נציב את העמודה כפתרון ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} 3a & +2a & +(1-a)\,1 & = & 2a+3 \\ 3 & & -1 & = & 2 \\ 3a^2 & +2a & +(1-a) & = & 3a^2-4a+6 \end{cases}$$

כלומר

$$4a+1=2a+3, 2=2, 3a^2+a+1=3a^2-4a+6$$

ונקבל כי $a=1$.

ב. הדרגה של המטריצה היא לכל היותר 4 כי זה מספר העמודות שלה.

(i) למערכת אין פתרונות כי הדרגה של המטריצה המצומצמת היא לכל היותר 4, ולכן בהכרח קטנה מדרגת המטריצה המורחבת.

(ii) למערכת יש פתרון יחיד כי דרגת המטריצה שווה למספר העמודות.

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (12 נקודות) נסמן $w=\begin{pmatrix} c+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} 1 \\ c+1 \\ 0 \end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$, ו־$U=\textbf{Span}\left\{u,v,w\right\}$.

(i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר c הקבוצה $\{u,v,w\}$ תלויה לינארית.

(ii) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר c העמודה $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ נמצאת ב־U?

ב. (8 נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3, עם בסיס $\{v_1,v_2,v_3\}$.
קבעו האם הקבוצה $\{3v_1-2v_2-v_3, v_1+2v_3, 5v_1+6v_2-4v_3\}$ מהווה בסיס של V.

פתרון

א. נתבונן במטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & c+1 \\ 1 & c+1 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(i) קבוצה של שלושה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$ היא תלויה לינארית אם"ם היא לא בסיס, אם"ם המטריצה שהם עמודותיה לא הפיכה, כלומר הדטרמיננטה שלה שווה לאפס. נמצא אם כן עבור אילו ערכים של הפרמטר c הדטרמיננטה הבאה שווה לאפס:

$$0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+1 \\ 1 & c+1 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=c(1-(c+1)^2)=-c^2(c+2)$$

כלומר הקבוצה תלויה לינארית אם"ם $c=0,-2$.

(ii) מצאנו בסעיף הקודם כי עבור $c\neq 0,-2$ הקבוצה היא בסיס של $\mathbb{R}^3$, ולכן במקרה זה כל וקטור הוא צירוף לינארי של $\{u,v,w\}$. נבדוק בשאר המקרים:

i. עבור $c=0$: העמודה תלויה לינארית בעמודות הנתונות אם"ם למשוואה $Ax=b$ יש פתרון עבור

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & c+1 \\ 1 & c+1 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת זו היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

למטריצה זו יש שורת סתירה, כלומר דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת אין פתרון, כלומר הוקטור לא נמצא ב־U.

ii. עבור $c = -2$: באותו אופן כמו במקרה הקודם, העמודה תלויה לינארית בעמודות הנתונות אם"ם למשוואה $Ax = b$ יש פתרון עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & c+1 \\ 1 & c+1 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת זו היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

דרגת המטריצה המצומצמת שווה לדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת יש פתרון, כלומר הוקטור נמצא ב־U.

ב. הקבוצה מכילה 3 וקטורים, ולכן היא בסיס אם"ם היא בת"ל. (כי זו קבוצה בת"ל שמספר איבריה הוא המימד) קבוצת וקטורים היא בת"ל אם"ם וקטורי הקואורדינטות של איבריה הם קבוצה בת"ל. מתקיים כי עבור הבסיס הנתון $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ וקטורי הקואורדינטות של איברי הקבוצה הם

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

נמצא תלויות לינאריות של איברי הקבוצה הזו ע"י דירוג של המטריצה שהן עמודותיה:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 14 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{7} R_3]{R_2 \to \frac{1}{4} R_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

דירוג שורות שומר על תלויות לינאריות של העמודות, וקיבלנו כי העמודות בסוף הדירוג בת"ל, ולכן גם בתחילת הדירוג העמודות הן בת"ל, ולכן גם קבוצת הוקטורים בV היא בת"ל ולכן בסיס של V

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

בשאלה זו נסמן $\mathbb{R}_n[x]$ את מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n (סומן בקורס גם ע"י $(P_n(\mathbb{R})$), ונסמן $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ את מרחב המטריצות מסדר $m \times n$.

א. (15 נקודות) תהי $\begin{array}{l} T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x] \\ T(p(x)) = (1+x)p(x) \end{array}$. מצאו בסיסים ומימדים של $\mathrm{Ker}T, \mathrm{Im}T$ וקבעו האם T חח"ע, ואם היא על.

ב. (5 נקודות) תהי $T : M_{2\times n} \to \mathbb{R}_n[x]$ העתקה לינארית. הראו T לא חח"ע עבור $n > 1$.

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

פתרון

א. ממשפט המימד נובע כי $\dim \mathbf{Im}T \leq \dim U = 3$ ולכן מימד התמונה לכל היותר 3. נשים לב כי

$$T(1) = 1 + x, T(1+x) = (1+x)^2, T((1+x)^2) = (1+x)^3,$$

כלומר הקבוצה $\{1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\} \subset \mathbf{Im}T$. כמו כן, זו קבוצה בת"ל (כי זו קבוצה של פולינומים ממעלות שונות), ולכן מימד התמונה הוא לפחות 3 (כי היא מכילה קבוצה בת"ל עם 3 איברים). מכאן שמימד התמונה שווה 3, והקבוצה המתוארת היא בסיס לתמונה. ממשפט המימד נובע כעת כי המימד של הגרעין שווה ל-0. כמו כן ההעתקה היא חח"ע כי מימד הגרעין שווה ל0, וההעתקה היא לא על כי מימד התמונה קטן ממימד הטווח.

ב. מימד התחום שווה ל$2n$, ומימד הטווח הוא $n+1$. כאשר $n > 1$ מתקיים כי $2n > n+1$, ולכן ההעתקה לא יכולה להיות חח"ע, כי $\dim \mathbf{Ker}T = 2n - \dim \mathbf{Im}T > 2n - (n+1) > 0$

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) תהיינה $S, T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$. נתון כי $ST - I = -S$.

(i) הוכיחו כי S הפיכה.

(ii) הוכיחו כי אם T סימטרית, אז S סימטרית.

ב. (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור כל טענה, אם היא נכונה הוכיחו אותה, ואם היא לא נכונה מצאו דוגמה נגדית שמפריכה אותה

(i) לכל שתי מטריצות ריבועיות מאותו הסדר מתקיים כי אם A, B הפיכות אז $A + B$ הפיכה.

(ii) לכל שתי מטריצות סימטריות A, B המטריצה AB סימטרית.

פתרון

א. נתון כי $ST - I = -S$

(i) מהמשוואה נובע כי $ST - I = -S \Leftrightarrow ST + S = I \Leftrightarrow S(T+I) = I$ ולכן S הפיכה.

(ii) נתון כי T סימטרית, ולכן

$$S^t = \left((T+I)^{-1}\right)^t = \left((T+I)^t\right)^{-1} = (T+I)^{-1} = S$$

ב. נפריך את שתי הטענות

(i) דוגמה נגדית: עבור $A = I, B = -I$ מתקיים כי שתיהן הפיכות, אבל $A + B = 0$ לא הפיכה.

(ii) דוגמה נגדית: עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ מתקיים ששתיהן סימטריות, אבל $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא סימטרית.

שאלה 5. (20 נקודות) נתונה המטריצה A מסדר 4×4 המקיימת

א. המטריצה $A - 5I$ לא הפיכה.

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

ב. הדרגה של A שווה 2.

ג. קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש $Av = 3v$.

1. (15 נקודות) הוכיחו כי A לכסינה ומצאו את הפולינום האפייני של A.

2. (5 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם B מטריצה עבורה קיימת C כך ש־ $AC = CB$, אז גם B לכסינה.

פתרון

א. מהנתונים נובע כי

(i) $A - 5I$ לא הפיכה, כלומר $|A-5I| = 0$ כלומר 5 הוא ע"ע של A, ולכן הריבוי הגיאומטרי שלו הוא לפחות 1.

(ii) $\text{rank}(A) = 2 < 4$ ולכן A לא הפיכה ולכן 0 הוא ע"ע של A. יתר על כן, הריבוי הגיאומטרי שלו הוא $dim\textbf{Ker}T = 4 - \textbf{rank}(A) = 4 - 2 = 2$.

(iii) $Av = 3v$ עבור $v \neq 0$ כלומר 3 הוא ע"ע של A. ולכן הריבוי הגיאומטרי שלו הוא לפחות 1.

מכאן שסכום הריבויים הגיאומטריים הוא לפחות 4. סכום הריבויים הגיאומטרים הוא לכל היותר 4, ולכן הריבוי הגיאומטרי של כל ע"ע שווה לריבוי האלגברי והמטריצה לכסינה. הפולינום האפייני שלה הוא $\lambda^2(\lambda-3)(\lambda-5)$

ב. הטענה לא נכונה. נניח B מטריצה לא לכסינה כלשהי, למשל $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. אזי עבור $P = 0$ מתקיים כי $AP = PB$, אבל B לא לכסינה.

שאלה 6. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (15 נקודות) יהי $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה פנימית הסטנדרטית, כלומר

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

תהי $S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(i) הראו כי S קבוצה אורתוגונלית.

(ii) השלימו את S לבסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^3$.

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

ב. (5 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. נתונים שני וקטורים u, v המקיימים

$$\langle u, v\rangle = -2, \|v\| = 2.$$

מצאו את הנורמה של u אם נתון כי $u+v, u-2v$ אורתוגונליים.

פתרון

א. המכפלה פנימית הסטדנדרטית היא

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

(i) נחשב את המכפלה הפנימית של שני הוקטורים: $\langle u, v\rangle = (-2)\cdot 2 + (-4)\cdot(-2) + (-4)\cdot 1 = 0$, ולכן הקבוצה אורתוגונלית.

(ii) כדי להשלים את הקבוצה לבסיס אורתוגונלי צריך למצוא וקטור שונה מאפס שאורתוגונלי לשניהם, כלומר $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ שמקיים כי

$$\begin{cases} -2x-4y-4z=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$$

מפתרון המערכת מתקבל כי קבוצת הפתרונות היא $\mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$ ולכן הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

היא השלמה לבסיס.

ב. נחשב את המכפלה הפנימית של שני הוקטורים $u+v, u-2v$

$$0 = \langle u+v, u-2v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle - 2\langle u, v\rangle - 2\langle v, v\rangle = \|u\|^2 - 2 + 4 - 8 \Leftrightarrow \|u\|^2 = 6$$

כלומר $\|u\| = \sqrt{6}$

בהצלחה

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן במאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.