מרצים : ד"ר ליאת אבן דר מנדל, ד"ר מיקה גבל, ד"ר דבורה קפלן, ד"ר ליאור רוזנצויג.

מתרגלים : גב' רינת חסקי , מר ירון יגר , גב' אלינה קנדליס, מר רם קץ, מר חוזה פרס, מר איתן רוזן.

פתרון Y

שאלה 1 - (20 נק')

א.(15 נק') מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3^n n^5}(3x-12)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

ב.(5 נק') נסמן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3^n n^5}(3x-12)^n=S(x)$. מצאו טור מספרים המתכנס למספר $\int_4^{4.5}S(x)\,dx$,

כלומר מצאו טור $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ כך ש: $\int_4^{4.5}S(x)\,dx=\sum_{n=2}^{\infty}b_n$.

פתרון:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3^n n^5}(3x-12)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3^n n^5}3^n(x-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^5}(x-4)^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}{\sqrt[n]{n^5}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[n]{\boxed{\sqrt[n]{n}}}^{\nearrow 1}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5_{\searrow 1}}\right)}=1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in(3,5)$ ומתבדר לכל $x\notin[3,5]$ נבדוק בקצוות :

$\boxed{x=5}\leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^5}$. הסדרה חיובית לכן נוכל להפעיל מבחן השוואה השני :

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^5}\right)}{\left(\frac{1}{n^5}\right)}=1$. ואז לפי מבחן השוואה השני הטור מתנהג כמו : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ שמתכנס (p>1 הרמוני מוכלל) .

$\boxed{x=3} \leftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{n^5}$. אם נתבונן בטור הערכים המוחלטים מקבלים טור כמו בקצה השני, טור מתכנס.

מסקנה : הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in[3,5]$ ומתבדר לכל $x\notin[3,5]$

ב.

$$\int_4^{4.5} S(x)\,dx=\int_4^{4.5}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3^n n^5}(3x-12)^n\right)dx \underset{[4,4.5]\subset[3,5]}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_4^{4.5}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^5}(x-4)^n\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^5}\left.\frac{(x-4)^{n+1}}{n+1}\right|_4^{4.5}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^5(n+1)2^{n+1}}$$

__שאלה 2 - (20 נק')__

נתונה פונקציה $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=f(x^2y)+g(3x+4y)$, דיפרנציאבילית לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, כאשר $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירות ב- $\mathbb{R}$. נתון כי $\vec{\nabla}h(1,3)=(12,8)$.

א. (10 נק') חשבו את $f'(3),\ g'(15)$.

ב. (5 נק') מהו גודל הנגזרת הכיוונית של $h(x,y)$ בנקודה $(1,3)$ בכיוון הוקטור $\hat{v}=\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$?

ג. (5 נק') נתון $f(3)=20,\ g(15)=16$. חשבו את משוואת המישור המשיק לגרף של $h(x,y)$ בנקודה $(1,3)$.

האם המישור עובר בראשית הצירים $(0,0,0)$? נמקו!

__פתרון__

א. לפי הנתון $h(x,y)=f(x^2y)+g(3x+4y)$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירות ב- $\mathbb{R}$ לכן לפי כלל השרשרת (בעצם מספיק ש f ו g גזירות ומורכבות עם פונקציות בעלות נגזרות חלקיות):

$$h(x,y)=f(x^2y)+g(3x+4y)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h_x(x,y)=2xy\,f'(x^2y)+3g'(3x+4y)\\ h_y(x,y)=x^2f'(x^2y)+4g'(3x+4y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h_x(1,3)=6f'(3)+3g'(15)=12\\ h_y(1,3)=f'(3)+4g'(15)=8\end{cases}\Rightarrow f'(3)=\frac{8}{7}\quad ,g'(15)=\frac{12}{7}$$

ב. $\hat{v}=(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$ הוא וקטור יחידה . הפונקציה $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית לכל $(x,y)\in R^2$ ובפרט בסביבת $(1,3)$ לכן:

$$\frac{\partial h}{\partial \hat{v}}(1,3)=\vec{\nabla}h(1,3)\cdot\hat{v}=(12,8)(\frac{5}{13},\frac{12}{13})=\frac{60+96}{13}=12$$

ג. חישוב משוואת מישור משיק:

$$h(1,3)=f(3)+g(15)=20+16=36$$
$$z-h(1,3)=h_x(1,3)(x-1)+h_y(1,3)(y-3)$$
$$z-36=12(x-1)+8(y-3)=12x+8y-36$$
$$z=12x+8y$$

המישור המשיק עובר בראשית הצירים $(0,0,0)$ כי $0=12\cdot 0+8\cdot 0$

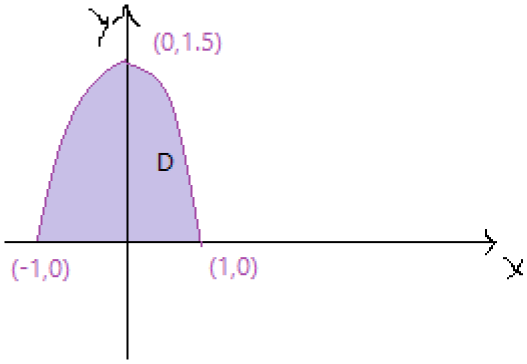
<u>שאלה 3 - (20 נק')</u>

נתונה הפונקציה $f(x,y)=12x^3+12xy+y^2$. מצאו את המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה בתחום $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:3x^2+2y\le 3,\ y\ge 0\}$.

.

פתרון:

$3x^2+2y\le 3 \Leftrightarrow y\le\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2$, כלומר התחום כלוא בין הפרבולה $y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2$ והישר y=0:



נציין תחילה כי לפונקציה אכן יש מינימום ומקסימום מוחלטים בתחום כי הפונקציה רציפה (שכן היא פולינום), והתחום חסום וסגור, ולכן לפי משפט Weierstrass יש לפונקציה מינימום ומקסימום מוחלטים בתחום.

נמצא את כל הנקודות החשודות לקיצון מוחלט בתחום, ואז נשווה ערכים. הערך הגדול ביותר הוא הערך המקסימלי, והערך הקטן ביותר הוא המינימלי.

נמצא תחילה נקודות חשודות לקיצון <u>בפנים התחום</u>, כלומר בקבוצה $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x^2+2y<3,\ y>0\right\}$. בקבוצה זו נקודה חשודה לקיצון היא נקודה שבה הנגזרות החלקיות מתאפסות, כלומר מתקיים כי

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=36x^2+12y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=12x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2+y=0\\6x+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-6x=0\\6x+y=0\end{cases}\Rightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0,2$$

ולכן נקודות חשודות לקיצון בפנים התחום הן $\left.\begin{matrix}(x_1,y_1)=(0,0)\Rightarrow \text{not interior}\\ \cancel{(x_2,y_2)=(2,-12)}\end{matrix}\right\}$, כאשר הנקודה השניה נפסלה כי היא לא בתחום הנתון ($y>0$). והראשונה בעצם לא שייכת לפנים לכן גם מיותרת בחקירת הפנים.

נמצא כעת נקודות חשודות לקיצון <u>על שפת התחום</u>. נחלק את השפה לשני חלקים. החלק התחתון, כלומר הקבוצה $I_1=\left\{(x,0):-1\le x\le 1\right\}$, והחלק העליון, כלומר הקבוצה $I_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x^2+2y=3,\ -1\le x\le 1\right\}$.

לאורך <u>קו התחתון</u> הפונקציה היא למעשה הפונקציה:
$g_1(x)=f(x,0)=12x^3+12x\cdot 0+0^2=12x^3$. הפונקציה הזו היא פונקציה עולה בכל תחומה (הנגזרת שלה אי שלילית בכל תחומה, ומתאפסת רק בנקודה אחת), ולכן הנקודות החשודות לקיצון הן נקודות הקצה של הקטע איפה לומדים אותה, כלומר $x=\pm 1$. ואז קיבלנו שתי נקודות חשודות לקיצון, הנקודות $(c,d)=(-1,0),\ (a,b)=(1,0)$.
לאורך הקו העליון נמצא נקודות חשודות (הפנימיות לפרבולה) לקיצון בעזרת שיטת כפלי Lagrange: נגדיר פונקציית Lagrange, $L(x,y;\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$, כאשר $g(x,y)=3x^2+2y-3$, ונמצא נקודות שבהן הנגזרות החלקיות לפי כל המשתנים מתאפסות, כלומר

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y;\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=36x^2+12y-\lambda 6x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y;\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=12x+2y-2\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y;\lambda)=g(x,y)=3x^2+2y-3=0\end{cases}$$

. מהמשוואה השניה נקבל כי $\lambda=6x+y$, ולכן נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל כי
$36x^2+12y-6x(6x+y)=0\Leftrightarrow 6y(2-x)=0$.

יוצא, אם כן, כי $y=0 \Rightarrow x=\pm 1$, $x=2 \Rightarrow \cancel{y=-\frac{9}{2}}$, כלומר לא התקבלה נקודה חדשה פנימית לפרבולה . (בכל מקרה נתייחס גם לקצוות של הפרבולה כי אולי בהן יתקבל מקסימום או מינימום מוחלטים תחת האילוץ של הפרבולה).

הערה : אין נקודות בפרבולה המאפסות את הגרדיאנט של האילוץ : $\nabla g(x,y)=(6x,2)$.

אחרי הצבת הערכים שמצאנו בפונקציה, נקבל כי הערך המינימלי מתקבל ב $(-1,0)$ שבה $f(-1,0)=-12$, והערך המקסימלי מתקבל ב $(1,0)$ שבה $f(1,0)=12$.

הערה : היינו יכולים ללמוד את ערכי הפונקציה בפרבולה על **ידי הצבה :**

$$g_2(x)=f(x,\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2)=12x^3+12x(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2\right)^2=\frac{9}{4}x^4-6x^3-\frac{9}{2}x^2+18x+\frac{9}{4}$$

$$g_2'(x)=9x^3-18x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=1,-1,\cancel{2}$$

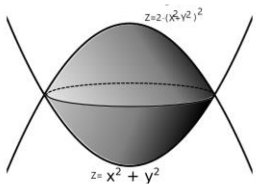
ואז היינו מקבלים שבפרבולה הנקודות החשודות לקיצון מוחלט הן הקצוות $(-1,0)$ ו $(1,0)$.

<u>שאלה 4 - (20 נק')</u>

חישבו את הנפח הכלוא בין המשטח $z=x^2+y^2$ לבין המשטח $z=2-(x^2+y^2)^2$.

<u>פתרון :</u>

ראשית נשים לב כי הביטוי השני הוא המשטח מלמעלה בגוף: $z=2-(x^2+y^2)^2$ **.**



כעת נחפש את החיתוך בין שני המשטחים

$$(x^2+y^2)=2-(x^2+y^2)^2 \Rightarrow r^2=2-r^4 \Rightarrow r^4+r^2-2=0$$

$$r^2=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=1,-2$$

מובן ש- $r^2\geq 0$ ולכן הפתרון השלילי אינו רלוונטי, כמו כן, גם $r\geq 0$ ולכן החיתוך הוא ב- $r^2=x^2+y^2=1$ (מעגל עם מרכז (0,0,1) בעל רדיוס 1).

נחשב את הנפח באמצעות האינטגרל הכפול בתחום D שהוא התחום החסום על ידי ההיטל של עקומת החיתוך במישור x,y : נשתמש בקואורדינטות קוטביות :

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$|J| = r$

התחום בקואורדינטות קוטביות הוא : $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1$.

$$V = \iint_D \left[2-\left(x^2+y^2\right)^2-(x^2+y^2)\right]dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left[2-r^4-r^2\right] r\,dr = 2\pi\left(r^2-\frac{r^6}{6}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7\pi}{6}$$

שאלה 5 - (20 נק׳)

מצאו מסה של גוף G המוגבל על ידי הגליל $x^2+y^2=a^2$, הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והמישור $z=0$, כאשר הצפיפות בכל נקודה של הגוף ניתנת על ידי הפונקציה : $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z$.

פתרון :

נתון שהצפיפות בכל נקודה של הגוף : $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z$ .. נסמן את המסה של הגוף ב- : M_G

נשתמש לחישוב מסה של הגוף בנוסחה : $M_G = \iiint_G \rho(x,y,z)\,dV = \iiint_G (x^2+y^2+z)\,dV$

ההיטל של הגוף על המישור XY הוא עיגול עם מרכז (0,0) בעל רדיוס a : $x^2+y^2 \le a^2$.

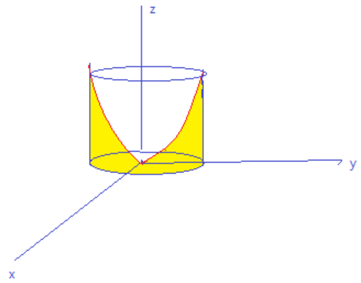
נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \\ |J| = r \end{cases}$$

, המשוואה של הפרבולואיד בקואורדינטות גליליות היא : $z=r^2$. ואז הביטוי של הגוף

בקואורדינטות גליליות הוא :

$$H:\begin{cases} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le r^2 \end{cases}$$



$$M_G=\iiint_G (x^2+y^2+z)\,dV=\iiint_H (\underbrace{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\ \theta}_{r^2}+z)\,r\,dzdrd\theta=$$

$$=\iiint_H (r^3+zr)\,dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}(\int_0^a(\int_0^{r^2}(r^3+zr)dz)dr)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}(\int_0^a\left[r^3z+\frac{z^2}{2}r\right]_0^{r^2}dr)d\theta=\int_0^{2\pi}(\int_0^a\frac{3}{2}r^5dr)d\theta=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^a d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\frac{a^6}{6}d\theta=\frac{1}{4}a^6 2\pi=\frac{a^6\pi}{2}$$

<u>שאלה 6 - (20 נק')</u>

נתון השדה הווקטורי : $\vec{F}(x,y)=\left(xe^{-y^2},\frac{1}{x^2+y^2+1}-x^2ye^{-y^2}\right)$.

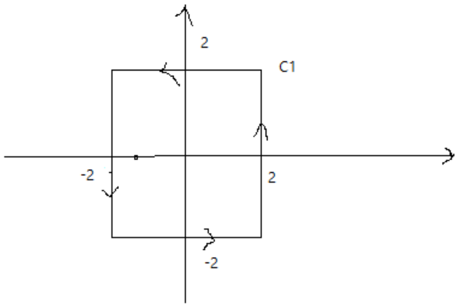
א. (10 נק') מצאו את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה $\vec{F}$ לאורך עקומה C , כאשר C היא שפת הריבוע $|x|\le 2,|y|\le 2$, בלי הצלע הימנית , מכוונת **נגד כיוון השעון.**

ב. (10 נק') יהיה השדה הווקטורי : $\vec{G}(x,y)=\left(xe^{-y^2},-x^2ye^{-y^2}\right)$. מצאו את האינטגרל הקווי מסוג שני של השדה $\vec{G}$ לאורך עקומה C : חצי המעגל $x^2+(y-1)^2=1$ עבור $x\ge 0$ מכוונת נגד כיוון השעון.

<u>פתרון</u> :

א. נוסיף לריבוע את הצלע הימיני, ואז נקבל עקומה C_1 סגורה, פשוטה, חלקה למקוטעין, עם כיוון נגד השעון.

נשים לב שהפונקציות $P(x,y)=xe^{-y^2}$ ו- $Q(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}-x^2ye^{-y^2}$ הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות בתחום D פשוט קשר החסום בתוך הריבוע ולכן תנאי משפט גרין מתקיימים .



$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D\left(\left(\frac{-2x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}-2xye^{-y^2}\right)-(-2xye^{-y^2})\right)dx\,dy=$$

$$\iint_D\frac{-2x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}dx\,dy=\int_{-2}^{2}dy\int_{-2}^{2}\frac{-2x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}dx=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)}\Big|_{-2}^{2}\right)dy=\int_{-2}^{2}0dy=0$$

עכשיו נוריד את האינטגרל בקו הימיני שנסמן ב C_2 : הצגה פרמטרית : $r(t)=\left(2,t\right),\quad t\in\left[-2,2\right]$

$$\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{-2}^{2}F(2,t)\cdot(0,1)\,dt=\int_{-2}^{2}\left(*,\frac{1}{t^2+5}-4te^{-t^2}\right)\cdot(0,1)\,dt=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{t^2+5}-4te^{-t^2}\right)dt=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{t}{\sqrt5}+2e^{-t^2}\right)_{-2}^{2}=\frac{2}{\sqrt5}\arctan\frac{2}{\sqrt5}$$

נובע: $\int_{C}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\frac{2}{\sqrt5}\arctan\frac{2}{\sqrt5}$

ב **:** השדה G **הוא משמר ב -** $\mathbb{R}^2$: מהחישובים שנעשו בסעיף הקודם נובע מיד שתנאי שדה משמר מתקיים

בכל המישור : לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים : $\vec{G}(x,y)=\left(\underbrace{xe^{-y^2}}_{G_1},\underbrace{-x^2ye^{-y^2}}_{G_2}\right)\Rightarrow\frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y)$

לכן ניתן לשנות את המסלול שמחבר את הנקודות (0,0) עם (0,2) ולקחת קטע מ- (0,0) עד (0,2), אבל

בנקודות של הקטע x שווה 0 ולכן $\vec{G}(0,t)=\left(0,0\right)$ בכל נקודה לכן האינטגרל שווה 0.