

אלגברה לינארית

תרגיל מספר 12 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלה 1

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש: $P^{-1}AP = D$.

שאלה 2

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, כאשר a פרמטר ממשי.

- חשבו את הפולינום האופייני של A .
- עבור אילו ערכים של הפרמטר a כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה?
- עבור אילו ערכים של הפרמטר a המטריצה A לכסינה מעל \mathbb{R} ?

שאלה 3

נתונה המטריצה הפרמטרית $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- מצאו את כל הערכים של a ושל b עבורם A לכסינה.
- עבור $a = -1, b = 0$ מצאו את המטריצה A^{35} .

שאלה 4 (מבחן)

נתונה המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

- מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש: $P^{-1}AP = D$.
- הוכיחו: $A^5 = A$. נמקו היטב את תשובתכם.

ג. האם המטריצה הנתונה A דומה למטריצה $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$?

שאלה 5

תהי A מטריצה ריבועית לא הפיכה מסדר 4. נתון שהדרגה של $\rho(3I - A) = 2$, ובנוסף נתון ש

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. הוכיחו ש A לכסינה, מצאו את הפולינום האופייני של A , ומצאו את $\text{tr}A$.

שאלה 6 (מבחן)

- תהי A מטריצה ריבועית ממשיית מסדר 3, כך ש- $\text{rank}(A-I) < \text{rank}(A+I) < \text{rank}(A)$.
 ג. קבעו מהן הדרגות של $A-I$ ו- $A+I$.
 ד. הוכיחו כי A לכסינה מעל \mathbb{R} ורשמו את המטריצה D שהיא הצורה האלכסונית של A .
 ה. חשבו את A^{2014} .

שאלה 7 (מבחן)

נתונה מטריצה ריבועית $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ שמקיימת

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |A-I| = 0$$

- א. האם A לכסינה?
 ב. מהי הדרגה של A ?
 ג. מהי הדרגה של $A+I$?

שאלה 8

תהי A מטריצה מרוכבת ריבועית מסדר 4, כך שמתקיים:

$$\text{rank}(A-i \cdot I) = 2 \quad (1)$$

$$|A-I| = 0 \quad (2)$$

$$|A| = 1 \quad (3)$$

הוכיחו כי $A^{79} = A^{-1}$.

שאלה 9

- נניח ש A מטריצה מרוכבת מסדר 4, שמקיימת $\det A = 16$ ו- $\text{tr} A = 4$.
 נניח ש $t = 2$ הוא ערך עצמי של A עם ריבוי גיאומטרי 2.
 א. מצאו את הפולינום האופייני של A .
 ב. מהי הדרגה של A ? נמקו.
 ג. מהי הדרגה של $A-5I$? נמקו.
 ד. האם $A^4 = 16I$? נמקו.

שאלה 10

- נניח שהקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ היא בסיס ל- \mathbb{R}^3 , $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, ומתקיים $Av_1 = Av_2 = Av_3 = v_3$.
 הוכיחו ש A לכסינה, ומצאו מטריצה אלכסונית הדומה ל- A .