פתרון שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א׳ וב׳

א. (12 נק׳) מטילים 4 קוביות שונות.
חשבו באמצעות פונקציות יוצרות את מספר האפשרויות לקבל לפחות 15?

ב. (8 נק׳) אין קשר בין סעיפים 1 ו-2

1. הצרינו את הפסוק הבא (תרגמו לשפת הפסוקים):

"קיימים בדיוק שני מספרים ממשים שונים שהם פתרונות של המשוואה $f(x)=0$"

2 . נתבונן ב-2 הפסוקים הבאים:

$$\alpha = \exists x[R(x)\wedge P(x)] \quad , \quad \beta = (\exists x R(x))\wedge(\exists x P(x))$$

האם $\alpha \equiv \beta$?כלומר,האם הפסוקים שקולים זה לזה ?

אם כן, הוכיחו .אחרת, הציגו דוגמה נגדית.

פתרון שאלה 1

א. מחפשים את מספר הפתרונות השלמים של אי השיוויון

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \ge 15 \qquad (k=1,2,3,4) \qquad 1\le x_k \le 6$$

נמצא קודם את מספר הפתרונות עבור אי השוויון

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \le 14 \qquad (k=1,2,3,4) \quad 1\le x_k \le 6$$

ונחסיר את המספר הזה מכמות הכוללת של האפשרויות שהיא 6^4.
נחזור לאי השוויון האחרון. נסמן ב – a_n את מספר הפתרונות השלמים של המשוואה

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = n$$
$$1\le x_k \le 6 \quad (k=1,2,3,4)$$

בסימונים האלה נצטרך לחשב את $S_{14}=a_1+a_2+...+a_{14}$.
הפונקציה היוצרת של סדרה $\{a_n\}$ הינה

$$f(x)=(x+x^2+...+x^6)^4 = x^4(1+x+...+x^5)^4 = \frac{x^4(1-x^6)^4}{(1-x)^4}$$

לכן הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{S_n\}$ הינה

$$\frac{f(x)}{1-x} = \frac{x^4(1-x^6)^4}{(1-x)^5} = x^4(1-x^6)^4\cdot\frac{1}{(1-x)^5} =$$

$$= x^4(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+5-1}{5-1}x^n = (x^4-4x^{10}+6x^{16}-4x^{22}+x^{28})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{4}x^n$$

את x^{14} ניתן לקבל בשתי דרכים: $x^4\cdot x^{10}$ ו – $x^{10}\cdot x^4$ (בשאר המקרים החזקה כבר גדולה מ – 14). סכום המקדמים המתאימים הינו

$$1\cdot\binom{14}{4} - 4\cdot\binom{8}{4} = 721$$

לכן התשובה הסופית: $6^4-721=575$.

ב. **1.**

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} \exists x_2 \in \mathbb{R}\Big(f(x_1) = 0 \wedge f(x_2) = 0 \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge \forall x \in \mathbb{R}\big(f(x) = 0 \to (x = x_1 \vee x = x_2)\big)\Big)$$

ב2. הפסוקים אינם שקולים, כלומר אין להם אותה משמעות.

נתבונן בקבוצה D של הטבעיים ונגדיר על $x \in D = N$:

$R(x)$ - x הוא זוגי

$P(x)$ -x הוא אי זוגי

$\alpha = \exists x[R(x) \wedge P(x)]$ משמעותו יש טבעי שהוא זוגי וגם אי זוגי בו זמנית.- שקר

$\beta = (\exists x R(x)) \wedge (\exists x P(x))$ משמעותו יש מספר טבעי שהוא זוגי וגם יש מספר טבעי שהוא אי זוגי

$\exists x R(x)$ אמיתי כי יש מספר טבעי שהוא זוגי – למשל 2

$\exists x P(x)$ אמיתי כי יש מספר טבעי שהוא אי זוגי – למשל 3

לפי טבלת האמת של "וגם "הפסוק ϕ אמיתי.

<u>שאלה 2</u> (20 נקודות)

חובבת אמנות חזרה סקרנית אחרי ביקור בתערוכה של יאיוי קוסמה.

היא מעוניינת לדעת כמה אפשרויות יש לצייר סדרה באורך n המורכבת מעיגולים צהובים ועיגולים שחורים, כך שלא יהיו שני עיגולים שחורים אחד ליד השני.

עיגולים צהובים אפשר לצייר בשני גדלים: עיגול גדול, ועיגול קטן.

עיגולים שחורים הם כולם באותו קוטר.

נסמן a_n מספר הסדרות השונות באורך n.

א. (7 נק׳) מצאו כלל נסיגה עבור a_n ותנאי התחלה מתאימים.

ב. (7 נקי) פתרו את כלל הנסיגה. כלומר, מצאו נוסחת מפורשת עבור a_n.

ג. (6 נקי) הוכיחו את נכונות הנוסחה המפורשת בעזרת אינדוקציה מתמטית.

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. האיברים הראשונים של הסדרה:

$a_1 = 3$

$a_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$

מקרה 1: אם האיבר הראשון בסדרה הוא עיגול שחור, אז אחריו יש עיגול צהוב, יש לכך 2 אפשרויות. אחרי העיגול הצהוב יש סדרה חוקית באורך n-2. יש לכך a_{n-2} אפשרויות, ן נקבל במקרה זה: $2a_{n-2}$ אפשרויות.

מקרה 2: אם האיבר הראשון בסדרה הוא עיגול צהוב, יש לכך 2 אפשרויות, אז אחריו יש סדרה חוקית באורך n-1. יש לכך $2a_{n-1}$ אפשרויות.

מכאן נקבל כלל נסיגה: $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$

ניתן לחשב את a_0 מכלל הנסיגה:

$a_2 = 2a_1 + 2a_0 \Longrightarrow 8 = 2 \cdot 3 + 2a_0 \Longrightarrow a_0 = 1$

(או להגדיר מראש כתנאי התחלה לסדרה הריקה).

לסיכום, נוסחת נסיגה: $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ לכל $n \geq 2$

תנאי התחלה: $a_0 = 1,\ a_1 = 3$

ב. נמצא נוסחה מפורשת: נפתור את המשוואה האופיינית: $x^2 - 2x - 2 = 0$

נקבל: $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$$\Rightarrow\ a_n = A\left(1+\sqrt{3}\right)^n + B\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

נציב תנאי התחלה, כדי לחשב את המקדמים:

$$a_0 = A + B = 1$$

$$a_1 = A\left(1+\sqrt{3}\right) \quad + B\left(1-\sqrt{3}\right) \quad = 3$$

מכאן, $B = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$, $A = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

ולכן, $a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$ לכל $n \geq 0$.

ג. צריך להוכיח שהנוסחה $a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$ לכל $n \geq 0$,

היא פתרון של נוסחת הנסיגה: $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ לכל $n \geq 2$ עם תנאי התחלה:

$a_0 = 1,\ a_1 = 3$:

הוכחה באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה:

בדיקה עבור $n = 0$: $a_0 = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^0 + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^0 = \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$

בדיקה עבור $n = 1$:

$$a_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^1 + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^1 = \frac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-2)(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\left(2+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3\right)+\left(\sqrt{3}-3-2+2\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 3$$

הנחת האינדוקציה: עבור k טבעי מסוים, נניח שנוסחת הפתרון המפורש נכונה לכל מספר טבעי n קטן או שווה ל-k .

(*)

$$a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

מעבר האינדוקציה: נוכיח שהנוסחה נכונה עבור $k+1$. צריך להוכיח:

$$a_{k+1} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{k+1} + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^{k+1}$$

הוכחה :

$$a_{k+1}=2a_k+2a_{k-1}=_{(*)}$$
$$=2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^k+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^k\right)+2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{k-1}+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{k-1}\right)=$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{k+1}\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{2}{(1+\sqrt{3})^2}\right)+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{k+1}\left(\frac{2}{1-\sqrt{3}}+\frac{2}{(1-\sqrt{3})^2}\right)=$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{k+1}\left(\frac{2(1+\sqrt{3})+2}{(1+\sqrt{3})^2}\right)+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{k+1}\left(\frac{2(1-\sqrt{3})+2}{(1-\sqrt{3})^2}\right)=$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{k+1}\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}\right)+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{k+1}\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})^2}\right)=$$

הביטויים במונה ובמכנה בסוגריים הינם שווים ולכן ערכם 1

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^{k+1}+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^{k+1}$$

<u>שאלה 3 (20 נקודות)</u> אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (8 נק') יהי R <u>יחס שקילות</u> מעל A. יהי $\bar{R}$ היחס המשלים של R. כלומר :

$$\bar{R}=\{(x,y)\,|\,(x,y)\notin R\}$$

נתון שהיחס המשלים $\bar{R}$ הינו טרנזיטיבי.

הוכיחו בדרך השלילה כי קיימת ל $R-$ רק מחלקת שקילות אחת.

ב. (12 נק') אין קשר בין הסעיפים הבאים

1. בכמה דרכים אפשר לחלק 20 כדורים צבעוניים שונים ל-3 תאים?
2. בכמה דרכים אפשר לחלק 20 כדורים לבנים זהים ו- 10 כדורים אדומים זהים ל-3 תאים?
3. בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 20 כדורים לבנים זהים ו-10 כדורים צבעוניים שונים ?

<u>פתרון שאלה 3</u>

א. נניח בשלילה שיש 2 מחלקות שקילות . אז יש 2 אברים שנמצאים כל אחד במחלקה אחרת. נבחר אותם כנציגי המחלקות : $[x]_R,[y]_R$

כיוון שהאיברים x,y במחלקות שקילות שונות אז הזוגות הסדורים $(y,x),(x,y)\notin R$ לכן $(y,x),(x,y)\in R^c$.

אבל נתון שהיחס המשלים הוא טרנזיטיבי ולכן : $(x,x)\in R^c$ אבל אז $(x,x)\notin R$ כלומר R אינו רפלקסיבי בסתירה לכך שהוא יחס שקילות.

ב. 1. זו התאמה של 20 כדורים שונים ל- 3 תאים שונים ולכן זהו מספר הפונקציות מקבוצה בת 20 איברים לקבוצה בת 3 איברים 3^{20}

2. נחלק את 20 הכדורים הלבנים ל-3 התאים כאשר תא יכולה להיות ריק : צירופים עם חזרות $D(3,20)$

נחלק את 10 הכדורים האדומים ל-3 התאים כאשר תא יכולה להיות ריק : צירופים עם חזרות $D(3,10)$

נכפול את החלוקות זו בזו כי על כל חלוקה של הכדורים הלבנים נוכל לבחור כל אחת מהחלוקות של הכדורים האדומים.

$$D(3,20)\cdot D(3,10)=\binom{22}{2}\binom{12}{2}=$$

3. נבחר את מיקום הכדורים הצבעוניים (מיקום הלבנים נקבע) ונכפול בסידור הפנימי שלהם : $\binom{30}{10}\cdot 10!=\frac{30!}{20!}$

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א׳ וב׳

א. (12 נק׳) נתונות 4 קבוצות A,B,C,D

נתונה פונקציה $f:A\to B$ חח״ע ועל. נתונה פונקציה $g:C\to D$ חח״ע ועל.

נתבונן בפונקציה : $h:A\times C\to B\times D$ המוגדרת :

$$h\big((a,c)\big)=(f(a),g(c))$$

הוכיחו שהפונקציה h הינה חח״ע ועל.

ב. (8 נק׳) נתבונן בשלוש הקבוצות הבאות :

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid -1\le x,y\le 1\}=[-1,1]\times[-1,1]$$
$$N=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid -0.5\le x,y\le 0.5\}=\left[-0.5,0.5\right]\times\left[-0.5,0.5\right]$$
$$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid |x|+|y|\le 1\}$$

1. ציירו את שלוש הקבוצות הנ״ל במישור.
2. הוכיחו כי הקבוצות M ו N הן שוות עוצמה. (ניתן להיעזר בסעיף א או בדרך אחרת)
3. הוכיחו כי העוצמה של P שווה לעוצמה של N .

<u>פתרון שאלה 4</u>

א. h **חח״ע:** יהיו $(a_1,c_1),(a_2,c_2)\in A\times C$ כך ש : $h\big((a_1,c_1)\big)=h\big((a_2,c_2)\big)$
צריך להראות $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$.

$h(a_1,c_1)=h(a_2,c_2)\Rightarrow(f(a_1),g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$ מהגדרת הפונקציה h

$\Rightarrow f(a_1)=f(a_2),\quad g(c_1)=g(c_2)$ משיוויון רכיבים מתאימים בזוגות סדורים

כיוון שנתון שהפונקציות $f:A\to B$ ו- $g:C\to D$ חח״ע נקבל:

$a_1=a_2,\quad c_1=c_2$ ולכן $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$.

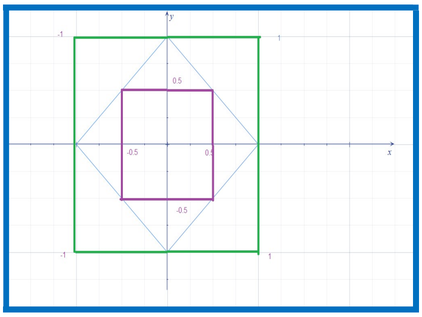
h **על**: יהי $(b,d)\in B\times D$ יש להראות שקיים $(a,c)\in A\times C$ כך ש : $h((a,c))=(b,d)$

כיוון ש : $f:A\to B$ על B יש $a\in A$ כך ש : $f(a)=b$

כיוון ש : $g:C\to D$ על D יש $c\in C$ כך ש : $g(c)=d$
לפי הגדרת h :

$$h((a,c))=(f(a),g(c))=(b,d)$$

ב1.



ב2.

כיוון ששני קטעים סגורים (או לא סגורים)על הישר הממשי הינם בעלי אותה עוצמה יש בניהם פונקציה חח"ע ועל כלומר קיימת פונקציה

$h:[-1,1]\to[-0.5,0.5]$ למשל: $h(x)=0.5(x+1)-0.5$

נגדיר אם כן, $H:A\to C$ $H:[x,y]\to[h(x),h(y)]$

מכיוון שהפונקציה h היא חח"ע ועל, גם הפונקציה H היא חח"ע ועל לפי סעיף א' ולכן $|A|=|C|$.

3.מהציור ניתן לראות כי $C\subseteq B\subseteq A$. נשתמש בטענה: אם $X\subseteq Y$ אז $|X|\le|Y|$

ונקבל: $|C|\le|B|\le|A|$

הראנו בסעיף קודם כי העוצמה של A שווה לעוצמה של C, $|C|=|A|$ נקבל ממשפט קש"ב :

$|B|=|A|=|C|$ ולכן שלוש הקבוצות הן שווה עוצמה כנדרש.

<u>שאלה 5 (20 נקודות)</u> אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (10 נק') תהי הקבוצה $A=P(\mathbb{N})$. כאשר $\oplus$ הוא ההפרש הסימטרי בין הקבוצות (סומן גם כ Δ)

לכל קבוצה $X\in P(\mathbb{N})$ נסמן ב: $|X|<\infty$ את התכונה ש- X קבוצה סופית.

נגדיר יחס R על A באופן הבא: לכל $B,C\in P(\mathbb{N})$

$$(B,C)\in R \quad\Leftrightarrow\quad |B\oplus C|<\infty$$

1. הוכיחו שהיחס R הוא יחס שקילות.
2. הציגו דוגמה לשלושה איברים B_1,B_2,B_3 שונים השייכים למחלקת השקילות של $\mathbb{N}$.

ב. (10 נק') יהיו k,n **טבעיים** $2\le k\le n$.

1. הראו: $\binom{n}{k}\binom{k}{2}=\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$
2. חשבו: $\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2}$

<u>פתרון שאלה 5</u>

א.

נראה כי R הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

1. רפלקסיבי: צריך להראות כי $\forall X\in A,(X,X)\in R$:

אכן, לכל $X\in P(N)$ מתקיים כי

$$X \triangle X = (X \setminus X) \cup (X \setminus X) = \emptyset$$

בפרט,

$$|X\Delta X| < \infty$$

2. **סימטרי:** צריך להראות כי $(X,Y) \in R \rightarrow (Y,X) \in R$. אכן,

$$X\Delta Y = (X\setminus Y) \cup (Y\ X) = (Y\ X) \cup (X\ Y) = Y\Delta X$$

3. **טרנזיטיבי:** צריך להראות כי

$$\mathrm{t}(X,Y) \in R \cap (Y,Z) \in R \rightarrow (X,Z) \in R$$

אכן,

$$X\Delta Z = (X\Delta Y)\Delta(Y\Delta Z)$$

ומכיוון ש $|X\Delta Y| < \infty, |Y\Delta Z| < \infty$ נקבל כי גם $|X\Delta Z| < \infty$ ולכן $(X,Z) \in R$

שלושה איברים שונים במחלקת השקילות של N הן למשל הקבוצות

$$\{2,3,4,\dots\}, \qquad \{3,4,5,\dots\}, \qquad \{4,5,6\dots\}$$

למעשה, כל תת קבוצה A של N עבורה $N\setminus A$ היא קבוצה סופית שייכת למחלקת השקילות של N.

ב. 1. הוכחה:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{2} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{n!}{(n-k)!2!(k-2)!} = \frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$$

פתרון בדרך נוספת, על ידי הוכחה קומבינטורית: נראה ששני האגפים סופרים אותו הדבר.

נספור כמה אפשרויות יש לבחור מתוך n אנשים קבוצה של k אנשים ולקבוע שני אנשים מתוך אלו שנבחרו שיהיו ראשי הקבוצה.

אגף שמאל: נבחר קודם k אנשים ומתוכם שני ראשי קבוצה. $\binom{n}{k}\binom{k}{2}$

אגף ימין: נבחר קודם 2 אנשים להיות ראשי קבוצה, ומתוך $n-2$ האנשים שנשארו נבחר $k-2$ אנשים להיות שאר הצוות.

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$$

כיון שספרנו אותו הדבר בשתי דרכים שונות מתקבל השוויון: $\binom{n}{k}\binom{k}{2} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$

ב.2.

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{2}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{2}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} = \binom{n}{2}(1+1)^{n-2} = \binom{n}{2}2^{n-2}$$

שאלה 6 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'

(12 נק') א. מטילים 2 קוביות, אחת לבנה והשנייה שחורה n פעמים .

מהו מספר אפשרויות ההטלה השונות כך שבסדרת ההטלות תתקבל לפחות פעם אחת התוצאה בה בשתי הקוביות מופיע אותו מספר. כלומר בסדרת ההטלה יפיע הזוג (i,i) לפחות פעם אחת לכל $i=1,2,...,6$

כלומר : ההטלה 1,1 2,2......6,6 יופיעו.

רשמו נוסחה כללית עבור n .

ב. (8 נק') מהו מספר החלוקות של קבוצה A בת 7 איברים ל- 2 קבוצות שונות ולא ריקות?

פתרון שאלה 6:

אI. נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה.

סך כל האפשרויות בכל הטלה : $6\cdot 6$. (זהו מספר הזוגות הסדורים).

נסמן ב- A_i - את אפשרויות ההטלה כך שלא יופיע הזוג i,i $i=1,2,..,6$

$$S_2=\sum_{1\le i<j\le 6}\left|A_i\cap A_j\right|,\quad S_3=\sum_{1\le i<j<k\le 6}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{6}\left|A_i\right|\quad S_4=\sum_{1\le i<j<k<l\le 6}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\right|,S_5=\sum_{1\le i<j<k<l<m\le 6}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m\right|$$

$$S_6=\left|\bigcap_{i=1}^{6}A_i\right|$$

סך כל האפשרויות : $|U|=(6\cdot 6)^n$

אז : $\left|A_1^C\cap A_2^C\cap...\cap A_6^C\right|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4+S_5-S_6$ הוא מספר אפשרויות ההטלה.

$|A_i|=(36-1)^n$ $i=1,2,3,,,6$ יש $\binom{6}{1}$ קבוצות כנ"ל.

$\left|A_i\cap A_j\right|=\left(36-2\right)^n$ יש $\binom{6}{2}$ זוגות כאלו

ובאופן דומה נקבל:

$$\left|A_1^C\cap A_2^C\cap...\cap A_6^C\right|=|U|-S_1+S_2-S_3+S_4+S_5-S_6=(36)^n-\binom{6}{1}(35)^n+\binom{6}{2}(34)^n-\binom{6}{3}(33)^n+$$
$$\binom{6}{4}(32)^n-\binom{6}{5}(31)^n+\binom{6}{6}(30)^n$$

ב. דרך א :   כל בחירה של תת קבוצה של קבוצה תקבע את המשלימה לה. לכן מספר תתי הקבוצות של קבוצה בת 7 איברים הוא 2^7 נחלק ב-2 כדי לא לבחור בקבוצה המשלימה אשר תקבע את אותה חלוקה.

כמו כן, מחלקות אינן ריקות ולכן נוריד את בחירת הקבוצה הריקה. $2^6-1=63$

דרך ב : נבחר תתי קבוצות בגודל 1,2,3 ונסכם .שאר בחירות תתי הקבוצות כבר כלולות בתתי הקבוצות שבחרנו

$$\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=63$$