תרגיל 2 (תשע"ה, סמסטר ב', מועד א')

א. על ידי שימוש בפולינומי מקלורן עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ השלימו את הטבלה:
כלומר מצאו פולינומי מקלורן $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ ממעלה ראשונה שניה ושלישית ואת הערכים שלהם בנקודות $x=0$, $x=0.25$ ו- $x=0.5$

x		0	0.25	0.5
$f(x)$	$\sqrt[3]{1+x}$	1	1.0772	.1447
$T_1(x)$	$1+\frac{1}{3}x$	1	$\frac{13}{12}$	$\frac{7}{6}$
$T_2(x)$	$1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$	1	$\frac{155}{144}$	$\frac{41}{36}$
$T_3(x)$	$1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3$	1	$\frac{5585}{5184}$	$\frac{743}{648}$

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{1/3}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$$

$$f^{(3)}x=\frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}$$

$$T_1(x)=f(x_0)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot x_0^1$$

$$x_0=0$$

$$T_2(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1+\frac{f''(x)}{2!}\cdot(x-x_0)^2$$

$$T_3(x)=f(x_0)+\frac{f'(x)}{1!}\cdot(x-x_0)^1+\frac{f''(x)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\cdot(x-x_0)^3$$

ב. העריכו את שגיאת החישוב המקסימלית עבור $x=0.5$ על ידי שימוש בנוסחת לגרנג' ורשמו את התוצאות בטבלה:

$\lvert R_1(x)\rvert$	$\frac{1}{36}$ $\le$	$\frac{1}{10}$
$\lvert R_2(x)\rvert$	$\frac{5}{648}$ $\le$	$\frac{1}{100}$
$\lvert R_3(x)\rvert$	$\frac{5}{1944}$ $\le$	$\frac{3}{1000}$

$$f^{(2)}(0.5) = -\tfrac{2}{9}\cdot 1.5^{-5/3} \approx -0.11$$

$$f^{(3)}(0.5) = \tfrac{10}{27}\cdot 1.5^{-8/3} \approx +0.13$$

$$f^{(4)}(0.5) = -\tfrac{80}{81}\cdot 1.5^{-11/3} \approx -0.22$$

$$x = \tfrac{1}{2} \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad \tfrac{1}{2} > c > 0$$

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-0\right)^2\right| = \left|\frac{\frac{2}{-9\sqrt[3]{(1+c)^5}}}{8}\right| \xrightarrow{c=0} \left|-\frac{2}{72}\right| = \boxed{\frac{1}{36}}$$

$$|R_1(x)| = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-0\right)^3 = \left|\frac{\frac{10}{27\sqrt[3]{(1+c)^8}}}{48}\right| \xrightarrow{c=0} \left|-\frac{5}{648}\right| = \boxed{\frac{5}{648}}$$

$$|R_1(x)| = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-0\right)^4 = \left|\frac{\frac{-80}{81\sqrt[3]{(1+c)^{11}}}}{384}\right| \xrightarrow{c=0} \left|-\frac{5}{1944}\right| = \boxed{\frac{5}{1944}}$$

תרגיל 6. (תשע"ו, סמסטר ב', מועד א'.)

הוכיחו כי עבור כל $0<x$ מתקיים:
$$\overbrace{x-\frac{x^2}{2}}^{T_2(x)}<\overbrace{\ln(1+x)}^{f(x)}<\overbrace{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}^{T_2(x)+R_2(x)}$$

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$f(x)=\ln(1+x)\quad;\quad f'(x)=\frac{1}{1+x}\quad;\quad f^{(2)}x=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}\quad;\quad f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$T_1(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x=x$$

$$T_2(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2=x-\frac{x^2}{2}$$

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\cdot x^3=\frac{2}{6(1+c)^3}\cdot x^3\xRightarrow[\text{מינימלי}]{c=0^+}\frac{x^3}{3^+}$$

מכיוון שכל הערכים שהתקבלו בפולינום ובשגיאה חיוביים (בכל מקרה ln של מספר ≥ 1 תמיד יהיה חיובי), נציב את הפולינום והשגיאה שקיבלנו לפי הפונקציה ובכך הוכחנו את אי-השוויון.

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3^+}<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$\underbrace{T_2(x)}_{\text{ערך משוער מינימלי של } f(x)}<\underbrace{f(x)=\underbrace{T_2(x)}_{\text{ערך משוער מינימלי של } f(x)}+\underbrace{R_2(x)}_{\text{שגיאה מקסימלית}}}_{\text{ערך משוער מקסימלי של הפונקציה}}<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

תרגיל 7. (תשע"ג, סמסטר ב', מועד א')

א. על ידי שימוש בנוסחת מקלורן עם שארית בצורה לגרנג' הוכיחו כי לכל $x>0$

$$1+x-\frac{1}{2}x^2 < \sqrt{1+2x} < 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$$

ב. הראו כי $1.37<\sqrt{2}<1.44$ (ניתן להשתמש בסעיף א).

א

$$f(x)=\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{1/2} \quad ; \quad f'(x)=1\cdot(1+2x)^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

$$f^{(2)}(x)=-(1+2x)^{-3/2} \quad ; \quad f^{(3)}(x)=3(1+2x)^{-5/2}$$

$$T_2(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2=1+x-\frac{1}{2}x^2$$

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(c)}{3!}\cdot x^3=3\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+2c)^5}}\cdot\frac{1}{6}\xrightarrow[\text{מינימלי}]{c=0^+}=\underbrace{\frac{x^3}{2^+}}_{\text{עבור כל } x \text{ חיובי}}$$

ומתקבל לנו: $T_2(x) < f(x) < T_2(x)+R_2(x)$ כאשר עבור $x>0$, השגיאה היא מספר חיובי.

$$1+x-\frac{1}{2}x^2 < \sqrt{1+2x} = 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^3}{2^+} < 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^3}{2}$$

ב נציב $x=1/2$:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} < \sqrt{2} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1/8}{2^+} < 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1/8}{2}$$

$$1\tfrac{6}{16} < \sqrt{2} = 1\tfrac{6}{16}+\tfrac{1}{16^+} < 1\tfrac{6}{16}+\tfrac{1}{16}$$

$$1.37 < \sqrt{2} = 1.41 = 1.43^- < 1.43$$

תרגיל 8.

הוכח שלכל $0 \le x \le \frac{1}{9}$ מתקיים: $\left|\overbrace{\sin 6x}^{f(x)} - \overbrace{(6x-36x^3)}^{T_3(x)}\right| \le \overbrace{\frac{6}{9^3}}^{R_n(x)}$

$$f(x) = \sin(6x) \qquad f'(x) = 6\cos(6x)$$

$$f^{(2)}(x) = -36\sin(6x) \qquad f^{(3)}x = -216\cos(6x)$$

$$f^{(4)}x = 1296\sin(6x)$$

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2 = 6x$$

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3 = 6x - 36x^3$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}\cdot x^4 = \frac{1296\sin(6c)}{24}\cdot x^4 \xRightarrow[\text{מקסימלי}]{6c=\frac{1}{2}\pi} 54x^4$$

נציב $x=\frac{1}{9}$ לבדוק את הערך <u>המינימלי</u> בתחום: $54\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^4 = \frac{2}{243} = \frac{6}{9^3}$

התקבל לנו:

$$\begin{matrix} f(x) & - & T_3(x) & \leq & R_3(x) \\ \| & & \| & & \| \\ |\sin(6x) & - & (6x-36x^3)| & \leq & \frac{6}{9^3} \end{matrix} \qquad \forall x \mid 0 \leq x \leq 9$$

תרגיל 9. (תשע"ג, סמסטר ב', מועד ב')

על ידי שימוש בנוסחת טיילור מסדר 5 חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-7)+6\sin x}{x^5}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-7)+6\sin x}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-7)}{x^5}+\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x}{x^5}$$

I) $\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x}{x^5} \Longrightarrow f(x)=6\sin x$; $f'(x)=6\cos x$

$f^{(2)}x=-6\sin x$; $f^{(3)}x=-6\cos x$

$f^{(4)}x=6\sin x$; $f^{(5)}x=6\cos x$

$$T_5(x)=\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4+$$

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!}\cdot x^5=6x-x^3+\frac{1}{20}x^5+R_5(x)$$

$2x\cdot e^x$

II) $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-7)}{x^5} \Longrightarrow f(x)=x(e^{x^2}-7)$; $f'(x)=e^{x^2}-7+2x^2\cdot e^{x^2}$

$f^{(2)}x=6x\cdot e^{x^2}+4x^3\cdot e^{x^2}$;

$f^{(3)}x=6e^{x^2}+24x^2\cdot e^{x^2}+8x^4\cdot e^{x^2}$

$f^{(4)}x=60x\cdot e^{x^2}+80x^3\cdot e^{x^2}+16x^5\cdot e^{x^2}$

$f^{(5)}x=60e^{x^2}+360x^2\cdot e^{x^2}+240x^4\cdot e^{x^2}+32x^6\cdot e^{x^2}$

$$T_5(x)=\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4+$$

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!}\cdot x^5=-6x+x^3+\frac{1}{2}x^5+R_5(x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-7)+6\sin x}{x^5}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(6\cancel{x}-\cancel{x^3}+\frac{6}{120}x^5+R_5(x)\right)+\left(-\cancel{6x}+\cancel{x^3}+\frac{60}{120}x^5+R_5^{(*)}(x)\right)}{x^5}$$

$$\lim_{x\to 0}\quad\frac{\frac{66}{120}\cancel{x^5}}{\cancel{x^5}}+\underbrace{\frac{R_5(x)}{x^5}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{R_5^{(*)}(x)}{x^5}}_{\to 0}=\frac{66}{120}=\boxed{\frac{11}{20}}$$

תרגיל 10. (תשע"ד, סמסטר ב', מועד ב')

נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x+a}$ כאשר a קבוע חיובי נתון.

א) רשמו פולינום מקלורן מסדר ראשון עבור $f(x)$ כולל ביטוי השגיאה.

ב) העזרו בסעיף הקודם כדי לקבל ביטוי עבור המנה: $\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x}$ ורשמו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x}.$$

ג) חשבו גבול זה בדרך אחרת.

1c

$$f(x)=\sqrt{x+a}\qquad ;\qquad f'(x)=\tfrac{1}{2}(x+a)^{-1/2}$$

$$f^{(2)}(x)=-\tfrac{1}{4}(x+a)^{-3/2}$$

$$T_1(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x=\sqrt{a}+\frac{x}{2\sqrt{a}}$$

$$R_1(x)=\frac{f^{(2)}(c)}{2!}\cdot x^2=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(c+a)^3}}\cdot x^2=\frac{-x^2}{8\sqrt{(c+a)^3}}=\frac{-x^4}{64(c+a)^3}$$

$$\xRightarrow{\text{מינימלי}\ c=0}\ =\frac{-x^4}{64a^3}$$

$$f(x)=\sqrt{a}+\frac{x}{2\sqrt{a}}-\frac{x^4}{64a^3}$$

ב

$\underline{a=1:}$

$$f(x)=\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} - R_1(x)$$

$\underline{a=4:}$

$$g(x)=\sqrt{x+4} = 2 + \frac{x}{4} - R_1^*(x)$$

$$\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x} = \frac{2\left(1+\frac{x}{2}-R_1(x)\right)-\left(2+\frac{x}{4}-R_1^*(x)\right)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2+x-R_1(x)-2-\frac{x}{4}+R_1^*(x)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{4}x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{R_1(x)}{x}\xrightarrow{} 0 + \lim_{x\to 0}\frac{R_1^*(x)}{x}\xrightarrow{} 0 =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(\frac{3}{4}\right)}{\cancel{x}\cdot 1} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

ג

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{-1/2}-\frac{1}{2}(x+4)^{-1/2}}{1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} 1-\frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

תרגיל 11. (תשס"א, סמסטר ג', מועד ב')

חשבו <u>ללא כלל לופיטל</u> את הגבול $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+(x-1)x(x+1)}{x^3}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+(x-1)x(x+1)}{x^3}$$

$f(x)=\sin x$; $f'(x)=\cos x$; $f^{(2)}x=-\sin x$

$f^{(3)}(x)=-\cos x$; $f^{(4)}(x)=\sin x$

$$T_3(x)=\sin(0)+\frac{\cos 0}{1}\cdot x+\frac{-\cos 0}{6}\cdot x^3=x-\tfrac{1}{6}x^3$$

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{24}\cdot x^4=\frac{\sin(c)\cdot x^4}{24}$$

$3x^2-1$

$$f(x)=x-\tfrac{1}{6}x^3-\left(\frac{\sin(c)\cdot x^4}{24}\right)$$

$(2x-1)(x+1)$

$g(x)=x^3-x$; $f'(x)=3x^2-1$

$f^{(2)}x=6x$; $f^{(3)}(x)=6$

$f^{(4)}(x)=0$

$$T_3(x)=3x^3-x+\tfrac{4}{6}x^3$$

$$R_3(x)=0$$

$$g(x)=3x^3-x+\tfrac{4}{6}x^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x^3 - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{6}x^3 - R_3(x) + x^3 - x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + x^3 - \cancel{x}}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x} \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^3}\cdot\frac{5}{6}}{\cancel{x^3}\cdot 1} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

תרגיל 12.

חשבו את הגבולות הבאים באמצעות נוסחאות טיילור:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - \cos x + 1}{x^2}$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x) - e^x}{x}$

ג. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\tan x - x^2}{x^4}$

ד. $\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ (רמז: להציב $y = \frac{1}{x}$)

א) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - \cos x + 1}{x^2}$

$f(x) = \cos x + 1$; $f'(x) = -\sin x$; $f^{(2)}(x) = -\cos x$

$T_2(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - \cos x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{2 - \frac{x^2}{2} + R_2(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \to 1 - \lim_{x\to 0}\frac{2 - \frac{x^2}{2}}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2} \to 0$$

$$= 1 - \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}\right)}{\cancel{x^2}\cdot 1} = 1 - \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\ln(1+x)-e^x}{x}$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$T_1(x) = x + R_1(x)$$

$$g(x) = e^x \quad ; \quad g'(x) = e^x$$

$$T_1(x) = 1 + x + R_1^*(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+R_1(x)-(1+x+R_1^*(x))}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-1-x}{x} + \lim_{x\to 0} \cancel{\frac{R_1(x)}{x}}^{\,0} - \lim_{x\to 0} \cancel{\frac{R_1^*(x)}{x}}^{\,0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[x - x^2 \cdot \ln\left(1+1/x\right)\right] \Longrightarrow t = 1/x$$ 3

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \cdot \ln(1+t)\right] = \lim_{t\to 0} \frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$f(t) = t - \ln(1+t) \quad ; \quad f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \quad ; \quad f^{(2)}(t) = \frac{1+t}{(1+t)^2}$$

$$T_2(t) = \frac{t^2}{2} + R_2(t)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2} + R_2(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} + \lim_{t\to 0} \cancel{\frac{R_2(t)}{t^2}}^{\,0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2} \cdot 1/2}{\cancel{t^2} \cdot 1} = \frac{1}{2}$$