אפקה המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב
הנדסה במרכז

המחלקה למדעי היסוד- מתמטיקה
Department of Basic Sciences

אלגברה לינארית

<u>תרגיל מספר 13 - מכפלה פנימית</u>

שאלה 1

נתונים הוקטורים $\vec{v}=(1,-2,3,-4)$, $\vec{u}=(1,3,5,7)$ ב $\mathbb{R}^4$.

א. חשב הנורמות של $\vec{v}$, $\vec{u}$ לפי המכפלה הסקלרית האוקלידית (הסטנדרטית) של $\mathbb{R}^4$.

ב. חשב וקטורי יחידה בכוונים של $\vec{v}$, $\vec{u}$ (כלומר לנרמל את $\vec{v}$, $\vec{u}$).

ג. חשב את נורמת ההפרש בין $\vec{u}$ ל $\vec{v}$, כלומר $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ (זהו המרחק בין $\vec{u}$ ל $\vec{v}$).

ד. חשב את הזווית θ בין $\vec{u}$ ל $\vec{v}$. האם $\vec{v}$, $\vec{u}$ ניצבים ?

שאלה 2

נגדיר ב $\mathbb{R}^2$ את הפעולה הבאה $\langle x,y\rangle = x^T Ay$ (x,y וקטורי עמודה, A מטריצה מסדר 2×2).

האם הפעולות הן מכפלות פנימיות ב $\mathbb{R}^2$ כאשר :

א. $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}$ ב. $A=\begin{bmatrix}3&0\\0&-4\end{bmatrix}$ ג. $A=\begin{bmatrix}0&0\\0&5\end{bmatrix}$

רמז : עבור הוקטורים e_i (הבסיס הסטנדרטי ב $\mathbb{R}^n$) מתקיים $e_i^T Ae_j = A_{ij}$ האיבר ה i,j של A .

שאלה 3

הוכח שלכל שני וקטורים $\vec{v}$, $\vec{u}$ במרחב מכפלה פנימית (ממשי) כלשהו מתקיים :

א. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\|\vec{v}\|^2$

ב. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$

ג. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$ (זהות זו נקראת חוק המקבילית)

שאלה 4

יהיו $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$ וקטורים ב $\mathbb{R}^n$. הוכח או הפרך את הטענות הבאות :

א. אם $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ ו $\vec{u}\neq\vec{0}$ אז $\vec{v}=\vec{w}$.

ב. אם $\vec{u}\perp\vec{v}$ ו $\vec{u}\perp\vec{w}$ אז $\vec{v}\perp\vec{w}$.

ג. אם $\vec{u}\perp\vec{v}$ ו $\vec{u}\perp\vec{w}$ אז $\vec{v}\|\vec{w}$ ($\vec{v}$ מקביל ל $\vec{w}$, כלומר $\vec{w}$, $\vec{v}$ פרופורציוניים).

ד. אם $\vec{u}\perp\vec{v}$ ו $\vec{u}\perp\vec{w}$ אז $\vec{u}$ ניצב ל $\operatorname{span}\{\vec{v},\vec{w}\}$, כלומר $\vec{u}$ ניצב לכל וקטור במרחב $\operatorname{span}\{\vec{v},\vec{w}\}$, ומסמנים $\vec{u}\perp\operatorname{span}\{\vec{v},\vec{w}\}$.

שאלה 5

האם הקבוצה $\left\{\vec{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\vec{v}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\vec{v}_3=(0,1,0),\vec{v}_4=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

היא קבוצה אורתוגונלית ? קבוצה אורתונורמלית ? (ב $\mathbb{R}^3$ ביחס למכפלה הסקלרית האוקלידית).
האם יש לה תת קבוצה שהיא אורתוגונלית או אורתונורמלית ?

שאלה 6

א. נתון תת המרחב של $\mathbb{R}^4$ $V=\text{span}\{(1,0,0,2),(-1,1,0,1),(2,1,1,0),(1,2,1,1)\}$.

למצוא בסיס אורתונורמלי של V (ביחס למכפלה הסקלרית האוקלידית ב $\mathbb{R}^4$).

הדרכה: קודם כל למצוא בסיס ל V, ואח"כ לקבל ממנו בסיס אורתונורמלי.

ב. למצוא בסיס אורתוגונלי של V שאינו אורתונורמלי.

שאלה 7 (מבחן)

במרחב $\mathbb{R}^3$ נתונה המכפלה הפנימית הבאה: $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$ ונורמה מתאימה $\|\vec{x}\|=\sqrt{x_1^2+2x_2^2+3x_3^2}$. יהי $B=\left\{v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$.

על ידי שימוש בתהליך Gram-Schmidt לבנות מ B בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$, ולמצוא את הקואורדינטות של הוקטור $u=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$ לפי בסיס זה.

שאלה 8 (מבחן)

במרחב ווקטורי V בעל מכפלה פנימית (לאו דווקא סטנדרטית) נתון בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ ונתון בסיס נוסף (לא אורתונורמלי) $C=\{w_1=u_1,\ w_2=u_1+u_2,\ w_3=u_1+u_2+u_3\}$.

יהי $v\in V$ ווקטור כך שעבורו מתקיים: $\langle v,w_1\rangle=1,\langle v,w_2\rangle=3,\langle v,w_3\rangle=6$.

מצאו את הקואורדינטות של הווקטור v ביחס לבסיס B וביחס לבסיס C.

שאלה 9 (מבחן)

V מרחב וקטורי ממשי עם מכפלה פנימית.

נתון $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס אורתוגונלי של V כך ש $\|v_1\|=1,\|v_2\|=2,\|v_3\|=3$.

א. נתון הווקטור $v=\alpha v_1+3v_2-v_3$. להוכיח שלא קיים α ממשי כך ש $\|v\|=1$.

ב. עבור אילו ערכים של β יהיו הווקטורים $v=v_1+\beta v_2-v_3$, $u=v_2+\beta v_3$ אורתוגונליים?

שאלה 10 (מבחן)

יהי $V=\mathbb{R}^3$. נתון: $u=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. נגדיר: $W=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x^Tu=0\}$.

א. להוכיח ש W הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

ב. למצוא בסיס אורתונורמלי ל W ביחס למכפלה הסקלרית הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^3$.

ג. להשלים הבסיס האורתונורמלי של W (מסעיף ב) לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$.

ד. לרשום את הקואורדינטות של $v=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$ לפי הבסיס האורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$ (מסעיף ג).

שאלה 11 (מבחן)

יהי V מרחב וקטורי ממשי בעל מכפלה פנימית, ויהי $B=\{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\}$ בסיס אורתונורמלי של V. יהי $v\in V$ כך ש $\langle v,v_1\rangle=2\,,\langle v,v_2\rangle=-1\,,\langle v,v_3\rangle=1$. למצוא את $\|v\|$.