פתרון

X

שאלה 1 (38 נקודות)

פעם בשבוע יוני ורמי נפגשים בפיצרייה שכונתית וארוחה עבור שניים עולה שם 100 ש"ח כולל טיפ. יום אחד רמי הציע ליוני את השיטה הבאה, כדי לקבוע מי ישלם על הארוחה. הוא הביא תיבה עם 3 כדורים לבנים ו-2 כדורים שחורים. ה"שחקן הראשון" יקח שני כדורים מהתיבה, **ללא החזרה**. **ממה שנשאר**, ה"שחקן השני" יקח שני כדורים, **עם החזרה**. במידה ומספר הכדורים הלבנים ששני השחקנים הוציאו הוא שווה, אז הם יחלקו את החשבון (כל אחד ישלם 50 ש"ח). אחרת, ישלם את מלוא החשבון השחקן שהוציא פחות כדורים לבנים.

נגדיר משתנים מקריים:

X - מספר כדורים לבנים ש"שחקן הראשון" מוציא.

Y- מספר כדורים לבנים ש"שחקן השני" מוציא.

א. (8 נקודות) חשבו את ההסתברות $P(X<Y)$, כלומר את ההסתברות שהשחקן הראשון ישלם את מלוא חשבון.

ב. (10 נקודות) חשבו את התוחלת של Y אם ידוע ששחקן הראשון הוציא שני כדורים לבנים.

ג. (10 נקודות) החברים נפגשו לארוחה בפיצרייה כל שבוע במשך שנה (52 שבועות). חשבו את ההסתברות שבמהלך השנה הזו יוני הוציא יותר מ- 2600 ש"ח על הארוחות. הניחו אי תלות בין התשלומים והשתמשו בנתונים הבאים: תוחלת התשלום של יוני עבור ארוחה אחת שווה ל-48.33 ושונות התשלום עבור ארוחה אחת שווה ל-1747.22.

ד. (5 נקודות) לחברים יש מקום מוזמן בפיצרייה כל יום חמישי בשעה 19:00. רמי תמיד מגיע ב 18:55 ויוני מגיע באקראי בין 19:00 לבין 19:20. מהי התוחלת של זמן ההמתנה של רמי?

1. 10
2. 15
3. 20
4. 12.5

ה. (5 נקודות) מלצרית חדשה התחילה לעבוד בפיצרייה. היא רשמה את ההזמנה של יוני ורמי (פיצה עם זיתים) ואת ההזמנות של עוד 6 שולחנות. המלצרית בלבלה את ההזמנות, והחליטה לחלק את הפיצות באקראי. אם ידוע כי כל הפיצות שהוזמנו הן פיצות שונות וכי אין תלות בין ההזמנות בשולחנות השונים, מה ההסתברות שיוני ורמי **<u>לא</u>** יקבלו את הפיצה שהם הזמינו?

1. $1/7$
2. $6/7$
3. $1/7!$
4. $(7!-1)/7!$

פתרון:

א. נשים לב שאם שחקן הראשון יוציא שני כדורים שחורים אז בתיבה יישארו שלושה כדורים לבנים. נחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P(X<Y)=P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)=$$
$$P(X=0)\underbrace{P(Y=1\mid X=0)}_{=0}+P(X=0)\underbrace{P(Y=2\mid X=0)}_{=1}+P(X=1)P(Y=2\mid X=1)=$$
$$P(X=0)+P(X=1)P(Y=2\mid X=1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{11}{30}$$

ב. אם שחקן הראשון הוציא שני כדורים לבנים ללא החזרה אז בקופסה נשארו כדור אחד לבן ושני כדורים שחורים. נסיק שמתקיים: $Y\mid X=2\sim Bin(2,1/3)$. $E(Y\mid X=2)=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

ג. נגדיר משתנים מקריים: X_i - סכום שיוני הוציא בשבוע ה-i. $i=1,\dots,52$

$X_1,\dots,X_{52}$ ב"ת ושווי התפלגות ולכן לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{52}X_i\sim N(52\cdot 48.33,52\cdot 1747.22)$$

נחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P\left(\sum_{i=1}^{52}X_i>2600\right)=1-\Phi\left(\frac{2600-52\cdot 48.33}{\sqrt{52\cdot 1747.22}}\right)=1-\Phi(0.29)=1-0.6141=0.3859$$

ד. זמן ההמתנה של רמי שווה לזמן האיחור של יוני פלוס 5 דקות ולכן תוחלת זמן ההמתנה של רמי שווה לתוחלת זמן האיחור של יוני פלוס 5. זמן האיחור של יוני מתפלג לפי התפלגות אחידה בקטע $(0,20)$.
לכן התשובה הנכונה היא: 15.

ה. מתוך 7 פיצות הם הזמינו פיצה אחת ולכן בהנחה שלכל פיצה יש סיכוי זהה, הסיכוי לקבל פיצה שהם לא הזמינו היא $6/7$.

שאלה 2 (38 נקודות)

במבחן בפיזיקה יש 3 שאלות. להלן נתונים לגבי זמני הבדיקה של התשובות:

זמן בדיקת תשובה לשאלה מס' 1 מתפלג אחיד רציף בין 5 ל-20 דקות.

זמן בדיקת תשובה לשאלה מס' 2 מתפלג נורמלית עם תוחלת 12 דקות וסטיית תקן σ דקות.

פונקציית התפלגות מצטברת של זמן בדיקת תשובה לשאלה מס' 3 (בדקות) היא:

$$F_{T_3}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ c\left(4t-\frac{t^2}{2}\right) & 0\le t<4\\ 1 & 4\le t\end{cases}$$

זמני הבדיקה הם בלתי תלויים.

א. (10 נקודות) רונית, אחת המרצות בקורס, בודקת שאלה מס' 1. ביום הבדיקה השני קצב העבודה שלה הואץ והיא בדקה כל שאלה בזמן שקטן פי 2. ביום זה רונית בדקה 50 מחברות. בין זמן בדיקה של מחברת אחת למחברת אחת יש 3 דקות. למה שווה שונות זמן הבדיקה ביום השני? אין תלות בין זמני הבדיקה.

ב. (8 נקודות) לבדוק תשובה אחת לשאלה מס' 2 לוקח לפחות 14 דקות ב-10% מהמחברות. מצאו סטיית התקן σ.

ג. (10 נקודות) מצאו קבוע c המופיע בנתוני של זמן הבדיקה שאלה מס' 3. מצאו תוחלת של זמן הבדיקה שאלה מס' 3.

ד. (5 נקודות) מהו חציון של זמן בדיקת תשובה לשאלה מס' 2?

1. 12.42
2. 12
3. 6
4. אף תשובה אינה נכונה

ה. (5 נקודות) ידוע שהמרצה בודקת את שאלה 1 במחברת בחינה מסוימת, כבר 8 דקות. היא בודקת ברציפות ללא הפסקות. מה ההסתברות שהיא תסיים לבדוק את השאלה תוך 18 דקות מרגע תחילת הבדיקה?

1. $1/3$
2. $1/6$
3. $2/3$
4. $5/6$

פתרון:

א. נגדיר משתנים: T_1^i – זמן בדיקת תשובה לשאלה מס' 1 ביום ראשון במחברת מס' i. $i=1,\ldots,50$.

S_i – זמן בדיקת תשובה לשאלה מס' 1 ביום שני במחברת מס' i. $i=1,\ldots,50$.

T – זמן בדיקה כולל של תשובה לשאלה מס' 1 ב- 50 מחברות ביום שני.

נתון: $T_1^i \sim U(5,20)$. מתקיים: $S_i=\frac{T_1^i}{2}$ ו- $T=\sum_{i=1}^{50} S_i+3\cdot 49$.

נחשב שונות של T:

$$V(T)=V\left(\sum_{I=1}^{50}\frac{T_1^i}{2}+3\cdot 49\right)=0.25V\left(\sum_{I=1}^{50}T_1^i\right)=0.25\sum_{i=1}^{50}V(T_1^i)=0.25\cdot 50\cdot\frac{(20-5)^2}{12}=234.375$$

ב. נתון בשאלה שעשירון העליון של זמן הבדיקה של תשובה לשאלה מס' 2 שווה ל-14. כלומר מתקיים:

$$\Phi\left(\frac{14-12}{\sigma}\right)=0.9$$

$$\frac{2}{\sigma}=z_{0.9}$$

$$\sigma=\frac{2}{1.282}=1.56$$

ג. פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרי רציף היא רציפה. לכן,

$$F_{T_3}=c\left(4\cdot 4-\frac{4^2}{2}\right)=1\Rightarrow c=0.125$$

נמצא פונקציית הצפיפות:

$$f_{T_3}(t)=\frac{dF_{T_3}(t)}{dt}=\begin{cases}0.125(4-t) & 0\le t<4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$E(T_3)=\int_0^4 0.125(4-t)tdt=0.125(2t^2-t^3/3)\Big|_0^4=1.3333$$

ד. חציון נמצא במרכז הסימטריה כלומר שווה לתוחלת שהיא 12.

ה. $P(T_1<18|T_1>8)=\frac{P(8<T_1<18)}{P(T_1>8)}=\frac{\frac{18-5}{20-5}-\frac{8-5}{20-5}}{1-\frac{8-5}{20-5}}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

שאלה 3 (24 נקודות)

תוחלת זמן התגובה של תמיכה טכנית בחברה מסוימת שווה ל- 30 דקות עם סטיית תקן של 5 דקות. בעקבות גל פיטורים במחלקת תמיכה, עלה חשד שזמן התגובה התארך. מניחים שסטיית התקן לא השתנתה. לשם בדיקת החשד הוחלט לבדוק זמני תגובה של 100 פניות לתמיכה. אם ממוצע זמני התגובה יהיה קטן מ-31 אז יחליטו שתוחלת זמן התגובה **לא** התארכה.

א. (7 נקודות) נסחו את השערות של המחקר, הגדירו סטטיסטי המבחן, רשמו את אזור דחיית השערת האפס וחשבו את רמת המובהקות של המבחן.

ב. (7 נקודות) למה צריך להיות שווה גודל המדגם כך שהמבחן המוצע בשאלה יהיה ברמת המובהקות 0.01?

ג. (5 נקודות) נניח שתוחלת זמן התגובה שווה ל-36 דקות. כיצד נקראת ההסתברות לא לגלות זאת?

1. הסתברות של טעות מסוג ראשון.
2. עוצמת המבחן.
3. הסתברות של טעות מסוג שני.
4. מובהקות התוצאה.

ד. (5 נקודות) בחרו את הטענה הנכונה.

1. כאשר α גדלה, β גם גדלה.
2. אם $p-value \le \alpha$ דוחים את השערת האפס ברמת מובהקות α.
3. אם $p-value > \alpha$ דוחים את השערת האפס ברמת מובהקות α.
4. כאשר α קטנה, π גדלה.

פתרון:

א. נגדיר את השערות:

$$H_0 : \mu = 30$$
$$H_1 : \mu > 30$$

סטטיסטי המבחן: $\overline{X}_{100}$-ממוצע זמן של 100 פניות.

אזור דחיית השערת האפס: $C = \{\overline{X}_{100} \ge 31\}$.

נחשב את רמת המובהקות של המבחן:

$$\alpha = P_{H_0}(C) = P_{H_0}(\overline{X}_{100} \ge 31) = 1 - \Phi\left(\frac{31-30}{5/10}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ב.

$$\alpha = P_{H_0}(\overline{X}_n \ge 31) = 1 - \Phi\left(\frac{31-30}{5/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(0.2\sqrt{n}\right) \le 0.01$$
$$\Phi\left(0.2\sqrt{n}\right) \ge 0.99$$
$$0.2\sqrt{n} \ge z_{0.99}$$
$$n \ge \left(\frac{2.326}{0.2}\right)^2$$
$$n \ge 136$$

ג. תשובה נכונה: הסתברות של טעות מסוג שני.

ד. תשובה נכונה: אם $p-value \le \alpha$ דוחים את השערת האפס ברמת מובהקות α