# ${f X}$ פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

# שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א $_{m{\kappa}}$ ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & + & az = a-3 \\ -2x & + & y + (2-3a)z = 11-a \\ (a-8)x & + (2a-2)y - (3a+6)z = 4a^2+4 \end{cases}$$

- . עבורם אין פתרונות אינסוף פתרונות אינסוף פתרונות עבורם של הפרמטר הממשי a עבורם של הערכים של הערכים של הפרמטר הממשי a
  - . המערכת של פתרון אילו עבור אילו (אם קיימים) (אם אם הפרמטר של עבור אילו ערכים של אילו ערכים של מצאו (ii) (ii) אינו מצאו עבור אילו ערכים של אינו (וi) אינו של הפרמטר של אינו של אינו של הפרמטר של הפרמטר של אינו של הפרמטר של הפרמטר של הפרמטר של הפרמטר של הפרמטר של אינו של הפרמטר של הפרמט
- ב. Au=v, Bv=w עמודות כך ש-u,v,w עמודות מסדר 3 imes 2 מטריצה מסדר B, מטריצה מסדר B, מטריצה מסדר B, קבעו אם הטענות היינה הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק
  - . יש אינסוף פתרונות Ax=v למערכת (i)
    - .אין פתרון למערכת ABx=v אין פתרון (ii)
    - .יש פתרון איש פתרון (iii) למערכת

### פתרון

א. (i) נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & 2 - 3a \\ a - 8 & 2a - 2 & -3 - 6a \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - (a - 8)R_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 - a \\ 0 & 2a - 2 & -a^2 + 5a - 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (2a - 2)R_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 - a \\ 0 & 1 & 2 - a \\ 0 & 0 & a^2 - a - 2 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שווה ל-(a-2)(a+1). המטריצה הפיכה אם"ם הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שווה ל-(a-2)(a+1). המטריצה המיכה אם"ם  $a\neq -1,2$ . ידוע כי למערכת עם מטריצה מצומצמת ריבועית יש פתרון יחיד אם"ם  $a\neq -1,2$ . בדוק עבור שאר הערכים:

עבור a=-1 נדרג את המטריצה המורחבת נדרג a=-1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ -2 & 1 & 5 & | & 12 \\ -9 & -4 & -3 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 9R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & -4 & -12 & | & -28 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & -12 \end{pmatrix}$$

. קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת גדולה מדרגת המטריצה המצומצמת (ישנה שורת סתירה) ולכן למערכת אין פתרון. עבור a=2 . נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & -1 \\ -2 & 1 & -4 & | & 9 \\ -6 & 2 & -12 & | & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 6R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & -4 & 0 & | & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת והיא שווה ל-2 (כי במטריצה המדורגת יש רק שתי שורות שונות מאפס), כלומר הדרגה קטנה ממספר המשתנים 3, ולכן למערכת הזו יש אינסוף פתרונות.

נסכם

עבור יחיד למערכת למערכת  $a \neq -1, 2$ 

. עבור a=-1 למערכת אין פתרונות

. עבור a=-2 למערכת יש אינסוף פתרונות

: נציב את הערכים המתאימים x=2,y=5,z=1 במערכת ונבדוק מתי מתקיים שוויון (ii)

. מתרכת היא פתרון למערכת עבורה הראשונה נקבל כי אין ערכים שעבורם מתקיים שוויון, כלומר אין ערך של

- (i) נכון. העמודה u היא פתרון של המערכת, ומכיוון שלמערכת יש יותר משתנים ממשוואות, אם יש לה פתרון ישלה אינסוף פתרונות. ٦.
  - . וקטורי האפס המתאימים, למערכת יש פתרון. u, v, w וקטורי האפס המתאימים, למערכת יש
  - (BA) u=B (Au)=Bv=w כיי, בין. העמודה u היא פתרון של המערכת, כי

## שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

- $A \cdot V$  בסיס של  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  ויהי (ויהי  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  בסיס של מרחב ממימד (ויהי למים למים או
  - (i) הסבירו מדוע הקבוצה

$$S = \{v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 + 3v_2, -v_2 + v_3, v_1 + v_2 + 3v_3, v_1 + 4v_3\}$$

תלויה לינארית.

 $\cdot V$  מצאו תת קבוצה של שהיא בסיס של (ii)

### אין קשר בין סעיפים א,ב

ב. יהי U מרחב וקטורי, ויהיו  $\{0\}$  היהיו  $\{0\}$  תתי מרחבים של U כך ש-

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

- . שונים  $W_1+W_3,W_2+W_3$  שונים (i)
- $W_1+W_2 \neq U$  אם לווגי ו- $W_1+W_3=W_2+W_3=U$ , אז איז אוגי ויש dim U אם (ii)

### פתרון

- .3) הקבוצה S תלויה לינארית כי היא מכילה 5 איברים במרחב ממימד 3. אם המימד שווה 3 אז הגודל המקסימלי של קבוצה בת"ל הוא S۸.
- (ii) כדי למצוא תת קבוצה שהיא בסיס נבדוק תלויות לינאריות של איברי הקבוצה, ע"י מציאת תלויות לינאריות של וקטורי הקואורדינטות . שלהם לפי הבסיס B. נכתוב את וקטורי בקואורדינטות כעמודות מטריצה, ונפעיל פעולות אלמנטריות ששומרות על תלויות לינאריות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

העמודות הראשונה השנייה והרביעית במטריצה המדורגת הן קבוצה בת"ל (כי עמודות או שורות שונות מאפס במטריצה מדורגת הן קבוצה בת"ל, ולכן עמודות עם איברים פותחים הן קבוצה בת"ל), ומכיוון שדירוג שורות שומר על תלויות לינאריות, ותלויות לינאריות של וקטורי קואורדינטות שקולות לתלויות לינאריות של הוקטורים עצמם, נקבל כי הוקטורים הראשון, השני והרביעי בקבוצה S, כלומר הקבוצה

$$S_1 = \{v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 + 3v_2, v_1 + v_2 + 3v_3\}$$

 ${\cal V}$ של בסיס ולכן איברים, שלושה שלושה בת"ל בחי"ל מהווה מהווה

(i) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: עבור ٦.

$$U = \mathbb{R}^2, \ W_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ W_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ W_3 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מתקיים כי החיתוכים הם  $\{0\}$  (כי הוקטורים הפורסים הם בת"ל, ולכן כפולה משותפת שלהם היא רק וקטור האפס). אבל

$$W_1 + W_3 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = U = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} = W_2 + W_3$$

מתקיים הראשון מתשפט המימד (ii) הטענה נכונה. אם  $W_1+W_3=W_2+W_3$  הא

$$\dim W_1 + \dim W_3 - \dim (W_1 \cap W_3) = \dim (W_1 + W_3) = \dim (W_2 + W_3) = \dim W_2 + \dim W_3 - \dim (W_2 \cap W_3)$$

 $\dim W_1=\dim W_2$  נקבל כי  $\dim W_1+\dim W_3=\dim W_2+\dim W_3$  נקבל כי  $(\dim W_1+\dim W_3)=\dim W_1+\dim W_3$  נקבל כי  $(\dim W_1+\dim W_3)=\dim W_1+\dim W_3$ אז ממשפט המימד הראשון נובע כי  $U=W_1+W_2$ 

$$\dim U = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) = 2 \dim W_1$$

בסתירה לכך שהמימד של U אי זוגי.

# שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

Cיו בסיס של  $B=\left\{1+x,1+x+x^2,1+2x
ight\}$  נסמן (בסיס של  $B=\{1+x,1+x+x^2,1+2x\}$  א. ער הפולינומים ממעלה לכל היותר  $B=\{1+x,1+x+x^2,1+2x\}$  מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר  $T:U\to\mathbb{R}^3$  מרחב השטנדרטי של  $T:U\to\mathbb{R}^3$  תהי $T:U\to\mathbb{R}^3$  העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 4 & 1 \\ 6 & a^2 + 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- . הפיכה T ההעתקה a הממשי של הפרמטר המיכה עבור אילו ערכים של הפרמטר (i)
  - a=2 מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור (ii)
- המקיימת המקיימת לינארית העתקה  $T:V\to V$ ותהי ממימד 3, ותהי מכחב לינארית יהיVיהי מרחב ל

$$T \neq 0$$
, Im $T \subset \text{Ker}T$ , Im $T \neq \text{Ker}T$ 

- $\operatorname{Im} T \neq \{0\}$  ,  $V \neq \operatorname{Ker} T$  הסבירו מדוע (i)
- T מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של (ii)

### פתרון

א. (i) העתקה לינארית היא הפיכה אם ורק אם מטריצה מייצגת שלה היא הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת הנתונה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 4 & 1 \\ 6 & a^2 + 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ C_3 \to C_3 - 1 \\ 6 & a^2 - 4 & -4 \end{vmatrix} = (4 - a^2)(-4) - (a^2 - 4)(a^2 - 1) = (a^2 - 4)(a^2 + 3)$$

 $a 
eq \pm 2$  כלומר אם ורק אם  $\left(a^2-4
ight)\left(a^2+3
ight) 
eq 0$  כלומר הפיכה אם ורק אם כלומר

a=2 כדי למצוא בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה נדרג תחילה את המטריצה המייצגת, כאשר (ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 4 & 1 \\ 6 & a^2 + 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1 \atop R_3 \to R_3 - 6R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2 \atop R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בעת בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה הוא וקטורי קואורדינטות של בסיס לגרעין לפי הבסיס B, ובסיס למרחב העמודות מורכב מוקטורי קואורדינטות של בסיס לתמונה לפי הבסיס C. כדי למצוא בסיס למרחב הפתרונות נכתוב את מערכת המשוואות ההומוגנית המתאימה אחרי דירוג (ניתן לעשות זאת כי דירוג שורות שומר על קבוצת הפתרונות של המערכת)

$$\begin{cases} x & +y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}$$

ובסיס לגרעין הוא הפתרונות הוא  $\left\{egin{pmatrix} -1 \ 1 \ 0 \end{pmatrix}
ight\}$  ולכן בסיס למרחב הפתרונות הוא הצורה ובסיס לגרעין הוא ולכן לארחב הפתרונות הוא הצורה ובסיס לגרעין הוא

$$\{(-1)(1+x) + 1 \cdot (1+x+x^2)\} = \{x^2\}$$

ומימד הגרעין הוא 1. מימד מרחב העמודות הוא דרגת המטריצה, ובסיס למרחב העמודות הוא קבוצה בת"ל מתוך עמודות המטריצה שגודלה הוא המימד. דרגת המטריצה היא 2, ולכן כל קבוצה של שני וקטורים לא פרופורציונליים מהווה בסיס למרחב העמודות, כלומר

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1\\4\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix} \right\}$$

. כמו כן אלו הם וקטורי קואורדינטות לבסיס לתמונה, ומכיוון שהבסיס הוא הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^3$  הקבוצה עצמה היא בסיס לתמונה.

- ב. (i) ההעתקה T שונה מהעתקת האפס, ולכן יש וקטור  $v\in V$  כך ש $v\in V$  ובפרט הוא לא בגרעין ויש בתמונה איבר ששונה מ-0. מכאן ש ווא  $T(v)\neq 0$  ב.  $T(v)\neq 0$
- . מהנתון ומהסעיף הקודם נובע כי  $\{0\}\subset \mathrm{Im}T\subset \mathrm{Ker}T\subset V$  כאשר כל ההכלות הן ממש ואין שוויון. ולכן גם המימדים שונים. המימד של V הוא 3 ומכאן

$$0 < \dim \operatorname{Im} T < \dim \operatorname{Ker} T < 3$$

 $\dim\operatorname{Im} T=1,\dim\operatorname{Ker} T=2$  והפתרון היחיד לאי השוויונות הללו

## שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

$$A = \left(egin{array}{ccc} 1 & a-2 & a \ 0 & 0 & 1 \ 0 & a & a-1 \end{array}
ight)$$
 א. (14) נתונה מטריצה

- (i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה וD אלכסונית, כך ש- $D = P^{-1}AP$  המטריצה למצוא את P למצוא את P למצוא את P למצוא את
  - A המטריצה של וקטור וקטור הוא הערך שעבורו הוקטור שעבורו  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  הוא שעבורו הפרמטר הפרמטר (ii)
    - ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)
      - $A^{-1}$  אם A הפיכה,  $\lambda$  ערך עצמי של A, אז או וערך עצמי של (i)
        - . אם A לכסינה אז לכסינה (ii)

### פתרון

א. נחשב תחילה את הפולינום האפייני של המטריצה

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 - a & -a \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -a & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda(\lambda - a + 1) - a) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - a)$$

למטריצה  $a \neq \pm 1$ , אם ורק אם הוא מאפס את הפולינום האופייני, ולכן הערכים העצמיים של A הם  $\pm 1$ . כאשר  $\pm 1$  למטריצה יש שלושה ערכים עצמיים שונים ולכן היא לכסינה. נבדוק מה קורה בשאר המקרים :

עבור a=1 הריבוי האלגברי של -1 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל 1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של 1 ע"י מציאת a=1 הדרגה של -1 ווה ל -1 אווה ל 1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של 1 ע"י מציאת הדרגה של -1 ווה ל -1 אווה ל -1 ווה ל -1 אווה ל -1 אווה ל -1 ווה ל -1 וו

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה 1 (כי כל השורות הן כפולה של השורה הראשונה), ולכן הריבוי הגיאומטרי של 1 הוא  $3 - \mathrm{rank}(A-I) = 2$  כלומר שווה לריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לכסינה במקרה זה.

עבור a=-1 הריבוי האלגברי של 1 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של 1 ע"י מציאת A+I:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שונה לריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה  $3-{\rm rank}(A+I)=1$  הוא של -1 המטריצה שונה ליבוי האלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה במקרה זה.

עד איז קיים  $0 
eq v \neq 0$  כך ש $\lambda$  ע"ע של  $\lambda$ , אז קיים עמים איז כל הערכים העצמיים שונים מאפס. כעת, אם  $\lambda$  ע"ע של

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1}v \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$$

A ולכן  $\frac{1}{\lambda}$  ע"ע של ההפכית של

על שני הצדדים אז ע"י הפעלת שחלוף על שני הצדדים אלכסונית ומתקיים P,D אז ע"י הפעלת שחלוף על שני הצדדים (ii) הטענה נכונה: אם A לכסינה, כלומר קיימות P,D כך ש- P,D אלכסונית ומתקיים לכסינה:

$$\left(P^{-1}AP\right)^T = D^T \Leftrightarrow P^TA^T \left(P^{-1}\right)^T = D$$

 $Q^{-1}A^TQ=D$  נקבל כי נקבל עקב ( $Q=\left(P^T
ight)^{-1}$  סימטרית כי היא אלכסונית, וע"י סימון ל

# שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

- - ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 6b_2 & 3c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5a_3 & 5a_2 & 5a_1 \\ -2b_3 & -2b_2 & -2b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

.12 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה A שווה

ג. (7 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3 imes 3 כך ש-3 imes 3. הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

א. מסדר  $5 \times 5$ . כלומר הדטרמיננטה מקיימת וויון הימני נובע כי המטריצה אוויון  $|A|^3 = |A^3| = |81A| = 81^5 |A|$  א. מהנתון נובע כי

$$0 = |A|^3 - 3^{20}|A| = |A|\left(|A|^2 - 3^{20}\right) = |A|\left(|A| + 3^{10}\right)\left(|A| - 3^{10}\right) \Rightarrow |A| = 0, \pm 3^{10}$$

 $|A| = -3^{10}$  נתון כי |A| שלילי ולכן

ב. נשווה בין שתי הדטרמיננטות:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 6b_2 & 3c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{vmatrix}^{C_2 \to \frac{1}{2}C_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{6}|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 5a_3 & 5a_2 & 5a_1 \\ -2b_3 & -2b_2 & -2b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}^{R_1 \to \frac{1}{5}R_1} -10 \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}^{C_1 \leftrightarrow C_3} 10 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{10}|B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

קיבלנו כי

$$\frac{1}{6}|A| = \frac{1}{10}|B| \Leftrightarrow |B| = \frac{10}{6}|A| = \frac{10}{6}12 = 20.$$

ג. מהשוויון AB = -BA נובע השוויון AB + BA = 0 וממנו נובע

$$|A||B|=|-AB|=(-1)^3|A||B|\Leftrightarrow 2|A||B|=0\Leftrightarrow |A|=0$$
 אני  $|B|=0$ 

ולכן אחת המטריצות חייבת להיות לא הפיכה.

# שאלה 6. (20 נקודות)

. א. נתון המרחב הוקטורי עם את שני התנאים מצאו  $v \in V$  אם הפנימית הפנימית המכפלה הפנימית את עם את או נתון המרחב הוקטורי

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}$$
 הוקטור  $v$  אורתוגונלי לוקטורים (i)

- v הנורמה של v שווה (ii
- $\langle u,v 
  angle = \langle u,u 
  angle = 3$  שני וקטורים שונים זה מזה המקיימים, לוהיו איהיו ההיו לויהיו ממימד מרחב מכפלה פנימית ממימד לv=0 ויהיו היהיו לויהיו
  - . הראו כי $\{u-v,u\}$  קבוצה אורתוגונלית.
  - רשבו את הנורמה של v,v כלומר  $\|v\|=\sqrt{\langle v,v 
    angle}$  אם נתון בנוסף שהקבוצה  $\{u-2v,v\}$  היא גם קבוצה אורתוגונלית (ii)

### פתרון

א. נמצא תחילה את כל הוקטורים שהם אורתוגונליים לשני הוקטורים הנתונים.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{ccc} x & + & 5y & - & 6z & = & 0 \\ 2x & + & 9y & - & 10z & = & 0 \end{array} \right\}$$

כלומר זהו מרחב הפתרונות של המטריצה אל  $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ . נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & 9 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} -4\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$

יחשר את הוורמה של האירר ברסיס

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \langle \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 21 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{21}$$

 $\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$  ולכן וקטור עם נורמה 1 שאורתוגונלי לשני הוקטורים הנתונים הוא

: שונים מאפס שונים אונים אורתוגונלית אם המכפלה הפנימית שווה לאפס שונים מאפס. ולכן הקבוצה אורתוגונלית אם המכפלה הפנימית שווה לאפס (i)

$$\langle u - v, u \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, u \rangle = 3 - 3 = 0$$

אם נתון שהקבוצה אורתוגונלית, אז (ii)

$$0 = \langle u - 2v, v \rangle = \langle u, v \rangle - 2\langle v, v \rangle = 3 - 2||v||^2 \Rightarrow ||v|| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

### צ פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון

## שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

- - הוא פתרון של המערכת.  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  הוא מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר b (אם קיימים) וקטור העמודה (5 הוא פתרון של המערכת.
- ב. (6) נקודות) תהיינה A מטריצה מסדר  $(3 \times 3)$  מטריצה מסדר  $(3 \times 3)$  בנוסף תהיינה  $(3 \times 3)$  עמודות כך ש $(3 \times 3)$  קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק
  - . מערכת Bx=w יש אינסוף פתרונות (i)
    - .יש פתרון יחיד ABx = v למערכת (ii)
      - .יש פתרון למערכת BAx = w יש פתרון (iii)

## פתרון

נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת (i)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-b \\ -2 & 1 & 3b-1 \\ -b-6 & -2b-1 & b-9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1 \atop R_3 \to R_3 + (b+6)R_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & b+1 \\ 0 & -2b-1 & -b^2 - 4b - 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (2b+1)R_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & b+1 \\ 0 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & b^2 - b - 2 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1)$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שווה ל-(b-2)(b+1). המטריצה הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שונה מאפס, ולכן המטריצה הפיכה, כלומר למטריצה אם"ם המטריצה אם"ם מטריצה מצומצמת היבועית שם מטריצה הפיכה, כלומר למטריצה ישb 
eq -1,2 הידוע כי למערכת עם מטריצה מצומצמת היבועית יש פתרון יחיד אם"ם המטריצה הפיכה, כלומר למטריצה יש  $b \neq -1, 2$  פתרון יחיד אם"ם בור שאר הערכים.  $b \neq -1, 2$ 

עבור b=2 נדרג את המטריצה המורחבת נדרג וt=2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ -2 & 1 & 5 & | & 12 \\ -9 & -4 & -3 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 9R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & -4 & -12 & | & -28 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & -12 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת גדולה מדרגת המטריצה המצומצמת (ישנה שורת סתירה) ולכן למערכת אין פתרון.

עבור b=-1: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & -1 \\ -2 & 1 & -4 & | & 9 \\ -6 & 2 & -12 & | & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 6R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & -4 & 0 & | & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת והיא שווה ל-2 (כי במטריצה המדורגת יש רק שתי שורות שונות מאפס), כלומר הדרגה קטנה ממספר המשתנים 3, ולכן למערכת הזו יש אינסוף פתרונות.

עבור  $b \neq -1, 2$  למערכת יש פתרון

עבור b=2 למערכת אין פתרונות.

עבור b=-1 למערכת יש אינסוף פתרונות.

: באיב את הערכים המתאימים z=2,y=5,z=1 במערכת ונבדוק מתי מתקיים שוויון (ii)

.ומהשורה הראשונה נקבל כי אין ערכים שעבורם מתקיים שוויון, כלומר אין ערך של b עבורו העמודה היא פתרון למערכת

- . נוֹ) נכון. העמודה v היא פתרון של המערכת, ומכיוון שלמערכת יש יותר משתנים ממשוואות, אם יש לה פתרון יש לה אינסוף פתרונות. ٦.
  - תרונות. עבור A=B=0 למערכת יש אינסוף פתרונות. (ii)

A(BA)u=B(Au)=Bv=w כיי, פתרון של המערכת, פתרון של היא פתרון (iii)

# שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

AV בסיס של  $B=\{v_1,v_2,v_3\}$  א. (12 נקודות) מרחב מרחב וקטורי ממימד א מרחב וקטורי ממימד מרחב ו

. תלויה לינארית. 
$$S=\{v_1-2v_2+v_3,-v_1+3v_2,v_2+v_3,v_1-v_2+2v_3,v_1-4v_3\}$$
 תלויה לינארית. (i)

.V מצאו תת קבוצה של א שהיא בסיס של (ii)

### אין קשר בין סעיפים א,ב

ב. יהי U מרחב וקטורי, ויהיו  $W_1, W_2, W_3 \neq \{0\}$  תתי מרחבים של U כך ש-

$$W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = U.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

- .שווים  $W_1 \cap W_3, W_2 \cap W_3$  שווים (i)
- אני.  $\dim U$  איז אין , $W_1\cap W_3=W_2\cap W_3=\{0\}$  אם (ii)

### פתרון

- .(i) הקבוצה S תלויה לינארית כי היא מכילה 5 איברים במרחב ממימד S. אם המימד שווה S אז הגודל המקסימלי של קבוצה בת"ל הוא S
- הקואורדינטות לינאריות שהיא בסיס נבדוק תלויות לינאריות של איברי הקבוצה, ע"י מציאת תלויות לינאריות של וקטורי הקואורדינטות כעמודות מטריצה, ונפעיל פעולות אלמנטריות ששומרות על תלויות לינאריות. שלהם לפי הבסיס B. נכתוב את וקטורי בקואורדינטות כעמודות מטריצה, ונפעיל פעולות אלמנטריות ששומרות על תלויות לינאריות.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

העמודות הראשונה השנייה והחמישית במטריצה המדורגת הן קבוצה בת"ל (כי עמודות או שורות שונות מאפס במטריצה מדורגת הן קבוצה בת"ל, ולכן עמודות עם איברים פותחים הן קבוצה בת"ל), ומכיוון שדירוג שורות שומר על תלויות לינאריות, ותלויות לינאריות של הוקטורים עצמם, נקבל כי הוקטורים הראשון, השני והחמישי בקבוצה S, כלומר הקבוצה קואורדינטות שקולות לתלויות לינאריות של הוקטורים עצמם, נקבל כי הוקטורים הראשון, השני והחמישי בקבוצה S

$$S_1 = \{v_1 - 2v_2 + v_3, -v_1 + 3v_2, v_1 - 4v_3\}$$

V של בסיס ולכן איברים, שלושה שלושה בת"ל בסיס של

ב. (i) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: עבור

$$U = \mathbb{R}^2, \ W_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ W_2 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \ W_3 = U$$

אבל (ני סכום שלהם עווים U אם תת מרחב כלשהו אם על (כי סכום של (כי סכום שלהם שלהם מתקיים כי הסכומים שלהם שווים שלוים של U

$$W_1 \cap W_3 = W_1 \neq W_2 = W_2 \cap W_3$$

מתקיים ממשפט המימד הראשון מתקיים אז משפט  $W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$  הטענה נכונה. אם

$$\dim W_1 + \dim W_3 - \dim (W_1 \cap W_3) = \dim (W_1 + W_3) = \dim (W_2 + W_3) = \dim W_2 + \dim W_3 - \dim (W_2 \cap W_3)$$

כעת, אם . $\dim W_1=\dim W_2$  ובפרט ובפרט . $\dim W_1+\dim W_3=\dim W_2+\dim W_3$  נקבל כי  $W_1\cap W_3=W$  נקבל כי  $W_1\cap W_3=W$  ובפרט או ממשפט המימד הראשון נובע כי  $U=W_1+W_2$ 

$$\dim U = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) = 2\dim W_1$$

. כלומר המימד של U זוגי

## שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

C-ט של של בסיס של  $B=\left\{1+x,1+x+x^2,1+2x
ight\}$  נסמן בסיס של  $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$  מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2, ויהיו ו $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$  בסיס של  $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$  הבסיס הסטנדרטי של  $T:U\to\mathbb{R}^3$  תהי $\mathbb{R}^3$  העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ a^2 + 1 & 2 & 1\\ 3 & a^2 + 2 & 2 \end{pmatrix}$$

. מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a ההעתקה לא ערכים אילו ערכים (i)

- a=1 מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור (ii)
- המקיימת לינארית העתקה לינארית המימד 3, ותהי ל $T:V\to V$ ותהי ממימד לינארית מרחב לינארית ב. (6) נקודות

 $\mathrm{Ker}T\subset\mathrm{Im}T,\mathrm{Im}T
eq\mathrm{Ker}T,\quad$ לא חח"ע T

- לא על. T לא על. (i)
- T מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של (ii)

### פתרון

א. (i) העתקה לינארית היא הפיכה אם ורק אם מטריצה מייצגת שלה היא הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת הנתונה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 + 1 & 2 & 1 \\ 3 & a^2 + 2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \to C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 + 1 & 1 - a^2 & -a^2 \\ 6 & a^2 - 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 - a^2)(-1) + a^2(a^2 - 1) = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$$

 $a \neq \pm 1$  אם ורק אם כלומר המטריצה ( $a^2-1$ )  $(a^2+1) \neq 0$  אם ורק אם הפיכה המטריצה כלומר

.a=1 כאשר המייצגת, כאשר גדר לוווי (נדר מחילה את המטריצה המייצגת, כאשר (ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2+1 & 2 & 1 \\ 3 & a^2+2 & 2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\begin{array}{c} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ \end{array}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\begin{array}{c} R_1 \to R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ \end{array}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בעת בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה הוא וקטורי קואורדינטות של בסיס לגרעין לפי הבסיס B, ובסיס למרחב העמודות מורכב מוקטורי קואורדינטות של בסיס לתמונה לפי הבסיס C. כדי למצוא בסיס למרחב הפתרונות נכתוב את מערכת המשוואות ההומוגנית המתאימה אחרי דירוג (ניתן לעשות זאת כי דירוג שורות שומר על קבוצת הפתרונות של המערכת)

$$\left\{\begin{array}{ll} x & +y & = 0 \\ -z & = 0 \end{array}\right.$$
כלומר מרחב הפתרונות הוא מהצורה 
$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
 ולכן בסיס למרחב הפתרונות הוא מהצורה 
$$\left\{\begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}: t \in \mathbb{R}\right\}$$
 ובסיס לגרעין הוא 
$$\left\{(-1)(1+x)+1\cdot(1+x+x^2)\right\}=\left\{x^2\right\}$$

ומימד הגרעין הוא 1. מימד מרחב העמודות הוא דרגת המטריצה, ובסיס למרחב העמודות הוא קבוצה בת"ל מתוך עמודות המטריצה שגודלה הוא המימד. דרגת המטריצה היא 2, ולכן כל קבוצה של שני וקטורים לא פרופורציונליים מהווה בסיס למרחב העמודות, כלומר

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\2 \end{pmatrix} \right\}$$

. כמו כן אלו הם וקטורי קואורדינטות לבסיס לתמונה, ומכיוון שהבסיס הוא הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^3$  הקבוצה עצמה היא בסיס לתמונה

- . היא מV לעצמו ולכן היא חח"ע אם ורק אם היא על. נתון כי היא לא חח"ע ולכן היא לא על על. מון V
- . מהנתון ומהסעיף הקודם נובע כי  $\{0\}\subset \mathrm{Ker}T\subset \mathrm{Im}T\subset V$  כאשר כל ההכלות ממש ואין שוויון. ולכן גם המימדים שונים מהנתון ומהסעיף הקודם נובע כי  $\{0\}\subset \mathrm{Ker}T\subset \mathrm{Im}T\subset V$  באינים ווכאן

$$0 < \dim \mathrm{Ker} T < \dim \mathrm{Im} T < 3$$

 $\dim\operatorname{Im} T=2$ ,  $\dim\operatorname{Ker} T=1$  והפתרון היחיד לאי השוויונות הללו הן

## שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

$$A = \left( egin{array}{ccc} 2 & -a-5 & -3 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & a-3 & -3 \end{array} 
ight)$$
 גע. (14) נתונה מטריצה

- (i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה לכסינה, כך הממשי a המטריצה הפרמטר של עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה למצוא את (P,D).
  - A מצאו את הערך של הפרמטר A שעבורו הוקטור הוקטור (ii) מצאו את הערך אל הפרמטר וויקטור שעבורו הוקטור (ii)
    - ב. )6 נקודות( קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)

- $A^2+I$  אם  $\lambda$  ערך עצמי של A, אז אז  $\lambda^2+1$  אם  $\lambda$  ערך עצמי של (i)
  - .אם A הפיכה ולכסינה אז  $A^{-1}$  לכסינה (ii)

## פתרון

א. נחשב תחילה את הפולינום האפייני של המטריצה

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & a + 5 & 3 \\ 0 & \lambda + a - 1 & -1 \\ 0 & 3 - a & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)((\lambda + 3)(\lambda + a - 1) + 3 - a) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda + a)$$

למטריצה  $a 
eq \pm 2$  אם ורק אם הוא מאפס את הפולינום האופייני, ולכן הערכים העצמיים של A הם A אם ורק אם הוא מאפס את הפולינום האופייני, ולכן הערכים העצמיים של Aיש שלושה ערכים עצמיים שונים ולכן היא לכסינה. נבדוק מה קורה בשאר המקרים:

עביר איז פאח בדי האיאומטרי של 2 ע"י מציאת בדי של 2 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי של 1 ע"י מציאת a=-2 עבור a=-2A-2Iהדרגה של

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה 1 (כי כל השורות הן כפולה של השורה הראשונה), ולכן הריבוי הגיאומטרי של 2 הוא  $3 - \mathrm{rank}(A-2I) = 2$  כלומר שווה דרגת המטריצה שווה 1 (כי כל השורות הן כפולה של השורה הראשונה), ולכן הריבוי הגיאומטרי של 2לריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לכסינה במקרה זה.

עביר של -2 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל 1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של -2 שווה ל 1, ולכן גם הריבוי הגיאומטרי שלו שווה ל 1. נבדוק אם כן את הריבוי הגיאומטרי של A+2I הדרגה של

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דרגת המטריצה שווה 2, ולכן הריבוי הגיאומטרי של 2- הוא  $3-{\rm rank}(A+2I)=1$  הוא המטריצה שווה 2, ולכן הריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לא לכסינה

כך ש $v \neq 0$  כדים A ע"ע של  $\lambda$  ע"ע של הטענה נכונה: אם לכונה (i)

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^2v = A(Av) = \lambda Av = \lambda^2v \Rightarrow \left(A^2 + I\right)v = A^2v + v = \lambda^2v + v = \left(\lambda^2 + 1\right)v$$

 $A^2 + I$  ולכו  $\lambda^2 + 1$  ע"ע של

נקבל (ii) הטענה נכונה: אם A לכסינה, כלומר קיימות P כך ש- D אלכסונית ומתקיים A שני הצדדים נקבל (ii)

$$\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=D^{-1}\Leftrightarrow PA^{-1}P=D^{-1}$$
ע"י סימון  $Q=P^{-1}$  נקבל כי  $Q=P^{-1}$ 

# שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א. ב. ג

- . אם נתון שהיא מספר עלילי. אם הדטרמיננטה אל אם מטריצה מסדר מספר מספר מספר את הדטרמיננטה אל אם נתון שהיא מספר שלילי. א
  - ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 5a_2 & 10b_2 & 5c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3a_3 & 3a_2 & 3a_1 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה A שווה ו

ג. (7 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3 imes 3 כך ש-3 imes 4. הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

#### פתרון

א. מהנתון נובע כי 3 imes 3 כלומר הדטרמיננטה מקיימת  $|A|^3 = |A^3| = |9A| = 9^3 |A|$  א. מהנתון נובע כי

$$0 = |A|^3 - 3^6|A| = |A|(|A|^2 - 3^6) = |A|(|A| - 3^3)(|A| + 3^3) \Rightarrow |A| = 0, \pm 3^3$$

 $|A|=-3^3$  נתון כי |A| שלילי ולכן

ב. נשווה ביו שתי הדטרמיננטות:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 5a_2 & 10b_2 & 5c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{vmatrix}^{C_2 \to \frac{1}{5}R_2} 10 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{10}|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3a_3 & 3a_2 & 3a_1 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}^{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ B_2 \to -R_2 \\ -3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}^{C_1 \leftrightarrow C_3} 3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}|B| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

היבלנו כי

$$\frac{1}{10}|A| = -\frac{1}{3}|B| \Leftrightarrow |B| = -\frac{3}{10}|A| = -\frac{3}{10}20 = -6.$$

ג. מהשוויון AB = -BA נובע השוויון AB + BA = 0 וממנו נובע

$$|A||B| = |-AB| = (-1)^3 |A||B| \Leftrightarrow 2|A||B| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$$
ו אור

ולכן אחת המטריצות חייבת להיות לא הפיכה.

# שאלה 6. (20 נקודות)

. א. נתון המרחב הוקטורי  $V=\mathbb{R}^3$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. מצאו  $v\in V$  שמקיים את שני התנאים הבאים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$
 הוקטור אורתוגונלי לוקטורים (i)

- ווה הוורמה של v שווה (ii
- $\langle u,v
  angle = \langle u,u
  angle = 2$  ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו  $0 
  eq u,v \in V$  שני וקטורים שונים זה מזה המקיימים
  - . הראו כי $\{u-v,u\}$  קבוצה אורתוגונלית (i)
- חשבו את הנורמה של v,v כלומר  $\|v\|=\sqrt{\langle v,v \rangle}$  אם נתון בנוסף שהקבוצה (ii) חשבו את הנורמה של אורתוגונלית

### פתרון

א. נמצא תחילה את כל הוקטורים שהם אורתוגונליים לשני הוקטורים הנתונים.

כלומר זהו מרחב הפתרונות של המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ . נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{11}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

נחשב את הנורמה של האיבר בבסיס:

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 11 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{11}$$

 $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$  אורתוגונלי לשני הוקטורים הנתונים הוא 1 שאורתוגונלי שאורתוגונלי לשני הוקטורים הנתונים הוא

: שונים מאפס. ולכן הקבוצה אורתוגונלית אם המכפלה הפנימית שווה לאפס ולכן מאפס. ולכן הקבוצה אורתוגונלית אם המכפלה הפנימית שווה לאפס

$$\langle u - v, u \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, u \rangle = 2 - 2 = 0$$

אם נתון שהקבוצה אורתוגונלית, אז (ii)

$$0 = \langle u - 4v, v \rangle = \langle u, v \rangle - 4\langle v, v \rangle = 2 - 4||v||^2 \Rightarrow ||v|| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

# בהצלחה

**שם הקורס:** אלגברה ליניארית מס' נבחן

**קוד הקורס:** 90905

הוראות לנבחן:

• חומר עזר שימושי לבחינה:

• אין להשתמש בטלפון סלולארי

דפי נוסחאות מצורפים

מחשבון לא גרפי

• אין לכתוב בעפרון / עט מחיק

• אין להשתמש במחשב אישי או נייד

יאן לוושונוש בנוושב א שי או ניו . ענו להשחמש כדוחה ענו הני/ עו מכשור מדוה עתר

• אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר

• אין להפריד את דפי שאלון הבחינה • אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

09:00 סו/ס2/23 מועד א מועד א 1/ס2/23 סיוטוו ו/או כל וף אווו

משך הבחינה: 180 דקות

תאריך ושעת הבחינה:

'סמסטר: א

### מרצי הקורס:

ד״ר רוזנצויג ליאור, פרופ׳ טל-עזר הלל, ד״ר קפלן דבורה, ד״ר שלוסברג מנחם, ד״ר ביתן רוני, ד״ר בנק אפרת, ד״ר אמיר ענת, ד״ר בארשבסקי אברהמי אורלי, פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד״ר לייטנר אריאלה מירה, ד״ר בר לוקיאנוב ולדימיר

\*\*\* שאלון הבחינה לא ייבדק על ידי המרצה, לא ייסרק ולא יישמר. \*\*\* לא ינתן ציון על תשובות אשר תכתבנה בשאלון זה \*\*\*

### מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור 5 שאלות מתוך 6.

שווי כל שאלה 20 נקודות.

יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל שאלה בדף חדש

יש לענות תשובות מפורטות ומנומקות. הסבירו את צעדיכם.

יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.

# בהצלחה!

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

# ${f X}$ מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. אם לא צויין אחרת, יש לנמק את התשובות באופן מלא

## שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & + az = a-3 \\ -2x + y + (2-3a)z = 11-a \\ (a-8)x + (2a-2)y - (3a+6)z = 4a^2+4 \end{cases}$$

- . עבורם אין פתרונות או אין פתרונות אינסוף פתרונות עבורם של הפרמטר הממשי a עבורם של הערכים של הערכים של הערכים של הפרמטר הממשי a
  - . המערכת של פתרון אילו עבור העמודה (אם קיימים) אם הפרמטר של פתרון של המערכת (ii) מצאו עבור אילו ערכים אילו ערכים של הפרמטר (ii)
- ם. עמודות כך ש-u,v,w עמודות מסדר a,v,w מטריצה מסדר a,v,w מטריצה מסדר מטריצה מסדר a,v,w מטריצה מסדר a,v,w מטריצה מסדר a,v,w מטריצה מסדר בנוסף מטריצה מסדר a,v,w מטריצה מסדר בנוסף מטריצה בנוסף מט
  - . יש אינסוף פתרונות אינסוף Ax=v למערכת (i)
    - . אין פתרון אין פתרון (ii)
    - (iii) למערכת שAx=w יש פתרון.

# שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

- $A \cdot V$  בסיס של  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  ויהי (גקודות) מרחב מרחב וקטורי ממימד אים מרחב וקטורי ממימד מרחב וקטורי
  - (i) הסבירו מדוע הקבוצה

$$S = \{v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 + 3v_2, -v_2 + v_3, v_1 + v_2 + 3v_3, v_1 + 4v_3\}$$

תלויה לינארית.

 $\cdot V$  מצאו תת קבוצה של א שהיא בסיס של (ii)

### אין קשר בין סעיפים א,ב

-ב.  $W_1$  נקודות) יהי U מרחב וקטורי, ויהיו  $W_1, W_2, W_3 \neq \{0\}$  נקודות) יהי מרחב של U כך ש

$$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

- . שונים  $W_1+W_3,W_2+W_3$  שונים (i)
- $W_1+W_2 
  eq U$  אי אוגי ו- $W_1+W_3=W_2+W_3=U$ , אי אוגי (ii)

## שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

C-ו ,U בסיס של  $B=\left\{1+x,1+x+x^2,1+2x
ight\}$  נסמן בסיס של  $B=\{1+x,1+x+x^2,1+2x\}$  מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2, ויהיו ווא מרחב  $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$  בסיס של  $T:U\to\mathbb{R}^3$  הבסיס הסטנדרטי של  $T:U\to\mathbb{R}^3$  העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 4 & 1 \\ 6 & a^2 + 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- . הפיכה T ההעתקה a הממשי של הפרמטר ערכים של עבור אילו ערכים (i)
  - a=2 מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור (ii)
- ב. (6 נקודות) יהי לינארית מרחב וקטורי ממימד 3, ותהי ל $T:V\to V$ ותהי ממימד לינארית מרחב לינארית ב.

$$T \neq 0$$
, Im $T \subset \text{Ker}T$ , Im $T \neq \text{Ker}T$ 

- $\operatorname{Im} T \neq \{0\}$  ,  $V \neq \operatorname{Ker} T$  הסבירו מדוע (i)
- T מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של (ii)

# שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

$$A = \left(egin{array}{ccc} 1 & a-2 & a \ 0 & 0 & 1 \ 0 & a & a-1 \end{array}
ight)$$
 א.  $A = \left(egin{array}{ccc} 1 & a-2 & a \ 0 & 0 & 1 \ 0 & a & a-1 \end{array}
ight)$  א. א.  $A = \left(egin{array}{ccc} 1 & a-2 & a \ 0 & 0 & 1 \ 0 & a & a-1 \end{array}
ight)$ 

- (i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה לכסינה, כך הממשי a המטריצה הפרמטר של עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה למצוא את (P,D).
  - A המטריצה של וקטור וקטור הוא הערך שעבורו הוקטור שעבורו הוקטור שעבורו הפרמטר של הפרמטר (ii)
    - ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)
      - $A^{-1}$  אם A ערך עצמי של A, אז  $\frac{1}{\lambda}$  ערך עצמי של  $\lambda$  הפיכה,  $\lambda$ 
        - . אם A לכסינה אז  $A^T$  לכסינה אם (ii)

# שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

- . אם נתון שהיא מספר שלילי. אם הדטרמיננטה אל אם מסריצה מספר לא המקיימת הארט האל את מספר שלילי. או האיא מספר שלילי. או מספר שלילי
  - ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 3a_2 & 6b_2 & 3c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5a_3 & 5a_2 & 5a_1 \\ -2b_3 & -2b_2 & -2b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

.12 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה A

. (7 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3 imes 3 כך שA,B הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

# שאלה 6. (20 נקודות)

. את שני התנאים את שני מצאו  $v\in V$  שמקיים את שני התנאים הבאים: עם המכפלה הפנימית את עם את עון המרחב הוקטורי  $V=\mathbb{R}^3$ 

$$\begin{pmatrix}1\\5\\-6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\-10\end{pmatrix}$$
 הוקטור  $v$  אורתוגונלי לוקטורים (i)

- .1 הנורמה של v שווה (ii)
- $\langle u,v
  angle = \langle u,u
  angle = 3$  בי. (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו v 
  eq 0 
  eq 0 שני וקטורים שונים זה מזה המקיימים
  - . הראו כי  $\{u-v,u\}$  קבוצה אורתוגונלית.
  - אורתוגונלית קבוצה אורתוגונלית את הנורמה של  $\{u-2v,v\}$  אם נתון בנוסף שהקבוצה אורתואועלית (ii)

**שם הקורס:** אלגברה ליניארית מס' נבחן

**קוד הקורס:** 90905

הוראות לנבחן:

• חומר עזר שימושי לבחינה:

• אין להשתמש בטלפון סלולארי

דפי נוסחאות מצורפים

מחשבון לא גרפי

• אין לכתוב בעפרון / עט מחיק

• אין להשתמש במחשב אישי או נייד

יאן לוושונוש בנוושב א שי או ניו . ענו להשחמש כדוחה ענו הני/ עו מכשור מדוה עתר

• אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר

• אין להפריד את דפי שאלון הבחינה • אין לצרף למחברת / שאלון הבחינה דפי טיוטה ו/או כל דף אחר

09:00 סו/ס2/23 מועד א מועד א 1/ס2/23 סיוטוו ו/או כל וף אווו

משך הבחינה: 180 דקות

תאריך ושעת הבחינה:

'סמסטר: א

### מרצי הקורס:

ד״ר רוזנצויג ליאור, פרופ׳ טל-עזר הלל, ד״ר קפלן דבורה, ד״ר שלוסברג מנחם, ד״ר ביתן רוני, ד״ר בנק אפרת, ד״ר אמיר ענת, ד״ר בארשבסקי אברהמי אורלי, פרופ׳ סטאנצ׳סקו יוני, ד״ר לייטנר אריאלה מירה, ד״ר בר לוקיאנוב ולדימיר

\*\*\* שאלון הבחינה לא ייבדק על ידי המרצה, לא ייסרק ולא יישמר. \*\*\* לא ינתן ציון על תשובות אשר תכתבנה בשאלון זה \*\*\*

### מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לפתור 5 שאלות מתוך 6.

שווי כל שאלה 20 נקודות.

יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל שאלה בדף חדש

יש לענות תשובות מפורטות ומנומקות. הסבירו את צעדיכם.

יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת.

# בהצלחה!

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

# ${f X}$ מבחן באלגברה לינארית תשפ"ג סמסטר א שאלון

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. אם לא צויין אחרת, יש לנמק את התשובות באופן מלא

# שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x & + (1-b)z = -b-2 \\ -2x + y + (3b-1)z = 10+b \\ (-b-6)x - (2b+1)y + (b-9)z = 4b^2-8b \end{cases}$$

- . עבורם אין פתרונות או אין פתרונות אינסוף פתרונות של הפרמטר הממשי של למערכת של הערכים של הפרמטר הממשי b (i)
  - הוא פתרון של המערכת.  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת. (ii) אם קיימים) וקטור העמודה ( $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ם. עמודות כך ש-v אם מטריצה מסדר B אם מטריצה מסדר B מעריצה מסדר B מודים מידר B מעריצה מסדר B מעריצה הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק
  - . מערכת Bx=w יש אינסוף פתרונות (i)
    - . יש פתרון יחיד ABx=v למערכת (ii)
      - .יש פתרון למערכת BAx = w יש פתרון (iii)

# שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

- $A \cdot V$  בסיס של  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  ויהי (ויהי ממימד  $A \cdot V$  מרחב וקטורי ממימד ממימד איז מרחב וקטורי ממימד ויהי
- . תלויה לינארית  $S=\{v_1-2v_2+v_3,-v_1+3v_2,v_2+v_3,v_1-v_2+2v_3,v_1-4v_3\}$  תלויה לינארית.
  - $\cdot V$  מצאו תת קבוצה של א שהיא בסיס של (ii)

### אין קשר בין סעיפים א,ב

ב.  $W_1, W_2, W_3 \neq \{0\}$  בים של U מרחבים של יהי (8 נקודות) יהי מרחבים של כך ש

$$W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = U.$$

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות

- . שווים  $W_1 \cap W_3, W_2 \cap W_3$  שווים (i)
- זוגי.  $\dim U$  אז  $W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{0\}$  אם (ii)

## שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

C-ט של בסיס של  $B=\left\{1+x,1+x+x^2,1+2x
ight\}$  היותר 2, ויהיו ממעלה לכל היותר  $U=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$  בסיס של  $U=\mathbb{R}_2[x]$  הבסיס הסטנדרטי של  $T:U\to\mathbb{R}^3$  תהי  $T:U\to\mathbb{R}^3$  העתקה לינארית כך שהמטריצה המייצגת שלה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ a^2 + 1 & 2 & 1\\ 3 & a^2 + 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- . מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a ההעתקה T לא הפיכה (i)
  - a=1 מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה עבור (ii)
- ב. (6) נקודות) יהי V מרחב וקטורי ממימד 3, ותהי T:V o V העתקה לינארית המקיימת

 $\mathrm{Ker}T\subset\mathrm{Im}T,\mathrm{Im}T
eq\mathrm{Ker}T,\quad$ לא חח"ע T

- לא על. T לא על. (i)
- T מצאו את המימדים של הגרעין והתמונה של (ii)

# שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

$$A = egin{pmatrix} 2 & -(5+a) & -3 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & -3+a & -3 \end{pmatrix}$$
 א. (14) געוות מטריצה

- (i) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר הממשי a המטריצה לכסינה, כלומר קיימות P הפיכה וD המטריצה הממשי a המטריצה המטריצה לכסינה, כלומר D הפיכה וD הפיכה של הפרמטר הממשי D המטריצה לכסינה, כלומר אין D המטריצה המטר
  - A המטריצה של וקטור וקטור הוא הערך שעבורו הוקטור שעבורו שעבורו a הפרמטר של מצאו מצאו (ii)
    - ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות (אין צורך להוכיח או להפריך)
      - $A^2+I$ אם ערך עצמי של  $\lambda^2+1$ אז אז ערך עצמי של  $\lambda$  (i)
        - . אם A הפיכה ולכסינה אז  $A^{-1}$  לכסינה (ii)

# שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב, ג

- . אם נתון שהיא מספר עלילי. אם מטריצה מטריצה מסדר A אם מסדר A המקיימת אור A את הדטרמיננטה של A אם מטריצה מספר שלילי.
  - ב. (6 נקודות) נתונות המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ 5a_2 & 10b_2 & 5c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3a_3 & 3a_2 & 3a_1 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

.20 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה B כאשר נתון שהדטרמיננטה של המטריצה חשבו את חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה אווה

. (7 נקודות) תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מסדר 3 imes 3 כך שA,B הוכיחו כי לפחות אחת מהן אינה הפיכה.

# שאלה 6. (20 נקודות)

: את שני התנאים את שני מצאו  $v \in V$  שמקיים את שני התנאים הבאים עם המכפלה הפנימית את עם את עם את את עם את עם את או  $V = \mathbb{R}^3$ 

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$
 הוקטור  $v$  אורתוגונלי לוקטורים (i)

- .1 הנורמה של v שווה (ii)
- $\langle u,v
  angle = \langle u,u
  angle = 2$  בי מוה המקיימים זה מזה מונים שונים שונים (ע,  $v \in V$  בי ויהיו ויהיו מכפלה פנימית, ויהיו ויהיו
  - . הראו כי  $\{u-v,u\}$  קבוצה אורתוגונלית.
- אורתוגונלית קבוצה אורתוגונלית את הנורמה של  $\{u-4v,v\}$  אם נתון בנוסף שהקבוצה אורתואועלית (ii)