מרצים : ד"ר דבורה קפלן, ד"ר רוני ביתן, פרופסור יוני סטאנצ'סקו.
מתרגלים : מר עמית בנגיאט, מר ולדימיר גלמן, מר שי כרמון .

פתרון Y

<u>שאלה 1</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו שלכל $x \in (0,\infty)$ מתקיים אי השוויון : $x^2+\sin x > x\cos x$.

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל : $\int e^{x^2+1}\left(x^3+x\right)dx$.

<u>פתרון:</u>

א . נגדיר פונקצית עזר : $f(x)=x^2+\sin x - x\cos x$.

צריך להוכיח ש- f חיובית בקטע $(0,\infty)$. הפונקציה גזירה לכל x ומתקיים :

$f'(x)=2x+x\sin x = x(2+\sin x)$. הנגזרת חיובית לכל נקודה $x\in(0,\infty)$, ומתאפסת ב -0.

ואז f עולה בקטע $[0,\infty)$. מפה נובע שאם $x>0$ אז $f(x)>f(0)=0$.

מזה מסיקים ש- f חיובית בקטע $(0,\infty)$.

ב.

$$\int e^{x^2+1}\left(x^3+x\right)dx=\int e^{x^2+1}\left(x^2+1\right)x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2+1}\left(x^2+1\right)2x\,dx \underset{\substack{x^2+1=t\\ 2x\,dx=dt}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2}\int e^t\,t\,dt \underset{INTRGRATION\ BY\ PARTS}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^t t-\int e^t dt\right)=\frac{e^t t-e^t}{2}+C=\frac{e^{x^2+1}(x^2+1)-e^{x^2+1}}{2}+C$$

<u>שאלה 2</u> : (20 נקודות)

א. (12 נק') מצאו את הגבול : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n^2+2n}{n^3+2n}\right)$.

ב. (8 נק') טענה : אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ והסדרה $\{b_n\}$ היא סדרה חיובית וחסומה אזי מתקיים:

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\infty$.

האם הטענה נכונה ?
אם התשובה היא "כן" אז נמקו היטב ואם היא "לא" אז הביאו דוגמה נגדית להפרכה של הטענה .

<u>פתרון:</u>

א .

נסמן : $a_n=\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n^2+2n}{n^3+2n}$

כל איבר בסדרה מורכב מ- $2n$ מחוברים. וכל מחובר מקיים :

$$j=1\ldots 2n\ ,\quad \frac{n^2+1}{n^3+2n}\le\frac{n^2+j}{n^3+j}\le\frac{n^2+2n}{n^3+1}$$

וכשנסכום את כל המחוברים נקבל שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים : $2n\cdot\frac{n^2+1}{n^3+2n}\le a_n\le 2n\cdot\frac{n^2+2n}{n^3+1}$

נמצא את הגבולות של החסמים :

$$\lim_{n\to\infty}2n\cdot\frac{n^2+1}{n^3+2n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{n^3+n}{n^3+2n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}2n\cdot\frac{n^2+2n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{n^3+2n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}=2$$

ראינו ש - $\{a_n\}$ חסומה בין שתי סדרות ששואפות ל-2, לכן לפי כלל הסנדביץ' גם $\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

ב. הטענה לא נכונה :

דוגמה להפרכה : $a_n=n,\ b_n=\frac{1}{n}$. מתקיים ש $\lim_{n\to\infty}(n)=\infty$ וגם $0<\frac{1}{n}\le 1$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אבל $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=1$.

<u>שאלה 3</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו כמה פתרונות ממשיים קיימים למשוואה : $3^{2x}=3^x+x\cdot\ln 3$.

ב. (10 נק ') על ידי שימוש בנוסחת טיילור עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[5]{x}$ סביב $x_0=1$ הוכיחו כי לכל $x\ge 1$ מתקיים :

$$\sqrt[5]{x}\ge 1+\frac{x-1}{5}-\frac{2(x-1)^2}{25}$$

<u>פתרון :</u>

א. נתבונן בפונקציה $f(x)=3^{2x}-3^x-x\ln 3$. מספיק לבדוק כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $f(x)=0$. הפונקציה f רציפה ב- $\mathbb{R}$ (אלמנטרית שמוגדרת בכל נקודה) וגם גזירה בכל נקודה ומתקיים : $f'(x)=\ln 3\left(2\cdot 3^{2x}-3^x-1\right)$

הנגזרת מתאפסת רק באפס כי אם נציב $t=3^x$ הפתרונות של $2t^2-t-1=0$ הם : $t=-\frac{1}{2},1$ ומתוכם רק : $3^x=1$ אפשרי. בנוסף , מבדיקת הסימן של הטרינום $2t^2-t-1$ וביחד עם זה

ש - $t=3^x$, מסיקים שאם $x>0$ הנגזרת היא חיובית ואם $x<0$ הנגזרת היא שלילית . ואז הפונקציה f יורדת ממש בקטע $(-\infty,0]$ עד $f(0)=0$ ועולה ממש בקטע $[0,\infty)$.

מסיקים ש ב - $x=0$ יש לפונקציה מינימום מוחלט ב - $\mathbb{R}$ והוא שווה ל -0 , ובכל נקודה אחרת הפונקציה חיובית.
ואז למשוואה יש פתרון יחיד : $x=0$.

ב. עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[5]{x}$ נרשום את נוסחאת טיילור מסדר 2 סביב $x_0=1$ עם שארית בצורת לגרנז'. נחשב קודם את הנגזרות הנדרשות לכך :

$$f(x)=\sqrt[5]{x}=x^{1/5} \qquad f(1)=1$$
$$f'(x)=\frac{1}{5}x^{-4/5} \qquad f'(1)=\frac{1}{5}$$
$$f''(x)=-\frac{4}{25}x^{-9/5} \qquad f''(1)=-\frac{4}{25}$$
$$f'''(x)=\frac{36}{125}x^{-14/5}$$

לכן לכל $x\ge 1$ מתקיים :

$$\sqrt[5]{x}=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+R_2(x)=$$
$$\underset{1\le c\le x}{=}1+\frac{x-1}{5}-\frac{2(x-1)^2}{25}+\underbrace{\frac{1}{3!}\cdot\frac{36}{125}\cdot \overset{>0}{c^{-14/5}}\cdot\overbrace{(x-1)^3}^{\ge 0}}_{\ge 0}\ge 1+\frac{x-1}{5}-\frac{2(x-1)^2}{25}$$

זה מוכיח את אי השוויון הנדרש.

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות).

א. (12 נק') מצאו נקודות מינימום/מקסימום מקומי ונקודות פיתול של הפונקציה :
$f(x)=3x^5-5x^3$.

ב. (8 נק') תהיינה f ו g פונקציות גזירות ב - $\mathbb{R}$, כך שהנקודה x_0 היא נקודה קריטית של כל אחת.

ב.1. הוכיחו שהנקודה x_0 היא גם נקודה קריטית של המכפלה $f\cdot g$.

ב.2. אם לשתי הפונקציות יש בנקודה x_0 מינימום מקומי, האם בהכרח למכפלה גם יש מינימום מקומי באותה נקודה ? (הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית).

פתרון : **א.** נחשב את הנגזרת : $f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2\left(x^2-1\right)=15x^2(x-1)(x+1)$ ונקבל שהנקודות הקריטיות הן : $0,1,-1$. אם מסתכלים בטבלה ניתן לראות, לפי סימן הנגזרת בסביבה של כל אחת מהנקודות, כי $x=-1$ נק' מקסימום מקומי וכי $x=1$ נק' מינימום מקומי.

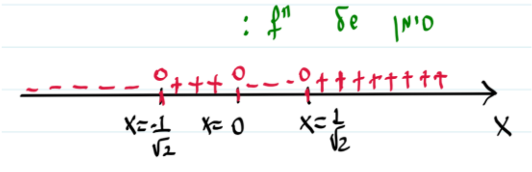
	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$1<x$
$x-1$	-	-	-	+
$x+1$	-	+	+	+
f'	+	-	-	+
f	עולה	יורדת	יורדת	עולה

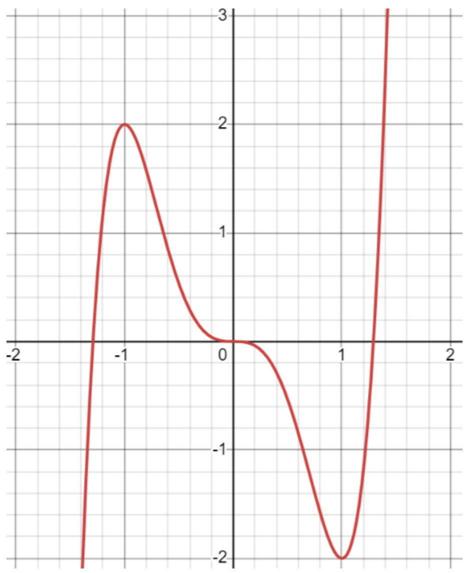
עבור נק' פיתול נחשב נגזרת שנייה :

$f''(x)=60x^3-30x=30x\left(2x^2-1\right)$ ונשים לב

שזו מחליפה סימן בשלוש הנקודות : $0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

לפיכך שלוש אלה הן נקודות פיתול.





ב. 1. $(f\cdot g)'(x_0)=\underbrace{f'(x_0)}_{0}g(x_0)+\underbrace{g'(x_0)}_{0}f(x_0)=0$

ב. 2. לא בהכרח. דוגמה להפרכה : $f(x)=x^2\ ;\ g(x)=x^2-1$. בנקודה $x_0=0$ לכל אחת יש מינימום מקומי אבל למכפלה יש מקסימום מקומי.

<u>שאלה 5</u> : (20 נקודות)

א.(12 נק') נגדיר את הפונקציה $F(x)=\int_1^{\sqrt{x}}e^{5t^2}dt$, לכל $x\in[0,\infty)$.

מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף של הפונקציה בנקודה $(1,F(1))$.

ב. (8 נק') מצאו את הגבול : $\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\sin x\right)^x$.

<u>פתרון :</u>

א. הפונקציה $f(t)=e^{5t^2}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$ כאלמנטרית שמוגדרת בכל נקודה,ולכן לפי המשפט היסודי הפונקציה $\int_1^x e^{5t^2}dt$ היא גזירה ב- $\mathbb{R}$. בנוסף $g(x)=\sqrt{x}$ היא גזירה בכל $x>0$ ואז

על פי משפט היסודי המוכלל מתקיים שלכל $x>0$ **:**

$$F'(x)=e^{5\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

בנוסף מתקיים : $F'(1)=\frac{e^5}{2}$, ו $F(1)=\int_1^{\sqrt{1}=1} e^{5t^2}dt=0$.

לכן משוואת הישר המשיק המבוקש היא : $y=F(1)+F'(1)(x-1)=\frac{e^5}{2}(x-1)$ **.**

ב.

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^2+\sin x\right)^x \underset{0^0}{=} \lim_{x\to0^+}e^{x\cdot\ln(x^2+\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln(x^2+\sin x)}\underset{**}{=}e^0=1$$

$$**\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln(x^2+\sin x)\underset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x^2+\sin x)}{x^{-1}}=(\frac{-\infty}{\infty},LOPITAL)=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\dfrac{2x+\cos x}{x^2+\sin x}\right)}{-x^{-2}}=$$

$$\lim_{x\to0^+}-\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{2x+\cos x}{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}\right)=\lim_{x\to0^+}-\frac{\overbrace{(2x+\cos x)}^{\nearrow 1}}{1+\underbrace{\boxed{\dfrac{\sin x}{x^2}}}_{\searrow\frac{1}{0^+}=\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$(\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1)$$

<u>שאלה 6</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') נתונה הפונקציה :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}} & x\neq1\\ A & x=1\end{cases}$$

האם קיים ערך של הפרמטר A שעבורו הפונקציה רציפה בנקודה $x_0=1$?
אם כן, מצאו את הערך של A. אם לא ,נמקו את התשובה.

ב. (10 נק') נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$.

מצאו את השטח הכלוא בין הגרף של הפונקציה f והישרים $y=0$, $x=1$ ו- $x=e$.

פתרון:

א. נבדוק את הגבולות החד צדדיים של פונקציה בנקודה $x_0=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \dfrac{1}{1+e^{-\infty}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = \dfrac{1}{1+e^{\infty}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \nexists$$

לפונקציה לא קיים גבול בנקודה $x_0=1$ לכן לא קיים ערך של A שעבורו הפונקציה רציפה בנקודה הנ"ל.

ב. הפונקציה רציפה בקטע $[1,e]$ ובנוסף $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}\geq 0$ לכל $x\in[1,e]$.

ולכן השטח המבוקש הוא :

$$AREA=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e (\ln x)^2\frac{1}{x}\,dx \underset{\substack{\ln x=t \\ \frac{1}{x}dx=dt}}{=} \int_{\ln 1}^{\ln e} t^2\,dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$