<u>שאלה 1.א</u> (10 נקודות) **שאלון Y**

1. הוכיחו שהסדרה $a_n=\frac{8n^2+1}{n^3+n}+\frac{8n^2+2}{n^3+(n-1)}+.......+\frac{8n^2+(n-1)}{n^3+2}+\frac{8n^2+n}{n^3+1}$

מתכנסת לגבול סופי ומצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n$. נמקו!

2. מצאו שני מספרים m,M כך ש- $m<a_n<M$, לכל $n\geq 1$. נמקו !

<u>פתרון 1.א</u> (רשום רק בעמודים 1 ו- 2)

המשך פתרון 1.א

<u>שאלה 1.ב</u> (10 נקודות)

חשבו את $\int \frac{x}{e^{4x}}dx$. הוכיחו שכל פונקציה קדומה של $f(x)=\frac{x}{e^{4x}}$ היא בהכרח בעלת אסימפטוטה אופקית ב- $+\infty$.

<u>פתרון 1.ב</u> (רשום רק בעמודים 3 ו- 4)

<u>המשך פתרון 1.ב</u>

<u>שאלה 2.א</u> (10 נקודות)

יהי $m \in \mathbf{R}$. נגדיר פונקציה f על ידי:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\cos x+\cos 3x}{(2x-\pi)^2}+m, & x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ m, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

האם קיים הגבול $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$? האם קיים מספר m כך שהקו $x=\dfrac{\pi}{2}$ מהווה אסימפטוטה אנכית של הפונקציה f ? נמקו !

<u>פתרון 2.א</u> (רשום רק בעמודים 5 ו- 6)

המשך פתרון 2.א

<u>שאלה 2.ב</u> (10 נקודות)

הוכיחו שהמספר $M = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48} = \frac{69}{48}$ מקיים $\left|\sqrt{2} - M\right| < \frac{5}{128}$. נמקו !

<u>רמז</u>: מצאו קירוב של $\sqrt{2}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $n = 3$ של פונקציה מתאימה.

<u>פתרון 2.ב</u> (רשום רק בעמודים 7 ו- 8)

<u>המשך פתרון 2.ב</u>

<u>שאלה 3.א</u> (10 נקודות)

1. האם הפונקציה $f(x)=-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ חד-חד-ערכית בתחום $D=(0,\infty)$? נמקו !

2. יהי $c\in\mathbf{R}$. מצאו את כל הערכים של c כך שהמשוואה $c\sqrt{x}=-\ln x$ בעלת פתרון יחיד.

<u>פתרון 3.א</u> (רשום רק בעמודים 9 ו- 10)

<u>המשך פתרון 3.א</u>

שאלה 3.ב (10 נקודות)

חשבו את האינטגרל $I=\int \frac{32}{(4-x^2)(4+x^2)}dx$.

פתרון 3.ב (רשום רק בעמודים 11 ו- 12)

<u>המשך פתרון 3.ב</u>

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x)=1+\sin\frac{x}{2}$. נסמן ב-

- $L_1: y=m_1x+n_1$ קו המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=0$;
- $L_2: y=m_2x+n_2$ קו המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=\pi$.

א. (10 נקי) הוכיחו ששני הקווים L_1 ו- L_2 נמצאים מעל גרף הפונקציה f בקטע $[0,\pi]$

ב. (10 נקי) מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

- גרף הפונקציה $y=f(x)$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=0$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\pi$.

<u>פתרון 4.א</u> (רשום רק בעמודים 13 ו- 14)

<u>המשך פתרון 4.א</u>

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x)=1+\sin\dfrac{x}{2}$. נסמן ב-

- $L_1: y=m_1x+n_1$ קו המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=0$;
- $L_2: y=m_2x+n_2$ קו המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=\pi$.

א. (10 נק') הוכיחו ששני הקווים L_1 ו- L_2 נמצאים מעל גרף הפונקציה f בקטע $[0,\pi]$

ב. (10 נק') מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

- גרף הפונקציה $y=f(x)$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=0$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\pi$.

<u>פתרון 4.ב</u> (רשום רק בעמודים 15 ו- 16)

המשך פתרון 4.ב

<u>שאלה 5.א</u> (10 נקודות)

הוכיחו ש- $0.75 \le 2\ln x - \ln^2 x \le 1$, לכל $x \in \left[\sqrt{e}, e\sqrt{e}\right]$.

<u>פתרון 5.א</u> (רשום רק בעמודים 17 ו- 18)

<u>המשך פתרון 5.א</u>

<u>שאלה 5.ב</u> **(10 נקודות)**

נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך שהנגזרת השניה $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה ב- $\mathbf{R}$.
הוכיחו שאם קיימות שתי נקודות $a<b$ כך ש- $f'(a)>1$ ו- $f'(b)<-1$, אזי קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש- $f''(c)<0$. <u>רמז</u> : אפשר להשתמש במשפט Lagrange.

<u>פתרון 5.ב</u> (רשום רק בעמודים 19 ו- 20)

<u>המשך פתרון 5.ב</u>

שאלה 6.א (10 נקודות)

באיזה נקודה המשיק לגרף הפונקציה $G(x)=\int_0^{x^2-8x+20} e^{t^2}dt$ מקביל לקו $L: y=0$?

האם הנקודה $a=4$ היא נקודת קיצון מוחלט של G בתחום $D_f=\mathbf{R}$?

פתרון 6.א (רשום רק בעמודים 21 ו- 22)

<u>המשך פתרון 6.א</u>

<u>שאלה 6.ב</u> (10 נקודות)

האם הטענה הבא נכונה :

" אם $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה חסומה, $|g(x)|\le 1$, לכל $x\in\mathbf{R}$ ו- $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה בעלת גבול סופי $L=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, אז גם פונקציית המכפלה $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ בעלת גבול סופי בנקודה $a=0$ ".

אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת. אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

<u>פתרון 6.ב</u> (רשום רק בעמודים 23 ו- 24)

<u>המשך פתרון 6.ב</u>

סוף הפתרון !

פתרון Y מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

שאלה 1.א (10 נקודות)

1. הוכיחו שהסדרה $a_n=\frac{8n^2+1}{n^3+n}+\frac{8n^2+2}{n^3+(n-1)}+.......+\frac{8n^2+(n-1)}{n^3+2}+\frac{8n^2+n}{n^3+1}$

מתכנסת לגבול סופי ומצאו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. נמקו!

2. מצאו שני מספרים m,M כך ש- $m<a_n<M$, לכל $n\ge1$. נמקו !

פתרון

ברור ש- $\frac{8n^2+n}{n^3+1}<\frac{8n^2+n}{n^3+1}<...<\frac{8n^2+2}{n^3+(n-1)}<\frac{8n^2+1}{n^3+n}$, לכל $n\ge1$ ולכן

$$\textbf{(I)}\quad \underbrace{n\frac{8n^2+1}{n^3+n}}_{x_n}\le a_n\le \underbrace{n\frac{8n^2+n}{n^3+1}}_{y_n}$$

(בגלל שיש n מחוברים, $\frac{8n^2+1}{n^3+n}$ הוא המחובר הכי קטן ו- $\frac{8n^2+n}{n^3+1}$ הוא המחובר הכי גדול).

ברור ש- $x_n:=n\frac{8n^2+1}{n^3+n}=\frac{8+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}8$, $y_n:=n\frac{8n^2+n}{n^3+1}=\frac{8+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}\xrightarrow{n\to\infty}8$

לכן, <u>האי-שיוויון הכפול</u> **(I)** $x_n\le a_n\le y_n$ <u>וקריטריון הסנדוויץ'</u> גוררים שהסדרה $(a_n)_{n\ge1}$ מתכנסת ל- 8.

ברור ש- $x_n=n\frac{8n^2+1}{n^3+n}>0$, $y_n=\frac{8+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}<\frac{9}{1}$. לכן **(I)** גורר ש- $m=0<a_n<9=M$, לכל $n\ge1$.

<u>שאלה 1.ב</u> (10 נקודות)

חשבו את $\int \frac{x}{e^{4x}}dx$. הוכיחו שכל פונקציה קדומה של $f(x)=\frac{x}{e^{4x}}$
היא בהכרח בעלת אסימפטוטה אופקית ב- $+\infty$.

<u>פתרון</u>

נמצא פונקציה קדומה של $f(x)=\frac{x}{e^{4x}}$ בעזרת אינטגרציה בחלקים :

$$\int \frac{x}{e^{4x}}dx=\int xe^{-4x}dx=\int x\cdot\left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right)'dx=x\cdot\left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right)-\int (x)'\cdot\left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right)dx=\frac{x}{-4e^{4x}}+\frac{1}{4}\int e^{-4x}dx=$$

$$=\frac{-x}{4e^{4x}}+\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-4x}}{-4}\right)+C=\frac{-4x-1}{16e^{4x}}+C$$

מסקנה :

אם $y=F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)=\frac{x}{e^{4x}}$ אז $F(x)=\frac{-4x-1}{16e^{4x}}+C$,
כאשר C מהווה קבוע ממשי כלשהוא. לכן , כלל לופיטל גורר שהגבול :

$$L=\lim_{x\to\infty}F(x)=C+\lim_{x\to\infty}\frac{-4x-1}{16e^{4x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=C+\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{16\cdot 4e^{4x}}=C+0=C$$

ז"א כל פונקציה קדומה $y=F(x)$ בעלת אסימפטוטה אופקית $y=C$ ב- $+\infty$.

<u>שאלה 2.א</u> (10 נקודות)

יהי $m \in \mathbf{R}$. נגדיר פונקציה f על ידי: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\cos x+\cos 3x}{(2x-\pi)^2}+m, & x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ m, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

האם קיים הגבול $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$? האם קיים מספר m כך שהקו $x=\dfrac{\pi}{2}$ מהווה אסימפטוטה אנכית של הפונקציה f ? נמקו !

<u>פתרון</u>

ידוע שהקו $x=\dfrac{\pi}{2}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה f אם ורק אם אחד מהגבולות החד צדדים הוא אינסופי.

נוכיח שהגבול $L=\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)$ קיים וסופי. נשתמש פעמיים בכלל L'Hôpital :

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{3\cos x+\cos 3x}{(2x-\pi)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-3\sin x-3\sin 3x}{2(2x-\pi)\cdot 2}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{3}{4}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x+3\cos 3x}{2}=0$$

לכן הגבול $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)=m=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, ז"א הפונקציה הנתונה רציפה בנקודה $x=\dfrac{\pi}{2}$, לכל $m\in\mathbf{R}$.

מסיקים שלא קיים מספר m כך שהקו $x=\dfrac{\pi}{2}$ מהווה אסימפטוטה אנכית של הפונקציה f .

<u>שאלה 2.ב</u> (10 נקודות)

הוכיחו שהמספר $M=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{48}=\frac{69}{48}$ מקיים $\left|\sqrt{2}-M\right|<\frac{5}{128}$. נמקו !

<u>רמז:</u> מצאו קירוב של $\sqrt{2}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $n=3$ של פונקציה מתאימה.

<u>פתרון</u>

<u>שלב א:</u> נמצא את הפולינום $Taylor$ של $f(x)=\sqrt{x-1}$ ממעלה $n=3$ סביב $a=2$. $f(2)=1$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{2};\qquad f''(x)=-\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f''(2)=-\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(x-1)^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow f^{(3)}(2)=\frac{3}{8}\,;\qquad f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(x-1)^{-\frac{7}{2}}$$

מכאן נקבל שנוסחת טיילור של $f(x)=\sqrt{x-1}$ ממעלה 3 סביב הנקודה $a=2$ היא:

$$f(x)=\sqrt{x-1}=1+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^2+\frac{3}{48}(x-2)^3+R_3(x)$$

כאשר $R_3(x)$ היא השארית. הואיל ש- $\sqrt{2}=\sqrt{3-1}=f(3)$, נקבל את הקירוב הדרוש ע"י הצבת $x=3$ בנוסחה שקיבלנו, כלומר:

$$\sqrt{2}\cong 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{48}=\frac{69}{48}=M$$

<u>שלב ב</u>: השארית היא:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-2)^4=-\frac{15}{16\cdot 24}(c-1)^{-\frac{7}{2}}(x-2)^4$$

כאשר $2<c<3$ וכן $x=3$. לכן $\sqrt{c-1}^{\,7}>\sqrt{2-1}^{\,7}$ והערכה לשגיאה היא:

$$\left|\sqrt{2}-\frac{69}{48}\right|=\left|R_3(3)\right|=\left|-\frac{15}{16\cdot 24}\cdot\frac{1}{\sqrt{c-1}^{\,7}}(3-2)^4\right|=\frac{15}{16\cdot 24}\frac{1}{\sqrt{c-1}^{\,7}}<\frac{15}{384}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-1}^{\,7}}=\frac{15}{384}=\frac{5}{128}$$

<u>פתרון נוסף</u>

<u>שלב א:</u> נמצא את הפולינום $Taylor$ של $f(x)=\sqrt{x}$ ממעלה $n=3$ סביב $a=1$. $f(1)=1$.

$$f(x)=\sqrt{x}\;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}\qquad f''(x)=-\frac{1}{4}(x)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f''(1)=-\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(x)^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow f^{(3)}(1)=\frac{3}{8}\qquad f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(x)^{-\frac{7}{2}}$$

מכאן נקבל שנוסחת טיילור של $f(x)=\sqrt{x}$ ממעלה 3 סביב הנקודה $a=1$ היא:

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{3}{48}(x-1)^3+R_3(x)$$

כאשר $R_3(x)$ היא השארית. הואיל ש- $\sqrt{2}=f(2)$, נקבל את הקירוב הדרוש ע"י הצבת $x=2$ בנוסחה שקיבלנו, כלומר:

$$\sqrt{2}\cong 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{3}{48}=\frac{69}{48}=M$$

<u>שלב ב</u>: השארית היא:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4=-\frac{15}{16\cdot 24}(c)^{-\frac{7}{2}}(x-1)^4$$

כאשר $a=1<c<2=x$ וכן $x=2$. לכן $\sqrt{c}^{\,7}>\sqrt{1}^{\,7}$ והערכה לשגיאה היא:

$$\left|\sqrt{2}-\frac{69}{48}\right|=\left|R_3(2)\right|=\left|-\frac{15}{16\cdot 24}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}^{\,7}}(2-1)^4\right|=\frac{15}{16\cdot 24}\frac{1}{\sqrt{c}^{\,7}}<\frac{15}{384}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}^{\,7}}=\frac{15}{384}=\frac{5}{128}$$

<u>שאלה 3.א</u> (10 נקודות)

1. האם הפונקציה $f(x)=-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ חד-חד-ערכית בתחום $D=(0,\infty)$? נמקו !

2. יהי $c\in\mathbf{R}$. מצאו את כל הערכים של c כך שהמשוואה $c\sqrt{x}=-\ln x$ בעלת פתרון יחיד.

<u>פתרון</u>

המשוואה הנתונה שקולה ל- $c=-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, ז״א נמצא כמה פתרונות יש למשוואה

$f(x)=c$, כאשר $f(x)=-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ תחום הגדרה : $x>0$. נחשב את הנגזרת בקטע $(0,\infty)$:

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\ln x-2}{2x\sqrt{x}}.$$

לכן $f'(x)>0$ לכל $x>e^2$ ו- $f'(x)<0$ לכל $0<x<e^2$. יש נקודה קריטית יחידה $x=e^2$.

<u>מסקנה</u> : הפונקציה עולה ממש בקטע $\left(e^2,+\infty\right)$ ויורדת ממש בקטע $\left(0,e^2\right)$.בנוסף, מרציפות הפונקציה

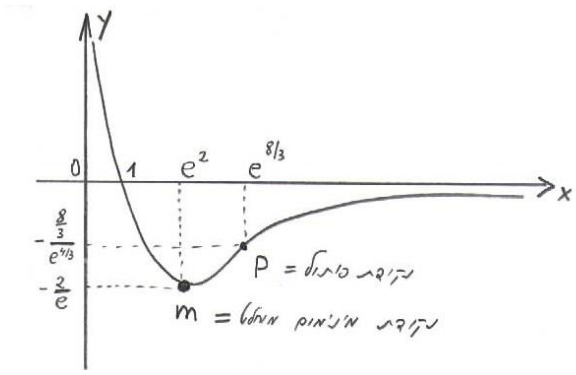
נקבל שהנקודה $\mathrm{m}=\left(e^2,\,f(e^2)\right)=\left(e^2,-\frac{2}{e}\right)$ היא נקודת מינימום מוחלט יחידה.

לא קיימות נקודות קיצון מקומיות אחרות. הקו $x=0$ <u>אסימפטוטה אנכית</u> יחידה כי הפונקציה רציפה בכל

תחום ההגדרה והגבול $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=-\lim\limits_{x\to0+}\ln x\cdot\lim\limits_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=-(-\infty)\cdot\infty=\infty$. הקו $y=0$ היא <u>אסימפטוטה</u>

<u>אופקית</u> כי $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=[l'H\hat{o}pital]=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$.

<u>הערה</u> : אפשר לבדוק שהנקודה $P=\left(e^{8/3},\,f(e^{8/3})\right)$ היא נקודת פיתול יחידה.



לפי הגרף שקיבלנו :

1. הקו האופקי $y=-0.01$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות ולכן f לא חד-חד-ערכית בתחום D .

2. הקו האופקי $y=c$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד אם ורק אם $c\geq0$ או $c=-2/e$.

שאלה 3.ב (10 נקודות)

חשבו את האינטגרל $I=\int\frac{32}{(4-x^2)(4+x^2)}dx$.

פתרון

ברור ש- $16-x^4=(4-x^2)(4+x^2)=(2-x)(2+x)(4+x^2)$.

נבצע את הפרוק לשברים חלקיים פשוטים של הפונקציה הרציונלית $f(x)=\frac{32}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}$:

$$\frac{32}{(2-x)(2+x)(4+x^2)}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{2+x}+\frac{Cx+D}{4+x^2}$$

המונים בשני האגפים שווים :

$$32=A(2+x)(4+x^2)+B(2-x)(4+x^2)+(Cx+D)(2-x)(2+x)$$

נציב :

$$\begin{cases} x=2 \ \Rightarrow\ 32=A\cdot 4\cdot 8 & \Rightarrow A=1 \\ x=-2 \Rightarrow\ 32=B\cdot 4\cdot 8 & \Rightarrow B=1 \\ x=0 \ \Rightarrow\ 32=8A+8B+4D & \Rightarrow D=4 \\ x=1 \ \Rightarrow\ 32=15+5+3(C+4) & \Rightarrow C=0 \end{cases}$$

לכן :

$$I=\int\frac{32}{(4-x^2)(4+x^2)}dx=\int\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}+\frac{4}{4+x^2}\right)dx=$$
$$=-\ln|x-2|+\ln|x+2|+4\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C=\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x)=1+\sin\frac{x}{2}$. נסמן ב-

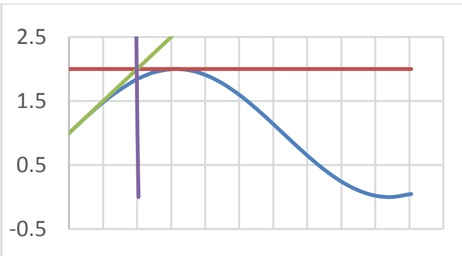
- $L_1: y=m_1x+n_1$ קו המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=0$;
- $L_2: y=m_2x+n_2$ קו המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=\pi$.

א. (10 נק') הוכיחו ששני הקווים L_1 ו- L_2 נמצאים מעל גרף הפונקציה f בקטע $[0,\pi]$

ב. (10 נק') מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

- גרף הפונקציה $y=f(x)$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=0$;
- משיק לגרף הפונקציה f בנקודה $x=\pi$.

פתרון א



ברור ש- $f'(x)=0.5\cos(x/2)$ ו- $f''(x)=-0.25\sin(x/2)$. לכן הנגזרת השנייה רציפה ושלילית $f''(x)\le 0$ בקטע $0\le x\le\pi$. זה גורר ששני המשיקים L_1 ו- L_2 נמצאים מעל גרף הפונקציה f בקטע $[0,\pi]$: $f(x)=1+\sin\frac{x}{2}\le y=m_2x+n_2$, $f(x)=1+\sin\frac{x}{2}\le m_1x+n_1$, לכל $0\le x\le\pi$.

פתרון ב משוואת משיק בנקודה $x=0$:

$$f(0)=1,\quad f'(0)=0.5,\quad y=f(0)+f'(0)x\quad\Rightarrow\quad L_1: y=0.5x+1$$

משוואת המשיק בנקודה $x=\pi$ היא : $L_2:\ y=2$.

לפי סעיף הקודם: $f(x)\le 0.5x+1$ ו- $f(x)\le 2$, לכל $0\le x\le\pi$.

משיקים נחתכים בנקודה $(x,y)=(2,2)$. לכן

$$S=\int_0^2((0.5x+1)-f(x))dx+\int_2^\pi(2-f(x))dx=\int_0^2\left((0.5x+1)-\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)\right)dx+\int_2^\pi\left(2-\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)\right)dx$$

$$S=\int_0^2\left(0.5x-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_2^\pi\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\left(0.25x^2+2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2+\left(x+2\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_2^\pi$$

$$=(1+2\cos(1))-2+\left(\pi+2\cos\frac{\pi}{2}\right)-(2+2\cos(1))=-1+2\cos(1)+\pi-2-2\cos(1)=\pi-3.$$

שאלה 5.א (10 נקודות)

הוכיחו ש- $0.75 \le 2\ln x - \ln^2 x \le 1$, לכל $x \in \left[\sqrt{e}, e\sqrt{e}\right]$.

פתרון

צריכים להראות ש- $0.75 \le 2\ln x - \ln^2 x \le 1$ בקטע $x \in \left[\sqrt{e}, e\sqrt{e}\right]$.

לפי משפט Weierstrass הפונקציה הרציפה $f(x) = 2\ln x - \ln^2 x$ בעלת נקודות קיצון מוחלטות בקטע $D = \left[\sqrt{e}, e\sqrt{e}\right]$. אם $\sqrt{e} \le x^* \le e\sqrt{e}$ היא אחת מנקות הקיצון המוחלטות של f אז x^* מקיימת אחד מהתנאים הבאים:

1. $x^* = e\sqrt{e}$ או $x^* = \sqrt{e}$.
2. הפונקציה f לא גזירה בנקודה x^* .
3. הפונקציה f גזירה בנקודה פנימית $\sqrt{e} < x^* < e\sqrt{e}$ והנגזרת מתאפסת בנקודה הזאת (לפי משפט Fermat).

חישוב הנגזרת: $y' = f'(x) = 2\frac{1}{x} - 2(\ln x)\frac{1}{x} = 2\frac{1-\ln x}{x}$, לכל $x > 0$.

לא קיימות נקודות אי גזירות בתחום D.

הנגזרת מתאפסת רק כאשר $\ln x = 1$ ז"א רק עבור הנקודה $x = e$.

קיבלנו 3 נקודות חשודות לקיצון: $x^* \in \left\{e, \sqrt{e}, e\sqrt{e}\right\}$. נשאר רק להשוות <u>את הערכים</u> של הפונקציה $y = f(x) = 2\ln x - \ln^2 x$ בנקודות החשודות:

$$f(e) = 1, \quad f(\sqrt{e}) = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = 0.75, \quad f(e\sqrt{e}) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = 0.75$$

לכן ערכי הקיצון המוחלט של f שווים ל- $y_{\max} = f(e) = 1, \quad y_{\min} = f(\sqrt{e}) = f(e\sqrt{e}) = 0.75$.

<u>מסקנה</u>: $0.75 \le y_{\min} = f(x) = 2\ln x - \ln^2 x \le y_{\max} = 1$, מ.ש.ל.

<u>שאלה 5.ב</u> (10 נקודות)

נתונה פונקציה $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך שהנגזרת השניה $f'':\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ מוגדרת ורציפה ב- $\mathbf{R}$.
הוכיחו שאם קיימות שתי נקודות $a<b$ כך ש- $f'(a)>1$ ו- $f'(b)<-1$, אזי קיימת נקודה c בקטע (a,b) כך ש- $f''(c)<0$. <u>רמז</u>: אפשר להשתמש במשפט Lagrange.

<u>פתרון</u>

בקטע $[a,b]$ הפונקציה f' היא גזירה ורציפה.
לכן יכולים להפעיל את משפט Lagrange בקטע $[a,b]$:
קיימת $a<c<b$ כך ש- $f''(c)=\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$.
המונה שלילי כי: $f'(b)-f'(a)<(-1)-(-1)=-2<0$,
המכנה חיובי: $b-a>0$.
מסיקים שהשבר $\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$ שלישי, ז"א $f''(c)<0$, מ.ש.ל.

<u>שאלה 6.א</u> (10 נקודות)

באיזה נקודה המשיק לגרף הפונקציה $G(x)=\int_0^{x^2-8x+20} e^{t^2}dt$ מקביל לקו $L: y=0$?
האם הנקודה $a=4$ היא נקודת קיצון מוחלט של G בתחום $D_f=\mathbf{R}$?

<u>פתרון</u>

הפונקציה $f(t)=e^{t^2}$ רציפה ב- $\mathbf{R}$ ולכן היא בעלת פונקציה קדומה ב- $\mathbf{R}$.

תהי $F(t)=\int e^{t^2}dt$ פונקציה קדומה של $f(t)=e^{t^2}$, ז"א: $\frac{dF}{dt}=F'(t)=e^{t^2}=\exp\left(t^2\right)$.

לפי משפט Newton-Leibniz מקבלים ש- $y=G(x)=\int_0^{x^2-8x+20} e^{t^2}dt=F(x^2-8x+20)-F(0)$.

גוזרים את G לפי כלל השרשרת:

$$G'(x)=F'(x^2-8x+20)\cdot(2x-8)=(2x-8)\ \exp\left((x^2-8x+20)^2\right)$$

על מנת שהמשיק לפונקציה G יהי מקביל לקו הנתון $L: y=0$ נדרוש שהשיפוע יתאפס, ז"א
$G'(x)=(2x-8)\ \exp\left((x^2-8x+20)^2\right)=0$. למשוואה הקודמת יש פתרון יחיד והוא שווה ל- $a=4$.

משפט Fermat גורר שזאת הנקודה היחידה שחשודה לקיצון בתחום $\mathbf{R}$.

מתקיים:

א. $x\le 4 \Leftarrow G'(x)\le 0$ ולכן הפונקציה G יורדת בקטע $(-\infty,4]$.

ב. $x\ge 4 \Leftarrow G'(x)\ge 0$ ולכן הפונקציה G עולה בקטע $[4,\infty)$.

מסיקים שהנקודה $a=4$ נקודה מינימום מוחלט של הפונקציה G בתחום $\mathbf{R}$.

<u>שאלה 6.ב</u> (10 נקודות)
האם הטענה הבא נכונה :

" אם $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה חסומה, $|g(x)|\le 1$, לכל $x\in\mathbf{R}$ ו- $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה בעלת גבול סופי $L=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, אז גם פונקציית המכפלה $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ בעלת גבול סופי בנקודה $a=0$ ".

אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת. אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

<u>פתרון</u>

נוכיח שהטענה לא בהכרח נכונה, בעזרת דוגמה נגדית :

$$f(x)=1,\quad g(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}.$$

ברור ששתי ההנחות של הטענה מתקיימות :

(א) g פונקציה חסומה : $|g(x)|\le 1$, לכל $x\in\mathbf{R}$.

(ב) $L=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

מתקיים :

$h(x)=f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}1\cdot 1,\ x\ge 0\\ 1\cdot 0,\ x<0\end{cases}=\begin{cases}1, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$, ולכן הגבולות החד-צדדים לא שווים :

$$\lim_{x\to 0+} h(x)=1\ne 0=\lim_{x\to 0-} h(0).$$

מסיקים שהגבול של הפונקציה h לא קיים בנקודה $a=0$.

בהצלחה!