פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"ב סמסטר ב שאלון Y

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות בכדי לקבל ניקוד מלא. אלא אם כתוב אחרת, יש לנמק את תשובתכם באופן מלא וברור. יש לציין באופן מפורש וברור באילו משפטים, טענות או נוסחאות ידועות אתם משתמשים. תשובות חלקיות, גם אם נכונות, לא ייזכו אותכם בניקוד מלא.

1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** כיתבו את הפתרון הכללי של המערכת הבאה. אם אין פתרון, הסבירו.

$$\begin{aligned} 2x - 6z + 9w &= 7 \\ 2x + 2y - 5z + 2w &= 4 \\ 2y + 3z - 4w &= 1 \end{aligned}$$

פתרון: נכתוב את המטריצה המורחבת ונדרג בכדי למצוא את הפתרון אם יש :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \longrightarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 - R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \longrightarrow R_1 + 3R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 18 & 19 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \longrightarrow R_2 - \frac{1}{2}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 18 & 19 \\ 0 & 2 & 0 & -8.5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

ולכן,

$$\begin{aligned} x &= 9.5 - 9w \\ y &= -2.5 + 4.25w \\ z &= 2 - 1.5w \end{aligned}$$

וקבוצת הפתרונות היא

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} 9.5 - 9t \\ -2.5 + 4.25t \\ 2 - 1.5t \\ t \end{pmatrix} \right| t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. **(10 נק)** תהא A מטריצה כלשהי.

(א) נניח כי x_h הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ ו x_1 הוא פתרון של המערכת $Ax = b$. הראו כי $x_1 + x_h$ הוא פתרון של המערכת $Ax = b$.
פתרון: בכדי להראות כי $x_1 + x_h$ הוא פתרון של המערכת $Ax = b$ יש להראות כי $A(x_1 + x_h) = b$. אכן,

$$A(x_1 + x_h) = Ax_1 + Ax_h = b + 0 = b$$

(ב) נניח כי x_1 וx_2 הם שני פתרונות של המערכת $Ax = b$. הראו כי $x_1 - x_2$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$.
פתרון: בכדי להראות כי $x_1 - x_2$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש להראות כי $A(x_1 - x_2) = 0$. אכן,

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 + Ax_2 = b - b = 0$$

2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** יהא V מרחב וקטורי ממימד n ו W מרחב וקטורי ממימד m. יהא

$$B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$$

בסיס ל V ותהא $T : V \longrightarrow W$ העתקה לינארית.

(א) הוכיחו במפורש כי $\ker T$ הוא תת-מרחב של V.
פתרון: נבדוק את שלושת התנאים לתת מרחב:

i. $\ker T \neq \emptyset$: מכיון ש T היא העתקה לינארית מתקיים תמיד כי $T(0) = 0$ ולכן $0 \in \ker T$.

ii. **סגירות לחיבור:** יהיו $v, u \in \ker T$ צריך להוכיח כי $v + u \in \ker T$. מכיוון ש $v, u \in \ker T$ מתקיים כי

$$T(v) = 0 = T(u)$$

לכן,

$$T(v + u) = T(v) + T(u) = 0 + 0 = 0$$

ולכן $v + u \in \ker T$.

iii. **סגירות לכפל בסקלר:** יהא $v \in \ker T$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$, צ.ל $\alpha v \in \ker T$. מתקיים כי

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \cdot 0 = 0$$

ולכן $\alpha v \in \ker T$.

ולכן, הגרעין מקיים את שלוש הדרישות לתת-מרחב ולכן הוא תת מרחב של V.

(ב) הוכיחו כי אם $\ker T = \{0\}$ אז הקבוצה $\{T(b_1), T(b_2), ..., T(b_n)\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית ב W.

פתרון: בכדי להראות כי הקבוצה $\{T(b_1), T(b_2), ..., T(b_n)\}$ היא בת"ל נתבונן במשוואה

$$\alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \cdots + \alpha_n T(b_n) = 0$$

ונראה כי הפתרון היחיד הוא $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. אכן,

$$0 = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \cdots + \alpha_n T(b_n) = T(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n)$$

ולכן $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n \in \ker T$. מכיוון שנתון כי $\ker T = \{0\}$, מתקיים כי

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n = 0$$

מכיוון ש B הוא בסיס, בפרט קבוצה בלתי תלויה לינארית נובע כי

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

כנדרש. ולכן הקבוצה $\{T(b_1), T(b_2), ..., T(b_n)\}$ היא בלתי תלויה לינארית ב W.

2. **(10 נק)** נתבונן במרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ ובקבוצת הפתרונות של המערכת הלינארית

$$2x - 2y + 4z = 0$$

מיצאו בסיס ומימד לקבוצה הנ"ל.

פתרון: יהא $u \in U$. אז

$$2u_1 - 2u_2 + 4u_3 = 0 \iff u_1 = u_2 - 2u_3$$

ולכן איבר כללי ב U הוא מהצורה

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 - 2u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל U ו $\dim U = 2$.

3 (20 נקודות)

יהא $V=\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2 במשתנה x ועם מקדמים ממשיים.
נתבונן בהעתקה הבאה:

$$T:V\longrightarrow V$$

$$T(p(x))=p'(x)-xp''(x)$$

כאשר $p'(x)$ הוא הנגזרת הראשונה של $p(x)$ ו $p''(x)$ הנגזרת השנייה.

1. מצאו מימד לגרעין ומימד לתמונה.
פתרון: מתקיים תמיד כי מימד התמונה שווה לדרגת המטריצה המייצגת ומימד הגרעין שווה ל גודל המטריצה פחות הדרגה. לכן, נמצא את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי $E=\{x^2,x,1\}$:

$$\begin{aligned} T(x^2)&=2x-2x=0\\ T(x)&=1-0=1\\ T(1)&=0 \end{aligned}$$

ולכן

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\dim\ker T=2,\ \dim ImT=1$$

2. יהא $B=\{1+x+x^2,1+x^2,1+x\}$ בסיס ל V ויהא $E=\{x^2,x,1\}$ הבסיס הסטנדרטי. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_E^B$.
פתרון: מתקיים כי

$$[T]_E^B=\begin{pmatrix}| & | & |\\ [T(b_1)]_E & [T(b_2)]_E & [T(b_3)]_E\\ | & | & |\end{pmatrix}$$

כעת,

$$T(1+x+x^2) = T(1)+T(x)+T(x^2) = 1$$
$$T(1+x^2) = T(1)+T(x^2) = 0$$
$$T(1+x) = T(1)+T(x) = 1$$

ולכן

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **יהא** $q(x) = 2x^2+3x+4$. **חשבו את וקטורי הקורדינטות של** $q(x)$ **ושל** $T(q(x))$ **לפי הבסיס** B.

פתרון: נחשב באופן ישיר (אם כי אפשר כמובן למצוא את מטריצת המעבר בין הבסיסים ולחשב דרכה) :

$$2x^2+3x+4 = \alpha(1+x+x^2)+\beta(1+x^2)+\gamma(1+x)$$
$$2x^2+3x+4 = (\alpha+\beta)x^2+(\alpha+\gamma)x+(\alpha+\beta+\gamma)$$

מכאן מקבלים את מערכת המשוואות

$$2 = \alpha+\beta$$
$$3 = \alpha+\gamma$$
$$4 = \alpha+\beta+\gamma$$

ומכאן נקבל כי

$$\alpha = 1 = \beta,\ \gamma = 2$$

ולכן

$$[q(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

מתקיים כי

$$T(q(x)) = T(2x^2+3x+4) = 2T(x^2)+3T(x)+4T(1) = 3$$

כמקודם, נרשום

$$3 = \alpha(1+x+x^2) + \beta(1+x^2) + \gamma(1+x)$$
$$3 = (\alpha+\beta)x^2 + (\alpha+\gamma)x + (\alpha+\beta+\gamma)$$

ונקבל כי

$$[T(q(x))]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(15 נק)** מיצאו את כל הערכים הממשיים של הפרמטר α עבורו המטריצה הבאה לכסינה. הסבירו היטב! את כל השלבים של הפתרון שלכם.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1+\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון:
שלב א: מציאת ערכים עצמיים בכדי למצוא את הערכים העצמיים של A נחשב את הפולינום האופייני ונמצא את השורשים שלו

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha^2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 1+\alpha^2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)\det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha^2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-\alpha^2) = (1-\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda+\alpha)$$

ולכן הערכים העצמיים של המטריצה הם

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \alpha,\ \lambda_3 = -\alpha$$

שלב ב:בדיקת לכסינות ראשית, אם שלושת הערכים העצמיים שונים אז המטריצה A לכסינה. הערכים העצמיים של A שונים כאשר $\alpha \neq 0, \pm 1$. נבדוק בנפרד את כל אחד מהמקרים בהם הערכים העצמיים **אינם** שונים.

(א) $\alpha = 0$: במקרה זה, הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0 = \lambda_3$.

i. מכיוון שהריבוי האלגברי של $\lambda_1 = 1$ הוא 1, אז זהו גם הריבוי הגיאומטרי של λ_1 כי $1 \leq m_g(1) \leq m_a(1) = 1$ ולכן ערך עצמי זה "מתנהג יפה".

ii. מתקיים כי $m_a(0) = 2$ נבדוק את הריבוי הגיאומטרי ע" חישוב המימד של המרחב העצמי. נזכור כי אנחנו במצב בו $\alpha = 0$

$$\dim E_0 = \dim\ker(A - 0 \cdot I) = \dim\ker(A)$$
$$= \dim\ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3 - rkA = 3 - 2 = 1$$

כלומר במצב זה מתקיים

$$m_g(0) = 1,\ m_a(0) = 2$$

ולכן המטריצה **אינה לכסינה עבור 0** $\alpha =$**.**

(ב) $\alpha = \pm 1$: במקרה זה, הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$ או $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$.

i. בכל אחת משתי האפשרויות מתקיים כי הערך העצמי -1 הוא מריבוי אלגברי 1, ולכן זהו גם הריבוי הגיאומטרי של -1 וערך עצמי זה "מתנהג יפה".

ii. מתקיים כי $m_a(1) = 2$ נבדוק את הריבוי הגיאומטרי ע"י חישוב המימד של המרחב העצמי. נזכור כי אנחנו במצב בו $\alpha = \pm 1$

$$\dim E_1 = \dim\ker(A - 1 \cdot I) = \dim\ker(A - I)$$
$$= \dim\ker\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3 - rkA = 3 - 1 = 2$$

כלומר במצב זה מתקיים

$$m_g(1) = 2 = m_a(1)$$

ולכן המטריצה **לכסינה עבור 1** $\alpha = \pm$**.**

שלב ג: מסקנה ראינו כי המטריצה A **אינה לכסינה** עבור $\alpha = 0$ **ולכסינה** עבור $\alpha \neq 0$.

2. **(5 נק)** תנו דוגמא למטריצה שהיא לכסינה ולא הפיכה

פתרון: מטריצה לכסינה שאינה הפיכה: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(15 נק)** תהא $M_{n\times n}$ מטריצה שיש לה אחדים על ה"אלכסון ההפוך" ואפסים אחרת. לדוגמא, $M_{3\times 3}$ היא המטריצה

$$M=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה M עבור n אי-זוגי כלשהו.

פתרון: ננסה להעביר את המטריצה M למטריצת היחידה ע" ביצוע פעולות אלמנטריות על שורות. בדוגמא כאן, כאשר $M_{3\times 3}$ יש להחליף את השורה הראשונה בשורה האחרונה. כאשר המטריצה היא למשל מסדר 5×5 נחליף את השורה הראשונה בשורה החמישית ואת השורה השניה בשורה הרביעית. באופן כללי עבור המטריצה $M_{n\times n}$ נבצע את הפעולות הבאות:

$$R_1\leftrightarrow R_n,\ R_2\leftrightarrow R_{n-1},...R_{\frac{n-1}{2}}\leftrightarrow R_{\frac{n-1}{2}+2}$$

כלומר, חוץ מהשורה האמצעית נחליף בין השורות ה"תואמות". בסה"כ נבצע $\frac{n-1}{2}$ החלפות שורה בכדי לקבל את מטריצת היחידה. ולכן,

$$\det M=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

2. **(5 נק)** תהא $A_{n\times n}$מטריצה ותהא $L_{n\times n}$ מטריצה המתקבלת מ A ע"י ביצוע הפעולות האלמנטריות הבאות:

$$A\overset{R_1\longrightarrow 4R_1}{\longrightarrow}B\overset{R_1\longleftrightarrow R_3}{\longrightarrow}C\overset{R_4\longrightarrow 4R_4}{\longrightarrow}D\overset{R_3\longrightarrow 2R_3}{\longrightarrow}L$$

נתון כי $\det C=2$. מיצאו את $\det A,\det L$.

פתרון: מתקיים כי:

$$\begin{aligned}\det B&=4\det A\\ \det C&=-\det B\\ \det D&=4\det C\\ \det L&=2\det D\end{aligned}$$

ולכן

$$\det A=-\frac{1}{2},\ \det L=16$$

6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(5 נק)** יהא V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$. ותהא $<,>$ מכפלה פנימית המוגדרת על V. הוכיחו ישירות את שיוון המקבילית: יהיו $x,y \in V$ אז

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)$$

פתרון: נחשב את הביטוי באגף שמאל ונגיע לאגף ימין:

$$\begin{aligned}
|x+y||^2 + ||x-y||^2 &= < x+y, x+y > + < x-y, x-y > \\
&= < x, x+y > + < y, x+y > + < x, x-y > - < y, x-y > \\
&= < x, x > +2 < x, y > + < y, y > + < x, x > -2 < x, y > + < y, y > \\
&= 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)
\end{aligned}$$

2. **(15 נק)** יהא $V = \mathbb{R}^3$ יחד עם המכפלה הפנימית הבאה:

$$< x, y >= x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

(א) מיצאו את הנורמה של $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון: נחשב את הנורמה של v

$$||v||^2 =< v, v >=< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

ולכן $||v|| = \sqrt{5}$

(ב) מיצאו וקטורים $u, w \in V$ המאונכים ל v ומאונכים אחד לשני.

פתרון: נבחר $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ אז תמיד מתקיים כי $u \perp v,\ u \perp w$. כעת, נמצא וקטור w המאונך ל v. נחשב,

$$0 =< v, w >=< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} w_1 + w_3 \\ w_2 \\ w_1 + w_3 \end{pmatrix} = (w_1 + w_3) + w_2 + (w_1 + w_3)$$

$$= 2w_1 + w_2 + 2w_3$$

כלומר, בכדי ש w יהיה מאונך ל v צריך שייתקיים כי

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ -2w_1 - 2w_3 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

נבחר למשל $w_1 = 0, w_3 = 1$ ואז

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$