שאלה 1

1. **(15 נק')** נתונה מערכת משוואות $\begin{cases} x+2y+3z=a \\ 4x+5y+6z=b \\ 7x+8y+9z=c \end{cases}$. מצאו תנאים על הפרמטרים $a,b,c\in\mathbb{R}$ שעבורם למערכת יהיה

(א) פתרון יחיד

(ב) אפס פתרונות

(ג) אינסוף פתרונות

ומצאו את אוסף הפתרונות של המערכת בכל אחד מהמקרים.

<u>פתרון</u> : נבנה את מטריצת המערכת ונדרג אותה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+c \end{array}\right).$$

הגענו לצורה מדורגת. בשתי העמודות הראשונות ישנם איברים מובילים, ואילו בעמודה השלישית אין איבר מוביל. ולכן, בכל מקרה לא נקבל פתרון יחיד. במידה ויש פתרון כלשהו, אז ישנם אינסוף פתרונות, כי ישנו משתנה חופשי.

נשים לב שכאשר $a-2b+c\neq 0$ אז מתקבלת שורת סתירה בשורה השלישית, ולכן במקרה הזה אין אף פתרון.

אחרת, אם $a-2b+c=0$ אז אין שורות סתירה במטריצה, ולכן ישנם אינסוף פתרונות למערכת.

במקרה הזה נוכל להמשיך את הדירוג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 9 & 3a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 2b-5a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הגענו למערכת השקולה $\begin{cases} 3x-3z=2b-5a \\ -3y-6z=b-4a \\ 0=0 \end{cases}$

ונסיק את הפתרון הכללי $\left\{\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2b-5a \\ 4a-b \\ 0 \end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} z+\frac{2b-5a}{3} \\ -2z+\frac{4a-b}{3} \\ z \end{pmatrix}\right\}.$

2. **(5 נק')** נתונים זוג פתרונות $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ למערכת $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ כאשר $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})=\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 4 \end{pmatrix}$ ו־ $\vec{b}\in\mathbb{R}^2=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה A ואת הוקטור $\vec{b}$.

<u>פתרון</u> : אלו הם זוג פתרונות למערכת, ולכן ההפרש בינהם יהיה פתרון למערכת ההומוגנית המתאימה. כלומר $\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-b \\ c-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נסיק כי $b=0$ וכי $c=4$.

נציב גם את הפתרונות למערכת המקורית $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

לסיכום, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ו־ $\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

שאלה 2

1. **(15 נק')** נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. נסמן ב־ U את מרחב השורות של המטריצה, ב־ V את מרחב העמודות שלה וב־ W את מרחב הפתרונות שלה.

(א) מצאו בסיס וממד לסכום $U+V$.

<u>פתרון</u> : סכום תתי־המרחבים נפרש על־ידי איחוד הקבוצות הפורשות את שניהם, לכן

$$U+V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

בכדי למצוא בסיס לתת המרחב נבנה מטריצה ששמונת הוקטורים רשומים בשורותיה, ונבחר בשורות שלא מתאפסות בתום הדירוג.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&4&1&0\\2&3&0&1\\3&2&1&0\\4&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&4&1&0\\2&3&0&1\\3&2&1&0\\4&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&2\\0&0&-2&-2\\0&0&0&-4\\0&0&-2&-2\\0&0&-2&-2\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת, עם ארבעה איברים מובילים, לכן מימד הסכום הוא ארבע, ומכיוון שזהו תת־מרחב של מ"ו ממימד 4 נוכל להסיק כי הסכום הינו $\mathbb{R}^4$, מימדו ארבע, והבסיס הינו הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$.

(ב) מצאו בסיס וממד לחיתוך $V\cap W$.

<u>פתרון</u> : וקטור נמצא ב־ V אם הוא צ"ל של עמודות המטריצה, כלומר

$$\vec{u}=a\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b+3c+4d\\4a+3b+2c+d\\a+c\\b+d\end{pmatrix}$$

וקטור נמצא ב־ W אם מכפלת המטריצה בו מתאפסת, כלומר $A\cdot\vec{u}=\vec{0}$.

לכן בשביל למצוא וקטורים בחיתוך נכפול את המטריצה בתבנית וקטור כללי מ־ V ונקבל

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a+2b+3c+4d\\4a+3b+2c+d\\a+c\\b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12a+12b+10c+10d\\18a+18b+20c+20d\\2a+2b+4c+4d\\4a+4b+2c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נסיק את המערכת ההומוגנית $\begin{cases}12a+12b+10c+10d=0\\18a+18b+20c+20d=0\\2a+2b+4c+4d=0\\4a+4b+2c+2d=0\end{cases}.$

נבנה את מטריצת המערכת ונדרגה $\begin{pmatrix}12&12&10&10\\18&18&20&20\\2&2&4&4\\4&4&2&2\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

ונסיק כי $a=-b$ וכי $c=-d$.

לכן $V\cap W=\left\{\begin{pmatrix}b+d\\-b-d\\-b-d\\b+d\end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ומימד החיתוך הוא 1.

2. **(5 נק')** הוכיחו שאם $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ מטריצה הפיכה ו־ $B\in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ מטריצה מדרגה 2 אז הדרגה של $A\cdot B$ היא 2.

<u>פתרון</u> : הדרגה של מטריצה שווה למימד מרחב העמודות שלה. לכן אם דרגת B היא 2 אז בהכרח עמודות המטריצה B בת"ל. נותר להראות שגם עמודות $A\cdot B$ הן בת"ל, ואז נסיק כי גם דרגת המכפלה היא 2 כמימד מרחב העמודות של המכפלה.

ואומנם, אם $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ הן עמודות המטריצה B, אז עמודות מטריצת המכפלה תהיינה $A\vec{b_1}, A\vec{b_2}$. אם נתבונן בצ"ל שלהן שמתאפס $\vec{0} = \beta \cdot \left(A\vec{b_2}\right) + \alpha \cdot \left(A\vec{b_1}\right)$, אז לפי חוק הפילוג בהכרח $A \cdot \left(\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2}\right) = \vec{0}$. ומכיוון ש־ A הפיכה קיים למערכת ההומוגנית המתאימה לה רק הפתרון הטריוויאלי, ולכן $\alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2} = \vec{0}$. אבל עמודות B בת"ל ולכן בהכרח $\alpha = \beta = 0$. ומכאן שעמודות מטריצת המכפלה אכן בת"ל, ודרגתה היא 2 כמספר עמודותיה.

שאלה 3

1. **(12 נק')** נתונה העתקה לינארית $T : U \to V$ עם מטריצת הייצוג $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ כאשר B בסיס של המרחב הוקטורי U ו־ C בסיס של המרחב הוקטורי V .

(א) מצאו את $dimU$ ואת $dimV$.

פתרון : מימד התחום שווה למספר העמודות שבמטריצת הייצוג ולכן $dimU = 4$.

מימד הטווח שווה למספר השורות שבמטריצת הייצוג ולכן $dimV = 3$.

(ב) מצאו את $dim\left(KerT\right)$ ואת $dim\left(ImT\right)$.

פתרון : מימד התמונה שווה לדרגת מטריצת הייצוג, ואילו מימד הגרעין שווה למימד מרחב הפתרונות של המטריצה. לכן נדרג את המטריצה כדי לקבוע מהם מימדים אלו.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. לכן $dimKerT = dimImT = 2$.

(ג) תנו דוגמא למרחבים וקטוריים U, V לבסיסים B, C ולהעתקה לינארית T אשר מקיימים את הנתונים בשאלה.

פתרון : נקח $U = \mathbb{R}^4$ ו־ $V = \mathbb{R}^3$. כאשר B, C הם הבסיסים הסטנדרטיים, ואילו T מוגדרת באופן הבא

$$T\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}.$$

2. **(8 נק')** הוכיחו שהעתקה לינארית $T : V \to V$ היא חד־חד ערכית אם"ם היא על.

פתרון : אנו יודעים ש־ $dimKerT + dimImT = dimV$.

- אם ההעתקה חח"ע אז $dimKerT = dim\left\{\vec{0}\right\} = 0$ ובהכרח $dimImT = dimV$ ומכאן נובע שבהכרח התמונה היא V כולו וההעתקה על.
- אם ההעתקה על אז $dimImT = dimV$ ואז בהכרח $dimKerT = 0$ לכן $KerT = \left\{\vec{0}\right\}$ וההעתקה חח"ע.

שאלה 4

1. **(10 נק')** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{pmatrix}.$$

פתרון : נבצע פעולות שורה ועמודה אלמנטריות בכדי לחשב את הדטרמיננטה

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25\\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125\\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{pmatrix} &= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 8 & 15 & 24\\ 0 & 7 & 26 & 63 & 124\\ 0 & 15 & 80 & 255 & 624 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12\\ 0 & 0 & 12 & 42 & 96\\ 0 & 0 & 50 & 210 & 564 \end{pmatrix}\\
&= det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24\\ 0 & 0 & 0 & 60 & 264 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}\\
&= 1\cdot 1\cdot 2\cdot 6\cdot 24 = 288
\end{aligned}
$$

2. **(10 נק')** הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית את הטענות הבאות :

(א) אם A, B זוג מטריצות מגודל 2×2 אשר מקיימות $AB = BA$ ואם A הפיכה אז $A^{-1}B = BA^{-1}$.

<u>פתרון</u> : הטענה נכונה. נכפול את הזהות $AB = BA$ במטריצה A^{-1} משני הצדדים ונקבל $A^{-1}\cdot(AB)\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot(BA)\cdot A^{-1}$ כלומר $BA^{-1} = A^{-1}B$.

(ב) אם A, B זוג מטריצות דומות מגודל 2×2 אז A סימטרית אם"ם B סימטרית.

<u>תזכורת</u> : A, B דומות אם קיימת P הפיכה כך ש- $A = PBP^{-1}$.

<u>פתרון</u> : הטענה אינה נכונה. כל מטריצה אלכסונית היא סימטרית, אבל לא כל מטריצה לכסינה היא סימטרית. לדוגמא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ היא לכסינה כי יש לה שני ע"ע שונים ולכן היא דומה למטריצה הסימטרית $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, על אף שאינה סימטרית בעצמה.

שאלה 5

1. **(15 נק')** מצאו לאלו ערכים של הפרמטר $b\in\mathbb{R}$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & b & b\\ b & 1 & b\\ b & b & 1\end{pmatrix}$ לכסינה.

<u>פתרון</u> : נחשב את הפולינום האופייני של המטריצה

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -b & -b\\ -b & \lambda-1 & -b\\ -b & -b & \lambda-1 \end{pmatrix} &= det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -b & 0\\ -b & \lambda-1 & 1-b-\lambda\\ -b & -b & \lambda-1+b \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -b & 0\\ -2b & \lambda-1-b & 0\\ -b & -b & \lambda-1+b \end{pmatrix}\\
&= (\lambda-1+b)\cdot det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -b\\ -2b & \lambda-1-b \end{pmatrix}\\
&= (\lambda-1+b)\cdot\left[(\lambda-1)(\lambda-1-b)-2b^2\right] = (\lambda-1+b)(\lambda-1-2b)(\lambda-1+b)
\end{aligned}
$$

הע"ע של המטריצה הינם $\lambda_1 = 1-b$ מריבוי אלגברי 2 ו- $\lambda_2 = 1+2b$ מריבוי אלגברי 1.

נמצא את המ"ע שמתאים לע"ע $\lambda_1 = 1-b$

$V_{1-b} = Ker\begin{pmatrix} -b & -b & -b\\ -b & -b & -b\\ -b & -b & -b\end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} -b & -b & -b\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. כלומר הריבוי הגיאומטרי של הע"ע הינו 2 כאשר $b\neq 0$ ו- 3 אם $b = 0$.

נשים לב שכאשר $b=0$ שני הע"ע זהים, וריבויים האלגברי והגיאומטרי הינו 3, לכן המטריצה ודאי לכסינה.
ואילו כאשר $b\neq 0$ אז הע"ע שונים זה מזה, ולכן אחד מהם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהים, ושוב המטריצה לכסינה.
כך שלמעשה המטריצה לכסינה לכל ערך של הפרמטר b.

2. **(5 נק')** הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית את הטענה הבאה : אם $A,B\in M_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$ מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.

<u>תזכורת</u> : A,B דומות אם קיימת P הפיכה כך ש־ $A=PBP^{-1}$.

שאלה 6

1. **(5 נק')** יהי $B=\left\{\vec{b_1},\vec{b_2},...,\vec{b_n}\right\}$ בסיס אורתונורמלי של תת מרחב U של מרחב מכפלה פנימית V מעל הממשיים.
עבור וקטור $\vec{v}\in V$ נסמן $\vec{v}_U=\sum_{k=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_k}\right\rangle\cdot\vec{b_k}$ הוכיחו שהוקטורים $\vec{v}_U$ ו־ $\vec{v}-\vec{v}_U$ אורתוגונליים זה לזה.

<u>פתרון</u> : נחשב

$$\begin{aligned}
\langle\vec{v}-\vec{v}_U,\vec{v}_U\rangle &= \langle\vec{v},\vec{v}_U\rangle-\langle\vec{v}_U,\vec{v}_U\rangle\\
&= \left\langle\vec{v},\sum_{k=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_k}\right\rangle\cdot\vec{b_k}\right\rangle-\left\langle\sum_{j=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_j}\right\rangle\cdot\vec{b_j},\sum_{k=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_k}\right\rangle\cdot\vec{b_k}\right\rangle\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_k}\right\rangle^2-\sum_{j=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_j}\right\rangle\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_k}\right\rangle\cdot\underbrace{\left\langle\vec{b_j},\vec{b_k}\right\rangle}_{\delta_{ij}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_k}\right\rangle^2-\sum_{j=1}^{n}\left\langle\vec{v},\vec{b_j}\right\rangle^2=0
\end{aligned}$$

2. **(15 נק')** מצאו בסיס אורתוגונלי ל־ $Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

<u>פתרון</u> : נעזר בתהליך גרהם־שמידט.

נבחר $\vec{b_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{b_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{8}{10}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{12}{10}\\-\frac{6}{10}\\-\frac{6}{10}\\\frac{12}{10}\end{pmatrix}$, וכדי להקל על המשך החישובים נחליף $\vec{b_2}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$\vec{b_3}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{9}{10}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{3}{10}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{10}\\\frac{5}{10}\\-\frac{5}{10}\\\frac{5}{10}\end{pmatrix}$, ושוב נחליף בוקטור $\vec{b_3}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

לסיכום קיבלנו את הבסיס האורתוגונלי $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.