מבחן באלגברה לינארית תש"ף סמסטר ב שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (8 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות שהמטריצה המורחבת שמתאימה לה היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ב. (12 נקודות) נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 7y & + & (k-1)\,z & = & 3k+5 \\ 2x & + & (3k-1)y & + & (k-2)z & = & 7 \end{array}\right.$$

מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי k עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (אין צורך למצוא את הפתרון באף אחד מהמקרים).

שאלה 2. (20 נקודות) נתונה הקבוצה

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

א. (10 נקודות) הוכיחו כי הקבוצה B היא בסיס של $\mathbb{R}^4$

ב. (10 נקודות) נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) חשבו את המטריצה המייצגת של ההעתקה $[T]^B_{St}$ לפי הבסיסים B של $\mathbb{R}^4$ והבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$

$$St = E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) מצאו מימדים של הגרעין והתמונה של T.

שאלה 3. (20 **נקודות**) נתונה הקבוצה

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-a\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\a\end{pmatrix}\right\}$$

עבור כל ערך של הפרמטר a מצאו את המימד של $\mathrm{Span}(S)$, וקבעו האם

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}\in\mathbf{Span}(S).$$

שאלה 4. (20 **נקודות**) קבעו האם המטריצה הבאה לכסינה. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש־ $D=P^{-1}AP$ (כלומר $A=PDP^{-1}$), אחרת הסבירו מדוע היא לא לכסינה.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&-3&-2\\3&-1&-2\end{pmatrix}$$

שאלה 5. (20 **נקודות**) **אין קשר בין סעיפים א, ב**

א. (10 **נקודות**) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ עבורה מתקיים כי $|A|=\frac{1}{6}$. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$B=\begin{pmatrix}4a_1&4c_1&8b_1\\-3a_2&-3c_2&-6b_2\\a_3&c_3&2b_3\end{pmatrix}$$

וקבעו כמה פתרונות יש למשוואה $Bx=0$

ב. (10 **נקודות**) תהיינה $A,B\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ מטריצות הפיכות עם מקדמים ממשיים. הוכיחו כי לא קיימת מטריצה ממשית C כך שמתקיים השוויון

$$A^3B=-AB^{-1}C^2$$

שאלה 6. (20 **נקודות**) תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.
אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 **נקודות**) הוכיחו כי אם T חח"ע, ו־$\{T(v_1),T(v_2)\}$ ת"ל, אזי $\{v_1,v_2\}$ ת"ל.

ב. (10 **נקודות**) הוכיחו כי אם $\dim V$ אי זוגי, אזי $\mathrm{Ker}T\neq\mathrm{Im}T$.

בהצלחה

מבחן באלגברה לינארית תש"ף סמסטר ב שאלון X - פתרון

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (8 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות שהמטריצה המורחבת שמתאימה לה היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ב. (12 נקודות) נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 7y & + & (k-1)\,z & = & 3k+5 \\ 2x & + & (3k-1)y & + & (k-2)z & = & 7 \end{array}\right.$$

מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי k עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (אין צורך למצוא את הפתרון באף אחד מהמקרים).

פתרון

א. המטריצה הנתונה היא מטריצה מדורגת קנונית, ולכן אין צורך להמשיך לדרג אותה. מערכת המשוואות המתאימה למטריצה היא

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & & & - & w & = & 1 \\ & & & & z & + & 7w & = & 3 \end{array}\right.$$

ולכן הפתרונות של המערכת הם

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} t : s,t \in \mathbb{R}\right\}$$

ב. למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת היא שונה מ-0. נחשב את הדטרמיננטה המתאימה

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & k-1 \\ 2 & 3k-1 & k-2 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & k-4 \\ 2 & 3k-1 & k-4 \end{vmatrix} = (k-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3k-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{R_3 \to R_3 - R_2} (k-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3k-8 & 0 \end{vmatrix} = -(k-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3k-8 \end{vmatrix} = -(k-4)(3k-6) = -3(k-4)(k-2)$$

$|A|=-3(k-2)(k-4)$, **ולכן** $|A|\neq 0$ **אם"ם** $k\neq 2,4$.
עבור $k=2$ **נקבל כי מערכת המשוואות היא**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 7y + z = 11 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$$

נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת ונקבל כי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי הדרגה של המטריצה המצומצמת שווה לדרגת המטריצה המורחבת ושווה ל2, כלומר קטנה ממספר המשתנים, ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות.
עבור $k=4$ **נקבל כי מערכת המשוואות היא**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 7y + 3z = 17 \\ 2x + 11y + 2z = 7 \end{cases}$$

נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת ונקבל כי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 17 \\ 2 & 11 & 2 & 7 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{R_3\to R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 17 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right) \underbrace{\rightarrow}_{R_3\to R_3-7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת אין פתרונות.
נסכם

(i) **עבור** $k\neq 2,4$ **למערכת יש פתרון יחיד.**
(ii) **עבור** $k=2$ **למערכת יש אינסוף פתרונות.**
(iii) **עבור** $k=4$ **למערכת אין פתרונות.**

שאלה 2. (20 נקודות) נתונה הקבוצה

$$B=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

א. (10 **נקודות) הוכיחו כי הקבוצה** B **היא בסיס של** $\mathbb{R}^4$

ב. (10 **נקודות) נתונה העתקה לינארית** $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ **המקיימת**

$$T\begin{pmatrix}2\\0\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}4\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$$

(i) חשבו את המטריצה המייצגת של ההעתקה $[T]_{St}^B$ לפי הבסיסים B של $\mathbb{R}^4$ והבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$

$$St = E = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(ii) מצאו מימדים של הגרעין והתמונה של T.

פתרון

א. קבוצת עמודות היא בסיס של $\mathbb{R}^4$ אם"ם המטריצה שהן עמודותיה היא מטריצה הפיכה. נחשב אם כן את הדטרמיננטה של מטריצה זו

$$\begin{vmatrix}2&0&1&4\\0&2&0&1\\1&0&0&1\\4&-1&1&0\end{vmatrix} \overbrace{=}^{\substack{R_1\to R_1-2R_3\\R_4\to R_4-4R_1}} \begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&2&0&1\\1&0&0&1\\0&-1&1&-4\end{vmatrix} =$$

$$(-1)\begin{vmatrix}0&1&2\\2&0&1\\-1&1&-4\end{vmatrix} \overbrace{=}^{R_3\to R_3-R_1} (-1)\begin{vmatrix}0&1&2\\2&0&1\\-1&0&-6\end{vmatrix} = (-1)^2(2\cdot(-6)-1\cdot(-1)) = -11$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה שונה מאפס, כלומר המטריצה הפיכה ולכן הקבוצה היא בסיס של $\mathbb{R}^4$.

ב. (i) כדי למצוא את המטריצה המייצגת נעזר בנוסחה

$$[T]_{St}^B = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [T(u_1)]_{St} & [T(u_2)]_{St} & \cdots & [T(u_n)]_{St} \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

מכיוון שוקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו לפי הבסיס הסטנדרטי הוא הוקטור עצמו, נקבל כי המטריצה המייצגת היא

$$\begin{pmatrix}3&1&2&3\\0&-1&1&0\\2&0&2&2\end{pmatrix}$$

(ii) כדי למצוא את מימדי הגרעין והתמונה נדרג את המטריצה המייצגת:

$$\begin{pmatrix}3&1&2&3\\0&-1&1&0\\2&0&2&2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix}3&1&2&3\\0&-1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&1&0\\3&1&2&3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_3-3R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_3-R_2} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה היא 2, ולכן $\dim \mathbf{Im}T = \mathbf{rank}([T]_{St}^B) = 2$, ולפי משפט המימד השני מתקיים כי $\dim \mathbf{Ker}T = 3 - \dim \mathbf{Im}T = 3-2 = 1$

שאלה 3. (20 נקודות) נתונה הקבוצה

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-a\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\a\end{pmatrix} \right\}$$

עבור כל ערך של הפרמטר a מצאו את המימד של $\mathrm{Span}(S)$, וקבעו האם

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(S).$$

פתרון נמצא את התלויות הלינאריות של איברי הקבוצה, ואת התלות של העמודה הנוספת בהן ע"י דירוג שלהן כעמודות מטריצה:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -a & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & a & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1\\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -a-1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & a-1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_2]{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -a+1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & a-1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & -a+1 & -2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-\frac{1-a}{2}R_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -2 & a-1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2-2a-3}{2} & \frac{a-3}{2}\end{pmatrix}$$

מכיוון שפעולות אלמנטריות שומרות על תלויות לינאריות של העמודות, ניתן להסיק את הדברים הבאים מהמטריצה המדורגת:

א. כאשר $a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\neq 0$ כלומר עבור $a\neq -1,3$ ארבע העמודות הראשונות של המטריצה הן קבוצה בת"ל, ולכן גם בתחילת הדירוג היא בת"ל ולכן המימד של $\mathrm{Span}(S)$ הוא 4 והעמודה האחרונה תלויה לינארית באיברי S, כלומר העמודה $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(S)$.

ב. כאשר $a=3$ שלוש העמודות הראשונות (של המטריצה המדורגת, ולכן) של המטריצה לפני הדירוג הן קבוצה בלתי תלויה לינארית שכל שאר העמודות תלויות לינארית בה, ולכן המימד של $\mathrm{Span}(S)$ הוא 3 והעמודה האחרונה תלויה לינארית באיברי S, כלומר העמודה $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(S)$.

ג. כאשר $a=-1$ שלוש העמודות הראשונות (של המטריצה המדורגת, ולכן) של המטריצה לפני הדירוג הן קבוצה בלתי תלויה לינארית שהעמודה הרביעית תלויה לינארית בה, אבל העמודה החמישית לא, ולכן המימד של $\mathrm{Span}(S)$ הוא 3 והעמודה האחרונה לא תלויה לינארית באיברי S, כלומר העמודה $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}(S)$.

שאלה 4. (20 נקודות)

קבעו האם המטריצה הבאה לכסינה. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש־ $D=P^{-1}AP$ (כלומר $A=PDP^{-1}$), אחרת הסבירו מדוע היא לא לכסינה.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

פתרון נמצא תחילה את הערכים העצמיים ע"י חישוב הפולינום האפייני:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & -2 \\ 3 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((-3-\lambda)(-2-\lambda)-2)-2(2(-2-\lambda)+6) = \lambda(1-\lambda)(\lambda+5)$$

הערכים העצמיים הם הערכים עבורם הפולינום האפייני מתאפס, כלומר $\lambda = 0, 1, -5$. מכיוון שהמטריצה מסדר 3×3 ויש לה שלושה ערכים עצמיים שונים המטריצה לכסינה. נמצא את הוקטורים העצמיים:

א. עבור $\lambda = 0$: נמצא את מרחב הפתרונות של

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מהדירוג נקבל כי בסיס למרחב הפתרונות של A הוא $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

ב. עבור $\lambda = 1$: נמצא את מרחב הפתרונות של

$$A-I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to\frac{1}{2}R_3]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2+10R_3]{R_1\to R_1-3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מהדירוג נקבל כי בסיס למרחב הפתרונות של $A-I$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ג. עבור $\lambda = -5$: נמצא את מרחב הפתרונות של

$$A+5I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\frac{1}{2}R_1]{R_2\to\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_2]{R_1\to R_1-3R_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to -\frac{1}{2}R_2]{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מהדירוג נקבל כי בסיס למרחב הפתרונות של A הוא $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ולכן עבור

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

מתקיים כי $D = P^{-1}AP$.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ עבורה מתקיים כי $|A| = \frac{1}{6}$. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 4a_1 & 4c_1 & 8b_1 \\ -3a_2 & -3c_2 & -6b_2 \\ a_3 & c_3 & 2b_3 \end{pmatrix}$$

וקבעו כמה פתרונות יש למשוואה $Bx = 0$

ב. (10 נקודות) תהיינה $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ מטריצות הפיכות עם מקדמים ממשיים. הוכיחו כי לא קיימת מטריצה ממשית C כך שמתקיים השוויון

$$A^3B = -AB^{-1}C^2$$

פתרון

א. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה B:

$$\begin{vmatrix} 4a_1 & 4c_1 & 8b_1 \\ -3a_2 & -3c_2 & -6b_2 \\ a_3 & c_3 & 2b_3 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{\substack{R_1\to\frac{1}{4}R_1 \\ R_2\to-\frac{1}{3}R_2}} 4(-3)\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 2b_1 \\ a_2 & c_2 & 2b_2 \\ a_3 & c_3 & 2b_3 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{C_3\to\frac{1}{2}C_3} (-12)\cdot 2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{C_2\leftrightarrow C_3}$$

$$24\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{24}{6} = 4$$

קיבלנו כי המטריצה B הפיכה (כי הדטרמיננטה שלה שונה מ־0), ולכן למערכת $Bx = 0$ יש פתרון יחיד.

ב. נניח כי קיימת C שמקיימת את השוויון $A^3B = -AB^{-1}C^2$. נכפול את השוויון ב BA^{-1} (A^{-1} קיימת כי A הפיכה) משמאל ונקבל כי $-C^2 = BA^2B$. נחשב את הדטרמיננטה של שני הצדדים ונקבל כי

$$(-1)^3|C|^2 = |B|\cdot|A|^2\cdot|B| \leftrightarrow -|C|^2 = |A|^2|B|^2$$

ומכיוון שהמטריצה C היא מטריצה ממשית נובע כי בצד שמאל של השוויון ישנו מספר שלילי, ובצד ימין יש מספר חיובי (שונה מאפס), וזו סתירה, ולכן אין C כזו.

שאלה 6. (20 נקודות) תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית.

אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) הוכיחו כי אם T חח"ע, ו־$\{T(v_1), T(v_2)\}$ ת"ל, אזי $\{v_1, v_2\}$ ת"ל.

ב. (10 נקודות) הוכיחו כי אם $\dim V$ אי זוגי, אזי $\mathbf{Ker}T \neq \mathbf{Im}T$.

פתרון

א. נתון כי $\{T(v_1), T(v_2)\}$ ת"ל, כלומר אחד האיברים, למשל $T(v_1)$ הוא כפולה של השני, כלומר קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש־$T(v_1) = aT(v_2) = T(av_2)$. נתון כי T חח"ע, ולכן $v_1 = av_2$, כלומר הקבוצה $\{v_1, v_2\}$ ת"ל.

ב. נניח כי $\mathbf{Ker}T = \mathbf{Im}T$, אז מימדיהם שווים, כלומר $\dim \mathbf{Ker}T = \dim \mathbf{Im}T$. ממשפט המימד נקבל כי $\dim V = \dim \mathbf{Ker}T + \dim \mathbf{Im}T = 2\dim \mathbf{Ker}T$ בסתירה לכך שהמימד של V אי זוגי.

בהצלחה