מרצים: פרופסור יוני סטאנצ'סקו, ד"ר דבורה קפלן

מתרגלים : מר בועז וינר, גב' אירנה נמירובסקי, גב' נטליה גרינשטין

מבחן Y

שאלה 1 - (20 נק')

א. (15נק') מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)(x-2)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

ב. (5 נק') נסמן ב- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)(x-2)^n = S(x)$. מצאו טור שמתכנס למספר $\int_2^{2.5} S(x)\,dx$.

פתרון:

א. נסמן : $x_0 = 2; a_n = \frac{\ln n}{n^2}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{\ln n}{n^2}\right|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n^2}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{\ln n}}}{\underset{\searrow 1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}}\right)} = 1$$

(לפי : $1 \le \sqrt[n]{ln(n)} \le \sqrt[n]{n}$ לכל $n \ge 3$ וכלל הסנדוויץ').

$x_0 = 2$ **ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל** $x \in (1,3)$ ומתבדר לכל $x \notin [1,3]$. נבדוק בקצוות :

$\boxed{x=3} \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$. הסדרה לא שלילית לכן נוכל להפעיל מבחן השוואה הראשון :

הסדר אינסופיות של הסדרה $\ln n$ קטן מהסדר של הסדרה $n^{\frac{1}{2}}$ ואז קיים מספר טבעי n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים : $0 \le \frac{\ln n}{n^2} \le \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס (הרמוני מוכלל עם מעריך גדול מ 1). לכן לפי מבחן השוואה הראשון גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ מתכנס.

$\boxed{x=1} \leftarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n^2}$.

אם נתבונן בטור הערכים המוחלטים מקבלים טור כמו בקצה השני, טור מתכנס. ולכן גם הטור המקורי מתכנס (מתכנס בהחלט).

מסקנה : הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in[1,3]$ ומתבדר לכל $x\notin[1,3]$

ב. נבצע אינטגרציה איבר איבר ($[2,2.5]\subset[1,3]$) **:**

$$\int_2^{2.5}S(x)\,dx=\int_2^{2.5}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}(x-2)^n\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_2^{2.5}\frac{\ln n}{n^2}(x-2)^n\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_2^{2.5}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2(n+1)2^{n+1}}$$

<u>שאלה 2 - (20 נק')</u>

נתונה פונקציה $z=f(x,y)$, כך ש- $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב- $\mathbb{R}^2$. נגדיר פונקציה g באופן הבא : $g(u,v)=f(2u+e^v,3u+\cos v)$.

ידוע כי $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-1,$ ו- $g(0,0)=5$.

א.(12 נק') מצאו את הווקטור : $\vec{\nabla}g(0,0)$.

ב. (8 נק') מצאו קירוב לינארי של הערך $f(1.02,1.05)$.

<u>פתרון</u> :

$$x(u,v)=2u+e^{v}$$
$$x(0,0)=1$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)=2\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)=2$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)=e^{v}\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)=1$$
$$y(u,v)=3u+\cos v$$
$$y(0,0)=\cos 0=1$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)=3\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial u}(0,0)=3$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)=-\sin(v)\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial v}(0,0)=0$$

א. מתקיימים תנאי כלל השרשרת בנקודה $P=(0,0)$ ולכן :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\frac{\partial x}{\partial u}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{\partial y}{\partial u}(0,0)=3\cdot 2+(-1)\cdot 3=3$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{\partial y}{\partial v}(0,0)=3\cdot 1+(-1)\cdot 0=3$$

לכן : $\boxed{\vec{\nabla}g(0,0)=(3,3)}$.

ב. משוואת המישור המשיק לגרף של הפונקציה f בנקודה $(1,1,\underbrace{f(1,1)}_{g(0,0)=5})$

$$z=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\Rightarrow z=5+3(x-1)-(y-1)$$

ואז נקרב : $f(1.02,1.05)\cong 5+3\cdot 0.02-(0.05)=5.01$

<u>שאלה 3 - (20 נק')</u>

נתונה הפרבולה $y^{2}=2x$. מצאו נקודה M על פרבולה זו, הקרובה ביותר לנקודה $(1,4)$.

הערה : אין צורך לנמק למה קיימת נקודה M כזאת.

<u>פתרון :</u>

נשים לב שהפרבולה הוא תחום סגור והנקודה של מרחק מינימאלי ל- (1,4) שייכת גם לחלק של הפרבולה המוכל במעגל מסוים עם מרכז $(1,4)$, לכן היינו יכולים להתייחס למינימום של פונקצית המרחק בתחום חסום וסגור וזה קיים ושקול לבעיה שלנו.

מספיק למצוא נקודה, הנותנת מינימום לפונקצית <u>המרחק בריבוע</u> בין הנקודות על הפרבולה לבין $(1,4)$ (מכוון שבנקודה זו גם המרחק עצמו יהיה מינימאלי).

תהי, אם כן, (x,y) נקודה כלשהי על הפרבולה, ונגדיר : $f(x,y)=(x-1)^2+(y-4)^2$ (זהו המרחק בריבוע).

ובעצם, הבעיה הפכה להיות מציאת מינימום של $f(x,y)$ תחת האילוץ $y^2=2x$.

האילוץ הוא : $g(x,y)=y^2-2x=0$.

ואז הנקודה חשודה למינימום מוחלט תחת האילוץ שהגדרנו היא גם חשודה לקיצון מקומי תחת האילוץ לכן תקיים את המערכת של לגרנז' (או תאפס את הגרדיאנט של $g(x,y)$ אבל זה לא מתקיים בשום נקודה) .

לכן הנקודה המבוקשת תקיים :

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)+2\lambda=0\\ 2(y-4)-2\lambda y=0\\ y^2=2x\end{cases}$$

אם נבודד משתי המשוואות הראשונות את λ ונשווה ערכו נקבל : (נשים לב שבפתרון y חייב להיות שונה מ 0) :

$$1-x=\frac{y-4}{y}\Rightarrow x=\frac{4}{y}$$

אם נציב תוצאות אלה באילוץ (המשוואה השלישית) , נקבל : $y^3=8\Rightarrow y=2\Rightarrow x=2$

מכאן הנקודה $M(2,2)$ היא הנקודה המבוקשת.

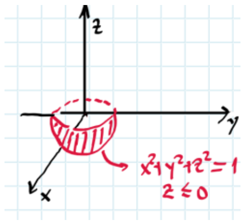
<u>שאלה 4 - (20 נק')</u>

מצאו את המסה של הגוף $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ \ z\le 0\}$, אם ידוע

שצפיפות הנקודתית היא $\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

<u>פתרון :</u>

הגוף הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2\le 1$ שמתחת למישור $z=0$.



נשתמש בקאורדינטות כדוריות : הערה : בכדוריות מתקיים ש $x^2+y^2+z^2=r^2$.

ובנוסף : $\left|J(r,\theta,z)\right|=r^2\sin\varphi$.

הקואורדינטות הכדוריות של הנקודות של הגוף מקיימות : :

$$0\le r\le 1$$

$$0\le\theta\le 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$$

לכן :

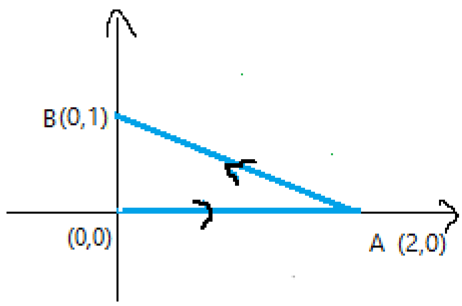
$$mass(G)=\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dV=\iiint\limits_G \frac{1}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dV=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{1+r^3}r^2\sin\varphi\,d\varphi$$

לכן:

$$mass(G)=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1+r^3}r^2\left(-\cos\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)d\theta=\int_0^1\frac{1}{1+r^3}r^2 2\pi\,dr=\frac{2\pi}{3}\ln(1+r^3)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}\ln 2$$

<u>שאלה 5 - (20 נק׳)</u>

חשבו את העבודה של השדה הוקטורי $\bar{F}(x,y)=(x^2-3y^2+1)\vec{i}-(xy-5)\vec{j}$
הנדרשת להעברת חלקיק לאורך עקומה C המורכבת מאיחוד של שני קטעים ישרים : אחד העובר
מראשית הצירים לנקודה $A(2,0)$ והשני מהנקודה $A(2,0)$ לנקודה $B(0,1)$.



פתרון:
נבדוק האם השדה הוא משמר בתחום קשיר כלשהו המכיל את הישרים :

נסמן :

$$P(x,y)=x^2-3y^2+1$$
$$Q(x,y)=-(xy-5)$$

ואז מתקיים :

$$P_y(x,y)=-6y$$
$$Q_x(x,y)=-y$$

לא קיים תחום פשוט קשר המכיל את העקומה עבורו יתקיים שוויון בין Q_x ו P_y בכל הנקודות,
לכן השדה אינו משמר בשום תחום כזה.
המסלול C הנתון הוא פתוח. נסגור אותו על ידי הקטע γ על הציר ה-Y מהנקודה $B(0,1)$ עד ראשית הצירים .
נחשב את העבודה לאורך מסלול סגור $C\cup\gamma$ ונחסיר את העבודה לאורך מסלול γ.

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{C\cup\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

נחשב אינטגרל הבא : $\oint_{C\cup\gamma} F\cdot dr$

תנאי מפשט גרין מתקיימים : העקומה היא סגורה וחלקה למקוטעין עם כיוון נגד השעון, פשוטה .
לרכיבי השדה קיימות נגזרות חלקיות מסדר ראשון רציפות בתחום D הכלוא בעקומה , והתחום פשוט קשר.
נמצא משוואת הישר בין נקודות $A(2,0)$ ו $B(0,1)$.

$$y=ax+b$$
$$B(0,1):$$
$$y=a\cdot 0+b=1\Rightarrow b=1 .$$
$$A(2,0):$$
$$0=a\cdot 2+1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

לכן משוואת הישר היא $y=-\frac{1}{2}x+1$

ואז נעשה שימוש במשפט גרין:

$$\oint_{C\cup\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C\cup\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint_D \left(-y-(-6y)\right)dx\,dy = 5\iint_D y\,dx\,dy = 5\int_0^2 dx \int_0^{-\frac{1}{2}x+1} y\,dy = 5\int_0^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{-\frac{1}{2}x+1} dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^2 (-\frac{1}{2}x+1)^2 dx = \frac{5}{2}\left.\frac{(-\frac{1}{2}x+1)^3}{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|_0^2 = \frac{5}{3}$$

כעת נחשב $\int_\gamma F\cdot dr$:

הצגה פרמטרית של העקומה γ :

$$\gamma:\begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ t\in[-1,0] \end{cases}$$

$$\int_\gamma F\cdot dr = \int_{-1}^{0} ((0^2-3t^2+1)\cdot 0-(0\cdot t-5)\cdot(-1))dt = \int_{-1}^{0} -5dt = -5t\Big|_{-1}^{0} = -5$$

לסיכום :

$$W = \int_C \vec{F}\cdot dr = \oint_{C\cup\gamma} \vec{F}\cdot dr - \int_\gamma \vec{F}\cdot dr = \frac{5}{3}+5 = \frac{20}{3}$$

שאלה 6-(20 נק׳)

הגליל $x^2+y^2=1$ חסום על ידי המישורים $z=0,\quad z=3$.

חשבו את שטף השדה הוקטורי : $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i}+y\vec{j}+z^2\vec{k}$ דרך החלק הצדדי של הגליל הזה כאשר נורמל מכוון כלפי חוץ.

הערה : הגליל **פתוח** מלמעלה וגם פתוח מלמטה .

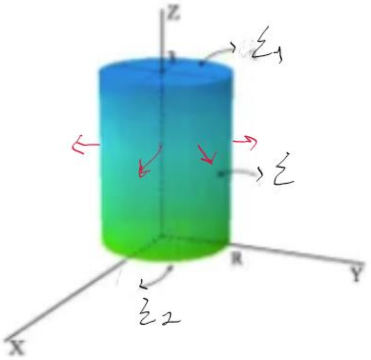
פתרון:

נחשב את השטף $\Phi\left(\vec{F}\right) = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot n\,dS$ כאשר Σ הוא הגליל הנתון.

נסגור את הגליל על ידי המעגלים $\Sigma_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=3\,,\ x^2+y^2\le 1\right\}$ מלמעלה

ו- $\Sigma_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0\,,\ x^2+y^2\le 1\right\}$ מלמטה. נבדוק תנאי משפט הדיברגנץ :

לרכיבי השדה $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i}+y\vec{j}+z^2\vec{k}$ יש נגזרות חלקיות רציפות בכל נקודה של הגוף G הכלוא בתוך המשטח הסגור $\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2$, שהוא משטח חלק למקוטעין ונורמל מכוון כלפי חוץ.



$$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k} \quad \Rightarrow \quad P(x,y,z) = x, \quad Q(x,y,z) = y, \quad R(x,y,z) = z^2$$

$$\Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}\left(\vec{F}\right) = \iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2} \vec{F}\cdot n\,dS = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV = \iiint\limits_G (2+2z)\,dV$$

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta\,,\; y = r\sin\theta\,,\; z = z\,,\quad J = r$$

$$\Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}\left(\vec{F}\right) = \iiint\limits_G (2+2z)\,dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^3 (2+2z)r\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\left(2z+z^2\right)\Big|_0^3 dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 15r\,dr = 15\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 d\theta = 15\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)d\theta = \frac{15}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{15}{2}\cdot 2\pi = 15\pi$$

נמצא את השטף דרך המעגל Σ_1 :

$$z = 3, \quad \vec{n} = \vec{k} = (0,0,1)$$

$$\Phi_{\Sigma_1}\left(\vec{F}\right) = \iint\limits_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot n\,dS = \iint\limits_{\Sigma_1}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}\right)\bullet\left(\vec{k}\right)dS = \iint\limits_{\Sigma_1} z^2 dS = [z=3] = 9\underbrace{\boxed{\iint\limits_{\Sigma_1} 1ds}}_{surfice} = \begin{bmatrix} r=1 \\ S=\pi r^2 \end{bmatrix} = 9\pi$$

נמצא את השטף דרך המעגל Σ_2 :

$$z = 0, \quad \vec{n} = -\vec{k} = (0,0,-1)$$

$$\Phi_{\Sigma_2}\left(\vec{F}\right) = \iint\limits_{\Sigma_2}\vec{F}\cdot n\,dS = \iint\limits_{\Sigma_2}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}\right)\bullet\left(-\vec{k}\right)dS = \iint\limits_{\Sigma_2}\left(-z^2\right)dS = [z=0] = \iint\limits_{\Sigma_2} 0dS = 0$$

השטף הנדרש הוא:

$$\Phi_{\Sigma}\left(\vec{F}\right) = \Phi_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}\left(\vec{F}\right) - \Phi_{\Sigma_1}\left(\vec{F}\right) - \Phi_{\Sigma_2}\left(\vec{F}\right) = 15\pi - 9\pi - 0 = 6\pi$$