פתרון

שאלון X

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') על ידי שימוש באינדוקציה מתמטית הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ טבעי המספר $3^{2n-1}+2^{n+1}$ מתחלק ב – 7 ללא שארית. יש לרשום באופן מפורש את כל השלבים.

ב. (10 נק') נתונים הפסוקים הבאים: "כאשר המחירים נמוכים – המכירות גבוהות". "אם הסחורה משובחת והמחירים נמוכים, אז הלקוחות מרוצים". מסקנה: "אם הסחורה משובחת והלקוחות מרוצים אז המכירות גבוהות." הצרינו את הפסוקים על ידי קשרים לוגיים וקבעו האם המסקנה אכן נובעת מההנחות. (השתמשו באותיות A,B,C,D לפסוקים).

פתרון

א. בסיס האינדוקציה: $n=1$. $3^{2\cdot 1-1}+2^{1+1}=3+4=7$ מתחלק ב – 7.
נניח כי הטענה נכונה עבור $k \geq 1$ טבעי מסוים, כלומר $3^{2k-1}+2^{k+1}$ מתחלק ב – 7. נוכיח על סמך ההנחה כי הטענה נכונה גם עבור $(k+1)$, כלומר גם $3^{2k+1}+2^{k+2}$ מתחלק ב – 7.
מתקיים:

$$3^{2k+1}+2^{k+2}=3^2\cdot 3^{2k-1}+2^{k+2}=3^2\cdot(3^{2k-1}+2^{k+1}-2^{k+1})+2^{k+2}=$$
$$=3^2\cdot(3^{2k-1}+2^{k+1})-3^2\cdot 2^{k+1}+2^{k+2}=$$
$$=3^2\cdot\underbrace{(3^{2k-1}+2^{k+1})}_{\substack{divisible\ by\ 7\\(induction\ \ assumption)}}-2^{k+1}\cdot\underbrace{(3^2-2)}_{7}$$

זה מוכיח שהמספר $3^{2k+1}+2^{k+2}$ מתחלק ב – 7 כהפרש של שני מספרים שמתחלקים ב – 7.
לפי עקרון של אינדוקציה מתמטית המספר $3^{2n-1}+2^{n+1}$ מתחלק ב– 7 ללא שארית לכל $n \geq 1$ טבעי.

ב. נסמן: A - "המחירים נמוכים", B - "המכירות גבוהות", C - "הסחורה משובחת", D - "הלקוחות מרוצים". בסימונים האלה הנתונים הם:

$$(1)\ \ A\to B$$
$$(2)\ \ (C\wedge A)\to D$$
$$(3)\ \ (C\wedge D)\to B$$

צריך לבדוק האם שני הפסוקים הראשונים גוררים טאוטולוגית את הפסוק השלישי. נניח כי

$$(1)\ \ A\to B=T$$
$$(2)\ \ (C\wedge A)\to D=T$$
$$(3)\ \ (C\wedge D)\to B=F$$

מ – (3) נובע כי $(C\wedge D)=T$ (4) ו – $B=F$ (5).
מ – (1) ו – (5) נובע כי $A=F$ (6).
מ – (4) נובע כי $C=T$ (7) ו – $D=T$ (8).
כמו כן $(6),(7),(8)$ לא סותרות את (2).
מצאנו ערכים של הפסוקים היסודיים $C=D=T$, $A=B=F$, כך שעבורם ההנחות בנות ערך האמת T והמסקנה בעלת ערך האמת F. זה אומר שהמסקנה לא נובעת מההנחות.

<u>שאלה 2</u> (20 נקודות)   אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ב. (10 נק') מעל קבוצה $\mathbb{N}$ (בלי אפס) של כל המספרים הטבעיים נגדיר יחס R באופן הבא:

$$(m,n)\in R \;\Leftrightarrow\; (m=n)\vee(n-m>1)$$

הוכיחו כי R יחס סדר והראו כי 2 הוא אחד האיברים המינימליים לפי היחס R.

<u>פתרון</u>

א. מתקיים

$$X\in P(A\cap B)$$

אם ורק אם

$$X\subseteq A\cap B$$

אם ורק אם

$$\forall x\left(x\in X\to x\in A\cap B\right)$$

אם ורק אם

$$\forall x\left(x\in X\to\left(x\in A\wedge x\in B\right)\right)$$

אם ורק אם

$$\forall x\left(x\notin X\vee\left(x\in A\wedge x\in B\right)\right)$$

אם ורק אם

$$\forall x\left(\left(x\notin X\vee x\in A\right)\wedge\left(x\notin X\vee x\in B\right)\right)$$

אם ורק אם

$$\forall x\left(\left(x\in X\to x\in A\right)\wedge\left(x\in X\to x\in B\right)\right)$$

אם ורק אם

$$\forall x\left(x\in X\to x\in A\right)\;\wedge\;\forall x\left(x\in X\to x\in B\right)$$

אם ורק אם

$$X\subseteq A\;\wedge\;X\subseteq B$$

אם ורק אם

$$X\in P(A)\;\wedge\;X\in P(B)$$

אם ורק אם

$$X\in P(A)\cap P(B)$$

זה מוכיח את השוויון הנתון.

ב. רפלקסיביות: לכל n טבעי $(n,n)\in R$, כי $n=n$. היחס רפלקסיבי.

אנטיסימטריות: נניח כי $(m,n)\in R$ ו – $(n,m)\in R$, כלומר

$$\left[(n=m)\vee(m-n>1)\right]\wedge\left[(m=n)\vee(n-m>1)\right]$$

זה שקול ל –

$$(n=m)\vee\underbrace{\left[(m-n>1)\wedge(n-m>1)\right]}_{F}$$

ומכאן $m=n$. זה מוכיח אנטיסימטריות.

טרנזיטיביות: נניח כי $(m,n)\in R$ ו – $(n,k)\in R$, כלומר $\left[(m=n)\vee(n-m>1)\right]\wedge\left[(n=k)\vee(k-n>1)\right]$.

אם $m=n$, אז $(m=k)\vee(k-m>1)$, כלומר $(m,k)\in R$.

אם $n=k$, אז $(m=k)\vee(k-m>1)$, כלומר $(m,k)\in R$.

אם $m\neq n$ ו – $n\neq k$ מקבלים $n-m>1$ וגם $k-n>1$. נחבר את אי השוויונים ונקבל $k-m>2>1$, כלומר $(m,k)\in R$.

בכל מקרה קיבלנו $(m,k)\in R$, לכן היחס טרנזיטיבי.

הוכחנו כי R יחס רפלקסיבי, אנטיסימטרי וטרנזיטיבי, כלומר R יחס סדר.

נראה כי 2 איבר מינימלי. נניח בשלילה כי 2 לא איבר מינימלי, כלומר קיים $0<m\neq 2$ טבעי, כך ש – $(m,2)\in R$, ולכן $2-m>1$. זה גורר $m<1$. קיבלנו סתירה, כי לא קיים מספר טבעי $0<m<1$. לכן ההנחה ש – 2 לא איבר מינימלי אינה נכונה. מסקנה: 2 איבר מינימלי.

<u>שאלה 3</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') נתונה הקבוצה $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 4x\in\mathbb{N}\right\}$. נגדיר פונקציה $f:A\to\mathbb{N}$ על ידי $f(x)=4x$. הוכיחו כי f הפיכה. מהי העוצמה של A?

ב. (10 נק') חשבו את הסכום $\binom{10}{0}-\frac{1}{2}\binom{10}{1}+\frac{1}{4}\binom{10}{2}-\frac{1}{8}\binom{10}{3}+\ldots+\frac{1}{1024}\binom{10}{10}$. נמקו את החישוב.

<u>פתרון</u>

א. נראה כי f חח"ע:

יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש- $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, כלומר: $4x_1=4x_2$. מכאן $x_1=x_2$. לכן f חח"ע.

נראה כי f על:

יהי $y\in\mathbb{N}$. נראה שקיים $x\in A$ כך ש- $f\left(x\right)=y$, כלומר $y=f\left(x\right)=4x$. מכאן $x=\frac{y}{4}$ ומתקיים $x\in A$, כי $y\in\mathbb{N}=\frac{y}{4}\cdot 4=f\left(\frac{y}{4}\right)=f\left(x\right)=4x$.

הוכחנו כי f חח"ע ועל, לכן f הפיכה.

לפי הגדרת שוויון עוצמות, העצמה של A שווה לעוצמה של $\mathbb{N}$, כלומר $|A|=\aleph_0$.

ב. מתקיים:

$$\binom{10}{0}-\frac{1}{2}\binom{10}{1}+\frac{1}{4}\binom{10}{2}-\frac{1}{8}\binom{10}{3}+\ldots+\frac{1}{1024}\binom{10}{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1^{n-k}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{10}=\frac{1}{1024}$$

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)   אין קשר בין סעיף א׳ לסעיף ב׳

א. (14 נק׳) נסמן ב – a_n את מספר הסדרות באורך n המורכבות מספרות $\{0,1,2\}$, כך שספרה 2 לא מופיעה פעמיים ברצף.

(1) מצאו את כלל הנסיגה עבור a_n ומצאו תנאי התחלה מתאימים.

(2) פתרו את כלל הנסיגה ומצאו ביטוי מפורש עבור a_n.

ב. (6 נק׳) יהי G גרף קשיר בעל תכונה שהורדת קשת כלשהי הופכת אותו לגרף לא קשיר. הוכיחו כי G עץ.

<u>פתרון</u>

א. בסדרה באורך n אחרי 0 או 1 יכולה להופיע כל סדרה חוקית באורך $(n-1)$ וכך נקבל סדרה חוקית באורך n. אחרי 2 חייבים לשים 0 או 1 ואז אפשר להמשיך על ידי סדרה חוקית כלשהי באורך $(n-2)$.

(1) מהשיקולים האלה מקבלים את כלל הנסיגה הבא:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

יש 3 סדרות חוקיות באורך 1, לכן $a_1 = 3$. יש 8 סדרות חוקיות באורך 2, לכן $a_2 = 8$. מכלל הנסיגה אפשר לחשב גם את a_0: $a_2 = 2a_1 + 2a_0 \Leftarrow 8 = 2\cdot 3 + 2a_0 \Leftarrow a_0 = 1$.

(2) המשוואה האופיינית הינה $x^2 = 2x + 2$. הפתרונות שלה $x = 1 \pm \sqrt{3}$. הפתרונות שונים, לכן הנוסחה המפורשת עבור a_n הינה

$$a_n = A\left(1+\sqrt{3}\right)^n + B\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$a_0 = A + B = 1$$
$$a_1 = A\left(1+\sqrt{3}\right) + B\left(1-\sqrt{3}\right) = 3$$

פותרים את המערכת ומקבלים: $A = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$, $B = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$ ולכן לכל n טבעי מתקיים

$$a_n = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

ב. נניח בשלילה ש – G הוא לא עץ, G קשיר, לכן יש בו מעגל. תהי e קשת כלשהי במעגל, נגיד בין קודקודים u ו – v. מהנתון הורדת קשת e תגרום לגרף G להפוך לגרף לא קשיר, כלומר לא קיים יותר מסלול בין u ל – v. מצד שני, אם מורידים קשת e מהמעגל עדיין נשאר מסלול בין u ל – v וזו סתירה. ההנחה ההתחלתית לא נכונה ולכן G עץ.

שאלה 5 **(20 נקודות)** **אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'**

א. (10 נק') בכמה דרכים ניתן לחלק 10 אנשים ל – 5 זוגות?

ב. (10 נק') נתונים שני יחסים R,S מעל קבוצה A, כך שהיחס R הוא יחס סימטרי והיחס S הוא יחס אנטיסימטרי. הוכיחו כי היחס $R\cap S$ הוא יחס אנטיסימטרי.

פתרון

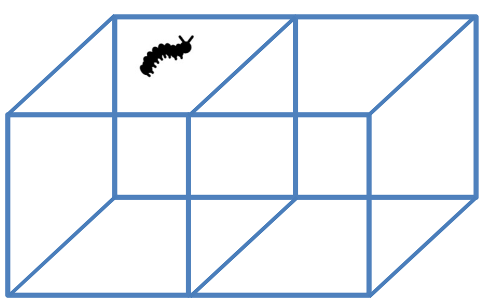
א. זוג ראשון ניתן לבחור ב – $\binom{10}{2}$ דרכים, זוג שני – ב – $\binom{8}{2}$ דרכים וכו'. זוג אחרון נבחר ב – $\binom{2}{2}$ דרכים.
נשים לב כי סדר של 5 הזוגות שבחרנו לא חשוב, לכן המספר האפשרויות הינו $\frac{1}{5!}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{10}{2}=\frac{10!}{5!\cdot(2!)^5}$.

ב. נניח $(x,y)\in R\cap S$ וגם $(y,x)\in R\cap S$, כלומר $(x,y)\in R$ ו – $(x,y)\in S$ וגם $(y,x)\in R$ ו – $(y,x)\in S$. העובדות $(x,y)\in R$ ו – $(y,x)\in R$ מתאימות לכך ש – R יחס סימטרי. S הוא יחס אנטיסימטרי ולכן העובדות $(x,y)\in S$ ו – $(y,x)\in S$ גוררות $x=y$. זה מוכיח כי $R\cap S$ אנטיסימטרי.

שאלה 6 **(20 נקודות)** **אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'**

א. (12 נק') יעל לומדת למבחן בקורס מתמטיקה בדידה. יש לה לכל היותר 56 שעות בהן תוכל ללמוד. היא לא חייבת ללמוד בכל השעות שלרשותה, והיא מקצה את הזמן ביחידות שלמות של שעות (כלומר, לא חצי שעה וכדומה). יעל החליטה לחלק את הזמן בין ארבעת נושאי הקורס באופן הבא:
לוגיקה – לפחות 3 שעות ולכל היותר 10 שעות, תורת הקבוצות – לפחות 10 שעות, קומבינטוריקה – לפחות 10 שעות, תורת הגרפים – לפחות 3 שעות ולכל היותר 10 שעות.
כמה אפשרויות יש ליעל לחלק את השעות ללמידה?

ב. (8 נק') המבנה שבציור מורכב משתי קוביות ריקות מבפנים שמוצמדות אחת לשניה. למבנה יש 10 פאות חיצוניות ופאה אחת פנימית. תולעת נמצאת על פאה עליונה של המבנה. היא יכולה לכרסם פאה ולעבור לצד שני שלה. התולעת רוצה לכרסם כל פאה פעם אחת בדיוק ולחזור למקום. האם זה אפשרי? אם לא – הוכיחו, אם כן – תארו באופן ברור את המסלול המתאים. (התולעת לא יכולה לכרסם צלעות, אבל כן יכולה לזחול מעליהן)



פתרון

א. הבעיה שקולה לבעיה הבאה: מה מספר הפתרונות הטבעיים לאי השיוויון: $t_1+t_2+t_3+t_4\le 56$ כאשר t_1 מייצג את מספר השעות שיעל תלמד לוגיקה ($t_1=3,4,5,...,10$). t_2 מייצג את מספר השעות שיעל תלמד

תורת הגרפים ($t_2 = 3,4,5,...,10$). t_3 מייצג את מספר השעות שיעל תלמד תורת הקבוצות ($t_3 = 10,11,...$).

t_4 מייצג את מספר השעות שיעל תלמד קומבינטוריקה ($t_4 = 10,11,...$).

ננסח את הבעיה כבעיה של מציאת מספר הפתרונות למשוואה על ידי הוספת משתנה עזר $u = 0,1,2,...$:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + u = 56$$

הפונקציה היוצרת המתאימה הינה

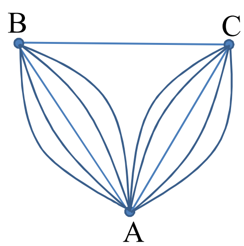
$$f(x) = (x^3 + x^4 + ... + x^{10})^2 \cdot (x^{10} + x^{11} + ...)^2 \cdot (1 + x + x^2 + ...)$$

אנו מעוניינים למצוא את המקדם של x^{56}. נפשט את הפונקציה:

$$f(x) = x^6(1 + x + x^2 + ...x^7)^2 \cdot x^{20}(1 + x + x^2 + ...)^2 \cdot (1 + x + x^2 + ...) =$$

$$= x^{26} \cdot \left(\frac{1 - x^8}{1 - x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1 - x}\right)^3 = \frac{x^{26}(1 - 2x^8 + x^{16})}{(1 - x)^5} = (x^{26} - 2x^{34} + x^{42})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{n}x^n$$

המקדם של x^{56} הינו $1 \cdot \binom{34}{30} - 2 \cdot \binom{26}{22} + 1 \cdot \binom{18}{14} = 17056$. ליעל יש 17056 אפשרויות לחלק את שעות הלמידה.



ב. המבנה מחלק את המרחב לשלושה אזורים: אזור חיצוני (נסמן אותו ב – A), ושני אזורים בתוך הקוביות (נסמן ב – B ו – C). נתאים לכל אזור קודקוד בגרף ונחבר בין הקודקודים במספר קשתות, לפי כמות הפאות המשותפות בין אזורים. כרסום פאה ומעבר מצד אחת שלה לצד שני מתאים למעבר מקודוקוד לקודקוד לאורך קשת מסוימת שמחברת ביניהם. השאלה המקורית שקולה לשאלה האם הגרף שבנינו הוא גרף אוילר. מתקיים: $\deg(A) = 10$, כי ל – A יש 5 פאות משותפות עם B ו – 5 פאות משותפות עם C. $\deg(B) = 6$, כי ל – B יש 5 פאות משותפות עם A ופאה משותפת אחת עם C. גם $\deg(C) = 6$ מאותם שיקולים. דרגות של כל הקודקודים בגרף זוגיות, לכן הגרף הוא גרף אוילר. אחת המעגלים האפשריים: $ABABABCACACA$.