פתרון

X

שאלה 1 (16 נקודות)

בכל הטלה של מטבע א', הוא נופל על "עץ" בהסתברות 0.5. מטבע ב', נופל על "עץ" בכל הטלה בהסתברות 1. יוסי בוחר מטבע באקראי, ומטיל אותו 4 פעמים.

א. חשבו את ההסתברות שיתקבל "עץ" בדיוק 3 פעמים.
ב. יוסי וחברו נפתלי משחקים במשחק הבא: בכל סבב, נבחר מטבע אקראי, ומוטל פעם אחת. אם יוצא עץ ,יוסי משלם שקל אחד לנפתלי. אחרת, יוסי מקבל מנפתלי 2 שקלים. חשבו את תוחלת הרווח של יוסי לאחר 4 סבבים של המשחק.

<u>פתרון:</u>

א. נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה. נסמן ב-A את המאורע "יצא עץ בדיוק 3 פעמים", וב-B את המאורע "נבחר מטבע א'". אז:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{8}$$

ב. נסמן ב-X מספר פעמיים שהתקבל עץ בארבע הטלות מטבע. ההסתברות לקבל עץ בהטלה אחת שווה ל: $0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 1 = 0.75$. לכן מתקיים: $X \sim \mathrm{Bin}(4,0.75)$. נסמן ב-$Y$ את הרווח של יוסי במשחק. מתקיים: $Y = -X + 2(4 - X) = 8 - 3X$. מכאן נקבל:

$$E(Y) = 8 - 3E(X) = 8 - 3 \cdot 4 \cdot 0.75 = -1$$

שאלה 2 (21 נקודות)

נתונה פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרי X :

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a(x-0.5x^2), & 0\le x<1 \\ 0.25(x+1), & 1\le x<b \\ 1, & b\le x \end{cases}$$

א. מה הם הערכים של a, b?

ב. מהי התוחלת של X ?

ג. חשבו את ההסתברות: $P(X<1.4 \mid X>0.7)$.

<u>פתרון:</u>

א.

הפונקציה $F(x)$ רציפה ולכן:

$$F(1)=a\times 0.5=0.25\times 2 \quad \Rightarrow \quad a=1$$
$$F(b)=0.25(b+1)=1 \quad \Rightarrow \quad b=3$$

ב.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$$

פונקציית הצפיפות היא:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-x, & 0\le x\le 1 \\ 0.25, & 1<x\le 3 \\ 0, & 3<x \end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^1 x(1-x)dx+\int_1^3 0.25x dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{8}x^2\right]_1^3=\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}\approx 1.17$$

ג.

$$P(X<1.4 \mid X>0.7)=\frac{P(0.7<X<1.4)}{P(X>0.7)}=\frac{F(1.4)-F(0.7)}{1-F(0.7)}=\frac{0.6-0.455}{1-0.455}=0.2661$$

שאלה 3 (24 נקודות)

תומר הביא לשיעור שקית ממתקים ובה שתי סוכריות, מסטיק אחד ושוקולד אחד.

במהלך השיעור הוא לוקח באקראי ממתקים מהשקית ואוכל אותם.

הוא ממשיך כך עד שהוא מוציא את השוקולד.

נגדיר:

X – מספר הממתקים הכולל שתומר מוציא.

Y – מספר הסוכריות שתומר מוציא.

א. (10 נקודות) מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של המשתנים המקריים X, Y.

ב. (6 נקודות) חשבו את $E(XY)$.

ג. (8 נקודות) חשבו את השונות המותנית של Y בהינתן $X = 3$.

<u>פתרון:</u>

א.

$X \ \backslash \ Y$	0	1	2
1	1/4	0	0
2	1/12	1/6	0
3	0	1/6	1/12
4	0	0	1/4

חישוב ההסתברויות בתוך הטבלה:

להוציא שוקולד בפעם הראשונה $P(X=1, Y=0) = \frac{1}{4}$

להוציא מסטיק ולאחר מכן שוקולד $P(X=2, Y=0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

להוציא סוכריה ולאחריה שוקולד $P(X=2, Y=1) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

להוציא מסטיק וסוכריה (לא משנה הסדר) ולאחר מכן שוקולד $P(X=3, Y=1) = 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

להוציא שתי סוכריות ולאחר מכן שוקולד $P(X=3, Y=2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

להוציא שוקולד אחרון $P(X=4, Y=2) = \frac{1}{4}$

ב. $E(XY) = \sum x_i y_j P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 3.33$

ג.

$Y\|X=3$	1	2
$P(Y\|X=3)$	2/3	1/3

$$E(Y|X=3) = 1\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$E(Y^2|X=3) = 1^2\cdot\frac{2}{3} + 2^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$Var(Y|X=3) = E(Y^2|X=3) - \big(E(Y|X=3)\big)^2 = 2 - 1.33^2 = 0.2311$$

שאלה 4 (16 נקודות)

במאפיה השכונתית רבע מן העוגות הן עוגות גבינה, והיתר הן עוגות שוקולד. הזמן שלוקח לאפות עוגת גבינה בתנור הוא משתנה מקרי מעריכי עם תוחלת של 25 דקות. הזמן שלוקח לאפות עוגת שוקולד בתנור מתפלג נורמלית עם תוחלת μ דקות וסטיית תקן 6 דקות. ידוע כי ההסתברות שזמן האפייה של עוגה כלשהי יעלה על 30 דקות היא 0.12.

א. מצאו את μ.

ב. ביום מסוים נאפו 100 עוגות גבינה. מהי בקירוב ההסתברות שסך זמני האפייה של עוגות אלה לא יעלה על 2200 דקות?

<u>פתרון:</u>

זמן אפייה של עוגת שוקולד $X \sim N(\mu, 36)$, זמן אפייה של עוגת גבינה $Y \sim exp(1/25)$

א.

$$P(\text{more than 30 minutes}) = 0.75\cdot P(X>30) + 0.25\cdot P(Y>30) = 0.12$$

$$0.75\cdot\left(1-\Phi\left(\frac{30-\mu}{6}\right)\right) + 0.25\cdot\exp(-30/25) = 0.12$$

$$\Phi\left(\frac{30-\mu}{6}\right) = 0.94 \Rightarrow \frac{30-\mu}{6} = z_{0.94} = 1.555 \Rightarrow \mu = 20.67$$

ב. לפי משפט הגבול המרכזי $\sum_{i=1}^{100} Y_i \sim N(25\cdot 100, 25^2\cdot 100)$, לכן

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i \le 2200\right) = \Phi\left(\frac{2200-2500}{250}\right) = \Phi(-1.2) = 1-\Phi(1.2) = 1-0.8849 = 0.1151$$

שאלה 5 (23 נקודות)

בעלי פיצרייה טוענים שממוצע של מספר זיתים בפיצה אחת שווה ל-10 עם סטיית התקן 2. נינה לומדת סטטיסטיקה במכללה ורוצה לבדוק את טענה של בעלי הפיצרייה (השערת האפס). לפי השערה האלטרנטיבית ממוצע מספר זיתים בפיצה יותר נמוך מ-10. לצורך הבדיקה נינה קנתה 49 פיצות ומצאה שממוצע של מספר זיתים לפיצה היה שווה ל-9.4.

א. (8 נקודות) מצאו אזור דחיית השערת האפס ברמת המובהקות של 0.05. האם תדחו את השארת האפס על סמך התוצאה שהתקבלה?
ב. (8 נקודות) מהי מובהקות התוצאה שהתקבלה? האם השערת האפס הייתה נדחית ברמת המובהקות 0.01?
ג. (7 נקודות) בנו רווח בר סמך ברמת סמך 95% עבור ממוצע מספר זיתים בפיצה.

<u>פתרון:</u>

ננסח את ההשערות:

$H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu < 10$

סטטיסטי המבחן: $\bar{X}_{49}$ - ממוצע מספר זיתים במדגם של 40 פיצות.

א. אזור דחיית השערת האפס ברמת המובהקות 0.05:

$$C = \left\{ \bar{X}_{49} < 10 - z_{0.95} \cdot \frac{2}{7} \right\} = \left\{ \bar{X}_{49} < 10 - 1.645 \cdot \frac{2}{7} \right\} = \left\{ \bar{X}_{49} < 9.53 \right\}$$

צריך לדחות את השערת האפס על סמך תוצאה שהתקבלה בניסוי.

ב. נחשב את המובהקות התוצאה 9.4:

$$p\_value = P_{H_0}(\bar{X}_{49} \le 9.4) = \Phi\left(\frac{9.4 - 10}{2/7} \right) = \Phi(-2.1) = 1 - \Phi(2.1) = 1 - 0.9821 = 0.0179 > 0.01$$

נסיק שברמת המובהקות 0.01 השערת האפס הייתה מתקבלת.

ג. נחשב את רווח בר סמך ברמת סמך 95%:

$$\bar{X}_{49} \pm z_{0.975} \cdot \frac{2}{7} \Rightarrow 9.4 \pm 1.96 \cdot \frac{2}{7} \Rightarrow [8.84, 9.96]$$