פתרון

שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') על ידי שימוש באינדוקציה מתמטית הוכיחו כי לכל $n\ge 1$ טבעי מתקיים:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\ge\sqrt{n}$$

יש לרשום באופן מפורש את כל השלבים.

ב. (10 נק') מעל קבוצה $\mathbb{R}$ של כל המספרים הממשיים נתון פסוק: "לכל x, אם $x<0$, אז לא קיים y, כך ש $y^2=x$". הצרינו את הפסוק על ידי שימוש בכמתים. על ידי שימוש בזהויות המתאימות רשמו את שלילת הפסוק.

פתרון

א. בסיס האינדוקציה: $n=1$. $1\ge\sqrt{1}$ מתקיים.

נניח כי הטענה נכונה עבור $k\ge 1$ טבעי מסוים, כלומר $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\sqrt{k}$. נוכיח על סמך ההנחה כי הטענה נכונה גם עבור $(k+1)$, כלומר $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\ge\sqrt{k+1}$.

מתקיים:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\underset{\substack{nduction\\assumption}}{\ge}\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}}\ge\frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}}=\frac{k+1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}$$

זה מוכיח את מעבר האינדוקציה.

לפי עקרון של אינדוקציה מתמטית הטענה נכונה לכל $n\ge 1$ טבעי.

ב. הצרנה: $\forall x\left[x<0\ \to\ \left(\sim\exists y(y^2=x)\right)\right]$.

שלילת הפסוק:

$$\sim\left(\forall x\left[x<0\ \to\ \left(\sim\exists y(y^2=x)\right)\right]\right)\equiv\exists x\sim\left[x<0\ \to\ \left(\sim\exists y(y^2=x)\right)\right]\equiv$$

$$\equiv\exists x\sim\left[\sim\left(x<0\right)\ \vee\ \sim\exists y(y^2=x)\right]\equiv\exists x\left[\left(x<0\right)\ \wedge\ \exists y(y^2=x)\right]$$

<u>שאלה 2</u> (20 נקודות)   אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') הוכיחו שלכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\left(B\cup\overline{A}\right) = \left(A\setminus\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}\setminus A\right)$.

ב. (10 נק') מעל $\mathbb{R}$ נגדיר יחס S באופן הבא: $(x,y)\in S$, אם ורק אם $x-y$ מספר רציונלי.
הראו כי S יחס שקילות. חשבו את העוצמה של מחלקת השקילות $\left[\sqrt{2}\right]_S$.

<u>פתרון</u>

א. מתקיים:

$$\left(A\setminus\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}\setminus A\right) = \left(A\cap\overline{\overline{B}}\right)\cup\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right) = \left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right) =$$

$$\left(\left(A\cap B\right)\cup\overline{B}\right)\cap\left(\left(A\cap B\right)\cup\overline{A}\right) = \left(\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\left(B\cup\overline{B}\right)\right)\cap\left(\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(B\cup\overline{A}\right)\right) =$$

$$\left(\left(A\cup\overline{B}\right)\cap U\right)\cap\left(U\cap\left(B\cup\overline{A}\right)\right) = \left(A\cup\overline{B}\right)\cap\left(B\cup\overline{A}\right)$$

ב. רפלקסיביות: לכל $x\in\mathbb{R}$ $(x,x)\in S$, כי $x-x=0$ מספר רציונלי. היחס רפלקסיבי.
סימטריות: נניח כי $(x,y)\in S$, כלומר $x-y=q$ מספר רציונלי. מכאן $y-x=-q$ גם מספר רציונלי ולכן $(y,x)\in S$. היחס סימטרי.
טרנזיטיביות: נניח כי $(x,y)\in S$ ו- $(y,z)\in S$, כלומר $x-y=q$ מספר רציונלי ו- $y-z=r$ מספר רציונלי. נחבר את השוויונים ונקבל $x-z=q+r$ גם מספר רציונלי כסכום של שני מספרים רציונליים. לכן $(x,z)\in S$. היחס טרנזיטיבי.
הוכחנו כי S יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, כלומר S יחס שקילות.
מתקיים:

$$\left[\sqrt{2}\right]_S = \left\{x\in\mathbb{R}\mid x-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}\mid x-\sqrt{2}=q\in\mathbb{Q}\right\} =$$
$$= \left\{x\in\mathbb{R}\mid x=q+\sqrt{2}, q\in\mathbb{Q}\right\} = \left\{q+\sqrt{2}\mid q\in\mathbb{Q}\right\}$$

כלומר $\left[\sqrt{2}\right]_S$ היא קבוצה שמתקבלת מקבוצת כל המספרים הרציונליים על ידי חיבור של $\sqrt{2}$ לכל מספר. לכן $\left|\left[\sqrt{2}\right]_S\right| = \left|\mathbb{Q}\right| = \aleph_0$.

<u>שאלה 3</u> (20 נקודות)   אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') מצאו את העוצמה של קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{Z}$. (ניתן להשתמש באריתמטיקה של עוצמות)

ב. (10 נק') בסמסטר יש 14 שבועות. במהלך הסמסטר סטודנט מקבל 32 מטלות להגשה. לפי נוהל על הסטודנט להגיש לפחות 90% מהמטלות. הוכיחו כי קיים לפחות שבוע אחד במהלך הסמסטר בו על הסטודנט להגיש לפחות שלוש מטלות.

פתרון

א. כל יחס מעל $\mathbb{Z}$ הוא תת קבוצה של $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, לכן קבוצת כל היחסים מעל $\mathbb{Z}$ היא $P\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right)$. מתקיים:

$$\left|P\left(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right)\right| = 2^{|\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|} = 2^{|\mathbb{Z}|\cdot|\mathbb{Z}|} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph.$$

ב. במהלך הסמסטר צריך להגיש לפחות $\lceil 32\cdot 0.9\rceil = 29$ מטלות. לפי עקרון שובך היונים במשך 14 שבועות קיים לפחות שבוע אחד שבו על סטודנט להגיש לפחות $\left\lceil\frac{29}{14}\right\rceil = 3$ מטלות.

שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (14 נק') גל אוכל שני סוגים של ארוחות: ארוחה גדולה וארוחה ענקית. אם הוא אוכל ארוחה גדולה אז זוהי הארוחה היחידה שהוא אוכל באותו היום. אם הוא אוכל ארוחה ענקית אז זוהי הארוחה היחידה שהוא אוכל באותו היום, וביום שלמחרת הוא עדיין שבע ולכן אינו אוכל ביום שלמחרת אלא רק ביום שלאחריו. לגל יש 3 סוגים שונים של ארוחות גדולות ו – 4 סוגים שונים של ארוחות ענקיות. נסמן ב – a_n את מספר הארוחות השונות במשך n ימים.

(1) מצאו את כלל הנסיגה עבור a_n ומצאו את תנאי ההתחלה המתאימים.

(2) פתרו את כלל הנסיגה ומצאו ביטוי מפורש עבור a_n.

ב. (6 נק') נתונות פונקציות $f:A\to A$ ו – $g:A\to A$. הוכיחו שאם ההרכבה $f\circ g\circ f$ היא פונקציה הפיכה, אז הפונקציה f חד – חד ערכית ועל.

פתרון

א. אם רצף הארוחות באורך n מתחיל מארוחה גדולה, אז הוא יכול להמשך על ידי כל רצף תקין של ארוחות באורך $(n-1)$. אם הרצף מתחיל מארוחה ענקית, חייב להיות אחרי זה יום מנוחה ואחר כך אפשר להמשיך על ידי כל רצף תקין של ארוחות באורך $(n-2)$. מכיוון שיש 3 סוגים של ארוחות גדולות ו – 4 סוגים של ארוחות ענקיות מקבלים את כלל הנסיגה הבא:

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

תנאי התחלה: $a_1 = 3+4 = 7$, $a_2 = 3\cdot(3+4)+4 = 25$. אפשר גם לחשב את a_0: $a_2 = 3a_1 + 4a_0$ ומכאן $a_0 = 1$.

המשוואה האופיינית: $x^2 = 3x+4$ והפתרונות שלה: $x=-1$, $x=4$. הפתרונות שונים, לכן הנוסחה המפורשת עבור a_n הינה

$$a_n = A\cdot 4^n + B\cdot\left(-1\right)^n$$

נציב תנאי התחלה ונקבל:

$$a_0 = A+B = 1$$
$$a_1 = 4A - B = 7$$

פותרים את המערכת ומקבלים: $A=\frac{8}{5}$, $B=-\frac{3}{5}$ ולכן לכל n טבעי מתקיים $a_n = \frac{8\cdot 4^n - 3\cdot(-1)^n}{5}$.

ב. נראה תחילה כי f היא חח״ע:

יהיו $x_1,x_2 \in A$, כך ש – $f(x_1)=f(x_2)$. צ״ל: $x_1=x_2$.

$f(x_1)=f(x_2)$, לכן $(f\circ g\circ f)(x_1)=(f\circ g\circ f)(x_2)$. הפונקציה $f\circ g\circ f$ הפיכה, לכן, חח״ע ולכן $x_1=x_2$.

לכן f חח״ע.

נראה כי f היא על:

יהי $y\in A$. צ״ל: קיים $x\in A$, כך ש – $f(x)=y$.

$f\circ g\circ f$ הפיכה ולכן היא על, לכן קיים $a\in A$, כך ש – $(f\circ g\circ f)(a)=f(g(f(a)))=y$. נגדיר: $x=g(f(a))$ ונקבל $f(x)=y$.

לכן f על.

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (10 נק') כמה אפשרויות יש לסדר 5 בנים ו – 5 בנות במעגל, כך שאין שתי בנות אחת ליד השנייה?

ב. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $P\left(A\oplus B\right)=P\left(A\right)\oplus P\left(B\right)$.

<u>פתרון</u>

א. נסדר את הבנות במעגל יש לכך $4!$ אפשרויות. בין כל שתי בנות נשים בן, יש לכך $5!$ אפשרויות. בסך הכל נקבל: $4!\cdot 5!=2880$ אפשרויות.

ב. הטענה שגויה. יותר מזה, לא קיימות קבוצות כאלה בכלל. לפי הגדרת ההפרש הסימטרי:

$$P\left(A\right)\oplus P\left(B\right)=\left(P\left(A\right)\setminus P\left(B\right)\right)\cup\left(P\left(B\right)\setminus P\left(A\right)\right)$$

נזכור שלכל קבוצה X מתקיים $\varnothing\in P\left(X\right)$, ולכן, $\varnothing\in P\left(A\oplus B\right)$, ובנוסף $\varnothing\in P\left(A\right)$ וגם $\varnothing\in P\left(B\right)$, ולכן לפי ההגדרה של הפרש קבוצות, $\varnothing\notin P\left(A\right)\setminus P\left(B\right)$ וגם $\varnothing\notin P\left(B\right)\setminus P\left(A\right)$, ולכן לפי הגדרת האיחוד בין קבוצות, $\varnothing\notin\left(P\left(A\right)\setminus P\left(B\right)\right)\cup\left(P\left(B\right)\setminus P\left(A\right)\right)=P\left(A\right)\oplus P\left(B\right)$. זה מוכיח כי $P\left(A\oplus B\right)\neq P\left(A\right)\oplus P\left(B\right)$.

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות) אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. (12 נק') בכיתה רשומים 47 סטודנטים, מתוכם 25 בנים. 30 סטודנטים, מתוכם 16 בנים הינם צמחונים. 28 סטודנטים עושים ספורט, מתוכם 18 בנים ו – 17 צמחונים. כמו כן 15 בנים הם גם עושים ספורט וגם צמחונים. על ידי שימוש בעקרון הכלה והפרדה חשבו כמה בנות לא צמחוניות שלא עושות ספורט יש בכיתה?

ב. (8 נק') יהיה G עץ בעל $n\geq 5$ קודקודים, כך שיש בו בדיוק 3 עלים. הוכח כי אין בעץ קודקודים שדרגתם גדולה מ – 3.

<u>פתרון</u>

א. נסמן: U - קבוצת כל הסטודנטים בכיתה, A - קבוצת הבנים בכיתה ($\overline{A}$ - קבוצת הבנות), B - קבוצת צמחונים, C - קבוצת הסטודנטים שעושים ספורט. בסימונים האלה צריכים לחשב את $\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right|$. לפי עקרון הכלה והדחה מתקיים:

$$\begin{aligned}\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right| &= |U|-\left(|A|+|B|+|C|\right)+\\ &+\left(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\right)-|A\cap B\cap C| =\\ &= 47-\left(25+30+28\right)+\left(16+18+17\right)-15=0\end{aligned}$$

זה אומר שכל בת בכיתה עושה ספורט או צמחונית.

ב. ידוע כי בעץ בעל n קודקודים יש בדיוק $n-1$ קשתות, ולכן $\sum_{v\in V} deg(v)=2(n-1)=2n-2$. נניח כי קיים קודקוד w בעל דרגה 4 או יותר. יהיו v_1,v_2,v_3 העלים, מכאן מקבלים

$$2n-2=\sum_{v\in V}\deg(v)=3+\deg(w)+\sum_{V\setminus\{v_1,v_2,v_3,w\}}\deg(v)\geq 3+4+2(n-4)=2n-1$$

סתירה. לכן לא קיים קודקוד בעל דרגה גדולה מ – 3.