פתרון חדו"א 1 מועד X

סמסטר ב 2022

שאלה 1:

1. נתונה הסדרה a_n המוגדרת היטב ע"י נוסחת הנסיגה

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$$

הוכיחו כי $1 \le a_n \le 3$ וכי הסדרה מתכנסת. חשבו את גבולה.

פתרון:

- נוכיח באינדוקציה כי עבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $1 \le a_n \le 3$.

עבור $n = 1$ התוצאה ברורה.

נשאר להוכיח כי עבור כל n טבעי מתקיים:

אם $1 \le a_n \le 3$ (הנחה) אז בהכרח גם $1 \le a_{n+1} \le 3$.

אם $1 \le a_n \le 3$ אז $1 \le \frac{3}{a_n} \le 3$ ולכן $1 \le 4 - \frac{3}{a_n} \le 3$. ז"א $1 \le a_{n+1} \le 3$.

מסקנה: הסדרה חסומה.

- נוכיח עכשיו שהסדרה עולה. לשם כך נוכיח כי $a_{n+1} - a_n \ge 0$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} - a_n = 4 - \frac{3}{a_n} - a_n = \frac{4a_n - 3 - a_n^2}{a_n}$$

המכנה תמיד חיובי. נותר לבדוק כי המונה אי שלילי.
נסתכל על הפולינום $p(x) = 4x - 3 - x^2$. לאחר חישוב השורשים נוכל לכתוב אותו באופן הבא:
$p(x) = -(x-1)(x-3) = (1-x)(x-3)$. מפה ניתן להסיק כי

$$4a_n - 3 - a_n^2 = \underbrace{(1-a_n)}_{\le 0}\underbrace{(a_n - 3)}_{\le 0} \ge 0$$

הביטוי $1-a_n \le 0$ מפני שכל איברי הסדרה הם גדולים מ- (או שווים ל-1 (הוכחנו קודם). באותו אופן, ומפני שאיברי הסדרה לא עולים על 3, גם $a_n-3\le 0$.

- הסדרה עולה וחסומה מלמעלה, לכן מתכנסת לגבול סופי L. נחשב אותו:

$$a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}4-\frac{3}{a_n}\Rightarrow L=4-\frac{3}{L}\Rightarrow L^2=4L-3$$

את השורשים של הפולינום הזה אנחנו כבר מכירים: 1,3
הסדרה שלנו מתחילה ב-2 והיא רק עולה, כך שלא יהיו איברים קרובים ל-1.
מסקנה: L=3

2. ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש מקסימום מקומי בנקודה 0 וכי $f(0)=-3$.
הוכיחו או הפריכו: " ל- $|f(x)|$ יש מקסימום מקומי ב-0"

פתרון:

הטענה אינה נכונה: דוגמא נגדית $f(x)=-x^3-3$. הערך המוחלט שלה הוא $|f(x)|=x^2+3$ וב-0 יש מינימום מקומי.

שאלה 2:

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+5\tan^2\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{3\cot^2\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+5\tan^2\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{3\cot^2\left(\frac{1}{n}\right)5\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{5\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+5\tan^2\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{5\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}}\right)^{\lim_{n\to\infty}3\cot^2\left(\frac{1}{n}\right)5\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=e^{15\lim_{n\to\infty}3\cot^2\left(\frac{1}{n}\right)5\tan^2\left(\frac{1}{n}\right)}=e^{15}$$

פתרון:

מדובר בגבול מהצורה $0/0$, אבל במקרה הזה השימוש הישיר בכלל לופיטל לא יכול לעזור לנו, כי הגבול הבא של מנת הנגזרות אינו קיים, וזה תנאי הכרחי במשפט לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sec^2 x}$$

שימו לב כי המכנה שואף ל-1, $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ שואף ל-0 (חסומה כפול אפיסה), אבל כפי שהראנו בסעיף הקודם ,

לפונקציה $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ אין גבול.

האם זה אומר שהגבול הנתון אינו קיים? לאו דווקא! אם אנחנו לא בתנאים של המשפט, אז לא יכולים להסיק ממנו מסקנות.

את הגבול ניתן לחשב ע"י מניפולציות אלגבריות ומשפטים שלמדנו בקורס, באופן הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}tgx}=\frac{0}{1}=0$$

העברנו x מהמונה למכנה, כאשר הוא מחלק במכנה. במצב החדש, המכנה שואף ל-1 (גבול מוכר שהוכחנו בקורס) והמונה שואף ל-0 (חסומה כפול אפיסה). לפי משפט אריתמטיקה של גבולות, אם הגבולות של המונה והמכנה קיימים, והגבול של המכנה שונה מ-0, אז קיים גבול המנה והוא מנת הגבולות.

<u>שאלה 3:</u>

1. חשבו את האינטגרל

$$\int\frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x-1}dx$$

<u>פתרון:</u>

אם נציב $t=e^x, dt=e^x dx$ נקבל כי האינטגרל הנתון שווה ל-

$$\int\frac{t}{t^3+t^2-t-1}dt=\int\frac{t}{(t+1)^2(t-1)}dt$$

נחפש ערכים A,B,C כך ש-

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t-1}$$

עבור כל $t\in\mathbb{R}$

$$1 = A(t-1)(t+1) + B(t-1) + C(t+1)^2$$

אם נציב $t=-1, t=1, t=0$ נקבל כי $A=-\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{4}$. מפה

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)}dt = \frac{1}{4}\left(\int \frac{-1}{t+1}dt + \int \frac{-2}{(t+1)^2}dt + \int \frac{1}{t-1}dt\right) = \frac{1}{4}\left(-\ln|t+1| + \frac{2}{t+1} + \ln|t-1|\right) + C$$

(ע"י הצבה מאוד פשוטה).

בחזרה ל-x מקבלים

$$\frac{1}{4}\left(-\ln\left(e^x+1\right) + \frac{2}{e^x+1} + \ln\left|e^x-1\right|\right) + C$$

פתרון:

2. רוצים להוכיח

$$\frac{y^{2022}-x^{2022}}{y^{2022}} < 2022\ln\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{y^{2022}-x^{2022}}{x^{2022}}$$

נגדיר פונקצית עזר $f(z)=\ln z$, פונקציה רציפה בקטע $\left[x^{2022}, y^{2022}\right]$ וגזירה בקטע $\left(x^{2022}, y^{2022}\right)$.

ממשפט לגרנג' מקבלים כי

$$\frac{f(y^{2022})-f(x^{2022})}{y^{2022}-x^{2022}} = \frac{\ln\left(y^{2022}\right)-\ln\left(x^{2022}\right)}{y^{2022}-x^{2022}} = \frac{2022\left(\ln y - \ln x\right)}{y^{2022}-x^{2022}} = \frac{2022\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{y^{2022}-x^{2022}} = [Lagrange]$$
$$= f'(c) = \frac{1}{c}$$

כאשר $x^{2022} < c < y^{2022}$. במקרה הזה

$$\frac{1}{y^{2022}} < \frac{1}{c} = 2022\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}{y^{2022}-x^{2022}} < \frac{1}{x^{2022}}$$

והתוצאה ברורה.

שאלה 4:

פתרון:

1. נכתוב את הפונקציה שלנו כסכום של שתי פונקציות:

$$F(x)=\int_{3x\cos x}^{x^2+1} te^t dt=\int_{0}^{x^2+1} te^t dt+\int_{3x\cos x}^{0} te^t dt=\int_{0}^{x^2+1} te^t dt-\int_{0}^{3x\cos x} te^t dt$$

נגדירה פונקציות:

$$f(x)=xe^x;G(x)=\int_0^x f(t)dt;\alpha(x)=x^2+1;\beta(x)=3x\cos x$$

הפונקציה $f(x)$ היא רציפה בכל $\mathbb{R}$ ולכן, מהמשפט היסודי הראשון, הפונקציה $G(x)$ גזירה בכל $\mathbb{R}$
הפונקציות α,β הן גם גזירות בכל $\mathbb{R}$.
לכן נוכל לרשום

$$F(x)=G\circ\alpha(x)-G\circ\beta(x)$$

F היא גזירה כהפרש של שתי פונקציות שהן גזירות, כהרכבה של גזירות.
נחשב את הנגזרת של F בעזרת כלל השרשרת:

$$F'(x)=\left(x^2+1\right)e^{x^2+1}\left(2x\right)-\left(3x\cos x\right)e^{3x\cos x}\left(-3x\sin x+3\cos x\right)$$

אם נציב $x=0$ נקבל $F'(0)=0$

פתרון:

1. אם נבנה מלבן עבור כל $x>0$ נקבל כי השטח הוא המכפלה של הבסיס x והגובה e^{-x}.
לכן מחפשים את המינימום של הפונקציה $f\left(x\right)=xe^{-x}$.

אם גוזרים מקבלים $f'(x)=e^{-x}(x-1)$ הפונקציה יורדת עד x=1 ואז עולה. המינימום מתקבל כאשר x=1 והוא $f(1)=\frac{1}{e}$

שאלה 5:

פתרון:

1. תהי $y=f(x)=\cos x$. הסדרה הנתונה שווה לפולינום Taylor-Maclaurin מסדר $2n$:

של הפונקציה f $S_n = 1 - \frac{1}{10^2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{10^4}\frac{1}{4!} - \frac{1}{10^6}\frac{1}{6!} + ... + (-1)^n \frac{1}{10^{2n}}\frac{1}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = T_{2n}(x)$

בנקודה $x = 0.1$. נקבל שהגבול של S_n שווה ל- $\cos(0.1)$ כי:

.2 $$\left|\cos(0.1) - S_n\right| = \left|\cos x - T_{2n}(x)\right| = \frac{\left|f^{(2n+1)}(c)\right|}{(2n+1)!}x^{n+1} = \frac{\left|\pm\sin c\right|}{(n+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \le \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

פתרון:

.2 הפרבולה $y = (x - \sqrt{a})^2$ חותכת את ציר x ב נקודה $(x,y) = (\sqrt{a}, 0)$ ואת ציר y בנקודה $(x,y) = (0,a)$ ולכן:

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{a}\ , 0 \le y \le (x - \sqrt{a})^2\}$$

.3 $$S_1 = \int_0^{\sqrt{a}} (x - \sqrt{a})^2 dx = [Newton - Leibniz] = \left.\frac{(x - \sqrt{a})^3}{3}\right|_0^{\sqrt{a}} = 0 - \frac{(-\sqrt{a})^3}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{a}^3$$

נחשב את השטח השני:

המשוואה $x = y^2 - a^2$ שקולה ל- $y = \pm\sqrt{x + a^2}$. לכן:

$$D_2 = \{(x,y) \mid -a^2 \le x \le 0\ , 0 \le y \le \sqrt{x + a^2}\}$$

.4 $$S_2 = \int_{-a^2}^{0} \sqrt{x + a^2}\, dx = [Newton - Leibniz] = \frac{\left(x + a^2\right)^{3/2}}{3/2}\ \Big|_{-a^2}^{0} = \frac{2}{3}\left(a^3 - 0\right) = \frac{2a^3}{3}$$

נמצא את הפרמטר a לפי הדרישה $S_1 = 4S_2$:

$$S_1 = 4S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\sqrt{a}^3 = 4\frac{2}{3}a^3 \Leftrightarrow a^{\frac{3}{2}} = 8a^3 \Leftrightarrow a^3 = (8a^3)^2 = 64a^6 \Leftrightarrow 1 = 64a^3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

שאלה 6:

.1 מצאו את כל הערכים $x_0 \in \mathbb{R}$ עבורם הישר המשיק בנקודה x_0 לגרף הפונקציה $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$ מקביל לישר $y = 2x + 1$

פתרון:

עלינו לבדוק אם קיימות נקודות בהן ערכה של פונקצית הנגזרת היא 2.

$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2} = 2$$

כדי למצוא את הנקודה עלינו לפתור את המשוואה הריבועית $-x=4-x^2$. הפתרונות הם :

$$x_1=2.56$$
$$x_2=-1.5615$$

אבל רק הפתרון השני שייך לתחום הפונקציה.

תשובה : $x_2=-1.5615$

2. נתונה הפונקציה

$$f(x)=\frac{1-\cos^2 x+\sin x}{\sin x+2}$$

חשבו את המקסימום **המוחלט** של הפונקציה. היעזרו בהצבה $t=\sin x$ ובמשפט ויירשטרס.

פתרון:

קודם כל נשים לב כי ניתן לרשום את הפונקציה בצורה שבה היא תלויה רק ב- $\sin x$:

$$y=f(x)=\frac{\sin^2 x-\sin x}{\sin x+2}$$

נשים לב כי המכנה תמיד חיובי, והפונקציה היא רציפה לכל x .

נבצעה את החלפת המשתנים $t=\sin x$ ונקבל $y=F(t)=\frac{t^2+t}{t+2}$. נשים לב כי $-1\le t\le 1$ ולכן מדובר בפונקציה רציפה בקטע הסגור $[-1,1]$ (מנה של פולינומים כאשר המכנה אינו מתאפס). ממשפט ויירשטרס אנחנו יודעים כי קיימים מקסימום ומינימום מוחלטים.

נבדוק את פנים הקטע :

$$F'(t)=\frac{t^2+4t+2}{(t+2)^2}$$

הפולינום שבמונה מתאפס רק פעם אחת הקטע הנתון, בנקודה $t=-0.5858$. נוסיף את הקצוות ונחשב את ערך הפונקציה בנקודות החשודות.

$$f(-1)=0$$
$$f(1)=\frac{2}{3}$$
$$f(-0.5858)=-0.1715$$

המקסימום המוחלט הוא $\frac{2}{3}$.