1. הוכיחו את הגרירה הטאוטולוגית הבאה

$$\overbrace{A \longrightarrow \neg B}^{1}, \overbrace{C \longrightarrow \neg D}^{2}, \overbrace{A \vee C}^{3}, \overbrace{A \longrightarrow D}^{4}, \overbrace{C \longrightarrow B}^{5} \models \overbrace{D \longrightarrow \neg B}^{6}$$

$$(A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D) \wedge (\neg A \to C) \wedge (A \to D) \wedge (C \to B) \equiv D \to \neg B$$

הנחה בשלילה:

$D \to \neg B = F$ — $D = T$, $\neg B = F \to B = T$

1) $A \to \neg B$. $\neg B = F \to A = F$

2) $C \to \neg D$. $\neg D = F \to C = F$

3) $A \vee C = \neg A \to C$. $T \to F$ ← סתירה!

לכן פסוק ⑥ הינו טאוטולוגיה, וכך הוכחנו שהגרירה הינה טאוטולוגית.

A: F
B: T
C: F
D: T

2. נתבונן **במערכת של נתונים ומסקנה**

$$\alpha_1 : (A \vee B) \longrightarrow (D \longrightarrow C)$$
$$\alpha_2 : B \longrightarrow \neg (C \wedge A)$$
$$\alpha_3 : C \longleftrightarrow (A \wedge D)$$
$$\beta : D \vee (C \wedge B)$$

קיבעו באילו מהמצבים המערכת נמצאת

(א) גרירה טאוטולוגית - כלומר, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \models \beta$

(ב) β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ אולם מתיישבת איתם

(ג) המערכת לא עקבית

הנחה בשלילה על β:

$D \vee (C \wedge B) = F \xrightarrow{\text{פילוג}} (D \vee C) \wedge (D \vee B) \to D = F$

$\alpha_1: (A \vee B) \to (F \to C) \xrightarrow{\text{גרירה}} (A \vee B) \to (T \vee C) \to$ ✓

$\alpha_3: D \vee (C \wedge B) \to F \vee (C \wedge B) \to C = T, B = T$

$\alpha_2: T \to \neg(T \wedge A) \xrightarrow{D.M} = \neg T \vee \neg A = T \to F \vee \neg A = T$

$\to \neg A = T \to A = F$

אין סתירה לכן אין גרירה טאוטולוגית

A: F
B: T
C: T
D: F

3. **מערכת של נתונים ומסקנה** אם החתול ישמור על השמנת, אז אם השמנת מקולקלת החתול לא יגיע הביתה. אם החתול לא יגיע הביתה וגם יהיה שבע אז הוא לא יימצא בית חדש. אם החתול יאכל את השמנת, אז הוא יהיה שבע וגם ימצא בית חדש. לכן, אם החתול ישמור על השמנת, אז אם השמנת מקולקלת, החתול לא יאכל את השמנת.

(א) השתמשו בסימונים שלמטה על מנת להצרין את הנתונים ואת המסקנה.

- K החתול ישמור על השמנת
- Y השמנת מקולקלת
- W החתול לא יגיע הביתה
- R החתול שבע
- P החתול ימצא בית חדש
- H החתול לא יאכל את השמנת

(ב) הוכיחו כי המערכת היא במצב של גרירה טאוטולוגית - כלומר, שהמסקנה נובעת מהנתונים.

1) $Y \to W$

2) $K \to (Y \to W)$

מסקנה

5) $K \to (Y \to H)$

3) $(W \land R) \to \neg P$

4) $\neg H \to (R \land P)$

$Y \to W,\ K \to (Y \to W),\ (W \land R) \to \neg P,\ \neg H \to (R \land P) \models K \to Y \to H$ (K

ב) הנחה משלילה:

$K \to Y \to H = F$

$K \to (Y \to H) \Rightarrow K = T,\quad Y \to H = F \Rightarrow Y = T,\quad H = F$

1) $Y \to W \Rightarrow T \to W \Rightarrow W = T$ ✓

2) $T \to (T \to T)$ ✓

4) $T \to (R \land P) \Rightarrow R = T,\quad P = T$ ✓

3) $(T \land T) \to F \Rightarrow$ סתירה!

1. עבור כל אחד מהפסוקים הבאים ענו על שלושת השאלות הבאות:

(א) כיתבו במילים את הפסוק.

(ב) קיבעו האם הפסוק אמיתי או שיקרי - אם אמיתי יש להוכיח אם הפסוק שיקרי יש למצוא דוגמא נגדית.

(ג) כיתבו את השלילה של הפסוק מבלי להשתמש בקשר השלילה $\neg$.

- I $\forall x \in \mathbb{R}\,((x > 0) \longrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}\,(\exists n \in \mathbb{N}\,(nx \geq y))))$
- II $\exists x \in \mathbb{R}\,(\forall y \in \mathbb{R}\,(x < y^2))$
- III $\forall x \in \mathbb{R}\,(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\,(q_1 \leq x \leq q_2))$

א) I: לכל x השייך לקבוצת הממשיים, אזי אם $x>0$ אזי לכל y השייך לקבוצת הממשיים, קיים n השייך לקבוצת הטבעיים, כך ש $nx \geq y$.

II: קיים x השייך לקבוצת הממשיים, כך שלכל y השייך לממשיים, מתקיים $x<y^2$

III: לכל x השייך לממשיים, קיימים q_1,q_2 השייכים לקבוצת הרציונליים, כך ש $q_1 \leq x \leq q_2$

ב) אינטואיטיבית:

I: אמת.

II: אמת.

III: אמת.

<u>הוכחה: הנחה בשלילה</u>

I: $\forall x \in \mathbb{R}\,((x > 0) \longrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}\,(\exists n \in \mathbb{N}\,(nx \geq y)))) = F$

טענה נגדית (לפי הנחת השלילה) $\exists x \in \mathbb{R}((x>0) \wedge (\exists y \in \mathbb{R}(\forall n \in \mathbb{N}(nx<y)))) = T$

<u>דוגמה נגדית:</u> $x=2, \quad n=2, \quad y=1$

$2 \cdot 2 < 1$

מפריך את הטענה הנגדית, כלומר יש סתירה. לכן מדובר בפסוק אמת.

II: $\exists x \in \mathbb{R}\,(\forall y \in \mathbb{R}\,(x < y^2)) = F$

הוכחה: הנחה בשלילה

$\forall x \in \mathbb{R}\,(\exists y \in \mathbb{R}\,(x \geq y^2)) = T$ טענה נגדית:

דוגמה נגדית: $x = -1,\ \forall y = y^2 \geq 0$

$x < y^2$

נתנו דוגמה ש$^{\text{שגוי}}$טענה הנגדית של ההנחה בשלילה, כלומר יש סתירה להנחה בשלילה, כלומר הפסוק אמת.

III: $\forall x \in \mathbb{R}\,(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\,(q_1 \leq x \leq q_2)) = F$

$\exists x \in \mathbb{R}\,(\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\,(q_1 > x > q_2)) = T$:טענה נגדית

$x = \forall x,\quad q_1 = 10,\ q_2 = 10$

$10 > \forall x > 10 \longrightarrow$ דוגמה נגדית

נתנו דוגמה ש$^{\text{שגוי}}$טענה הנגדית של ההנחה בשלילה, כלומר יש סתירה להנחה בשלילה, כלומר הפסוק אמת.

ג)

I: $\neg\left[\forall x \in \mathbb{R}\,((x > 0) \longrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}\,(\exists n \in \mathbb{N}\,(nx \geq y))))\right]$

$= \exists x \in \mathbb{R}\ \neg((x>0) \to (\forall y \in \mathbb{R}(\exists n \in \mathbb{N}(nx \geq y))))$

גרירה
$= \exists x \in \mathbb{R}\ \neg(\neg(x>0) \vee (\forall y \in \mathbb{R}(\exists n \in \mathbb{N}(nx \geq y))))$

D.M
$= \exists x \in \mathbb{R}\ ((x>0) \wedge \neg(\forall y \in \mathbb{R}(\exists n \in \mathbb{N}(nx \geq y))))$

$= \exists x \in \mathbb{R}\ ((x>0) \wedge (\exists y \in \mathbb{R}\ \neg(\exists n \in \mathbb{N}(nx \geq y))))$

$= \exists x \in \mathbb{R}\ ((x>0) \wedge (\exists y \in \mathbb{R}\ (\forall n \in \mathbb{N}\ \neg(nx \geq y))))$

$= \exists x \in \mathbb{R}\ ((x>0) \wedge (\exists y \in \mathbb{R}\ (\forall n \in \mathbb{N}\ (nx < y))))$

II: $\neg[\exists x \in \mathbb{R} \, (\forall y \in \mathbb{R} \, (x < y^2))]$

$= \forall x \in \mathbb{R} \; \neg(\forall y \in \mathbb{R} \, (x < y^2)) \quad = \forall x \, \mathbb{R} \; (\exists y \in \mathbb{R} \; \neg(x < y^2))$

$= \forall x \in \mathbb{R} \, (\exists y \in \mathbb{R} \, (x \geq y^2))$

III: $\neg[\forall x \in \mathbb{R} \, (\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \, (q_1 \leq x \leq q_2))]$

$= \exists x \in \mathbb{R} \; \neg(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \, (q_1 \leq x \leq q_2)) \quad = \exists x \in \mathbb{R} \; (\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \; \neg(q_1 \leq x \leq q_2))$

$= \exists x \in \mathbb{R} \; (\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \; (q_1 > x > q_2))$

2. **מערכת של נתונים ומסקנה עם כמתים** הצרינו את המערכת הבאה ובידקו האם המסקנה נובעת מהנתונים: כל המדענים הם הגיוניים. אין פילוסופים בריטים שהם הגיוניים. לכן, לא קיימים פילוסופים בריטים שהם מדענים.

1) כל המדענים הם הגיוניים

2) אין פילוסופיים בריטיים שהם הגיוניים

3) מסקנה: לא קיימים פילוסופים בריטיים שהם מדענים. T

x: מדענים

y: פילוסופים בריטיים

D: קבוצת ההגיוניים

1) $\forall x \, (x \in D)$

2) $\forall y \, (y \notin D) = \neg(\exists y \, (y \in D)) = \forall y \, (\neg(y \in D))$

3) $\forall y \, (y = x) = \neg(\exists \, (y = x))$

$(1+2) = \quad x \in D \;\wedge\; y \notin D \longrightarrow \neg(\exists \, (y = x))$

3. הצרינו את המערכת הבאה ובידקו האם המסקנה נובעת מהנתונים: כל הפרחים בגינה הם צהובים או ורודים. לכל הפרחים הצהובים שבגינה יש קוצים. לכל הפרחים הורודים שבגינה יש ריח טוב. לכן, לכל פרח בגינה שאין לו ריח טוב, יש קוצים.

1) כל הפרחים בגינה הם צהובים או ורודים

2) לכל הפרחים הצהובים שבגינה יש קוצים

3) לכל הפרחים הורודים שבגינה יש ריח טוב

4) מסקנה: לכל פרח בגינה שאין לו ריח טוב, יש קוצים

x: פרחים y: יש קוצים z: יש ריח טוב

D: קבוצת הצהובים

T: קבוצת הורודים

1) $\forall x (x \in D \lor x \in T)$

2) $\forall x \in D (x = y)$

3) $\forall x \in T (x = z)$

4) $\forall x ((x \neq z) \to x = y)$ מסקנה:

נניח: $x \neq z$ וכעת:

משפט 3) $\forall x \in T (x = z) \xrightarrow{\text{הפוך}} \neg(\forall x \in T (x = z))$

$= \exists x \in T \neg (x = z) = \exists x \in T (x \neq z) \to$ משפט הפוך אומר בהכרח לא נכון.

מסקנה מ-3: $x \neq z \to x \notin T$

משפט 1) $\forall x (x \in D \lor \underbrace{x \in T}_{F})$ ובגלל ש- $x \notin T$ אז $x \in T = F$

נובע ש- $x \in D = T$

משפט 2) $\forall x \in D (x = y) \to$ לפי ההגדרה הנתונה ל- $x = y$

לכן משפט והמסקנה הזו נכון. לכל $x \neq z$ נקבל $y = x$.

$$\forall x\,((x \neq z) \longrightarrow x = y))$$

4. יהיו Q, P, I שלוש תבניות פסוק בעלות שני משתנים כל אחת. נתון כי

$\alpha_1 : \forall x \forall y \forall z\, (Q(x,y) \wedge Q(y,z) \longrightarrow Q(x,z))$

$\alpha_2 : \forall x \forall y\, (Q(x,y) \vee Q(y,x))$

$\alpha_3 : \forall x \forall y\, (I(x,y) \longleftrightarrow (Q(x,y) \wedge Q(y,x)))$

$\alpha_4 : \forall x \forall y\, (P(x,y) \longleftrightarrow \neg Q(y,x))$ $=$

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות:

(א) $\forall x \forall y\, (I(x,y) \longrightarrow I(y,x))$

(ב) $\forall x \forall y \forall z\, ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \longrightarrow P(x,z))$

(ג) $\forall x \forall y \forall z\, ((I(x,y) \wedge P(y,z))) \longrightarrow P(x,z))$

$$(c)\ \alpha_3 : \forall x \forall y\, (I(x,y) \rightarrow \underbrace{(Q(x,y) \wedge Q(y,x)))}_{=})$$

קומוטיביות $\wedge$

$$\wedge \ \mathcal{l}e = \forall x \forall y\, (I(y,x) \rightarrow \overbrace{(Q(y,x) \wedge Q(x,y)))}$$