יונתן כהן
אלגברה לינארית
תרגול מספר 9

בסיס ומימד
בסיסים לתתי מרחבים
השלמת קבוצה בת"ל לבסיס

בסיס ומימד

משפט: V מרחב וקטורי, $\dim V = n$. $A=\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה בת k וקטורים ב V.

1. A פורשת $\Leftarrow$ $k \ge n$.
   $k < n$ $\Leftarrow$ A לא פורשת.
2. A בת"ל $\Leftarrow$ $k \le n$.
   $k > n$ $\Leftarrow$ A לא בת"ל.
3. A בסיס $\Leftarrow$ $k = n$.
   $k \neq n$ $\Leftarrow$ A לא בסיס.
4. אם $k = n$ אז: A בת"ל $\Leftrightarrow$ A פורשת $\Leftrightarrow$ A בסיס.

מימדים של מרחבים נפוצים: $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$, $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

.1

$\mathbf{v}_1=(1,1,1)\ ,\ \mathbf{v}_2=(1,2,3)\ ,\ \mathbf{v}_3=(1,4,9)\ ,\ \mathbf{v}_4=(1,8,27)$.

א. האם $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_4\}$ בת״ל ? פורשת את $\mathbb{R}^3$? בסיס של $\mathbb{R}^3$?

ב. האם $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_3\}$ בת״ל ? פורשת את $\mathbb{R}^3$? בסיס של $\mathbb{R}^3$?

א.

פתרון I :

ניתן לבדוק באופן ישיר אם הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_4\}$ בלתי תלויה לינארית, האם הקבוצה פורשת את $\mathbb{R}^3$, ומכאן גם להסיק האם הקבוצה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

מתקבל שהקבוצה פורשת את המרחב $\mathbb{R}^3$ אך היא תלויה לינארית (כלומר אינה בלתי תלויה לינארית), ולכן אינה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון II :

הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_4\}$ היא קבוצה בת 4 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ שמימדו 3, ולכן (לפי משפט) היא תלויה לינארית.

הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_4\}$ היא קבוצה בת 4 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ שמימדו 3, ולכן (לפי משפט) היא אינה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ב.

פתרון I :

ניתן לבדוק באופן ישיר אם הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_3\}$ בלתי תלויה לינארית, האם הקבוצה פורשת את $\mathbb{R}^3$, ומכאן גם להסיק האם הקבוצה בסיס של $\mathbb{R}^3$.

פתרון II :

הקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_3\}$ היא קבוצה בת 3 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ שמימדו 3, ולכן (לפי משפט) היא בלתי תלויה לינארית אם ורק אם היא פורשת את $\mathbb{R}^3$ אם ורק אם היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.

נבדוק אם הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

נבדוק עבור איזה ערכים של x,y,z מתקיים $x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$.

נבדוק את מטריצת המקדמים של המערכת, המטריצה שעמודותיה הן $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{array}$$
$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}\overset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1}}{=}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{vmatrix}\overset{R_3\to R_3-2R_2}{=}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{vmatrix}\overset{\text{TRIANGULAR}}{=}1\cdot1\cdot2=2\neq0$$

הדטרמיננט של המטריצה שונה מ 0 ולכן המטריצה הפיכה, ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

ולכן $x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$ מתקיים אך ורק כאשר $x=y=z=0$, ומכאן שהקבוצה $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

כאמור זו קבוצה בת 3 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ שמימדו 3, ולכן (לפי משפט) נובע שהיא פורשת את $\mathbb{R}^3$ וגם שהיא בסיס של $\mathbb{R}^3$.

.2

$p(x)=x+1\ ,\ q(x)=x^3+x\ ,\ r(x)=x^2+x\ ,\ s(x)=x^3-1$.

א. האם $\{p,q,r,s\}$ בת"ל ? פורשת את $P_3(\mathbb{R})$? בסיס של $P_3(\mathbb{R})$?

ב. האם $\{p,q,r\}$ בת"ל ? פורשת את $P_3(\mathbb{R})$? בסיס של $P_3(\mathbb{R})$?

א.

פתרון I :

ניתן לבדוק באופן ישיר אם הקבוצה $\{p,q,r,s\}$ בלתי תלויה לינארית, האם הקבוצה פורשת את $P_3(\mathbb{R})$, ומכאן גם להסיק האם הקבוצה בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

פתרון II :

הקבוצה $\{p,q,r,s\}$ היא קבוצה בת 4 וקטורים במרחב $P_3(\mathbb{R})$ שמימדו 4 , ולכן (לפי משפט) היא בלתי תלויה לינארית אם ורק אם היא פורשת את $P_3(\mathbb{R})$ אם ורק אם היא בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

נבדוק אם הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

נבדוק עבור איזה ערכים של $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ מתקיים $\alpha p(x)+\beta q(x)+\gamma r(x)+\delta s(x)=0$.

נבדוק את מטריצת המקדמים של המערכת, המטריצה שעמודותיה הן p,q,r,s .

$$\begin{array}{c} \\ 1\rightarrow \\ x\rightarrow \\ x^2\rightarrow \\ x^3\rightarrow \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & q & r & s \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \overset{\text{ROW } 3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3\rightarrow C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{ROW } 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

הדטרמיננט של המטריצה שווה ל 0 ולכן המטריצה אינה הפיכה, ומכאן שלמערכת יש פתרון לא טריביאלי.

כלומר קיימים $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ שלא כולם 0 כך שמתקיים $\alpha p(x)+\beta q(x)+\gamma r(x)+\delta s(x)=0$, ומכאן שהקבוצה $\{p,q,r,s\}$ היא תלויה לינארית.

כאמור זו קבוצה בת 4 וקטורים במרחב $P_3(\mathbb{R})$ שמימדו 4 , ולכן (לפי משפט) נובע שהיא אינה פורשת את $P_3(\mathbb{R})$ וגם שהיא אינה בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

ב.

פתרון I :

ניתן לבדוק באופן ישיר אם הקבוצה $\{p,q,r\}$ בלתי תלויה לינארית, האם הקבוצה פורשת את $P_3(\mathbb{R})$, ומכאן גם להסיק האם הקבוצה בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

פתרון II :

הקבוצה $\{p,q,r\}$ היא קבוצה בת 3 וקטורים במרחב $P_3(\mathbb{R})$ שמימדו 4 , ולכן (לפי משפט) היא אינה פורשת את $P_3(\mathbb{R})$ ואינה בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

בסיסים לתתי מרחבים

.1

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{bmatrix}$.

למצוא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של A / מרחב הפתרונות של המערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ / הגרעין של A ($\ker A$).

A מטריצה בת 4 עמודות.

מרחב הפתרונות של המערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^4$.

נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-5R_1\\R_4\to R_4-9R_1\\R_5\to R_5-13R_5}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{R_1\to R_1-R_2\\R_3\to R_3-R_2\\R_4\to R_4-R_2\\R_5\to R_5-R_2}}\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(נניח שהמשתנים הם w,x,y,z)

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$, ולכן המשתנים w,x הם משתנים קשורים, y,z משתנים חופשיים.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases}w \qquad -y-2z=0\\ \quad x+2y+3z=0\end{cases}\Rightarrow\quad w=y+2z\ ,\ x=-2y-3z$$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(w,x,y,z)=(y+2z,-2y-3z,y,z)=$$
$$=y(1,-2,1,0)+z(2,-3,0,1)$$

מהפתרון הכללי נובע שבסיס של מרחב הפתרונות $\ker A$ נתון ע"י

$\{(1,-2,1,0)\ ,\ (2,-3,0,1)\}$

מימד מרחב הפתרונות $\ker A$ הוא

$\dim\ker A=2$

הערה:

A מטריצה מסדר $m\times n$.
מימד מרחב הפתרונות של A נתון ע"י
$\dim\ker A=n-\mathrm{rank}(A)$

A מטריצה מסדר 5×4 כלומר $n=4$.

מהמטריצה המדורגת נובע שהדרגה של A היא $\mathrm{rank}\,A=2$ ולכן מימד מרחב הפתרונות הוא

$\dim\ker A=n-\mathrm{rank}(A)=4-2=2$

.2

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{bmatrix}$.

למצוא בסיס ומימד למרחב הפתרונות של A / מרחב הפתרונות של המערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ / הגרעין של A ($\ker A$).

A מטריצה בת 3 עמודות.

מרחב הפתרונות של המערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&8\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

בכל העמודות $1-3$ יש איברים פותחים, ולכן כל המשתנים הם משתנים קשורים.

ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

ולכן מרחב הפתרונות $\ker A$ הוא

$$\{(0,0,0)\}$$

זהו תת מרחב האפס של $\mathbb{R}^3$.

בסיס של מרחב הפתרונות $\ker A$ הוא הקבוצה הריקה

$$\{\ \}=\phi$$

מימד מרחב הפתרונות $\ker A$ הוא

$$\dim\ker A=0$$

הערה:

A מטריצה מסדר 3×3 כלומר $n=3$.

מהמטריצה המדורגת נובע שהדרגה של A היא $\operatorname{rank} A=3$ ולכן מימד מרחב הפתרונות הוא

$$\dim\ker A=n-\operatorname{rank}(A)=3-3=0$$

.3

נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}$.

א. למצוא בסיס ומימד למרחב העמודות של A , $\mathrm{col}(A)$.

ב. למצוא בסיס ומימד למרחב השורות של A , $\mathrm{row}(A)$.

א.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}$$

מרחב העמודות של A הוא

$$\mathrm{col}(A)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

נדרג את המטריצה A לצורה מדורגת.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-5R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$.

ולכן נובע שעמודות $1,2$ של המריצה A פורשות את מרחב העמודות $\mathrm{col}(A)$ וגם שהן בלתי תלויות לינארית, כלומר הן בסיס של מרחב עמודות $\mathrm{col}(A)$.

כלומר בסיס של $\mathrm{col}(A)$ נתון ע"י

$$\{(1,1,5)\ ,\ (1,2,6)\}$$

מימד מרחב העמודות $\mathrm{col}(A)$ הוא

$$\dim\mathrm{col}(A)=2$$

הערה:

מימד מרחב העמודות של A נתון ע"י $\dim\mathrm{col}(A)=\mathrm{rank}(A)$

מהמטריצה המדורגת נובע שהדרגה של A היא $\mathrm{rank}\,A=2$ ולכן מימד מרחב העמודות הוא

$$\dim\mathrm{col}(A)=\mathrm{rank}(A)=2$$

ב.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}$$

מרחב השורות של A הוא

$$\text{row}(A)=\text{span}\left\{(1,1,1,1)\ ,\ (1,2,3,4)\ ,\ (5,6,7,8)\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$$

השורות של A הן העמודות של A^T, ולכן מרחב שורות של A שווה למרחב העמודות של A^T.

נדרג את המטריצה A^T לצורה מדורגת.

$$A^T=\begin{bmatrix}1&1&5\\1&2&6\\1&3&7\\1&4&8\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1\\R_4\to R_4-R_1}}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&1\\0&2&2\\0&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{R_3\to R_3-2R_2\\R_4\to R_4-3R_2}}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$.

ולכן נובע שעמודות $1,2$ של המריצה A^T הן בסיס של מרחב עמודות של A^T, $\text{col}(A^T)$, כלומר הן בסיס של מרחב השורות של A, $\text{row}(A)$.

כלומר בסיס של $\text{row}(A)$ נתון ע"י

$$\{(1,1,1,1)\ ,\ (1,2,3,4)\}$$

מימד מרחב השורות $\text{col}(A)$ הוא

$$\dim\text{row}(A)=2$$

הערה:

מימד מרחב השורות של A נתון ע"י $\dim\text{row}(A)=\text{rank}(A)$

מהמטריצה המדורגת של A (מהסעיף הקודם) נובע שהדרגה של A היא $\text{rank}\,A=2$ ולכן מימד מרחב השורות הוא

$$\dim\text{row}(A)=\text{rank}(A)=2$$

.4

$. W = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$

למצוא בסיס ומימד ל W.

כדי למצוא בסיס ל W, נבנה מטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים הפורשים את W $[w_1, w_2, w_3, w_4]$.

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \to \\ (1,2) \to \\ (2,1) \to \\ (2,2) \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 4R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -10 & -4 \\ 0 & -6 & -15 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1, 2$.

ולכן נובע שעמודות $1, 2$ של המריצה A הן בסיס של מרחב עמודות $\operatorname{col}(A)$.

ולכן הוקטורים (המטריצות) המתאימים לעמודות $1, 2$ של המריצה A הן בסיס של תת המרחב W.

כלומר בסיס של W נתון ע"י

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim W = 2$$

.5

W הוא תת מרחב כל המטריצות מסדר 2×2 שבהן סכום אברי האלכסון הראשי שווה לסכום אברי האלכסון המשני, וסכום כל האיברים שווה ל 0.

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\middle| a+d=b+c\ ,\ a+b+c+d=0\right\}$$

למצוא ל W קבוצה פורשת, בסיס ומימד.

תת המרחב W הוא תת המרחב של כל המטריצות מסדר 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ המקיימות את התנאים

$$\begin{cases} a-b-c+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$$

זו מערכת לינארית הומוגנית ב 4 הנעלמים a,b,c,d.

נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$, ולכן המשתנים a,b הם משתנים קשורים, c,d משתנים חופשיים.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases} a \qquad +d=0 \\ \quad b+c \qquad =0 \end{cases} \Rightarrow\quad a=-d\ ,\ b=-c$$

ולכן הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$(-d,-c,c,d)=c(0,-1,1,0)+d(-1,0,0,1)$$

ומכאן שוקטור כללי ב W הוא מהצורה

$$\begin{bmatrix} -d & -c \\ c & d\end{bmatrix}$$

נשים לב שניתן לרשום את האיבר הכללי ב W ב'כתיב וקטורי' כך :

$$\begin{bmatrix} -d & -c \\ c & d\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ומשמעות הדבר היא ש

$$W=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

לשם נוחות נסמן

$$w_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\ ,\ w_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

כלומר הקבוצה $\{w_1,w_2\}$ פורשת את W.

ניתן לבדוק שהקבוצה $\{w_1,w_2\}$ היא בת"ל.

זו קבוצה בת 2 וקטורים, ורואים שהוקטורים w_1,w_2 אינם פרופורציוניים, ולכן הקבוצה $\{w_1,w_2\}$ היא בת"ל.

לסיכום הקבוצה $\{w_1,w_2\}$ בת"ל ופורשת את W, ולכן היא בסיס של W.

$$\dim W=2$$

.6

W הוא **קבוצת** כל המטריצות מסדר 2×2 שבהן סכום אברי האלכסון הראשי שווה לסכום אברי האלכסון המשני, וסכום כל האיברים שווה ל 0.

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\middle| a+d=b+c\ ,\ a+b+c+d=0\right\}$$

להוכיח ש W תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, למצוא לו קבוצה פורשת, בסיס ומימד.

הערה:

ההבדל בין שאלה זו לשאלה הקודמת היא שכאן לא נתון ש W תת מרחב, צריך להוכיח זאת.
דרך הפתרון כמעט זהה לשאלה הקודמת.

הקבוצה W היא קבוצת כל המטריצות מסדר 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ המקיימות את התנאים

$$\begin{cases} a-b-c+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$$

כמו בפתרון השאלה הקודמת, מתקבל שוקטור כללי ב W הוא מהצורה

$$\begin{bmatrix} -d & -c \\ c & d \end{bmatrix}$$

נשים לב שניתן לרשום את האיבר הכללי ב W ב'כתיב וקטורי' כך:

$$\begin{bmatrix} -d & -c \\ c & d \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ומשמעות הדבר היא ש

$$W=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

קיבלנו ש W היא תת מרחב נפרש (span), ולכן W תת מרחב של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

לשם נוחות נסמן

$$w_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ ,\ w_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כלומר הקבוצה $\{w_1,w_2\}$ פורשת את W.

כמן בפתרון הקודם מסבירים שהקבוצה $\{w_1,w_2\}$ בת"ל ופורשת את W, ולכן היא בסיס של W.

$$\dim W=2$$

השלמת קבוצה בת"ל לבסיס

.1

. $p(x)=1+2x+4x^2$, $q(x)=1+4x+8x^2$

לבדוק שהקבוצה $\{p,q\}$ בת"ל ולמצוא השלמה שלה לבסיס של $P_2(\mathbb{R})$.

כדי לבדוק האם הקבוצה $\{p,q\}$ בת"ל, נדרג את המטריצה שעמודותיה הן p,q .

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\to \\ x\to \\ x^2\to \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_3\to R_3-4R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

בכל העמודות $1,2$ יש איברים פותחים, ולכן כל המשתנים הם משתנים קשורים. ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

ולכן הקבוצה $\{p,q\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

הסבר נוסף:

הוקטורים p,q אינם פרופורציוניים, ולכן הקבוצה $\{p,q\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

כדי למצוא השלמה של הקבוצה $\{p,q\}$ לבסיס של $P_2(\mathbb{R})$, נדרג מטריצה שהעמודות שלה הן $p,q\,|\,1,x,x^2$ (הוקטורים p,q ובנוסף וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $P_2(\mathbb{R})$), כלומר המטריצה $[p,q\,|\,I]$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} p & q & 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\to \\ x\to \\ x^2\to \end{array} & \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3\to R_3-4R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,4$.

ולכן נובע שבסיס של $P_2(\mathbb{R})$ נתון ע"י הוקטורים המתאימים לעמודות $1,2,4$, כלומר

$\{p,q,x\}$

כלומר ההשלמה של הקבוצה $\{p,q\}$ לבסיס של $P_2(\mathbb{R})$ היא $\{x\}$.