4. במפעל התקבל משלוח של 100 פריטים שחלקם עלול להיות פגומים, כדי להחליט מה לעשות עם המשלוח: לקבל אותו למחסן המפעל או להחזירו ליצרן, נוקטים במדיניות הבאה:
בוחרים חמישה פריטים באקראי ובודקים אותם: אם יש יותר מפריט אחד פגום במדגם זה מחזירים את כל המשלוח ליצרן, ואחרת מאשרים את קבלתו למחסן.

א. אם בתהליך הייצור של הפריטים כל פריט הוא תקין בהסתברות 0.8, ללא תלות במצבם של יתר הפריטים, מהי ההסתברות לכך שחבילה של 100 פריטים תהיה חבילה "גרועה" כלומר שיהיו בה לפחות 20 פריטים פגומים?

ב. אם מתקבל משלוח "גרוע" שבו 30 פריטים פגומים – מה ההסתברות שהוא יאושר ויתקבל למחסן? (הסתברות זו נקראת "סיכון הצרכן").

ג. אם מתקבל משלוח "טוב" שבו רק 5 פריטים פגומים – מה ההסתברות שהוא יוחזר ליצרן? (הסתברות זו נקראת "סיכון היצרן").

א) נשתמש במודל ההסתברות הבינומי. נגדיר:

$p = \text{פריט תקין} = 0.8$

$q = \text{פריט פגום} = 0.2$

נרצה לחשב:

$$P(q \geq 20) = 1-\sum_{n=0}^{19} P(n) = 1-\sum_{k=0}^{19}\binom{100}{k}\cdot p^{100-k}\cdot q^{k}$$

$$= 1-\sum_{k=0}^{19}\binom{100}{k}\cdot 0.8^{100-k}\cdot 0.2^{k}$$

ב) נתון:

$$\begin{cases} G = 70 \\ B = 30 \end{cases}$$

$P(G) = 7/10$

$P(B) = 3/10$

כעת בוחרים באקראי 5 פריטים. נרצה לחשב:

$$P(B \leq 1) = P(0) + P(1)$$

$$P(0) = 7/10 \cdot 69/99 \cdot 68/98 \cdot 67/97 \cdot 66/96 = 0.1607$$

$$P(1) = \binom{5}{1}\cdot 7/10 \cdot 69/99 \cdot 68/98 \cdot 67/97 \cdot 30/96 = 0.3653$$

$$\Longrightarrow P(B \leq 1) = 0.1607 + 0.3653 = 0.526$$

(ג)

נשתמש במודל ההיפר - גאומטרי. הפעם k,A=good

95 - R , 100 - N

4,5 - k , 5 - n

$$P(k\leq 3)=1-[P(4)+P(5)]=1-\frac{\binom{95}{4}\cdot\binom{100-95}{5-4}}{\binom{100}{5}}-\frac{\binom{95}{5}\cdot\binom{100-95}{5-5}}{\binom{100}{5}}$$

$$=1-\frac{\binom{95}{4}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{100}{5}}-\frac{\binom{95}{5}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{100}{5}}$$

$$=1-0.2114-0.7695=0.019$$

(ב)

<u>פתרון יעיל יותר:</u> נשתמש במודל ההיפר - גאומטרי.

30 - R , 100 - N

0,1 - k , 5 - n

$$P(k\leq 1)=P(0)+P(1)=\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{100-30}{5-0}}{\binom{100}{5}}+\frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{100-30}{5-1}}{\binom{100}{5}}$$

$$=\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{70}{5}}{\binom{100}{5}}+\frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{70}{4}}{\binom{100}{5}}$$

$$=0.1607+0.3653=0.526$$

7. הערכה מקובלת היא כי בלידת ילדים ההסתברות לילוד זכר שווה להסתברות לילוד נקבה, וכן כי מינם של ילודים שונים (ואפילו לאותם הורים) הם בלתי תלויים זה בזה. יהי X מספר הילדים שיהיו לזוג הורים שהחליטו להמשיך ולהוליד ילדים עד שיהיה להם לפחות ילד אחד מכל מין,

א. מהי פונקציית ההסתברות של X?

ב. מהי התוחלת ומהי השונות של X?

בתרבויות מסוימות מקובל להוליד ילדים עד לבן הראשון, ואז להפסיק,

ג. מהי תוחלת מספר הבנים במשפחה כזו, ומהי תוחלת מספר הבנות במשפחה כזו?

א) 1) נרשום את התומך של X: $R_X = \{2,3,4,\dots\}$

נניח שבלידה הראשונה התקבל מין y, ונגדיר הצלחה כלידת מין z

מתוך הלידות הבאות. נסמן $X =$ מס' הלידות עד להצלחה.

2) נסמן $y =$ מס' הלידות אחרי הילד הראשון.

מדובר בהתפלגות גאומטרית $X \sim G(\frac{1}{2})$ $\quad p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$

3) פונקציית ההתפלגות היא:

$$P(y=k) = p\cdot q^{k-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}$$

$$P(x=k=y+1) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ב) 1) נחשב את התוחלת של X:

$$E[X] = E[1+y] = 1+\tfrac{1}{p} = 1+2 = 3$$

2) נחשב את השונות של X:

$$V(x) = V(1+y) = V(y) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

ג) מספר הבנים הוא בוודאות 1, לכן תוחלת הבנים היא 1.

לגבי הבנות, שוב מדובר בהתפלגות גאומטרית,

8. מספר האנשים הנכנסים לבנק בכל דקה הוא מ"מ בעל התפלגות פואסון עם תוחלת של 0.5 (אנשים), מקובל גם להניח כי אין תלות בין מספר הנכנסים לבנק בדקות שונות;

א. מהי ההסתברות לכך שבין 10:00 ל 10:01 לא יכנס לבנק אף אחד? בדיוק אדם אחד? לפחות שלושה אנשים?

ב. מהי ההסתברות לכך שאף אדם לא ייכנס בין 12:00 ל - 12:02 ? שבדיוק שני אנשים ייכנסו בזמן זה ? השווה את ההסתברות שהתקבלה להסתברות שתחושב בהנחה שמספר האנשים הנכנסים בפרק זמן של 2 דקות הוא פואסוני עם תוחלת כפולה.

$$X \sim Pois(\lambda), \quad E[X] = \lambda = \tfrac{1}{2} \implies X \sim Pois(\tfrac{1}{2})$$

א 1) ידוע כי התפלגות מס' אנשים שנכנסו בדקה מסוימת היא:

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^k}{k!}$$

2) נרצה לחשב:

- $P(X=0) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^0}{0!} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6074$
- $P(X=1) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^1}{1!} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.3037$
- $P(X \geq 3) = 1 - P(2) - P(1) - P(0)$

$$\implies P(X=2) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} = \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.076$$

$$\implies P(X \geq 3) = 1 - \frac{13}{8} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.013$$

ב 1)

- $P(Z=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) \approx (0.6074)^2 = 0.369$

2)

- $P(Z=2) = 2 \cdot P(X=0) \cdot P(Y=2) + P(X=1) \cdot P(Y=1)$

$$\implies P(Z=2) = 2 \cdot 0.6074 \cdot 0.076 + (0.3037)^2$$

$$= 0.0923 + 0.0922 = 0.1845$$

עבור תוחלת כפולה: $\lambda = 1$

$$P(X=k) = e^{-1} \cdot \frac{1^k}{k!} =$$

15. כד מכיל 10 כדורים לבנים ו- 20 כדורים אדומים. מוציאים 5 כדורים, עם החזרה.

א. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק שלושה כדורים לבנים?

ב. מה ההסתברות שהוצאו יותר משלושה כדורים לבנים?

ג. מה ההסתברות שכולם אדומים?

ד. מה תוחלת מספר הכדורים האדומים שהוצאו?

ה. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 4 כדורים אדומים אם ידוע שהוצא לפחות כדור אדום אחד?

ו. כעת מוציאים 5 כדורים ללא החזרה, חזרו על סעיפים א-ה.

מדובר על התפלגות בינומית.

נסמן: $X=$ מס' הכדורים הלבנים שיצאו $\quad X\sim Bin(5,\frac{1}{3})$

$Y=5-X=$ מס' הכדורים האדומים שיצאו $\quad Y\sim Bin(5,\frac{2}{3})$

א) נכתב למטה:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-3}=10\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{4}{9}=\frac{40}{243}\approx 0.1646$$

ב) נכתב למטה:

$$P(X>3)=P(4)+P(5)$$

- $P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=1\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{2}{3}=\ldots\approx 0.041$
- $P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\cdot\frac{1}{3^5}\cdot 1=\ldots\approx 0.0041$

$$\Longrightarrow P(X>3)=0.041+0.0041=0.0452$$

$$\approx 0.0454$$

ג) נכתב למטה:

$$P(Y=5)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\approx 0.1316$$

ד) נרצה למצוא:

$$E[y] = n \cdot p = 5 \cdot \tfrac{2}{3} = 3\tfrac{1}{3}$$

ה)

מוצגים 5 כדורים. צריך למצוא:

$$P(y=4 \mid y \geq 1) = \frac{P(y=4 \cap y \geq 1)}{P(y \geq 1)} = \frac{P(y=4)}{P(y=4)+P(y \neq 4 \cap y \geq 1)}$$

$$= \frac{0.3292}{2 \cdot 0.3292 + 0.0411 + 0.1646 + 0.1316} = \frac{0.3292}{0.9957} \approx 0.3306$$

כעת ללא החזרות: מדובר בהתפלגות היפר-גאומטרית.

נסמן: $X=$ מס' הכדורים הלבנים שיצאו $\qquad X\sim HG(\overset{N}{30},\overset{R}{10},\overset{n}{5})$

$Y=$ $5-X$ $=$ מס' הכדורים האדומים שיצאו $\qquad Y\sim HG(30,20,5)$

(א) נרכז למטה:

$$P(x=3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{30-10}{5-3}}{\binom{30}{5}}=\frac{120\cdot 190}{142{,}506}\approx 0.16$$

(ב) נרכז למטה:

$$P(x>3)=P(4)+P(5)$$

- $P(x=4)=\frac{\binom{10}{4}\binom{30-10}{5-4}}{\binom{30}{5}}=\frac{4{,}200}{142{,}506}\approx 0.0298$
- $P(x=5)=\frac{\binom{10}{5}\binom{30-10}{5-5}}{\binom{30}{5}}=\frac{252}{142{,}506}\approx 0.0018$

$$\Longrightarrow P(x>3)=0.0298+0.0018$$
$$\approx 0.0312$$

(ג) נרכז למטה:

$$P(y=5)=\frac{\binom{20}{5}\binom{30-20}{5-5}}{\binom{30}{5}}=\frac{15{,}504}{142{,}506}\approx 0.1088$$

ד) נרצה לחשב:

$$E[y] = \frac{n \cdot R}{N} = \frac{5 \cdot 20}{30} = 3\tfrac{1}{3}$$

ה)

מוציאים 5 כדורים. צריך לחשב:

$$P(y=4 \mid y \geq 1) = \frac{P(y=4 \cap y \geq 1)}{P(y \geq 1)} = \frac{P(y=4)}{P(y=4) + P(y \neq 4 \cap y \geq 1)}$$

$$= \frac{0.334}{0.334 + 0.0295 + 0.16 + 0.36 + 0.1088} = \frac{0.334}{0.9923} \approx 0.3314$$

1) תיבה מכילה כרטיסים ועליהם המספרים 0,1,2,...,N. מוציאים באקראי כרטיס. יהא Y המספר על הכרטיס שהוצא.

א) מהי פונקצית ההסתברות של Y?

ב) מהן התוחלת והשונות של Y?

מדובר בהתפלגות אחידה.

א) פונקציית ההסתברות של y היא:

$$P(y=k) = \frac{1}{N}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N$$

ב)

$$E[y] = \frac{1+N}{2}$$

$$V[y] = \frac{N^2-1}{12}$$

3) הנח כי הסיכוי להולדת בן שווה לזה של הולדת בת. במשפחה יש שמונה ילדים, חשב את ההסתברויות:

א) בדיוק שלושה בנים.

ב) לפחות בן אחד.

ג) לכל היותר בן אחד.

ד) ידוע כי יש שני בנות לפחות. מה ההסתברות לשבע בנות?

בינומית. $F, M \sim Bin(\frac{1}{2})$ **Male**, **Female**

א) $$P(M=3) = \binom{8}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \binom{8}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 = \frac{56}{256} \approx 0.2188$$

ב) $$P(M\geqslant 1) = 1 - P(M=0)$$

$$= 1 - \binom{8}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 = 1 - \frac{1}{256} \approx 0.996$$

ג) $$P(M\leqslant 1) = P(M=0) + P(M=1)$$

$$= \binom{8}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} + \frac{8}{256} \approx 0.0351$$

ד) $$P(F=7 \mid F\geqslant 2) = \frac{P(F=7)}{P(F=7)+P(F<2)} = \frac{0.0312}{0.0312+0.0351} \approx 0.47$$

5) מטבע הוגנת מוטלת 100 פעמים. בכל פעם שהמטבע מראה "עץ" שמעון משלם לאבי 5 ₪, ובכל פעם שהיא מראה "פלי" אבי משלם לשמעון 3 ₪. נגדיר מ"מ X המונה את מספר הפעמים שיצא "עץ".

א) מה ההתפלגות, התוחלת והשונות של X?
ב) מה תוחלת ושונות הרווח של שמעון?

התומך של X: $R_x = \{0,1,\dots,100\}$

מדובר בהתפלגות בינומית $X \sim Bin(100, \frac{1}{2})$

$$P(X=k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$E[X] = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$$

ב) נגדיר מ"מ Z = הרווח של שמעון:

$$Z = -5X + 3(100-X)$$

$$Z = 300 - 8X$$

כעת:

$$E[Z] = E[300-8X] = 300 - 8 \cdot E[X] = -100$$

$$V(Z) = V(300-8X) = (-8)^2 \cdot V(X) = 64 \cdot 25 = 1{,}600$$