שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + kx_4 &= k \\ x_2 - 4x_3 &= 1 \\ kx_1 + 2x_2 - 3x_3 + kx_4 &= 2 \end{aligned}$$

(א) מצאו את הערכים של הפרמטר k עבורו למערכת יש פתרון יחיד\אינסוף פתרונות\אין פתרון.

(ב) מצאו עבור אילו ערכים של k וקטור העמודה $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

2. **(10 נק)** תהא A מטריצה מסדר 3×3 מעל הממשיים. נתון כי סכום איברי האלכסון הראשי של המטריצה AA^T שווה ל 0. מיצאו את המטריצה A.

<u>פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

<u>המשך פתרון 1</u> (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב
אפקה

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** יהא $V=\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל 3 במשתנה x .
תהא $U\subseteq V$ הקבוצה המוגדרת ע"י

$$U=\{p(x)\in V\mid p(1)=0=p(-1)\}$$

(א) הראו כי U הוא תת מרחב וקטורי של V.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל U.

2. **(10 נק)** יהא V מרחב וקטורי ו $u_1,u_2,u_3,u_4\in V$ נתבונן במרחבים הבאים

$$U=Span\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$$
$$W=Span\{u_1-u_2,u_2-u_3,u_1-u_3\}$$

אם נתון כי $\dim U=4$ מהו המימד של W? הוכיחו את תשובתכם בצורה ברורה ומדוייקת.

<u>פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

<u>המשך פתרון 2</u> (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

שאלה 3 (20 נקודות)

יהא $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות מסדר 2×2 עם מקדמים ממשיים. נתבונן בהעתקה הלינארית הבאה:

$$T : V \longrightarrow V$$

$$T(A) = A - A^T$$

1. מצאו מימד לגרעין ומימד לתמונה.
2. יהא $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל V. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B^B$.
3. תהא $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. חשבו את וקטורי הקורדינטות של A לפי הבסיס B ואת $[T(A)]_B$.

<u>פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

<u>המשך פתרון 3</u> (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** תהא A מטריצה מסדר 3×3. ידוע כי הערכים העצמיים של A והוקטורים העצמיים המתאימים להם הם:

$$\lambda_1 = 0,\ b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 3,\ b_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = 3,\ b_3 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

מצאו וקטור b_3 עבורו המטריצה A לכסינה. הסבירו היטב את תשובתכם.

2. **(10 נק)** הוכיחו את הטענות הבאות באופן ישיר:

(א) תהא A מטריצה לכסינה מסדר $n \times n$. הוכיחו כי המטריצה A^{2023} היא מטריצה לכסינה.

(ב) אם 0 הוא ערך עצמי של מטריצה A מסדר $n \times n$ אז המטריצה A אינה הפיכה.

<u>פתרון 4</u> (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13 , 14, 15, 16)

שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(15 נק)** תהא P_n המטריצה מסדר $n \times n$ שהאיברים באלכסון שמתחת לאלכסון הראשי שווים ל 0 ושאר האיברים שווים ל 1. לדוגמא, P_5 היא המטריצה

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של P_n עבור n כלשהו.

2. **(5 נק)** עבור כל אחת מהטענות הבאות קיבעו האם היא נכונה או שיקרית. אין צורך להוכיח ואין צורך למצוא דוגמא נגדית:

(א) אם A ו B שתי מטריצות הפיכות אז $\det(A - \lambda B) \neq 0$ לכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ב) תהא $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי. אז $\det\left(A^T A\right) = \det\left(AA^T\right)$.

<u>פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

<u>המשך פתרון 5</u> (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)

שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

.1

(**5 נק**) יהא V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$. ותהא $<,>$ מכפלה פנימית המוגדרת על V. הוכיחו ישירות את משפט פיתגורס:

יהיו $x,y \in V$. אז הוקטורים x,y ניצבים (מאונכים) זה לזה אם ורק אם $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

.2

(**15 נק**) יהא $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ יחד עם המכפלה הפנימית $< A, B >= tr(A^T B)$.
תהא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(א) מיצאו את הנורמה של A.

(ב) מיצאו מטריצה $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המאונכת למטריצה A. מיצאו מטריצה נוספת C המאונכת למטריצות A ו B שמצאתם.
תזכורת: עבור מטריצה $C_{n\times n}$ כלשהי העיקבה $tr(C)$ מוגדרת להיות סכום איברי האלכסון הראשי.

<u>**פתרון 6**</u> (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

סוף הפתרון !

מבחן באלגברה לינארית תשפ"ב סמסטר ב
פתרון Y

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות בכדי לקבל ניקוד מלא. אלא אם כתוב אחרת, יש לנמק את תשובתכם באופן מלא וברור. יש לציין באופן מפורש וברור באילו משפטים, טענות או נוסחאות ידועות אתם משתמשים. תשובות חלקיות, גם אם נכונות, לא ייזכו אותכם בניקוד מלא.

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + kx_4 &= k \\ x_2 - 4x_3 &= 1 \\ kx_1 + 2x_2 - 3x_3 + kx_4 &= 2 \end{aligned}$$

(א) מצאו את הערכים של הפרמטר k עבורו למערכת יש פתרון יחיד\אינסוף פתרונות\אין פתרון.

פתרון: נעבור למטריצה המורחבת ונדרג ככל הניתן מבלי לחלק בביטויים המכילים את k.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & k & | & k \\ 0 & 1 & -4 & 0 & | & 1 \\ k & 2 & -3 & k & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & k & | & k \\ 0 & 1 & -4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2k+2 & -3k-3 & -k^2+k & | & -k^2+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 - (2k+2)R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & k & | & k \\ 0 & 1 & -4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5k+5 & -k^2+k & | & -k^2-2k \end{pmatrix}$$

נעבור שורה שורה במטריצת המקדמים ונראה מתי מתאפסת:

R_1 - השורה הראשונה לא יכולה להתאפס בלי קשר לערך של k

R_2- השורה השנייה לא יכולה להתאפס בלי קשר לערך של k.

R_3- עבור $k=-1$ המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

ולמערכת יש אינסוף פתרונות. עבור $k=0$ המטריצה נראית

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

ולמערכת אינסוף פתרונות. עבור $k=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$$

ולמערכת אינסוף פתרונות. לכן, בסה"כ נקבל - לכל ערך של k למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ב) מצאו עבור אילו ערכים של k וקטור העמודה $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

פתרון: נציב את הערכים הנ"ל במשוואה הראשונה:

$$\frac{1}{2} - 2 - \frac{k}{2} = k \Longrightarrow k = 1$$

נציב במשוואה השלישית (כי השנייה אין מה) כדי לוודא שאין סתירה:

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 - 1 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

ולכן, עבור $k=1$ הוקטור v הוא פתרון של המערכת.

2. **(10 נק)** תהא $A_{3\times 3}$ מטריצה מעל הממשיים. נתון כי סכום איברי האלכסון הראשי של המטריצה AA^T שווה ל 0. מיצאו את המטריצה A.
פתרון: מתקיים כי

$$0 = tr(AA^T) = R_1(A)\cdot C_1(A^T) + R_2(A)\cdot C_2(A^T) + R_3(A)\cdot C_3(A^T)$$

מכיוון ש $R_i(A) = C_i(A^T)$ (כאשר נתעלם לרגע מהעובדה שאחד הוקטורים הוא עמודה והשני שורה) נקבל כי

$$0 = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}^2 + \sum_{j=1}^{3} a_{2j}^2 + \sum_{j=1}^{3} a_{3j}^2$$

כלומר, יש לנו מחוברים שכולם ריבועים ולכן גדולים או שווים לאפס שסכומם הכולל הוא 0. ולכן כל אחד מהמחוברים הוא בעצמו אפס. כלומר, $a_{ij} = 0$ ולכן $A = O$ כאשר O היא מטריצת האפס מסדר 3×3.

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** יהא $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל 2 במשתנה x . תהא $U \subseteq V$ הקבוצה המוגדרת ע"י

$$U = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0 = p(-1)\}$$

(א) הראו כי U הוא תת מרחב וקטורי של V.
פתרון: נבדוק כי U מקיים את 3 הדרישות של מרחב וקטורי

i. $U \neq \emptyset$: מתקיים כי $p(x) = (x-1)(x+1) \in U$.
ii. סגירות לחיבור: יהיו $p(x), q(x) \in U$ נראה כי $(p+q)(x) \in U$ אכן,

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 = p(-1) + q(-1) = (p+q)(-1)$$

iii. סגירות לכפל בסקלר: יהא $p(x) \in U$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$. נראה כי $(\alpha p)(x) \in U$.
אכן,

$$(\alpha p)(1) = \alpha p(1) = 0 = \alpha p(-1) = (\alpha p)(-1)$$

(ב) מצאו בסיס ומימד ל U.

פתרון: נמצא את הצורה הכללית של איבר ב U. יהא $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in U$. מתקיים כי

$$p(1) = 0 : a_2 + a_1 + a_0 = 0$$
$$p(-1) = 0 : a_2 - a_1 + a_0 = 0$$

ונקבל כי

$$a_1 = 0,\ a_0 = -a_2$$

נציב ערכים אלו בפולינום

$$p(x) = a_2x^2 - a_2 = a_2(x^2 - 1)$$

ולכן

$$U = Span\left\{x^2 - 1\right\}, \quad \dim U = 1$$

2. **(10 נק)** יהא V מרחב וקטורי ו $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V$ נתבונן במרחבים הבאים

$$U = Span\left\{u_1, u_2, u_3, u_4\right\}$$
$$W = Span\left\{u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 - u_3\right\}$$

אם נתון כי $\dim U = 4$ מהו המימד של W? הוכיחו את תשובתכם בצורה ברורה ומדוייקת.

פתרון: מתקיים כי

$$(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) = u_1 - u_3$$

לכן, נבדוק האם הוקטורים $u_1 - u_2$ ו $u_2 - u_3$ תלויים לינארית.אם כן, אז יש סקלר α עבורו $\alpha(u_2 - u_3) = u_1 - u_2$. מתקיים

$$u_1 = (\alpha + 1)u_2 - u_3$$

כלומר הוקטור u_1 הוא צירוף לינארי של הוקטורים u_2 ו u_3. מהנתון,

$$U = Span\left\{u_1, u_2, u_3, u_4\right\}, \ \dim U = 4$$

ולכן הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ בלתי תלויה לינארית ולכן לא יכול להיות סקלר α המקיים את הדרוש. ולכן

$$\dim W = 2$$

שאלה 3 (20 נקודות)

יהא $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות מסדר 2×2 עם מקדמים ממשיים. נתבונן בהעתקה הלינארית הבאה:

$$T : V \longrightarrow V$$

$$T(A) = A - A^T$$

1. מצאו מימד לגרעין ומימד לתמונה.
פתרון: נשתמש בסעיף הבא ובמטריצה המייצגת $[T]_B^B$. מתקיים כי
$$\dim ImT = rk\left([T]_B^B\right) = 1$$
$$\dim \ker T = 4 - rk\left([T]_B^B\right) = 3$$

2. יהא $B = \left\{B_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל V. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B^B$.
פתרון: מתקיים כי
$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(B_1)]_B & [T(B_2)]_B & [T(B_3)]_B & [T(B_4)]_B \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

נשים לב כי המטריצות B_1, B_2, B_4 הן שלושתן מטריצות סימטריות. ולכן, עבור כל אחת מהן מתקיים כי $T(B_i) = 0$. נחשב את $T(B_3)$:

$$[T(B_3)]_B = \left[B_3 - B_3^T\right]_B = \left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]_B = [B_2 + 2B_3 - 2B_4]_B = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

ונקבל

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

3. תהא $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. חשבו את וקטורי הקורדינטות של A לפי הבסיס B ואת $[T(A)]_B$.

פתרון: מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $[A]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. מתקיים כי $[T]_B^B \cdot [A]_B = [T(A)]_B$ כלומר,

$$[T(A)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** תהא $A_{3\times3}$ מטריצה מסדר 3×3. ידוע כי הערכים העצמיים של A והוקטורים העצמיים המתאימים להם הם :

$$\lambda_1 = 0,\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 3,\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = 3,\ b_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

מצאו וקטור b_3 עבורו המטריצה A לכסינה. הסבירו היטב את תשובתכם.

פתרון: בכדי שהמטריצה A תהיה לכסינה, צריך למצוא בסיס המורכב כולו מו"ע של A. לכן, נחפש וקטור b_3 כך שהקבוצה $\{b_1, b_2, b_3\}$ תהיה בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}$$

אפשר לראות שהוקטור $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ יתאים. (אפשר לדרג את המטריצה ולהחליט

על ערכים עבור x, y, z, או יותר פשוט למצוא וקטור כך שהמטריצה שלמעלה תהיה

משולשת (תחתונה) והוקטור $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא אחת הבחירות הכי פשוטות שעושה את זה).

2. **(10 נק)** הוכיחו את הטענות הבאות באופן ישיר:

(א) תהא $A_{n\times n}$ מטריצה לכסינה. הוכיחו כי המטריצה A^{2023} היא מטריצה לכסינה.
פתרון: המטריצה A לכסינה, ולכן קיימות מטריצות D אלכסונית ו P הפיכה כך ש $A = PDP^{-1}$. כעת,

$$A^{2023} = \left(PDP^{-1}\right)^{2023} = PD^{2023}P^{-1}$$

כאשר המטריצה D^{2023} היא אלכסונית והמטריצה P הפיכה. לכן, לפי הגדרה, המטריצה A^{2023} לכסינה.

(ב) אם 0 הוא ערך עצמי של מטריצה $A_{n\times n}$ אז המטריצה A אינה הפיכה.
פתרון: דרך I: נניח כי 0 הוא ערך עצמי של A המתאים לו"ע $v \neq 0$. מתקיים כי

$$Av = 0 \cdot v = 0$$

כלומר, הוקטור v הוא פתרון שונה מאפס של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$. ולכן המטריצה A אינה הפיכה.
דרך II: אם 0 הוא ע"ע של A אז 0 מאפס את הפולינום האופייני. כלומר,

$$0 = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$$

קיבלנו כי הדטרמיננטה של A שווה לאפס ולכן המטריצה A אינה הפיכה.
הערה: האם יש עוד דרכים להוכיח את הטענה? האם יש הבדל האם המטריצה לכסינה או לא? מומלץ לכם לחשוב על השאלות האלו.

שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(15 נק)** תהא P_n המטריצה מסדר $n \times n$ שהאיברים באלכסון שמתחת לאלכסון הראשי שווים ל 0 ושאר האיברים שווים ל 1. לדוגמא, P_5 היא המטריצה

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו את הדטרמיננטה של P_n עבור n כלשהו.

פתרון: נבצע את הפעולות הבאות

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\le i\le n]{R_i \longrightarrow R_i - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \longrightarrow R_1 + \sum_{i=2}^{n} R_i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

מכיוון שאף פעולה שביצענו לא שינתה את הדטרמיננטה, נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה האחרונה. נבצע פיתוח דטרמיננטה לפי השורה הראשונה (או העמודה האחרונה, אותו דבר):

$$\det P_n = (-1)^{1+n} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{2n} = 1$$

2. **(5 נק)** עבור כל אחת מהטענות הבאות קיבעו האם היא נכונה או שיקרית. אין צורך להוכיח ואין צורך למצוא דוגמא נגדית:

(א) אם A ו B שתי מטריצות הפיכות אז $\det(A-\lambda B) \neq 0$ לכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$.

פתרון: **הטענה לא נכונה** למשל, נקח $\lambda = 1$, $A = I_n = B$ אז

$$\det(A-\lambda B) = \det(I-I) = \det O = 0$$

(ב) תהא $A_{n\times n}$ מטריצה כלשהי. אז $\det\left(A^TA\right) = \det\left(AA^T\right)$.

פתרון: **הטענה נכונה** כי

$$\det\left(AA^T\right) = \det(A)\cdot\det(A^T) = \det(A^T)\cdot\det(A) = \det\left(A^TA\right)$$

שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(5 נק)** יהא V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$. ותהא $<,>$ מכפלה פנימית המוגדרת על V. הוכיחו ישירות את משפט פיתגורס: יהיו $x, y \in V$. אז הוקטורים x, y ניצבים זה לזה אם ורק אם $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
פתרון: מתקיים תמיד כי

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &=< x+y, x+y >=< x, x+y > + < y, x+y > \\ &=< x, x > +2 < x, y > + < y, y > \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x, y > \end{aligned}$$

ולכן, $< x, y >= 0 \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

2. **(15 נק)** יהא $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ יחד עם המכפלה הפנימית $< A, B >= tr(A^T B)$.
תהא

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(א) מיצאו את הנורמה של A.
פתרון:

$$||A||^2 =< A, A >= tr\left(A^T A\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 5 & \\ & 5 \end{pmatrix}\right) = 10$$

ולכן $||A|| = \sqrt{10}$.

(ב) מיצאו מטריצה $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המאונכת למטריצה A. מיצאו מטריצה נוספת C המאונכת למטריצות A ו B שמצאתם.
פתרון: אם נקח $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז תמיד $A \perp B$. נמצא מטריצה נוספת C המאונכת למטריצה A. מכיוון ש B היא מטריצת האפס ייתקיים כי $B \perp C$.
מחפשים C כך ש

$$0 =< A, C >= tr\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (2a+c) + (b+2d)$$

ולכן למשל $c = -2a - b - 2d$ ולכן

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a-b-2d & d \end{pmatrix}$$

תהיה מאונכת ל A עבור כל ערך של a, b, d. נבחר למשל $b = d = 1$, $a = 0$ ואז

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$