פתרון Y

מבוא להסתברות

שאלה 1 (32 נקודות)

מפעל מקבל משלוחי פריטים. נגדיר X = מספר הפריטים הפגומים במשלוח. נתון:

$$P(X=0)=0.6,\quad P(X=1)=0.05,\quad P(X=2)=0.1,\quad P(X=3)=0.25$$

א. מהי תוחלת מספר הפריטים הפגומים במשלוח?

ב. מהי שונות מספר הפריטים הפגומים במשלוח?

ג. התקבלו 80 משלוחים. מה ההסתברות שלכל היותר 15 משלוחים יכילו 2 פריטים פגומים כל אחד?

פתרון

א.

$$E(X)=0\times0.6+1\times0.05+2\times0.1+3\times0.25=1$$

ב.

$$E(X^2)=0^2\times0.6+1^2\times0.05+2^2\times0.1+3^2\times0.25=2.7$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=2.7-1^2=1.7$$

ג.

נגדיר: Y = מספר המשלוחים שמכילים 2 פריטים פגומים: $Y\sim B(80,\ 0.1)$

$$80\times0.1=8>5,\quad 80\times0.9>5$$

קרוב נורמלי לבינומי: $Y\sim N(8,\ 7.2)$

$$P(Y\le15)=\Phi\left(\frac{15+0.5-8}{\sqrt{7.2}}\right)=\Phi(2.8)=0.9974$$

שאלה 2 (32 נקודות)

X, Y משתנים מקריים בעלי פונקציית צפיפות משותפת: $f_{X,Y}(x,y)$ המוגדרת כך:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c, & 0\le y\le\sqrt{x},\ 0\le x\le1 \\ 0, & else \end{cases}$$

א. מהו הקבוע c?

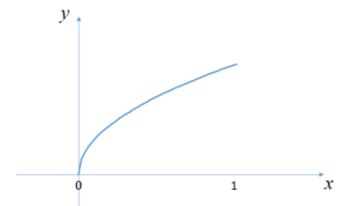
ב. חשבו את פונקציית הצפיפות: $f_{Y|X}(y\,|\,0.25)$, להקפיד לציין את תחום ההגדרה.

ג. חשבו את התוחלת: $E(Y\,|\,X=0.25)$.

ד. חשבו את ההסתברות: $P(X\le0.5\cap Y\ge0.5)$.

פתרון

א.



$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} cdydx = c\int_0^1 \sqrt{x}dx = c\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = c\frac{2}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1.5$$

ב.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}$$

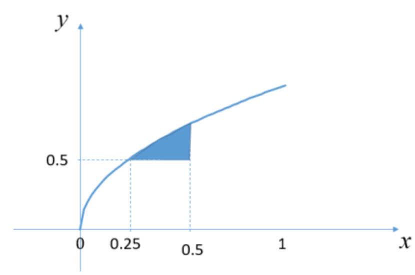
$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{x}} cdy = c\sqrt{x}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{c}{c\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f_{Y|X}(y|0.25) = \frac{1}{0.5} = 2, \quad 0 \le y \le 0.5$$

ג.

$$E(Y|X=0.25) = \int_0^{0.5} yf_{Y|X}(y|0.25)dy = \int_0^{0.5} 2ydy = y^2\Big|_0^{0.5} = 0.25$$

ד.



$$P(X \le 0.5 \cap Y \ge 0.5) = \int_{0.25}^{0.5} \int_{0.5}^{\sqrt{x}} cdydx = c\int_{0.25}^{0.5} \left(\sqrt{x} - 0.5\right)dx = c\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - 0.5x\right)_{0.25}^{0.5} = 0.0411$$

שאלה 3 (20 נקודות: סעיף א – 8 נקודות, סעיף ב – 6 נקודות, סעיף ג – 6 נקודות)

לפניכם קופסה ובה 10 קוביות, מהן שש קוביות הוגנות וארבע קוביות לא הוגנות. בהטלת קובייה לא הוגנת ההסתברות לקבל 6 היא 0.4 וההסתברות לקבל כל אחד מהמספרים 1, 2, 3, 4, 5 היא 0.12.

מהקופסה בוחרים באקראי קובייה אחת.

א. מטילים את הקובייה שבחרנו פעם אחת.

(i) מה ההסתברות לקבל את התוצאה 6?

(ii) אם התוצאה היא 6 מה ההסתברות שבחרנו קובייה לא הוגנת?

ב. מטילים את הקובייה שבחרנו עד שמתקבל המספר 6. מה ההסתברות שנטיל את הקובייה יותר משלוש פעמים?

ג. מטילים את הקובייה שבחרנו 12 פעמים. מהי תוחלת מספר הפעמים שנקבל את המספר 6?

פתרון

נגדיר:

A = נבחרה קובייה הוגנת: $P(A)=0.6$

X = התוצאה של הטלת הקובייה

א.

(i)

$$P(X=6)=P(X=6\mid A)P(A)+P(X=6\mid \bar{A})P(\bar{A})=\frac{1}{6}\times 0.6+0.4\times 0.4=0.26$$

(ii)

$$P(\bar{A}\mid X=6)=\frac{P(X=6\mid \bar{A})P(\bar{A})}{P(X=6)}=\frac{0.4\times 0.4}{0.4\times 0.4+\frac{1}{6}\times 0.6}=0.6154$$

ב.

נגדיר:

Y = מספר הפעמים שנטיל את הקובייה עד שנקבל 6

$$P(Y>3)=P(Y>3\mid A)P(A)+P(Y>3\mid \bar{A})P(\bar{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^3\times 0.6+(0.6)^3\times 0.4=0.4336$$

ג.

נגדיר:

Y = מספר הפעמים שנקבל את המספר 6 בהטלת הקובייה 12 פעמים:

$$Y\mid A\sim B\left(12,\ \frac{1}{6}\right),\quad Y\mid \bar{A}\sim B(12,\ 0.4)$$

$$E(Y)=E(Y\mid A)P(A)+E(Y\mid \bar{A})P(\bar{A})=12\times\frac{1}{6}\times 0.6+12\times 0.4\times 0.4=3.12$$

שאלה 4 (24 נקודות)

יצחק הוא יועץ טכני. בימי שלישי הוא עונה לשאלות באימיילים. משך זמן כתיבת תשובה לאימייל מתפלג מעריכית עם תוחלת 5 דקות. יצחק מתחיל לענות לאימיילים בשעה 10:00. הוא צריך לענות על 36 אימיילים לפני הפסקת הצהריים.

א. מה ההסתברות שידרשו לפחות 6 דקות כדי לכתוב תשובה לאימייל אחד?

ב. אם ידוע שלאימייל מסוים יצחק כתב תשובה במשך יותר מ- 3 דקות, מה ההסתברות שלאימייל הזה משך זמן כתיבת התשובה היה יותר מ- 5 דקות?

ג. מה ההסתברות שיצחק יצא להפסקת צהריים בשעה 12:30 לכל המאוחר?

פתרון

נגדיר:

T = משך זמן מענה לאימייל: $T \sim \exp(0.2)$

א.

$$P(T>6)=e^{-0.2\times 6}=0.3012$$

ב.

תכונת חוסר הזיכרון של התפלגות מעריכית:

$$P(T>5\,|\,T>3)=P(T>2+3\,|\,T>3)=P(T>2)=e^{-0.2\times 2}=0.6703$$

ג.

$$\sum_{i=1}^{36} T_i \sim N\left(36\times 5,\ 36\times 5^2\right)$$

כאשר T_i הוא משך הזמן לענות על אימייל i עבור $i=1,2,\dots,36$

$$P\left(\sum_{i=1}^{36} T_i \le 150\right)=\Phi\left(\frac{150-36\times 5}{6\times 5}\right)=\Phi\left(-1\right)=1-\Phi\left(1\right)=1-0.8413=0.1587$$