

תדו"א 1 – דף תרגילים מספר 5

רציפות

תרגיל 1

מצאו את כל נקודות אי-רציפות של הפונקציות הבאות, ומיינו אותן. במידה ומדובר באי-רציפות סליקה, כתבו כיצד ניתן לשנות את הפונקציה כך שתהיה רציפה.

א. $f(x) = \frac{\sin 8x}{x}$

ב. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$

ג. $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

ד. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

ה. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

תרגיל 2

נתונה הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{a - \cos x}{x} & x > 0 \end{cases}$$

מצאו את כל ערכי a ו- b שעבורם g רציפה ב- $x=0$. לכל ערכי a ו- b שעבורם g אינה רציפה ב- $x=0$, קבעו מאיזה סוג היא האי-רציפות (סליקה, ממין ראשון, ממין שני). נמקו את תשובתכם. רמז: הפרידו למקרים $a=1$ ו- $a \neq 1$.

תרגיל 3

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - |x - a| & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x-a} & x > 1 \end{cases}$$

א. הראו שעבור $a = 0, 1, 2$, f רציפה ב- $x = 1$.ב. הראו שלכל $a \neq 0, 1, 2$, f אינה רציפה ב- $x = 1$.תרגיל 4

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x-1}} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$$

לאילו ערכים של a הפונקציה הנתונה רציפה ב- $x = 1$, נמקו את תשובותיכם.תרגיל 5

הוכיחו או הפריכו:

א. תהי f פונקציה לא רציפה בנק' $x = 0$ אז גם הפונקציה $|f|$ לא רציפה בנק' $x = 0$.ב. נניח כי הפונקציות $f(x) + g(x)$ ו $f(x) - g(x)$ רציפות בנק' $x = 0$ אזהפונקציות $f(x)$, $g(x)$ רציפות בנקודה $x = 0$.תרגיל 6יהי a מספר ממשי. הוכיחו כי למשוואה $x + \sin x + a = 0$ קיים פתרון וציינו קטע סופי שבו נמצא הפתרון.תרגיל 7הוכיחו כי למשוואה $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\cos x} = a$ קיים פתרון בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ לכל פרמטר ממשי a .תרגיל 8תהי $f: R \rightarrow R$ פונקציה רציפה אשר לכל x מקיימת $|f(x)| < 7$. הוכיחו כי למשוואה $f(x) + 2x = 3$ קיים פתרון.