מבחן באלגברה לינארית תש"ף סמסטר ב שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) **אין קשר בין סעיפים א,ב**

א. (8 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות שהמטריצה המורחבת שמתאימה לה היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ב. (12 נקודות) נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 2 \\ 2x & & & - & z & = & k \\ kx & + & ky & + & k^2 z & = & 0 \end{array}\right.$$

מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי k עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (אין צורך למצוא את הפתרון באף אחד מהמקרים).

שאלה 2. (20 נקודות) נתונה הקבוצה

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. (10 נקודות) מצאו מימד ל־$\mathrm{Span}(S)$

ב. (10 נקודות) נסמן ב־U את תת המרחב

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

הראו כי $U = \mathrm{Span}(S)$ (רמז: אפשר להראות תחילה כי $S \subset U$, וכי המימדים של $U, \mathrm{Span}(S)$ שווים).

שאלה 3. (20 נקודות) בשאלה זו נסמן $V = \mathbb{R}_2[x] = P_2(\mathbb{R})$ כלומר את מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2,

$$B = \left\{ x^2+1, x+1, x-1 \right\}$$

בסיס של V, ו־$T : V \to V$ העתקה לינארית כך ש־

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & a-2 & a+1 \\ 3 & 6-a & b-a-5 \end{pmatrix}$$

א. (10 נקודות) מצאו עבור איזה ערכים של הפרמטרים a,b ההעתקה T הפיכה.

ב. (10 נקודות) עבור $a=1, b=2$. מצאו בסיסים ומימדים ל-$\mathrm{Ker}T, \mathrm{Im}T$

שאלה 4. (20 **נקודות**) קבעו האם המטריצה הבאה לכסינה. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D = P^{-1}AP$ (כלומר $A = PDP^{-1}$), אחרת הסבירו מדוע היא לא לכסינה.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 0 & 2 \\ 4 & -7 & 1 & -3 \\ 3 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

שאלה 5. (20 **נקודות**) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) נתון כי המטריצה $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ מקיימת

$$|A| = 3, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

חשבו את

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 2 & 1 & 7 \\ a_1 + 2c_1 & a_2 + 2c_2 & a_3 + 2c_3 \end{vmatrix}$$

ב. (10 נקודות) תהיינה $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$ המקיימות כי C הפיכה ומתקיים השוויון

$$B^T C - BC = (C^T)^{-1} A$$

הוכיחו כי A מטריצה אנטי סימטרית (מטריצה נקראת אנטי סימטרית אם $A = -A^T$).

שאלה 6. (20 **נקודות**) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ממימד $\dim V = 3$.

א. (10 נקודות) נתון כי $B = \{u, v, w\}$ בסיס של V. קבעו עבור אילו ערכים של הפרמטר k הקבוצה

$$\{u - 2w, u + v, -u + v + kw\}$$

היא בסיס של V.

ב. (10 נקודות) יהיו U, W תתי מרחבים של V כך ש-$\dim U = \dim W = 2$. הראו כי אם B בסיס של U, C בסיס של W כך שאין לבסיסים איברים משותפים, אז איחוד הבסיסים $B \cup C$ הוא קבוצה תלויה לינארית.

בהצלחה

מבחן באלגברה לינארית תש"ף סמסטר ב שאלון Y- פתרון

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא

שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (8 נקודות) פתרו את מערכת המשוואות שהמטריצה המורחבת שמתאימה לה היא

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ב. (12 נקודות) נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - z = k \\ kx + ky + k^2 z = 0 \end{cases}$$

מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי k עבורם יש למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון (אין צורך למצוא את הפתרון באף אחד מהמקרים).

פתרון

א. המטריצה הנתונה היא מטריצה מדורגת קנונית, ולכן אין צורך להמשיך לדרג אותה. מערכת המשוואות המתאימה למטריצה היא

$$\begin{cases} x + 3y - 2w = 4 \\ z + 5w = 1 \end{cases}$$

ולכן הפתרונות של המערכת הם

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} t : s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

ב. למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת שמתאימה למערכת היא שונה מ-0. נחשב את הדטרמיננטה המתאימה

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ k & k & k^2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k(-2(-k-1)+2) = 2k(k+2)$$

$|A| = 2k(k+2)$, ולכן $|A| \neq 0$ אם"ם $k \neq 0, -2$.
עבור $k = 0$ נקבל כי מערכת המשוואות היא

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת ונקבל כי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי הדרגה של המטריצה המצומצמת שווה לדרגת המטריצה המורחבת ושווה ל2, כלומר קטנה ממספר המשתנים, ולכן למערכת יש אינסוף פתרונות.
עבור $k = -2$ נקבל כי מערכת המשוואות היא

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - z = -2 \\ -2x - 2y + 4z = 7 \end{cases}$$

נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת ונקבל כי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת אין פתרונות.
נסכם

(i) עבור $k \neq 0, -2$ למערכת יש פתרון יחיד.

(ii) עבור $k = 0$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(iii) עבור $k = -2$ למערכת אין פתרונות.

שאלה 2. (20 נקודות) נתונה הקבוצה

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. (10 נקודות) מצאו מימד ל־$\mathrm{Span}(S)$

ב. (10 נקודות) נסמן ב־U את תת המרחב

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

הראו כי $U = \mathrm{Span}(S)$ (רמז: אפשר להראות תחילה כי $S \subset U$, וכי המימדים של $U, \mathrm{Span}(S)$ שווים).

פתרון

א. נמצא בסיס למרחב הנפרש ע"י איברי S בעזרת שורות המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - 7R_1}]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 8R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פעולות אלמנטריות על שורות שומרות על מרחב השורות, ושורות שונות מאפס במטריצה מדורגת הן בת"ל, ולכן מהוות בסיס למרחב השורות של כל המטריצות לאורך הדירוג, כלומר המימד של $\mathrm{Span}(S)$ הוא 3, ובסיס שלו

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ב. כדי להראות כי $U=\mathrm{Span}(S)$ נראה תחילה כי איברי הבסיס שמצאנו נמצאים ב־U ומכך ינבע כי $\mathrm{Span}(S)\subset U$:

$$1-0-1-0=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\in U, 0-1-(-1)-0=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\in U, 0-0-(-1)-1=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\in U$$

נעזר כעת בכך שאם W תת מרחב של V, ומימדיהם שווים, אז $W=V$. קיבלנו כי $\mathrm{Span}(S)\subset U$ תת מרחב, ולכן כדי להראות שהם שווים מספיק להראות שמימדיהם שווים. המימד של $\mathrm{Span}(S)$ שווה 3, ולכן המימד של U הוא לפחות 3. כמו כן, המימד של U אינו 4 (או יותר) אחרת היה מתקיים כי $U=\mathbb{R}$, אבל $U\neq\mathbb{R}^4$, (למשל אף אחד מאיברי הבסיס הסטנדרטי לא נמצא ב־U). מכאן ש־$\dim U=3$ ולכן $U=\mathrm{Span}(S)$.

שאלה 3. (20 **נקודות**) בשאלה זו נסמן $V=\mathbb{R}_2[x]=P_2(\mathbb{R})$ כלומר את מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2,

$$B=\left\{x^2+1,x+1,x-1\right\}$$

בסיס של V, ו־$T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש־

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&a-2&a+1\\3&6-a&b-a-5\end{pmatrix}$$

א. (10 נקודות) מצאו עבור איזה ערכים של הפרמטרים a,b ההעתקה T הפיכה.

ב. (10 נקודות) עבור $a=1,b=2$. מצאו בסיסים ומימדים ל־$\mathrm{Ker}T,\mathrm{Im}T$

פתרון

א. ההעתקה T היא הפיכה אם"ם המטריצה המייצגת היא הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת:

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&a-2&a+1\\3&6-a&b-a-5\end{vmatrix}\overbrace{=}^{\substack{R_2\to R_2+R_1\\R_3\to R_3-3R_1}}\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&a&a\\0&-a&b-a-2\end{vmatrix}=a(b-a-2+a)=a(b-2)$$

קיבלנו כי $|A|=a(b-2)$ ולכן המטריצה הפיכה, וההעתקה הפיכה עבור $a\neq0$ או $b\neq2$.

ב. כדי למצוא בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה, נדרג תחילה את המטריצה

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&1-2&1+1\\3&6-1&2-1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&2\\3&5&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_2]{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כדי למצוא את הגרעין של T נמצא תחילה את מרחב הפתרונות של המטריצה: פעולות אלמנטריות על שורות שומרות על מרחב הפתרונות, ולכן מרחב הפתרונות של המטריצה מדורגת ומרחב הפתרונות של המטריצה המקורית שווים. מרחב הפתרונות של המטריצה המדורגת הוא הקבוצה שמקיימת כי

$$\begin{cases}x_1 & & -3x_3 &= 0\\ & x_2 &+ x_3 &= 0\end{cases}$$

ולכן מרחב הפתרונות הוא

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}t|t\in\mathbb{R}\right\}=\textbf{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר הוקטור $\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ הוא בסיס למרחב הפתרונות של המטריצה. מרחב הפתרונות של המטריצה הוא קבוצת וקטורי הקואורדינטות של האיברים בגרעין לפי הבסיס B, ולכן בסיס לגרעין הוא

$$\left\{3(x^2+1)-(x+1)+(x-1)\right\}=\left\{3x^2-2\right\}$$

כדי למצוא את התמונה נמצא תחילה את מרחב העמודות של המטריצה. נעזר בדירוג הקודם שביצענו, ונשתמש בכך שפעולות אלמנטריות שומרות על תלויות לינאריות של העמודות. ניתן לראות כי העמודות הראשונה והשניה במטריצה המדורגת היא קבוצה בת"ל ששאר העמודות תלויות לינארית בה, ולכן זה נכון גם בתחילת הדירוג כלומר העמודות הראשונה והשניה במטריצה לפני הדירוג הן קבוצה בת"ל ששאר העמודות תלויות לינארית בה, ולכן מהווה בסיס למרחב העמודות. כלומר הקבוצה

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$$

היא בסיס למרחב העמודות. מרחב העמודות של המטריצה הוא וקטורי הקואורדינטות של איברי התמונה, ולכן עמודות אלו הן וקטורי קואורדינטות של איברים בבסיס של התמונה, כלומר הקבוצה

$$\left\{(x^2+1)-(x+1)+3(x-1),2(x^2+1)-(x+1)+5(x-1)\right\} \;=\; \left\{x^2+2x-3,2x^2+4x-4\right\}$$

היא בסיס לתמונה. נסכם:

(i) בסיס לגרעין: $\{3x^2-2\}$. מימד הגרעין $\dim\textbf{Ker}T=1$

(ii) בסיס לתמונה: $\{x^2+2x-3,2x^2+4x-4\}$. מימד התמונה $\dim\textbf{Im}T=2$

שאלה 4. **(20 נקודות)** קבעו האם המטריצה הבאה לכסינה. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש־ $D=P^{-1}AP$ (כלומר $A=PDP^{-1}$), אחרת הסבירו מדוע היא לא לכסינה.

$$A=\begin{pmatrix}-3&7&0&3\\-3&6&0&2\\4&-7&1&-3\\3&-6&0&-2\end{pmatrix}$$

פתרון נמצא תחילה את הערכים העצמיים ע"י חישוב הפולינום האפייני:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-3-\lambda&7&0&3\\-3&6-\lambda&0&2\\4&-7&1-\lambda&-3\\3&-6&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&7&3\\-3&6-\lambda&2\\3&-6&-2-\lambda\end{vmatrix}\overbrace{=}^{R_3\to R_3+R_2}$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&7&3\\-3&6-\lambda&2\\0&-\lambda&-\lambda\end{vmatrix}\overbrace{=}^{C_3\to C_3-C_2}(1-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&7&-4\\-3&6-\lambda&\lambda-4\\0&-\lambda&0\end{vmatrix}=(1-\lambda)\lambda((-3-\lambda)(\lambda-4)-12)=\lambda^2(1-\lambda)^2$$

הערכים העצמיים הם הערכים עבורם הפולינום האפייני מתאפס, כלומר $\lambda = 0, 1$. הריבויים האלגבריים של שני הערכים העצמיים הם 2, ולכן המטריצה לכסינה אם"ם הריבויים הגיאומטריים שווים ל2 עבור שני הערכים העצמיים. נמצא תחילה את הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$, כלומר את מימד מרחב הפתרונות של A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 0 & 2 \\ 4 & -7 & 1 & -3 \\ 3 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 2 \\ 4 & -7 & 1 & -3 \\ 3 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{\substack{R_2 \to R_2 + 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי דרגת המטריצה היא 3, כלומר מימד מרחב הפתרונות הוא 1, ולכן המטריצה לא לכסינה כי הריבוי הגיאומטרי של $\lambda = 0$ שונה מהריבוי האלגברי.

שאלה 5. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) נתון כי המטריצה $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ מקיימת

$$|A| = 3, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

חשבו את

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 2 & 1 & 7 \\ a_1 + 2c_1 & a_2 + 2c_2 & a_3 + 2c_3 \end{vmatrix}$$

ב. (10 נקודות) תהיינה $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$ המקיימות כי C הפיכה ומתקיים השוויון

$$B^T C - BC = (C^T)^{-1} A$$

הוכיחו כי A מטריצה אנטי סימטרית (מטריצה נקראת אנטי סימטרית אם $A = -A^T$).

פתרון

א. לפי הנתון מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 + c_1 \\ a_2 + 2b_2 + c_2 \\ a_3 + 2b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

נציב זאת בדטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 2 & 1 & 7 \\ a_1 + 2c_1 & a_2 + 2c_2 & a_3 + 2c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 + 2b_1 + c_1 & a_2 + 2b_2 + c_2 & a_3 + 2b_3 + c_3 \\ a_1 + 2c_1 & a_2 + 2c_2 & a_3 + 2c_3 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ a_1 + 2c_1 & a_2 + 2c_2 & a_3 + 2c_3 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{R_2 \to R_2 - R_3}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overbrace{=}^{R_2 \leftrightarrow R_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -|A^T| = -3$$

ב. מהנתון מתקיים כי $B^TC - BC = (C^T)^{-1}A$. נכפיל את השוויון משמאל ב־C^T ונקבל כי

$$C^TB^TC - C^TBC = A$$

ולכן ,

$$A^T = \left(C^TB^TC - C^TBC\right)^T = \left(C^TB^TC\right)^T - \left(C^TBC\right)^T = C^TBC - C^TB^TC = -\left(C^TB^TC - C^TBC\right) = -A$$

כלומר A מטריצה אנטי סימטרית.

שאלה 6. (20 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ממימד $\dim V = 3$.

א. (10 נקודות) נתון כי $B = \{u, v, w\}$ בסיס של V. קבעו עבור אילו ערכים של הפרמטר k הקבוצה

$$\{u - 2w, u + v, -u + v + kw\}$$

היא בסיס של V.

ב. (10 נקודות) יהיו U, W תתי מרחבים של V כך ש־$\dim U = \dim W = 2$. הראו כי אם B בסיס של U, C בסיס של W כך שאין להם איברים משותפים, אז איחוד הבסיסים $B \cup C$ הוא קבוצה תלויה לינארית.

פתרון

א. נניח כי a, b, c הם סקלרים כך שמתקיים כי

$$a(u - 2w) + b(u + v) + c(-u + v + kw) = 0 \Leftrightarrow (a + b - c)u + (b + c)v + (-2a + kc)w = 0$$

B בסיס ולכן קבוצה בת"ל, כלומר המקדמים של איברי הקבוצה חייבים להתאפס:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ b + c = 0 \\ -2a + kc = 0 \end{cases}$$

קיבלנו אם כן כי הקבוצה הנתונה היא בסיס אם"ם היא בת"ל)כי מספר איבריה שווה למימד(אם"ם הדטרמיננטה של המטריצה שמתאימה למערכת המשוואות הנ"ל שונה מאפס,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & k \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 + k = k - 4 \neq 0$$

כלומר הקבוצה היא בסיס אם"ם $k \neq 4$.

ב. בבסיס של U ובבסיס של W יש שני איברים, ולכן באיחוד הבסיסים יש ארבעה איברים. נתון כי המימד של V הוא 3, ולכן קבוצה עם 4 איברים היא בהכרח תלויה לינארית.

בהצלחה