

## תרגיל בית 13 – קבוצות בנות מנייה

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. יהא  $\mathbb{Z}_{\leq 100}[x]$  אוסף הפולינומים במשתנה  $x$  עם מקדמים שלמים.
- (א) תנו דוגמא לשני איברים השייכים ל  $\mathbb{Z}_{\leq 100}[x]$  ושני איברים שאינם שייכים ל  $\mathbb{Z}_{\leq 100}[x]$ .
- (ב) חשבו את העוצמה של  $\mathbb{Z}_{\leq 100}[x]$ .
- (ג) חשבו את העוצמה של  $\mathbb{Z}_{\leq n}[x]$  כאשר  $n \in \mathbb{N}$  טבעי כלשהו.
2. תהא  $A$  קבוצה אינסופית. אין קשר בין הסעיפים.
- (א) נניח כי הקבוצה  $A$  היא בת מנייה. האם ניתן ליצור רשימה המונה את איברי  $A$ ? הסבירו כיצד תראה רשימה כזו, או הסבירו למה אי אפשר ליצור רשימה.
- (ב) נניח כי ניתן ליצור רשימה המונה את איברי  $A$ . האם הקבוצה  $A$  בת מנייה? אם כן, מצאו פונקציה חח"ע ועל לטבעיים, אם לא – הסבירו.
- (ג) נסו ליצור רשימה של המספרים הממשיים,  $\mathbb{R}$ . האם הצלחתם? מה היו הקשיים במשימה זו?
3. בעזרת שימוש בטענות ראינו כי  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ . בתרגיל זה תוכיחו את שיווין העוצמות באופן ישיר. נתבונן בפונקציה

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$f(n, \ell) = 2^{n-1} \cdot (2\ell - 1)$$

כאן, מניחים כי  $0 \notin \mathbb{N}$ . הוכיחו כי  $f$  היא פונקציה הפיכה והסיקו כי

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$