<u>מבחן חדו"א 1 פתרון Y</u>

<u>פתרון 1</u>

א) $f(x)$ כן רציפה ב- 0: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)=(\pi-4)^0=1$ וגם

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\left(1+\cos x-1\right)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot(\cos x-1)\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x}}\overset{L}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x}}=e^0=1.$$

ב) $$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left\langle\begin{matrix}t=\sqrt{1-x^2}\\ dt=-\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ x^2=1-t^2\end{matrix}\right\rangle=-\int(1-t^2)dt=-t+\frac{t^3}{3}+C=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

<u>פתרון 2</u>

א) $f(x)=\dfrac{x^2+\ln(x-1)}{(x-2)(x+3)}$, אז תחום הגדרתה הוא: $x>1,\ x\neq2$. $-3\notin D(f)$.

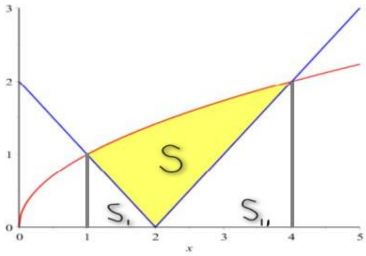
קל לראות ש- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\infty$. לכן יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x=1$ וב- $x=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln(x-1)}{x^2+x-6}=(\frac{\infty}{\infty})\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\frac{1}{x-1}}{2x+1}=1$ לכן $y=1$ מהווה אסימפטוטה אופקית כאשר $x\to+\infty$.

ב) $|x-2|=\sqrt{x}\ \Leftrightarrow\ (x-2)^2=x\ \Leftrightarrow\ x^2-5x+4=0$.

אז הגרפים נחתכים בנקודות $(1;1)$ ו- $(4;2)$. לכן השטח הנדרש הוא:

$$S=\int_1^4\sqrt{x}dx-S_I-S_{II}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4-\frac{1}{2}-2=\frac{14}{3}-\frac{5}{2}=2\frac{1}{6}.$$



<u>פתרון 3</u>

א) מחוץ לקטע $[-1;1]$ אין פתרונות למשוואה כי $|\cos x|\le1$, $|x|>1$. נגדיר $f(x)=x-\cos x$. הפונקציה רציפה וגזירה בכל הציר. מתקיים: $f(-1)<0$, $f(1)>0$. לפי משפט ערך הביניים $\exists\, c\in(-1;1):\ f(c)=0$.

הפתרון יחיד כיון שהפונקציה עולה ממש בקטע: $f'(x)=1+\sin x>0\ \Leftarrow\ |\sin x|<1\quad \forall x\in[-1;1]$.

ב) נשתמש בכלל לופיטל ומשפט ניוטון - לייבניץ:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}dt}{x^4}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{4x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^2}\overset{<t=\frac{1}{x}>}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}}{2/t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{2e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0.$$

<u>פתרון 4</u>

א) נגדיר פונקציה $f(x)=(2x+1)^{\frac{3}{2}}$. הפונקציה רציפה וגזירה לכל $x>-0.5$, בפרט בקטע $[2022;2023]$.

לפי משפט לגראנז' $\exists c\in(a;b):\ \ f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)=3\sqrt{2c+1}\,(b-a)$.

כיון ש- $\sqrt{2c+1}<\sqrt{2b+1},\ b-a<1$, האי-שוויון הנדרש נובע.

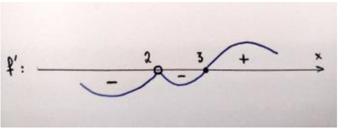
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

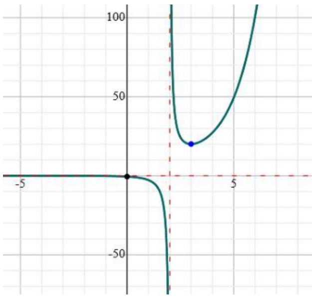
ב) $$\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \ldots = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$$

$$T_3(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 .$$

<u>פתרון 5</u>





א) תחום הגדרה של $f(x)$ הוא $\{x \neq 2\}$. $f'(x) = \dfrac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$.

$f'(x)$ רציפה בתחום הגדרתה. נשתמש בשיטת הנחש לסימני הנגזרת:

יש מינימום מקומי ב- 3, הפונקציה יורדת בקטע $(-\infty;2)$ וגם בקטע $(2;3]$,

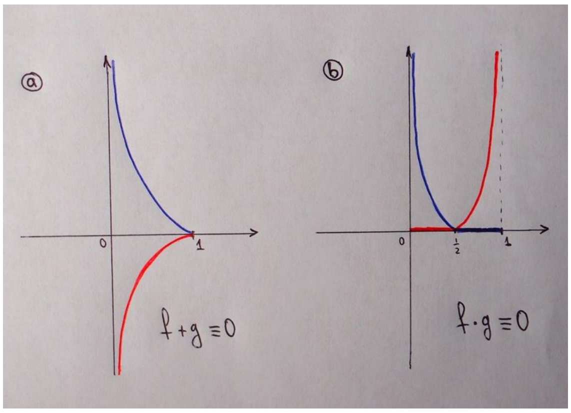
ועולה ב- $[3;+\infty)$.

הערה: <u>לא נכון</u> לכתוב שהפונקציה יורדת בתחום $(-\infty;2)\cup(2;3]$!

ניתן לראות את גרף הפונקציה באיור הבא:

ב) כן: $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int_e^\infty \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \int_1^\infty \frac{dt}{t^3} = (-\frac{1}{2t^2})\Big|_1^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

<u>פתרון 6</u>



כן. דוגמאות:

א) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ 0<x<1;\ \ g(x) = -f(x)$.

ב) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<x<\dfrac{1}{2} \\ 0, & \dfrac{1}{2} \le x < 1 \end{cases};\ \ g(x) = f(1-x)$.

דוגמאות דומות מצוירות באיור.

מבחן חדו"א 1 שאלון Y

שאלה 1

א) האם הפונקציה $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}\ , & x>0\\ (\pi-4)^{-x^2}\ , & x\le 0\end{cases}$ רציפה ב- 0 ? אם לא, קבעו את סוג אי-הרציפות.

ב) חשבו את האינטגרל $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

שאלה 2

א) מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+\ln(x-1)}{x^2+x-6}$.

ב) חשבו את השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)=\sqrt{x}$ ו- $g(x)=|x-2|$.

שאלה 3

א) הוכיחו כי למשוואה $\cos x=x$ יש פתרון ממשי אחד ויחיד.

ב) חשבו את הגבול $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}dt$.

שאלה 4

א) הוכיחו כי $(2b+1)^{\frac{3}{2}}-(2a+1)^{\frac{3}{2}}<3\sqrt{2b+1}$ כאשר $2022<a<b<2023$.

ב) מצאו את פולינום מקלורן מסדר 3 לפונקציה $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

שאלה 5

א) מצאו נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה לפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$.

ב) האם האינטגרל הלא אמיתי $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$ מתכנס? אם לא, נמקו. אם כן, חשבו אותו.

שאלה 6

א) האם קיימות פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ **הלא** חסומות בקטע $(0;1)$ אשר $f(x)+g(x)$ חסומה?
אם לא, נמקו. אם כן, הביאו דוגמה, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

ב) האם קיימות פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ **הלא** חסומות בקטע $(0;1)$ אשר $f(x)\cdot g(x)$ חסומה?
אם לא, נמקו. אם כן, הביאו דוגמה, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

בהצלחה!