

פתרון

שאלון X

מבוא להסתברות

שאלה 1 (24 נקודות – כל סעיף 7 נקודות)

יצחק ניגש לבחינת קבלה לחידון טלוויזיה. בבחינה שואלים מגוון של שאלות בשלושה נושאים. בבחינת הקבלה ההסתברות שישאלו שאלה בהיסטוריה היא 0.5, ההסתברות שישאלו שאלה בספורט היא 0.3 וההסתברות שישאלו שאלה בפוליטיקה היא 0.2. אין תלות בין השאלות השונות. ההסתברות שיצחק יענה נכון על שאלה בהיסטוריה היא 0.4, ההסתברות שיצחק יענה נכון על שאלה בספורט היא 0.8 וההסתברות שיצחק יענה נכון על שאלה בפוליטיקה היא 0.7.

א. מה ההסתברות שיצחק יענה נכון על שאלה כלשהי?

ב. יצחק ענה נכון על שאלה, מה ההסתברות שהשאלה הייתה שאלה בהיסטוריה?

ג. יצחק נשאל בסך הכול 42 שאלות. מהי תוחלת מספר השאלות עליהן ענה תשובה נכונה?

פתרון

נגדיר: A = שאלה בהיסטוריה, B = שאלה בספורט, C = שאלה בפוליטיקה

T = יצחק ענה תשובה נכונה

$$P(A) = 0.5, \quad P(T | A) = 0.4$$

$$P(B) = 0.3, \quad P(T | B) = 0.8$$

$$P(C) = 0.2, \quad P(T | C) = 0.7$$

א.

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T | A)P(A) + P(T | B)P(B) + P(T | C)P(C) = \\ &= 0.4 \times 0.5 + 0.8 \times 0.3 + 0.7 \times 0.2 = 0.58 \end{aligned}$$

ב.

$$P(A | T) = \frac{P(T | A)P(A)}{P(T)} = \frac{0.4 \times 0.5}{0.58} = 0.3448$$

ג.

$Y =$ מספר השאלות עליהן יצחק ענה תשובה נכונה: $E(Y) = 42 \times 0.58 = 24.36$ $Y \sim B(42, 0.58) \Rightarrow$

שאלה 1 (30 נקודות - כל סעיף 6 נקודות)

שמעון מוכר תערוכת ביתית להכנת עוגיות. נגדיר: X = משקל חבילת תערוכת (בק"ג). סטיית התקן של משקל חבילה היא 0.03 ק"ג. נתונה פונקציית הצפיפות של X :

$$f(x) = \begin{cases} 20x & 0.45 \leq x \leq 0.55 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

א. מה ההסתברות שמשקל חבילה אקראית יהיה פחות מ- 0.5 ק"ג?

ב. אם ידוע שמשקל חבילה גדול מ- 0.5, מה ההסתברות שהמשקל של החבילה קטן מ- 0.52?

ג. מה התוחלת של משקל חבילה?

- ד. מה ההסתברות שממוצע משקלן של 36 חבילות יהיה פחות מ- 0.502 ק"ג?
- ה. מה ההסתברות שמבין 100 חבילות שנמכרו, משקלן של 35 חבילות לכל היותר היה פחות מ- 0.5 ק"ג כל אחת?

פתרון

א.

$$P(X < 0.5) = F(x) = \int_{0.45}^{0.5} 20x dx = 20 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{0.45}^{0.5} = 0.475$$

ב.

$$P(X < 0.52 | X > 0.5) = \frac{P(0.5 < X < 0.52)}{P(X > 0.5)} = \frac{\int_{0.5}^{0.52} 20x dx}{1 - P(X < 0.5)} = \frac{0.204}{1 - 0.475} = 0.3886$$

ג.

$$E(X) = \int_{0.45}^{0.55} 20x^2 dx = 20 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{0.45}^{0.55} = 0.5017$$

ד.

$$\bar{X}_{36} \sim N\left(0.5017, \frac{0.03^2}{36}\right)$$

$$P(\bar{X}_{36} < 0.502) \sim \Phi\left(\frac{0.502 - 0.5017}{0.03/6}\right) = \Phi(0.06) = 0.5239$$

ה.

נגדיר: $Y =$ מספר החבילות שמשקלן פחות מ- 0.5 ק"ג, $Y \sim B(100, 0.475)$

$$100 \times 0.475 > 5, \quad 100 \times (1 - 0.475) > 5$$

קרוב נורמלי לבינומי: $Y \sim N(47.5, 24.94)$

$$P(Y \leq 35) = \Phi\left(\frac{35 + 0.5 - 47.5}{\sqrt{24.94}}\right) = \Phi(-2.4) = 1 - \Phi(2.4) = 1 - 0.9918 = 0.0082$$

שאלה 3 (16 נקודות – כל סעיף 8 נקודות)

בקזינו מציעים משחק חדש: בסבוב ידית של מכונה מתקבל מספר X לפי התפלגות נורמלית עם תוחלת 0 ושונות σ^2 . אם X חיובי השחקן מקבל סכום כסף השווה ל- X , ואם X שלילי השחקן משלם לקזינו סכום כסף השווה ל- $|X|$ (כלומר השחקן מפסיד $|X|$ כאשר X שלילי).

- א. 36 אורחים שיחקו במשחק. מה ההסתברות שהרווח הכולל שלהם גדול מ- 12σ ?
- ב. יצחק שיחק במשחק 64 פעמים. מה ההסתברות שהרווח הממוצע למשחק היה לכל היותר 0.125σ ?

פתרון

$$X \sim N(0, \sigma^2)$$

א.

$$\sum_{i=1}^{36} X_i \sim N(0, 36\sigma^2) \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{36} X_i > 12\sigma\right) = 1 - \Phi\left(\frac{12\sigma - 0}{6\sigma}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ב.

$$\bar{X}_{36} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{64}\right) \Rightarrow P(\bar{X}_{36} \leq 0.125\sigma) = \Phi\left(\frac{0.125\sigma}{\sigma/8}\right) = \Phi(1) = 0.8413$$

שאלה 4 (28 נקודות – כל סעיף 7 נקודות)

נתונה טבלת התפלגות משותפת של המשתנים Y, X :

Y				
X	1	2	3	$P_X(x)$
1	0.06		0.24	0.7
2	0.02			
$P_Y(y)$				

נתון: $P(Y = 3 | X = 2) = 0.4$.

- א. העתיקו את הטבלה למחברת הבחינה והשלימו אותה. האם Y, X בלתי תלויים?
- ב. מהי התוחלת של Y אם נתון $X = 1$?
- ג. מהי השונות של Y אם נתון $X = 1$?
- ד. חשבו את ההסתברות: $P\left(\frac{X}{Y} \geq 1\right)$.

פתרון

א.

$$P(Y = 3 | X = 2) = \frac{P(Y = 3, X = 2)}{P(X = 2)} = \frac{P(Y = 3, X = 2)}{0.3} = 0.4 \Rightarrow P(Y = 3, X = 2) = 0.12$$

Y X	1	2	3	$P_X(x)$
1	0.06	0.4	0.24	0.7
2	0.02	0.16	0.12	0.3
$P_Y(y)$	0.08	0.56	0.36	1

$$P(X = 1, Y = 2) = 0.06 \neq P(X = 1)P(Y = 1) = 0.7 \times 0.08 = 0.056$$

ج

$$E(Y | X = 1) = 1 \times \frac{0.06}{0.7} + 2 \times \frac{0.4}{0.7} + 3 \times \frac{0.24}{0.7} = 2.26$$

د

$$V(Y^2 | X = 1) = E(Y^2 | X = 1) - E^2(Y | X = 1)$$

$$E(Y^2 | X = 1) = 1^2 \times \frac{0.06}{0.7} + 2^2 \times \frac{0.4}{0.7} + 3^2 \times \frac{0.24}{0.7} = 5.457$$

$$V(Y^2 | X = 1) = 5.457 - 2.26^2 = 0.35$$

هـ

$$P\left(\frac{X}{Y} \geq 1\right) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) = 0.24$$