

אלגברה לינארית
תרגיל מספר 4 - מטריצות הפיכות

שאלה 1

עבור כל אחת מהמטריצות הבאות, קבעו אם היא הפיכה או לא. במידה והיא הפיכה מצאו את המטריצה ההפוכה לה:

$$\begin{aligned} \text{א. } A &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -27 & 45 \end{bmatrix} & \text{ב. } B &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \\ \text{ג. } C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} & \text{ד. } D &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \\ -5 & 8 & 30 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 2

פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א. } Ax = b \text{ כאשר } A &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 31 \end{bmatrix} \\ \text{ב. } Ax = b \text{ כאשר } A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 4 & -5 & 6 \\ -5 & 8 & 30 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 3

A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$ המקיימת את המשוואה $3A^4 - 5A^3 + 7A^2 - 9A + 11I = 0$.
א. הוכיחו כי A הפיכה.

ב. מצאו נוסחא של A^{-1} (ביטוי בו מופיעים I, A ומספרים בלבד).

שאלה 4

A, B, C מטריצות ריבועיות הפיכות מאותו סדר המקיימת את המשוואה $A^2(B - X)B^tC^{-1} = 2I$.
פתרו את המשוואה עבור המטריצה הלא ידועה X (מצאו ביטוי בו מופיעים $A, B, C, A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}$ ומספרים בלבד).

שאלה 5

A מטריצה ריבועית (מסדר $n \times n$) המקיימת $A^3 = 0$.

א. הוכיחו כי A אינה הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I - A$ הפיכה.

הדרכה: הוכיחו כי לכל מטריצה ריבועית X מתקיים $(I - X)(I + X + X^2) = I - X^3$.

ג. האם למערכת $Ax = 0$ קיים פתרון לא טריביאלי?

ד. האם למערכת $Ax = x$ קיים פתרון לא טריביאלי?

שאלה 6

נתונה המטריצה $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ (θ פרמטר).

א. עבור $\theta = 30^\circ$, חשבו את R_θ .

ב. עבור $\theta = 30^\circ$, עבור הוקטור $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ציירו במישור את הוקטור v ואת הוקטור $R_\theta \cdot v$ (באותו מישור).

עשו זאת שוב עבור הוקטור $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

מה "עושה" לוקטור v_1 הפעולה של כפל (משמאל) במטריצה R_θ ? מה עושה הפעולה לוקטור v_2 ?

מה עושה הפעולה לוקטור כלשהו v : עבור θ כללי?

ג. מה הפעולה ההפוכה לפעולה שעושה כפל (משמאל) ב R_θ ?

ד. נסו לנחש מטריצה X כך שכפל וקטור v (משמאל) במטריצה X יבצע את הפעולה ההפוכה הזו.

ה. חשב המכפלה $X \cdot R_\theta$ (או $R_\theta \cdot X$). מה התוצאה? רמז: תוצאה צריכה להיות I .

ו. מהי R_θ^{-1} ?

שאלה 7

עבור כל אחד מהסעיפים קבעו אם הוא נכון או לא נכון. אם הוא נכון - יש להוכיח, ואם לא - יש להפריך על ידי דוגמא נגדית.

א. אם A היא מטריצה הפיכה, אז קיימת מטריצה $B \neq 0$, כך ש: $AB = 0$.

ב. אם A היא מטריצה ריבועית שאינה הפיכה, אז קיימת מטריצה $B \neq 0$, כך ש: $AB = 0$.

ג. אם $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, כאשר b, c, d הינם קבועים כלשהם, אז גם ל: A^{-1} צורה כזו. כלומר:

A^{-1} משולשת עליונה עם 1-ים באלכסון הראשי.

ד. תהיינה A ו B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$ כך ש: AB הפיכה. אז גם A וגם B הפיכות.

ה. כל שתי מטריצות הפיכות מסדר $n \times n$ הן שקולות שורה.

שאלה 8

נסמן $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. נתון כי הוקטור $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ הוא פתרון של המערכת $Ax = 0$.

א. כמה פתרונות יש למערכת $Ax = 0$?

ב. כמה פתרונות יש למערכת $DAx = 0$, כאשר D היא המטריצה משאלה 7ד?

ג. הוכיחו כי לכל מטריצה B , הוקטור v הוא פתרון של המערכת $BAx = 0$.

ד. הוכיחו ללא חישוב כי $A^t A$ היא מטריצה סימטרית שאינה הפיכה.

* הוכיחו את כל הסעיפים ללא חישובים.

שאלה 9 (בוחן)

נתונות A, B שתי מטריצות מסדר $n \times n$. הוכיחו שאם $A + B, A, B$ מטריצות הפיכות, אז מתקיים: $B^{-1}(B + A) = I + B^{-1}A$, $BA^{-1} + I = (B + A)A^{-1}$ ו- $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(B + A)^{-1}B$.

שאלה 10 (בוחן)

נתונה מטריצה ריבועית A שמקיימת $A^3 + A + I = 0$.
נתונה המשוואה $A \cdot (X + 2A^2) \cdot A = I$, כאשר X מטריצה ריבועית.
א. מצאו את הופכית של A .
ב. מצאו את המטריצה X . כתבו את התשובה ללא שימוש בחזקות שליליות של A .