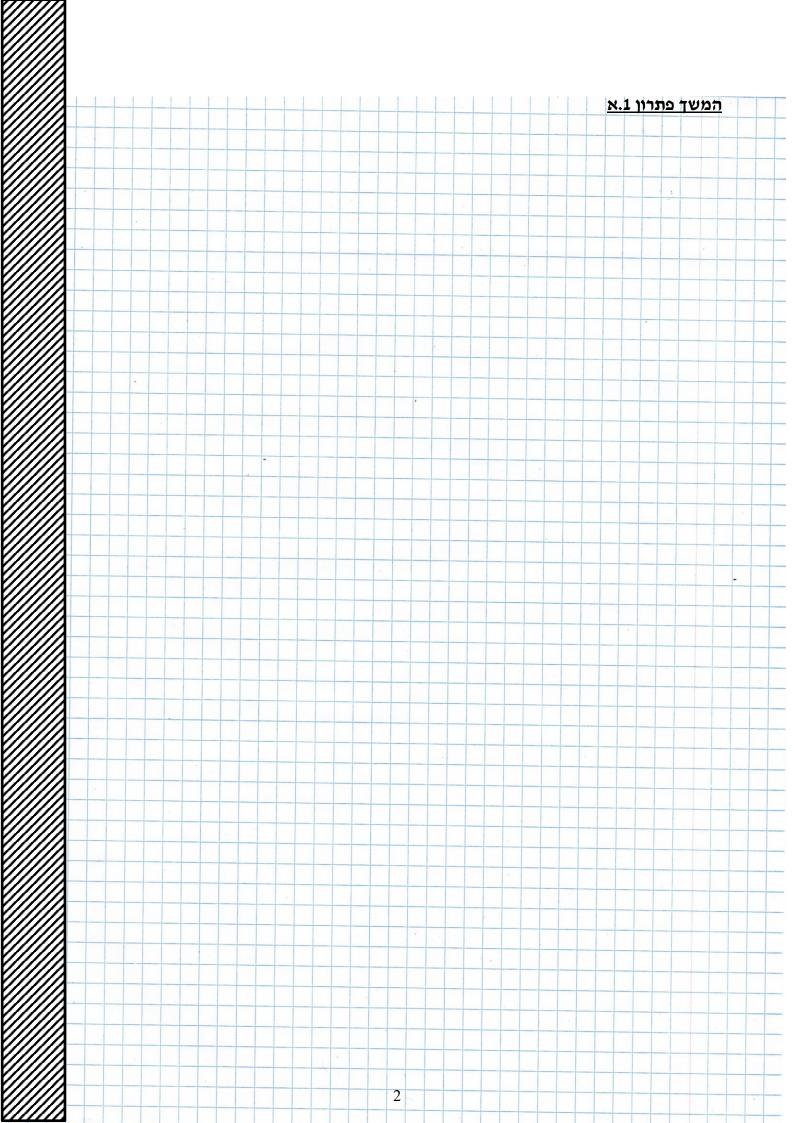
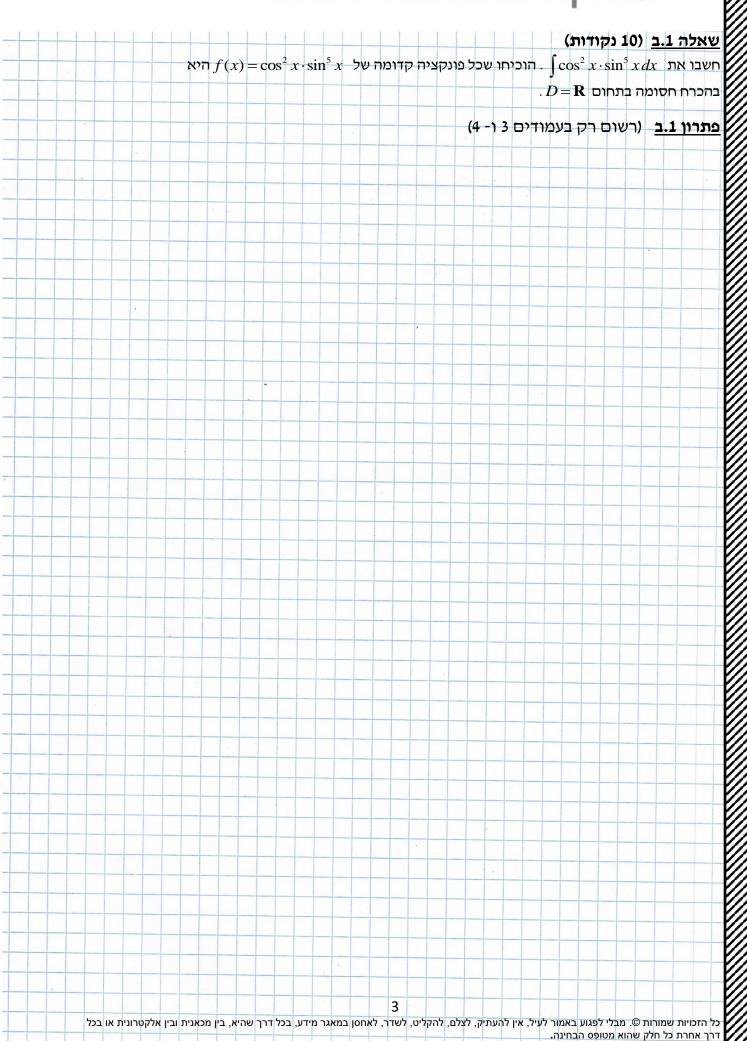
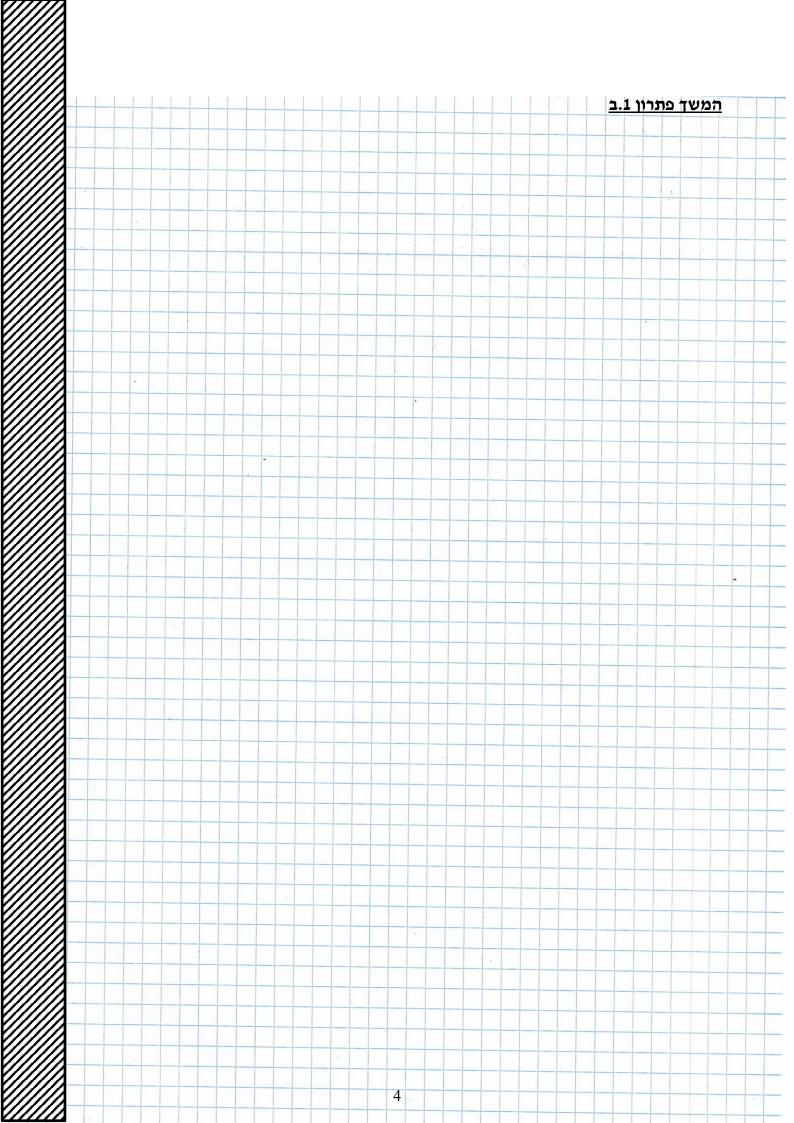


<u>שאלון X</u>	אלון X שאלון	שאלו	שא																_			7			+		(3	711	קו	1 (.0)	N.	1 1	אלו	שא	
ia .			-						. 1	≥ 1	ל ו:	, לכ	a_n	+1	= 2	_\	/2-	$-a_n$	-	1 0	1 =	4	: 17	זיג	הני	לל	י כ	ין ין	על	(a_n)	$\Big)_{n\geq 1}$	IJ,	זדר	יר כ	נגד	
_			-		-	-		-	-	-			-			1			1						. 1	$i \ge$	1 5	לכי	, a	$l_n >$	-1	ש-	יחו	הוכי	1.1	
									. li:	m a	l_n	בול	: הג	אח	צאו	י מו	סופי	ולי	לגב	סת	נכנ	מר	(a_n)	$\Big)_{n\geq 1}$										מצא		
																																				V //
				-	-	-	-	+		-		-		4		-	-			-		(2	ון	1 [ריכ	מרו	בע	. P	ז ר	אוכ	רע)	N	.1	<u>ירון</u>	פת	
				+				-				+		+		+	-			-	+		-		27		-									
																+			+		+	+		-	-		+	1								
_				1		-		-																												
							+	+		-	-	+		+		_		-			-															
								+		-	+	+				+		+	,	+			-	+	-	-	-	-								
																					-			-			-									
																												+	+						-	
						1					-															12										
				-	-	-	-	+	+	-	-		-	+				-			-															
1				-	+		-	+	+	+	+	+		+		+	-	-			+	+		-	-	-	_									
																\dagger		+		+		-	+	-			+	+			-					
																				T						+				1		+			-	
-					_		_		1																											
+	-					-	-		-		-	-	-			-			-	-																
									-	-	+		+	-	+		-	-			-					-		+								
																+				+		-		-		+	-	+	-	+			-			
																									+		+	+		+	-					
		4				-																														
							-	-	-	-	-		-	-	-	-				-																
+									-			+	+	+	+			-	-			-			-	-	-	-	_	_						
													-				+								-	+	+	+	+	-		-			-	
																																+				
-																												T								
+	-	+					-		-		-		-																							
t		+							+	-			+						-							-						1			-	
T											1				+												-	+	+	-		-	-			
																												+		1	+				+	
L																							,													
		+	-											-			1													7						
	+		+									-		-		-	-												+			-				
																													-							
																																	-			
1										1			1		1			1																		V//



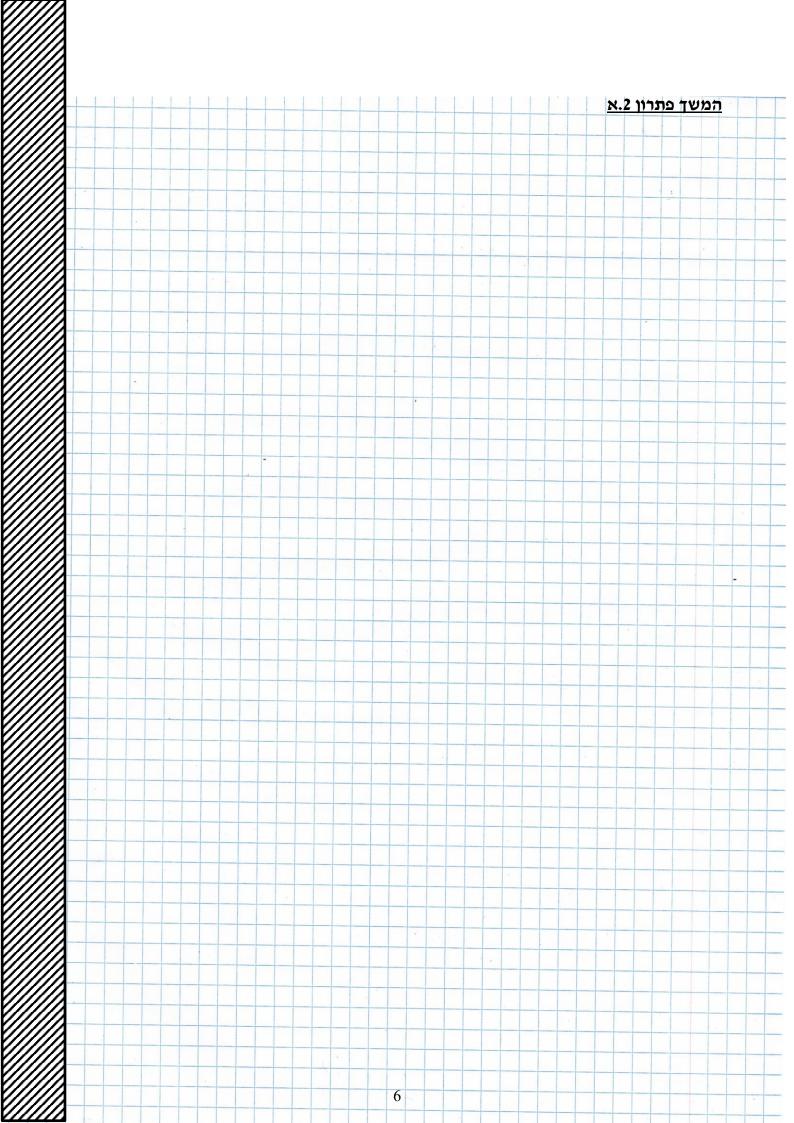






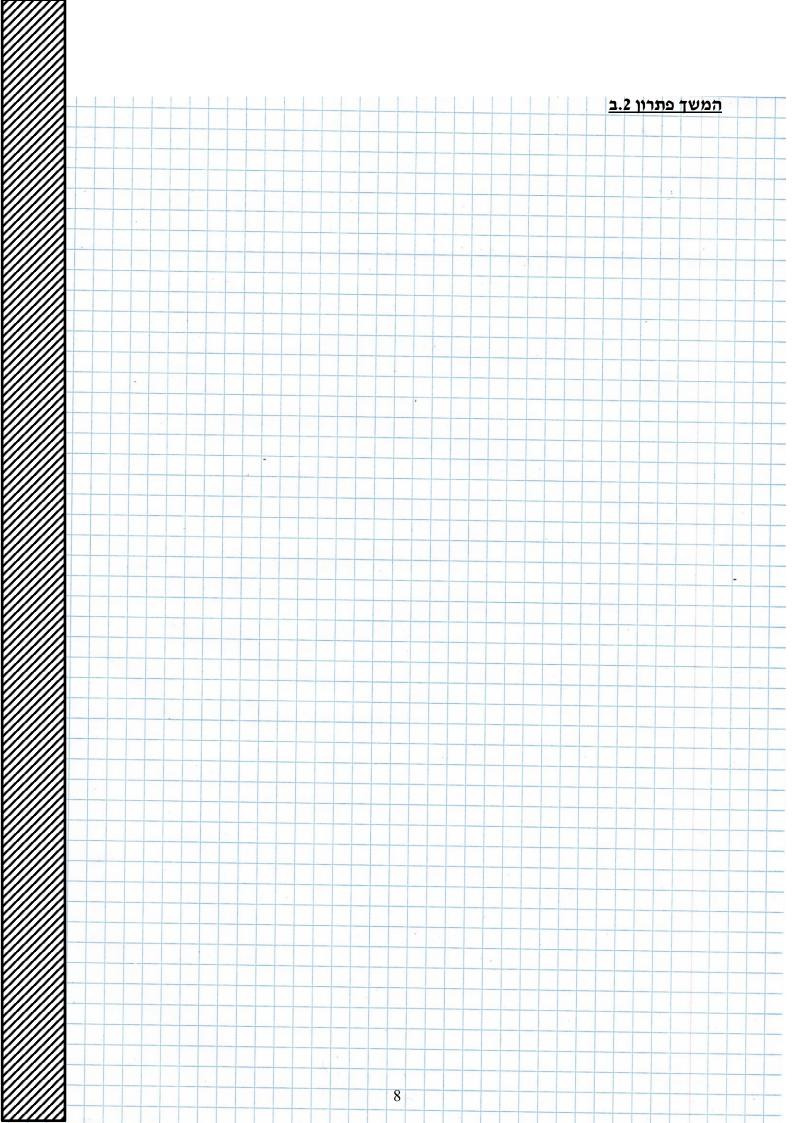


						10 נקודות)) <u>שאלה 2.א</u>
			$\begin{cases} e^{x^2} - x \sin x \\ \sin x \end{aligned}$	$x - \cos x$	r + 0		
		x < 1, f(x) =	$\frac{1}{\sin(z)}$	(x^2)	על ידי:	f דיר פונקציה	הי $m \in \mathbf{R}$. נג
			$\lfloor m, \rfloor$		x = 0		
	רציפות מסוג שני-	ג היא נקודת אי-	צהנקודה 0=:	פר <i>m</i> כך ש	. האם קיים מס	$L = \lim_{x \to 0} f(x)$ ל	מצאו את הגבו
							צל הפונקציה ^ב
					ידים 5 (- 6)	רשום רק בעמו	פתרון 2.א (
				-			
-							
	כאנית ובין אלקטרונית או בכל						
				5			



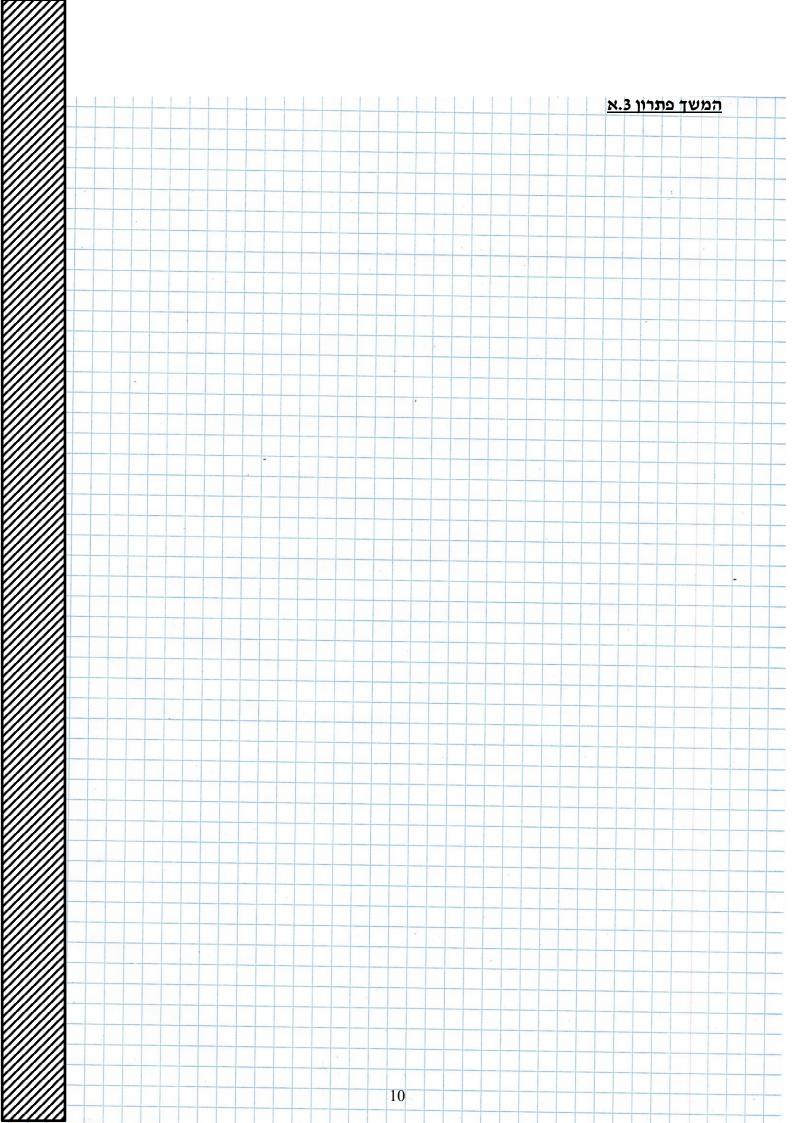
AFEKA בתל-אביב להנדסה בתל-אביב AFEKA בתל-אביב ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING

a = 0 (מקו ! $a = 0$ אור ביתור שהמספר $a = 0$ מקיים $a = 0$ $a = 0$ $a = 0$. נמקו ! $a = 0$ $a = 0$.	. הוכיחו שהמספר M מקיים $\frac{5}{3^{12}}-M \leq \frac{5}{3^{12}}$ ממעור. $M=3+\frac{1}{3^3}$ הוכיחו שהמספר $3\sqrt{28}-M \leq \frac{5}{3^{12}}$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה. ו קירוב של $3\sqrt{28}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.	n=2 ממעלה מתאימה. של פונקציה מתאימה $Taylor$ ממעלה של פונקציה מתאימה.
$0<\sqrt[3]{28}-M\leq rac{5}{3^{12}}$ מקיים $M=3+$ הוכיחו שהמספר M מקיים ווער באל $\sqrt[3]{28}-M$ ממעלה $m=2$ של פונקציה מתאימה. $\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $m=2$	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $M=3+$ הוכיחו שהמספר M מקיים $m=2$ ממעלה $m=2$ של פונקציה מתאימה. $\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $m=2$ ממעלה $m=2$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leq rac{5}{3^{12}}$ מקיים $M=3+$ הוכיחו שהמספר M מקיים $m=2$ ממעלה $m=2$ של פונקציה מתאימה. $\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $m=2$ ממעלה $m=2$ של פונקציה מתאימה.
$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $M=0$ מקיים . $M=0$ מקיים . $M=0$ ממעלה $m=0$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $M=0$ מקיים $M=0$ ממעלה $M=0$ של פונקציה מתאימה. $M=0$ בשל $M=0$ בעזרת פולינום $M=0$ ממעלה $M=0$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $M=0$ מקיים $M=0$ ממעלה $M=0$ של פונקציה מתאימה. $m=2$ ממעלה $m=2$ של פונקציה מתאימה.
. הוכיחו שהמספר M מקיים $\frac{5}{3^{12}}-M\leq \frac{5}{3^{12}}$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה. $\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $n=2$. הוכיחו שהמספר M מקיים $\frac{5}{3^{12}}-M\leq \frac{3}{3^{12}}$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה. $\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$ של פונקציה מתאימה. $Taylor$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$
$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$ של פונקציה מתאימה. $0<\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $0<\sqrt[3]{28}$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$ של פונקציה מתאימה. $0<\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $0<\sqrt[3]{28}$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ מקיים $0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$ של פונקציה מתאימה. $0<\sqrt[3]{28}$ בעזרת פולינום $0<\sqrt[3]{28}$ ממעלה $0<\sqrt[3]{28}$ של פונקציה מתאימה.
$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ ייחו שהמספר M מקיים $n=2$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ ייחו שהמספר M מקיים $n=2$ של פונקציה מתאימה. $n=2$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.	$0<\sqrt[3]{28}-M\leqrac{5}{3^{12}}$ ייחו שהמספר M מקיים $n=2$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.
ארת פולינום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.	n=2 ממעלה מתאימה. של פונקציה מתאימה. $n=2$ ממעלה מעלה	n=2 ממעלה מתאימה. של פונקציה מתאימה. $n=2$ ממעלה מעלה מתאימה.
n=2 ממעלה מתאימה. של פונקציה מתאימה.	n=2 ממעלה מתאימה. של פונקציה מתאימה.	נ פולינום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.
. של פונקציה מתאימה $n=2$ ממעלה $n=2$ ממעלה לינום $Taylor$	של פונקציה מתאימה. $n=2$ ממעלה $Taylor$ מתאימה	של פונקציה מתאימה. $n=2$ ממעלה $n=2$ ממעלה לינום $Taylor$
ום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.	ום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.	ום $Taylor$ ממעלה $n=2$ של פונקציה מתאימה.
של פונקציה מתאימה. $n=2$ של פונקציה מתאימה.	של פונקציה מתאימה. $n=2$ של פונקציה מתאימה.	של פונקציה מתאימה. $n=2$ של פונקציה מתאימה $Taylor$

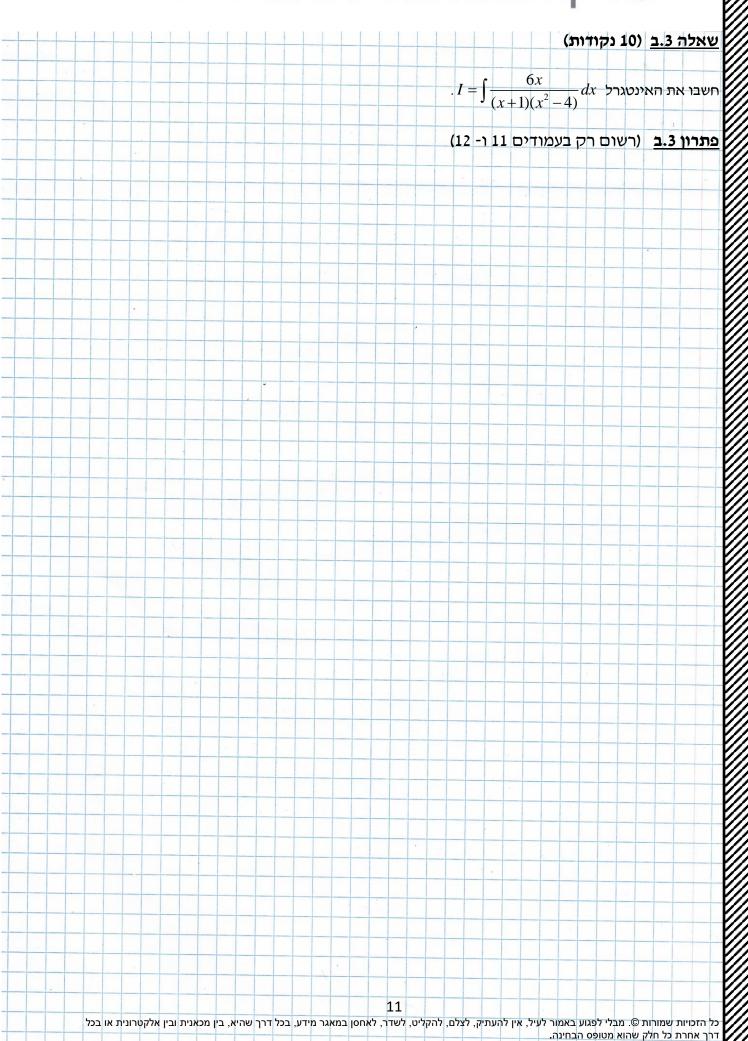


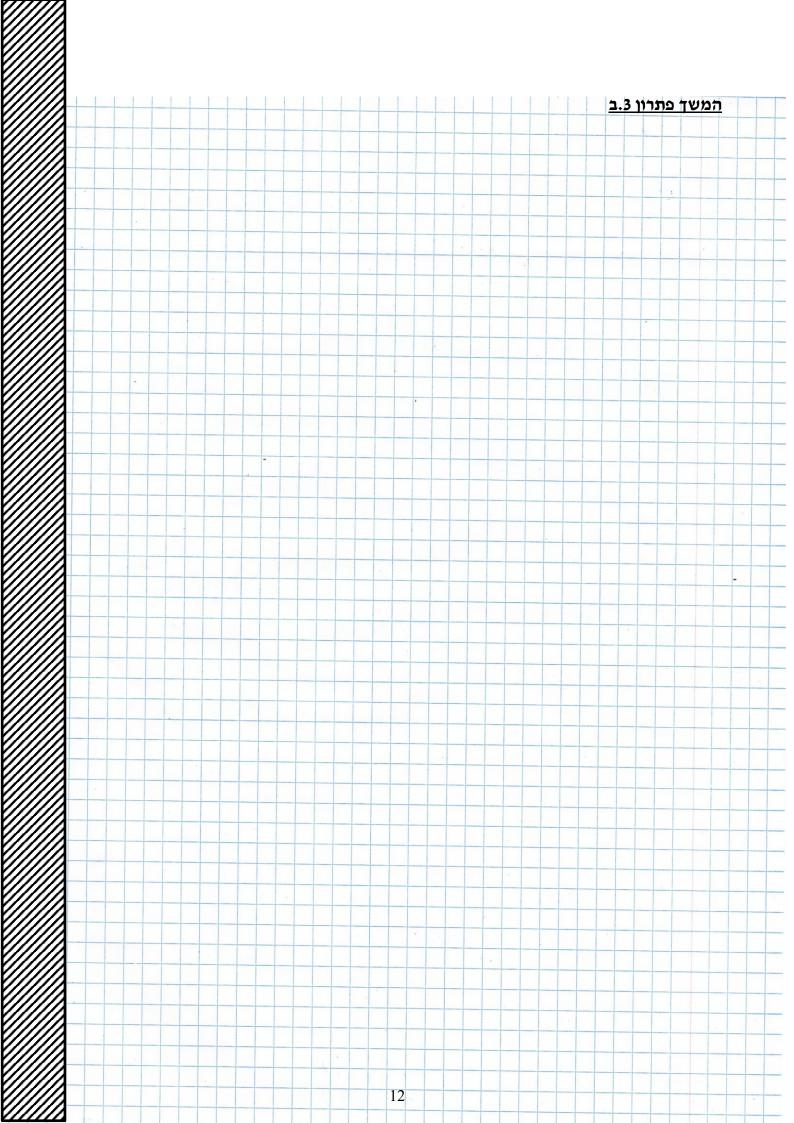


																כל הזכויות שמורות ® מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצ
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---











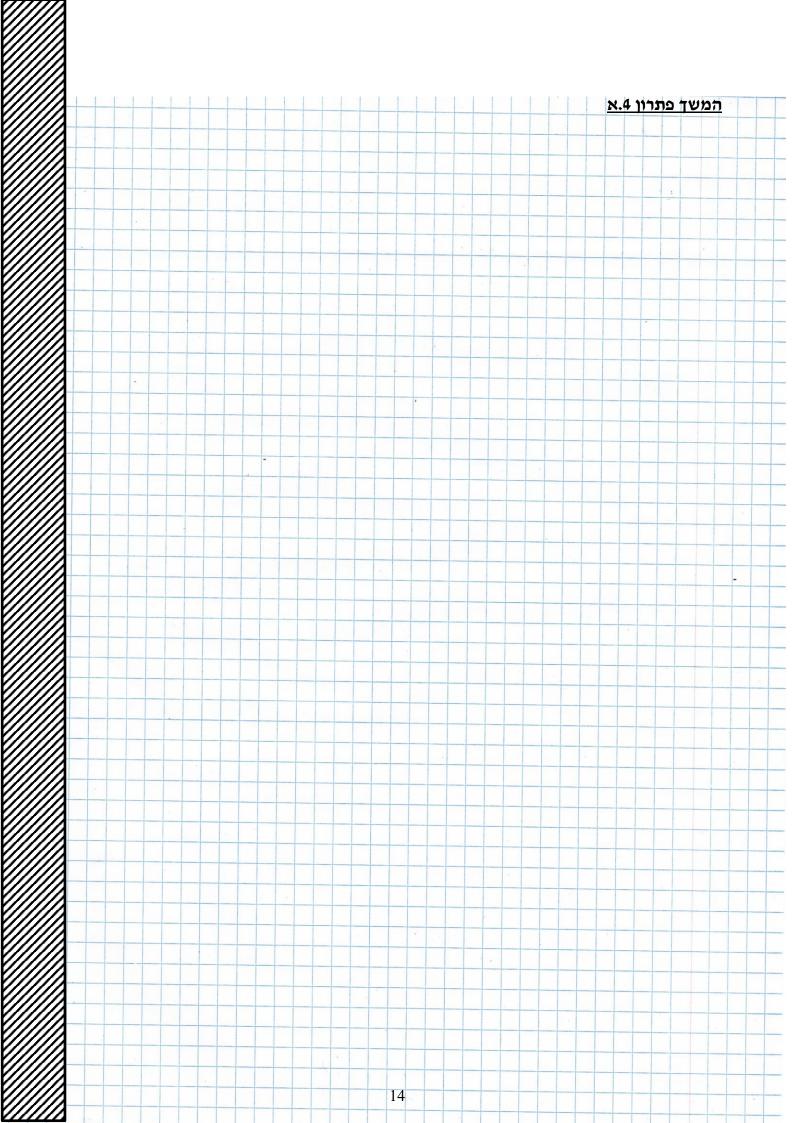
$$x = \sqrt{e}$$
 נסמן ב f נסמן ב f קו המשיק לגרף הפונקציה בנקודה f נסמן ב f נסמן ב f נסמן ברונה פונקציה לגרף הפונקציה בנקודה f

$$.1 \le x \le e$$
 א. (10 נק׳) מצאו את משוואת הקו המשיק L והוכיחו ש- $f(x) \le f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2e}$ מצאו את שטח התחום החסום על ידי:

$$y = f(x)$$
גרף הפונקציה

$$x = \sqrt{e}$$
 משיק לגרף הפונקציה f בנקודה שני הקווים $x = e$ בנקודה $x = e$

פתרון 4.א (רשום רק בעמודים 13 ו- 14)





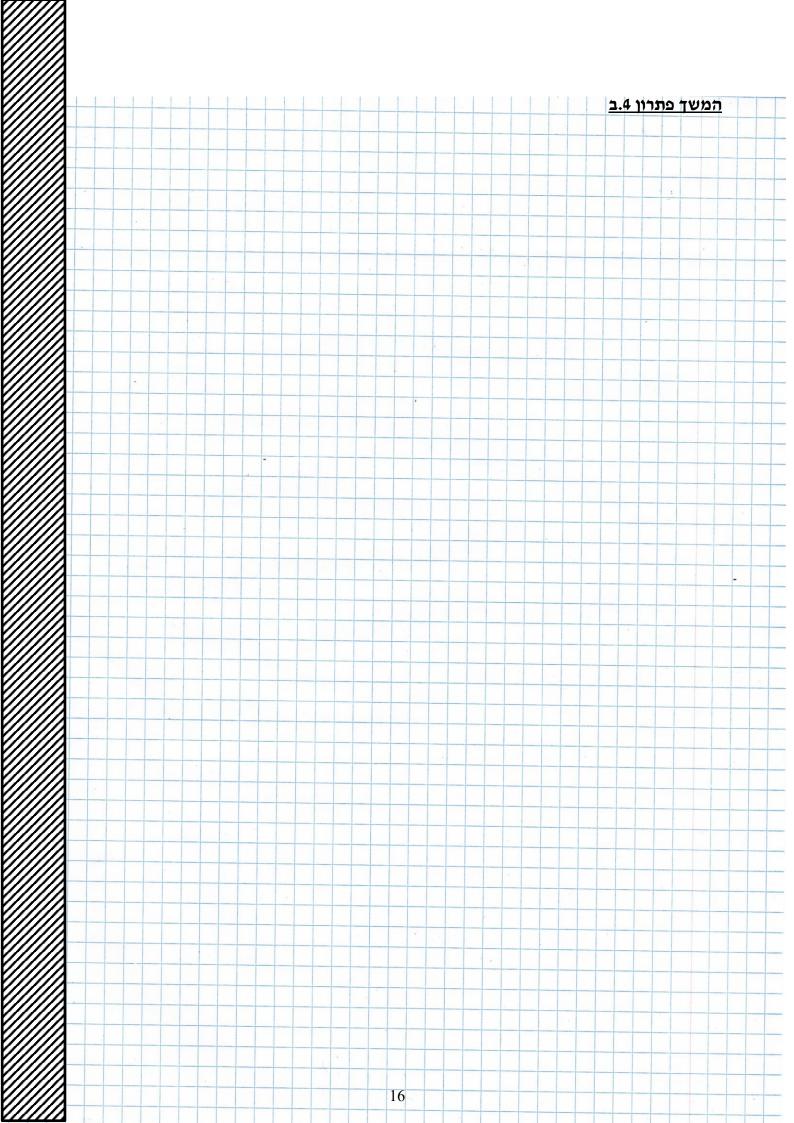
 $x = \sqrt{e}$ נסמן ב $x = \sqrt{e}$ נסמן ב $x = \sqrt{e}$ קו המשיק לגרף הפונקציה $x = \sqrt{e}$ נסמן ב $x = \sqrt{e}$ נסמן ב

 $.1 \le x \le e$ לכל , $f(x) \le f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2e}$ - והוכיחו שL והומשיק , לכל , $f(x) \le f\left(\sqrt{e}\right)$ מצאו את שטח התחום החסום על ידי :

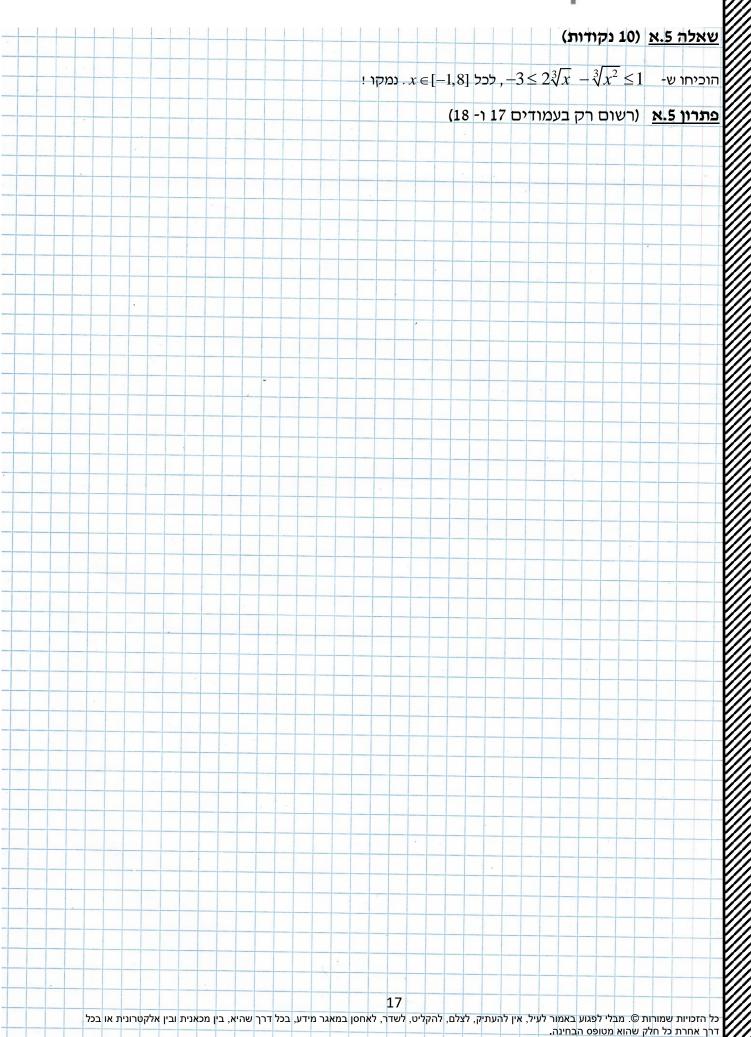
y = f(x) גרף הפונקציה

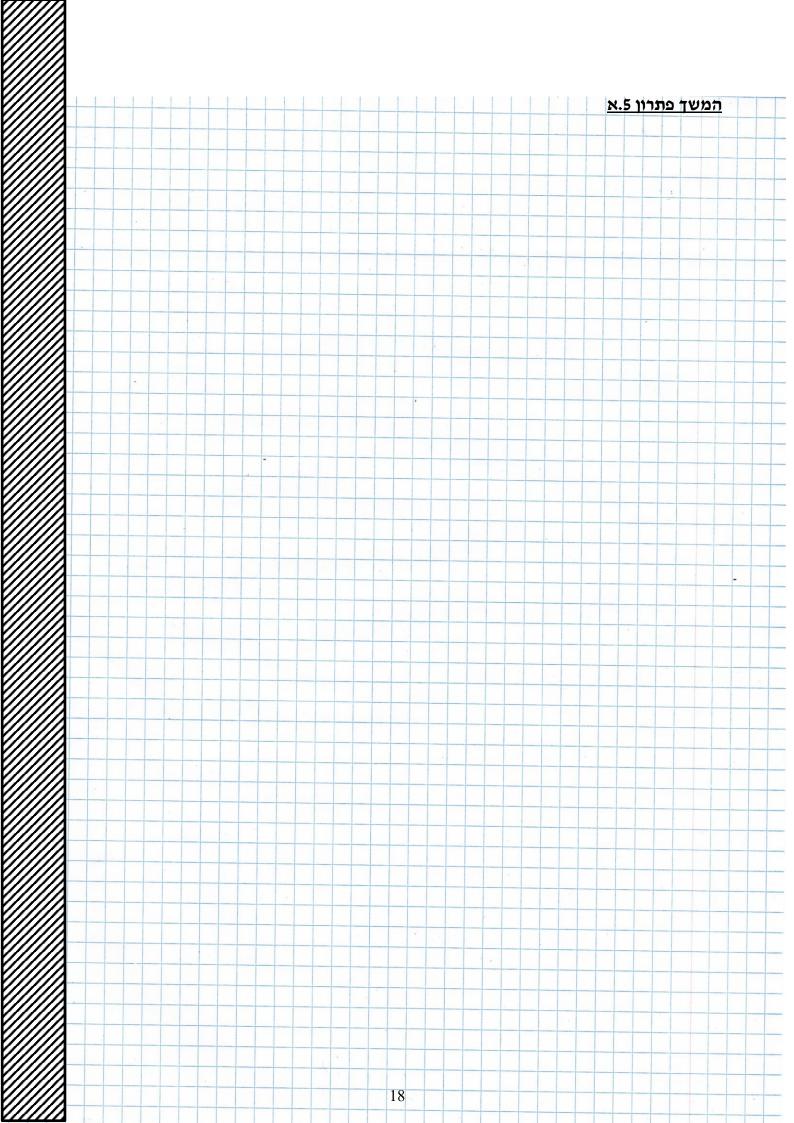
 $x = \sqrt{e}$ משיק לגרף הפונקציה f בנקודה x = e וי x = 1 שני הקווים

פתרון 4.ב (רשום רק בעמודים 15 ו- 16)



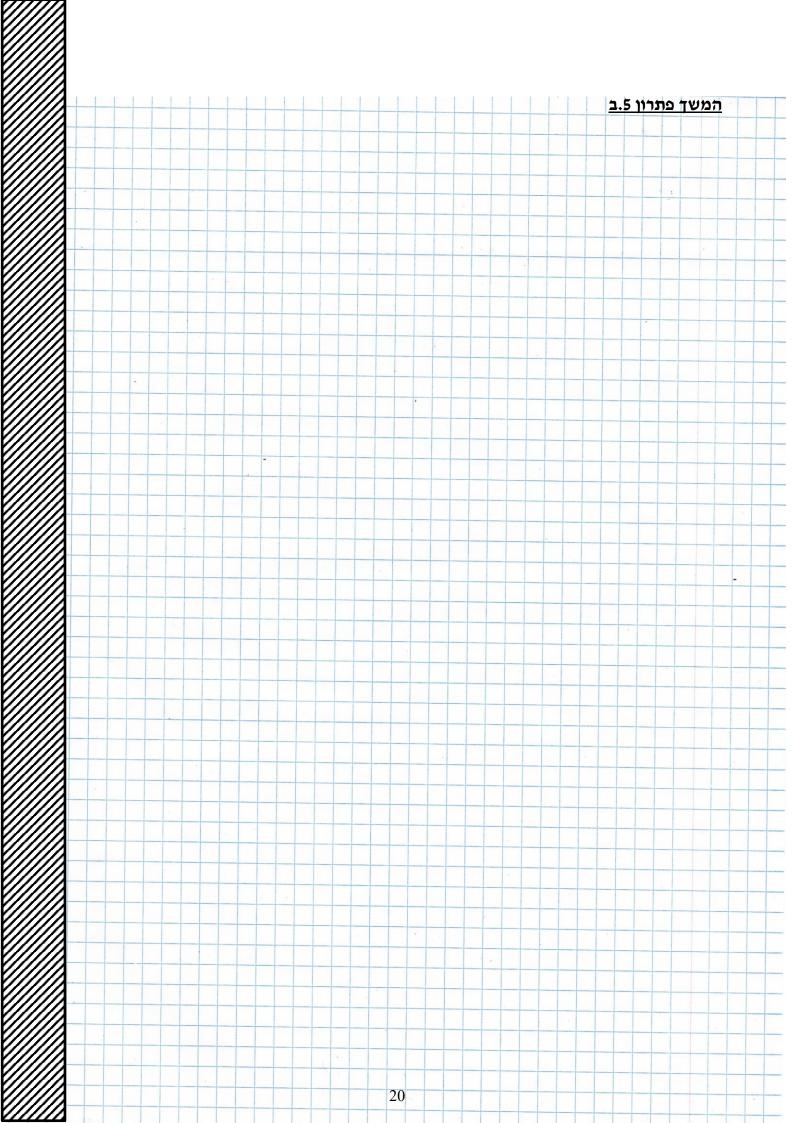




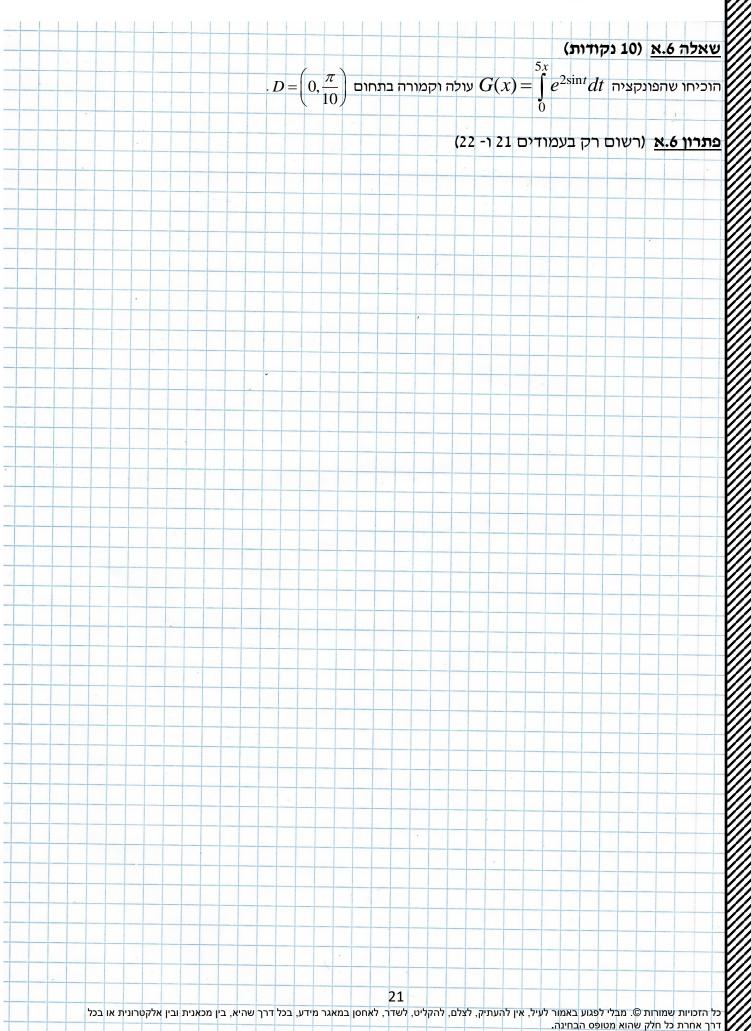


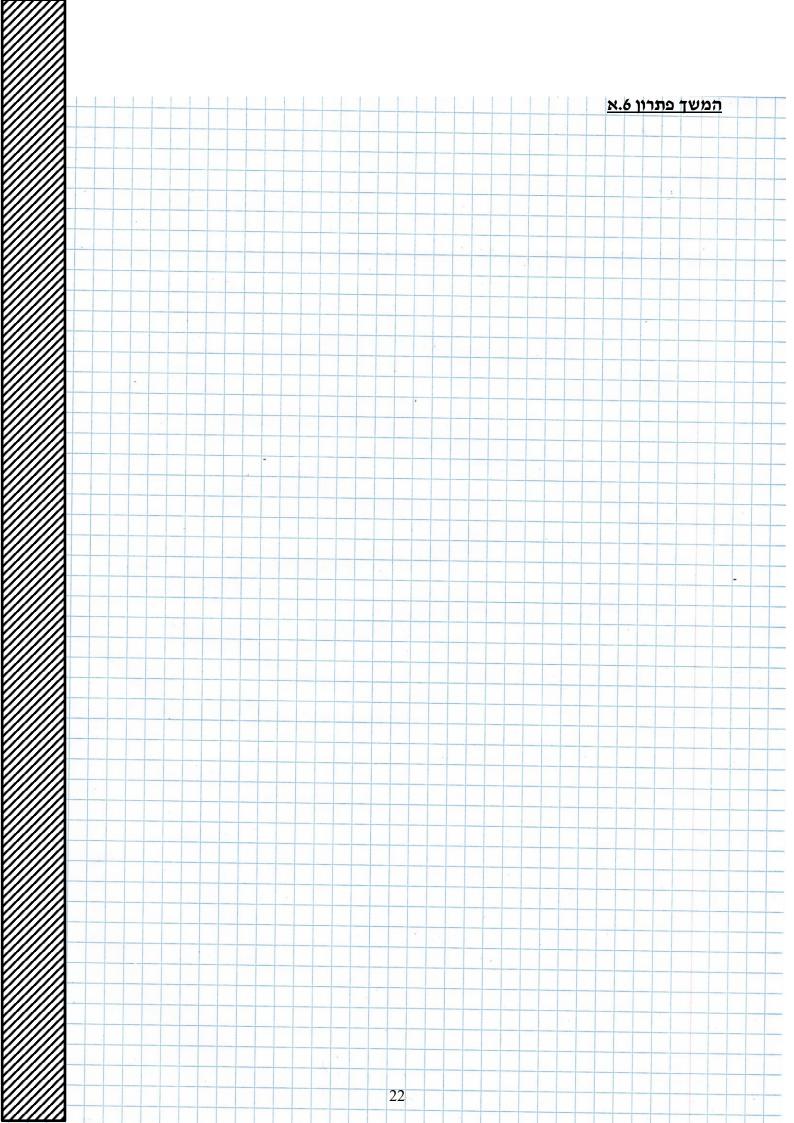


$x \in \mathbf{R}$ ב (10 נקודות) $x \in \mathbf{R}$ ב $y \in \mathbf{R}$ העיבות $y \in \mathbf{R}$ ב $y \in \mathbf{R}$ העיבות $y \in \mathbf{R}$ ב פונקציה חסומה והגרף של $y \in \mathbf{R}$ חותך את הקו הישר $y \in \mathbf{R}$ האחת לפחות. (20 - 119 ב בעמודים 19 ב $y \in \mathbf{R}$ ב (רשום רק בעמודים 19 ב $y \in \mathbf{R}$ ב (רשום רק בעמודים 19 ב $y \in \mathbf{R}$ ב (רשום רק בעמודים 19 ב $y \in \mathbf{R}$ ב (דיייי) ב $y \in \mathbf{R}$ ב	$x\in \mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $x=1$ אלכל, $ f(x) <8+\frac{1}{x^2+1}$ פונקציה רציפה המקיימת בי $f:\mathbf{R}$ כי f פונקציה חסומה והגרף של f חותך את הקו הישר $f:\mathbf{R}$ אחת לפחות.
$x\in \mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $x\in \mathbf{R}$, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$, לכל $f:\mathbf{R}$ בונקציה חסומה והגרף של x חותך את הקו הישר $x\in \mathbf{R}$ פונקציה חסומה והגרף של $x\in \mathbf{R}$ חותך את הקו הישר $x\in \mathbf{R}$ בחות.	$x\in \mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $x=1$ אלכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ אלכל $f:\mathbf{R}$ פונקציה חסומה והגרף של $x=1$ חותך את הקו הישר $x=1$ פונקציה חסומה והגרף של $x=1$ חותך את הקו הישר $x=1$
$x\in \mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $x\in \mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ פונקציה חסומה והגרף של $x\in \mathbf{R}$ חותך את הקו הישר $x\in \mathbf{R}$ לכל בפחות.	$x\in \mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $x=1$ אלכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ אלכל $f:$ פונקציה חסומה והגרף של $f:$ חותך את הקו הישר $f:$ בפחות.
$x\in \mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $x\in \mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ פונקציה רציפה המקיימת ביים את הקו הישר ביים $L\colon y=g(x)=3-2x$ חות.	$x\in \mathbf{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $x=1$ אלכל, $ f(x) <8+\frac{1}{x^2+1}$ אכל בינקציה רציפה המקיימת בינק את הקו הישר בינק את הקו היער בינק את היער בינק את הקו היער בינק את הקו היער בינק את הקו היער בינק את היער בינק את הקו היער בינק את הקו היער בינק את הקו היער בינק את היער בינק את היער בינק את הקו היער בינק את הקו היער בינק את היער
$x\in\mathbf{R}$ נקציה רציפה המקיימת $x\in\mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ לכל $L\colon y=g(x)=3-2x$ יה חסומה והגרף של t חותך את הקו הישר	$x\in\mathbf{R}$ נקציה רציפה המקיימת $x\in\mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ נקציה רציפה המקיימת ב $y=g(x)=3-2$ את הקו הישר $y=g(x)=3-2$
$x\in \mathbf{R}$ ציה רציפה המקיימת $x\in \mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ ציה רציפה המקיימת ביים אות את הקו הישר ביים $L\colon y=g(x)=3-2x$	$x\in \mathbf{R}$ ציה רציפה המקיימת $x\in \mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ ציה רציפה המקיימת ביי את הקו הישר ב $y=g(x)=3-2$
$x\in \mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ רציפה המקיימת לבים, אלכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ מה והגרף של f חותך את הקו הישר f	$x\in\mathbf{R}$ רציפה המקיימת $x\in\mathbf{R}$ לכל, $ f(x) <8+rac{1}{x^2+1}$ מה והגרף של x חותך את הקו הישר $x=3$
$L\colon y=g(x)=3-2x$ והגרף של f חותך את הקו הישר	$L\colon y=g(x)=3-2x$ והגרף של f חותך את הקו הישר
$L\colon y=g(x)=3-2x$ רף של f חותך את הקו הישר	$L\colon y=g(x)=3-2x$ רף של f חותך את הקו הישר
$L \colon y = g(x) = 3 - 2x$ של f חותך את הקו הישר	L: $y=g(x)=3-2x$ של f חותך את הקו הישר
L: $y = g(x) = 3 - 2x$ חותך את הקו הישר f	L: $y=g(x)=3-2x$ חותך את הקו הישר f
L: $y = g(x) = 3 - 2x$ חותך את הקו הישר	L: $y=g(x)=3-2x$ חותך את הקו הישר
$L \colon y = g(x) = 3 - 2x$ תך את הקו הישר	L: $y = g(x) = 3 - 2x$ תך את הקו הישר
$x \in \mathbb{R}$ לככל, $ f(x) < 8 + -\frac{x}{x}$ $L : y = g(x) = 3 - 2x$ את הקו הישר	$x \in \mathbb{R}$ לכל, $ f(x) < 8 + \frac{1}{x}$ בו. $y = g(x) = 3 - 2x$ את הקו הישר
$x \in \mathbb{R}$ אלכל, $ f(x) < 8$. ב. הקנ הגשר $x \in \mathbb{R}$ אור אור איז	$x \in \mathbb{R}$ לככל, $ f(x) < 8$. $L : y = g(x) = 3 - 2x$ הקנ הישר
$x \in \mathbb{R}$ אלסל, $ f(x) $ לכל $L: y = g(x) = 3 - 2x$ און הישר $g(x) = 3 - 2x$ ה	$x \in \mathbb{R}$ אלכל, $ f(x) < L: y = g(x) = 3 - 2x$ זו הישר
$x \in \mathbb{R} \text{ bdd}, f(x) $ $L : y = g(x) = 3 - 2x \text{ degree}$	$x \in \mathbb{R}$ און אינער אייער אינער אייער אינער אייער אינער אייער אינער א
$x \in \mathbb{R} \text{ 555, } $ $L : y = g(x) = 3 - 2x - $	$x \in \mathbb{R} \text{ 505}, $ $L: y = g(x) = 3 - 2x - 3$
$x \in \mathbb{R} \text{ by:}$ $L: y = g(x) = 3 - 2$	L : y = g(x) = 3 - 2
$x \in \mathbb{R}$ $L : y = g(x) = 3$	$ \begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ L : y = g(x) = 3 \end{array} $
$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	L : y = g(x) =

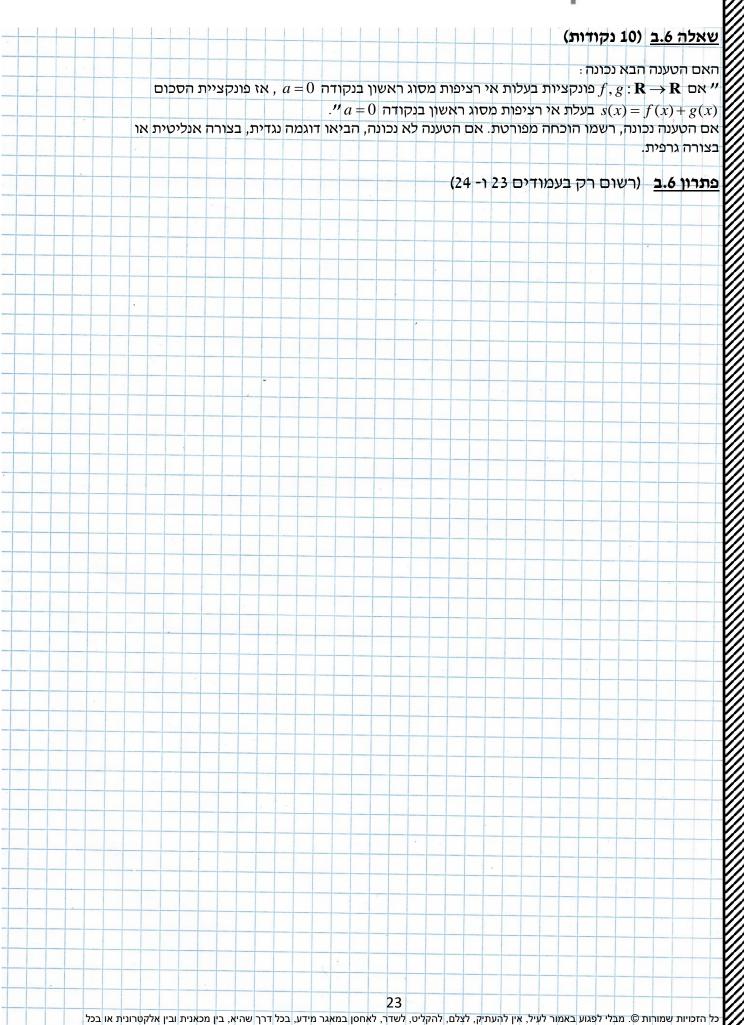




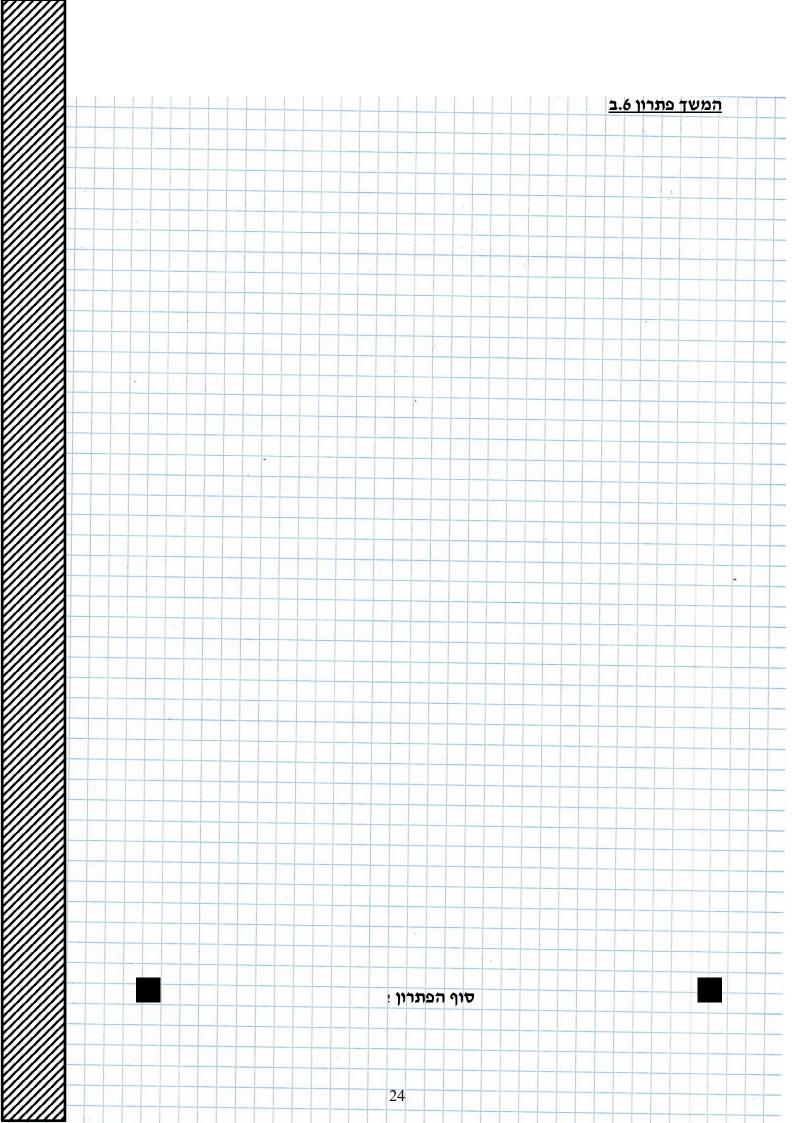




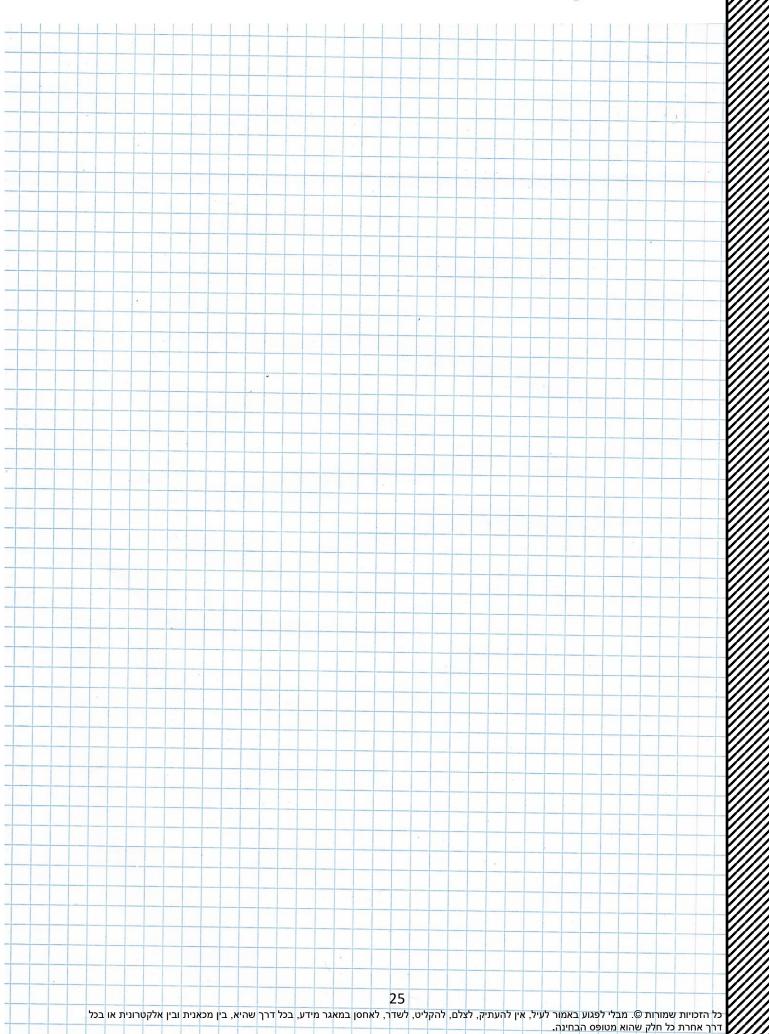


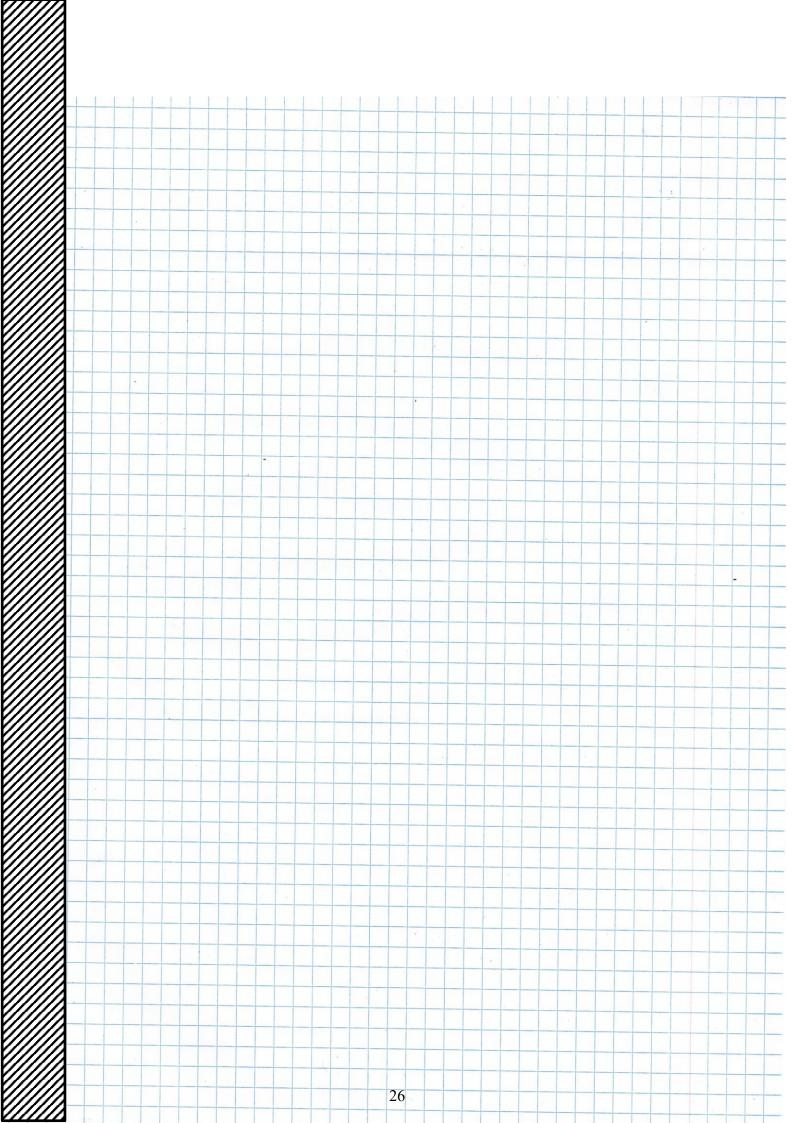


דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

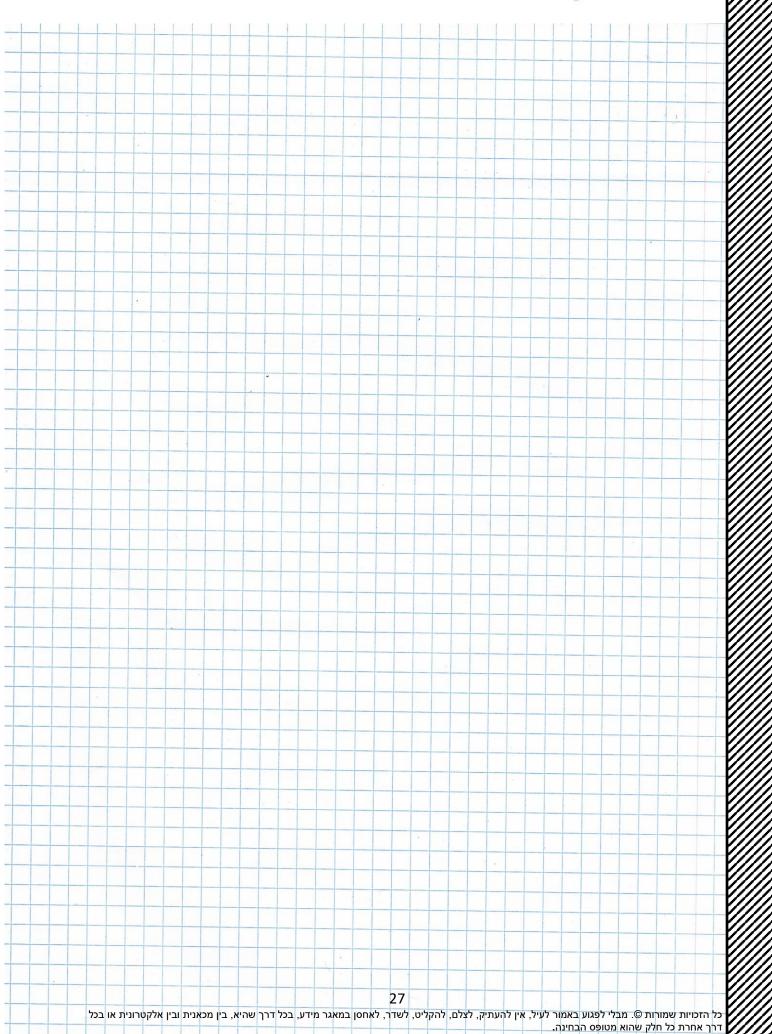


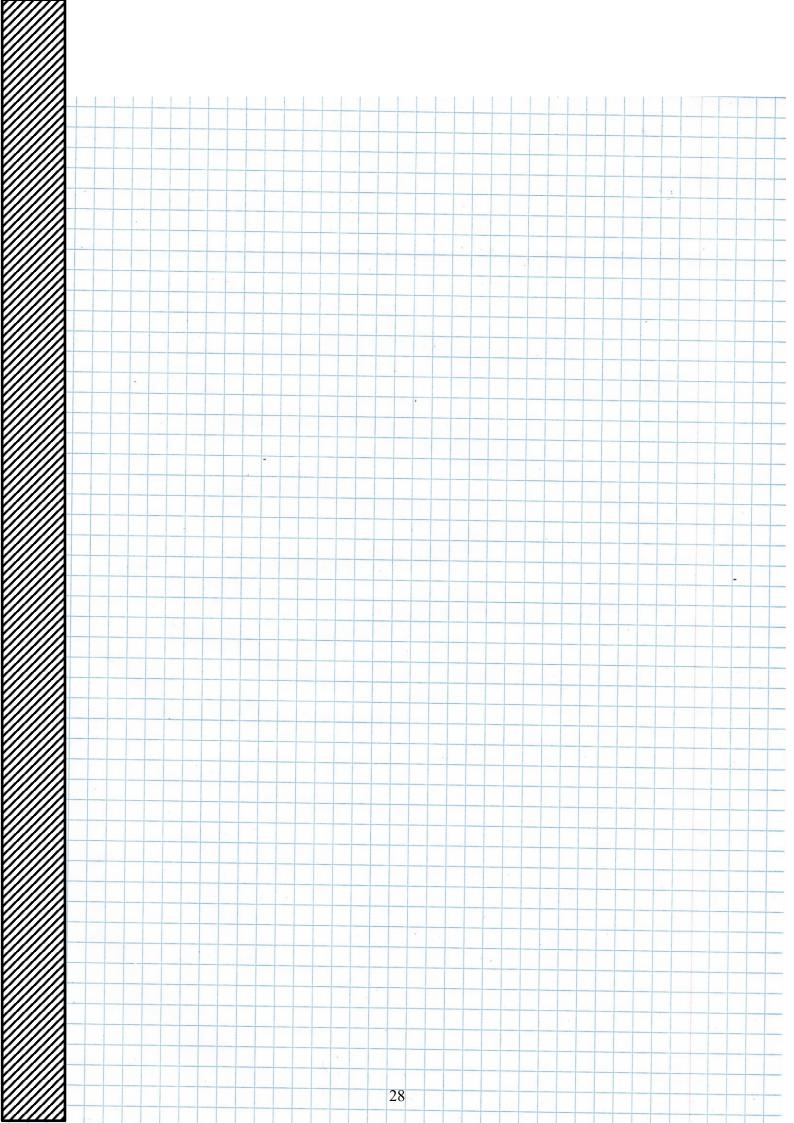














פתרון X מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פתרון שאלה 1.א (10 נקודות)

. $1 < a_1 = \frac{7}{4} < 2$: מתקיים n = 1 עבור $n \in \mathbb{N}$ לכל , $1 < a_n < 2$ -ש $1 < a_k < 2$ - הטענה מתקיים מתקיים הטענה (כונה, כלומר שעבור האינדוקציה: נניח שעבור n = k

: מוכיח שגם עבור n=k+1 הטענה נכונה

$$\begin{array}{lll} 1 < a_k < 2 & \Rightarrow & -2 < -a_k < -1 & \Rightarrow 0 < 2 - a_k < 1 & \Rightarrow 0 < \sqrt{2 - a_k} < 1 & \Rightarrow \\ 0 > -\sqrt{2 - a_k} > -1 & \Rightarrow & 2 > \underbrace{2 - \sqrt{2 - a_k}}_{a_{k+1}} > 1 \Rightarrow 1 < a_{k+1} < 2 \end{array}$$

2. נוכיח כי הסדרה היא מונוטונית יורדת ואז יהיה לה גבול סופי כי היא חסומה (מלמטה).

.
$$a_2=\frac{3}{2}=2-\sqrt{2-\frac{7}{4}}< a_1=\frac{7}{4}$$
: מתקיים $n=1$ עבור $n\in \mathbb{N}$ לכל , $a_{n+1}< a_n$ עבור נוכיח באינדוקציה ש

. $\boxed{a_{k+1} < a_k}$ -ש מתקיים מתקיים הטענה נכונה, הטענה n=k הנחת האינדוקציה נניח שעבור

$$: n = k + 1$$
נוכיח שטענת האינדוקציה נכונה גם עבור
$$a_{k+1} < a_k \quad \Rightarrow \quad -a_{k+1} > -a_k \quad \Rightarrow \quad 2 - a_{k+1} > 2 - a_k \quad \Rightarrow \sqrt{2 - a_{k+1}} > \sqrt{2 - a_k} \quad \Rightarrow \\ \underbrace{2 - \sqrt{2 - a_{k+1}}}_{a_{k+2}} < \underbrace{2 - \sqrt{2 - a_k}}_{a_{k+1}} \quad \Rightarrow \quad a_{k+2} < a_{k+1}$$

 $a_{n+1}=2-\sqrt{2-a_n}$: נסמן ב- L את הגבול. נעבור לגבול בעזרת כלל הנסיגה לבחיגה ועבור לגבול בעזרת ל

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \sqrt{2 - a_n}\right) \quad \Rightarrow L = 2 - \sqrt{2 - L} \Rightarrow \sqrt{2 - L} = 2 - L \quad \Rightarrow 2 - L = \left(2 - L\right)^2$$

$$\Rightarrow L = 1 \quad \text{or} \quad L = 2$$

(פוסלים את האפשרות $a_{\scriptscriptstyle 1}=\frac{7}{4}$ כי L=2 והסדרה יורדת ממש.) (פוסלים את פוסלים שהגבול שווה ל



פתרון שאלה 1.ב (10 נקודות)

$$F(x) = \int (\cos^2 x \cdot \sin^5 x) dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx$$

$$= \left\{ \cos x = t, -\sin x dx = dt, \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \sin^2 x = 1 - t^2 \right\}$$

$$= -\int t^2 (1 - t^2)^2 dt = -\int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) dt = -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= -\frac{(\cos x)^3}{3} + \frac{2(\cos x)^5}{5} - \frac{(\cos x)^7}{7} + C$$

מסיקים ש-

$$|F(x)| = \left| -\frac{(\cos x)^3}{3} + \frac{2(\cos x)^5}{5} - \frac{(\cos x)^7}{7} + C \right| \le \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7} + |C|$$

 $D=\mathbf{R}$ היא פונקציה חסומה איא פונקציה קדומה y=F(x) הדומה בתחום , $x\in\mathbf{R}$



פתרון שאלה 2.א (10 נקודות)

. נוכיח שהגבול $L = \lim_{x \to 0} f(x)$ קיים וסופי.

$$\text{LHôpital Support} : \text{L'Hôpital Support}$$

$$\text{L} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} \cdot \frac{e^{x^2} - x \sin x - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} - \sin x - x \cos x + \sin x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} - x \cos x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{(2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}) - (\cos x - x \sin x)}{2} = \frac{(2 \cdot 1 + 0) - (1 - 0)}{2} = \frac{1}{2}$$

: L'Hôpital **הערה:** אפשר גם להשתמש רק פעם אחד בכלל

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x^2} \cdot \frac{e^{x^2} - x \sin x - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} - \sin x - x \cos x + \sin x}{2x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} - x \cos x}{2x} = \lim_{x \to 0} e^{x^2} - \frac{\cos x}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

-לכן הגבול מסיקים . $\lim_{x\to 0} f(x) = 0.5$ לכן הגבול

- x=0 אז הפונקציה f רציפה בנקודה , m=0.5 אם .1
- x=0 או הפונקציה f בעלת נקודת אי-רציפות סליקה בנקודה $m \neq 0.5$.2

. f מסקנה: לא קיים מספר m כך שהנקודה x=0 היא נקודת אי-רציפות מסוג שני של הפונקציה



פתרון שאלה 2.ב (10 נקודות)

.
$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$$
, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ -ברור ש- $f(x) = \sqrt[3]{x}$

. a=27 ממעלה שביב הנקודה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ הפונקציה של הפונקצה ממעלה Taylor ממעלה בנוסחת

$$f(x) = f(27) + \frac{f'(27)}{1!}(x-27) + \frac{f''(27)}{2!}(x-27)^2 + error$$

: כאשר x = 28 כאשר

$$\sqrt[3]{28} = f(28) = f(27) + \frac{f'(27)}{1!}(28 - 27) + \frac{f''(27)}{2!}(28 - 27)^2 + error$$

: אייז

$$\sqrt[3]{28} = f(27) + \frac{f'(27)}{1!} + \frac{f''(27)}{2!} + error = 3 + \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}\right)(27)^{-\frac{5}{3}} + error$$

<u>מסקנה</u>:

-לשווה קירוב למספר $\sqrt[3]{28}$ ששווה ל

$$3 + \frac{1}{3} \left(27\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{9}\right) \left(27\right)^{-\frac{5}{3}} = 3 + \frac{1}{3}3^{-2} - \frac{1}{9}3^{-5} = 3 + \frac{1}{3^{3}} - \frac{1}{3^{7}} = M .$$

-ע כך ב $28 \leq c \leq 28$ קיים במר לחשב את השגיאה לפי נוסחת במחת השגיאה לפי לחשב את אפשר

$$Error_2 = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{27}c^{-\frac{8}{3}}(28-27)^3 = \frac{10}{2 \cdot 3^4}c^{-\frac{8}{3}}.$$

לכן ,
$$28^{-\frac{8}{3}} \le c^{-\frac{8}{3}} \le 27^{-\frac{8}{3}} = 3^{-8}$$
 גורר $27 \le c \le 28$ לכן

$$0 < \sqrt[3]{28} - M = Error_2 = \frac{10}{2 \cdot 3^4} c^{-\frac{8}{3}} \le \frac{10}{2 \cdot 3^4} 3^{-8} = \frac{10}{2 \cdot 3^{12}} = \frac{5}{3^{12}}.$$



פתרון שאלה 3.א (10 נקודות)

. $D = \mathbf{R}$ בתחום f'(x) בתחום הנגזרת הראשונה $f(x) = \arctan(x-1) + x$ נגדיר נגדיר.

-ש בגלל שי .
$$x \in \mathbf{R}$$
 לכל , $y' = f'(x) = \frac{1}{1 + (x - 1)^2} + 1 = \frac{2 + (x - 1)^2}{1 + (x - 1)^2}$

. $D=\mathbf{R}$ גורר אין נקודות קיצון בתחום . $x\in\mathbf{R}$ לכל , f'(x)>0

בתחום p=1 רציפה ושומרת הסימן . $D=\mathbf{R}$ בתחום בתחום המשוואה המשוואה לוא בתחום .p=1 בתחום p=1 בתחום החיובי שלה לכל בתחום החיובי שלה החיובי של הח

: על מנת הגבולות את מספיק הספיק למצוא את הגבולות הבאים . ${f R}$. על מנת למצוא את הנונקציה בי

$$n_{+} = \lim_{x \to +\infty} \left(\arctan(x-1) + x \right) = \lim_{x \to +\infty} \arctan(x-1) + \lim_{x \to +\infty} x = \frac{\pi}{2} + \infty = +\infty$$

$$n_{-} = \lim_{x \to -\infty} \left(\arctan(x - 1) + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \arctan(x - 1) + \lim_{x \to -\infty} x = -\frac{\pi}{2} - \infty = -\infty$$

מסיקים שהתמונה של f שווה ל- \mathbf{R} שווה ל- \mathbf{R} ולכן טענה (I) ולכן טענה f אוררת שלמשוואה $m \in \mathbf{R}$ יש פתרון יחיד לכל f(x) = m



פתרון שאלה 2.ב (10 נקודות)

: נמצא את הפונקציה הקדומה של הפונקציה הרציונלית

$$f(x) = \frac{6x}{(x+1)(x^2-4)} = \frac{6x}{(x+1)(x-2)(x+2)}.$$

נבצע את הפרוק לשברים חלקיים פשוטים לפי:

$$\frac{6x}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

: המונים בשני האגפים שווים

$$6x = A(x-2)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-2)$$

: נציב

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow -6 = -3A \Rightarrow A = 2 \\ x = 2 \Rightarrow 12 = 12B \Rightarrow B = 1 \\ x = -2 \Rightarrow -12 = 4C \Rightarrow C = -3 \end{cases}$$

: לכן

$$I = \int \frac{6x}{(x+1)(x^2-4)} dx = 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{x+2} = 2\ln|x+1| + \ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C.$$



פתרון 4.א

 $D_f: x > 0$ -ל שווה ל-

.
$$f'(x) = \frac{(1/x)x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$
 -ברור ש

: נתונה על ידי גערוואת המשיק בנקודה $x=\sqrt{e}$ בנקודה בנקודה על ידי

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}, \ f'(\sqrt{e}) = 0, \ y = f(\sqrt{e}) + f'(\sqrt{e})x \implies L: y = \frac{1}{2e}$$

: מתקיים מתקיים $x = \sqrt{e} \Leftrightarrow f'(x) = 0$

.
$$\left\lceil 1, \sqrt{e} \right\rceil$$
 עולה בקטע f ולכן הפונקציה $f'(x) \geq 0 \iff 1 \leq x \leq \sqrt{e}$. 1

.
$$\left\lceil \sqrt{e}, e \right\rceil$$
 יורדת בקטע ולכן הפונקציה ולכן ל'(x) ל $f'(x) \leq 0 \iff \sqrt{e} \leq x \leq e$. 2

 $1 \leq x \leq e$ נקודה בקטע בקטע הפונקציה אל מסיקים מוחלט ג $x = \sqrt{e}$ בקטע בקטע מסיקים מסיקים אז גורר אר נקודה מקסימום מוחלט אינו בקטע הנתון אינו אינו מסיקים אווי מסיקים אווי מסיקים אווי מסיקים בקטע הנתון אווי מסיקים אווי מסיקי

$$1 \le x \le e$$
 לכל , $f(x) \le f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$



פתרון 4.ב

 $1 \le x \le e$ נמצא מעל גרף הפונקציה f בכל הקטע בכל נמצא מעל גרף נמצא וביע בכל הקטע $L \colon y = \frac{1}{2e} = f(\sqrt{e})$ נמצא התחום הנתוו שווה ל-

$$S = \int_{1}^{e} \left(\frac{1}{2e} - f(x) \right) dx = \frac{1}{2e} (e - 1) - \int_{1}^{e} f(x) dx = \frac{e - 1}{2e} - \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^{2}} dx.$$

: נמצא את הפונקציה הקדומה בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int (-1/x)^{1/2} \cdot \ln x dx = (-1/x) \cdot \ln x - \int (-1/x) (1/x) dx =$$
$$= -\frac{\ln x}{x} - \int (-1/x^2) dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} (1 + \ln x)$$

: Newton-Leibniz ונסיים את החישוב בעזרת משפט היסודי

$$S = \frac{e-1}{2e} - \int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^{2}} dx = \frac{e-1}{2e} - \left(F(e) - F(1) \right) = \frac{e-1}{2e} + \frac{1}{e} \left(1 + \ln e \right) - \frac{1}{1} \left(1 + \ln 1 \right) = \frac{3-e}{2e}.$$



פתרון שאלה 5.א (10 נקודות)

 $x\in[-1,8]$ מספיק להראות שהפונקציה $f(x):=2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$ מקיימת: $f(x):=2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$ לכל Weierstrass לפי משפט Weierstrass הפונקציה הרציפה f בעלת נקודות קיצון מוחלטות

: מקיימת אחד מהתנאים x^* אז x^* מקיימת הקיצון המוחלטות של הקיצון המוחלטות מנקות הקיצון המוחלטות אחד מהתנאים הבאים

- $x^* = 8$ in $x^* = -1$.1
- x^* לא גזירה בנקודה לא f הפונקציה.
- הזאת מתאפסת בנקודה הזאת f הפונקציה f גזירה בנקודה פנימית 3 -1 < x^* < 8 הפונקציה .3 (Fermat לפי משפט

$$x \neq 0$$
 לכל , $y' = f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2(1-\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}$: חישוב הנגזרת

x=1 הנגזרת מתאפסת רק כאשר $\sqrt[3]{x}=1$ זייא רק עבור הנקודה

. (נמקו) x=0 לא גזירה בנקודה f

קיבלנו 4 נקודות חשודות לקיצון מוחלט: $x^* \in \{-1,0,1,8\}$ נשאר הא הערכים את קיבלנו 4 נקודות חשודות לקיצון מוחלט:

: של הפונקציה $y = f(x) = 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$ בנקודות החשודות

$$f(-1) = -3$$
, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(8) = 0$.

לכן ערכי הקיצון המוחלט של f שווים לכן

$$y_{\text{max}} = f(1) = 1$$
, $y_{\text{min}} = f(-1) = -3$.

מסקנה

מ.ש.ל.
$$-3 \le f(-1) = f(x) = 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} \le f(1) = 1$$



פתרון שאלה 2.ב (10 נקודות)

. $x\in {\bf R}$ הפונקציה f חסומה כי g(x)=0 -ש גורר ש- f(x) גורר ש- g(x)=0 הפונקציה חדשה במשפט מנדיר פונקציה חדשה במשפט וואר g(x)=0 . צריכים להראות שלמשוואה g(x)=0 . צריכים להראות שלמשוואה . Cauchy

 ${f R}$ -ביפה רציפה פונקציה רציפה ב- ${f R}$. לכן גם ${f g}$ פונקציה רציפה ב-

 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (f(x)+2x-3) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (f(x)+2x-3) = \infty$ ם הערה: מתקיים

 $.\,x \in \mathbf{R}$ לכל , $-8 - \frac{1}{x^2 + 1} < f(x) < 8 + \frac{1}{x^2 + 1}$: fלכל נשתמש בחסימות של ה

 $g(x_1) < 0 < g(x_2)$ -ש כך א $x_1 < x_2$ כך שתי נקודות יכולים יכולים יכולים

$$\begin{cases} x_1 = -3 \Rightarrow g(-3) = f(-3) - 9 < 8 + \frac{1}{(-3)^2 + 1} - 9 = \frac{1}{10} - 1 < 0 \\ x_2 = 6 \Rightarrow g(6) = f(6) + 9 > -8 - \frac{1}{6^2 + 1} + 9 = 1 - \frac{1}{37} > 0 \end{cases}$$

, g(c)=0: שעבורה מתקיים פיימת נקודה לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה (-3,6) שעבורה הביניים הביניים לפי משפט ערך המקיים כלומר בנקודה הזו מתקיים $f(c)+2c=3 \Leftrightarrow f(c)+2c-3=0$



שאלה 6.א (10 נקודות)

. $D = \left(0, \frac{\pi}{10}\right)$ בתחום וקמורה בתחום $G(x) = \int\limits_0^{5x} e^{2 {
m sin} t} dt$ הוכיחו שהפונקציה

פתרון

. ${f R}$ -ב הפונקציה קדומה ב-לת ולכן היא רציפה ב- f(t) – $e^{2{
m sin}t}$ הפונקציה

.
$$\frac{dF}{dt}$$
 = $F'(t)$ = $e^{2\sin t}$: זייא , $f(t)$ = $e^{2\sin t}$ פונקציה קדומה של $F(t)$ = $\int e^{2\sin t} dt$

$$G(x) = \int_{0}^{5x} e^{2\sin t} dt = F(5x) - F(0)$$

:גוזרים את G לפי כלל השרשרת

-לפי משפט Newton-Leibniz מקבלים ש

$$G'(x) = F'(5x) \cdot 5 = 5e^{2\sin(5x)}$$

:G נחשב גם את הנגזרת השנייה של

$$G''(x) = 5e^{2\sin(5x)} \cdot \frac{d}{dx} (2\sin(5x)) = 50\cos(5x)e^{2\sin(5x)}$$

ברור ש-

.
$$D = \left(0, \frac{\pi}{10}\right)$$
 בקטע $G'(x) = 5e^{2\sin(5x)} > 0$.1 לכן שהפונקציה $G'(x) = 5e^{2\sin(5x)} > 0$.1

$$:$$
 לכן: $0 < 5x < \frac{\pi}{2}$ -ש גורר ש- $0 < x < \frac{\pi}{10}$, לכן

בתחום
$$G$$
 קמורה ממש בתחום . $\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$ בקטע בקטורה ממש בתחום . בקטע $G''(x) = 50\cos(5x)e^{2\sin(5x)} > 0$

$$D = \left(0, \frac{\pi}{10}\right)$$
 הנתון

שאלה 6.ב (10 נקודות)

: האם הטענה הבא נכונה

יי אם $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ אז פונקציית הסכום , אז פונקציית הסכום $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ אם יי אם $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ בעלות אי רציפות מסוג ראשון בנקודה s(x)=f(x)+g(x)

אם הטענה נכונה, רשמו הוכחה מפורטת. אם הטענה לא נכונה, הביאו דוגמה נגדית, בצורה אנליטית או בצורה גרפית.

פתרון

נוכיח שהטענה לא בהכרח נכונה, בעזרת דוגמה נגדית:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, x \ge 0 \\ 1, x < 0 \end{cases}$$

-שתי הפונקציות הנייל בעלות אי רציפות מסוג ראשון בנקודה a=0 בגלל ש

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0-} g(x) - 1 \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0-} f(x)$$

: מתקיים

.
$$x \in \mathbf{R}$$
 לכל , $s(x) = f(x) + g(x) = 1$ זייא , $s(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 1 + 0 = 1, x \ge 0 \\ 0 + 1 = 1, x < 0 \end{cases}$

. a=0 -ב ולכן רציפה - מסיקים ש- s פונקציה קבועה ב-

בהצלחה!