יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 4

טורי Taylor
גזירה ואינטגרציה איבר-איבר
תחום הגדרה של פונקציות מרובות משתנים
קוי גובה של פונקציות בשני משתנים

טורי Taylor, גזירה ואינטגרציה איבר איבר

.1

נתון הטור $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x-18)^n$.

א. למצוא את תחום ההתכנסות של הטור.

ב. למצוא טור המתכנס ל $s'(9\frac{1}{4})$.

ג. לחשב את סכום הטור

.א

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x-18)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2(x-9))^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n(x-9)^n$$

הטור הנתון הוא טור חזקות סביב הנקודה $x_0=9$, ומקדמי הטור הם $a_n=(n+1)2^n$.

$$a_n=(n+1)2^n>0 \quad\Rightarrow\quad |a_n|=a_n=(n+1)2^n$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות לפי נוסחת המנה של d'Alembert.

$$|a_n|=(n+1)2^n \quad\Rightarrow\quad |a_{n+1}|=(n+2)2^{n+1}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$=$$

קטע ההתכנסות הפתוח הוא הקטע

$$(x_0-R,x_0+R)=\left(9-\frac{1}{2},9+\frac{1}{2}\right)=\left(8\frac{1}{2},9\frac{1}{2}\right)$$

נבדוק את התנהגות הטור בקצוות $x=9\frac{1}{2}$, $x=8\frac{1}{2}$.

בקצה $x=9\frac{1}{2}$ מתקבל הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n\left(9\frac{1}{2}-9\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$$

נסמן

$$y_n=n+1$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n+1=\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}y_n\neq 0$$

ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ מתבדר.

בקצה $x=8\frac{1}{2}$ מתקבל הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n\left(8\frac{1}{2}-9\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$$

נסמן

$$z_n=(-1)^n(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n(n+1)\right| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}|z_n| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$$

ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתבדר.

לסיכום תחום ההתכנסות טור החזקות הוא $\left(8\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}\right)$.

ב.

$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n(x-9)^n$ זהו טור חזקות שתחום ההתכנסות שלו הוא $\left(8\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}\right)$.

בתחום ההתכנסות מותר לגזור איבר-איבר, ומתקבל

$$s'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n(x-9)^n\right]' \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)2^n(x-9)^n\right]' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n \cdot n(x-9)^{n-1}$$

הערה: המחובר המתאים ל $n=0$ שווה ל 0 ולכן ניתן לכתוב גם

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)2^n \cdot n(x-9)^{n-1}$$

כדי לקבל את $s'\left(9\frac{1}{4}\right)$ נציב $x = 9\frac{1}{4}$ ונקבל

$$s'\left(9\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)2^n \cdot \left(9\frac{1}{4}-9\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)2^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)2^n}{4^{n-1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot n(n+1)2^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(n+1)}{2^n}$$

ג.

הטור הוא

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x-18)^n$$

לשם נוחות נסמן $y = 2x-18$, ואז הטור הוא

$$r(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$$

נחשב סכום טור זה ואז נציב בחזרה $y = 2x-18$, כלומר

$$s(x) = r(2x-18)$$

<u>פתרון I</u>

$$r(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$$

נבצע הזזת אינדקס – נקטין את n שבתוך הטור ה 1 ונקבל

$$r(y) = \sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1}$$

נשים לב ש $ny^{n-1} = \left[y^n\right]'$ ולכן זה שווה ל

$$r(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[y^n\right]'$$

כלומר טור זה הוא הטור המתקבל מגזירה איבר-אביר של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}y^n$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}y^n$ הוא טור הנדסי וידוע שהוא מתכנס עבור $-1<y<1$, ובתחום ההתכנסות מותר לגזור איבר-איבר.

הערה: התנאי $-1<y<1$ אכן מתקיים שכן

$$-1<y<1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<2x-18<1 \quad \Leftrightarrow \quad 17<2x<19 \quad \Leftrightarrow \quad 8\frac{1}{2}<x<9\frac{1}{2}$$

וזה אכן מתקיים כי זהו תחום ההתכנסות של הטור $s(x)$ כפי שמצאנו בסעיף א.

ע"י גזירה איבר-איבר:

$$r(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n=\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[y^n\right]' \overset{(*)}{=} \left[\sum_{n=1}^{\infty}y^n\right]'$$

הטור שבסוגריים הוא טור הנדסי, לפי הנוסחה של סכום טור הנדסי

$$r(y)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}y^n\right]'=\left[\frac{y}{1-y}\right]'=\frac{1\cdot(1-y)-y(-1)}{(1-y)^2}=\frac{1}{(1-y)^2}$$

ובזאת חישבנו את סכום הטור $r(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$ עבור כל $-1<y<1$.

וכעת נחזור למשתנה x

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x-18)^n=s(x)=r(2x-18)=\frac{1}{(1-(2x-18))^2}=\frac{1}{(19-2x)^2}$$

<u>פתרון II</u>

$$r(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$$

נשים לב:

$$\int_0^y t^n dt=\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^y=\frac{y^{n+1}}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^y (n+1)t^n dt=y^{n+1}$$

ולכן על הטור $r(y)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$ נבצע אינטגרציה איבר-איבר (אינטגרל מסוים מ 0 ועד y.

$$\int_0^y r(t)dt=\int_0^y\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n dt \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^y (n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left.t^{n+1}\right|_0^y=\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+1}$$

ע"י הזזת אינדקס

$$\int_0^y r(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}y^n$$

ע"י נוסחת סכום טור הנדסי

$$\int_0^y r(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}y^n=\frac{y}{1-y}$$

כעת נגזור את שני האגפים. לפי המשפט היסודי, הנגזרת של אגף שמאל היא

$$\left[\int_0^y r(t)dt\right]' = r(y)$$

ולכן ע"י גזירת השוויון $\int_0^y r(t)dt = \frac{y}{1-y}$ נקבל

$$r(y) = \left[\frac{y}{1-y}\right]' = \frac{1}{(1-y)^2}$$

וכעת נחזור למשתנה x

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x-18)^n = s(x) = r(2x-18) = \frac{1}{(1-(2x-18))^2} = \frac{1}{(19-2x)^2}$$

.2

נתון הטור $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)4^n}$.

א. למצוא את תחום ההתכנסות של הטור.

ב. עבור כל x בתחום ההתכנסות, למצוא את סכום הטור $s(x)$.

ג. למצוא טור מספרי המתכנס ל $\int_0^1 s(x)dx$. האם זהו טור Liebniz ?

ד. להוכיח : $\left|\int_0^1 s(x)dx-\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{4^2\cdot 3^2}\right)\right|<\frac{1}{1024}$.

א.

הטור הנתון הוא טור חזקות סביב הנקודה $x_0=0$, חישוב ישיר נותן שרדיוס התכנסות הוא $R=4$.

בקצה $x=-4$ מתקבל הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-4)^n}{(n+1)4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

זהו הטור ההרמוני והוא מתבדר.

בקצה $x=4$ מתקבל הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{(n+1)4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

זהו טור Leibniz ולכן הוא מתכנס, אבל טור הערכים המוחלטים שלו הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ והוא מתבדר, כלומר הטור מתכנס בתנאי.

לסיכום תחום ההתכנסות הוא $(-4,4]$.

ב.

נניח ש x נמצא בתחום ההתכנסות של הטור.

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{x}{4})^n}{n+1}$$

נבצע הזזת אינדקס

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{x}{4})^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{x}{4})^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{x}{4})^n}{n\cdot(\frac{x}{4})}$$

נניח $x\neq 0$.

הגורם $\frac{x}{4}$ קבוע ואפשר להוציא אותו החוצה מהסכום

$$s(x)=\frac{1}{\frac{x}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{x}{4})^n}{n}=\frac{4}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{x}{4})^n}{n}$$

כעת ניזכר בטור MacLaurin של הפונקציה $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

ורואים שהטור שקבלנו הוא טור MacLaurin של $\ln(1+x)$ שבתוך ה x שלו הציבו את הביטוי $\frac{x}{4}$, ולכן

$$s(x)=\frac{4}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{x}{4})^n}{n}=\frac{4}{x}\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)$$

נבדוק מתי מוצדק לעשות הצבה זו.

טור MacLaurin של הפונקציה $\ln(1+x)$ מתכנס עבור $-1<x\le 1$ ולכן אפשר להציב ב x שלו את הביטוי $\frac{x}{4}$ אך ורק אם

$$-1<\frac{x}{4}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad -4<x\le 4$$

לסיכום, לכל $-4<x\le 4$ המקיים $x\neq 0$ קיבלנו שהטור מתכנס, ושסכום הטור הוא

$$s(x)=\frac{4}{x}\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)$$

עבור $x=0$

$$s(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 0^n}{(n+1)4^n}$$

כל המחוברים עבור $n\ge 1$ הם אפס, הטור מתכנס וסכום הטור שווה לגורם ה $n=0$ שלו, כלומר

$$s(0)=\frac{(-1)^0}{(0+1)\cdot 4^0}=1$$

לסיכום תחום ההתכנסות של הטור הוא $(-4,4]$ וסכום הטור הוא

$$s(x)=\begin{cases}\frac{4}{x}\ln\left(1+\frac{x}{4}\right) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

הערה:

תחום ההתכנסות שמצאנו בסעיף ב' זהה לתחום התכנסות שמצאנו באופן ישיר בסעיף א'.

ג.

הקטע $[0,1]$ מוכל בתחום ההתכנסות של הטור, ולכן מותר לבצע אינטגרציה איבר-איבר.

$$\int_0^1 s(x)dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)4^n}dx\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)4^n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)4^n}\int_0^1 x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)4^n}\cdot\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)4^n}\cdot\left.\frac{1^{n+1}-0^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)4^n}\cdot\frac{1}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2 4^n}$$

וקיבלנו שהטור המספרי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2 4^n}$ מתכנס ל $\int_0^1 s(x)dx$.

טור זה הוא מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ כאשר $b_n=\frac{1}{(n+1)^2 4^n}$. ברור ש $b_n>0$,

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{(n+1)^2}_{\to\infty}\underbrace{4^n}_{\to\infty}}="\frac{1}{\infty}"=0$$

$$n+1>n \quad\Rightarrow\quad (n+2)^2>(n+1)^2\ ,\ 4^{n+1}>4^n \quad\Rightarrow\quad (n+2)^2 4^{n+1}>(n+1)^2 4^n$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{(n+2)^2 4^{n+1}}<\frac{1}{(n+1)^2 4^n} \quad\Rightarrow\quad b_{n+1}<b_n$$

כלומר הסדרה b_n מונוטונית יורדת. ולכן טור מספרי זה הוא טור Leibniz.

ד.

נסמן ב s את הסכום של הטור שמצאנו בסעיף ג', כלומר $\int_0^1 s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2 4^n} = s$.

תסכל על הסכומים החלקיים של טור זה, ונשים לב:

$$s_0 = b_0 = \frac{1}{(0+1)^2 4^0}$$

$$s_1 = b_0 - b_1 = \frac{1}{(0+1)^2 4^0} - \frac{1}{(1+1)^2 \cdot 4^1}$$

$$s_2 = b_0 - b_1 + b_2 = \frac{1}{(0+1)^2 4^0} - \frac{1}{(1+1)^2 \cdot 4^1} + \frac{1}{(2+1)^2 \cdot 4^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{4^2\cdot 3^2}$$

כלומר הערך המוחלט בשאלה הוא $|s-s_2|$.

מכיוון שזהו טור Leibniz

$$\left|\int_0^1 s(x)dx - \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{4^2\cdot 3^2}\right)\right| = |s-s_2| < b_3 = \frac{1}{4^2\cdot 4^3} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024}$$

<u>תחום הגדרה של פונקציות ב 2 ו 3 משתנים</u>

.1

למצוא ולשרטט את תחום ההגדרה של $f(x,y)=\dfrac{xe^y+y\ln x}{2x^2+3y^2-6}$.

כדי שהשבר יהיה מוגדר, צריך שהמונה והמכנה יהיו מוגדרים, והמכנה יהיה שונה מ 0 .

כדי שהמונה יהיה מוגדר, בגלל ה $\ln$ יש תנאי :

$$x>0$$

המכנה מוגדר בכל $\mathbb{R}^2$.

כדי שהחילוק יהיה מוגדר צריך

$$2x^2+3y^2-6\neq 0$$

נבדוק מתי $2x^2+3y^2-6=0$:

$$2x^2+3y^2-6=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2+3y^2=6 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{\sqrt{3}^2}+\frac{y^2}{\sqrt{2}^2}=1$$

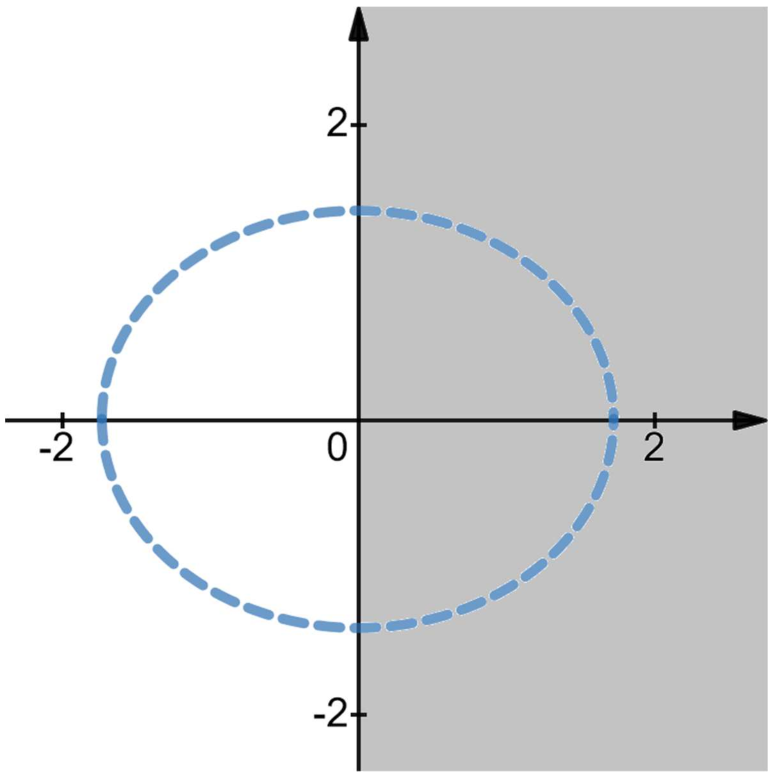
זו משוואה של אליפסה קנונית שמרכזה הראשית, רדיוס x שלה הוא $\sqrt{3}$ ורדיוס y שלה הוא $\sqrt{2}$.

ולכן המכנה שונה מאפס כאשר

$$\frac{x^2}{\sqrt{3}^2}+\frac{y^2}{\sqrt{2}^2}\neq 1$$

לסיכום, תחום ההגדרה של f הוא

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\,,\ \frac{x^2}{\sqrt{3}^2}+\frac{y^2}{\sqrt{2}^2}\neq 1\right\}$$



.2

למצוא ולשרטט את תחום ההגדרה של $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{(x+1)(y+1)}}{2x^2+3y^2}$.

כדי שהשבר יהיה מוגדר, צריך שהמונה והמכנה יהיו מוגדרים, והמכנה יהיה שונה מ 0 .
כדי שהמונה יהיה מוגדר, בגלל השורש יש תנאי :

$$(x+1)(y+1)\ge 0$$
$$\Rightarrow \quad (x+1\ge 0 \text{ and } y+1\ge 0) \text{ or } (x+1\le 0 \text{ and } y+1\le 0)$$
$$\Rightarrow \quad (x\ge -1 \text{ and } y\ge -1) \text{ or } (x\le -1 \text{ and } y\le -1)$$

המכנה מוגדר בכל $\mathbb{R}^2$.
כדי שהחילוק יהיה מוגדר צריך

$$2x^2+3y^2\ne 0$$

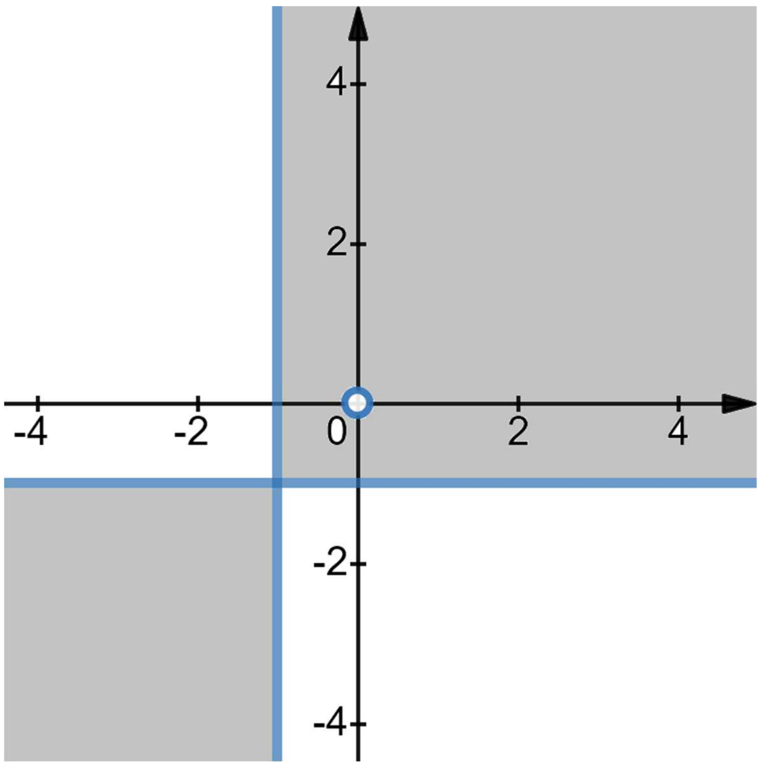
נבדוק מתי $2x^2+3y^2=0$:

אם $2x^2+3y^2=0$, מכיוון ש $2x^2\ge 0\,,\,3y^2\ge 0$, נובע

$$2x^2+3y^2=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2=0\,,\,3y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=0\,,\,y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\,,\,y=0$$

כלומר המכנה מתאפס אך ורק בנקודה $(0,0)$.
ולכן המכנה שונה מ 0 כאשר $(x,y)\ne(0,0)$ כלומר בכל הנקודות שאינן הראשית.
y שלה הוא $\sqrt{2}$.
לסיכום, תחום ההגדרה של f הוא

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, (x\ge -1 \text{ and } y\ge -1) \text{ or } (x\le -1 \text{ and } y\le -1)\,,\,(x,y)\ne(0,0)\right\}$$



.3

למצוא את תחום ההגדרה של $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.

כדי שהסכום יהיה מוגדר, כל מחובר צריך להיות מוגדר.

בגלל הגורם $\frac{1}{\sqrt{x}}$, כדי שהשורש יהיה מוגדר וגם המכנה שונה מ 0 צריך שיתקיים

$$x>0$$

באופן דומה בגלל הגורם $\frac{1}{\sqrt{y}}$ צריך

$$y>0$$

ובגלל הגורם $\frac{1}{\sqrt{z}}$ צריך

$$z>0$$

לסיכום, תחום ההגדרה של f הוא

$$D_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0\,,\ y>0\,,\ z>0\right\}$$

קווי גובה של פונקציות ב 2 משתנים

.1

למצוא ולשרטט את קווי הגובה של $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} & x\ge 0\\ |y| & x<0\end{cases}$ ולשרטט מפת קווי גובה.

מכיוון שהנוסחה של f היא מפוצלת ושונה עבור $x\ge 0$ ו $x<0$, אז הנוסחה של קו הגובה תהיה שונה בחצי הימני ובחצי השמאלי של המישור.

מקרה I: $c>0$

בחצי הימני של המישור $x\ge 0$:

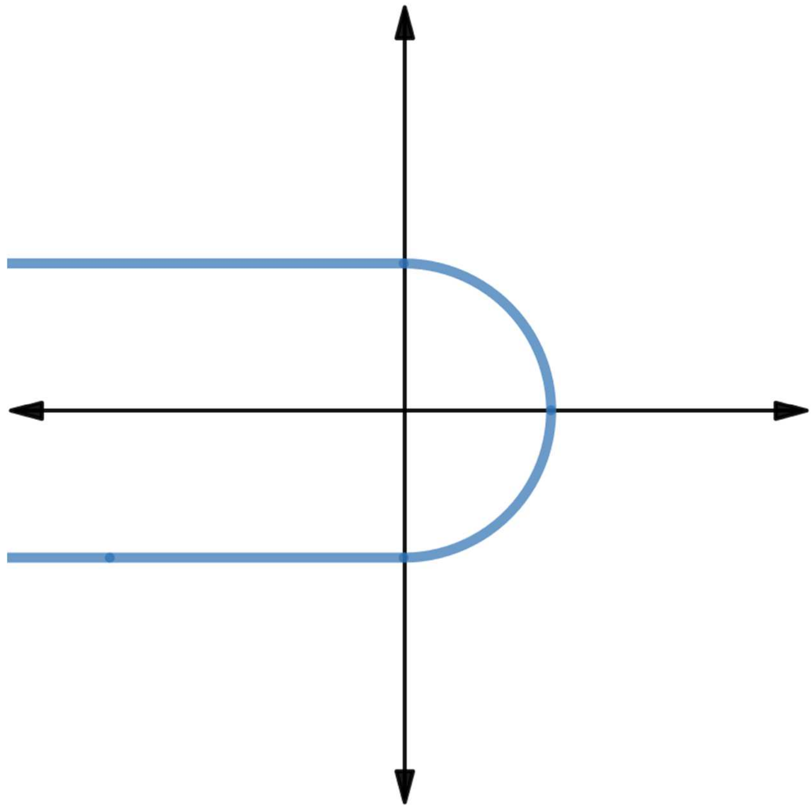
$$f(x,y)=c$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=c \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=c^2$$

זהו מעגל קנוני ברדיוס c .

בחצי המשאלי של המישור $x<0$:

$$f(x,y)=c$$
$$|y|=c \quad\Rightarrow y=\pm c$$

זהו זוג ישרים מקבילים לצירים.



מקרה II: $c=0$

בחצי הימני של המישור $x\geq 0$:

$$f(x,y)=0$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(0,0)$$

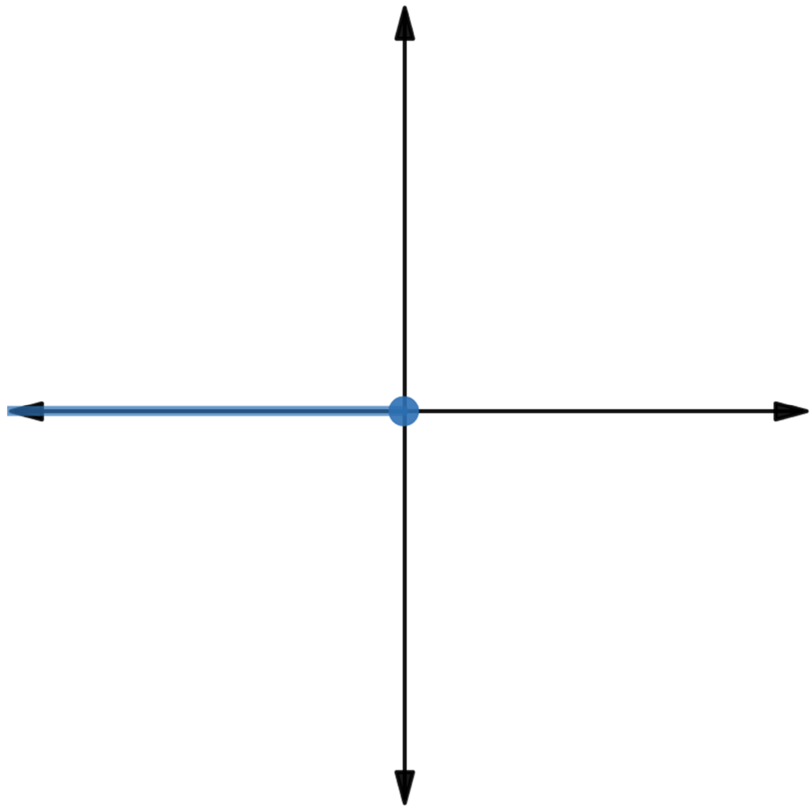
זו נקודת הראשית.

בחצי המשאלי של המישור $x<0$:

$$f(x,y)=0$$

$$|y|=0 \quad \Rightarrow y=0$$

זהו הצד שלילי של ציר x .



מקרה III: $c<0$

בחצי הימני של המישור $x \geq 0$:

$$f(x,y)=c$$
$$\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\geq 0}=\underbrace{c}_{<0}$$

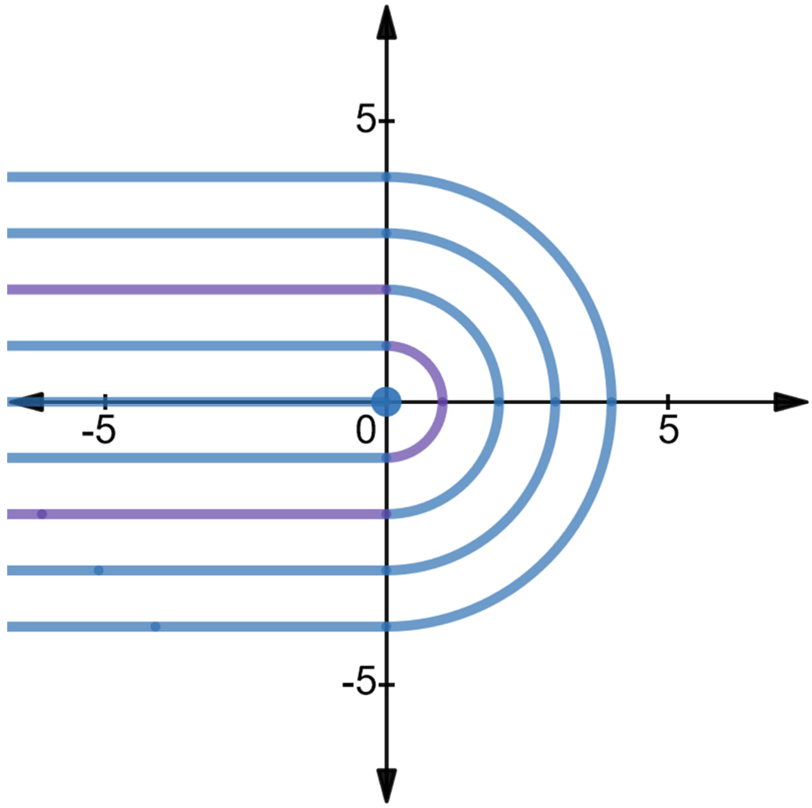
אין קו גובה בחצי הימני של המישור.

בחצי השמאלי של המישור $x<0$:

$$f(x,y)=c$$
$$\underbrace{|y|}_{\geq 0}=\underbrace{c}_{<0}$$

אין קו גובה בחצי השמאלי של המישור.
לסיכום עבור $c<0$ אין קו גובה.

מפת קווי גובה:



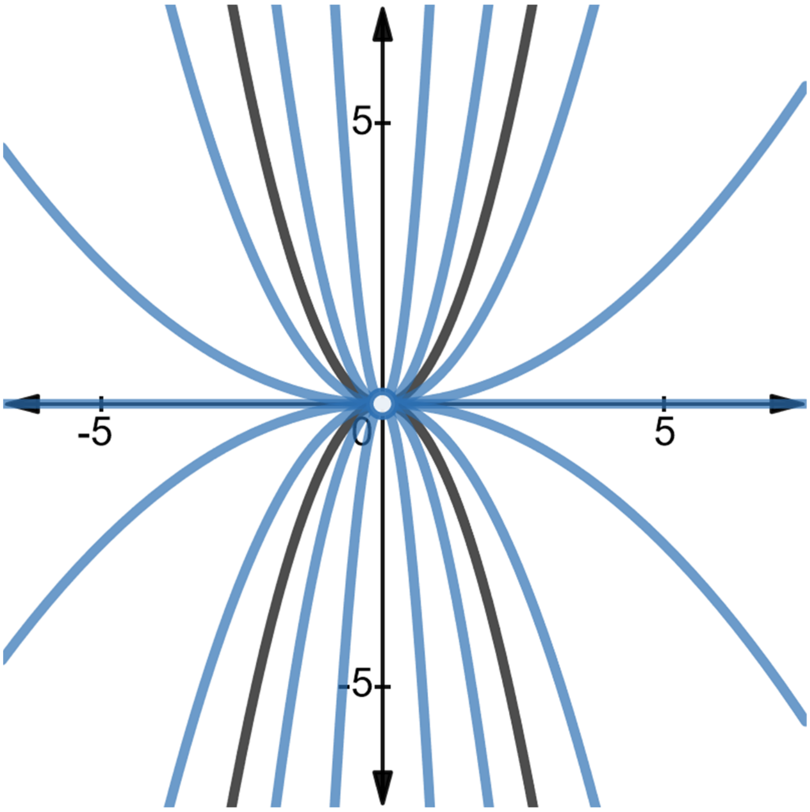
.2

למצוא ולשרטט את קווי הגובה של $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$ ולשרטט מפת קווי גובה.

$$f(x,y)=c$$

$$\frac{y}{x^2}=c$$

$$x\neq 0 \quad \Rightarrow \quad y=cx^2$$



.3

למצוא ולשרטט את קווי הגובה של $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ולשרטט מפת קווי גובה.

מקרה I: $c<0$

$$f(x,y)=c$$
$$\underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\geq 0} = \underbrace{c}_{<0}$$

במקרה זה אין קו גובה.

מקרה II: $0\leq c<1$

$$f(x,y)=c$$
$$\underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\geq 0} = \underbrace{c}_{\geq 0} \quad \Rightarrow \quad 1-x^2-y^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=1-c^2=(\sqrt{1-c^2})^2$$

זהו מעגל קנוני ברדיוס $\sqrt{1-c^2}$.

מקרה III: $c=1$

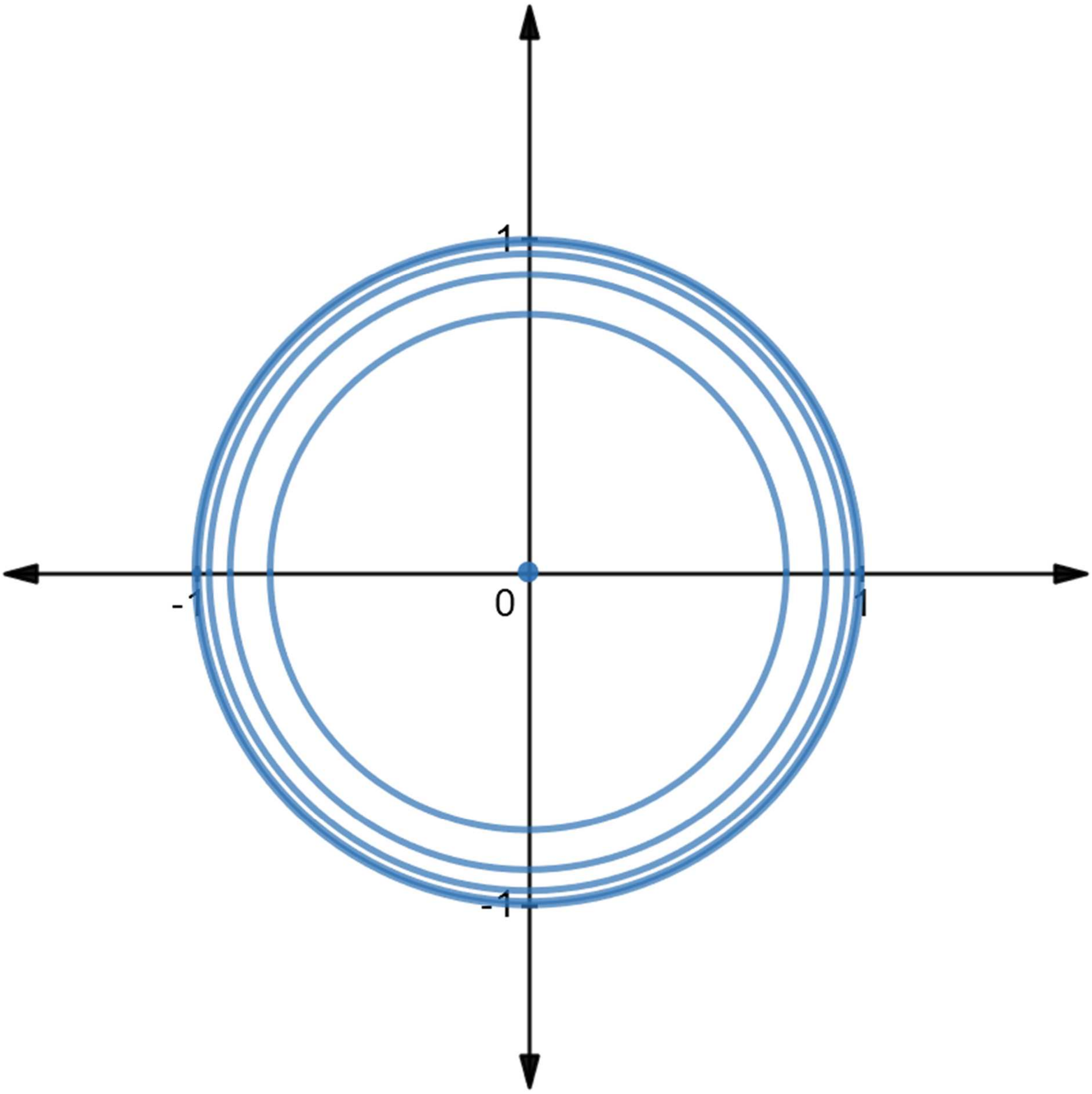
$$f(x,y)=1$$
$$\underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\geq 0} = \underbrace{1}_{>0} \quad \Rightarrow \quad 1-x^2-y^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=0 \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(0,0)$$

זו נקודת הראשית.

מקרה IV: $c>1$

$$f(x,y)=c$$
$$\underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{\geq 0} = \underbrace{c}_{>0} \quad \Rightarrow \quad 1-x^2-y^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2+y^2}_{\geq 0}=\underbrace{1-c^2}_{<0}$$

במקרה זה אין קו גובה.


1
-1
0
1
-1