פתרון שאלון X

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי A קבוצה בת 7 איברים, תהי B קבוצה בת 10 איברים.

א. (2 נק') מהו מספר הפונקציות מ-A ל-A?

ב. (4 נק') מהו מספר הפונקציות החח"ע מ-A ל-B?

מהו מספר הפונקציות החח"ע מ-B ל-A?

ג. (2 נק') מהו מספר הפונקציות ההפיכות מ-A לעצמה.

ד. (12 נק') נגדיר x_0 נקודת שבת של פונקציה $f: A \to A$ על ידי:

x_0 נקודת שבת של f אם $f(x_0) = x_0$

מהו מספר הפונקציות ההפיכות מ-A ל-A כך שאין להן נקודות שבת.

.

פתרון שאלה 1

פונקציות הפיכות הן פונקציות חח"ע ועל ולכן הפונקציות הינן פונקציות תמורה

א. מספר הפונקציות הוא 7^7

ב. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = \frac{10!}{3!} = 7!\frac{10!}{7!3!} = 7!\binom{10}{7}$

אין פונקציות חח"ע מ-B ל-A כי מספר אברי התחום גדול ממספר איברי הטווח. אפשר לראות זאת לפי שובך היונים.

כאשר היונים הם אברי B והתאים אברי A ואז יש תא שבו לפחות $\left\lceil \frac{10}{7} \right\rceil = 2$ יונים.

ג. מספר פונקציות התמורה הוא $7!$

ד. הבעיה היא בעיית אי סדר מלא. כלומר מהו מספר הפונקציות מ-A לעצמה כך שאף נקודה אינה התמונה של עצמה.

נשתמש בעקרון ההכלה וההפרדה: נסמן ב- A_i $i = 1,2,...7$ את קבוצת הפונקציות שבה נקודה i עוברת אל עצמה.

ברצוננו לחשב את: $\left|A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_7^C\right| = |U| - S_1 + S_2 - ...S_7$

$|U| = 7!$ מספר פונקציות התמורה

$|A_i| = 6!$ - מספר פונקציות התמורה כאשר יש נקודת שבת אחת.

$|A_i \cap A_j| = 5!$ מספר פונקציות התמורה כאשר יש 2 נקודות שבת .

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 4!$ מספר פונקציות התמורה כאשר יש 3 נקודות שבת .

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 3!$ מספר פונקציות התמורה כאשר יש 4 נקודות שבת .

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m| = 2!$ מספר פונקציות התמורה כאשר יש 5 נקודות שבת .

$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m \cap A_n| = 1!$ מספר פונקציות התמורה כאשר יש 6 נקודות שבת .

$$\left|A_1^C \cap A_2^C \cap ... \cap A_7^C\right| = |U| - S_1 + S_2 - ...S_7 = 7! - \binom{7}{1}6! + \binom{7}{2}5! - \binom{7}{3}4! + \binom{7}{4}3! - \binom{7}{5}2! + \binom{7}{6}1! - \binom{7}{7}0! =$$

$$5040 - 7*720 + 21*120 - 24*35 + 6*35 - 2*21 + 7 - 1 = 1854$$

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'

א. (8 נק') הראו כי בקבוצה של 13 אנשים לא יתכן כי כל אדם מכיר בדיוק 7 אנשים אחרים
(בהנחה שהיכרות היא סימטרית: אם אדם א' מכיר אדם ב' אז אדם ב' מכיר אדם א').
הדרכה: הציגו את הבעיה באמצעות גרף.

ב. (12 נק') תהא A קבוצת כל הפונקציות מהממשיים לממשיים. כלומר, אברי A הינם פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

נגדיר יחס T על A באופן הבא: יהיו $f,g\in A$

$$(f,g)\in T \quad\Leftrightarrow\quad \forall a\in\mathbb{R}\quad f(a)\le g(a)$$

1. הוכיחו כי T הוא יחס סדר על A. האם זהו יחס סדר חלקי או מלא?
2. תהא: $f(x)=sin(x)$. מצאו שני איברים $h,g\in A$ כך ש:
$(h,f)\in T$ וגם $(f,g)\in T$

פתרון שאלה 2

א. נניח בשלילה שכל אדם מכיר בדיוק 7 אנשים.
נבנה גרף עם קדקודים וצלעות כלהלן:
$P_n \quad n=1,2,...,13$ הקדקודים הם האנשים.
$|E|$ מספר הצלעות בגרף, כאשר כל היכרות היא צלע.
אם כל אדם מכיר בדיוק 7 אנשים אז דרגת כל קדקוד היא 7.
לכן מצד אחד:

$$\sum_{n=1}^{13}\deg(P_n)=13\cdot 7=91$$

ומצד שני לפי משפט לחיצת הידיים:

$$\sum_{n=1}^{13}\deg(P_n)=2|E|$$

כיוון ש 91 אינו מספר זוגי התקבלה סתירה.

ב. נראה כי T הוא רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

- **רפלקסיבי:** צריך להראות כי $\forall f\in A,(f,f)\in T$. אכן,

$$\forall a\in R, f(a)\le f(a)$$

ולכן, $(f,f)\in T$

- **אנטי סימטרי:** צריך להראות כי

אכן, $(f,g)\in T\cap(g,f)\in T\to f=g$

$$(f,g)\in T\to\forall a\in R, f(a)\le g(a)$$
$$(g,f)\in T\to\forall a\in R, g(a)\le f(a)$$

ולכן,

$$\forall a\in R, g(a)\le f(a)\le g(a)\to f=g$$

- **טרנזיטיבי:** צריך להוכיח
אם $(f,g)\in T$ וגם $(g,h)\in T$ $\Leftarrow$ $(f,h)\in T$

אכן,

$$(f,g)\in T\to\forall a\in R, f(a)\le g(a)$$
$$(g,h)\in T\to\forall a\in R, g(a)\le h(a)$$

ולכן,

$$\forall a\in R, f(a)\le g(a)\le h(a)$$

היחס אינו מלא כי לא כל 2 פונקציות ניתנות להשוואה על ידי היחס T
למשל $\sin x$ ו- $\cos x$ לא מתקיים $\cos x\le\sin x$ לכל x ממשי וגם לא מתקיים $\sin x\le\cos x$ לכל x ממשי.

2. מכיוון ש $-1\le\sin x\le 1$ לכל x ממשי , בכדי למצוא פונקציה שגדולה ממנה נוכל לבחור פונקציה שגדולה תמיד מ 1 , למשל הפונקציה הקבועה $g(x)=2$ והפונקציה הקבועה . $h(x)=-2$.
נקבל לכל x ממשי. $-2=h(x)\le\sin x\le g(x)=2$

<u>שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (12 נקי) הוכיחו את הטענה הבאה . אפשר באינדוקציה או כל דרך אחרת.

אם A היא קבוצה סופית בת n איברים, אז קבוצת החזקה שלה , P(A), מכילה 2^n איברים.

ב. (8 נקי) הראו שקיים מספר טבעי חיובי m כך 2021 מחלק את 2^m-1 .

הדרכה : יש להתבונן בתת קבוצה סופית מתאימה של קבוצת המספרים הטבעיים החיוביים :

$2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \ldots, 2^{2022}-1$, ועל קבוצת השאריות בחלוקה ל 2021

<u>פתרון שאלה 3</u>

דרך א : אינדוקציה : נבדוק את נכונות הטענה עבור $A=\emptyset$.

$$P(A)=\{\emptyset\}\Longrightarrow|P(A)|=1=2^0$$

נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$.

כלומר, נניח שלכל קבוצה בת k איברים, קבוצת החזקה שלה מכילה 2^k איברים.

נוכיח את נכונות הטענה עבור $n=k+1$.

תהי A קבוצה בת k איברים.

נגדיר $B=A\cup\{a\}$ כאשר, $a\notin A$. לכן, $|B|=k+1$

$$A\subseteq B\Longrightarrow P(A)\subseteq P(B)$$

תתי הקבוצות של B הן תתי הקבוצות של A, ובנוסף תתי הקבוצות של A כאשר לכל תת קבוצה של A מוסיפים את האיבר $\{a\}$.

מספר תתי הקבוצות של A הוא 2^k.

מספר תתי הקבוצות של A כאשר לכל תת קבוצה של A מוסיפים את האיבר $\{a\}$ הוא 2^k.

לכן, מספר תתי הקבוצות של B הוא $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ כלומר, $P(B) = 2^{k+1}$.

הוכחנו את נכונות הטענה עבור $n = k + 1$, לכן ממשפט האינדוקציה הטענה נכונה לכל n.

דרך ב: כיוון שבקבוצה יש n איברים שונים נוכל לסדרם בשורה . נוכל להגדיר לכל תת קבוצה סדרה שאבריה 0 או 1 כאשר עבור כל איבר מופיע בתת הקבוצה נסמן 1 ולכל איבר אשר לא מופיע בתת הקבוצה נסמן 0 במקום המתאים.

קבלנו את אוסף כל המילים הבינאריות באורך n. כלומר יש 2^n סדרות ולכן אותו מספר תתי קבוצות.

דרך ג: בינום ניוטון. נתבונן בביטוי הבינום:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

נציב בביטוי $a = 1, b = 1$ ונקבל:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = |P(n)|$$

הביטוי מימין הוא סכום מספר תתי הקבוצוצ לפי גודל עולה של קבוצה.

ב. נתבונן בקבוצה $\{2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, \ldots, 2^{2022}-1\}$. בקבוצה זו 2022 מספרים לעומת 2021 שאריות שונות בחלוקה ל- 2021. מעקרון שובך היונים נקבל שיש לפחות $\left\lceil \frac{2022}{2021} \right\rceil = 2$ מספרים בקבוצה שיש להם אותה שארית בחלוקה ל 2021.

נסמן אותם $2^s - 1, \quad 2^t - 1$ כאשר נבחר $s > t$. לפי תכונת מספרים בעלי אותה שארית בחלוקה למספר מסויים ההפרש בין 2 מספרים אלו מתחלק ב -2021.

כלומר: $\left(2^s - 1\right) - \left(2^t - 1\right) = 2^s - 2^t = 2^t(2^{s-t} - 1)$ מתחלק ב .2021

2021 אי זוגי , 2 אינו גורם שלו. ל- 2^t יש גורם ראשוני יחיד והוא 2 . לכן, נסיק כי $(2^{s-t} - 1)$ מתחלק ב 2021

אם נסמן $m = s - t$ אז m טבעי וחיובי קבלנו קיום מספר $2^m - 1$ אשר מתחלק ב 2021 כנדרש.

<u>שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (10 נקי) נסמן ב- a_n את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות $\{0,1,2\}$, בהן אין שתי ספרות עוקבות זהות. כלומר, סדרה לא חוקית תכיל לפחות רצף אחד מהצורה 00 או 11 או 22.

1. חשבו את a_1, a_2 באופן ישיר.

מצאו נוסחה נסיגה ל- a_n והסיקו את ערכו של a_0.

2. מצאו נוסחה מפורשת ל-a_n.

כלומר, פונקציה $a_n = f(n)$ כאשר f פונקציה המחזירה ישירות את מספר הסדרות הנדרשות לפי אורך הסדרה.

3. נסמן ב- b_n מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות $\{0,1,2\}$, המקיימות את התנאי המקורי: אין שתי ספרות עוקבות זהות, ובנוסף הספרה הראשונה והספרה האחרונה בסדרה שונות זו מזו.

מצאו נוסחת נסיגה ל- b_n.

הדרכה: היעזרו בתשובות לסעיפים הקודמים ובקבוצה המשלימה.

ב.(10 נקי)   הוכיחו בדרך השלילה שהפסוק הבא הוא טאוטולוגיה:

$$\alpha = ((p \to r) \wedge ((\sim q) \to p) \wedge (\sim r)) \to q$$

<u>פתרון שאלה 4</u>

א.1. נסתכל על המקום האחרון בסדרה חוקית באורך n, כאשר לפניו יש סדרה חוקית באורך $n-1$. למקום האחרון יש 2 אפשרויות לבחור ספרה שונה מהספרה במקום ה-$n-1$.

לכן, $a_n = 2a_{n-1}$ לכל $n \geq 2$.

תנאי התחלה: $a_1 = 3$.

2. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ לכל $n \geq 1$

הסבר: במקום הראשון יש 3 אפשרויות, בכל אחד מהמקומות הבאים יש 2 אפשרויות. יש $n-1$ מקומות אחרי האיבר הראשון, לכן יש 2^{n-1} אפשרויות ליתר האיברים, ובסך הכל: $3 \cdot 2^{n-1}$.

3. נחשב לפי הקבוצה המשלימה:

כל הסדרות באורך n המורכבות מהספרות $\{0,1,2\}$, כך שאין שתי ספרות עוקבות זהות, ובנוסף הספרה הראשונה והספרה האחרונה בסדרה שוות.

כל סדרה כזו היא סדרה חוקית באורך $n-1$ שהוסיפו לה איבר אחרון ששווה לאיבר הראשון (אפשרות אחת).

לכן מספר הסדרות הללו הוא a_{n-1}.

לכן התשובה המבוקשת היא:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - a_{n-1}$$

ב.

הפסוק הוא טאוטולוגיה.

הוכחה בדרך השלילה. נניח בשלילה שהפסוק אינו טאוטולוגיה.

מטבלת האמת של הקשר $\to$ נובע (1) ו-(2) שלהלן:

(1) q הוא F (FALSE)

(2) $((p \to r) \wedge ((\sim q) \to p) \wedge (\sim r))$ הוא T (TRUE)

מ- (2) וטבלת האמת של הקשר $\wedge$ נובעים (3), (4), (5) שלהלן:

(3) $p \to r$ הוא T

(4) $(\sim q) \to p$ הוא T

(5) $(\sim r)$ הוא T

(6) r הוא F מ-(5) וטבלת האמת של הקשר $\sim$

(7) p הוא F מ-(6), (3), וטבלת האמת של הקשר $\to$

(8) $(\sim q)$ הוא T מ-(1) וטבלת אמת של הקשר $\sim$

(9) $(\sim q) \to p$ הוא F מ-(8), (7) וטבלת האמת של הקשר $\to$

בסתירה ל-(4)   לכן, הנחת השלילה איננה נכונה. והפסוק הינו טאוטולוגיה.

<u>שאלה 5 (20 נקודות)   אין קשר בין סעיפים א' וב'</u>

א. (8 נק') תהי C קבוצה בת מניה של מעגלים במישור. (לא כולל פנים המעגל). הוכיחו כי קיימת נקודה על ציר ה-Y שאינה נמצאת על אף מעגל מ-C.

הדרכה : התבוננו בחיתוך מעגלים עם ציר ה-Y

ג. (12 נק') . נתונה המשוואה :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 28$$

1. מהו מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה?
2. מהו מספר הפתרונות הטבעיים של המשוואה כך שסכום שלושת המשתנים הראשונים הינו אי זוגי.

   הדרכה : יש לשים לב למקרים לפי זוגיות או אי זוגיות המשתנים.

<u>פתרון שאלה 5</u>

א. נתבונן בחיתוך של כל מעגל ב-C עם ציר ה Y . כל מעגל חותך את ציר הY לכל היותר פעמיים . לכן, סך כל הנקודות הנמצאות בחיתוך של המעגלים עם ציר הY הוא מספר בן מניה או סופי.

כיוון שעוצמת ציר Y היא כעוצמת $\mathbb{R}$ כלומר אינו בן מניה, נוכל לבחור נקודה על ציר הY אשר אינה על אף מעגל השייך לקבוצה C.

ב. 1. זהו מקרה של חלוקה של 28 איברים ל 5 תאים $D(5,28) = \binom{5-1+28}{5-1} = \binom{32}{4} = 35950$

2. נשים לב לכך שאם סכום 3 המשתנים הראשונים הוא אי זוגי אז סכום 2 המשתנים האחרונים אי זוגי.

סכום 3 המשתנים הראשונים אי זוגי ב- 2 המקרים הבאים :

1. משתנה אחד מהשלושה אי זוגי והשניים האחרים זוגיים.
2. שלושת המשתנים הראשונים אי זוגיים.

נטפל ב- 2 המקרים :

<u>מקרה 1</u> : נבחר שהמשתנה הראשון אי זוגי והשני והשלישי זוגיים, כמו כן, נבחר שהמשתנה הרביעי אי זוגי והחמישי זוגי.

נבצע החלפת משתנים :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 28$$
$$(2y_1 + 1) + 2y_2 + 2y_3 + (2y_4 + 1) + 2y_5 = 28$$
$$2(y_1 + \dots + y_5) = 26$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 13$$

כאשר y_i טבעיים עבור $1 \le i \le 5$.

מספר פתרונות המשוואה האחרונה הוא $D(5,13)$ יש לכפול מספר זה ב-3 עבור בחירת המשתנה האי זוגי בין 3 הראשונים ונכפול גם ב-2 על בחירת המשתנה האי זוגי מ-2 המשתנים האחרונים : $3 \cdot 2D(5,13)$

מקרה 2: שלושת המשתנים הראשונים אי זוגיים. כמו כן, נבחר שהמשתנה הרביעי אי זוגי והחמישי זוגי.
נבצע החלפת משתנים:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$$
$$(2y_1+1)+(2y_2+1)+(2y_3+1)+(2y_4+1)+2y_5=28$$
$$2(y_1+...y_5)=24$$
$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=12$$

כאשר y_i טבעיים עבור $1\le i\le 5$.

מספר פתרונות המשוואה האחרונה הוא $D(5,12)$ יש לכפול מספר זה ב-2 על בחירת המשתנה האי זוגי מ-2 המשתנים האחרונים: $2D(5,12)$.

סה״כ מספר הפתרונות הטבעיים הוא:

$$6D(5,13)+2D(5,12)=6\binom{5-1+13}{5-1}+2\binom{5-1+12}{5-1}=$$
$$6\binom{17}{4}+2\binom{16}{4}=6\cdot 2380+2\cdot 1820=17,920$$

שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א׳ וב׳

א. (10 נקי) יהיו A,B,C קבוצות סופיות. הוכיחו באמצעות זהויות כי:

$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$$

ב. (10 נקי) למה שווה הסכום

$$5\cdot 2^2\binom{20}{1}+5\cdot 2^4\binom{20}{2}+5\cdot 2^6\binom{20}{3}+\cdots+5\cdot 2^{40}\binom{20}{20}?$$

יש להציג דרך פתרון מפורטת.

פתרון שאלה 6

א. נוכיח אופן אלגברי:

$$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)\overset{(1)}{=}(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)\overset{(2)}{=}$$
$$A\cap(B^c\cup C^c)\overset{(3)}{=}A\cap(B\cap C)^c\overset{(1)}{=}A\setminus(B\cap C)$$

(1) התכונה $X\setminus Y=X\cap Y^c$ (2) פילוג (3) דה מורגן

ב. נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$5\cdot 2^2\binom{20}{1}+5\cdot 2^4\binom{20}{2}+5\cdot 2^6\binom{20}{3}+\cdots+5\cdot 2^{40}\binom{20}{20}=5\sum_{k=1}^{20}\binom{20}{k}2^{2k}=$$

$$=5\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}4^k-5\binom{20}{0}4^0=5(1+4)^{20}-5=5^{21}-5$$