יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 10

אינטגרל משולש בקואורדינטות קרטזיות, גליליות

אינטגרל משולש בקואורדינטות קרטזיות

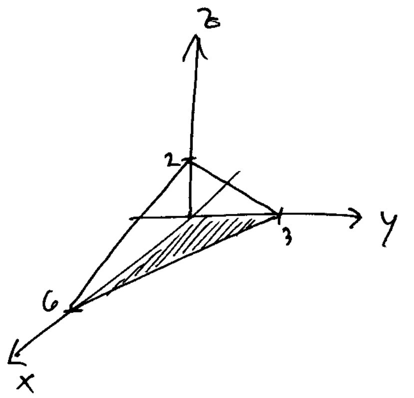
.1

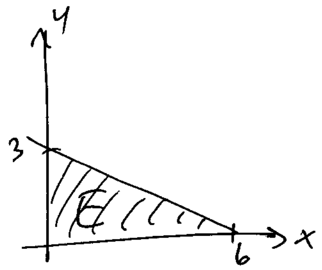
לחשב מסת הגוף G החסום ע״י המישורים $x+2y+3z=6$, $z=0$, $y=0$, $x=0$, כאשר צפיפות המסה ליחידת נפח נתונה ע״י $\rho(x,y,y)=z$.

מסת הגוף G נתונה ע״י

$$\text{mass}(G)=\iiint_G \rho(x,y,z)dV=\iiint_G zdV$$

המישור $x+2y+3z=6$ חותך את ציר x בנקודה $(6,0,0)$, את ציר y בנקודה $(0,3,0)$ ואת ציר z בנקודה $(0,0,2)$.





הגוף G הוא הפירמידה החסומה בין המישור $z=0$ (מלמטה), המישור $y=0$ (משמאל), המישור $x=0$ (מאחור) והמישור $x+2y+3z=6$ (מלמעלה).

הגוף G ניתן להטלה למישור xy , ההיטל שלו למישור xy הוא המשולש E .

הגוף G הוא מעל ההיטל E , מוגבל מלמטה ע״י מישור xy כלומר גרף הפונקציה $z(x,y)=0$, ומלמעלה ע״י המישור $x+2y+3z=6$ כלומר גרף הפונקציה $z(x,y)=\frac{6-x-2y}{3}=2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y$.

ולכן :

$$\iiint_G zdV=\iint_E \int_{z=0}^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} zdzdA_{xy}$$

הערה : אפשר כבר בשלב זה לחשב את האינטגרל הפנימי לפי z ולקבל תוצאה שהיא פונקציה של x,y , ואז לחשב האינטגרל הכפול שלה בתחום E .

אבל אפשר קודם לרשום את האינטגרל החוזר של $\int_{z=0}^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} zdz$ (כאמור ביטוי זה הוא פונקציה של x,y) בתחום E ולקבל אינטגרל חוזר בשלושת המשתנים x,y,z .

התחום E ניתן להטלה לציר x , ההיטל שלו לציר x הוא הקטע $[0,6]$.

התחום E הוא מעל הקטע $[0,6]$, מוגבל מלמטה ע״י ציר x כלומר גרף הפונקציה $y(x)=0$, ומלמעלה ע״י הישר העובר דרך הנקודות $(6,0)$, $(0,3)$ שמשוואתו $y(x)=3-\frac{1}{2}x$.

$$\iint_D \left[\int_{z=0}^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} zdz\right]dA=\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{3-\frac{1}{2}x}\left[\int_{z=0}^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} zdz\right]dydx$$

:ולכן

$$\text{mass}(G)=\iiint_G z\,dV=\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{3-\frac{1}{2}x}\int_{z=0}^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} z\,dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{3-\frac{1}{2}x}\left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=0}^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} dy\,dx=\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{3-\frac{1}{2}x}\frac{(2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y)^2}{2}dy\,dx=$$

$$=\int_{x=0}^{6}\left.\frac{1}{2}\cdot\frac{(2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y)^3}{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}\right|_{y=0}^{3-\frac{1}{2}x} dx=\int_{x=0}^{6}\frac{(2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\cdot(3-\frac{1}{2}x))^3-(2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\cdot 0)^3}{-4}dx=$$

$$=\int_{x=0}^{6}\frac{(2-\frac{1}{3}x)^3}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{(2-\frac{1}{3}x)^4}{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right|_{x=0}^{6}=\frac{(2-\frac{1}{3}\cdot 6)^4-(2-\frac{1}{3}\cdot 0)^4}{-\frac{16}{3}}=\frac{-16}{-\frac{16}{3}}=3$$

.2

לחשב נפח הגוף G החסום ע״י מישורי הצירים, המישור $y+z=2$, הגליל הפרבולי $x+y^2=4$, $y\geq 0$.

נפח הגוף G נתון ע״י

$$\text{volume}(G)=\iiint_G 1dV$$

$y+z=2$ זהו מישור.

$x+y^2=4$ הוא גליל פרבולי הניצב למישור xy .

הגוף G ניתן להטלה למישור xy , למישור xz , ולמישור yz .

נטיל את הגוף G למישור yz (הכוון ׳כלפי מעלה׳ הוא הכוון החיובי של ציר x).

ההיטל שלו למישור yz הוא המשולש D .

הגוף G הוא ׳מעל׳ ההיטל D , מוגבל ׳מלמטה׳ ע״י מישור yz , כלומר המשטח $x(y,z)=0$, ומלמעלה ע״י הגליל הפרבולי, כלומר המשטח $x(y,z)=4-y^2$.

התחום D (במישור yz) ניתן להטלה לציר y , ההיטל שלו לציר y הוא הקטע $[0,2]$.

התחום D הוא מעל הקטע $[0,2]$ בציר y , מוגבל מלמטה ע״י ציר y , כלומר גרף הפונקציה $z(y)=0$, ולמעלה ע״י הישר $z(y)=2-y$.

לסיכום, איפיון הגוף G הוא

$$0\leq y\leq 2$$
$$0\leq z\leq 2-y$$
$$0\leq x\leq 4-y^2$$

ולכן

$$\text{volume}(G)=\iiint_G 1dV=\int_{y=0}^{2}dy\int_{z=0}^{2-y}dz\int_{x=0}^{4-y^2}1dx=$$

$$=\int_{y=0}^{2}dy\int_{z=0}^{2-y}dz\,x\Big|_{x=0}^{4-y^2}=\int_{y=0}^{2}dy\int_{z=0}^{2-y}(4-y^2)dz=$$

$$=\int_{y=0}^{2}dy\,(4-y^2)z\Big|_{z=0}^{2-y}=\int_{y=0}^{2}(4-y^2)(2-y)dy=\int_{y=0}^{2}(y^3-2y^2-4y+8)dy=$$

$$=\frac{1}{4}y^4-\frac{2}{3}y^3-2y^2+8y\Big|_{y=0}^{2}=\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{2}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2+8\cdot 2=\frac{20}{3}$$

אינטגרל משולש בקואורדינטות גליליות

1.

א. לחשב מסת הגוף G החסום ע״י מישור xy, הגליל $x^2+y^2=4$ והפרבולואיד $z=x^2+y^2$, כאשר צפיפות המסה ליחידת נפח נתונה ע״י $\rho=(x^2+y^2)z$.

ב. לחשב קואורדינטות נקודת מרכז המסה של הגוף G.

מסת הגוף G נתונה ע״י

$$\text{mass}(G)=\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dV=\iiint\limits_G (x^2+y^2)zdV$$

הגוף G חסום בתוך הגליל $x^2+y^2=4$, מלמטה ע״י מישור xy כלומר ע״י $z=0$, ומלמעלה ע״י הפרבולואיד $z(x,y)=x^2+y^2$.

הגוף G ניתן להטלה למישור xy. ההיטל שלו למישור yz הוא העיגול

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$$

הגוף G הוא 'מעל' ההיטל D, מוגבל 'מלמטה' ע״י מישור xy, כלומר המשטח $z(x,y)=0$, ומלמעלה ע״י הפרבולאיד, כלומר המשטח $z(x,y)=x^2+y^2$.

נאפיין את הגוף G בקואורדינטות גליליות.

ההיטל שלו למישור yz הוא העיגול D המאופיין בקואורדינטות פולריות ע״י

$$D:\ 0\le\theta\le 2\pi\ \ ,\ \ 0\le r\le 2$$

הגוף G הוא 'מעל' ההיטל D, מוגבל 'מלמטה' ע״י מישור xy, כלומר המשטח $z(\theta,r)=0$, ומלמעלה ע״י הפרבולאיד, כלומר המשטח $z(\theta,r)=r^2$.

לסיכום, איפיון הגוף G בקואורדינטות גליליות הוא

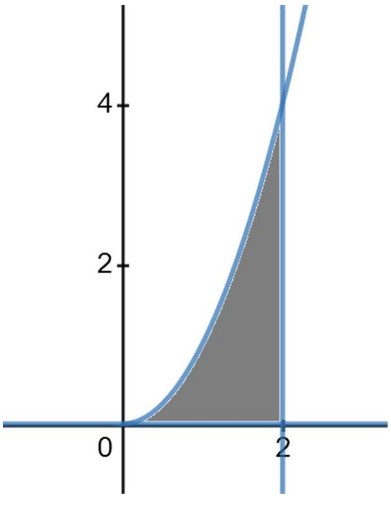
$$0\le\theta\le 2\pi$$
$$0\le r\le 2$$
$$0\le z\le r^2$$

הסבר אחר:

לגוף G יש סימטריה סיבובית סביב ציר z. כלומר לגוף 'אותה צורה' בכל כוון θ מציר z.
נסתכל על חתך דרך ציר z (בכוון כלשהו), ולכוון הניצב לציר z נקרא ציר r.

בחתך זה, משוואת הגליל $x^2+y^2=4$ הופכת למשוואת ישר $r=2$; משוואת הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ הופכת למשוואת פרבולה $z=r^2$; ומשוואת המישור $z=0$ הופכת למשוואת ישר $z=0$.

הגוף המרחבי החסום בין המישור $z=0$, הגליל $x^2+y^2=4$ והפרבולואיד $z=x^2+y^2$ הופך לתחום במישור rz החסום בין הישר $z=0$, הישר $r=2$ והפרבולה $z=r^2$.



ניתן לאפיין תחום זה במישור rz בשני אופנים.

הטלה לציר r:

ההיטל שלו לציר r הוא הקטע $[0,2]$.

התחום הוא מעל הקטע $[0,2]$ בציר r, מוגבל מלמטה ע״י ציר r, כלומר גרף הפונקציה $z(r)=0$, ולמעלה ע״י העקומה $z(r)=r^2$.

$$0\le r\le 2\ \ ,\ \ 0\le z\le r^2$$

הטלה לציר z:

ההיטל שלו לציר z הוא הקטע $[0,4]$.

התחום הוא מעל הקטע $[0,4]$ בציר z, מוגבל מלמטה ע״י גרף הפונקציה $r(z)=\sqrt{z}$, ולמעלה ע״י הישר $r=2$.

$$0\le z\le 4\ \ ,\ \ \sqrt{z}\le r\le 2$$

מכיוון שהגוף G נמצא 'בכל הכוונים מציר z, תחום של המשתנה θ הוא $0\le\theta\le 2\pi$.

ולכן מתקבלים שני איפיונים של הגוף G בקואורדינטות גליליות:

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le r \le 2$

$0 \le z \le r^2$

(נשים לב שזה זהה לאיפיון של הגוף G שקיבלנו בדרך הראשונה)

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le z \le 4$

$\sqrt{z} \le r \le 2$

נחשב את האינטגרל באמצעות האיפיון הראשון.

$$\text{mass}(G) = \iiint\limits_G (x^2+y^2) z dV = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^2 z \cdot \underbrace{r}_{J} dz =$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^3 z \, dz = 2\pi \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \left. \frac{r^3 z^2}{2} \right|_{z=0}^{r^2} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{r=0}^{2} \frac{r^3 (r^2)^2}{2} dr = \pi \int\limits_{r=0}^{2} r^7 dr = \pi \left. \frac{r^8}{8} \right|_{r=0}^{2} = \pi \frac{2^8}{8} = 32\pi$$

ב.

$$\iiint\limits_G x\rho(x,y,z) dV = \iiint\limits_G x(x^2+y^2) z dV = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} (r\cos\theta) r^2 z \cdot \underbrace{r}_{J} dz =$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta d\theta \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz = \sin\theta \Big|_{\theta=0}^{2\pi} \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz =$$

$$= (\sin 2\pi - \sin 0) \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz = 0 \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz = 0$$

ולכן

$$x_{CM} = \frac{\iiint\limits_G x\rho(x,y,z) dV}{\iiint\limits_G \rho(x,y,z) dV} = \frac{0}{32\pi} = 0$$

באופן דומה

$$\iiint\limits_G y\rho(x,y,z) dV = \iiint\limits_G y(x^2+y^2) z dV = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} (r\sin\theta) r^2 z \cdot \underbrace{r}_{J} dz =$$

$$= \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz = (-\cos\theta) \Big|_{\theta=0}^{2\pi} \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz =$$

$$= (-\cos 2\pi + \cos 0) \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz = 0 \cdot \int\limits_{r=0}^{2} dr \int\limits_{z=0}^{r^2} r^4 z \, dz = 0$$

ולכן

$$y_{CM} = \frac{\iiint\limits_G y\rho(x,y,z) dV}{\iiint\limits_G \rho(x,y,z) dV} = \frac{0}{32\pi} = 0$$

$$\iiint_G z\rho(x,y,z)dV = \iiint_G z(x^2+y^2)zdV = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{2} dr \int_{z=0}^{r^2} r^2 z^2 \cdot \underbrace{r}_{J} dz =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_{r=0}^{2} dr \int_{z=0}^{r^2} r^3 z^2\, dz = 2\pi \cdot \int_{r=0}^{2} dr \left.\frac{r^3 z^3}{3}\right|_{z=0}^{r^2} =$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{2} \frac{r^3 (r^2)^3}{3} dr = \frac{2\pi}{3} \int_{r=0}^{2} r^9 dr = \frac{2\pi}{3} \left.\frac{r^{10}}{10}\right|_{r=0}^{2} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2^{10}}{10} = \frac{1024}{15}\pi$$

ולכן

$$z_{CM} = \frac{\iiint_G z\rho(x,y,z)dV}{\iiint_G \rho(x,y,z)dV} = \frac{\frac{1024}{15}\pi}{32\pi} = \frac{32}{15}$$

ומכאן שנקודת מרכז המסה של הגוף G היא $\left(0,0,\frac{32}{15}\right)$.

.2

לחשב נפח הגוף G החסום בין הספירה $x^2+y^2+z^2=R^2$ ובין המישורים $z=a$, $z=b$ כאשר $0<a<b<R$.

$$\text{volume}(G)=\iiint_G 1dV$$

לגוף G יש סימטריה סיבובית סביב ציר z. כלומר לגוף 'אותה צורה' בכל כוון θ מציר z.
נסתכל על חתך דרך ציר z (בכוון כלשהו), ולכוון הניצב לציר z נקרא ציר r.
בחתך זה, משוואת הספירה $x^2+y^2+z^2=R^2$ הופכת למשוואת מעגל $r^2+z^2=R^2$ במישור rz;
משוואות המישורים $z=a$, $z=b$ הופכות למשוואות ישרים $z=a$, $z=b$.
הגוף המרחבי החסום בין הספירה $x^2+y^2+z^2=R^2$ ובין המישורים $z=a$, $z=b$ הופך לתחום במישור rz החסום בין המעגל $r^2+z^2=R^2$, הישרים $z=a$, $z=b$ והישר $r=0$.

ניתן לאפיין תחום זה במישור rz ע"י הטלה לציר z:
ההיטל שלו לציר z הוא הקטע $[a,b]$.
התחום הוא מעל הקטע $[a,b]$ בציר z, מוגבל מלמטה ע"י גרף הפונקציה $r(z)=0$, ולמעלה ע"י הישר $r(z)=\sqrt{R^2-z^2}$.

$$a\le z\le b$$
$$0\le r\le\sqrt{R^2-z^2}$$

מכיוון שהגוף G נמצא 'בכל הכוונים מציר z, תחום של המשתנה θ הוא $0\le\theta\le 2\pi$.
ולכן מתקבל האיפיון של הגוף G בקואורדינטות גליליות:

$$0\le\theta\le 2\pi$$
$$a\le z\le b$$
$$0\le r\le\sqrt{R^2-z^2}$$

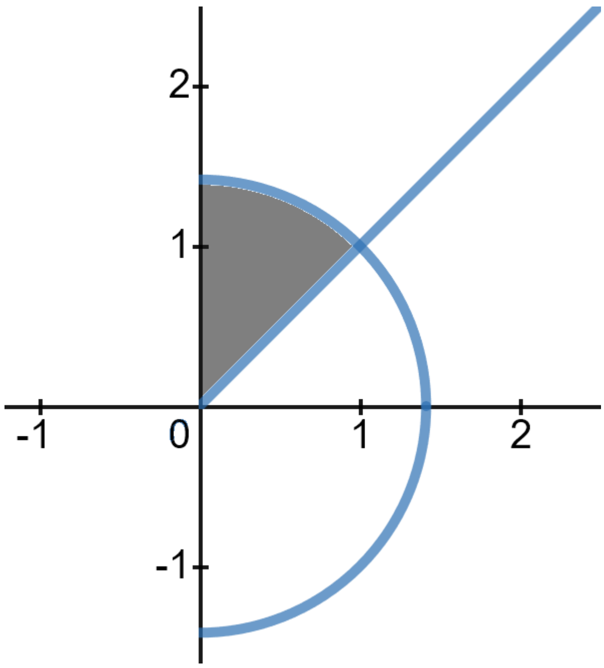
ומכאן

$$\text{volume}(G)=\iiint_G 1dV=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int_{z=a}^{b}dz\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}}1\cdot\underbrace{r}_{J}\,dr=$$
$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}1d\theta\cdot\int_{z=a}^{b}dz\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}}rdr=2\pi\cdot\int_{z=a}^{b}dz\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}}=$$
$$=2\pi\int_{z=a}^{b}\frac{(\sqrt{R^2-z^2})^2}{2}dz=\pi\int_{z=a}^{b}(R^2-z^2)dz=\pi\left.\left(R^2z-\frac{1}{3}z^3\right)\right|_{z=a}^{b}=$$
$$=\pi R^2(b-a)-\frac{1}{3}\pi(b^3-a^3)$$

3.

לאפיין את התחום G החסום בין הספירה $x^2+y^2+z^2=2$ ובין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ומעל החרוט,
ולרשום אינטגרל חוזר של פונקציה $f(x,y,z)$ בתחום זה.

לגוף G יש סימטריה סיבובית סביב ציר z. כלומר לגוף 'אותה צורה' בכל כוון θ מציר z.
נסתכל על חתך דרך ציר z (בכוון כלשהו), ולכוון הניצב לציר z נקרא ציר r.
בחתך זה, משוואת הספירה $x^2+y^2+z^2=2$ הופכת למשוואת מעגל $r^2+z^2=2$ במישור rz; משוואת החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ הופכת למשוואות ישרים $z=r$.
הגוף המרחבי בין הספירה $x^2+y^2+z^2=2$ ובין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ומעל החרוט הופך לתחום במישור rz החסום בין המעגל $r^2+z^2=2$, הישר $z=r$ והישר $r=0$, ומעל הישר $z=r$.



ניתן לאפיין תחום זה במישור rz ע"י הטלה לציר r:
ההיטל שלו לציר r הוא הקטע $[0,1]$.
התחום הוא מעל הקטע $[0,1]$ בציר r, מוגבל מלמטה ע"י גרף הפונקציה $z(r)=r$, ולמעלה ע"י המעגל $z(r)=\sqrt{R^2-r^2}$.

$0\le r\le 1$

$r\le z\le \sqrt{R^2-r^2}$

מכיוון שהגוף G נמצא 'בכל הכוונים מציר z,
תחום של המשתנה θ הוא $0\le\theta\le 2\pi$.
ולכן מתקבל האיפיון של הגוף G בקואורדינטות גליליות:

$0\le\theta\le 2\pi$

$0\le r\le 1$

$r\le z\le \sqrt{R^2-r^2}$

ומכאן שעבור פונקציה f המוגדרת בגוף G,

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\int\limits_{r=0}^{1}dr\int\limits_{z=r}^{\sqrt{R^2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\cdot\underbrace{r}_{J}\,dr$$