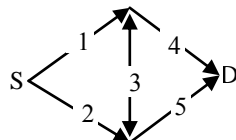


מבוא להסתברות - תרגיל מס' 4

אי-תלות

1. במשחק מטילים מטבע שוב ושוב, עד אשר מתקבל הרצף [עץ,עץ] או הרצף [פלי, עץ] (לפי הסדר מימין לשמאל). אם משתתף במשחק מהמר כי הרצף [עץ,עץ] ייצא קודם, מה ההסתברות לכך שיזכה במשחק? $\{0.25\}$
2. הוכח כי התנאי $P\{B/A\} = P\{B/\bar{A}\}$ הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך שהמאורעות A ו-B הם בלתי-תלויים.
3. הוכח כי אם המאורעות A, B, C הם ב"ת אז המאורע C אינו תלוי במאורעות $A \cap B$, ו- $A \cup B$.
4. לפניך שתי קופסאות, ובכל קופסא יש כדור אחד לבן ואחד שחור, מוציאים כדור אחד מכל קופסא, יהי A המאורע: הוצא כדור שחור מן הקופסא הראשונה, יהי B המאורע: הוצא כדור שחור מן הקופסא השנייה, ויהי C המאורע: בדיוק אחד מבין שני הכדורים שהוצאו הוא שחור. האם A, B בלתי תלויים? $\{כן\}$
האם B, C בלתי תלויים? $\{כן\}$ האם A, C בלתי תלויים? $\{כן\}$ האם A, B, C הם שלשה בלתי תלויה? $\{לא\}$
5. מערכת מורכבת מ N רכיבים, ידוע כי כל רכיב הוא תקין בהסתברות p ללא תלות במצבם של שאר הרכיבים. חשב את ההסתברות לתקינות המערכת אם:
 - א. הרכיבים מחוברים בטור; $\{p^n\}$
 - ב. הרכיבים מחוברים במקביל; $\{1-q^n\}$
 - ג. המערכת מורכבת מ a תת מערכות המחוברות במקביל, וכל תת מערכת מורכבת מ b רכיבים המחברים בטור $(N=a \cdot b)$;
 - ד. המערכת מורכבת מ a תת מערכות המחוברות בטור, וכל תת מערכת מורכבת מ b רכיבים המקביל $(N=a \cdot b)$.
6. במכונות מטיפוס מסוים המורכבות מ N רכיבים, המכונה פועלת אם יותר ממחצית הרכיבים בה תקינים, ידוע כי כל רכיב הוא תקין בהסתברות p ללא תלות במצבם של שאר הרכיבים.
נתונות שתי מכונות מטיפוס זה: אחת מורכבת מ – 3 רכיבים, והשנייה מ – 5 רכיבים. איזו מכונה אמינה יותר (כלומר לאיזו מכונה סיכוי רב להיות תקינה)?
 $\{אם p < 0.5 - 3 \text{ רכיבים}\}$
7. כאשר משדרים ביטים בקו תקשורת יש סיכוי של 0.01 שהביט נקלט באופן שגוי (כלומר, 0 במקום 1 או ההיפך). כדי לצמצם טעויות, משודר כל ביט 3 פעמים, ומפוענח בצד השני על פי מה שנקלט ברוב התשדורות מתוך ה-3.
א. מהי ההסתברות לכך שביט מועבר יפוענח נכון? $\{0.9997\}$
ב. מעבירים הודעה באורך 10 ביטים, מהי ההסתברות לכך שהיא תפוענח נכון במלואה? $\{0.997\}$
ג. מעבירים 5 הודעות באורך 10 ביטים כל אחת, מהי ההסתברות לכך שכולן פוענחו נכון במלואן? $\{0.9851\}$
ד. מעבירים 20 הודעות באורך 10 ביטים כל אחת, מהי ההסתברות לכך שלכל היותר 2 הודעות לא פוענחו נכון במלואן? $\{0.99997\}$
8. בתרשים להלן מתוארת מערכת ובה חמישה רכיבים, ידוע כי רכיב מס' k תקין בהסתברות $1/(k+1)$, $k=1, \dots, 5$, וזאת ללא תלות במצבם של יתר הרכיבים. מהי ההסתברות לכך שהמערכת תקינה? $\{0.1681\}$



9. כד מכיל 5 כדורים לבנים, 10 כדורים אדומים, ו-15 כדורים שחורים.

א) דוגמים, בלי החזרה, 5 כדורים. מה ההסתברות שדוגמים לפחות 4 כדורים אדומים?

ב) דוגמים, עם החזרה, 5 כדורים. מה ההסתברות שדוגמים לפחות 4 כדורים אדומים?

ג) דוגמים עם החזרה, עד שיוצא, לראשונה, כדור אדום. מה ההסתברות שדוגמים לפחות 4 כדורים?

ד) דוגמים, בלי החזרה, 4 כדורים. מה ההסתברות שמספר הכדורים הלבנים שהוצאו שווה למספר הכדורים השחורים שהוצאו?

10. א. בהטלות קובייה הוגנת מהי ההסתברות שנקבל מספר "6" לראשונה רק בהטלה השישית? (0.0669)

ב. מטילים קובייה הוגנת 10 פעמים. מה ההסתברות שב-5 הטלות נקבל מספר גדול מ-5? (0.013)

ג. מטילים קובייה הוגנת 10 פעמים. מה ההסתברות שבפחות מ-2 הטלות נקבל מספר גדול מ-5? (0.4845)

11. מתוך קבוצה של 12 נשים ו-8 גברים בוחרים באופן מקרי ועד של 6 נבחרים.

א. מהי ההסתברות לכך שמחצית מחברי הועד גברים? (0.3179)

ב. מהי ההסתברות לכך שהועד מורכב כולו מגברים? (0.0007)

ג. מהי ההסתברות לכך שלכל היותר 5 מחברי הועד גברים? (0.9993)

12. בוחרים באופן מקרי נקודה (X, Y) בריבוע Ω , שפינותיו הן $(0,0), (0,M), (M,0), (M,M)$. הנקודה מתפלגת באופן אחיד על הריבוע. כלומר, אם A הוא תחום המוכל בריבוע Ω , אזי ההסתברות שהיא תהיה בתוך A , היא השטח של A מחולק בשטח של הריבוע Ω (פתור עבור M כללי, וישם עבור $M=10$).

א. מהי ההסתברות לכך שבנקודה הנבחרת X קטן מ- Y ? {0.5}

ב. מהי ההסתברות לכך ש- X^2 קטן מ- Y^2 ? {0.5}

ג. מהי ההסתברות לכך ש- Y גדול מ- $X^2/4$? {0.4216}

ד. מהי ההסתברות לכך שלמשוואה $t^2 + Xt + Y = 0$ (כמשוואה ב- t) יש פתרון ממשי t ? {0.5784}