

**בהצלחה רבה במבחן!!**

**שאלון X**

**שאלה 1: (20 נקודות)**

א. (10 נק') הוכיחו כי לכל  $0 < a < b$  מתקיים:  $e^{b^2} - e^{a^2} < 2be^{b^2}(b-a)$ .

ב. (10 נק') חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4n - 3}{n^2 + 2n + 5} \right)^{6n}$ .

**פתרון 1.א (רשום רק בעמודים 1 ו-2)**





**פתרון 1.1** (רשום רק בעמודים 3 ו-4)





**שאלה 2 : (20 נקודות)**

א. (10 נק') נתונה סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , כך ש-  $a_n = \frac{5n+\sqrt{1}}{n^2+1} + \frac{5n+\sqrt{2}}{n^2+2} + \dots + \frac{5n+\sqrt{n}}{n^2+n}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל :  $\int \left( \frac{1}{(\tan x - 1)(\tan x - 2)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$ .

**פתרון 2.א** (רשום רק בעמודים 5 ו-6)





**פתרון 2.ב** (רשום רק בעמודים 7 ו-8)





**שאלה 3 :** (20 נקודות)

א. (10 נק') מצאו כמה פתרונות ממשיים קיימים למשוואה:  $\ln(x^2 + 1) = \arctan x$ .

ב. (10 נק') נתונה פונקציה  $f$  בעלת נגזרות עד סדר 3 רציפות ב-  $\mathbb{R}$ . ידוע שהפולינום טיילור-מקלורין שלה מסדר שני הוא  $T_2(x) = 2 + 4x + 8x^2$ , ו-  $|f'''(x)| \leq 1$  לכל  $x$  ממשי.

ב.1) הוכיחו שהנקודה  $x_0 = 0$  היא לא נקודה קריטית וגם לא נקודת פיתול של הפונקציה  $f^2$ .

ב.2) מצאו קירוב של הערך  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  והעריכו את השגיאה בקירוב שמצאתם.

**פתרון 3.א** (רשום רק בעמודים 9 ו-10)











**שאלה 4 : (20 נקודות)**

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ .

**א. (10 נק')** מצאו תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון מקומי של הפונקציה  $f$  בתחום ההגדרה שלה  $(0, \infty)$ .

**ב. (10 נק')** האם קיים לפונקציה  $f$  מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט בתחום:

**1.ב**  $(0, \infty)$  ?

**2.ב**  $[1, \infty)$  ?

נמקו היטב את תשובתכם.

**פתרון 4.א** (רשום רק בעמודים 13 ו-14)











**שאלה 5: (20 נקודות)**

נתונה הפונקציה  $F(x) = \int_{\pi}^x \frac{(\sin t)^2}{t} dt$

- א. (10 נק') הוכיחו ש- $F$  גזירה בכל  $x \in (0, \infty)$  ומצאו את הנגזרת שלה.  
ב. (10 נק') נגדיר פונקציה חדשה:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x - \pi} & x > \pi \\ 0 & x = \pi \\ \frac{\ln(1 + (\pi - x)^2)}{\pi - x} & x < \pi \end{cases}$$

האם הפונקציה  $G$  היא רציפה בנקודה  $x_0 = \pi$ ?

**פתרון 5.א** (רשום רק בעמודים 17 ו-18)





**פתרון 5.ב** (רשום רק בעמודים 19 ו-20)





**שאלה 6 : (20 נקודות)**

א. (10 נק') נתונה הפונקציה :

$$f(x) = \begin{cases} x^{5x} & (x > 0) \\ x+1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

א.1 (10 נק') הוכיחו שהפונקציה היא רציפה בנקודה  $x_0 = 0$ .

א.2 האם היא גזירה בנקודה  $x_0 = 0$  ?

ב. (10 נק') לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  העבירו משיק בנקודה  $(1, f(1))$ .  
חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר המשיק וציר ה-x.

**פתרון 6.א** (רשום רק בעמודים 21 ו-22)





**פתרון 6.ב** (רשום רק בעמודים 23 ו- 24)

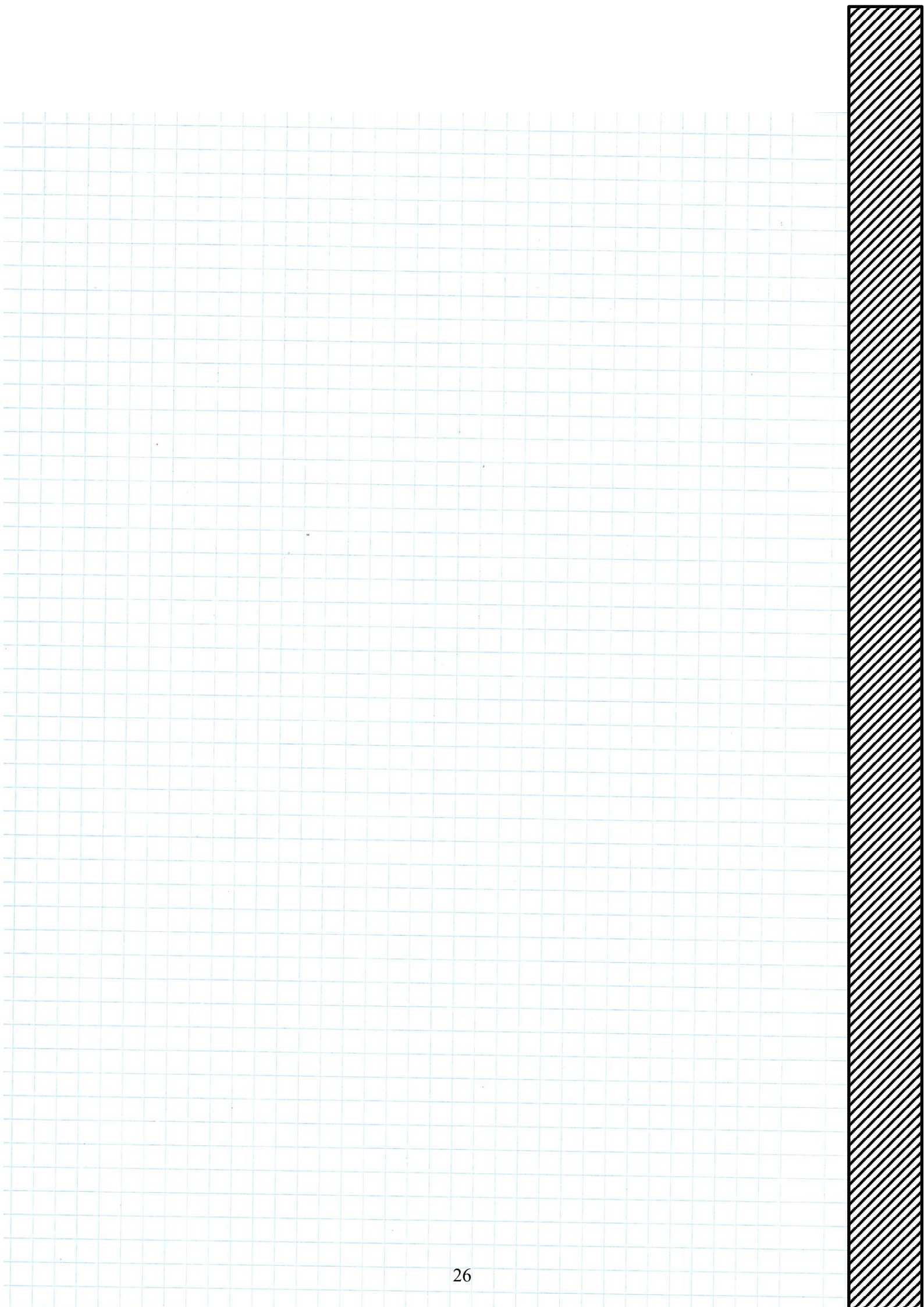


## המשך פתרון 6.2

סוף הפתרון !

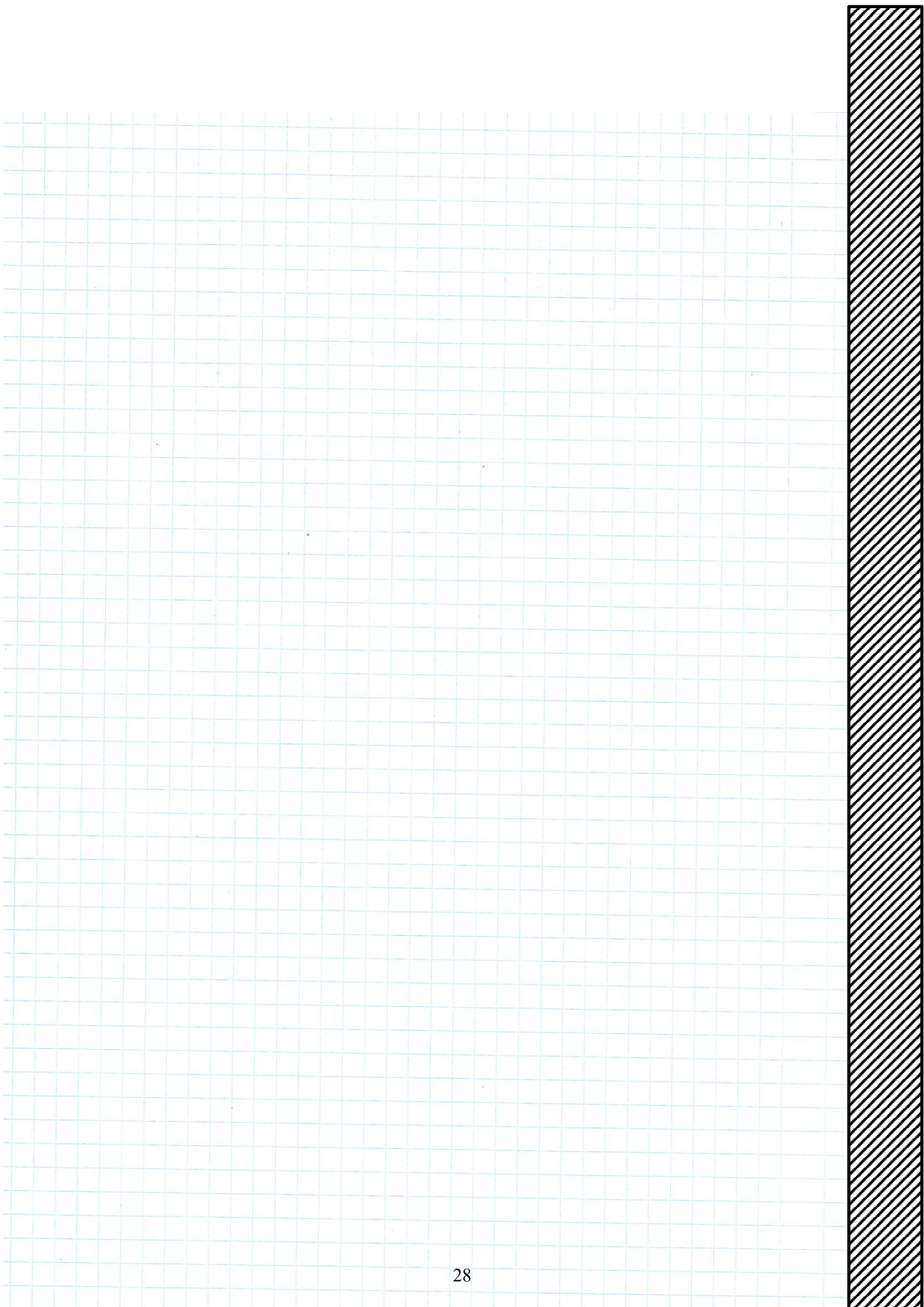












מרצים : ד"ר דבורה קפלן, ד"ר רוני ביתן, פרופסור יוני סטאנצ'סקו.  
 מתרגלים : מר עמית בנגיאט, מר ולדימיר גלמן, מר שי כרמון .

## פתרון X

### שאלה 1: (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו כי לכל  $0 < a < b$  מתקיים :  $e^{b^2} - e^{a^2} < 2be^{b^2}(b-a)$  .

ב. (10 נק') חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4n - 3}{n^2 + 2n + 5} \right)^{6n}$

### פתרון :

א. נשתמש במשפט לגרנז' : הפונקציה  $f(x) = e^{x^2}$  היא רציפה בקטע  $[a, b]$  כאלמנטרית שמוגדרת בקטע, וגזירה בקטע  $(a, b)$  (הרכבה של גזירות ב- $\mathbb{R}$ ) ולכן קיים  $c \in (a, b)$  כך ש :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow e^{b^2} - e^{a^2} = e^{c^2} 2c(b-a) < e^{b^2} 2b(b-a)$$

$$\begin{aligned} 0 < a < c < b \\ \text{THEN:} \\ 0 < e^{c^2} < e^{b^2} \\ 0 < 2c < 2b \\ 0 < b-a \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4n - 3}{n^2 + 2n + 5} \right)^{6n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n + 5 + 2n - 8}{n^2 + 2n + 5} \right)^{6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2n - 8}{n^2 + 2n + 5} \right)^{6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2n - 8}{n^2 + 2n + 5} \right)^{\frac{n^2 + 2n + 5}{2n - 8}} \right]^{\left( \frac{2n - 8}{n^2 + 2n + 5} \right)^{6n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{2n - 8}{n^2 + 2n + 5} \right)^{\frac{n^2 + 2n + 5}{2n - 8}} \right]^{\left( \frac{12n^2 - 48n}{n^2 + 2n + 5} \right)} = e^{12} \end{aligned}$$

הסבר תוצאת הגבול :

$$\text{(EULER). } x_n = \frac{2n - 8}{n^2 + 2n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2n - 8}{n^2 + 2n + 5} \right)^{\frac{n^2 + 2n + 5}{2n - 8}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 - 48n}{n^2 + 2n + 5} = \begin{matrix} / : n^2 \\ / : n^2 \end{matrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{12 - \frac{48}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} \right) = 12$$

ולכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 4n - 3}{n^2 + 2n + 5} \right)^{6n} = e^{12}$$



**שאלה 2 : (20 נקודות)**

א. (10 נק') נתונה סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , כך ש-  $a_n = \frac{5n+\sqrt{1}}{n^2+1} + \frac{5n+\sqrt{2}}{n^2+2} + \dots + \frac{5n+\sqrt{n}}{n^2+n}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל:  $\int \left( \frac{1}{(\tan x - 1)(\tan x - 2)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$

**פתרון:**

א. לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים:  $n \cdot \frac{5n+\sqrt{1}}{n^2+n} \leq a_n \leq n \cdot \frac{5n+\sqrt{n}}{n^2+1}$

(הסבר: כל איבר בסדרה מורכב מ-  $n$  מחוברים. ומחובר מספר  $j$  מקיים:

$$\left( \frac{5n+\sqrt{1}}{n^2+n} \leq \frac{5n+\sqrt{j}}{n^2+j} \leq \frac{5n+\sqrt{n}}{n^2+1} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n\sqrt{1}}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 \left( 1 + \frac{n}{5n^2} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right)} = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n\sqrt{n}}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 \left( 1 + \frac{n\sqrt{n}}{5n^2} \right)}{n^2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = 5$$

ואז לפי כלל הסנדוויץ' נובע ש-  $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5}$

**ב.**

$$\int \frac{1}{(\tan x - 1)(\tan x - 2)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{(t-1)(t-2)} dt = \int \left( \frac{1}{(t-2)} - \frac{1}{(t-1)} \right) dt =$$

$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$   
 $A=-1, B=1$

$$= \ln|t-2| - \ln|t-1| + C = \ln|\tan x - 2| - \ln|\tan x - 1| + C$$

**שאלה 3 : (20 נקודות)**

**א. (10 נק')** מצאו כמה פתרונות ממשיים קיימים למשוואה:  $\ln(x^2 + 1) = \arctan x$

**ב. (10 נק')** נתונה פונקציה  $f$  בעלת נגזרות עד סדר 3 רציפות ב-  $\mathbb{R}$ .

ידוע שהפולינום טיילור-מקלורין שלה מסדר שני הוא  $T_2(x) = 2 + 4x + 8x^2$ ,  $|f'''(x)| \leq 1$ ,  $x$  ממשי.

**1.ב** הוכיחו שהנקודה  $x_0 = 0$  היא לא נקודה קריטית וגם לא נקודת פיתול של הפונקציה  $f^2$ .

**2.ב** מצאו קירוב של הערך  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  והעריכו את השגיאה בקירוב שמצאתם.

**פתרון:**

**א.** נתבונן בפונקציה  $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \arctan x$ . מספיק לבדוק כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה  $f(x) = 0$ . פונקציה אלמנטרית שמוגדרת לכל  $x$  ממשי, לכן  $f$  רציפה לכל  $x$  ממשי. בנוסף מתקיים:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ .

$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ , ואז הנגזרת היא חיובית בקטע  $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ , שלילית בקטע  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$  ו  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ .  
לכן הפונקציה יורדת ממש בקטע  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  ועולה ממש בקטע  $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ .

בנוסף לפי הגבולות האינסופיים שחישבנו אפשר להסיק שקיימים נקודות  $a < \frac{1}{2}$ ,  $b > \frac{1}{2}$  עבורן

הפונקציה חיובית, ובנוסף  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ .

אם נפעיל משפט ערך הביניים בקטעים  $\left[\frac{1}{2}, b\right]$  ו  $\left[a, \frac{1}{2}\right]$  ונסיק שבכל אחד קיים פתרון למשוואה

$f(x) = 0$ , וכל אחד הוא פתרון היחיד בקטעים  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  ו  $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$  בהתאמה, זה נובע מהמונוטוניות ממש בכל אחד מהקטעים האלה.

**מסקנה: למשוואה קיימים בדיוק שני פתרונות.**

**1.ב** לפי המקדמים של הפולינום מקלורין (המקדם של  $x^k$  שווה ל  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ) מסיקים ש:

$$f(0) = 2, f'(0) = 4, f''(0) = 16$$

$$\left. \begin{aligned} (f^2)'(0) &= 2f(0)f'(0) \\ (f^2)''(0) &= 2(f'(0))^2 + 2f(0)f''(0) \end{aligned} \right\} \text{ בנוסף מתקיים:}$$

כלומר הנגזרת של  $f^2$  ב-0 היא שונה מ-0 לכן אין ב-0 נקודה קריטית, וגם הנגזרת השנייה שונה מ-0 בנקודה  $x = 0$  לכן אין נקודת פיתול ב-0.



ב. 2

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \cong T_2\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - 6\right| = \left|r_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{f'''(c)\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!}\right| = \frac{|f'''(c)|\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} \leq \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{48}$$

**שאלה 4 : (20 נקודות)**

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

א. (10 נק') מצאו תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון מקומי של הפונקציה  $f$  בתחום ההגדרה שלה  $(0, \infty)$ .

ב. (10 נק') האם קיים לפונקציה  $f$  מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט בתחום :

1.  $(0, \infty)$  ?

2.  $[1, \infty)$  ?

נמקו היטב את תשובתכם.

**פתרון :**

א. הפונקציה גזירה בכל נקודה בתחום ההגדרה ומתקיים :

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$$

הנקודות קיצון מקומי חייבות להיות בין הנקודות הקריטיות, שבמקרה הזה הן הנקודות בהן

הנגזרת מתאפסת : יש שתיים כאלו :  $x = 1, x = e^2$ .

נבדוק מהו סימן הנגזרת בתחומים ביניהם ונסיק לגבי תחומי העלייה והירידה :

מסיקים :

	$0 < x < 1$	$1 < x < e^2$	$e^2 < x$
$\ln x$	-	+	+
$2 - \ln x$	+	+	-
$f'$	-	+	-
$f$	יורדת	עולה	יורדת

הפונקציה יורדת ממש בקטעים  $(0, 1)$  ו-  $[e^2, \infty)$

(נגזרת קטנה או שווה ל-0 ומתאפסת בנקודות בודדות).

ועולה ממש בקטע  $[1, e^2]$  (נגזרת גדולה או שווה ל-0

ומתאפסת בנקודות בודדות).

מכאן : בנקודה  $x = 1$  יש מינימום מקומי, ובנקודה  $x = e^2$  יש מקסימום מקומי.

**ב1.**

בקטע  $(0, \infty)$  : לפי תחומי עליה וירידה ובנוסף לפי הגבול :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, LOPITAL\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\ln x) \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, LOPITAL\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{1} = 0$$

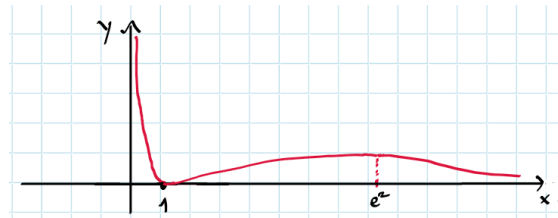
מסיקים שבנקודה  $x=1$  יש לפונקציה מינימום מוחלט ששווה ל  $f(1) = 0$  ( בעצם הפונקציה חיובית בכל נקודה שונה מ-1).

אין לה מקסימום מוחלט בתחום  $(0, \infty)$  כי  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x} = \infty$

**ב2.** בקטע  $[1, \infty)$  : לפי תחומי עליה וירידה ובנוסף  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$  מסיקים שבנקודה  $x=1$  יש

לפונקציה מינימום מוחלט ששווה ל  $f(1) = 0$  ( בעצם הפונקציה חיובית בכל נקודה השונה מ-1).

ובנקודה  $x=e^2$  יש לפונקציה מקסימום מוחלט בקטע הנתון, והוא שווה לערך  $f(e^2) = \frac{4}{e^2}$ .



**שאלה 5 : (20 נקודות)**

$$F(x) = \int_{\pi}^x \frac{(\sin t)^2}{t} dt \text{ נתונה הפונקציה}$$

**א. (10 נק')** הוכיחו ש- $F$  גזירה בכל  $x \in (0, \infty)$  ומצאו את הנגזרת שלה.

**ב. (10 נק')** נגדיר פונקציה חדשה :

$$G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x - \pi} & x > \pi \\ 0 & x = \pi \\ \frac{\ln(1 + (\pi - x)^2)}{\pi - x} & x < \pi \end{cases}$$

האם הפונקציה  $G$  היא רציפה בנקודה  $x_0 = \pi$  ?

**פתרון:** **א.** הפונקציה  $f(t) = \frac{(\sin t)^2}{t}$  רציפה בקטע  $(0, \infty)$  כי מוגדרת בקטע והיא

אלמנטרית. ובנוסף  $\pi \in (0, \infty)$ .



ואז לפי הממשפט היסודי הפונקציה  $F$  היא גזירה לכל  $x \in (0, \infty)$  ומתקיים:

$$F'(x) = \frac{(\sin x)^2}{x}$$

**ב.**

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \left( \frac{F(x)}{x - \pi} \right) = \left( \frac{0}{0}, LOPITAL \right) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(\sin x)^2}{x} = \frac{(\sin \pi)^2}{\pi} = 0$$

\*נימוק על הגבול של  $F$ : הפונקציה  $F$  גזירה ולכן רציפה לכל  $x \in (0, \infty)$ , לכן:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} F(x) = F(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} \frac{(\sin t)^2}{t} dt = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\ln(1 + (\pi - x)^2)}{\pi - x} = \left( \frac{0}{0}, LOPITAL \right) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\frac{1}{1 + (\pi - x)^2} \cdot 2(\pi - x)(-1)}{-1} = 0$$

ואז הפונקציה  $G$  מקיימת:  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} G(x) = G(\pi)$  לכן היא רציפה ב  $x = \pi$ .

### **שאלה 6 : (20 נקודות)**

**א. (10 נק')** נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x^{5x} & (x > 0) \\ x+1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

**1.א** הוכיחו שהפונקציה היא רציפה בנקודה  $x_0 = 0$ .

**2.א** האם היא גזירה בנקודה  $x_0 = 0$ ?

**ב. (10 נק')** לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  העבירו משיק בנקודה  $(1, f(1))$ .  
חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר המשיק וציר ה- $x$ .

**פתרון :**

**1. א**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{5x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{5x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{5 \ln x}{x^{-1}}} = e^0 = 1$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5 \ln x}{x^{-1}} = \left( \frac{-\infty}{\infty} \text{ L'Hopital} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{5}{x}}{\left( \frac{-1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-5x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -5x = 0 \right)$$

$$f(0) = 1$$

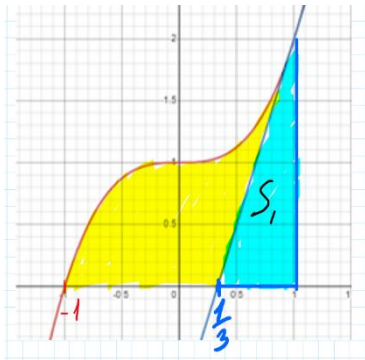
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$$

ואז הפונקציה רציפה ב-0 כי הגבולות החד צדדיים שווים לערך שלה ב-0.

**2.א** נבדוק גזירות לפי ההגדרה: נבדוק האם הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(h) - f(0)}{h} \right)$  קיים וסופי:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{f(h) - f(0)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{h^{5h} - 1}{h} \right) = \left( \frac{0}{0}, \text{ L'HOPITAL} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(e^{5h \ln h})'}{1} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{5h \ln h} (5 \ln h + 5) = -\infty$$

נובע שהפונקציה לא גזירה ב-0.



**ב.** נמצא משוואת המשיק.

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(1) = 3 \quad \text{ו-} \quad f(1) = 2$$

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + 3(x-1) \rightarrow \boxed{y = 3x - 1} \quad \text{משוואת המשיק:}$$

נחשב שטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע  $[-1, 1]$

ונחסיר את שטח המשולש המסומן ב- $S_1$ :

$$S = \int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx - S_1$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx = \left( \frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_{-1}^1 = 2$$

$$S_1 = \frac{\frac{2}{3} \cdot 2}{2} = \frac{2}{3}$$

$$S = 2 - \frac{2}{3} = 1 \frac{1}{3}$$



דרך שנייה לפתור :  $S = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} (x^3 + 1) dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (x^3 + 1 - (3x - 1)) dx$