

מבחן Y (ספטמבר 2023)

מרצה : ד"ר דבורה קפלן

מתרגלים :גב' אירנה נמירובסקי, מר עמית בנגיאט, מר אלכסנדר מינקין.

שאלה 1 - (20 נק') (אין קשר בין שני הסעיפים).

א. (12 נק') מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3^n n^2} \right) (x-2)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

ב. (8 נק') לטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ יש רדיוס התכנסות $r = 5$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

1. הטור חזקות מתבדר לכל $x \in [5, +\infty)$.

2. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} \right) 2^{n+1}$ מתכנס בהחלט.

שאלה 2 - (20 נק')

נתונה הפונקציה : $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$.

א. (15 נק') מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה f בתחום :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}.$$

ב. (5 נק') האם קיימים לפונקציה f מקסימום או מינימום מוחלטים ב- \mathbb{R}^2 ?

שאלה 3 - (20 נק') (אין קשר בין שני הסעיפים).

א. (10 נק') נתונה פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ במשתנים x, y , דיפרנציאבילית ב- \mathbb{R}^2 . נגדיר פונקציה

g באופן הבא: $g(t) = f(t^2 + 2e^t, \sin t)$. נגדיר וקטור יחידה $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. ידוע כי

$$\frac{dg}{dt}(0) = g'(0) = 5 \quad \text{ו-} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,0) = 0. \quad \text{מצאו את } \vec{\nabla} f(2,0).$$

ב. (10 נק') נתונה הפונקציה:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy \cos y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ב.1. האם הפונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$?

ב.2. האם הפונקציה היא דיפרנציאבילית בנקודה $(x, y) \neq (0, 0)$?

שאלה 4 - (20 נק')

חשבו את מסת לוח המישורי $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq \sqrt{3} \cdot |y|\}$, כאשר פונקציית

הצפיפות של הלוח היא $\rho(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.

שאלה 5 - (20 נק')

חשבו את האינטגרל הקווי מסוג שני: $\int_L (x^2 + 2x^2y)dx + (2xy^2 - y^2)dy$:

לאורך העקומה $L = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq x\}$ בכיוון נגד השעון.
(שימו לב: העקומה היא לא סגורה).

שאלה 6 - (20 נק')

חשבו את השטף של השדה הוקטורי: $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \vec{i} + (1-x)y \vec{j} + z^2 \vec{k}$ דרך המשטח

הפתוח σ : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 1$.

כיוון הנורמליים למשטח הוא "כלפי מטה" כלומר לכיוון השלילי של ציר \vec{OZ} .

בהצלחה!!