

פתרון

שאלון Y

מבוא להסתברות

שאלה 1 (35 נקודות – כל סעיף 7 נקודות)

- חברה מוכרת רכיבים בקופסאות. לגבי כל רכיב, ההסתברות שהוא פגום היא 0.1. ישנם שני סוגים של קופסאות: קופסא סוג A מכילה 4 רכיבים, וקופסא סוג B מכילה 5 רכיבים. כל משלוח של קופסאות מכיל 40% קופסאות סוג A ו-60% קופסאות סוג B. בוחרים ממשלוח קופסא אחת באקראי ובודקים את כל הרכיבים בקופסא שנבחרה.
- מה ההסתברות שבבדיקה נקבל רכיב אחד פגום?
 - בבדיקה של קופסא נמצא רכיב אחד פגום. מה ההסתברות שהקופסא היא סוג A?
 - מהי תוחלת מספר הרכיבים הפגומים בבדיקה?
 - מהי שונות מספר הרכיבים הפגומים בבדיקה?
 - במשלוח של 100 קופסאות, מה ההסתברות שלכל היותר 30 קופסאות יכילו רכיב אחד פגום כל אחת?

פתרון

X = מספר הסוללות הפגומות בחבילה

$$X | A \sim B(4, 0.1)$$

$$X | B \sim B(5, 0.1)$$

א.

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X=1|A)P(A) + P(X=1|B)P(B) = \\ &= \binom{4}{1} \times 0.1 \times 0.9^3 \times 0.4 + \binom{5}{1} \times 0.1 \times 0.9^4 \times 0.6 = \\ &= 0.1 \times 0.9^3 (4 \times 0.4 + 5 \times 0.9 \times 0.6) = 0.3135 \end{aligned}$$

ב.

$$P(A | X=1) = \frac{P(X=1|A)P(A)}{P(X=1)} = \frac{\binom{4}{1} \times 0.1 \times 0.9^3 \times 0.4}{0.3135} = 0.3721$$

ג.

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X|A)P(A) + E(X|B)P(B) = \\ &= 4 \times 0.1 \times 0.4 + 5 \times 0.1 \times 0.6 = 0.46 \end{aligned}$$

ד.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ E(X^2) &= E(X^2|A)P(A) + E(X^2|B)P(B) = \\ &= \left(4 \times 0.1 \times 0.9 + (4 \times 0.1)^2 \right) \times 0.4 + \left(5 \times 0.1 \times 0.9 + (5 \times 0.1)^2 \right) \times 0.6 = \\ &= 0.32 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 = 0.628 \\ V(X) &= 0.628 - 0.46^2 = 0.4164 \end{aligned}$$

ה.

$Y =$ מספר החבילות שמכילות סוללה אחת פגומה: $Y \sim B(100, 0.3135)$

$Y \sim N(31.35, 21.52)$ קרוב נורמלי לבינומי: $100 \times 0.3135 > 5$
 $100 \times (1 - 0.3135) > 5$

$$P(Y \leq 30) = \Phi\left(\frac{30 + 0.5 - 31.35}{\sqrt{21.52}}\right) = \Phi(-0.18) = 1 - \Phi(0.18) = 1 - 0.5714 = 0.4286$$

שאלה 2 (28 נקודות – כל סעיף 7 נקודות)

פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי X היא:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x, & 1 \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

א. חשבו את ערכו של b .

ב. חשבו את התוחלת של X .

ג. חשבו את ההסתברות: $P(X > 0.5 | X < 1.5)$.

ד. נניח: $E(X) = 1.67, V(X) = 0.81$.

דוגמים 36 תצפיות מהמשתנה X , חשבו את ההסתברות: $P(\bar{X}_{36} < 1.5)$.

פתרון

א.

$F(x)$ פונקציה רציפה

$$F(b) = \frac{1}{2}b = 1 \Rightarrow b = 2$$

ב.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

ג.

$$P(X > 0.5 | X < 1.5) = \frac{P(0.5 < X < 1.5)}{P(X < 1.5)} = \frac{F(1.5) - F(0.5)}{F(1.5)} = \frac{0.5 \times 1.5 - 0.5 \times 0.5^2}{0.5 \times 1.5} = 0.8333$$

ד.

$$\bar{X}_{36} \sim N\left(1.67, \frac{0.81}{36}\right)$$

$$P(\bar{X}_{36} < 1.5) = \Phi\left(\frac{1.5 - 1.67}{0.9/6}\right) = \Phi(-1.13) = 1 - \Phi(1.13) = 1 - 0.8708 = 0.1292$$

שאלה 3 (16 נקודות: סעיף א' – 9 נקודות, סעיף ב' – 7 נקודות)

מספר האימיילים שרונית מקבלת בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת 3.

א. מה ההסתברות שבמשך 3 שעות תקבל רונית 7 אימיילים?

1. הגדירו משתנה מקרי מתאים.

2. ציינו את ההתפלגות של המשתנה.

3. חשבו את ההסתברות המבוקשת.

ב. בשעה 10:00 קיבלה רונית אימייל. מה ההסתברות שיעברו יותר מ-20 דקות עד שתקבל את

האימייל הבא?

פתרון

א.

1. $X =$ מספר האימיילים שרונית מקבלת בשעה

2. $N(3) \sim \text{Pois}(3 \times 3) \Leftrightarrow X \sim \text{Pois}(3)$ (מספר האימיילים בשלוש שעות)

$$P(N(3) = 7) = \frac{9^7}{7!} e^{-9} = 0.1171 \quad 3.$$

ב.

$$P\left(T > \frac{1}{3}\right) = e^{-3 \times \frac{1}{3}} = e^{-1} = 0.3679 \quad \Leftrightarrow \quad T \sim \exp(3) : \text{משך הזמן (בשעות) בין אימיילים עוקבים}$$

בדרך אחרת:

$$N\left(\frac{1}{3}\right) \sim \text{Pois}\left(3 \times \frac{1}{3}\right) \Rightarrow P\left(N\left(\frac{1}{3}\right) = 0\right) = e^{-1}$$

שאלה 4 (21 נקודות – כל סעיף 7 נקודות)

לפניכם שתי קופסאות. בקופסא אחת יש עשרה כדורים : חמישה כדורים מסומנים במספר 1, שני כדורים מסומנים במספר 2, שלושה כדורים מסומנים במספר 3. בקופסא השנייה יש ארבעה כדורים : שני כדורים מסומנים במספר 1, ושני כדורים מסומנים במספר 2.

מכל קופסא מוציאים כדור אחד באקראי. בודקים את המספרים המסומנים על הכדורים שהוצאו. נגדיר :

X = המספר המינימלי מבין שני המספרים (אם שני המספרים זהים המינימום הוא המספר).
 Y = סכום שני המספרים.

א. בנו טבלת התפלגות משותפת של X ו- Y .

ב. מהי השונות של X ?

ג. מהי התוחלת של X אם נתון $Y = 3$?

פתרון

א.

Y X	2	3	4	5	$P_X(x)$
1	0.25	0.35	0.15	0	0.75
2	0	0	0.1	0.15	0.25
$P_Y(y)$	0.25	0.35	0.25	0.15	1

ב.

$$E(X) = 1 \times 0.75 + 2 \times 0.25 = 1.25$$

$$E(X^2) = 1^2 \times 0.75 + 2^2 \times 0.25 = 1.75$$

$$V(X) = 1.75 - 1.25^2 = 0.1875$$

ג.

$$E(X | Y = 3) = 1 \times \frac{0.35}{0.35} + 2 \times \frac{0}{0.35} = 0.35$$