

## פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון Y

**פתרון שאלה 1א:** זה גבול מהצורה " $1^\infty$ ". נתאים אותו לגבול של Euler (אויילר):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + n - 1}{n^3 - 2n} \right)^{\sqrt{4n^4 + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 - 2n + 3n - 1}{n^3 - 2n} \right)^{\sqrt{4n^4 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3n - 1}{n^3 - 2n} \right)^{\sqrt{4n^4 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} \right)^{\sqrt{4n^4 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} \right)^{\left( \frac{n^3 - 2n}{3n - 1} \right) \left( \frac{3n - 1}{n^3 - 2n} \right)^{\sqrt{4n^4 + 1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} \right)^{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} \right)^{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} \end{aligned}$$

נשתמש בגבול של אוילר:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} &= e \\ \text{עבור הסדרה: } a_n = \frac{n^3 - 2n}{3n - 1} \text{ . נקבל: } &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} \right)^{\frac{n^3 - 2n}{3n - 1}} &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + n - 1}{n^3 - 2n} \right)^{\sqrt{4n^4 + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\left( \frac{3n - 1}{n^3 - 2n} \right) \sqrt{4n^4 + 1}} \right) = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n - 1}{n^3 - 2n} \right) \sqrt{4n^4 + 1}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n^2 \left( 3 - \frac{1}{n} \right) \sqrt{4 + \frac{1}{n^4}}}{n^3 \left( 1 - \frac{2}{n^2} \right)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 3 - \frac{1}{n} \right) \sqrt{4 + \frac{1}{n^4}}}{\left( 1 - \frac{2}{n^2} \right)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2}{1}} = e^6 \end{aligned}$$

**פתרון שאלה 1ב:**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x - 5} dx = \int 1 + \frac{5}{x^2 + 4x - 5} dx = \int 1 + \frac{5}{(x - 1)(x + 5)} dx = x + \frac{5}{6} \int \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 5} dx = \\ &= x + \frac{5}{6} (\ln|x - 1| - \ln|x + 5|) + C \end{aligned}$$

**פתרון שאלה 2א:**

1. נשתמש בשינוי המשתנים  $y = \frac{1}{x+3} \rightarrow \infty$  , כאשר  $x \rightarrow (-3)^+$  . לכן

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (x+3)^2 (1 - 2 \ln(x+3)) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^2} (1 - 2 \ln(1/y)) = \\ &= -2 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/y)}{y^2} = 2 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(y)}{y^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = 2 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1/y}{2y} = 2 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2y^2} = 0 \end{aligned}$$

(הערה: נובע שהקו  $x = -3$  לא מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף של  $f$ .)

2. בקטע  $(-3, \infty)$  מתקיים:

$$f(x) = (x+3)^2 (1 - 2 \ln(x+3)) \Rightarrow f'(x) = 2(x+3)(1 - 2 \ln(x+3)) + (x+3)^2 \left( \frac{-2}{x+3} \right)$$

$$f'(x) = -4(x+3) \ln(x+3)$$

הסימן של הנגזרת הוא:  $f'(x) : \left( \begin{array}{c} + + + + + \\ x = -3 \end{array} \right) \frac{0}{x = -2} \left( \begin{array}{c} - - - - - \\ x = -2 \end{array} \right)$

ולכן הפונקציה עולה בקטע  $[-2, \infty)$  ויורדת בקטע  $(-3, -2]$ . אין מינימום כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ .  
לפי הטבלה מסיקים ש-  $f(-2) = 1$  הוא המקסימום המוחלט של הפונקציה.

**פתרון שאלה 2ב:**

$$a_n = \frac{3n + \sqrt{1}}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{3n + \sqrt{2}}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{3n + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^4 + (n-1)}} + \frac{3n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^4 + n}} \quad \text{נתון}$$

$$\text{לכל } 1 \leq j, k \leq n \text{ מתקיים } \frac{3n+1}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{3n+\sqrt{j}}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{3n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}} \quad \text{ולכן:}$$

$$n \frac{3n + \sqrt{1}}{\sqrt{n^4 + n}} \leq a_n \leq n \frac{3n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^4 + 1}}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{3n+1}{\sqrt{n^4+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+1/n)n^2}{n^2 \sqrt{(1+\frac{1}{n^4})}} = 3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{3n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n^{1.5}}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^3})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+n^{-0.5})n^2}{n^2 \sqrt{(1+\frac{1}{n^3})}} = 3 \end{aligned} \right\}$$

ואז לפי כלל הסנדוויץ' נובע:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

## בחינות – היחידה למתמטיקה

**פתרון 3א:** נחשב פולינום Taylor (טיילור) מסדר 2 של  $f(x)$  :

$$f(x) = \arctan x \Rightarrow f(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{2}$$

הפונקציה ונגזרותיה רציפות לכל  $x$  ממשי ובפרט בסביבת  $x_0 = 1$ .

מכאן שפולינום טיילור מסדר 2 יהיה :

$$T_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

נמצא ביטוי לשארית מסדר 1:  $R_1(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2 = -\frac{2c}{2(1+c^2)^2}(x-1)^2 = -\frac{c(x-1)^2}{(1+c^2)^2}$

$$\Rightarrow \arctan(x) = f(x) = T_1(x) + R_1(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{c(x-1)^2}{(1+c^2)^2}, \quad |x-1| < 0.2$$

$$\Rightarrow \arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) = -\frac{c(x-1)^2}{(1+c^2)^2}, \quad 0.8 < x < 1.2, \quad c \text{ between } x \text{ and } 1$$

$$\Rightarrow \left| \arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) \right| = \left| -\frac{c(x-1)^2}{(1+c^2)^2} \right| \leq \frac{|c|}{(1+c^2)^2} \underbrace{|x-1|^2}_{< 0.2^2} \leq \frac{|c|}{25} \leq \frac{12}{10 \cdot 25} = \frac{6}{125}$$

## פתרון שאלה 3ב:

נגדיר פונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \cdot \arctan x - 1$ . נבדוק האם גרף של הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ .

ונחקור את המשוואה  $(\#) f(x) = x^2 \cdot \arctan x - 1 = 0$

נגזור את הפונקציה:  $f'(x) = 2x \cdot \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}$ . ניתן לראות שלכל  $x \in [0, \infty)$  מתקיים

$f'(x) > 0$ , ז"א  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ממש בקטע  $[0, \infty)$ .

(I) נובע שהפונקציה  $f$  חח"ע בקטע  $[0, \infty)$  ולכן למשוואה  $(\#)$  יש מקסימום פתרון אחד בקטע  $[0, \infty)$ .

ברור ש-  $f(0) = 0^2 \cdot \arctan 0 - 1 = -1 < 0$  ו-  $f(10) = 10^2 \cdot \arctan 10 - 1 > 0$

הפונקציה  $f(x) = x^2 \cdot \arctan x - 1$  רציפה לכל  $x$ .

(II) ע"פ משפט על ערך ביניים של Cauchy מסיקים שלמשוואה  $(\#)$  יש לפחות פתרון אחד בקטע  $[0, \infty)$ .

מסקנה: למשוואה  $x^2 \cdot \arctan x = 1$  יש בדיוק פתרון אחד בקטע  $[0, \infty)$ .

**פתרון שאלה 4א:**

$f(x)$  פונקציה גזירה על כל הישר הממשי. כזכור, גזירות בנקודה גוררת רציפות בנקודה. מכאן, ניתן לומר

שם  $a < b$  אז  $f(x)$  רציפה בקטע הסגור  $[a, b]$  וגזירה בקטע הפתוח  $(a, b)$  ומתקיימים תנאי משפט

Lagrange. בפרט, קיימות נקודות  $c \in (7, 9)$  ו-  $d \in (1, 7)$  כך ש:

$$\left| \frac{f(9) - f(7)}{9 - 7} \right| = |f'(c)| \leq 6 \Rightarrow \left| \frac{68 - f(7)}{2} \right| \leq 6 \Rightarrow |68 - f(7)| \leq 12 \Rightarrow f(7) \geq 56$$

$$\left| \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} \right| = |f'(d)| \leq 6 \Rightarrow \left| \frac{f(7) - 20}{6} \right| \leq 6 \Rightarrow |f(7) - 20| \leq 36 \Rightarrow f(7) \leq 56$$

ובסה"כ נסיק ש  $f(7) = 56$ .

**פתרון שאלה 4ב:**

מספיק למצוא את המספרים  $m, n$  כך ש-  $f$  רציפה וגזירה ב-0.

$$f(0) = n = \frac{1}{2} \text{ לכן } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right]^L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

בנוסף, לפי נוסחת טיילור של  $\cos x$  נקבל

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{x^2/2 + R_4(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{R_4(x)}{x^2}, & x > 0 \\ mx + \frac{1}{2}, & x \leq 0 \end{cases}$$

לכן

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1/2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{R_4(x)}{x^3} = 0 \quad (***)$$

ו-

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1/2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{mx}{x} = m$$

מסקנה:  $f$  רציפה וגזירה ב-0 אם ורק אם  $m = 0, n = 0.5$ .

הערה: אפשר לחשב את הגבול (\*\*\*) בעזרת כלל לופיטל וללא שימוש בנוסחת טיילור (נמקו !)

בחינות – היחידה למתמטיקה

**פתרון שאלה 5א:**

הטענה נכונה.

לפי כלל השרשרת נובע שהפונקציה  $g$  גזירה ומתקיים:  $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ .

ברור ש-  $2\sqrt{f(x)} > 0$  לכל  $x$  ממשי ולכן

$$\begin{cases} g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \\ g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$$

לכן (לפי מבחן הנגזרת הראשונה) לשתי הפונקציות  $g, f$  יש אותן נקודות קריטיות ואותם תחומי עליה/ירידה.

מסיקים לשתי הפונקציות  $g, f$  ישאותן נקודות קיצון בתחום  $\mathbf{R}$ .

**פתרון שאלה 5ב:**

$$a_n = \frac{4\sqrt{n} + 6n}{2n + \sqrt{n}} = \frac{6n + 4\sqrt{n}}{2n + \sqrt{n}} = \frac{6 + (4/\sqrt{n})}{2 + (1/\sqrt{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 \quad \text{מתקיים}$$

נוכיח שהמספר  $L=3$  שווה לגבול הסדרה  $a_n$ , לפי הגדרת הגבול:

$$|a_n - 3| = \left| \frac{4\sqrt{n} + 6n}{2n + \sqrt{n}} - 3 \right| = \left| \frac{4\sqrt{n} + 6n - 6n - 3\sqrt{n}}{2n + \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{\sqrt{n}}{2n + \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{n} + 1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{מתקיים}$$

$$|a_n - 3| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \text{ולכן} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \text{אז} \quad n > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \text{אם} \quad N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

יהי  $\varepsilon > 0$ . נגדיר  $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}$ . אם  $n > N_\varepsilon$  אז  $|a_n - 3| < \varepsilon$ , וז"א בדקו שהגבול  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$  לפי הגדרת הגבול של סדרה.

$$\text{מסקנה: אם } n > N_\varepsilon \text{ אז } |a_n - 3| < \varepsilon, \text{ וז"א בדקו שהגבול } L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{ לפי הגדרת הגבול של סדרה.}$$

$$\text{נובע שאם } \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.01 \text{ אז גם } |a_n - 3| < 0.01. \text{ לכן אם } \left(\frac{1}{0.01}\right)^2 = 10000 \text{ אז } n > 10000 \text{ אז } |a_n - 3| < 0.01.$$

תשובה סופית:  $N = 10001$ .



## בחינות – היחידה למתמטיקה

### פתרון שאלה 6א:

פונקציה רציפה בנקודה  $x = 0$  כאשר  $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = y(0)$ .  
נסמן ב-  $F = F(t)$  את הפונקציה הקדומה של  $f(t) = e^{t^2}$ .

לפי משפט Newton-Leibniz וכלל L'Hôpital נקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2+3x} e^{t^2} dt}{3x} = \left[ f(t) = e^{t^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2+3x) - F(0)}{3x} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x^2+3x) \cdot (2x+3) - 0}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2+3x) \cdot (2x+3)}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2+3x)^2} \cdot (2x+3)}{3} = 1$$

מ.ש.ל.

### פתרון שאלה 6ב:

לפי הנתון  $f(x) = x + \arctan x$  נובע ש-

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1}, f''(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

הנגזרת השנייה היא שלילית לכל  $x \in (0, 1]$  ושווה 0 ב-  $x = 0$ .

לכן הפונקציה קעורה בקטע  $[0, 1]$  ואז הגרף מתחת למשיק המבוקש (חוץ מבנקודת ההשקה שהוא מתלכד עם המשיק).  
משוואת המשיק:

$$y = f(0) + f'(0)x = 2x$$

נובע:

$$AREA = \int_0^1 2x - (x + \arctan x) dx = \int_0^1 (x - \arctan x) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left( x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \left( \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1}{2} - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right).$$

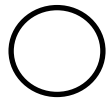
הערה: השתמשנו באינטגרציה בחלקים:

$$\int \arctan x dx = \int (x)' \arctan x dx = x \arctan x - \int (x) \frac{1}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

# בהצלחה!





בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + n - 1}{n^3 - 2n} \right)^{\sqrt{4n^4 + 1}}$  . נמקו !

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל  $F(x) = \int \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x - 5} dx$  . נמקו !

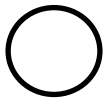
פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)





המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)





בחינות – היחידה למתמטיקה

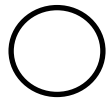
המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)





המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)





בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') נתונה פונקציה:  $f: (-3, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (x+3)^2 (1 - 2\ln(x+3))$ .

1. מצאו את הגבול  $L = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$ . מצאו את תחומי העליה והירידה של  $f$ .

2. האם קיים מקסימום מוחלט של  $f$ ? האם קיים מינימום מוחלט של  $f$ ? נמקד!

ב. (10 נק') חשבו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  עבור הסדרה:

$$a_n = \frac{3n + \sqrt{1}}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{3n + \sqrt{2}}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{3n + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^4 + (n-1)}} + \frac{3n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^4 + n}}.$$

נמקד!

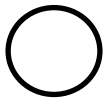
פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)





המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)





בחינות – היחידה למתמטיקה

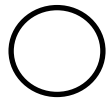
המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)





המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)





בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו-ב'

א. (10 נק') נתונה פונקציה  $f(x) = \arctan(x)$ . רשמו פולינום טיילור מסדר 2 של  $f(x)$  בסביבת  $x_0 = 1$ .

הוכיחו ש-  $\left| \arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) \right| \leq \frac{6}{125}$  לכל  $|x-1| < 0.2$ . הערה:  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ .

נמקו !

ב. (10 נק') הוכיחו שלמשוואה  $x^2 \cdot \arctan x = 1$  יש בדיוק פתרון אחד בקטע  $[0, \infty)$ . נמקו!

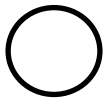
פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)





המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)





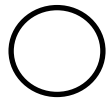
בחינות – היחידה למתמטיקה  
המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)





המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)





בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה על כל הישר הממשי כך ש  $|f'(x)| \leq 6$  לכל  $x$  ממשי.

ידוע כי  $f(1) = 20$  ו-  $f(9) = 68$ . הוכיחו כי  $f(7) = 56$ . רמז: היעזרו במשפט Lagrange. נמקו !

ב. (10 נק') מצאו את המספרים  $m, n$  כך שהפונקציה  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x > 0 \\ mx + n, & x \leq 0 \end{cases}$  גזירה ב-  $\mathbf{R}$ . נמקו !

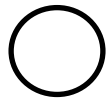
פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16)





המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16)





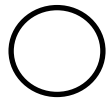
בחינות – היחידה למתמטיקה  
המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16)





המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16)





בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') נתונה פונקציה גזירה  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . מניחים ש-  $f(x) > 0$  לכל  $x$  ממשי.  
נגדיר  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  לכל  $x$  ממשי. האם הטענה הבאה נכונה?  
"לפונקציות  $y = f(x), y = g(x)$  יש אותן נקודות קיצון בתחום  $\mathbf{R}$ ". נמקו !

ב. (10 נק') נתונה הסדרה  $a_n = \frac{4\sqrt{n} + 6n}{2n + \sqrt{n}}$ ,  $n \geq 1$ . הוכיחו שהגבול  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  קיים  
לפי הגדרת הגבול של סדרה. מצאו מספר טבעי  $N \geq 1$  כך ש-  $|a_N - L| < 0.01$ . נמקו !

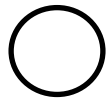
פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)





המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)





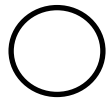
בחינות – היחידה למתמטיקה  
המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)





המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)





בחינות – היחידה למתמטיקה

שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') נגדיר פונקציה  $y = y(x)$  על ידי :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^{x^2+3x} e^{t^2} dt}{3x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה  $x = 0$ . נמקו !

ב. (10 נק') נגדיר פונקציה  $f(x) = x + \arctan x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

חשבו את שטח התחום הכלוא בין גרף הפונקציה  $f$ , המשיק לגרף של  $f$  בנקודה  $(0, 0)$ ,

כאשר  $x \in [0, 1]$ . נמקו !

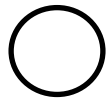
פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)





המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)





בחינות – היחידה למתמטיקה

המשד פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

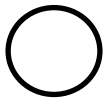




המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

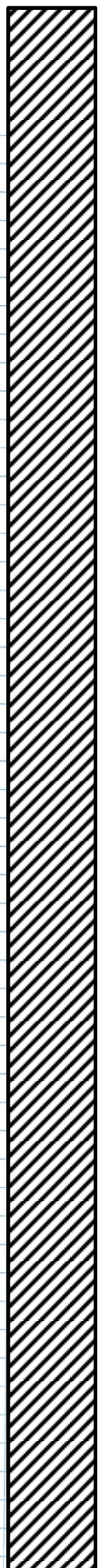
**סוף הפתרון !**



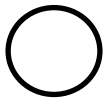


בחינות – היחידה למתמטיקה









בחינות – היחידה למתמטיקה



