ספר הפרק – העתקות ליניאריות

הגדרות ומשפטים

העתקה לינארית:

יהיו V, W שני מרחבים וקטורים מעל F.

הפונקציה $T: V \to W$ (V-תחום, W-טווח) תיקרא העתקה (או טרנספורמציה) לינארית, אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. אדיטיביות (ההעתקה משמרת חיבור): לכל $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ מתקיים:

$$T(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = T(\boldsymbol{v_1}) + T(\boldsymbol{v_2})$$

2. הומוגניות (ההעתקה משמרת כפל בסקלר): לכל $\boldsymbol{v} \in V, \quad \alpha \in F$ מתקיים:

$$T(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{v})$$

הערה: העתקה לינארית ממרחב V לעצמו, כלומר $T: V \to V$, תיקרא אופרטור ליניארי.

תנאי הכרחי לליניאריות של העתקה:

תהא העתקה $T: V \to W$, אזי אם T העתקה **לינארית** – בהכרח מתקיים: $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

- הערות:
  - התנאי הנ"ל הוא כלי שימושי להפרכה של ליניאריות. אם התנאי לא מתקיים, מידית ניתן לקבוע כי לא מדובר בהעתקה לינארית.
  - מדובר בתנאי הכרחי, אך לא מספיק. כלומר, ייתכן שהעתקה מסוימת מקיימת את התנאי אך היא עדיין לא לינארית. במקרה כזה, על מנת להפריך ליניאריות, יש להראות שאדיטיביות או הומוגניות לא מתקיימת.
  - כדי להוכיח שהעתקה היא **כן** לינארית – יש להראות אדיטיביות והומוגניות.

גרעין של העתקה לינארית:

תהא העתקה $T: V \to W$, אזי, גרעין ההעתקה מוגדר באופן הבא:

$$Ker(T) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

כלומר, הגרעין של ההעתקה הוא קבוצת כל הוקטורים בתחום (V) אשר מגיעים ל-$\mathbf{0}_W$ כאשר מופעלת עליהם ההעתקה.

תכונות:

- $Ker(T) \subseteq \mathrm{V}$.
- הגרעין של ההעתקה הוא **תת מרחב וקטורי** של התחום V (הוכחה בוידאו).
- בכל העתקה לינארית מתקיים ש- $\mathbf{0}_V \in Ker(T)$.

תמונה של העתקה לינארית:

תהא העתקה לינארית $T: V \to W$, אזי, התמונה של ההעתקה מוגדרת באופן הבא:

$$Im(T) = \{T(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\} = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V: T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}$$

כלומר, התמונה של ההעתקה היא קבוצת כל ה-$T(\boldsymbol{v})$-ים.

התמונה היא למעשה קבוצת כל ה-$\boldsymbol{w}$-ים שיש להם מקור.

תכונות:

- $Im(T) \subseteq \mathrm{W}$
- התמונה של ההעתקה היא **תת מרחב וקטורי** של הטווח W (הוכחה בוידאו).
- **לא** בהכרח מתקיים ש $Im(T) = W$ (אם כן-ההעתקה היא על W).
- הערה: אם $T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$ אנחנו נגיד ש- $\boldsymbol{v}_1$ הוא המקור של $\boldsymbol{w}_1$, וש- $\boldsymbol{w}_1$ הוא התמונה של $\boldsymbol{v}_1$.

הרכבה של העתקות לינאריות:

יהיו U,V,W מ"ו ותהיינה $T:V\to W$ ו- $S:W\to U$ העתקות לינאריות.

ההרכבה של ההעתקות, שנסמנה $S\circ T:V\to U$ היא העתקה לינארית המוגדרת באופן הבא:

$$(S\circ T)(\boldsymbol{v})=S(T(\boldsymbol{v}))$$

העתקות לינאריות מיוחדות:

- אופרטור לינארי:

נגיד כי ההעתקה הלינארית $T:V\to W$ היא אופרטור לינארי, אם $V=W$, כלומר $T:V\to V$.

במילים אחרות, אופרטור לינארי הוא פשוט העתקה לינארית שבה התחום והטווח שווים.

דוגמאות:

1. להעתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, קוראים גם אופרטור לינארי.
2. להעתקה לינארית $T:\mathbb{R}^{10}\to\mathbb{R}^{10}$, קוראים גם אופרטור לינארי.

- העתקת האפס:

נגיד כי $T:V\to W$ היא העתקת האפס (ניתן לסמן $T=0:V\to W$), אם לכל $\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים: $T(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}_W$.

דוגמאות:

1. העתקת האפס $T=0:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$,
היא העתקה המקיימת לכל $x,y\in\mathbb{R}$: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
2. העתקת האפס $T=0:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$,
היא העתקה המקיימת לכל $x,y,z,w\in\mathbb{R}$: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

- אופרטור הזהות:

נגיד כי $T: V \to V$ היא העתקת/אופרטור הזהות (ניתן לסמן $T = I$ או $T = I_V$ או $T = Id$), אם לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים: $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ ($Id(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$).

דוגמה:
אופרטור הזהות $T = I_{\mathbb{R}^3}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (או $T = Id$),
היא העתקה המקיימת לכל $x, y, z \in \mathbb{R}$: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Id\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

הגדרות, משפטים ותכונות של העתקות לינאריות:

1. משפט המימדים להעתקות לינאריות:
יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית (מרחבים עם מימד סופי) מעל F, ותהא העתקה לינארית $T: V \to W$ מתקיים:
$$\dim(V) = \dim\big(Ker(T)\big) + \dim\,(Im(T))$$

2. העתקה חד-חד ערכית (חח"ע):
נגיד שהט"ל $T: V \to W$ היא חח"ע אם לכל $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ המקיימים $\boldsymbol{v_1} \neq \boldsymbol{v_2}$ מתקיים: $T(\boldsymbol{v_1}) \neq T(\boldsymbol{v_2})$.

הערה: העתקה לינארית חח"ע נקראת מונומורפיזם.

3. משפט (חח"ע):
הט"ל $T: V \to W$ היא חח"ע $\Leftrightarrow Ker(T) = \{\boldsymbol{0}_V\} \Leftrightarrow \dim[Ker(T)] = 0$
(הוכחה בוידאו).

4. העתקה על:
נגיד כי הט"ל $T: V \to W$ היא על W אם מתקיים $Im(T) = W$.

הערה: העתקה לינארית על נקראת אפימורפיזם.

5. משפט (על):
יהי W מ"ו נוצר סופית מעל F.
הט"ל $T: V \to W$ היא על $W \Leftrightarrow \dim\,(W) = \dim\big(Im(T)\big)$ (הוכחה בוידאו).

6. העתקה הפיכה:
נגיד כי ט"ל $T: V \to W$ היא העתקה הפיכה אם קיימת העתקה $S: W \to V$ ($S = T^{-1}$) כך שמתקיים:

- לכל $\boldsymbol{v} \in V$: $ST(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$. כלומר: $S \circ T = I_V$ ($S \circ T = I_V: V \to V$).
- לכל $\boldsymbol{w} \in W$: $TS(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$. כלומר: $T \circ S = I_W$ ($T \circ S = I_W: W \to W$).

הערה: העתקה לינארית הפיכה נקראת איזומורפיזם.

7. משפט (הפיכות):
יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל F, ותהא העתקה לינארית $T: V \to W$. ט"ל $T: V \to W$ היא הפיכה $\Leftrightarrow$ ההעתקה $T: V \to W$ היא איזומורפיזם $\Leftrightarrow$ T חח"ע ועל.

מרחבים איזומורפיים:

יהיו V, W מ"ו מעל F.
נגיד כי V ו-W הם איזומורפיים (נסמן $V \cong W$), אם קיימת $T: V \to W$ - איזומורפיזם (כלומר ט"ל הפיכה).
כלומר, נגיד כי V ו-W הם איזומורפיים אם קיימת העתקה לינארית הפיכה שהתחום שלה הוא V והטווח שלה הוא W.

- דוגמה למרחבים איזומורפיים: $M_{2\times2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, כלומר המרחבים $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ו-$\mathbb{R}^4$ הם איזומורפיים, משום שקיימת ט"ל איזומורפיזם $T: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$, למשל:
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$
- דוגמה למרחבים שהם לא איזומורפיים: המרחבים $\mathbb{R}^2$ ו-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$ הם לא איזומורפיים (לא קיימת העתקה לינארית הפיכה שהתחום שלה הוא $\mathbb{R}^2$ והטווח שלה הוא $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, או ההפך).

משפט (מרחבים איזומורפיים):
יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל F (מרחבים ממימד סופי), אז:
$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

תכונה (נובעת ישירות מהמשפט): יהי V מ"ו מעל F, $\dim V = n$, אז $V \cong F^n$.
לדוגמה: כל מ"ו V מעל $\mathbb{R}$, שמימדו הוא 4, הוא איזומורפי ל- $\mathbb{R}^4$.

משפט קיום ויחידות של העתקה לינארית:

יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל F. יהי בסיס של V: $B_V=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_n}\}$, ויהיו וקטורים $W \supseteq \{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\dots,\boldsymbol{u_n}\}$.

קיימת העתקה לינארית **<u>יחידה</u>** $T:V\to W$, כך שמתקיים לכל $i=1,2,\dots,n$.

$$T(\boldsymbol{v_i})=\boldsymbol{u_i}$$

סדר פעולות למציאת נוסחה של העתקה לינארית:

אם נרצה למצוא נוסחה להעתקה לינארית $T:V\to W$, נבצע את השלבים הבאים:

1. נמצא בסיס $B_V=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_n}\}$ של V, בסיס שתמונותיו ידועות.

   כלומר, בסוף שלב זה יש לנו את B_V ואנו יודעים מהן התמונות של וקטורי B_V, כלומר את $T(\boldsymbol{v_1}),T(\boldsymbol{v_2}),\dots,T(\boldsymbol{v_n})$.

2. נביע וקטור כללי $\boldsymbol{u}\in V$ כק"ל של וקטורי B_V: $\boldsymbol{u}=\alpha_1\boldsymbol{v_1}+\alpha_2\boldsymbol{v_2}+\dots+\alpha_n\boldsymbol{v_n}$ (נמצא את ה-α-ות).

3. נפעיל את ההעתקה על הק"ל שמצאנו (T(ק"ל)), נשתמש בלינאריות של ההעתקה לפתיחת סוגריים, נציב את התמונות ונקבל את הנוסחה של ההעתקה.

<u>הערות:</u>

- אם ניתן לחלץ מנתוני השאלה בסיס של V שתמונותיו ידועות - יש רק העתקה אחת מתאימה (לפי משפט קיום ויחידות). אם חסרים פרטים ואנחנו משלימים את הבסיס של V או נאלצים להמציא תמונות – ההעתקה תשתנה לפי הבחירה שלנו.
- בסרטוני הוידאו יש מספר גדול של דוגמאות שבהן מצאנו נוסחה להעתקה לינארית באמצעות אלגוריתם זה.

משפט (שבעזרתו ניתן להוכיח ששתי העתקות הן שוות):

תהיינה $T, S: V \to W$ העתקות לינאריות ויהי $A = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ בסיס של V.

אם מתקיים לכל $i \in \{1,2,\dots,n\}$: $T(\boldsymbol{v_i}) = S(\boldsymbol{v_i})$, אז $T = S$,

כלומר, אם מתקיים:

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{v_1}) = S(\boldsymbol{v_1}) \\ T(\boldsymbol{v_2}) = S(\boldsymbol{v_2}) \\ \vdots \\ T(\boldsymbol{v_n}) = S(\boldsymbol{v_n}) \end{cases}$$

אז T ו-S שוות (אותה העתקה בדיוק).

דוגמה:

תהיינה $T, S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ויהי $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$. אם נצליח להראות כי מתקיים:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

אז נראה כי $T = S$.

מטריצה מייצגת של העתקה לינארית:

תהא העתקה לינארית $T: V \to W$ ויהיו $A = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ ו-$B = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_m}\}$ בסיסים של V ו-W מעל F בהתאמה.

המטריצה המייצגת של ההעתקה הלינארית מ-A ל-B (או לפי הבסיסים A ו-B) מוגדרת באופן הבא:

$$[T]_B^A = [\ [T(\boldsymbol{v_1})]_B \ \vdots \ [T(\boldsymbol{v_2})]_B \ \vdots \cdots \vdots \ [T(\boldsymbol{v_n})]_B\ ] \in M_{m\times n}(F)$$

ומתקיים, עבור כל $\boldsymbol{v} \in V$:

$$[T]_B^A \cdot [\boldsymbol{v}]_A = [T(\boldsymbol{v})]_B$$

<u>תכונות והערות:</u>

- בהינתן מטריצה מייצגת העתקה והבסיסים המתאימים ניתן למצוא את הנוסחה של ההעתקה הלינארית (דוגמאות לשאלות בסרטוני הוידאו).
- את $[T]_B^B$ ניתן לכתוב גם כך: $[T]_B$.
- <u>משפט הפיכות של העתקה</u>:
העתקה לינארית $T: V \to W$ היא הפיכה $\Leftrightarrow$ $[T]_B^A$ הפיכה לכל A בסיס של V ו-B בסיס של W.
במקרה כזה $([T]_B^A)^{-1} = [T^{-1}]_A^B$.
- המלצה – למדו בעל פה את ההגדרה, התחילו כל שאלה הקשורה לנושא בלכתוב את ההגדרה **והצמדו להגדרה**.
- $[T]_B^A \in M_{m\times n}$, כאשר $m = dimW$ ו- $n = dimV$.

<u>משפט (מציאת קב' פורשת של התמונה באמצעות קב' פורשת של התחום):</u>

תהא העתקה לינארית $T: V \to W$, ותהא הקבוצה $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\} \subseteq V$ קבוצה פורשת של V (כלומר $span(S) = V$).

הקבוצה $\{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \dots, T(\boldsymbol{v_n})\}$ מהווה קבוצה פורשת של $Im(T)$, כלומר:

$$Im(T) = span\{T(\boldsymbol{v_1}),\ T(\boldsymbol{v_2}), \dots, T(\boldsymbol{v_n})\}$$

דוגמה:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. הקבוצה $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ מהווה קבוצה פורשת של V ($=\mathbb{R}^3$).

על כן, הקבוצה $\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ מהווה קבוצה פורשת של $Im(T)$, או במילים אחרות:

$$Im(T) = span\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>הקשר בין מטריצה מייצגת של העתקה ובין גרעין ותמונה:</u>

תהא ט"ל $T: V \to W$, יהי B בסיס של V ויהי C בסיס של W. תהא $H = [T]_C^B$. אז:

- <u>הקשר בין $H = [T]_C^B$ ובין $Im(T)$:</u>
  - $\dim[Im(T)] = dim[Col(H)]$.
  - וקטורי הבסיס של $Col(H)$ הם וקטורי הקואורדינטות (לפי בסיס C) של וקטורי הבסיס של $Im(T)$.

כלומר, אם $B_{ImT} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, .., \boldsymbol{u_m}\}$ אז $B_{Col(H)} = \{[\boldsymbol{u_1}]_C,\ \ [\boldsymbol{u_2}]_C, \dots,\ [\boldsymbol{u_m}]_C\}$.

- <u>הקשר בין $H = [T]_C^B$ ובין $Ker(T)$:</u>
  - $\dim[Ker(T)] = dim[N(H)]$.
  - וקטורי הבסיס של $N(H)$ הם וקטורי הקואורדינטות (לפי בסיס B) של וקטורי הבסיס של $Ker(T)$.

כלומר, אם $B_{KerT} = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, .., \boldsymbol{w_r}\}$ אז $B_{N(H)} = \{[\boldsymbol{w_1}]_B,\ \ [\boldsymbol{w_2}]_B, \dots,\ [\boldsymbol{w_r}]_B\}$.

<u>הערה/הרגעה</u>: במבט ראשון, התכונה הזאת של הקשר שבין מט' מייצגת ובין גרעין ותמונה, נראית לא כ"כ ברורה (שלא נאמר מלחיצה). עם זאת, השימוש בה הוא די טכני, ואני מדגים אותו במספר שאלות בפרק.

מדובר בתכונה חשובה שעשויה להיות מאוד שימושית, ועל כן חשוב להבין אותה ולתרגל שימוש בה.

העתקה הנתונה בצורה של $T(\boldsymbol{v}) = A \cdot \boldsymbol{v}$:

תהא העתקה לינארית $T: V \to W$, כאשר $V = F^n$ ו-$W = F^m$, הנתונה על ידי הנוסחה הבאה: לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים $T(\boldsymbol{v}) = A \cdot \boldsymbol{v}$, אז:

1. המטריצה A היא למעשה המטריצה המייצגת של ההעתקה T לפי הבסיס הסטדנרטי, כלומר $A = [T]_{E_W}^{E_V}$.
2. מתקיים $Im(T) = Col(A)$.
3. מתקיים $Ker(T) = N(A)$.

הערה: כאשר התחום והטווח של T הם אינם F^n ו-F^m – לא ניתן להשתמש בתכונות הנ"ל.

נוסחת מעבר מבסיס לבסיס במטריצה מייצגת של העתקה:

תהא ט"ל $T: V \to V$, ויהיו B, C בסיסים של V, אז:

$$[T]_C^C = [I]_C^B \cdot [T]_B^B \cdot [I]_B^C$$

כאשר ב- $[I]_C^B$ הכוונה היא למטריצת המעבר מ-B ל-C.

כלומר, בהינתן שידועה לנו $[T]_B^B$ והבסיסים B, C – ניתן להשתמש בנוסחה על מנת למצוא את $[T]_C^C$.
(הסבר ושאלה המראה כיצד להשתמש בנוסחה – בוידאו)

מטריצה מייצגת של הרכבה של העתקות:

תהיינה $T: V \to W$ ו- $S: W \to U$ העתקות לינאריות, והרכבתן $S \circ T: V \to U$ העתקה לינארית.

- יהיו A, B, C בסיסים של V, W, U בהתאמה, כאשר $A = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$.
- תהא $[T]_B^A$ מטריצה מייצגת העתקה של T לפי הבסיסים A, B.

- תהא $[S]_C^B$ מטריצה מייצגת העתקה של S לפי הבסיסים B,C.

אז המטריצה המייצגת של ההעתקה $S\circ T$ מ-A ל-C נתונה על ידי:

1. לפי הגדרה:

$$[S\circ T]_C^A=[\,[ST(\boldsymbol{v_1})]_C \vdots [ST(\boldsymbol{v_2})]_C \vdots \cdots \vdots [ST(\boldsymbol{v_n})]_C\,]$$

2. כפל $[S]_C^B$ ב-$[T]_B^A$:

$$[S\circ T]_C^A=[S]_C^B\cdot[T]_B^A$$

משפט (שבעזרתו ניתן להוכיח ששתי העתקות הן שוות):

תהיינה $T,S:V\to W$ העתקות לינאריות, ויהיו A- בסיס של V ו-B – בסיס של W. אז:

$$[T]_B^A=[S]_B^A \Leftrightarrow T=S$$

כלומר, אם מטריצות מייצגות של T ושל S (לפי אותם בסיסים) הן שוות – אז גם T ו-S שוות (וגם ההפך נכון, הרי זה אם ורק אם).

תכונה של מטריצה מייצגת של העתקת הזהות:

יהי $Id:V\to V$ – אופרטור הזהות (כלומר, לכל $\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים: $Id(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$), $dimV=n$.

אז מטריצה מייצגת של Id, לפי כל בסיס B של V, שווה למטריצת היחידה.

כלומר, יהי B בסיס של V, אז:

$$[Id]_B=[Id]_B^B=I_{n\times n}$$

<u>הערה</u>: הנושא של $Hom(V,W)$ לא נלמד בכל מחלקה ובכל מוסד.
על כן, מומלץ לבדוק האם נושא זה בסילבוס שלכם **לפני** שאתם קוראים את הנושא הנ"ל.

<u>מרחב העתקות לינאריות $Hom(V,W)$</u>:

יהיו V,W מ"ו מעל F, אז הקבוצה הבאה היא מ"ו מעל F:

$$Hom(V,W)=\{T:V\to W \mid \text{העתקה לינארית } T\}$$

כלומר, $Hom(V,W)$ הוא מ"ו המכיל את כל ההעתקות הלינאריות שהתחום שלהן הוא V והטווח שלהן הוא W (כל אחד מאיברי המרחב הוקטורי הזה הוא למעשה העתקה לינארית מ-V ל-W).

כיצד מוגדר סכום וקטורים מהמרחב וכיצד כפל וקטור בסקלר מהשדה?
יהי מ"ו $Hom(V,W)$ מעל F, אז:

- <u>סכום וקטורים ב-$Hom(V,W)$</u>:
  יהיו $T,S\in Hom(V,W)$ (כלומר $T,S:V\to W$ ט"ל), אז לכל $\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים:
  $$(T+S)(\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{v})+S(\boldsymbol{v})$$

- <u>כפל וקטור ב-$Hom(V,W)$ בסקלר</u>:
  יהי $T\in Hom(V,W)$ (כלומר $T:V\to W$ ט"ל), אז לכל $\alpha\in F$ ולכל $\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים:
  $$(\alpha\cdot T)(\boldsymbol{v})=\alpha\cdot T(\boldsymbol{v})$$

<u>תכונה1</u>: $\dim Hom(V,W)=\dim V\cdot\dim W$.
לדוגמה, אם $\dim V=3,\dim W=4$, אז $\dim Hom(V,W)=3\cdot 4=12$.

<u>תכונה2</u>: $Hom(V,W)\cong M_{m\times n}(F)$, כלומר המרחבים $Hom(V,W)$ ו-$M_{m\times n}(F)$ הם איזומורפיים (נובע ישירות מתכונה1).

טריקים, טיפים וטעויות נפוצות

- למדו בעל פה את ההגדרות והמשפטים (גרעין, תמונה, העתקה הפיכה, משפטים להוכחת העתקה חח"ע, העתקה על וכד'). שליטה בהגדרות ובמשפטים תסייע לכם מאוד בפתרון שאלות טכניות ותיאורטיות (הוכחות).

- הנושא של העתקות לינאריות בכלל ושל מטריצה מייצגת העתקה בפרט, הוא נושא לא פשוט (בדרך כלל) לסטודנטים. עצתי אליכם – תרגלו כמה שיותר שאלות והיצמדו להגדרות. ככל שתראו יותר שאלות, ככל שתתנסו בעצמכם ותתמודדו על שאלות לא פשוטות (ויש הרבה כאלו בסרטוני הוידאו) – כך המיומנות שלכם תשתפר והיכולת שלכם להתמודד עם שאלות כאלו לכשיופיעו במבחן תשתפר.

- למדו בעל פה את ההגדרה של מטריצה מייצגת העתקה, ורשמו את ההגדרה בתחילת כל שאלה בנושא. סטודנטים נוטים להתבלבל בשאלות מהסוג הזה. ברגע שתעבדו **לפי הגדרה** – זה יחסוך לכם הרבה כאב ראש וטעויות מיותרות.

- משפט המימדים להעתקות לינאריות הוא אחד המשפטים החשובים והשימושיים ביותר בקורס. הוא יכול לשמש כבדיקת שפיות מצוינת בסוף שאלה שבה מצאתם בסיס ומימד של גרעין ותמונה, אך הוא גם יכול לשמש כקיצור דרך לפתרון שאלות ולחסוך זמן יקר. כמו-כן, ישנן שאלות בהן ללא שימוש בו לא ניתן לפתור את השאלה. השתמשנו במשפט זה בסרטוני הוידאו כמעט בכל שאלה על העתקות, גם כבדיקת שפיות אך גם בשאלות הוכחה רבות.

- עברו היטב על שאלות ה-הוכיחו/הפריכו שפתרנו בפרק. מדובר בשאלות תיאורטיות של הוכחה, לא כולן בהכרח קשות במיוחד, אך הן חוזרות על עצמן (אולי עם שינויים קלים, אך העיקרון דומה) לא מעט בשאלות אמריקאיות ו/או הוכחה במבחנים.

- לעיתים, סטודנטים טועים וחושבים שאם יש לנו ה"ל $T\colon V \to W$ ומצאו מטריצה מייצגת של העתקה $[T]_B^A$, אז מתקיים לכל $\boldsymbol{v} \in V$: $T(\boldsymbol{v}) = [T]_B^A \cdot \boldsymbol{v}$. זה **לא נכון(!)**. זה נכון **רק** במקרה מסוים אותו ציינו בסרטונים יעודיים ('העתקה הנתונה ע"י $T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$'). באופן כללי, לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים:

$$[T(\boldsymbol{v})]_B = [T]_B^A \cdot [\boldsymbol{v}]_A$$

ראינו שימוש בתכונה החשובה הזאת (שבמבט ראשון נראית מלחיצה) במספר שאלות בפרק.

- בדיקות שפיות: הקפידו על בדיקות השפיות שלמדנו לעשות בוידאו. למשל:
  - אם מצאתם בסיס לגרעין, ודאו כי כל וקטור $\boldsymbol{v} \in B_{Ker(T)}$ מקיים $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.
  - אם מצאתם בסיס ומימד של הגרעין והתמונה, ודאו כי משפט המימדים להעתקות ליניאריות מתקיים.
  - אם התבקשתם למצוא נוסחה להעתקה מסוימת על סמך נתונים ועשיתם זאת, בדקו שהנוסחה שמצאתם אכן עונה על תנאי השאלה. למשל, אם התבקשתם למצוא העתקה ליניארית המקיימת $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in Ker(T)$ ו- $T(\boldsymbol{v_3}) = \boldsymbol{w_3}$ – השתמשו בנוסחה של ההעתקה שמצאם, ו-ודאו שאכן מתקיים:

$$T(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{0}, \quad T(\boldsymbol{v_2}) = 0, \quad T(\boldsymbol{v_3}) = \boldsymbol{w_3}$$

- תהא ה"ל $T: V \to W$, אז:
  - אם T היא חח"ע, מתקיים: $\dim V \leq \dim W$.
  - אם T היא על, מתקיים: $\dim V \geq \dim W$.
  - אם T הפיכה, מתקיים: $\dim V = \dim W$.

  (את כל התכונות האלו הוכחנו בשאלת הוכיחו/הפריכו בוידאו)

- תהא ט"ל $T: V \to V$, אז מתקיים:
  - $KerT \subseteq KerT^2 \subseteq KerT^3 \subseteq \cdots \subseteq KerT^n$
  - $ImT \supseteq ImT^2 \supseteq ImT^3 \supseteq \cdots \supseteq ImT^n$

- תהא ט"ל ליניארית **הפיכה** $T: V \to V$, ובסיס B של V, אז:
  - דרך שימושית למציאת $[T^{-1}]_B$:
    1. חשבו את $[T]_B$.
    2. השתמשו בעובדה לפיה $[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$, תכונה אותה הוכחנו באחת משאלות הפרק.

    כלומר, הפכו את המטריצה $[T]_B$, ותקבלו בדיוק את המטריצה $[T^{-1}]_B$.

- דרך שימושית למציאת נוסחת ההעתקה T^{-1}:
  1. חשבו את $[T]_B$.
  2. השתמשו ב- $[T]_B$ על מנת למצוא את $[T^{-1}]_B$.
  3. השתמשו ב- $[T^{-1}]_B$ על מנת לחשב את נוסחת ההעתקה T^{-1} (ראינו מספר שאלות שבהן הסברנו כיצד מוצאים נוסחת העתקה מתוך מטריצה מייצגת של העתקה).

שאלות ותשובות סופיות

שאלות

תת פרק 'העתקה לינארית':

שאלה 1:

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבעו האם מדובר בהעתקה לינארית או לא. אם כן-הוכיחו. אם לא-הביאו דוגמה נגדית:

א. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, כאשר הטרנספורמציה מוגדרת כך: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\3x\end{pmatrix}$

ב. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, כאשר הטרנספורמציה מוגדרת כך: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2\\2y\end{pmatrix}$

ג. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, כאשר הטרנספורמציה מוגדרת כך: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z^2\\x-y\end{pmatrix}$

שאלה 2:

הוכיחו כי לא קיימת העתקה לינארית $\mathrm{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת את התנאים הנתונים בסעיפים הבאים.

א. $\mathrm{T}\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{T}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

ב. $\mathrm{T}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{T}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \mathrm{T}\begin{pmatrix}8\\10\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

שאלה 3:

תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. הוכיחו שהגרעין של ההעתקה הוא תמ"ו של התחום (V).

שאלה 4:

תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. הוכיחו שהתמונה של ההעתקה היא תמ"ו של הטווח (W).

שאלה 5:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת באופן הבא:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל-$Ker(T)$ (גרעין ההעתקה).

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$Im(T)$ (תמונת ההעתקה).

שאלה 6:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת באופן הבא $T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$, כאשר $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל-$Ker(T)$ (גרעין ההעתקה). האם T חח"ע?

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$Im(T)$ (תמונת ההעתקה). האם T על?

שאלה 7:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת: $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

מצאו בסיס ומימד של $Im(T)$, $Ker(T)$.

שאלה 8:

הוכיחו/הפריכו:

קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ המקיימת $Im(T) = Ker(T)$.

שאלה 9:

הוכיחו את המשפט:

העתקה לינארית $\mathrm{T}: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ היא חח"ע $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{\mathbf{0}_{\mathrm{V}}\}$.

שאלה 10:

הוכיחו את המשפט:

העתקה לינארית $T: V \rightarrow W$ היא על $\Leftrightarrow \dim\big(Im(T)\big) = \dim(W)$.

שאלה 11:

מצאו העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת:

א. $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. כמה העתקות כאלו יש?

ב. $T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. כמה העתקות כאלו יש?

שאלה 12:

מצאו את נוסחת הט"ל $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

שאלה 13:

נתונה הקבוצה $G = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\-9\\0\end{pmatrix}\right\}$.

מצאו העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ כך ש- $Ker(T)=span(G)$.

שאלה 14:

הוכיחו/הפריכו:

תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית.

א. אם T חח"ע אז בהכרח $\dim(W)\geq\dim(V)$.

ב. אם T על אז בהכרח $\dim(V)\geq\dim(W)$.

ג. אם $\dim(V)=\dim(W)$ אז בהכרח T איזומורפיזם, כלומר T הפיכה.

ד. אם $\dim(V)=\dim(W)$ ובנוסף T על אז בהכרח T הפיכה.

ה. אם T איזומורפיזם אז בהכרח מתקיים $\dim(V)=\dim(W)$.

שאלה 15:

הוכיחו/הפריכו:

תהיינה $T:V\to W,\quad S:W\to U$ העתקות לינארית.

א. אם $T^2=I$ (העתקת הזהות) אז בהכרח $T=I$ או $T=-I$.

ב. אם $T^2=0$ (העתקת האפס) אז בהכרח $T=0$.

ג. אם ST על U אז בהכרח S על U.

ד. אם ST על U אז בהכרח T על W.

שאלה 16:

תהיינה $T:V\to W,\quad S:W\to U$ העתקות לינארית.

הוכיחו כי אם ST חח"ע אז T חח"ע.

שאלה 17:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, העתקה המוגדרת באופן הבא: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 3y$.

כמו-כן, נתונה העתקה לינארית חח"ע $S:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$, העתקה המקיימת $Im(S) =$ $Ker(T)$. מצאו את k.

שאלה 18:

תהא העתקה לינארית $T:V \to V$, כאשר $\dim(V) = 4n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו.
נתון כי $T^2 = 0$, כלומר – לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים $T^2(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.
הוכיחו כי $\dim\big(Im(T)\big) \leq 2n$.

תת פרק 'מטריצה מייצגת העתקה ושאלות מסכמות על העתקות':

שאלה 1:

תהא טרנספורמציה לינארית $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ונתונים A ו-B בסיסים של $\mathbb{R}^3$ ושל $\mathbb{R}^2$ בהתאמה:

$$A = \left\{ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{B} = \left\{ \boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ההעתקה T נתונה על ידי הנוסחה הבאה: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ z \end{pmatrix}$.

מצאו את $[T]_B^A$.

שאלה 2:

יהא אופרטור לינארי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ונתון B בסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$B=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ההעתקה T נתונה על ידי הנוסחה הבאה $(x,y,z\in\mathbb{R})$: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\y\\x+y\end{pmatrix}$.

מצאו את $[T]_B$.

שאלה 3:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, כאשר בסיס B של $\mathbb{R}^3$ נתון, וכך גם $[T]_B$:

$$\mathrm{B}=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&-2\\1&3&0\end{pmatrix}$$

א. מצאו את $T\begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix}$. ב. מצאו את $\mathrm{T}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

שאלה 4:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, כאשר בסיס B של $\mathbb{R}^3$ נתון, וכך גם $[T]_B^B$:

$$\mathrm{B}=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&-2\\1&3&0\end{pmatrix}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצא את $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ עבור $x,y,z\in\mathbb{R}$.

שאלה 5:

נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ונתונה $[T]_B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$, כאשר:
$B=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

חשבו את $T\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ ללא מציאת נוסחת ההעתקה.

שאלה 6:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, המקיימת $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ וכן $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

א. מצאו בסיס לתמונת וגרעין ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה, כלומר את $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ג. מצאו את $[T]_E$ כאשר E הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

שאלה 7 (אין קשר בין הסעיפים):

א. תהא ט"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, יהי B בסיס של $\mathbb{R}^3$ ויהי C בסיס של $\mathbb{R}^4$.
מצאו $\dim\,[Im(T)]$ ו- $\dim\,[Ker(T)]$ אם נתון כי:

$$H=[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&2&2\\5&4&1\\8&-2&-11\\1&2&2\end{pmatrix}.$$

ב. תהא ט"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, יהי $B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$
ויהי $C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

מצאו בסיס ל-$Im(T)$ ול-$Ker(T)$ אם ידוע כי: $H=[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\end{pmatrix}$.

שאלה 8:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, כאשר:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}2&2&-2\\1&-1&1\\-1&-2&2\end{pmatrix},B=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

א. האם ההעתקה הפיכה?

ב. מצאו בסיס ומימד לגרעין ההעתקה ותמונת ההעתקה.

שאלה 9:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, המקיימת: $T(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ לכל $\boldsymbol{v}\in V$, כאשר:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&7\\0&1&3\\0&2&6\\0&4&12\end{pmatrix}.$$

א. מצאו בסיס ומימד של תמונת ההעתקה.

ב. מצאו בסיס ומימד של גרעין ההעתקה.

ג. חשבו את $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$.

שאלה 10:

תהא ט"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ויהיו בסיסים B,C של $\mathbb{R}^2$:

$$B=\left\{\boldsymbol{b_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b_2}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\},\ C=\left\{\boldsymbol{c_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{c_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

נתון כי $[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$. חשבו את $[T]_C^C$.

שאלה 11:

תהיינה $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ו- $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}:\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R}: S\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

ותהא הרכבתן $S \circ T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית.

$$A = E_{\mathbb{R}^2}, B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, C = E_{\mathbb{R}^3}$$

א. מצאו $[T]_B^A$.

ב. מצאו $[S]_C^B$.

ג. מצאו $[S \circ T]_C^A$.

שאלה 12:

תהיינה $T: V \to V$ ו- $S: V \to V$ העתקות לינאריות ותהא הרכבתן $S \circ T: V \to V$ העתקה לינארית.

הוכיחו כי אם נתון ש- $S \circ T$ הינה העתקה הפיכה אז S העתקה הפיכה ו-T העתקה הפיכה.

(הראינו בשאלה קודמת כי אם ט"ל $T: V \to W$ היא הפיכה אז $\dim(V) = \dim(W)$, כלומר השאלה רלוונטית רק ל-T, S המקיימות זאת).

שאלה 13:

א. תהיינה ט"ל $T, S: V \to V$, ויהי B בסיס של V כך שמתקיים: $[T]_B \cdot [S]_B = I$.

צ"ל כי S הפיכה וכי $T = S^{-1}$.

ב. תהיה $T: V \to V$ ט"ל הפיכה ויהי B בסיס של V.

צ"ל כי $[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$.

שאלה 14:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, המקיימת: $\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

כמו-כן, מתקיים $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ עבור איזשהו $\alpha\in\mathbb{R}$ ונתון בסיס של תמונת ההעתקה: $B_{Im(T)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$.

א. מצאו בסיס ומימד של גרעין ההעתקה וקבע האם ההעתקה חח"ע.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

ג. מצאו את $[T]_E^E$ כאשר $E=E_{\mathbb{R}^3}$.

תת-פרק 'תוספות ושאלות נוספות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)':

שאלה 1:

הוכיחו או הפריכו באמצעות דוגמה נגדית:

א. תהא ט"ל $T:V\to W$ ותהא $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}\subseteq V$.

הטענה: אם $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}$ היא קבוצה בת"ל, אז בהכרח מתקיים שגם הקבוצה $\{T(\boldsymbol{v_1}),T(\boldsymbol{v_2}),\dots,T(\boldsymbol{v_m})\}$ היא קבוצה בת"ל.

ב. תהא ט"ל **חח"ע** $T:V\to W$ ותהא $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}\subseteq V$.

הטענה: אם $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}$ היא קבוצה בת"ל, אז בהכרח מתקיים שגם הקבוצה $\{T(\boldsymbol{v_1}),T(\boldsymbol{v_2}),\dots,T(\boldsymbol{v_m})\}$ היא קבוצה בת"ל.

שאלה 2:

תהא $T:V\to W$ ט"ל, $dimV=n$.

נתון כי מתקיים שלכל קבוצה בת"ל לא ריקה $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}\subseteq V$ - גם הקבוצה $\mathrm{Q}=\{T(\boldsymbol{v_1}),T(\boldsymbol{v_2}),\dots,T(\boldsymbol{v_m})\}\subseteq W$ היא קב' בת"ל.

צ"ל כי T העתקה חח"ע.

שאלה 3:

הוכיחו כי לכל $A\in M_{n\times n}(F)$ מתקיים: $Rank(A^2)\le Rank(A)$.

שאלה 4:

תהא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_{\le 3}[x]\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, כאשר נתון:

$$T(x^3+x^2)\overset{(1)}{=}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ T(x^2+x)\overset{(2)}{=}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$T(x+1)\overset{(3)}{=}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ T(1)\overset{(4)}{=}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

א. מצאו את נוסחת ההעתקה.

ב. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה וקבעו האם T איזומורפיזם.

ג. מצאו $[T]_{E_{M_{2\times 2}}}^{E_{\mathbb{R}_{\le 3}}}$.

שאלה 5:

יהי U מ"ו מעל $\mathbb{R}$, ויהי $B=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}\subseteq U$ בסיס של U. תהא $T:U\to U$ ט"ל כך שמתקיים:

$$(1)\ T(\boldsymbol{v_1})=\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3},\quad (2)\ T(\boldsymbol{v_2})=\boldsymbol{v_2}+2\boldsymbol{v_3},\quad (3)\ T(\boldsymbol{v_3})=\boldsymbol{v_1}+3\boldsymbol{v_3}$$

א. הוכיחו T איזומורפיזם.

ב. חשבו את $[T]_B^B$.

ג. חשבו את $T^{-1}(4\boldsymbol{v_1}+2\boldsymbol{v_2}+4\boldsymbol{v_3})$ (במונחי $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}$).

שאלה 6:

יהי V מ"ו מעל F ויהי אופרטור לינארי $T:V\to V$ כך שמתקיים $KerT^2=KerT$.

הוכיחו: $KerT\oplus ImT=V$.

תשובות סופיות

תת פרק 'העתקה לינארית':

שאלה 1:

א. כן, הוכחה.

ב. לא, הפרכה.

ג. לא, הפרכה.

שאלה 2:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

שאלה 3:

הוכחה.

שאלה 4:

הוכחה.

שאלה 5:

א. $\dim(Ker(T)) = 2$, $B_{Ker(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} -8.5 \\ 3.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6.5 \\ -3.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ב. דרך1: $\dim(Im(T)) = 2$, $B_{Im(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

דרך2 (טריק): $dim(Im(T)) = 2$, $B_{Im(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 6:

א. $\dim\left(Ker(T)\right)=2$, $B_{Ker(T)}=\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$. ההעתקה איננה חח"ע.

ב. $\dim\left(Im(T)\right)=2$, $B_{Im(T)}=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\14\end{pmatrix}\right\}$. ההעתקה איננה על W.

שאלה 7:

$\dim\left(Im(T)\right)=1$, $B_{Im(T)}=\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

$\dim\left(Ker(T)\right)=2$, $B_{Ker(T)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 8:

הפרכה.

שאלה 9:

הוכחה.

שאלה 10:

הוכחה.

שאלה 11:

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+z\\2(x-y)\\3x-2y-z\end{pmatrix}$. יש רק העתקה לינארית אחת כזאת.

ב. דוגמה להעתקה כזאת: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y\\z\\y\end{pmatrix}$.

יש אינסוף העתקות אפשריות העונות על התנאים.

<u>שאלה 12:</u>

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2x+6y-4z)/2\\(3x+3y-z)/2\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 13:</u>

דוגמה להעתקה העונה על תנאי השאלה: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

<u>שאלה 14:</u>

א. הוכחה (הטענה נכונה).

ב. הוכחה (הטענה נכונה).

ג. הפרכה (דוגמה נגדית, הטענה לא נכונה).

ד. הוכחה (הטענה נכונה).

ה. הוכחה (הטענה נכונה).

<u>שאלה 15:</u>

א. הפרכה (דוגמה נגדית, הטענה לא נכונה).

ב. הפרכה (דוגמה נגדית, הטענה לא נכונה).

ג. הוכחה (הטענה נכונה).

ד. הפרכה (דוגמה נגדית, הטענה לא נכונה).

<u>שאלה 16:</u>

הוכחה.

שאלה 17:

$k = 1$.

שאלה 18:

הוכחה.

תת פרק 'מטריצה מייצגת העתקה ושאלות מסכמות על העתקות':

שאלה 1:

$[T]_B^A = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 2:

$[\mathrm{T}]_\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 3:

א. $\mathrm{T}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

ב. $\mathrm{T}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 4:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+3y-6z\\2x+3y-7z\\x+2y-3z\end{pmatrix}.$$

שאלה 5:

$$T\binom{1}{-3}=\binom{0}{-1}.$$

שאלה 6:

א. בסיס ומימד לתמונה ולגרעין:

- $\dim(Im(T))=2\ ,B_{Im(T)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}.$
- $\dim(Ker(T))=1\ ,B_{Ker(T)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\2x\\6x-3y\end{pmatrix}.$

ג. $[T]_E=\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&0&0\\6&-3&0\end{pmatrix}.$

שאלה 7:

א. $\dim[Im(T)]=2\ ,\ \dim[Ker(T)]=1.$

ב. בסיס לתמונה ולגרעין:

- $B_{Im(T)}=\left\{\binom{1}{0},\ \binom{1}{1}\right\}.$
- $B_{Ker(T)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}.$

שאלה 8:

א. ההעתקה איננה הפיכה, הוכחה בוידאו.

ב. בסיס ומימד לתמונה ולגרעין של T:

- $\dim ImT = 2$, $B_{Im(T)} = \left\{\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix}\right\}$.
- $\dim KerT = 1$, $B_{Ker(T)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 9:

א. $\dim\big(Im(T)\big) = 2$, $B_{Im(T)} = B_{Col(A)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$.

ב. $\dim\big(Ker(T)\big) = 1$, $B_{Ker(T)} = B_{N(A)} = \left\{\begin{pmatrix}-7\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+7z\\y+3z\\2y+6z\\4y+12z\end{pmatrix}$.

שאלה 10 (פתרנו בשתי דרכים):

$[T]_C^C = \begin{pmatrix}-6 & -20\\2 & 7\end{pmatrix}$.

שאלה 11:

א. $[T]_B^A = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

ב. $[S]_C^B = \begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$.

ג. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [S \circ T]_C^A$ (פתרון בשתי דרכים).

<u>שאלה 12</u>:

הוכחה.

<u>שאלה 13</u>:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

<u>שאלה 14</u>:

א. ההעתקה היא איננה חח"ע, $\dim(Ker(T)) = 2$, $B_{Ker(T)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ב. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \\ y \end{pmatrix}$.

ג. $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>תת-פרק 'תוספות ושאלות נוספות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)'</u>:

<u>שאלה 1</u>:

א. הפרכה.

ב. הוכחה.

שאלה 2:

הוכחה.

שאלה 3:

הוכחה.

שאלה 4:

א. $T(ax^3+bx^2+cx+d)=\begin{pmatrix}-2a+2b-c+d & -a+b\\ a-b+c & 2a-b+c\end{pmatrix}$.

ב. T היא איזומורפיזם. בסיס ומימד לגרעין ולתמונה:

- $\dim[Im(T)]=4$, $B_{Im(T)}=\left\{\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.
- $\dim[Ker(T)]=0$, $Ker(T)=\{0\}$.

ג. $[T]_{E_{M_{2\times2}}}^{E_{\mathbb{R}_{\leq3}}}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

שאלה 5:

א. הוכחה.

ב. $[T]_B^B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

ג. $T^{-1}(4\boldsymbol{v_1}+2\boldsymbol{v_2}+4\boldsymbol{v_3})=3\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3}$.

שאלה 6:

הוכחה.