מבחן במתמטיקה בדידה תשפ"א סמסטר ב
פתרון X

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות בכדי לקבל ניקוד מלא. אלא אם כתוב אחרת, יש לנמק את תשובתכם באופן מלא וברור. יש לציין באופן מפורש וברור באילו משפטים, טענות או נוסחאות ידועות אתם משתמשים. תשובות חלקיות, גם אם נכונות, לא ייזכו אותכם בניקוד מלא.

1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)**

(א) ציירו, אם אפשר, גרף 4-רגולרי בעל 15 צלעות. אם אי אפשר - הוכיחו שלא קיים גרף כזה.

פתרון: לפי משפט לחיצות הידיים מתקיים כי

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$

במקרה זה,

$$\begin{aligned} 4\cdot|V| &= 2\cdot 15 \iff \\ 2|V| &= 15 \end{aligned}$$

וקיבלנו שבאגף שמאל יש מספר זוגי ואילו באגף ימין מספר אי-זוגי ולכן לא קיים גרף המקיים את הדרוש.

(ב) הוכיחו כי מספר האנשים שלחצו ידיים מספר אי זוגי של פעמים בכל ימי חייהם הוא זוגי.

פתרון: נגדיר גרף בו הקודקודים הם האנשים שלחצו ידיים מספר אי זוגי של

פעמים בימי חייהם. נחבר כל שני קודקודים בקשת אם האנשים המתאימים לחצו ידיים. ממשפט לחיצות הידיים נקבל כי

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$$

כלומר הסכום משמאל שהוא סכום של מספרים **אי זוגיים** שווה למספר זוגי, ולכן יש מספר זוגי של איברים בסכום. כלומר, מספר האנשים שלחצו ידיים מספר אי זוגי של פעמים בכל ימי חייהם הוא זוגי כנדרש.

2. **(10 נק)**

(א) הוכיחו כי עוצמת קבוצת כל המילים הסופיות המורכבות מהאותיות a, b היא בת מנייה.
פתרון: נסמן ב B_i את קבוצת כל המילים באורך i המורכבות מהאותיות a, b.
אנחנו מעוניינים ב $|\cup_{i=1}^{\infty} B_i|$. נשים לב כי זהו איחוד בן מניה של הקבוצות B_i.
כל קבוצה B_i היא בת מנייה (ולמעשה סופית). ולכן לפי משפט, איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה הוא בן מנייה כנדרש.

(ב) הוכיחו כי העוצמה של קבוצת כל המילים האינסופיות המורכבות מהאותיות a, b היא א.
פתרון: כל מילה אינסופית מהאותיות a, b מגדירה למעשה סדרה אינסופית של a ו b. ולכן, קבוצת המילים האינסופיות המורכבות מהאותיות a, b היא למעשה קבוצת כל הפונקציות מ $\mathbb{N}$ ל $\{a, b\}$. כלומר,

$$|B|=|\{a,b\}^{\mathbb{N}}|=|\{a,b\}|^{|\mathbb{N}|}=2^{\aleph_0}=\aleph$$

2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** בכמה מספרים 6 ספרתיים **זוגיים** הספרה 2 מופיעה בדיוק פעמיים כאשר יתר הספרות שונות זו מזו?
פתרון: נפריד ל 4 מצבים שונים, ועבור כל מצב נספור.

(א) **הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובסוף:** נישאר עם 4 מקומות בהם יכולים להופיע כל המספירם פרט ל 2 ולכן יש $6\cdot 7\cdot 8\cdot 9$ אפשרויות לכך.

(ב) **הספרה 2 מופיעה בהתחלה ובאמצע:** עבור המקום האחרון יש 4 אפשרויות למספרים זוגיים. יש 4 מקומות אפשריים בהם 2 מופיע באמצע, ושאר 3 המקומות יכולים להופיע כל המספרים פרט ל 2. ולכן יש $6\cdot 7\cdot 8\cdot 4\cdot 4$ אפשרויות.

(ג) **הספרה 2 מופיעה בסוף ובאמצע:** יש 4 מקומות אפשריים באמצע בו 2 מופיעה. כמו כן, במקום הראשון לא יכול להופיע המספר 0. ולכן יש $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ אפשרויות.

(ד) **הספרה 2 מופיעה באמצע פעמיים:** יש 2 מקומות מתוך ה 4 שבאמצע לשים את 2. במקום האחרון חייב להופיע מספר זוגי. במקום הראשון לא יכול להופיע 0. לכן סהכ יש $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6$ אפשרויות.

וסהכ נקבל

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 = 26208$$

מספרים כאלה.

2. **(10 נק)**הוכיחו כי לכל מספר טבעי $n > 1$ מתקיימת הזהות הבינומית

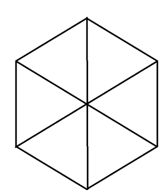
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

פתרון:

$$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-\frac{1}{2})^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}$$

3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(12 נק)** נתבונן גרף בעל 7 קודקודים כך שקודקוד אחד הוא עם דרגה השווה ל 6 ושאר הקודקודים בעלי דרגה השווה ל 3. נסמן ב v_1 את הקודקוד מדרגה 6. שאר הקודקודים בגרף יסומנו ב $v_2, \dots, v_7$.



נענה על השאלה מהו מספר המסלולים באורך n בגרף המתחילים בקודקוד v_1. יהא a_n מספר המסלולים בגרף באורך n המתחילים בקודקוד v_1 ויהא b_n מספר המסלולים בגרף באורך n המתחילים בקודקודים **שאינם** הקודקוד v_1. נשים לב שמשיקולי סימטריה גודל זה שווה עבור כל אחד מששת הקודקודים שאינם v_1.

(א) כיתבו את a_n כתלות ב b_{n-1}. **פתרון:** כל מסלול באורך $n-1$ **שאינו מתחיל ב** v_1 נשלים למסלול באורך n המתחיל ב v_1 ע"י הוספת הקשת מ v_1 לקודקוד הראשון במסלול. מכיוון שיש 6 קודקודים אפשריים להתחלה נקבל כי $a_n = 6b_{n-1}$.

(ב) כיתבו את b_n כתלות ב a_{n-1} ו b_{n-1}. **פתרון:** כל מסלול באורך $n-1$ שמתחיל בקודקוד v_1 נרחיב למסלול באורך n שאינו מתחיל ב v_1 באופן יחיד ע"י הוספת קשת מתאימה מ v_1. כל מסלול באורך $n-1$ שאינו מתחיל בקודקוד v_1 נרחיב למסלול באורך n שאינו מתחיל ב v_1 ע"י הוספת קשת שאינה עוברת דרך v_1. יש בדיוק 2 אפשרויות לעשות זאת. ולכן

$$b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1}$$

(ג) רישמו את כלל הנסיגה עבור a_n כתלות ב a_{n-1}, a_{n-2} ופיתרו את נוסחאת הנסיגה כאשר נתון כי $a_0 = 1$ ו $a_1 = 6$. **פתרון:** מתקיים כי

$$a_n = 6b_{n-1} \iff b_n = 2b_{n-1} + 6b_{n-2}$$

כעת, מכיוון ש $b_{n-1} = \frac{a_n}{6}$ נציב ונקבל כי

$$a_n = 2a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

נפתור:

$$x^n = 2x^{n-1} + 6x^{n-2}$$
$$x^{n-2}(x^2 - 2x - 6) = 0$$

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{7},\ \alpha_2 = 1 - \sqrt{7}$$

כעת,

$$a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$a_1 = 6 = A_1(1+\sqrt{7}) + A_2(1-\sqrt{7})$$
$$a_0 = 1 = A_1 + A_2$$

$$\Longrightarrow A_1 = \frac{\sqrt{7}-5}{2\sqrt{7}},\ A_2 = \frac{\sqrt{7}+5}{2\sqrt{7}}$$

ובסה"כ נקבל

$$a_n = \frac{\sqrt{7}-5}{2\sqrt{7}} \cdot \left(1+\sqrt{7}\right)^n + \frac{\sqrt{7}+5}{2\sqrt{7}} \cdot \left(1-\sqrt{7}\right)^n$$

2. **(8 נק)** הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל $n \geq 1$ הביטוי $4^{n+1}+5^{2n-1}$ מתחלק ב 21 ללא שארית. **פתרון: תנאי התחלה** $n=1$**:**

$$4^{1+1}+5^{2-1} = 16+5 = 21$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$. נניח כי הטענה נכונה עבור n מסויים ונוכיח עבור $n+1$.

$$4^{(n+1)+1}+5^{2(n+1)-1} = 4\cdot 4^{n+1}+5^2\cdot 5^{2n-1} \quad = 4(4^{n+1}+5^{2n-1})+21\cdot 5^{2n-1}$$

המחובר הראשון מתחלק ב 21 מהנחת האינדוקציה והמחובר השני מתחלק ב 21 כי 21 כופל אותו. ולכן מסקנת האינדוקציה היא שהמספר מתחלק ב 21 לכל $n \geq 1$ כנדרש.

4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** נתונה חפיסת קלפים עם 52 קלפים. בכמה דרכים אפשר לבחור 13 קלפים מהחפיסה באופן כזה שיהיה לפחות מלך אחד, לפחות מלכה אחת, לפחות נסיך אחד ולפחות אס אחד? נזכיר שבחפיסת קלפים יש 4 מלכים, 4 מלכות, 4 נסיכים ו 4 אסים. **פתרון:** נשתמש בהכלה הפרדה. תהא U קבוצת כל האפשרויות לבחירת 13 קלפים מהחפיסה. נגדיר את הקבוצות A_i להיות קבוצת כל האפשרויות לבחור 13קלפים מהחפיסה בהן קלף i אינו נבחר. כאן i הוא מלך, מלכה, נסיך או אס. מתקיים:

$$|U| = \binom{52}{13}$$

$$|A_i| = \binom{48}{13}$$

$$|A_i \cap A_j| = \binom{44}{13}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{40}{13}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_s| = \binom{36}{13}$$

וסהכ נקבל:

$$\binom{52}{13}-4\binom{48}{23}+\binom{4}{2}\binom{44}{13}-\binom{4}{3}\binom{40}{13}+\binom{36}{13}$$

2. **(10 נק)** הוכיחו כי בכל בחירה של $n+1$ מספרים שונים מבין המספרים $1,2,...,2n$ ישנם בהכרח שני מספרים עוקבים.
פתרון: תאים: הזוגות $\{1,2\},\{3,4\},...,\{2n-1,2n\}$. בסהכ יש n תאים. **יונים:** המספרים שנבחרו. בסהכ יש $n+1$ יונים. לכן, לפי עקרון שובך היונים יש שני מספרים באותו תא. מספרים אלו הם מספרים עוקבים כנדרש.

5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** נתונים זוגות גרביים מהצבעים כחול, אדום, שחור, לבן וירוק. ישנם 7 גרביים בצבע אדום, 7 גרביים בצבע כחול, 5 גרביים בצבע ירוק וכמות בלתי מוגבלת של גרביים לבנים ושחורים. מה מספר הדרכים לבחור 12 גרביים בלי חשיבות לסדר הבחירה?
פתרון: נשתמש בפונקציות יוצרות. המשוואה שיש לפתור היא

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$$

$$\begin{aligned} 0\le x_1,x_2\le 7\\ 0\le x_3\le 5\\ 0\le x_4,x_5 \end{aligned}$$

והפונקציה היוצרת המתאימה היא

$$f(x)=\left(1+x+\cdots+x^7\right)^2\cdot\left(1+x+\cdots+x^5\right)\cdot\left(1+x+x^2+\cdots\right)^2$$

ומחפשים את המקדם של x^{12}. נסדר מעט את הפונקציה:

$$\begin{aligned} f(x)&=\left(1+x+\cdots+x^7\right)^2\cdot\left(1+x+\cdots+x^5\right)\cdot\left(1+x+x^2+\cdots\right)^2\\ &=\left(\frac{1-x^8}{1-x}\right)^2\cdot\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\\ &=\left(1-x^6-2x^8-2x^{14}+x^{16}-x^{22}\right)\left(1+x+\cdots\right)^5 \end{aligned}$$

מכיוון שצריך את המקדם של x^{12} התשובה היא

$$D(5,12) - D(5,6) - 2D(5,4) = \binom{16}{12} - \binom{10}{6} - 2\binom{8}{4} = 1470$$

2. **(10 נק)** תהיינה A, B, C שלוש קבוצות לא ריקות. הוכיחו כי

$$A - (B \cap C) \subseteq (A - C) \cup (A - B)$$

פתרון: יהא $x \in A - (B \cap C)$ נראה כי $x \in (A - C) \cup (A - B)$:

$$\begin{aligned}
& x \in A - (B \cap C) \Longrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cap C) && \Longrightarrow \\
& (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C)) && \Longrightarrow \\
& ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \notin C)) && \Longrightarrow \\
& (x \in A - B) \vee (x \in A - C) && \Longrightarrow \\
& x \in ((A - B) \cup (A - C))
\end{aligned}$$

6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

תהא A הקבוצה $A = (\mathbb{N} - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$. נגדיר על A את היחס R באופן הבא:

$$((a,b),(c,d)) \in R \iff \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

1. **(10 נק)** הוכיחו כי R הוא יחס שקילות על A.

פתרון:

(א) **רפלקסיבי:**

$$((a,b),(a,b)) \in R \iff \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

ולכן היחס רפלקסיבי.

(ב) **סימטרי:**

$$((a,b),(c,d)) \in R \iff \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \iff \frac{c}{c+d} = \frac{a}{a+b} \iff ((c,d),(a,b)) \in R$$

ולכן היחס סימטרי.

(ג) **טרנזיטיבי:**

$$((a,b),(c,d)) \in R \iff \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$
$$((c,d),(e,f)) \in R \iff \frac{c}{c+d} = \frac{e}{e+f}$$
$$\Longrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{e+f} \Longrightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$$

2. **(5 נק)** מיצאו את מחלקת השקילות של $(1,2)$.

פתרון:

$$[(1,2)] = \{(a,b) \mid ((1,2),(a,b)) \in R\} = \left\{(a,b) \mid \frac{1}{1+2} = \frac{a}{a+b}\right\}$$
$$= \{(a,b) \mid b = 2a\} = \{(a,2a) \mid a \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

3. **(5 נק)** חשבו את העוצמה של מחלקת השקילות של $(1,1)$.

פתרון:

$$[(1,1)] = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

ולכן העוצמה של מחלקה השקילות הנל שווה לעוצמה של $\mathbb{N} - \{0\}$ ששווה ל $\aleph_0$