

## חזו"א 2

### תרגיל מספר 4 – גבולות, רציפות, נגזרות ודיפרנציאביליות של פונקציות בשני משתנים

(בכמה מהשאלות נבחרו סעיפים ללימוד עצמי : נא לקרוא בסוף כל שאלה).

#### שאלה 1

בדקו האם לפונקציות הבאות קיים גבול ב נק'  $(0,0)$

א.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

ב.  $f(x, y) = \frac{2x^3 - 3y}{3x^3 + 2y}$

ג.  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{y}$

ד.  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{y^2 + x^4}$

ה.  $f(x, y) = \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^4}$

**\*\* סעיפים ללימוד עצמי : ב, ה**

#### שאלה 2

האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות בנקודה  $(0,0)$  כרציפות?  
אם כן מהו הערך בנקודה זו כך שהפונקציה תהינה רציפה?

א.  $f(x, y) = \frac{2x + 3y}{3x - 2y}$

ב.  $f(x, y) = xy \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$

ג.  $f(x, y) = \frac{2x^3}{3x^2 + 4y^2}$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \quad \text{ד.}$$

**\*\* סעיפים ג, ד ללימוד עצמי.**

### שאלה 3

חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x, y) = xy + 3x^2 - 5y^5$$

$$\text{ב. } f(x, y) = e^{x/y}$$

$$\text{ג. } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{ד. } f(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

$$\text{ה. } f(x, y) = e^{\arctg \frac{x}{y}}$$

**\*\* סעיפים ד, ה ללימוד עצמי**

### שאלה 4

$$\text{א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^3 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{ב. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם קיימות הנגזרות החלקיות של הפונקציה ב (0,0) ?

**\*\* סעיף ב ללימוד עצמי**

### שאלה 5

הוכיחו כי הפונקציה  $f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$  מקיימת את

$$\text{המשוואה: } y^2 f_x + xy f_y = 2xf$$

### שאלה 6

הוכיחו כי הפונקציה  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  מקיימת את המשוואה:  $y f_x - x f_y = 0$ .

**\*\* תרגיל 6 ללימוד עצמי.**

### שאלה 7

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x \sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{תהי}$$

הראו כי  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  קיימות, אך  $f$  אינה רציפה ב-  $O = (0, 0)$ .

האם  $f$  דיפרנציאבילית ב-  $O = (0, 0)$  ?

### שאלה 8

בדקו רציפות ודיפרנציאביליות הפונקציה  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה  $O = (0, 0)$ .

### שאלה 9

בדקו רציפות ודיפרנציאביליות של הפונקציה:

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{בנקודה } O = (0, 0).$$

### \*\*שאלה 9 ללימוד עצמי

### שאלה 10

בדקו דיפרנציאביליות של הפונקציות הבאות בכל תחום הגדרתה.

$$א. f(x, y) = 3 \ln(x^4 + y^6 + 1)$$

$$ב. f(x, y) = \frac{e^{xyz^2}}{y}$$

### \*\*סעיף ב ללימוד עצמי