# פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"א סמסטר ב שאלון Y

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות.
יש לנמק את התשובות באופן מלא (אלא אם כתוב במפורש שלא צריך)

## שאלה 1. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. נתונה מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} (b+1)x & +(b+1)y & -(b)\,z & = & 2b+5 \\ x & & -z & = & 2 \\ b^2x & -(b+1)y & +(b-1)\,z & = & 3b^2-2b-3 \end{cases}$$

(i) (8 נקודות) מצאו את הערכים של הפרמטר $a$ עבורם יש למערכת פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרונות.

(ii) (7 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר $b$ וקטור העמודה $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (5 נקודות) בסעיף זה המטריצה $A$ היא מטריצה מסדר $3\times 4$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. נתון כי העמודה $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ היא פתרון למערכת המשוואות $Ax=b$, והעמודה $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ היא פתרון למערכת המשוואות ההומוגנית $Ax=0$. מצאו פתרון נוסף למערכת המשוואות $Ax=b$.

## פתרון

א. נחשב תחילה את הדטרמיננטה של המטריצה המצומצמת של המערכת:

$$\begin{vmatrix} b+1 & b+1 & -b \\ 1 & 0 & -1 \\ b^2 & -b-1 & b-1 \end{vmatrix} = -b(b+1)^2$$

(i) קיבלנו כי המטריצה המצומצמת הפיכה כאשר $b\neq 0,-1$ ולכן למערכת יש פתרון יחיד אם"ם $b\neq 0,-1$.
נבדוק את המקרים הנותרים ע"י הצבה:

- עבור $b=-1$: נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה, כלומר דרגת המטריצה המצומצמת קטנה מדרגת המטריצה המורחבת, ולכן למערכת אין פתרונות.

- עבור $b=0$ נדרג את המטריצה המורחבת שמתאימה למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&5\\1&0&-1&2\\0&-1&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&5\\0&-1&-1&-3\\0&-1&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&-1&-1&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

קיבלנו שדרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת המטריצה המצומצמת ושווה ל־2, ולכן יש למערכת אינסוף פתרונות.

(ii) נציב את העמודה כפתרון ונבדוק מתי מתקיים שוויון:
$$\begin{cases}(b+1)3 & +(b+1)2 & -(b) & = & 2b+5\\ 3 & & -1 & = & 2\\ b^2 3 & -(b+1)2 & +(b-1) & = & 3b^2-2b-3\end{cases}$$

כלומר
$$4b+5=2b+5, 2=2, 3b^2-b-3=3b^2-2b-3$$

ונקבל כי $b=0$.

ב. לפי משפט המבנה של פתרונות של מערכת משוואות, אם נוסיף לפתרון נתון פתרון של המערכת ההומוגנית, הוא ישאר פתרון, ולכן העמודה $\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\11\\15\end{pmatrix}$ היא פתרון נוסף.

## שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (15 נקודות) נסמן $U=\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x]:p(1)=0\}, W=\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x]:p(2)=0\}$. מצאו בסיסים ומימדים של $U$ ושל $W$ ובאחת מהאפשרויות הבאות:

(i) מצאו בסיס של־$U+W$ ואת המימד של $U\cap W$.

(ii) מצאו בסיס של־$U\cap W$ ואת המימד של $U+W$.

ב. (5 נקודות) יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד 4, ותהי $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}\subset V$.
הוכיחו שאם הקבוצה $S$ בת״ל, אז

$$\text{Span}\{v_1,v_2\}\cap\text{Span}\{v_3,v_4\}=\{0\}$$

## פתרון

א. נשים לב תחילה כי גם $U$ וגם $W$ לא שווים ל־$\mathbb{R}_2[x]$, כי $x\notin U,W$, ולכן המימדים שלהם הם לכל היותר 2 (מדוע?). נתבונן כעת בקבוצה $\{x-1,x^2-1\}$. זו קבוצה בת״ל (כי הפולינומים ממעלות שונות) בתוך $U$, ולכן המימד של $U$ הוא לפחות 2 ולכל היותר 2 כלומר שווה 2. באופן דומה בזכות הקבוצה $\{x-2,x^2-4\}$ המימד של $W$ שווה 2, והקבוצות הנ״ל מהוות בסיסים של המרחבים. כעת הקבוצה $\{(x-1)(x-2)\}\subset U\cap W$. כמו כן המימד של $U\cap W$ הוא לכל היותר 1 כי המרחבים שונים, ומכיוון שמכיל איבר שונה מאפס המימד הוא לפחות 1, כלומר המימד של החיתוך הוא 1 וממשפט המימד נובע כי המימד של הסכום הוא 3.

ב. נניח כי הקבוצה $S$ היא בת״ל, אז היא בסיס של $V$. כעת, כל תת קבוצה של קבוצה בת״ל היא גם בת״ל, ולכן הקבוצות $\{v_1,v_2\},\{v_3,v_4\}$ בת״ל ולכן בסיסים של $\text{Span}\{v_1,v_2\},\text{Span}\{v_3,v_4\}$ בהתאמה. כעת ממשפט המימד נקבל כי $\dim\text{Span}\{v_1,v_2\}\cap\text{Span}\{v_3,v_4\}=0$ ולכן הטענה נובעת.

## שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (12 נקודות) יהי $V$ מרחב וקטורי ויהיו $B,C$ שני הבסיסים הבאים של V: $B=\{b_1,b_2\},\quad C=\{b_1+b_2,2b_1+3b_2\}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית הנתונה ע״י $T(b_1)=2b_1-b_2,\quad T(b_2)=b_1+4b_2$. מצאו את המטריצות המייצגות $[T]_B^B,[T]_C^C$.

ב. (8 נקודות) תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית בין שני מרחבים וקטורים

(i) הוכיחו כי $T(0_V)=0_W$

(ii) הוכיחו כי אם $\{b_1,b_2,b_3\}$ בסיס של $V$, ו־$T$ חח"ע, אז $\{T(b_1),T(b_2),T(b_3)\}$ בת"ל.

## פתרון

א. מהנתון נובע כי המטריצה וקטורי הקואורדינטות לפי הבסיס $B$ של הוקטורים הבאים הם:

$$[T(b_1)]_B=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ [T(b_2)]_B=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},[b_1+b_2]_B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ [2b_1+3b_2]_B=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}\ [Id]_B^C=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\ [T]_C^C=[Id]_C^B\,[T]_B^B\,[Id]_B^C=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$$

ב. נוכיח את הטענות:

(i) נסמן $w=T(0_V)$, ונראה כי $w=O_V$. מתקיים כי $O_V=0\cdot O_V$, ולכן $w=T(0_V)=T(0\cdot O_V)=0T(0_V)=0_W$.

(ii) נניח כי $0=a_1T(b_1)+a_2T(b_2)+a_3T(b_3)=T(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$. נתון כי $T$ חח"ע, ולכן $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$. ומהנתון קבוצה זו בת"ל ולכן $a_1=a_=a_3=0$ כלומר הקבוצה המקורית בת"ל.

## שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) תהי $B$ מטריצה הפיכה מסדר $n\times n$. נתון כי $A$ מטריצה המקיימת כי $A^TBA=B$.

(i) הוכיחו כי $A$ הפיכה.

(ii) הוכיחו כי $A^{-1}$ מקיימת כי $(A^{-1})^T BA^{-1}=B$.

ב. (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור כל טענה, אם היא נכונה הוכיחו אותה, ואם היא לא נכונה מצאו דוגמה נגדית שמפריכה אותה

(i) לכל שתי מטריצות ריבועיות מאותו הסדר מתקיים כי אם $A,B$ הפיכות אז $A+B$ הפיכה.

(ii) לכל שתי מטריצות סימטריות $A,B$ המטריצה $AB$ סימטרית.

## פתרון

א. נתון כי $A^TBA=B$ ו־$B$ הפיכה.

(i) מהמשוואה נובע כי $|A||B||A^T|=|B|$ ולכן $|A|^2=1$ כי $|B|\neq 0$ ו־$A$ הפיכה.

(ii) נכפיל את השוויון הנ"ל ב$(A^{-1})^T$ וב־$A^{-1}$ בהתאמה משני תדדיו ונקבל את השוויון הנדרש.

ב. נפריך את שתי הטענות

(i) דוגמה נגדית: עבור $A=I,B=-I$ מתקיים כי שתיהן הפיכות, אבל $A+B=0$ לא הפיכה.

(ii) דוגמה נגדית: עבור $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ מתקיים ששתיהן סימטריות, אבל $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ לא סימטרית.

## שאלה 5. (20 נקודות)

א. נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 2+a^2 & 9 & a \end{pmatrix}$. מצאו עבור אילו ערכים של $a$ המטריצה לכסינה.

ב. תהי $B$ מטריצה מסדר $n \times n$ כך ש $v$ הוא וקטור עצמי של $B$ המתאים לערך העצמי 4. הראו כי $v$ הוא וקטור עצמי של המטריצה $C = B^2 + 2B + 3I$ ומיצאו את הערך העצמי המתאים ל $v$.

## פתרון

א. חשב תחילה את הפולינום האופייני של $A$.

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 0 \\ -8 & -\lambda & 0 \\ 2+a^2 & 9 & a-\lambda \end{pmatrix} \right| = (a-\lambda)(\lambda^2 - 16)$$

לכן, הערכים העצמיים של $A$ הם: $\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -4$. מכיוון ש $\lambda_2 \neq \lambda_3$ מתקיים כי $A$ לכסינה כאשר $a \neq \pm 4$, כי אז יש לה שלושה ערכים עצמיים שונים. נישאר לבדוק מה קורה במקרים בהם $a = 4$ ו $a = -4$. נמצא את מימדי המרחבים העצמיים בכל אחד מהמקרים

(i) $a = 4$: $\dim\ker(A - 4I) = \dim\ker \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 2$. במקרה זה, הריבוי האלגברי של הערך העצמי 4 הוא 2 וכך גם הריבוי הגיאומטרי. ולכן $A$ לכסינה.

(ii) $a = -4$: $\dim\ker(A + 4I) = \dim\ker \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 1$, במקרה זה, הריבוי האלגברי של הערך העצמי -4 הוא 2 אבל הריבוי הגיאומטרי הוא 1 ולכן $A$ אינה לכסינה

בסהכ נקבל כי $A$ לכסינה כאשר $a \neq -4$ ואינה לכסינה כאשר $a = -4$

ב. מתקיים כי $Bv = 4v$. כעת,

$$Cv = (B^2 + 2B + 3I)v = B^2v + 2Bv + 3v = B(Bv) + 2 \cdot 4v + 3v = B(4v) + 11v = 16v + 11v = 27v$$

כלומר $v$ וקטור עצמי עם ערך עצמי 27.

## שאלה 6. (20 נקודות)

א. נתונים הווקטורים

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(i) מצאו בסיס וממד של $W = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$. הוכיחו ש־ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ שייך ל־$W$ אם ורק אם

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(ii) מצאו שני וקטורים ואורתוגונאליים לכל וקטור ב־$W$.

(iii) הוכיחו שאם וקטור $v$ אורתוגונאלי לשני הוקטורים $u_1, u_2$ אז הוא אורתוגונלי גם ל־$u_1 + u_2 + u_3$.

## פתרון

א. נסמן ב־$U$ את המרחב של כל הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

בדקו כי מתקיים ש־ $u_1 + u_2 = u_3$, וכי $u_1, u_2$ בת"ל. לכן $\dim W = 2$. לפי בדיקה ישירה על ידי הצבה במערכת הנתונה, מקבלים ששלושת הוקטורים מקיימים את המשוואות ההומוגניות הנ"ל ולכן תת־המרחב $W$ מוכל בתת־המרחב $U$. בנוסף, גם הממד של $U$ שווה ל־ 2 )נמקו ! ( ומסיקים ש־$U = W$.

ב. אם $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ אורתוגונלי לשני הוקטורים, אז מתקיים כי

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

פתרון המערכ הוא מהצורה $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ -b \end{pmatrix}$ ולכן הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מקיימים את הנדרש.

ג. אם $v$ ניצב ל־$u_1, u_2$ אז הוא ניצב למרחב שנפרש על ידם שמכיל גם את הסכום $u_1 + u_2 + u_3$ כי $u_3 = u_1 + u_2$

# בהצלחה