

**שאלה 1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') חשבו את הגבול:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 2}{n^3 + n^2} \right)^{\frac{3n^2 - 1}{n}}$  נמקו !

ב. (10 נק') מצאו  $F(x)$  פונקציה קדומה של  $f(x) = x \sin^2 x$  כך ש-  $F(0) = 0$ .

האם  $F$  פונקציה חח"ע ב-  $\mathbb{R}$  ? נמקו !

**פתרון 1** (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)

המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)





המשך פתרון 1 (רשמו רק בעמודים 1, 2, 3, 4)



**שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') מצאו את הערכים של הפרמטר הממשי  $a$  עבורם הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x + a}{x^2 - x}, & x > 1 \\ 2, & x = 1 \\ 2x + 3^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \end{cases}$$

היא רציפה בנקודה  $x_0 = 1$ .

עבור הערכים של  $a$  שהיא לא רציפה בנקודה  $x_0 = 1$ , מיינו את סוג האי רציפות. נמקו !

ב. (10 נק') הראו שלמשוואה  $\cos x = x + \ln(x^2)$  יש פתרון יחיד בקטע  $x > 0$ . נמקו !

**פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)**

המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)



**המשך פתרון 2** (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)

המשך פתרון 2 (רשמו רק בעמודים 5, 6, 7, 8)



**שאלה 3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') הוכיחו שלכל  $0 \leq x \leq \frac{1}{6}$  מתקיים  $\left| \ln(1+3x) - 3x + 4.5x^2 - 9x^3 \right| \leq \frac{1}{64}$  . נמקו !

ב. (10 נק') מצאו את ערך האינטגרל  $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 5e^{2x} + 4}$  . נמקו!

**פתרון 3** (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)

המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)





המשך פתרון 3 (רשמו רק בעמודים 9, 10, 11, 12)



**שאלה 4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

1. הוכיחו שאם  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ , אז  $f$  חח"ע ב-  $\mathbb{R}$ . נמקו!

2. האם  $f$  חח"ע ב-  $\mathbb{R}$  גורר ש-  $f'(x) \neq 0$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ ? נמקו!

ב. (10 נק') נתונה פונקציה  $f(x) = \frac{1}{|x| - 3}$  מוגדרת לכל  $x \neq \pm 3$ .

חשבו את שטח התחום, שחסום על-ידי גרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x) = 1 - |x|$ ,

בקטע  $-2 \leq x \leq 2$ . נמקו!

**פתרון 4** (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16)

המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16)





המשך פתרון 4 (רשמו רק בעמודים 13, 14, 15, 16)



**שאלה 5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו-ב'**

א. (10 נק') נתונה פונקציה  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  בעלת 4 נגזרות  $f', f'', f''', f^{(4)}$  רציפות בקטע  $[-a, a]$ . נתון  $f(0) = 3, f'(0) = 0, f''(0) = 4, f'''(0) = 0$ . הוכיחו שקיים קבוע ממשי  $M$  כך שלכל  $x \in [-a, a]$  מתקיים  $|f(x) - 3 - 2x^2| \leq Mx^4$ . נמקו !

ב. (10 נק') נתונה פונקציה רציפה  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . הוכיחו שאם  $(a_n)_{n \geq 1}$  סדרה חסומה, אז הסדרה  $b_n = f(a_n)$  חסומה. נמקו !

**פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)**

המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)





המשך פתרון 5 (רשמו רק בעמודים 17, 18, 19, 20)



**שאלה 6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'**

א. (10 נק') מצאו את הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e + 2 \int_1^x e^{t^2} dt}{1 + 2 \sin(x-1) - x^2}$  . נמקו !

ב. (10 נק') הוכיחו ש-  $|2a - \cos(3b) + \cos(3a) - 2b| \leq 5|a - b|$  , לכל  $a \neq b$  ממשיים. נמקו !

**פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)**

המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)



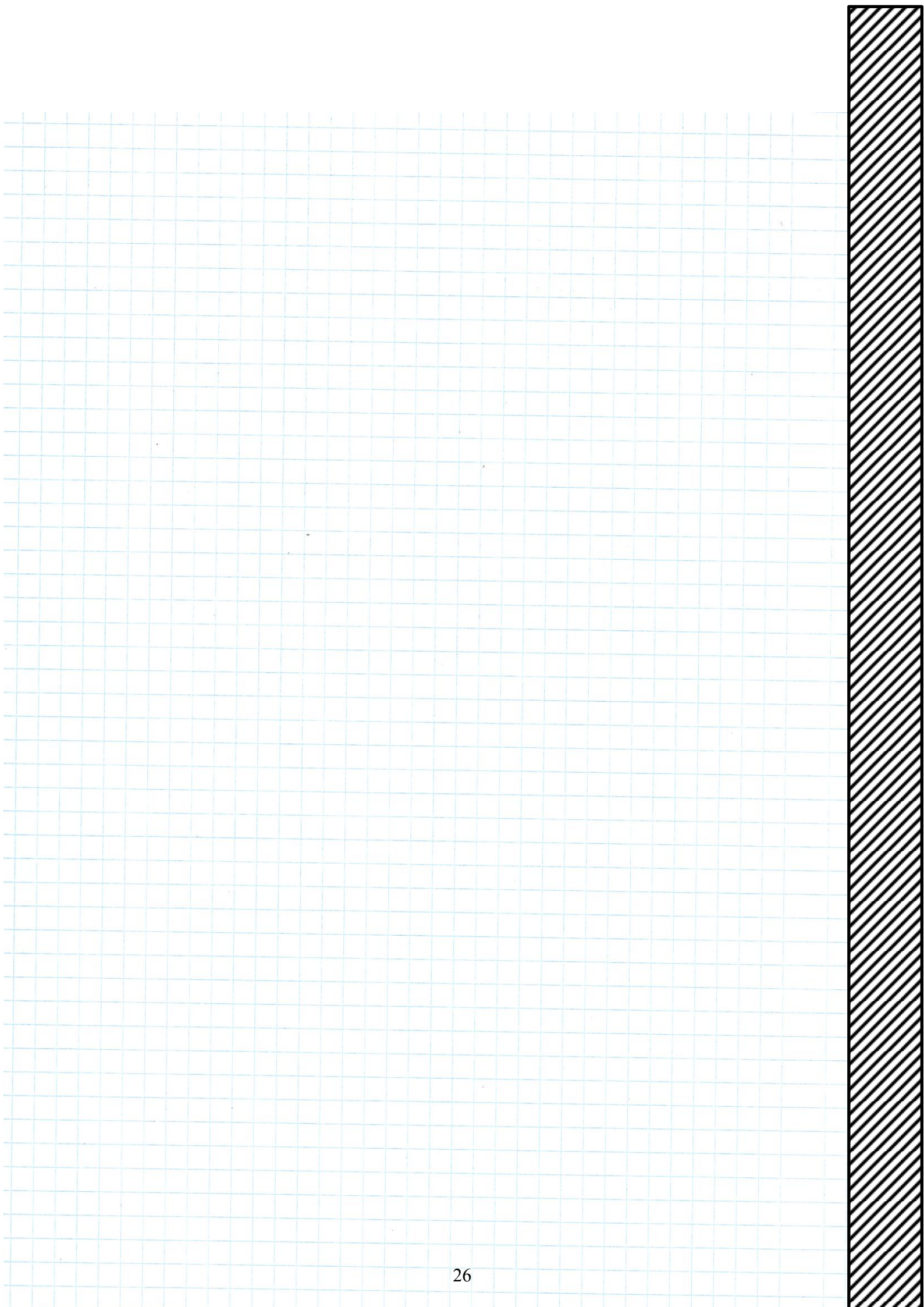


המשך פתרון 6 (רשמו רק בעמודים 21, 22, 23, 24)

סוף הפתרון !

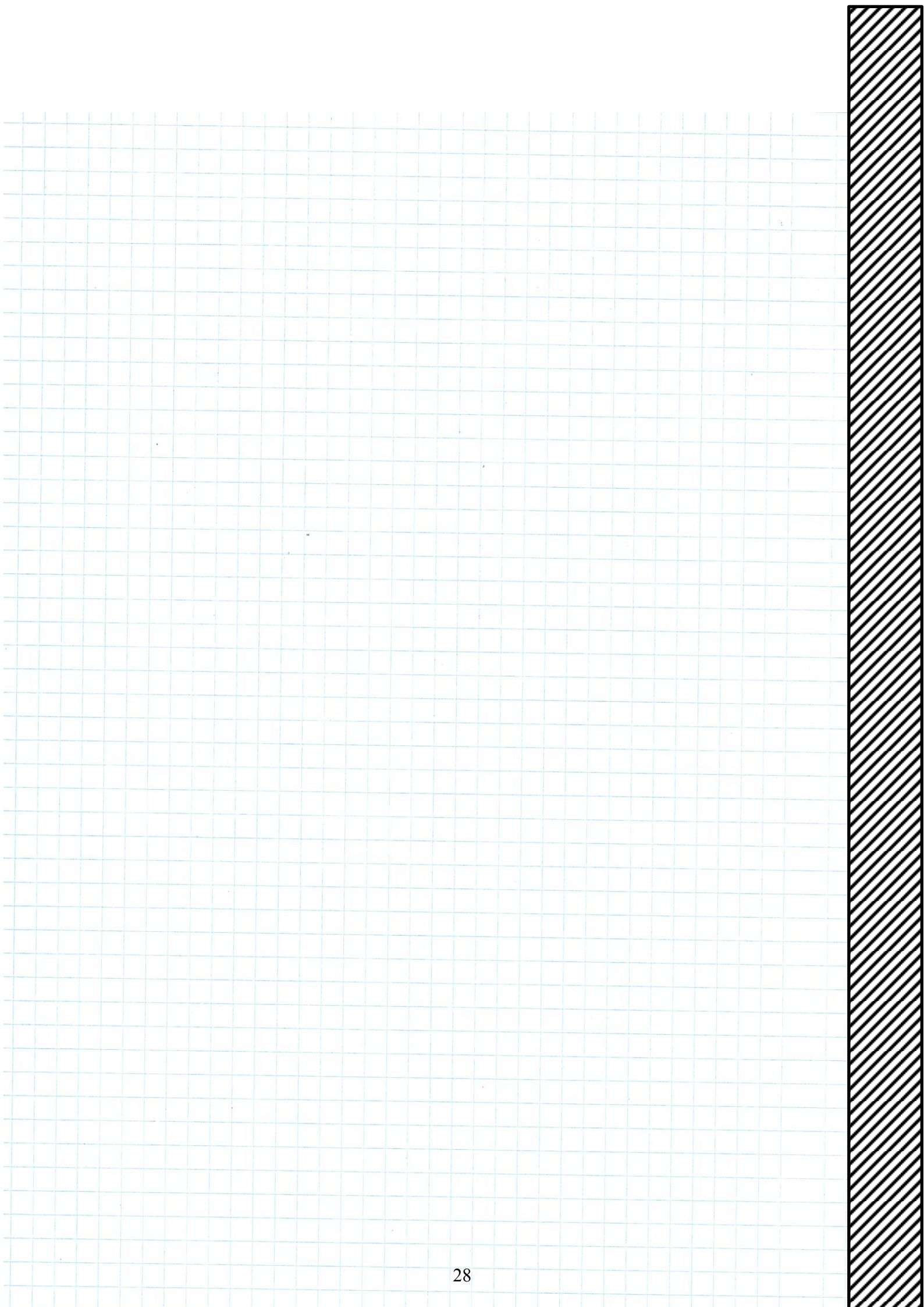














## פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 שאלון Y

### פתרון 1א:

זה גבול מהצורה " $1^\infty$ ". נתאים אותו לגבול של Euler (אویلר):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 2}{n^3 + n^2} \right)^{\frac{3n^2 - 1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + n^2 + 2 - n^2}{n^3 + n^2} \right)^{\frac{3n^2 - 1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2 - n^2}{n^3 + n} \right)^{\frac{3n^2 - 1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 + n}{2 - n^2}} \right)^{\frac{3n^2 - 1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 + n}{2 - n^2}} \right)^{\frac{(3n^2 - 1)(2 - n^2)}{n(n^3 + n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{n^3 + n}{2 - n^2}} \right)^{\frac{(n^3 + n)}{(2 - n^2)}} \end{aligned}$$

נשתמש בגבול של Euler אویلר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

$$a_n = \frac{n^3 + n}{2 - n^2} \rightarrow \infty \quad \text{עבור הסדרה:}$$

נקבל:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 2}{n^3 + n^2} \right)^{\frac{3n^2 - 1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(3n^2 - 1)(2 - n^2)}{n(n^3 + n)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 - 1)(2 - n^2)}{n(n^3 + n)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left( -3 + \frac{7}{n^2} - \frac{2}{n^4} \right)}{n^4 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{7}{n^2} - \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{1}{n^2}}} = e^{-3} \end{aligned}$$

**פתרון 1ב:**

נחשב ראשית פונק' קדומה כללית.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx = \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \int \left( \frac{\sin 2x}{2} \right)' \cdot x dx = (\text{integration by parts}) = \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\sin 2x)x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot (x)' dx \right] = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C = \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \left[ \frac{(\sin 2x)x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{2} dx \right] = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C \end{aligned}$$

התנאי הנוסף גורר ש-

$$F(0) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{8} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{8}$$

ולכן:

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + \frac{1}{8}.$$

קל לראות ש-  $F$  פונקציה לא חח"ע ב-  $\mathbf{R}$  :

דרך 1:

$$F(\pm\pi) = \frac{(\pm\pi)^2}{4} - \frac{(\pm\pi) \sin(2(\pm\pi))}{4} - \frac{\cos(2(\pm\pi))}{8} + \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{4},$$

ז"א קיבלנו שני ערכים שווים  $F(\pi) = F(-\pi)$ , אף על פי ש-  $\pi \neq -\pi$ .

דרך 2:

$F$  פונקציה רציפה ב-  $\mathbf{R}$ . ברור ש-  $F'(0) = f(0) = 0 \cdot \sin^2 0 = 0$ . בנוסף:

$$x \in (-\pi, 0) \text{ לכל, } F'(x) = f(x) = x \sin^2 x < 0 \quad \text{ו-} \quad x \in (0, \pi) \text{ לכל, } F'(x) = f(x) = x \sin^2 x > 0$$

מסיקים ש-  $F$  פונקציה עולה ממש בקטע  $[0, \pi)$  ויורדת ממש בקטע  $(-\pi, 0]$ .

ולכן  $F$  לא חח"ע ב-  $\mathbf{R}$ .



**פתרון 2א:**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2 \ln x + a}{x^2 - x} \right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2 \ln x}{x^2 - x} \right) = \left( \frac{0}{0} \right) \underset{LOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\frac{2}{x}}{2x-1} \right) = 2, & (a = 0) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\boxed{2 \ln x + a} \nearrow^a}{\boxed{x^2 - x} \searrow 0^+} \right) = +\infty, & (a > 0) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\boxed{2 \ln x + a} \nearrow^a}{\boxed{x^2 - x} \searrow 0^+} \right) = -\infty, & (a < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( 2x + 3 \boxed{\frac{1}{x-1}} \nearrow^{-\infty} \right) = 2$$

ואז הפונקציה היא רציפה ב- $x_0 = 1$  רק עבור  $a = 0$  כי אז הגבולות החד צדיים שווים לערך בנקודה.

מקרים של אי רציפות :

במקרה ש- $a \neq 0$  יש לפונקציה אי רציפות ממין שני כי הגבול מימין הוא אינסוף ( או מינוס אינסוף).

**פתרון ב2:**

נגדיר  $f(x) = \ln(x^2) + x - \cos x$  בקטע  $(0, \infty)$ .  
 נוכיח שלמשוואה  $f(x) = 0$  יש בדיוק פתרון אחד חיובי.

שלב א': קיום הפתרון (בעזרת משפט Cauchy)

1. נבדוק שהפונקציה  $f$  בעלת ערכים שליליים: או לפי בדיקת הגבול מימין ב-0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x^2) + x - \cos x) = -\infty$$

או לפי הצבה:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-2}) + \frac{1}{e} - \cos\left(\frac{1}{e}\right) = -2 + \frac{1}{e} - \cos\left(\frac{1}{e}\right) = \left(-1 + \frac{1}{e}\right) + \left(-1 - \cos\left(\frac{1}{e}\right)\right) < 0$$

2. נבדוק שהפונקציה  $f$  בעלת ערכים חיוביים לפי הצבה:

$$f(1) > \ln(1) + (1 - \cos 1) > 0$$

לכן מהרציפות של  $f$  בקטע  $(0, \infty)$ , נובע ממשפט ערך הביניים של Cauchy, כי למשוואה  $f(x) = 0$  קיים פתרון בקטע  $(0, \infty)$ .

שלב ב': יחידות הפתרון (בעזרת משפט Rolle)

$f$  גזירה בקטע  $(0, \infty)$  וברור שהנגזרת של  $f$  חיובית:

$$f'(x) = (\ln(x^2) + x - \cos x)' = \frac{2x}{x^2} + (1 + \sin x) > 0 \quad \text{לכל } x \in (0, \infty). \quad (**)$$

נניח בדרך השלילה שקיים יותר מפתרון אחד בקטע זה.

אזי ממשפט Rolle (רול) יינבע כי קיימת נקודה  $x \in (0, \infty)$  כך ש-  $f'(x) = 0$  (נמקו !), וזה סותר את (\*\*).

לכן קיים פתרון יחיד למשוואה  $f(x) = 0$  בקטע  $(0, \infty)$ . מ.ש.ל.



**פתרון 3א:**

האי שוויון הנתון שקול ל-  $\left| \ln(1+3x) - (3x - 4.5x^2 + 9x^3) \right| \leq \frac{1}{64}$

**בשלב הראשון של ההוכחה** נמצא את הפולינום Taylor-Maclaurin של  $f(x) = \ln(1+3x)$  מסדר 3.

**פתרון 1:** ברור שעבור הפונקציה  $f$  מתקיים  $f(0) = 0$  ו-

$$f'(x) = 3(1+3x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 3; \quad f'''(x) = 2 \cdot 3^3(1+3x)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = 54$$

$$f''(x) = (-1)3^2(1+3x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -9; \quad f^{(4)}(x) = -6 \cdot 3^4(1+3x)^{-4}$$

לכן הפולינום Taylor-Maclaurin של  $f(x) = \ln(1+3x)$  שווה ל-

$$T_3(x) = 0 + \frac{3}{1}x + \frac{(-9)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{54}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 = 3x - 4.5x^2 + 9x^3.$$

**פתרון 2:** ידוע ש-  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$  לכן הפולינום Taylor-Maclaurin של

$f(x) = \ln(1+3x)$  שווה ל-

$$T_3(x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} = 3x - 4.5x^2 + 9x^3.$$

**בשלב בשני של ההוכחה**, נשתמש בנוסחת השארית  $R_3(x)$  בצורה של Lagrange:

$$f(x) = \ln(1+3x) = T_3(x) + R_3(x) = (3x - 4.5x^2 + 9x^3) + R_3(x), \quad R_3(x) = \frac{(f^{(4)}(c))}{4!}x^4,$$

כאשר  $0 \leq c \leq x \leq \frac{1}{6}$ .

$$\left| \ln(1+3x) - (3x - 4.5x^2 + 9x^3) \right| = |R_3(x)| \leq \frac{1}{64} \quad \text{לכן צריך להוכיח שלכל } 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \text{ מתקיים:}$$

נשאר לבצע את הערכת השגיאה:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \right| = \left| \frac{(-6) \cdot 81(1+3c)^{-4}}{24}x^4 \right| = \frac{81}{4} \cdot \frac{1}{(1+3c)^4} \cdot x^4 \leq \frac{81}{4} \cdot \frac{1}{(1+3 \cdot 0)^4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{81}{4 \cdot 6^4} = \frac{1}{64}$$

**פתרון 3ב:**

נמצא את ערך האינטגרל  $I$  לפי משפט היסודי של חדו"א (משפט Newton-Leibnitz).

הפונקציה הקדומה של  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{4x} + 5e^{2x} + 4}$  שווה ל-

$$F(x) = \int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 5e^{2x} + 4} = \left[ \begin{array}{l} t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x} dx \end{array} \right] = 0.5 \int \frac{dt}{t^2 + 5t + 4} = 0.5 \int \frac{dt}{(t+1)(t+4)}$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+4}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים. על ידי השוואת מקדמים נקבל כי:  $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}$  (נמקו !)

$$\frac{1}{(t+1)(t+4)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4} \right) \quad \text{לכן}$$

$$0.5 \int \frac{dt}{(t+1)(t+4)} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t+4} = \frac{\ln|t+1|}{6} - \frac{\ln|t+4|}{6} + C = \frac{1}{6} \ln(e^{2x} + 1) - \frac{1}{6} \ln(e^{2x} + 4) + C$$

נשאר להפעיל את משפט Newton-Leibnitz. נסיק ש-

$$\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 5e^{2x} + 4} = [\text{Newton - Leibnitz}] = F(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} \left( \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^{2x} + 4) \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} \ln \frac{5(e^2 + 1)}{2(e^2 + 4)}.$$



**פתרון 4א:**

1.

נניח בשלילה שקיים  $x_1 \neq x_2$  כך ש  $f(x_1) = f(x_2)$ .

בגלל ש  $f$  גזירה לכל הממשיים היא גם רציפה לכל הממשיים ואפשר להשתמש במשפט Rolle רול.

אז קיים נקודה  $c$  כך ש  $f'(c) = 0$ .

אבל זה סתירה לנתון, לכן  $f$  חח"ע.

2.

הטענה לא נכונה !

דוגמא נגדית :

$f(x) = x^3$  פונקציה חח"ע ב- $\mathbf{R}$ , אבל הנגזרת שלה מתאפסת עבור  $x = 0$ .

**פתרון ב4:**

נשים לב שהפונקציות  $f(x) = \frac{1}{|x|-3}$ ,  $g(x) = 1-|x|$  זוגיות כי מתקיים:

$$g(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = g(x), f(-x) = \frac{1}{|-x|-3} = \frac{1}{|x|-3} = f(x)$$

אז התחום שחסום על-ידי שני הגרפים סימטרי ביחס לציר ה-Y, ולכן מספיק לחשב את השטח בתחום, בו  $x \geq 0$ , ובסוף נכפול אותו ב-2.

$$\text{בתחום } x \geq 0 \text{ מתקיים } g(x) = 1-x, f(x) = \frac{1}{x-3}$$

נמצא את נקודות חיתוך בין  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

$$\frac{1}{x-3} = 1-x \text{ או } 1 = x - x^2 - 3 + 3x \text{ ואז } x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ ואז } x = 2$$

ברור ש- $g(x) \geq f(x)$  לכל  $-2 \leq x \leq 2$ . (נמקו!)

לכן מצד ימין של ציר ה-Y השטח הוא  $\int_0^2 (g(x) - f(x)) dx$ , וז"א

$$\int_0^2 \left( (1-x) - \frac{1}{x-3} \right) dx = \left( x - \frac{x^2}{2} - \ln|x-3| \right) \Big|_0^2 = 2 - \frac{2^2}{2} - \ln|2-3| - \left( 0 - \frac{0^2}{2} - \ln|0-3| \right) = \ln 3$$

ולכן השטח כולו הוא  $2 \ln 3$ .



$f$  בעלת 4 נגזרות רציפות בקטע  $[-a, a]$ . נרשום פיתוח Maclaurin מקלורן מסדר 3 של  $f$ :

$$f(0) = 3, f'(0) = 0, f''(0) = 4, f'''(0) = 0$$

$$f(x) = T_3(x) + R_3(x) = 3 + 0 \cdot x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \quad |c| < |x| \leq a$$

$$f(x) = T_3(x) + R_3(x) = 3 + 2x^2 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \quad |c| < |x| \leq a$$

$$f(x) - 3 - 2x^2 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \quad |c| < |x| \leq a$$

לפי הנתון  $f^{(4)}(x)$  רציפה בקטע  $[-a, a]$ . לכן, לפי משפט Weierstrass ווירשטראס,

$f^{(4)}(x)$  חסומה בקטע חסום וסגור  $[-a, a]$ , כלומר קיים קבוע  $A \in \mathbf{R}$  כך ש:

$$|f^{(4)}(x)| \leq A, \forall x \in [-a, a]$$

מכאן שקיים קבוע  $M \in \mathbf{R}$  כך ש:

$$|f(x) - 3 - 2x^2| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \right| \leq \frac{A}{4!}x^4 \leq Mx^4 \iff |x| \leq a$$

אם  $a_n$  סדרה חסומה, כלומר קיימים  $\alpha, \beta$  כך ש-  $a_n \in [\alpha, \beta]$ , לכל  $n$  טבעי.

הפונקציה  $f$  רציפה, ולכן לפי משפט Weierstrass ווירשטראס היא חסומה על כל קטע סגור וחסום, כלומר קיים  $M > 0$  כך ש שלכל  $x \in [\alpha, \beta]$  מתקיים  $|f(x)| \leq M$  ובפרט הסדרה  $f(a_n)$  חסומה על ידי  $\pm M$ .

---



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_{\sqrt{x}}^1 2e^{t^2} dt + e^x - e}{2 \sin(x-1) - x^2 + 1} &= \left[ \frac{0}{0} \right]^{(L' Hopital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} \left[ \int_{\sqrt{x}}^1 2e^{t^2} dt + e^x - e \right]}{\frac{d}{dx} [2 \sin(x-1) - x^2 + 1]} = (Newton - Leibnitz) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2e^{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x}{2 \cos(x-1) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x}{2 \cos(x-1) - 2x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x \cdot (x)^{-1/2} + e^x}{2 \cos(x-1) - 2x} \\ &\stackrel{(L' Hopital)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x \cdot (x)^{-1/2} - e^x(-0.5)(x)^{-3/2} + e^x}{-2 \sin(x-1) - 2} = \frac{-e - e(-0.5) + e}{-2} = -\frac{e}{4} \end{aligned}$$

**פתרון 6:**

נתון  $a \neq b$ . ניתן להניח ש- $a < b$ . נגדיר  $f(x) = 2x + \cos(3x)$ . אזי  $f'(x) = 2 - 3\sin(3x)$ . פונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , וגזירה בקטע  $(a, b)$ , לכן משפט Lagrange גורר שקיימת נקודה  $c \in (a, b)$  כך ש:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{2b + \cos(3b) - 2a - \cos(3a)}{b - a} = 2 - 3\sin(3c)$$

מאחר ו- $|\sin(3c)| \leq 1$ , מקבלים  $|f'(c)| = |2 - 3\sin(3c)| \leq 2 + 3 = 5$  ולכן

$$\left| \frac{2b + \cos(3b) - 2a - \cos(3a)}{b - a} \right| \leq 5$$

מזה נובע אי שוויון

$$|2b + \cos(3b) - 2a - \cos(3a)| \leq 5|b - a|,$$

ז"א

$$|2a - \cos(3b) + \cos(3a) - 2b| \leq 5|a - b|, \text{ מ.ש.ל.}$$

**הערה:**

באופן כללי, אם  $f(x)$  היא פונקציה גזירה בקטע מסוים  $I$  ומתקיים  $|f'(x)| \leq M$  לכל  $x \in I$ ,

אזי  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$  לכל  $x_1, x_2 \in I$ .