# פתרונות לתרגיל בית 8 – יחסי שקילות

ד"ר אפרת בנק, ד"ר ולדימיר בר לוקיאנוב

1. נגדיר יחס $T$ מעל הממשיים $\mathbb{R}$ באופן הבא

$$xTy \iff x-y\in\mathbb{Z}$$

(א) תנו דוגמא לשני איברים שאינם ביחס ולשני איברים הנמצאים ביחס.

(ב) בידקו כי היחס $T$ הוא יחס שקילות.

(ג) מיצאו את מחלקות השקילות $[0]_T, [1.6]_T$

(ד) האם נכון כי $[0]_T\cap[1.6]_T=\emptyset$?

(ה) הראו כי הקטע הממשי $[0,1)$ מהווה מערכת של נציגים עבור $T$.

(ו) האם קבוצת המנה שווה ל - $\{[x]_T\,|2\leq x<3\}$?

**פתרון**

(א) $(3.2,-1.8)\in T$ מכיוון ש - $3.2-(-1.8)=5\in\mathbb{Z}$.
$(-4,1.5)\notin T$ מכיוונ ש - $-4-1.5=-5.5\notin\mathbb{Z}$.

(ב) **רפלקסיבי:** לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x-x=0\in\mathbb{Z}$, לכן $(x,x)\in T$.
**סימטרי:** יהי $(x,y)\in T$, כלומר $x-y\in\mathbb{Z}$. גם $y-x=-(x-y)\in\mathbb{Z}$ ולכן $(y,x)\in T$.
**טרנזיטיבי:** יהיו $(x,y)\in T$ ו - $(y,z)\in T$, כלומר $x-y\in\mathbb{Z}$ וגם $y-z\in\mathbb{Z}$. לכן גם הסכום $(x-y)+(y-z)=x-z\in\mathbb{Z}$, כלומר $(x,z)\in T$.
$T$ יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, לכן $T$ יחס שקילות.

(ג) מתקיים:

$$\begin{aligned}
[1.6]_T &= \{x\in\mathbb{R}\mid(x,1.6)\in T\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x-1.6\in\mathbb{Z}\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x=k+1.6,\,k\in\mathbb{Z}\}=\\
&=\{k+1.6\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{...,-3.4,-2.4,-1.4,-0.4,0.6,1.6,2.6,3.6,4.6,...\}\\
[0]_T &= \{x\in\mathbb{R}\mid(x,0)\in T\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x-0\in\mathbb{Z}\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x=k+0,\,k\in\mathbb{Z}\}=\\
&=\{k\mid k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(ד) הטענה נכונה. אפשר לראות את זה באופן מפורש מהסעיף הקודם, ואפשר לציין כי $(0,1.6)\notin T$, לכן $[0]_T\cap[1.6]_T=\emptyset$.

(ה) יהי $x\in\mathbb{R}$. מתקיים $x=\lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)$, כאשר $\lfloor x\rfloor$ הוא החלק השלם התחתון של $x$. (לדוגמה: $\lfloor 3.8\rfloor=3$, $\lfloor -1.2\rfloor=-2$)
כמו כן $x-\lfloor x\rfloor\in[0,1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ולכן $(x,x-\lfloor x\rfloor)\in T$. הראינו כי כל $x\in\mathbb{R}$ מיוצג על ידי מספר $x-\lfloor x\rfloor\in[0,1)$.
נראה גם כי הנציגים אינם תלוים. לכל $a,b\in[0,1)$ שונים מתקיים: $0<|a-b|<1$, כלומר $a-b\notin\mathbb{Z}$ ולכן $(a,b)\notin T$.
הראינו כי כל מספר ממשי מיוצג על ידי מספר מקטע $[0,1)$ באופן יחיד. מ.ש.ל.

(ו) הקטע $[2,3)$ מהווה מערכת נציגים עבור היחס $T$. (כמו בסעיף הקודם מתקיים: $(x,\underbrace{2+x-\lfloor x\rfloor}_{\in[2,3)})\in T$).

לכן $\mathbb{R}/T=\{[x]_T\,|2\leq x<3\}$ קבוצת המנה.

2. תהא $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ונגדיר יחס שקילות $S$ באופן הבא

$$(a_1,b_1)S(a_2,b_2) \iff a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2$$

שימו לב כי הזוגות שביחס $S$ הן נקודות במישור.

(א) תנו דוגמא לשני איברים שאינם ביחס ולשני איברים הנמצאים ביחס.

(ב) ציירו את מחלקות השקילות הבאות $[(1,0)]_S,\ [(1,1)]_S\ ,\ [(3,4)]_S$.

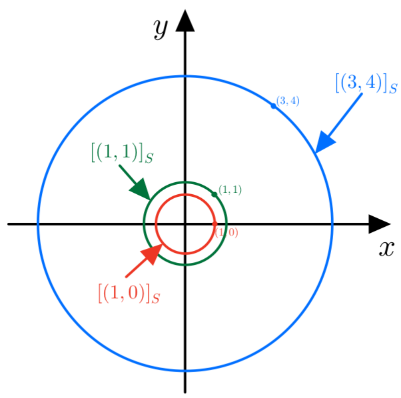
(ג) כיתבו במפורש את האיברים הנמצאים במחלקת השקילות $[(1,0)]_S$.

(ד) מצאו מערכת של נציגים עבור $S$.

**פתרון**

(א) $\left((1,2),(\sqrt{2},\sqrt{3})\right)\in S$ מכיוון ש - $1^2+2^2=5=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2$.
$\left((2,3),(1,4)\right)\notin S$ מכיוון ש - $2^2+3^2\neq 1^2+4^2$.

(ב) $[(3,4)]_S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=3^2+4^2=25\right\}$ - מעגל בעל רדיוס 5 ומרכז ב - $(0,0)$.
באופן דומה:
$[(1,1)]_S$– מעגל בעל רדיוס $\sqrt{2}$ ומרכז ב - $(0,0)$.
$[(1,0)]_S$– מעגל בעל רדיוס 1 ומרכז ב - $(0,0)$.




(ג) מתקיים $[(1,0)]_S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1^2+0^2=1\right\}=\left\{\left(x,\pm\sqrt{1-x^2}\right) \mid x\in[-1,1]\right\}$.

(ד) כפי שראינו מחלקות שקילות שונות הן מעגלים עם רדיוסים שונים ומרכז ב - $(0,0)$. לכן מערכת הנציגים היא קבוצת הנקודות המתאימה לערכים האפשריים לרדיוס. אפשר לבחור למשל $\{(r,0) \mid 0\leq r\in\mathbb{R}\}$. כל נקודה מהקבוצה הזאת מייצגת מעגל בעל רדיוס $r$ עם מרכז ב - $(0,0)$.

3. נגדיר יחס $R$ מעל הטבעיים $\mathbb{N}$ באופן הבא

$$(n,m)\in R \iff (4 \mid |n-m| \vee 2\nmid nm)$$

כלומר, הזוג $(n,m)\in R$ אם ההפרש (בערך מוחלט) $|n-m|$ מתחלק במספר 4 ללא שארית או המספר $nm$ אינו מתחלק ב 2 ללא שארית.

(א) תנו דוגמא לשני איברים שאינם ביחס ולשני איברים הנמצאים ביחס.

(ב) הראו כי $R$ הוא יחס שקילות.

(ג) מצאו את מחלקות השקילות הבאות: $[4]_R,[1]_R,[2]_R$

(ד) כמה איברים יש בקבוצת המנה? כיתבו אותם.

**פתרון**

(א) $(2,6)\in R$ מכיוון ש - $|2-6|=4$ מתחלק ב - 4.
$(3,6)\notin R$ מכיוון ש - $|3-6|=3$לא מתחלק ב - 4 וגם $3\cdot 6=18$ מתחלק ב - 2.

(ב) **רפלקסיבי:** לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|n-n|=0$ מתחלק ב - 4, לכן $(n,n) \in R$
**סימטרי:** יהי $(n,m) \in R$, כלומר $4 \mid |n-m| \vee 2 \nmid nm$. מכיוון ש - $|m-n|=|n-m|$ וגם $mn=nm$ מסיקים כי $4 \mid |m-n| \vee 2 \nmid mn$ גם כן, ולכן $(m,n) \in R$.
**טרנזיטיבי:** יהיו $(n,m) \in R$ ו - $(m,k) \in R$, כלומר $4 \mid |n-m| \vee 2 \nmid nm$ וגם $4 \mid |m-k| \vee 2 \nmid mk$.
אם $4 \mid |n-m|$ וגם $4 \mid |m-k|$, אז $n-m=4l_1$ וגם $m-k=4l_2$, כאשר $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$. מכאן $n-k=(n-m)+(m-k)=4(l_1+l_2)$, כלומר $4 \mid |n-k|$ ולכן $(n,k) \in R$.
אם $4 \mid |n-m|$ וגם $2 \nmid mk$, אז $2 \nmid m$ וגם $2 \nmid k$ וגם $2 \nmid n$ (אחרת $4 \nmid |n-m|$, כי $n-m$ יוצא אי זוגי). לכן $2 \nmid nk$ ומכאן $(n,k) \in R$.
אם $4 \mid |m-k|$ וגם $2 \nmid nm$, באופן דומה למקרה הקודם $(n,k) \in R$.
אם $2 \nmid nm$ וגם $2 \nmid mk$, אז $2 \nmid n$ וגם $2 \nmid m$ וגם $2 \nmid k$. לכן $2 \nmid nk$ ומכאן $(n,k) \in R$.
$R$ יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, לכן $R$ יחס שקילות.

(ג) מתקיים:

$$\begin{aligned}
[2]_R &= \{m \in \mathbb{N} \mid (m,2) \in R\} = \{m \in \mathbb{N} \mid 4 \mid |m-2| \vee 2 \nmid 2m\} = \{m \in \mathbb{N} \mid 4 \mid |m-2|\} = \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid |m-2| = 4k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m = 2 \pm 4k,\ k \in \mathbb{N}\} = \\
&= \{2+4k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2,6,10,14,18,22,...\} \\
[1]_R &= \{m \in \mathbb{N} \mid (m,1) \in R\} = \{m \in \mathbb{N} \mid 4 \mid |m-1| \vee 2 \nmid m\} = \{m \in \mathbb{N} \mid 4 \mid |m-1| \vee m\, is\, odd\} = \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid m = 1 \pm 4k,\ k \in \mathbb{N} \vee m\, is\, odd\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m\, is\, odd\} = \{1,3,5,7,9,...\} \\
[4]_R &= \{m \in \mathbb{N} \mid (m,4) \in R\} = \{m \in \mathbb{N} \mid 4 \mid |m-4| \vee 2 \nmid 4m\} = \{m \in \mathbb{N} \mid 4 \mid |m-4|\} = \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid |m-4| = 4k,\ k \in \mathbb{N}\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m = 4 \pm 4k,\ k \in \mathbb{N}\} = \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid m = 4(1 \pm k),\ k \in \mathbb{N}\} = \{0,4,8,12,16,...\}
\end{aligned}$$

(ד) בסעיף הקודם קיבלנו 3 מחלקות שקילות שונות, כך שהאיחוד שלהן נותן את כל הקבוצה $\mathbb{N}$. זה אומר שאין מחלקות שקילות שונות נוספות, ולכן בקבוצת המנה יש רק 3 איברים: $\mathbb{N}/R = \{[1]_R, [2]_R, [4]_R\}$.

4. תהא $A$ קבוצה לא ריקה כלשהיא. יהא $R$ יחס על $A$ שהוא סימטרי וטרנזיטיבי. נניח כי בנוסף מתקיים הפסוק הבא

$$\forall a \in A \exists b \in A.(a,b) \in R$$

הוכיחו כי $R$ הוא יחס שקילות על $A$.

**פתרון**
מספיק להוכיח כי $R$ רפלקסיבי.
יהי $a \in A$. לפי הנתון קיים $b \in A$, כך ש - $(a,b) \in R$.
מסימטריות של $R$ מקבלים כי גם $(b,a) \in R$.
מטרנזיטיביות של $R$ והעובדה ש - $(a,b) \in R$ וגם $(b,a) \in R$ מקבלים כי $(a,a) \in R$, שזה מוכיח את הרפלקסיביות.

5. תהא $A$ קבוצה סופית לא ריקה. נגדיר יחס $S$ על קבוצת החזקה $P(A)$ באופן הבא:

$$(X,Y) \in S \iff |X| = |Y|$$

ודאו כי $S$ הוא יחס שקילות. כמה איברים יש בקבוצת המנה?

**פתרון**
**רפלקסיבי:** לכל $X \in P(A)$ מתקיים $|X|=|X|$, לכן $(X,X) \in S$.
**סימטרי:** יהי $(X,Y) \in S$, כלומר $|X|=|Y|$. כמובן גם $|Y|=|X|$ ולכן $(Y,X) \in S$.
**טרנזיטיבי:** יהיו $(X,Y) \in S$ ו - $(Y,Z) \in S$, כלומר $|X|=|Y|$ וגם $|Y|=|Z|$. לכן $|X|=|Z|$, כלומר $(X,Z) \in S$.
$S$ יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, לכן $S$ יחס שקילות.
נניח כי $|A|=n$, אז יש ב $A$ תת קבוצות בכל גודל מ - 0 עד $n$. לכל גודל כזה מתאימה מחלקת שקילות יחידה. מכאן מסיקים כי בקבוצת המנה יש $n+1$ איברים.

6. תהא $A=\mathbb{R}$. לכל $i\in\mathbb{Z}$ נגדיר את הקבוצה $A_i$ באופן הבא

$$A_i=\{x\in\mathbb{R}|i\leq x<i+1\}$$

(א) הראו כי אוסף הקבוצות $\{A_i\}$ מהווה חלוקה של $A$.

(ב) מיצאו יחס שקילות $S$ על $A$ כך שהקבוצות $\{A_i\}$ הן בדיוק מחלקות השקילות של $S$.

(ג) הסבירו את המשפט הבא: תהא $A$ קבוצה סופית בת $n$ איברים. אז מספר יחסי השקילות השונים על $A$ שווה למספר הדרכים לחלק $n$ איברים לקבוצות זרות ולא ריקות.

**פתרון**

(א) לכל $i\neq j$ מתקיים $A_i\cap A_j=\emptyset$, כי הקטעים $[i,i+1)$ ו - $[j,j+1)$ הינם זרים. בנוסף $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}A_i=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}[i,i+1)=\mathbb{R}$. זה מוכיח את הנדרש.

(ב) היחס המבוקש הינו: $(x,y)\in S\longleftrightarrow\exists i\in\mathbb{Z}.\,x,y\in A_i$.
**רפלקסיבי**: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x\in A_i$ עבור $i\in\mathbb{Z}$ מסוים, לכן $(x,x)\in S$.
**סימטרי**: יהי $(x,y)\in S$, כלומר $x,y\in A_i$ עבור $i\in\mathbb{Z}$ מסוים. זה גם מבטיח כי - $(y,x)\in S$.
**טרנזיטיבי**: יהיו $(x,y)\in S$ ו - $(y,z)\in S$, כלומר $x,y\in A_i$ עבור $i\in\mathbb{Z}$ מסוים ו - $y,z\in A_j$ עבור $j\in\mathbb{Z}$ מסוים. מכאן $y\in A_i\cap A_j$, כלומר $A_i\cap A_j\neq\emptyset$. זה גורר $i=j$, ולכן $x,y,z\in A_i$, כלומר $(x,z)\in S$.
$S$ יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, לכן $S$ יחס שקילות.
לכל $x\in\mathbb{R}$. קיים $i\in\mathbb{Z}$, כך ש - $x\in A_i$, לכן

$$[x]_R=\{y\in\mathbb{R}\mid x,y\in A_i\}=\{y\in\mathbb{R}\mid y\in A_i\}=A_i$$

כלומר מחלקות השקילות עבור $S$ הן הקבוצות $A_i$.

(ג) לכל חלוקה של $A$ לתת קבוצות זרות לא ריקות נוכל לבנות יחס שקילות כמו בסעיף הקודם. מחלקות השקילות של היחס הן קבוצות החלוקה, כלומר החלוקה מגדירה יחס שקילות באופן יחיד. כמו כן, לכל יחס שקילות על $A$, מחלקות השקילות השונות עבורו מהוות חלוקה מסויימת )יחידה( של $A$. זה מוכיח כי לכל חלוקה של $A$ מתאים יחס שקילות יחיד על $A$ ולהיפך. לכן מספר יחסי שקילות על $A$ שווה למספר החלוקות של $A$ לקבוצות זרות לא ריקות.