שאלה 1

1. **(15 נק')** נתונה מערכת משוואות $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 5x+6y+7z=8 \\ ax+by+cz=d \end{cases}$. מצאו תנאים על הפרמטרים $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך שלמערכת יהיה

(א) פתרון יחיד

(ב) אפס פתרונות

(ג) אינסוף פתרונות

פתרון : נבנה את מטריצת המערכת ונדרגה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & c & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & b-2a & c-3a & d-4a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & b-2a & c-3a & d-4a \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-2b+c & 2a-3b+d \end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת. בשתי השורות הראשונות ישנו איבר מוביל. בשורה השלישית ישנו איבר מוביל כאשר $a-2b+c\neq 0$. ולכן אם $a-2b+c\neq 0$ למערכת קיים פתרון יחיד.

אם $a-2b+c=0$ ו־ $2a-3b+d\neq 0$ אז מתקבלת סתירה בשורה השלישית ובמקרה הזה אין אף פתרון למערכת.

אם $a-2b+c=2a-3b+d=0$ אז העמודה השלישית מייצגת משתנה חופשי, ואין שורות סתירה, ולכן למערכת ישנם אינסוף פתרונות.

2. **(5 נק')** נתונים זוג פתרונות $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ למערכת $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$ כאשר $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ו־ $\vec{b}\in\mathbb{R}^2$. נתון גם ש־ A היא מטריצה סינגולרית שאינה מטריצת האפס. רשמו פתרון כללי למערכת.

פתרון : דרגת המטריצה היא 1 ולכן במערכת ישנו משתנה מוביל אחד, ובפרט גם משתנה חופשי יחיד. כלומר פתרון כללי למערכת יהיה מהצורה $\vec{w_1}+t\cdot\vec{w_2}$. כאשר $\vec{w_1}$הוא אחד מפתרונות המערכת הלא־הומוגנית, ואילו $\vec{w_2}$הוא פתרון למערכת ההומוגנית המתאימה. כדי למצוא פתרון למערכת ההומוגנית המתאימה עלינו לחסר שני פתרונות של המערכת הלא־הומוגנית זה מזה. ולכן הפתרון הכללי יהיה $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\}$.

שאלה 2

1. **(15 נק')** יהיו $U=\left\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot A\right\}$ ו־ $V=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A^t=A\}$ זוג תתי־מרחבים של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(א) מצאו בסיס ומימד ל־ U ול־ V .

פתרון : תהי $U \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$ מכאן כי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$.

נסיק כי $\begin{cases} a+3b=a+2c \\ 2a+4b=b+2d \\ c+3d=3a+4c \\ 2c+4d=3b+4d \end{cases}$. כלומר $\begin{cases} 3b-2c=0 \\ 2a+3b-2d=0 \\ 3a+3c-3d=0 \\ 3b-2c=0 \end{cases}$.

נבנה את מטריצת המערכת ונדרגה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

נסיק כי $U = \left\{ \begin{pmatrix} d-c & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix} \right\} = Sp\left\{ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

קל לראות שזוג המטריצות בת"ל ולכן מהוות בסיס ל- U ומימדו 2.

באופן דומה אם $V \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$ אז $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t$.

נסיק כי $\begin{cases} a=a \\ b=c \\ c=b \\ d=d \end{cases}$. ולכן $Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \right\} = V$.

שוב קיבלנו קבוצה בת"ל ולכן היא מהווה בסיס ל-V ומימדו 3.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל- $U+V$ ול- $U \cap V$.

פתרון : $U+V = Sp\left\{ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

נבנה מטריצה שבה וקטורי הקואורדינטות של חמשת המטריצות ביחס לבסיס הסטנדרטי רשומים כשורות, ונדרג אותה. השורות שלא מתאפסות בתום הדירוג הן וקטורי קואורדינטות של קבוצה בת"ל אשר פורשת את הסכום, ולכן וקטורי קואורדינטות של בסיס.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

בבסיס יהיו ארבע מטריצות, לכן מימדו 4, ומכיוון שמרחב המטריצות כולו ממימד 4 נסיק כי $U+V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, וניתן לבחור בבסיס הסטנדרטי.

כעת נחפש מטריצה בחיתוך $U \cap V$. היא בודאי תהיה סימטרית, ולכן מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

ומצד שני קיימים $x, y \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+y & 2x \\ 0 & 3x+y \end{pmatrix}$$

נסיק כי $b=0$ ולכן גם $x=0$. ומכאן כי בחיתוך ישנן רק מטריצות סקלריות, כלומר $U \cap V = Sp\{I_2\}$, ומימד החיתוך הינו 1.

2. **(5 נק')** הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית : אם U תת־מרחב של מרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$. אז קיים תת־מרחב נוסף **יחיד** $W \subseteq \mathbb{R}^2$ שעבורו $U+W = \mathbb{R}^2$ וגם $U \cap W = \emptyset$.

פתרון : הטענה אינה נכונה. נקח למשל $U = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ו- $V = \mathbb{R}^2$.

נבחר $W_1 = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ו- $W_2 = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. ודאי ש- $U \cap W_1 = U \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ וכן $U + W_1 = U + W_2 = \mathbb{R}^2$. אבל $W_1 \neq W_2$.

שאלה 3

1. **(20 נק')** נתונה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}_3[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ אשר מקיימת את התנאים הבאים :

- $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $T\left(1+x+x^2+x^3\right)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
- $T\left(x+x^3\right)=T\left(x-x^3\right)$
- $T\left(1+x^2\right)=-T\left(1-x^2\right)$

(א) הראו שגם הגרעין וגם התמונה של ההעתקה הלינארית T הם ממימד 2.

(ב) מצאו בסיסים לגרעין ולתמונת ההעתקה הלינארית T .

(ג) מצאו את מטריצת הייצוג של ההעתקה הלינארית T ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}_3[x]$ ושל $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

<u>פתרון</u> : לפי הנתונים $\vec{0}=T\left(x+x^3\right)-T\left(x-x^3\right)=T\left(\left(x+x^3\right)-\left(x-x^3\right)\right)=T\left(2x^3\right)$ ולכן $2x^3\in Ker\left(T\right)$.

כמו־כן $\vec{0}=T\left(1+x^2\right)+T\left(1-x^2\right)=T\left(\left(1+x^2\right)+\left(1-x^2\right)\right)=T\left(2\right)$ ולכן גם $2\in Ker\left(T\right)$.

מכיוון שהפולינומים $2,2x^3$ בת"ל נוכל להסיק כי $dim\left(Ker\left(T\right)\right)\geq 2$.

מצד שני אנו יודעים ש־ $dim\left(Ker\left(T\right)\right)+dim\left(Im\left(T\right)\right)=dim\left(\mathbb{R}_3\left[x\right]\right)=4$ ולכן נסיק כי $dim\left(Im\left(T\right)\right)\leq 2$.

מהנתונים נוכל להסיק גם ש־ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ הן זוג מטריצות בת"ל בתמונה של T, ולכן בהכרח $dim\left(Im\left(T\right)\right)\geq 2$.

כלומר, $dim\left(Im\left(T\right)\right)=dim\left(Ker\left(T\right)\right)=2$ וכן $\left\{2,2x^3\right\}$ בסיס לגרעין ו־ $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס לתמונה.

לבסוף נבנה את מטריצת הייצוג ביחס לבסיסים הסטנדרטיים. אנו יודעים כי $1,x^3\in Ker\left(T\right)$ ולכן $T\left(1\right)=T\left(x^3\right)=0$.

$T\left(x\right)$ נתון לנו, ונותר לחשב את $T\left(x^2\right)=T\left(1+x+x^2+x^3-1-x-x^3\right)=T\left(1+x+x^2+x^3\right)-T\left(1\right)-$
$T\left(x\right)-T\left(x^3\right)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

ולסיכום $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\left[T\right]_E^E$.

שאלה 4

1. **(10 נק')** חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u> : נחשב את הדטרמיננטה בעזרת פעולות שורה ועמודה אלמנטריות

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \end{pmatrix} = 15\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \; 15\cdot det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & -3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 15\cdot det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5\\ -5 & -5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \; 5\cdot 15\cdot det\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5\\ -5 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix} = 5^2\cdot 15\cdot det\begin{pmatrix} 5 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix} = 5^3\cdot 15 = 3\cdot 5^4$$

1. **(10 נק')** הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית את הטענות הבאות :

(א) אם A,B,C שלוש מטריצות מגודל 2×2 אשר מקיימות $AB=BA$ וגם $BC=CB$ אז $ABC=CBA$.

פתרון : הטענה אינה נכונה. נקח למשל $B=I_2$ וודאי כי B מתחלפת עם כל מטריצה ובפרט עם A ועם C.

בנוסף נקח $A=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ואת $C=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

נחשב $A\cdot B\cdot C = A\cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ וגם $C\cdot B\cdot A = C\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot$ $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

(ב) אם A,B זוג מטריצות דומות מגודל 2×2 אז A הפיכה אם"ם B הפיכה.

תזכורת : A,B דומות אם קיימת P הפיכה כך ש- $A=PBP^{-1}$.

פתרון : נעזר בכפליות הדטרמיננטה $det\left(A\right)=det\left(PBP^{-1}\right)=det\left(P\right)\cdot det\left(B\right)\cdot det\left(P\right)^{-1}=det\left(B\right)$.
כלומר, הדטרמיננטות זהות למטריצות דומות.

היות ומטריצה הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שלה שונה מאפס, נקבל שמטריצות דומות הן הפיכות יחד או שאינן הפיכות יחד.

שאלה 5

1. **(15 נק')** מצאו לאלו ערכים של הפרמטרים $a\in\mathbb{R}$ המטריצה $\begin{pmatrix} a & a & 1\\ a & 1 & a\\ 1 & a & a\end{pmatrix}$ לכסינה.

פתרון : נחשב את הפולינום האופייני של המטריצה.

$$det\begin{pmatrix} \lambda-a & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -a\\ -1 & -a & \lambda-a\end{pmatrix} \; = \; det\begin{pmatrix} \lambda-a & -a & a-1-\lambda\\ -a & \lambda-1 & 0\\ -1 & -a & \lambda-a+b\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} \lambda-a-1 & -2a & 0\\ -a & \lambda-1 & 0\\ -1 & -a & \lambda-a+1\end{pmatrix}$$

$$= \; (\lambda-a+1)\cdot det\begin{pmatrix} \lambda-a-1 & -2a\\ -a & \lambda-1\end{pmatrix}$$

$$= \; (\lambda-a+1)\cdot\left[(\lambda-a-1)(\lambda-1)-2a^2\right] = (\lambda-a+1)(\lambda-2a-1)(\lambda+a-1)$$

מצאנו שלושה ע"ע $\lambda_1=a-1, \lambda_2=1-a, \lambda_3=2a+1$.

אם $a=1$ נקבל $\lambda_1=\lambda_2=0$ ולכן נחשב את המ"ע V_0 במקרה זה.

$V_0=Ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=Ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ והריבוי הגיאומטרי יהיה 2.

נסיק כי כאשר $a=1$ למטריצה יש שני ע"ע, ולשניהם הריבוי האלגברי והגיאומטרי זהים, והמטריצה לכסינה.

לעומת זאת אם $a=0$ אז 1 הוא ע"ע מריבוי אלגברי 2. נחשב את המ"ע V_1 במקרה זה.
$V_1=Ker\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=Ker\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ נסיק שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע הוא 2, ולכן המטריצה לכסינה גם במקרה זה.

ולבסוף אם $a=-2$ נקבל ש־ -3 הוא ע"ע מריבוי אלגברי 2, ולכן נחשב את המ"ע שמתאים לו במקרה הזה.
$V_{-3}=Ker\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-4&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}=Ker\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ והריבוי הגיאומטרי הוא 2, כריבוי האלגברי, ולכן המטריצה לכסינה במקרה זה.

בכל יתר המקרים ישנם שלושה ע"ע שונים. והמטריצה ודאי לכסינה.

לסיכום המטריצה לכסינה לכל ערך של a.

2. **(5 נק')** הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית את הטענה הבאה : אם $A,B\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מטריצות דומות אז הן שקולות שורה.

<u>תזכורת</u> : A,B דומות אם קיימת P הפיכה כך ש־ $A=PBP^{-1}$.

<u>פתרון</u> : הטענה אינה נכונה. נתבונן לדוגמא במטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ו־ $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. הן ודאי אינן שקולות שורה. אבל שתיהן אלכסוניות עם אותם ע"ע על האלכסון הראשי, ולכן דומות האחת לשניה.

שאלה 6

1. **(5 נק')** יהי $B=\left\{\vec{b_1},\vec{b_2},...,\vec{b_n}\right\}$ בסיס אורתוגונלי למרחב מכפלה פנימית V. הוכיחו שלכל וקטור $\vec{v}\in V$ מתקיים
$$[\vec{v}]_B=\begin{pmatrix}\frac{\langle\vec{v},\vec{b_1}\rangle}{\|\vec{b_1}\|^2}\\\frac{\langle\vec{v},\vec{b_2}\rangle}{\|\vec{b_2}\|^2}\\\vdots\\\frac{\langle\vec{v},\vec{b_n}\rangle}{\|\vec{b_n}\|^2}\end{pmatrix}.$$

<u>פתרון</u> : נציג $\vec{v}=\sum_{k=1}^n\lambda_k\cdot\vec{b_k}$.
עבור $1\le j\le n$ נחשב $\left\langle\vec{v},\vec{b_j}\right\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^n\lambda_k\vec{b_k},\vec{b_j}\right\rangle=\sum_{k=1}^n\lambda_k\underbrace{\left\langle\vec{b_k},\vec{b_j}\right\rangle}_{=0\text{ if } k\neq j}=\lambda_k\cdot\left\|\vec{b_k}\right\|^2$. נסיק כי $\lambda_k=\frac{\langle\vec{v},\vec{b_k}\rangle}{\|\vec{b_k}\|^2}$.

2. **(15 נק')** מצאו בסיס אורתוגונלי ל־ $Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\7\\10\end{pmatrix}\right\}$.

<u>פתרון</u> : נעזר בתהליך גרהם־שמידט.

נבחר $\vec{b_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{b_2}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}-\frac{50}{30}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, וכדי להקל על המשך החישובים נחליף $\vec{b_2}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{70}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, קיבלנו את וקטור האפס ולכן נסיק שהוקטור השלישי הוא צ"ל של שני הוקטורים הראשונים.

לסיכום קיבלנו את הבסיס האורתוגונלי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.