

### אלגברה לינארית

### תרגיל מספר 8 - צירופים לינאריים ותלות לינארית, בסיס ומימד, השלמת בסיס

#### שאלה 1

- נתונים הווקטורים  $v_1 = (2, 4, 6)$ ,  $v_2 = (0, -3, 2)$ ,  $v_3 = (1, 1, 1)$ ,  $v_4 = (2, 3, 4)$ .
- האם  $v_1$  הוא צירוף לינארי של  $v_2, v_3$ ? אם כן כתבו את מקדמי הצירוף.
  - האם  $v_1$  הוא צירוף לינארי של  $v_2, v_3, v_4$ ? אם כן כתבו את מקדמי הצירוף.
  - האם  $v_4$  הוא צירוף לינארי של  $v_1, v_2, v_3$ ? אם כן כתבו את מקדמי הצירוף.
  - האם  $0$  הוא צירוף לינארי של  $v_1, v_2, v_3$ ? אם כן כתבו את מקדמי הצירוף.

#### שאלה 2

- נתונים הפולינומים  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = 1 + x^2$ ,  $p_3(x) = (1 + x)^2$ ,  $p_4(x) = x + x^2$ .  
קבעו לגבי כל אחת מהקבוצות הבאות האם היא תלויה לינארית / בלתי תלויה לינארית:
- |                          |       |                     |      |                     |      |
|--------------------------|-------|---------------------|------|---------------------|------|
| $\{p_2, p_3\}$           | (iii) | $\{p_1, p_3\}$      | (ii) | $\{p_1, p_2\}$      | (i)  |
| $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ | (vi)  | $\{p_1, p_2, p_4\}$ | (v)  | $\{p_1, p_2, p_3\}$ | (iv) |

#### שאלה 3

- נתונות המטריצות  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- האם  $\{A_1, A_2, A_3\}$  בת"ל?
  - האם  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  היא צירוף לינארי של  $\{A_1, A_2, A_3\}$ ?
  - האם  $\{A_1, A_2, A_3\}$  בסיס של  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ?
  - האם  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  בסיס של  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ?

#### שאלה 4

- נתון  $V = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ , כלומר  $2 \times 2$ , מסדר 2, כלומר  $V = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ .
- מצאו קבוצה פורשת של  $V$ .
  - מהו המימד של  $V$ ?
  - הביעו, אם אפשר, את המטריצה  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  כצירוף לינארי של הקבוצה שמצאתם בסעיף א'.

#### שאלה 5

- האם  $\{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1\}$  בסיס של  $P_3(\mathbb{R})$ ?

### שאלה 6 (מבחן)

$$\text{יהי } W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} \text{ תת מרחב וקטורי של } \mathbb{R}^4.$$

- א. קבעו מהו  $\dim W$  בהתאם לערכים השונים של  $\alpha$ .  
ב. עבור אילו ערכים של  $\alpha$  הוקטור  $(1,1,1,1)$  שייך ל- $W$ ?

### שאלה 7

$$\text{נתון } V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ תת מרחב של } M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

- א. מצאו בסיס ומימד של  $V$ .  
ב. השלימו את הבסיס שמצאתם בסעיף קודם לבסיס של  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

### שאלה 8

$$\text{נתונה } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}). \text{ מצאו בסיס ומימד של:}$$

- א. מרחב העמודות של  $A$  (זאת אומרת המרחב הנפרש ע"י וקטורי העמודות).  
ב. מרחב השורות של  $A$  (זאת אומרת המרחב הנפרש ע"י וקטורי השורות).  
ג. מרחב הפתרונות של  $A$  (זאת אומרת מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = \underline{0}$ ).  
ד. השלימו את הבסיסים שמצאתם בסעיפים הקודמים לבסיס של המרחב הרלבנטי.

### שאלה 9 (מבחן)

יהי  $W = \text{Span} \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$  תת מרחב וקטורי של  $P_2(\mathbb{R})$  (מרחב הפולינומים ממעלה 2 לכל היותר), כאשר

$$p_1(x) = -2 + x + 3x^2$$

$$p_2(x) = 6 + 5x - x^2$$

$$p_3(x) = -1 + ax + 2x^2$$

- א. מצאו  $a \in \mathbb{R}$ , כך ש- $\dim W = 3$ .  
ב. האם קיים  $a \in \mathbb{R}$ , כך ש- $\dim W = 1$ ?  
ג. מצאו  $b \in \mathbb{R}$ , כך שהפולינום  $q(x) = b + 13x + 7x^2$  הינו צירוף ליניארי של  $p_1(x)$  ו- $p_2(x)$ .  
ד. מצאו את  $a, b \in \mathbb{R}$ , כך ש- $\dim(\text{Span}\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), q(x)\}) = 2$ . (רמז: כדאי להשתמש בסעיפים קודמים).