

מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{2n} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{12}}{6} - \frac{x^{16}}{8} + \dots$ נסמן ב- D את תחום ההתכנסות של הטור.
 א. (10 נק') מצאו את רדיוס ההתכנסות / תחום ההתכנסות של הטור. האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות? נמקו!

ב. (10 נק') מצאו את סכום הטור $S(x)$ עבור כל x ששייך לתחום ההתכנסות.

מצאו טור Leibniz שמתכנס לאינטגרל $I = \int_0^1 S(x) dx$. נמקו!

שאלה 2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'

א. (10 נק') המישור $3x + 4y + z = 1$ חותך את הגליל $x^2 + y^2 = 25$ במרחב \mathbf{R}^3 .
 מצאו את נקודות החיתוך הנמוכה ביותר (x_1, y_1, z_1) ונקודות החיתוך הגבוהה ביותר (x_2, y_2, z_2) .
 נמקו! הערה: הגובה נמדד לפי פונקציית המטרה $z = 1 - (3x + 4y)$.

ב. (10 נק') נגדיר פונקציה $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי:

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{4x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הוכיחו ש- $\lim_{x \rightarrow 0} F(x, mx) = 0$ לכל $m \in \mathbf{R}$. האם F פונקציה רציפה בנקודה $(0, 0)$? נמקו!

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$, $f = f(x, y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות מסדר 2 רציפות ב- \mathbf{R}^2 ,
 יהי $\mathbf{u} = (a, b)$ וקטור יחידה. נסמן $g(x, y) = D_{\mathbf{u}}(f)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x, y)$ את הנגזרת הכיוונית של $f(x, y)$ בכיוון הוקטור \mathbf{u} בנקודה (x, y) .

א. (10 נק') הראו כי $g(x, y)$ בעלת נגזרת כיוונית בכיוון \mathbf{u} ומתקיים כי

$$D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ב. (10 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

לכל $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ הנגזרת הכיוונית $D_{\mathbf{u}}g(x, y) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(x, y)$ מקסימלית כאשר הוקטור \mathbf{u}

בכיוון הגרדיאנט של $f(x, y)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

במרחב \mathbf{R}^3 נתון גוף G הכלוא על ידי המשטחים: $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

א. (10 נק') ציירו את קיטל הגוף G על המישור (x, y) ובטאו את הגוף הנתון בקואורדינטות גליליות.

ב. (10 נק') חשבו את מסת הגוף בהינתן פונקציית הצפיפות הנקודתית $\rho(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$. נמקו! רמז: $\sin^4 \theta = (1 - \cos^2 \theta)^2 = 1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta$

שאלה 5 (20 נקודות)

לחשב את $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ עבור השדה $\vec{F} = (x + \cos x \sin y, xy + \sin x \cos y)$ כאשר המסילה γ היא החצי העליון של המעגל $x^2 + y^2 = 1$ נגד כוון השעון.

שאלה 6 (20 נקודות)

חשבו את השטף של השדה $\vec{F} = (e^{xy} + xy^2)\vec{i} + (x^2y + e^{xz^2})\vec{j} + \left(\frac{z^3}{3} - zye^{xy} + x^2 + y\right)\vec{k}$ דרך הכיפה S הנתונה על-ידי $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z \geq 0 \end{cases}$, כאשר כיוון הנורמל לכיפה הוא כלפי מעלה. נמקו! הערה: המשטח הנתון S לא סגור.

אסור לתלוש דפים ממחברת הבחינה. תלישת דף אחד או יותר תביא לפסילת הבחינה

בהצלחה!

טורים

תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים.

טור הוא הסכום האינסופי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$.

סדרת סכומים חלקיים היא הסכום הסופי $S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

טור מתכנס אם קיים גבול סופי $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ לסדרת הסכומים החלקיים, ואז סכום

הטור הוא $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. אם הגבול של S_n לא קיים או אינסופי זהו **טור מתבדר**.

תנאי הכרחי להתכנסות טור: אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

תכונות נוספות של טורים:

א. הורדת/הוספת מספר סופי של אברים אינה משפיעה על התכנסות/התבדרות הטור.

ב. אם $c \neq 0$ קבוע, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

ג. אם 2 טורים מתכנסים אז גם סכומם מתכנס: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

טורים חיוביים

* המבחנים להלן מניחים שהטורים הם אי שליליים $a_n, b_n \geq 0$.

* עבור סדרה חיובית, סדרת הסכומים החלקיים S_n היא מונוטונית עולה.

מבחן השוואה ראשון: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים, המקיימים $a_n \leq b_n$

החל ממקום מסוים.

• אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.

• אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה שני: נסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$

• אם $0 < k < \infty$, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד.

• אם $k = 0$, אז $a_n \leq b_n$ ל- n גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.

• אם $k = \infty$, אז $b_n \leq a_n$ ל- n גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.

מבחן דלמבאר: נסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

• אם $L < 1$, אז הטור מתכנס.

• אם $L > 1$, אז הטור מתבדר.

• אם $L = 1$, לא ניתן לדעת.

מבחן קוש: נסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

• אם $L < 1$, אז הטור מתכנס.

• אם $L > 1$, אז הטור מתבדר.

• אם $L = 1$, לא ניתן לדעת.

מבחן אינטגרלי: תהי פונקציה חיובית יורדת בקטע $[k, \infty)$, כך ש-

$a_n = f(n)$. אז הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_k^{\infty} f(x) dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

טורים כלליים

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט**, אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בתנאי**, אם הוא מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

משפט: טור מתכנס בהחלט הינו טור מתכנס.

טור מחליף סימן הוא טור שאיבריו מחליפים סימן לסירוגין: $a_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

משפט לייבניץ: תהי סדרה חיובית יורדת לאפס, אז:

1. הטור מחליף הסימן $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

2. השארית $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ מקיימת: $|S - S_n| = |r_n| < a_{n+1}$.

סדרי גודל: $c \ll (\ln n)^b \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$

כאשר הקבועים מקיימים $a > 1$, $b, c, p > 0$.

נוסחת סטירלינג: $n! \approx \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n}$

טורי חזקות

טור חזקות הינו טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. זהו טור חזקות סביב x_0 .

תחום ההתכנסות: לכל טור קיים מספר $R \geq 0$ שנקרא רדיוס התכנסות הטור, עבורו:

• כאשר $|x - x_0| < R$ טור החזקות מתכנס (בהחלט).

• כאשר $|x - x_0| > R$ טור החזקות מתבדר.

• בקצוות $x_0 \pm R$ בודקים ישירות על ידי הצבה בטור.

משפט Cauchy – Hadamard: את רדיוס ההתכנסות של טור חזקות ניתן למצוא לפי כל אחת מהנוסחאות הבאות:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

* $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ הוא הגבול העליון של הסדרה.

משפט: בתחום ההתכנסות של טור חזקות ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר, גזירה איבר-איבר ולעבור לגבול בנקודה מסוימת איבר-איבר, כלומר:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n dx$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d(x - x_0)^n}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{x \rightarrow c} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c - x_0)^n$$

משפט: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ מתכנס בקטע מסוים לפונקציה $f(x)$,

אז זהו טור טיילור של f בסביבה של x_0 , כלומר מתקיים: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

טורי טיילור יסודיים

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad x \in (-1, 1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad x \in [-1, 1]$$

משפט: אם לפחות אחת מהנגזרות המעורבות מסדר גבוה f_{xy} או f_{yx} קיימת ורציפה

בנקודה, אז גם הנגזרת המעורבת השנייה קיימת ורציפה ומתקיים $f_{xy} = f_{yx}$.

* תוצאה דומה נכונה עבור נגזרות מעורבות מסדר גבוה יותר.

קירוב טיילור: תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית n פעמים בסביבה של (x_0, y_0) , והיה

$x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ אז מתקיים

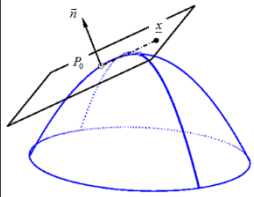
$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + R_n(x_0, y_0)$$

כאשר

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f(x, y)$$

$$R_n(x_0, y_0) = d^{n+1} f(c, d)$$

עבור c בין x_0 לבין x ו- d בין y_0 לבין y .



נורמל ומישור משיק למשטח
* משמעות דיפרנציאביליות - קיום מישור משיק בנקודה.

עבור נקודה P_0 על משטח כלשהו עם נורמל \vec{n} ,

נקודה \underline{x} על המישור המשיק תקיים $\vec{n} \perp (\underline{x} - P_0)$.

ובפרט:

1. משטח נתון בצורה מפורשת $z = f(x, y)$, כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית

בנקודה $P_0(x_0, y_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$-f_x(P_0) \cdot (x - x_0) - f_y(P_0) \cdot (y - y_0) + z - f(x_0, y_0) = 0$$

2. משטח נתון בצורה סתומה $F(x, y, z) = 0$, כאשר F דיפרנציאבילית בנקודה

$P_0(x_0, y_0, z_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n} = \vec{\nabla} F = (F_x, F_y, F_z)$, ומשוואת

המישור המשיק למשטח בנקודה זו:

$$F_x(P_0) \cdot (x - x_0) + F_y(P_0) \cdot (y - y_0) + F_z(P_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

קיצון של פונקציות במספר משתנים

נקודת מינימום מקומי: (x_0, y_0) של f , אם קיימת סביבה של (x_0, y_0) כך שלכל

$$(x, y) \text{ בסביבה זו מתקיים } f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

נקודת מקסימום מקומי: (x_0, y_0) של f , אם קיימת סביבה של (x_0, y_0) כך

$$\text{שלכל } (x, y) \text{ בסביבה זו מתקיים } f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

נקודה קריטית: (x_0, y_0) אם $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$ לא קיים או $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

משפט Fermat: אם (x_0, y_0) נקודת קיצון מקומי של פונקציה $f(x, y)$, אז היא נקודה קריטית.

סיווג נקודות קיצון מקומי:

תהי (x_0, y_0) נקודה חשודה לקיצון. נגדיר

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

• אם $\Delta(x_0, y_0) > 0$, אז (x_0, y_0) נקודת קיצון מקומי:

◦ אם $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ זוהי נקודת מינימום מקומי.

◦ אם $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ זוהי נקודת מקסימום מקומי.

• אם $\Delta(x_0, y_0) < 0$, אז (x_0, y_0) נקודת אוכף (אין קיצון).

נקודת מינימום מוחלט: (x_0, y_0) של f בתחום D , אם לכל $(x, y) \in D$

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

נקודת מקסימום מוחלט: (x_0, y_0) של f בתחום D , אם לכל $(x, y) \in D$

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

תחום קומפקטי: הוא תחום D חסום וסגור.

משפט Weierstrass: פונקציה רציפה $f(x, y)$ בתחום קומפקטי D מקבלת ערך

מינימלי וערך מקסימלי בתוך D , או על השפה של D .

פונקציות במספר משתנים

גבול: אומרים כי מספר L הינו גבול של פונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0)

ורושמים $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל

$$\|f(x, y) - L\| < \varepsilon, 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta.$$

רציפות: פונקציה $f(x, y)$ נקראת רציפה בנקודה (x_0, y_0) אם

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

נגזרות חלקיות מוגדרות ע"י הגבולות:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

גרדיאנט של פונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) הוא וקטור הנגזרות החלקיות של

$$f(x, y) \text{ בנקודה } (x_0, y_0): \vec{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = (f_x, f_y)$$

דיפרנציאביליות: פונקציה $f(x, y)$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) , אם

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) =$$

$$= f(x_0, y_0) + A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + r(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

כאשר $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} r(\Delta x, \Delta y) = 0$.

משפט: אם פונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה, אז בנקודה זו היא רציפה

והנגזרות החלקיות שלה קיימות. נגזרות אלו הן הקבועים מההגדרה, ז"א:

$$A = f_x(x_0, y_0) \quad B = f_y(x_0, y_0)$$

משפט: אם עבור פונקציה $f(x, y)$ הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת

נקודה, אז $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה.

דיפרנציאל: אם פונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) , אז החלק

הליניארי של שינוי הפונקציה נקרא דיפרנציאל, כלומר

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

נגזרת כיוונית של פונקציה $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) בכיוון $\vec{s} = (a, b)$, $\|\vec{s}\| = 1$

(כלומר \vec{s} וקטור יחידה) מוגדרת על ידי הגבול:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

משפט: אם פונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) , $\|\vec{s}\| = 1$, אז

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{s}$$

משפט: הנגזרת הכיוונית של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0)

היא מקסימלית בכיוון הגרדיאנט, ז"א בכיוון $\vec{s} = \vec{\nabla} f(x_0, y_0)$.

משפט: הגרדיאנט של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x, y)$ בנקודה (x_0, y_0) מאונך

לקו גובה של f בנקודה זו.

כלל השרשרת: תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בסביבה של (x_0, y_0) ותהינה

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

כאשר $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$. אז הפונקציה המורכבת

$$f(x(u, v), y(u, v)) \text{ דיפרנציאבילית בסביבה של } (u_0, v_0) \text{ ומתקיים:}$$

$$f_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u \quad f_v = f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v$$

נגזרות מסדר גבוה הן נגזרות חלקיות של נגזרות חלקיות, למשל

$$f_{xx} = (f_x)_x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

החלפת משתנים היא העתקה $(x, y) \rightarrow (u, v)$ המעתיקה את התחום

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \quad \text{ולא מוגדר היעקוביאן}$$

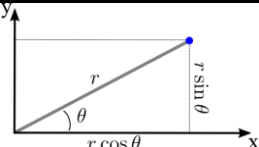
משפט: אם בהחלפת משתנים $J \neq 0$, אז קימת העתקה הופכית $(u, v) \rightarrow (x, y)$

$$J^{-1} = \frac{1}{J} \quad \text{מקיים} \quad J^{-1} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

משפט החלפת משתנים באינטגרל כפול:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

החלפה קוטבית (פולרית) של מעגל:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad J = r, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$


החלפה קוטבית מוכללת של אליפסה:

$$\begin{cases} x = ra \cos \theta \\ y = rb \sin \theta \end{cases}, \quad J = abr, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

החלפת משתנים היא העתקה $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ המעתיקה את התחום

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \quad \text{ולא מוגדר היעקוביאן}$$

הפיכה, קיימת העתקה הופכית, ומתקיים:

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}, \quad J^{-1} = \frac{1}{J}$$

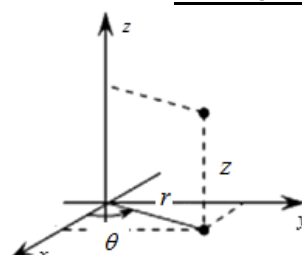
משפט החלפת משתנים באינטגרל משולש:

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x, y, z) dV_{xyz} = \iiint_{G_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| dV_{uvw}$$

החלפה גלילית:

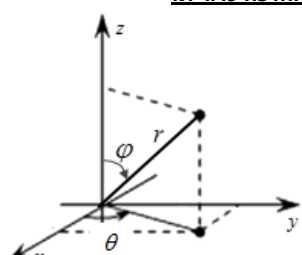
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad J = r$$

r - המרחק מציר z .
 θ - זווית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר x .
 z - מרחק ממשורר xy .
 מתקיים $x^2 + y^2 = r^2$

**החלפה כדורית:**

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \phi \end{cases}, \quad J = r^2 \sin \phi$$

r - המרחק מהראשית.
 θ - זווית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר x .
 ϕ - זווית עם הכיוון החיובי של ציר z .
 מתקיים $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



קיצון תחת אילוץ: נקודת קיצון מקומי של $f(x, y)$ תחת אילוץ

$g(x, y) = 0$, אם היא נקודת קיצון של f בקבוצת כל הנקודות הממיימות את תנאי האילוץ.

שיטת כופלי לגרנג': למציאת קיצון של $f(x, y)$ תחת אילוץ $g(x, y) = 0$

מדגירים פונקציית לגרנג' $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$.

הנקודות החשודות לקיצון תחת אילוץ הינן נקודות קריטיות של F , ז"א נקודות בהן אחת הנגזרות החלקיות לא קיימת, או שמתקיים:

$$\vec{\nabla} F = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases}$$

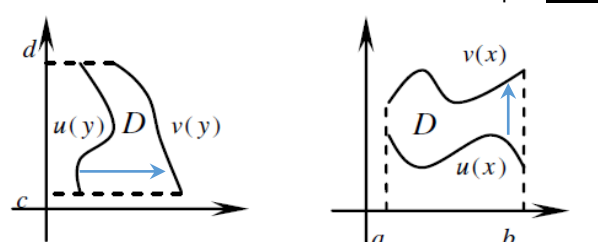
* ניתן להרחיב את שיטת לגרנג' לפונקציות עם יותר משתנים ולבעיות קיצון עם יותר אילוצים, למשל $F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y) - \lambda_1 \cdot g_1(x, y) - \lambda_2 \cdot g_2(x, y)$

אינטגרל כפול ואינטגרל משולש

אינטגרל כפול של $f(x, y)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מישורי D הוא

$$\iint_D f(x, y) dA$$

משפט פוביני: ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים:



$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy$$

אינטגרל משולש של $f(x, y, z)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מרחבי G הוא

$$\iiint_G f(x, y, z) dV$$

ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים, למשל:

$$G: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \\ m(x, y) \leq z \leq k(x, y) \end{cases}$$

אז

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{m(x, y)}^{k(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

יישומים של אינטגרל כפול ומשולש

שטח של תחום מישורי D : $Area(D) = \iint_D dA$

נפח של גוף מרחבי G : $Volume(G) = \iiint_G dV$

· בפרט עבור תחום $G = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$

$$Volume(G) = \iint_D (f(x, y) - g(x, y)) dA$$

מסה של לוחית מישורית D בעלת צפיפות $\rho(x, y)$: $m(D) = \iint_D \rho(x, y) dA$

מסה של גוף מרחבי G בעל צפיפות $\rho(x, y, z)$: $m(G) = \iiint_G \rho(x, y, z) dV$

מרכז מסה של גוף מרחבי G :

$$x_{cm} = \frac{\iiint_G x \cdot \rho dV}{m(G)}, \quad y_{cm} = \frac{\iiint_G y \cdot \rho dV}{m(G)}, \quad z_{cm} = \frac{\iiint_G z \cdot \rho dV}{m(G)}$$

(5) אם בנוסף D הינו תחום פשוט קשר, אז $Q_x = P_y$ במישור, או $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$

$$\text{במרחב, כאשר הוטרור מוגדר ע"י} \quad \text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

אינטגרל משטחי

פרמטריזציה של משטח חלק σ במרחב היא העתקה $\vec{r}: D \rightarrow \sigma$ הנתונה על ידי:

$$\sigma: \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad , \quad u, v \in D_{uv} \quad \text{עם נורמל}$$

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

אינטגרל משטחי מסוג I

האינטגרל המשטחי מסוג I של $f(x, y, z)$ על פני משטח פשוט σ , הוא

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS$$

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\sigma: \vec{r}: D \rightarrow \sigma$, אז $\|\vec{n}\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ ולכן:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z = z(x, y)$ אז $\|\vec{n}\| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}$ ולכן

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy$$

ישומים של אינטגרל משטחי מסוג I

$$\text{שטח פנים של משטח } \sigma: \quad \text{Area}(\sigma) = \iint_{\sigma} dS$$

$$\text{מסה של משטח } \sigma \text{ בעל צפיפות } \rho(x, y, z): \quad m(\sigma) = \iint_{\sigma} \rho(x, y, z) dS$$

אינטגרל משטחי מסוג II

האינטגרל המשטחי מסוג II של שדה $\vec{F} = (P, Q, R)$ על פני משטח דו צדדי σ

$$\text{בעל נורמל יחידה בכיוון נתון } \vec{n} = \vec{n} / \|\vec{n}\| \text{ הוא } \iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$$

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\sigma: \vec{r}: D \rightarrow \sigma$, אז $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ולכן:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{D_{uv}} (P(u, v), Q(u, v), R(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z = z(x, y)$ אז $\vec{n} = (-z_x, -z_y, 1)$ ולכן:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{D_{xy}} (-P \cdot z_x - Q \cdot z_y + R) dx dy$$

$$\text{אם } \vec{F} \cdot \vec{n} = 0 \text{ אז } \iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = 0 \text{ ו-} \vec{n} \text{ ניצבים על פני } \sigma$$

* אם נחליף את הכיוון של \vec{n} , אז האינטגרל יחליף את סימנו.

ישומים של אינטגרל משטחי מסוג II

$$\text{שטף של שדה וקטורי } \vec{F} \text{ דרך משטח } \sigma: \quad \Phi_{\sigma}(\vec{F}) = \iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$$

משפט הדיבורגנץ של Gauss: יהי $\vec{F} = (P, Q, R)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביילים בתחום קומפקטי פשוט קשר G בעל שפה חלקה למקוטעין σ , ויהי \hat{n} נורמל יחידה חיצוני לשפה σ . אז

$$\iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_G \text{div } \vec{F} dV$$

כאשר $\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$ הוא **הדיבורגנץ** של השדה.

משפט Stokes: יהי $\vec{F} = (P, Q, R)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביילים על

פני משטח דו צדדי σ בעל שפה γ , כך שכיוון הנורמל \hat{n} למשטח נבחר לפי כלל יד ימין ביחס לכיוון γ . אז

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sigma} (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dS$$

אינטגרל קווי

פרמטריזציה של עקומה חלקה C במרחב היא העתקה $\vec{r}: [a, b] \rightarrow C$ הנתונה ע"י:

$$C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad , \quad t \in [a, b]$$

בפרמטריזציה נקודת ההתחלה היא $A = \vec{r}(a)$, ונקודת הסיום היא $B = \vec{r}(b)$.

אינטגרל קווי מסוג I

תהי $f(x, y, z)$ פונקציה מוגדרת לאורך C , אז

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.

ישומים של אינטגרל קווי מסוג I

$$\text{אורך של עקומה } C: \quad \text{length}(C) = \int_C dl$$

$$\text{מסה של עקומה } C \text{ בעלת צפיפות } \rho(x, y, z): \quad m(C) = \int_C \rho(x, y, z) dl$$

אינטגרל קווי מסוג II

יהי $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ שדה **במרחב** המוגדר

לאורך C , ונסמן $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. אז

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (P \cdot x' + Q \cdot y' + R \cdot z') dt \end{aligned}$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.

$$\text{החישוב תלוי כיוון:} \quad \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{B \rightarrow A} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ישומים של אינטגרל קווי מסוג II

עבודה של שדה כוחות \vec{F} במעבר חלקיק לאורך מסלול C , או **שטף** שדה \vec{F} דרך עקומה C מחושבת ע"י $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

מסלול בכיוון חיובי הוא מסלול סגור שבמעבר לאורכו התחום החסום נמצא משמאלו.

משפט Green: יהי $\vec{F} = (P, Q)$ שדה מישורי בעל רכיבים גזירים ברציפות בתחום D בעל שפה חלקה למקוטעין C מכוונת בכיוון החיובי, אז

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

* שפה C יכולה להיות מורכבת ממספר מסילות זרות.

$$\text{עבור תחום כנ"ל מתקיים:} \quad \text{Area}(D) = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$$

שדה משמר $\vec{F} = (P, Q)$ בתחום D מישורי (או $\vec{F} = (P, Q, R)$ בתחום מרחבי), הוא שדה שקימת לו **פונקציית פוטנציאל** ϕ דיפרנציאבילית ב- D , כך שמתקיים $\vec{\nabla} \phi = \vec{F}$.

משפט שקיליות: עבור \vec{F} שדה בעל רכיבים דיפרנציאביילים בתחום D הטענות הבאות שקולות:

$$(1) \quad \vec{F} \text{ שדה משמר.}$$

$$(2) \quad \text{קיימת פונקציית פוטנציאל } \phi \text{ רציפה ב-} D, \text{ כך ש-} \vec{\nabla} \phi = \vec{F} \text{ (כלומר)}$$

$$\phi_x = P, \quad \phi_y = Q, \quad \phi_z = R \text{ במישור, או } \phi_x = P, \quad \phi_y = Q, \quad \phi_z = R \text{ במרחב.}$$

$$(3) \quad \text{לכל מסלול סגור } \gamma \text{ בתוך } D \text{ מתקיים } \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$(4) \quad \text{לכל שתי נקודות } A, B \text{ בתוך } D, \text{ האינטגרל } \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ לא תלוי במסלול}$$

$$\text{המחבר בין } A \text{ ל-} B \text{ בתוך } D, \text{ ומתקיים } \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

נוסחאות כלליות**זהויות טריגונומטריות**

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 1 + \tan^2 \alpha &= 1 / \cos^2 \alpha & \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 + \cot^2 \alpha &= 1 / \sin^2 \alpha & \cos(2\alpha) &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ & & \cos(2\alpha) &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

גבולות מוכרים

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &\leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

כלל הסנדוויץ:

$$\text{כלל Hopital': במצב } \frac{0}{0} \text{ או } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ אז } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

נגזרות יסודיות

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1} & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (e^x)' &= e^x & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \\ (a^x)' &= a^x \ln a & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\sin x)' &= \cos x & (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\cos x)' &= -\sin x & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

אינטגרלים יסודיים

$$\begin{aligned}\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) & \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C \\ \int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \\ \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C\end{aligned}$$

שיטות אינטגרציה**אינטגרציה בחלקים:**

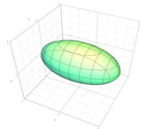
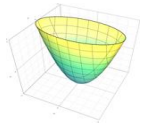
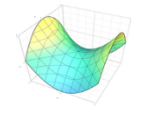
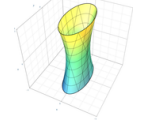
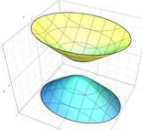
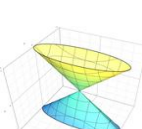
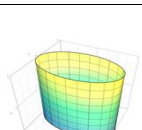
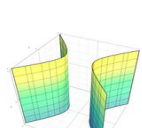
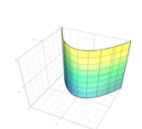
$$\int u \cdot v' dx = uv - \int u' \cdot v dx$$

$$\int f(x(t)) x'(t) dt = \int f(x) dx \quad \text{אם } x = x(t) \quad \text{החלפת משתנים}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x dx \quad \text{הצבות טריגונומטריות: בחישוב}$$

- ° אם n אי זוגי נציב $t = \cos x$
- ° אם m אי זוגי נציב $t = \sin x$
- ° אם שניהם זוגיים ניתן להוריד חזקה ע"י זווית כפולה.

שטחים ונפחיםמעגל ברדיוס r - שטח πr^2 , היקף $2\pi r$.כדור ברדיוס r - נפח $\frac{4\pi r^3}{3}$, שטח פנים $4\pi r^2$.חרוט ברדיוס r וגובה h - נפח $\frac{\pi r^2 h}{3}$, שטח פנים $\pi r(\sqrt{r^2 + h^2} + r)$.

Ellipsoid	<u>אליפסואיד</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Elliptic paraboloid	<u>פרבולואיד אליפטי</u> $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$	
Hyperbolic paraboloid	<u>פרבולואיד היפרבולי</u> $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$	
Elliptic hyperboloid of one sheet	<u>היפרבולואיד אליפטי I</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Elliptic hyperboloid of two sheets	<u>היפרבולואיד אליפטי II</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Elliptic cone	<u>חרוט אליפטי</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Elliptic cylinder	<u>גליל אליפטי</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z \in \mathbf{R}$	
Hyperbolic cylinder	<u>גליל היפרבולי</u> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, z \in \mathbf{R}$	
Parabolic cylinder	<u>גליל פרבולי</u> $x^2 + 2ay = 0, z \in \mathbf{R}$	

From: https://en.wikipedia.org/wiki/User:Sam_Derbyshire/Gallery and <https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric>