שם הקורס: חשבון דיפרנציאלי אינטגרלי 2

קוד הקורס: 90902

הוראות לנבחן:

- חומר עזר שימושי לבחינה:

אסור להשתמש בכל חומר עזר, פרט לדפי נוסחאות מצורפים.
מותר להשתמש במחשבון, חוץ ממחשבון גרפי.

- אין לכתוב בעפרון / עט מחיק
- אין להשתמש בטלפון סלולארי
- אין להשתמש במחשב אישי או נייד
- אין להשתמש בדיסק און קי ו/או מכשיר מדיה אחר
- אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

שנה: תשפ״א

סמסטר: ב׳

תאריך ושעת הבחינה:

מרצי הקורס:

פרופ' סטאנצ'סקו יוני, ד"ר קפלן דבורה, ד"ר גבל מיקה, ד"ר ביתן רוני, ד"ר אבן-דר מאנדל ליאת, ד"ר רוזנצויג ליאור, ד"ר בארשבסקי אברהמי אורלי, ד"ר סגל אלכסנדר, ד"ר אולבסקי ויקטור, ד"ר בר לוקיאנוב ולדימיר

***** שאלון הבחינה ייבדק על ידי המרצה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

בדקו כי בטופס הבחינה 28 עמודים (לא כולל את העמוד הזה).
יש לפתור 5 שאלות מתוך 6 השאלות שמספרן 1-6. שווי כל שאלה 20 נקודות.
יש להקפיד לכתוב את התשובות לכל סעיף בדף חדש ורק במקום המיועד לכך.
רושמים את הפתרון לכל שאלה לפי ההנחיות ב 4 עמודים
מקסימום.
***** תשובות שיכתבו במקום אחר לא יבדקו !
השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך! יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת !
***** אסור לתלוש דפים ממחברת הבחינה. תלישת דף אחד או יותר תביא לפסילת הבחינה !

בהצלחה!

מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 – שאלון Y

שאלה 1 (20 נקודות)

נתון הטור $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(5x)^n}{n}$.

א. (15 נק') מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטור.
האם הטור מתבדר / מתכנס בתנאי / מתכנס בהחלט בקצוות קטע ההתכנסות ? נמקו !

ב. (05 נק') מצאו טור Leibniz שמתכנס ל- $I=\int_0^{0.1}S(x)dx$. נמקו !

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x,y)=6xy+x^2+y^2$.

א. (15 נק') מצאו את המקסימום ואת המינימום המוחלטים של הפונקציה f
בתחום $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le 8, y\le 0\}$. נמקו !

ב. (05 נק') מצאו נקודה $P=(a,b)$ שבה המישור המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה P *מקביל* למישור
הנתון על ידי המשוואה הקרטזית $S: z=4x-4y$? נמקו !

שאלה 3 (20 נקודות) <u>אין קשר בין הסעיפים א' ו- ב'</u>

א. (15 נק') נתונה פונקציה $z=f(x,y),\ f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,0)$. באמצעות f
נגדיר שתי פונקציות: $g(u)=f(3u^2+2u, 2+2u)$, $h(t)=f(\cos t+2t, e^{3t}-\cos t)$.
ידוע ש- $g'(-1)=16,\ h'(0)=32$. מצאו את וקטור הגרדיאנט $\vec{\nabla}f(1,0)$. נמקו !
<u>רמז</u>: היעזרו בכלל שרשרת.

ב. (05 נק') חקרו את התכנסות / התכנסות בהחלט של הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n\ln(4n)}$. נמקו !

<u>שאלה 4</u> (20 נקודות)

א. (15 נק') מצאו את מסת התחום $D \subseteq \mathbf{R}^2$ הנתון על ידי $D=\{(x,\ y)\in \mathbf{R}^2:\ x^2+y^2\le 2y\}$ בהינתן

פונקציית הצפיפות $\rho(x,y)=2\sqrt{x^2+y^2}$. נמקו!

ב. (05 נק') חשבו את נפח הגוף $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{R}^3$ הנתון על ידי $\mathbf{G}=\left\{(x,y,z):|z|\le\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le 2y\right\}$. נמקו !

<u>רמז :</u> הגוף $\mathbf{G}$ כלוא בתוך הגליל $S: x^2+y^2=2y$ ונמצא בין שני המשטחים

$\sum_+ : z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\sum_- : z=-\sqrt{x^2+y^2}$.

<u>שאלה 5</u> (20 נקודות)

יהי $a\in\mathbf{R}$. נגדיר שדה ווקטורי $\vec{F}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ על ידי : $\vec{F}(x,y)=\left(e^y+y\right)\vec{i}+\left(ax+xe^y\right)\vec{j}$.

א. (10 נק') עבור איזה $a\in\mathbf{R}$ השדה $\vec{F}$ הוא שדה משמר בתחום $\mathbf{R}^2$? נמקו !

ב. (10 נק') נתון $a=1$. מצאו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע מ- $(1,0)$ ל- $(-1,0)$ לאורך

חצי המעגל העליון: $C:\left(x^2+y^2=1, y\ge 0\right)$. פתרו את השאלה בשני דרכים :

<u>דרך אחת</u> : בעזרת חישוב פונקציית פוטנציאל; <u>דרך שנייה</u> : בעזרת אינטגרל קווי מסוג שני. נמקו !

<u>שאלה 6</u> (20 נקודות)

נתון השדה : $\vec{F}=\left(2x+y^2\right)\vec{i}-\left(yx+z^2\right)\vec{j}+\left(zx-1\right)\vec{k}$.

א. (15 נק') חשבו את שטף השדה $\vec{F}$ דרך <u>המשטח</u> <u>הסגור</u> Σ שהוא שפת התחום G הנתון על ידי

$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: 0\le z\le 4-x^2-y^2\right\}$, כאשר וקטור נורמל היחידה למשטח Σ מכוון כלפי חוץ.

ב. (05 נק') נסמן ב- $\mathbf{S}$ את <u>הפרבולואיד</u> <u>הלא סגור</u> הנתון על ידי $\mathbf{S}=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: z=4-x^2-y^2, z\ge 0\right\}$.

חשבו את שטף השדה $\vec{F}$ דרך המשטח $\mathbf{S}$ עם נורמל יחידה $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$, מכוון כלפי מעלה,

(ז"א הנורמל היחידה $\vec{n}$ למשטח $\mathbf{S}$ מכוון כלפי חוץ לתחום G שנתון בסעיף א').

נמקו !

אסור לתלוש דפים ממחברת הבחינה. תלישת דף אחד או יותר תביא לפסילת הבחינה !

בהצלחה!

טורים

תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים.

טור הוא הסכום האינסופי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$.

סדרת סכומים חלקיים היא הסכום הסופי $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

טור מתכנס אם קיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ לסדרת הסכומים החלקיים, ואז סכום הטור הוא $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. אם הגבול של S_n לא קיים או אינסופי זהו **טור מתבדר**.

תנאי הכרחי להתכנסות טור: אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

תכונות נוספות של טורים:

א. הורדת/הוספת מספר סופי של אברים אינה משפיעה על התכנסות/התבדרות הטור.

ב. אם $c \neq 0$ קבוע, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

ג. אם 2 טורים מתכנסים אז גם סכומם מתכנס: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

טורים חיוביים

* המבחנים להלן מניחים שהטורים הם אי שליליים $a_n, b_n \geq 0$.
* עבור סדרה חיובית, סדרת הסכומים החלקיים S_n היא מונוטונית עולה.

מבחן השוואה ראשון: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים, המקיימים $a_n \leq b_n$ החל ממקום מסוים.

- אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה שני: נסמן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$.

- אם $0 < k < \infty$, אז הטורים $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנסים או מתבדרים יחד.
- אם $k = 0$, אז $a_n \leq b_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.
- אם $k = \infty$, אז $b_n \leq a_n$ ל n - גדולים וניתן להשתמש במבחן השוואה ראשון.

מבחן דלמבר: נסמן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

- אם $L < 1$, אז הטור מתכנס.
- אם $L > 1$, אז הטור מתבדר.
- אם $L = 1$, לא ניתן לדעת.

מבחן קושי: נסמן $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$,

- אם $L < 1$, אז הטור מתכנס.
- אם $L > 1$, אז הטור מתבדר.
- אם $L = 1$, לא ניתן לדעת.

מבחן אינטגרלי: תהי $f(x)$ פונקציה חיובית יורדת בקטע $[k, \infty)$, כך ש - $a_n = f(n)$. אז הטור $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_k^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

טורים כלליים

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט**, אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בתנאי**, אם הוא מתכנס, אבל הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

משפט: טור מתכנס בהחלט הינו טור מתכנס.

טור מחליף סימן הוא טור שאיבריו מחליפים סימן לסירוגין: $a_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

משפט לייבניץ: תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה חיובית יורדת לאפס, אז:

1. הטור מחליף הסימן $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.
2. השארית $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ מקיימת: $|S - S_n| = |r_n| < a_{n+1}$.

סדרי גודל: $c \ll (\ln n)^b \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$

כאשר הקבועים מקיימים $b, c, p > 0$, $a > 1$.

נוסחת סטירלינג: $n! \approx \frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n}$

טורי חזקות

טור חזקות הינו טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. זהו טור חזקות סביב x_0 .

תחום ההתכנסות: לכל טור קיים מספר $R \geq 0$ שנקרא רדיוס התכנסות הטור, עבורו:

- כאשר $|x - x_0| < R$ טור החזקות מתכנס (בהחלט).
- כאשר $|x - x_0| > R$ טור החזקות מתבדר.
- בקצוות $x_0 \pm R$ בודקים ישירות על ידי הצבה בטור.

משפט Cauchy – Hadamard: את רדיוס ההתכנסות של טור חזקות ניתן למצוא לפי כל אחת מהנוסחאות הבאות:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ הוא הגבול העליון של הסדרה.

משפט: בתחום ההתכנסות של טור חזקות ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר, גזירה איבר-איבר ולעבור לגבול בנקודה מסוימת איבר-איבר, כלומר:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x - x_0)^n dx$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d(x - x_0)^n}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{x\to c} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c - x_0)^n$$

משפט: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ מתכנס בקטע מסוים לפונקציה $f(x)$, אז זהו טור טיילור של f בסביבה של x_0 , כלומר מתקיים: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

טורי טיילור יסודיים

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad x \in (-1,1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \qquad x \in (-1,1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \qquad x \in [-1,1]$$

פונקציות במספר משתנים

גבול: אומרים כי מספר L הינו גבול של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) ורושמים $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$, מתקיים $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

רציפות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

נגזרות חלקיות מוגדרות ע"י הגבולות:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

גרדיאנט של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) הוא וקטור הנגזרות החלקיות של $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0):
$$\overrightarrow{grad}(f)=\vec{\nabla}f=(f_x,f_y)$$

דיפרנציאביליות: פונקציה $f(x,y)$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אם
$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=$$
$$=f(x_0,y_0)+A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+r(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$
כאשר $\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} r(\Delta x,\Delta y)=0$.

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה, אז בנקודה זו היא רציפה והנגזרות החלקיות שלה קיימות. נגזרות אלו הן הקבועים מההגדרה, ז"א:
$$A=f_x(x_0,y_0)\qquad B=f_y(x_0,y_0)$$

משפט: אם עבור פונקציה $f(x,y)$ הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת נקודה, אז $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה.

דיפרנציאל: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), אז החלק הליניארי של שינוי הפונקציה נקרא דיפרנציאל, כלומר
$$df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

נגזרת כיוונית של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\vec{s}=(a,b)$, $\|\vec{s}\|=1$
(כלומר $\vec{s}$ וקטור יחידה) מוגדרת על ידי הגבול:
$$\frac{\partial f}{\partial\vec{s}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$$

משפט: אם פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0), ו $\|\vec{s}\|=1$ אז
$$\frac{\partial f}{\partial\vec{s}}(x_0,y_0)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{s}$$

משפט: הנגזרת הכיוונית של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) היא מקסימלית בכיוון הגרדיאנט, ז"א בכיוון $\vec{s}=\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$.

משפט: הגרדיאנט של פונקציה דיפרנציאבילית $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) מאונך לקו גובה של f בנקודה זו.

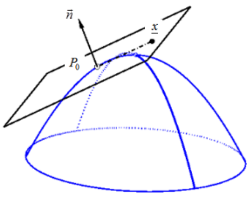
כלל השרשרת: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בסביבה של (x_0,y_0) ותהינה $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ פונקציות דיפרנציאביליות בסביבה של (u_0,v_0), כאשר $x_0=x(u_0,v_0)$, $y_0=y(u_0,v_0)$. אז הפונקציה המורכבת $f(x(u,v),y(u,v))$ דיפרנציאבילית בסביבה של (u_0,v_0) ומתקיים:
$$f_u=f_x\cdot x_u+f_y\cdot y_u\qquad f_v=f_x\cdot x_v+f_y\cdot y_v$$

נגזרות מסדר גבוה הן נגזרות חלקיות של נגזרות חלקיות, למשל
$$f_{xx}=(f_x)_x\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

משפט: אם לפחות אחת מהנגזרות המעורבות מסדר גבוה f_{xy} או f_{yx} קיימת ורציפה בנקודה, אז גם הנגזרת המעורבת השנייה קיימת ורציפה ומתקיים $f_{xy}=f_{yx}$.
* תוצאה דומה נכונה עבור נגזרות מעורבות מסדר גבוה יותר.

קירוב טיילור: תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית n פעמים בסביבה של (x_0,y_0), ויהיו $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, אז מתקיים
$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!}+R_n(x_0,y_0)$$
כאשר
$$d^n f=d\left(d^{n-1}f\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x,y)$$
$$R_n(x_0,y_0)=d^{n+1}f(c,d)$$
עבור c בין x_0 לבין x ו־ d בין y_0 לבין y.

נורמל ומישור משיק למשטח



* משמעות דיפרנציאביליות – קיום מישור משיק בנקודה.

עבור נקודה P_0 על משטח כלשהו עם נורמל $\vec{n}$, נקודה $\underline{x}$ על המישור המשיק תקיים $\vec{n}\perp(\underline{x}-P_0)$.
ובפרט:

1. משטח נתון בצורה מפורשת $z=f(x,y)$, כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:
$$-f_x(P_0)\cdot(x-x_0)-f_y(P_0)\cdot(y-y_0)+z-f(x_0,y_0)=0$$

2. משטח נתון בצורה סתומה $F(x,y,z)=0$, כאשר F דיפרנציאבילית בנקודה $P_0(x_0,y_0,z_0)$. הנורמל למשטח הוא $\vec{n}=\vec{\nabla}F=(F_x,F_y,F_z)$, ומשוואת המישור המשיק למשטח בנקודה זו:
$$F_x(P_0)\cdot(x-x_0)+F_y(P_0)\cdot(y-y_0)+F_z(P_0)\cdot(z-z_0)=0$$

קיצון של פונקציות במספר משתנים

נקודת מינימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מקומי (x_0,y_0) של f, אם קיימת סביבה של (x_0,y_0) כך שלכל (x,y) בסביבה זו מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

נקודה קריטית (x_0,y_0) אם $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)$ לא קיים או $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=(0,0)$.

משפט Fermat: אם (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי של פונקציה $f(x,y)$, אז היא נקודה קריטית.

סיווג נקודות קיצון מקומי:
תהי (x_0,y_0) נקודה חשודה לקיצון. נגדיר
$$\Delta(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$$

- אם $\Delta(x_0,y_0)>0$, אז (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי:
  - אם $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ זוהי נקודת מינימום מקומי.
  - אם $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ זוהי נקודת מקסימום מקומי.
- אם $\Delta(x_0,y_0)<0$, אז (x_0,y_0) נקודת אוכף (אין קיצון).

נקודת מינימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

נקודת מקסימום מוחלט (x_0,y_0) של f בתחום D, אם לכל $(x,y)\in D$ מתקיים $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$.

תחום קומפקטי D הוא תחום חסום וסגור.

משפט Weierstrass: פונקציה רציפה $f(x,y)$ בתחום קומפקטי D מקבלת ערך מינימלי וערך מקסימלי בתוך D, או על השפה של D.

קיצון תחת אילוץ: נקודת (x_0,y_0) נקודת קיצון מקומי של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$, אם היא נקודת קיצון של f בקבוצת כל הנקודות המקיימות את תנאי האילוץ.

שיטת כופלי לגרנג': למציאת קיצון של $f(x,y)$ תחת אילוץ $g(x,y)=0$ מגדירים פונקציית לגרנג': $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\cdot g(x,y)$.
הנקודות החשודות לקיצון תחת אילוץ הינן נקודות קריטיות של F, ז"א נקודות בהן אחת הנגזרות החלקיות לא קיימת, או שמתקיים:

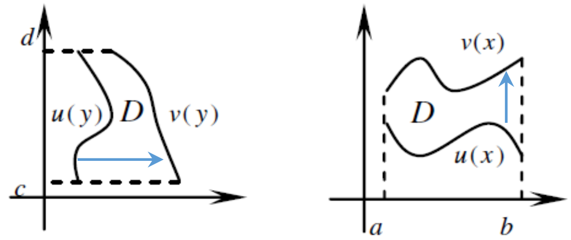
$$\vec{\nabla}F=0 \iff \begin{cases}F_x=0\\F_y=0\\F_\lambda=0\end{cases} \iff \begin{cases}f_x=\lambda g_x\\f_y=\lambda g_y\\g=0\end{cases}$$

* ניתן להרחיב את שיטת לגרנג' לפונקציות עם יותר משתנים ולבעיות קיצון עם יותר אילוצים, למשל $F(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y)-\lambda_1\cdot g_1(x,y)-\lambda_2\cdot g_2(x,y)$

אינטגרל כפול ואינטגרל משולש

אינטגרל כפול של $f(x,y)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מישורי D הוא $\iint_D f(x,y)dA$.

משפט פוביני: ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים:



$$\iint_D f(x,y)dA=\int_a^b\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dydx$$

$$\iint_D f(x,y)dA=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy$$

אינטגרל משולש של $f(x,y,z)$ פונקציה רציפה למקוטעין בתחום מרחבי G הוא $\iiint_G f(x,y,z)dV$.

ניתן לחשב את האינטגרל באמצעות אינטגרלים חוזרים, למשל:

$$G:\begin{cases}a\le x\le b\\ g(x)\le y\le h(x)\\ m(x,y)\le z\le k(x,y)\end{cases}$$

אז

$$\iiint_G f(x,y,z)dV=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{m(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

יישומים של אינטגרל כפול ומשולש

שטח של תחום מישורי D: $Area(D)=\iint_D dA$

נפח של גוף מרחבי G: $Volume(G)=\iiint_G dV$

- בפרט עבור תחום $G=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D, g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$:

$$Volume(G)=\iint_D \left(f(x,y)-g(x,y)\right)dA$$

מסה של לוחית מישורית D בעלת צפיפות $\rho(x,y)$: $m(D)=\iint_D \rho(x,y)dA$

מסה של גוף מרחבי G בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(G)=\iiint_G \rho(x,y,z)dV$

מרכז מסה של גוף מרחבי G:

$$x_{cm}=\frac{\iiint_G x\cdot\rho dV}{m(G)}\qquad y_{cm}=\frac{\iiint_G y\cdot\rho dV}{m(G)}\qquad z_{cm}=\frac{\iiint_G z\cdot\rho dV}{m(G)}$$

החלפת משתנים באינטגרל כפול

החלפת משתנים היא העתקה $(x,y)\to(u,v)$ המעתיקה את התחום $D_{xy}\mapsto D_{uv}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{vmatrix}$

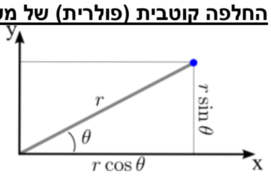
משפט: אם בהחלפת משתנים $J\ne0$, אז קיימת העתקה הופכית $(u,v)\to(x,y)$ שהיעקוביאן שלה $J^{-1}=\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{vmatrix}$ מקיים $J^{-1}=\dfrac{1}{J}$.

משפט החלפת משתנים באינטגרל כפול:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\left[\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases},\quad u,v\in D_{uv},\quad J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]=\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

החלפה קוטבית (פולרית) של מעגל:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases},\quad J=r,\quad \begin{matrix}0\le r\le R\\0\le\theta\le2\pi\end{matrix}$$



החלפה קוטבית מוכללת של אליפסה:

$$\begin{cases}x=ra\cos\theta\\y=rb\sin\theta\end{cases},\quad J=abr,\quad \begin{matrix}0\le r\le 1\\0\le\theta\le2\pi\end{matrix}$$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

החלפת משתנים היא העתקה $(x,y,z)\to(u,v,w)$ המעתיקה את התחום $G_{xyz}\mapsto G_{uvw}$, ולה מוגדר **היעקוביאן** $J=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$. אם $J\ne0$ אז ההעתקה הפיכה, קיימת העתקה הופכית, ומתקיים:

$$J=\begin{vmatrix}x_u&x_v&x_w\\y_u&y_v&y_w\\z_u&z_v&z_w\end{vmatrix},\quad J^{-1}=\begin{vmatrix}u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\\w_x&w_y&w_z\end{vmatrix},\quad J^{-1}=\frac{1}{J}$$

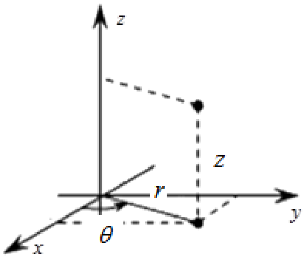
משפט החלפת משתנים באינטגרל משולש:

$$\iiint_{G_{xyz}} f(x,y,z)dV_{xyz}=\left[\begin{cases}x=x(u,v,w)\\y=y(u,v,w),\\z=z(u,v,w)\end{cases}\begin{matrix}u,v,w\in G_{uvw}\\ J=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\end{matrix}\right]=\iiint_{G_{uvw}} f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)|J|dV_{uvw}$$

החלפה גלילית:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases},\quad J=r$$

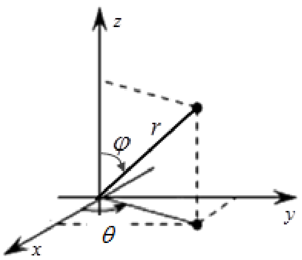
r - המרחק מציר Z.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר X.
Z - מרחק ממישור xy.
מתקיים $x^2+y^2=r^2$.



החלפה כדורית:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\y=r\sin\theta\sin\varphi\\z=r\cos\varphi\end{cases},\quad J=r^2\sin\varphi$$

r - המרחק מהראשית.
θ - זוית ההיטל עם הכיוון החיובי של ציר X.
φ - זווית עם הכיוון החיובי של ציר Z.
מתקיים $x^2+y^2+z^2=r^2$.



אינטגרל קווי

פרמטריזציה של עקומה חלקה C במרחב היא העתקה $\vec{r}:[a,b]\to C$ הנתונה ע"י:

$$C:\vec{r}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big) \quad , \quad t\in[a,b]$$

בפרמטריזציה נקודת ההתחלה היא $A=\vec{r}(a)$, ונקודת הסיום היא $B=\vec{r}(b)$.

אינטגרל קווי סוג I

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה מוגדרת לאורך C, אז

$$\int_C f(x,y,z)dl=\int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.

יישומים של אינטגרל קווי סוג I

אורך של עקומה C: $length(C)=\int_C dl$

מסה של עקומה C בעלת צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(C)=\int_C \rho(x,y,z)dl$

אינטגרל קווי סוג II

יהי $\vec{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$ **שדה במרחב** המוגדר לאורך C, ונסמן $d\vec{r}=\big(dx,dy,dz\big)$. אז

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_a^b \vec{F}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)dt=$$

$$=\int_a^b \big(P\cdot x'+Q\cdot y'+R\cdot z'\big)dt$$

* נוסחה דומה תקפה עבור עקומה מישורית.
* החישוב תלוי כיוון: $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{B\to A}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

יישומים של אינטגרל קווי סוג II

עבודה של שדה כוחות $\vec{F}$ במעבר חלקיק לאורך מסלול C, או **שטף** שדה $\vec{F}$ דרך עקומה C מחושבת ע"י $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

מסלול בכיוון חיובי הוא מסלול סגור שבמעבר לאורכו התחום החסום נמצא משמאלו.

משפט Green: יהי $\vec{F}=(P,Q)$ שדה מישורי בעל רכיבים גזירים ברציפות בתחום D בעל שפה חלקה למקוטעין C מכוונת בכיוון החיובי, אז

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D \big(Q_x-P_y\big)dxdy$$

* שפה C יכולה להיות מורכבת ממספר מסילות זרות.
* עבור תחום כנ"ל מתקיים: $Area(D)=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy$

שדה משמר $\vec{F}=(P,Q)$ בתחום D מישורי (או $\vec{F}=(P,Q,R)$ בתחום מרחבי), הוא שדה שקיימת לו **פונקציית פוטנציאל** φ דיפרנציאבילית ב- D, כך שמתקיים $\nabla\varphi=\vec{F}$.

משפט שקילויות: עבור $\vec{F}$ שדה בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום D הטענות הבאות שקולות:

(1) $\vec{F}$ שדה משמר.

(2) קיימת פונקציית **פוטנציאל** φ רציפה ב – D, כך ש – $\nabla\varphi=\vec{F}$ (כלומר $\varphi_x=P,\ \ \varphi_y=Q$ במישור, או $\varphi_x=P,\ \ \varphi_y=Q,\ \ \varphi_z=R$ במרחב).

(3) לכל מסלול סגור γ בתוך D מתקיים $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.

(4) לכל שתי נקודות A,B בתוך D, האינטגרל $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ לא תלוי במסלול המחבר בין A ל – B בתוך D, ומתקיים $\int_{A\to B}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(B)-\varphi(A)$.

(5) אם בנוסף D הינו תחום פשוט קשר, אז $Q_x=P_y$ במישור, או $rot\vec{F}=\vec{0}$ במרחב, כאשר **הרוטור** מוגדר ע"י $rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$.

אינטגרל משטחי

פרמטריזציה של משטח חלק σ במרחב היא העתקה $\vec{r}:D\to\sigma$ הנתונה על ידי:

$$\sigma:\vec{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big) \quad , \quad u,v\in D_{uv}$$

עם נורמל

$$\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}$$

אינטגרל משטחי סוג I

האינטגרל המשטחי סוג I של $f(x,y,z)$ על פני משטח פשוט σ, הוא $\iint_\sigma f(x,y,z)dS$

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\|\vec{n}\|=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|$ ולכן:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\|\vec{n}\|=\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}$ ולכן

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy$$

יישומים של אינטגרל משטחי סוג I

שטח פנים של משטח σ: $Area(\sigma)=\iint_\sigma dS$

מסה של משטח σ בעל צפיפות $\rho(x,y,z)$: $m(\sigma)=\iint_\sigma \rho(x,y,z)dS$

אינטגרל משטחי סוג II

האינטגרל המשטחי סוג II של שדה $\vec{F}=(P,Q,R)$ על פני משטח דו צדדי σ בעל נורמל יחידה בכיוון נתון $\hat{n}=\vec{n}/\|\vec{n}\|$, הוא $\iint_\sigma(\vec{F}\cdot\hat{n})dS$.

* אם למשטח יש פרמטריזציה $\vec{r}:D\to\sigma$, אז $\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ ולכן:

$$\iint_\sigma(\vec{F}\cdot\hat{n})dS=\iint_{D_{uv}}\big(P(u,v),Q(u,v),R(u,v)\big)\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)dudv$$

* אם המשטח נתון בצורה מפורשת $z=z(x,y)$, אז $\vec{n}=(-z_x,-z_y,1)$ ולכן:

$$\iint_\sigma(\vec{F}\cdot\hat{n})dS=\iint_{D_{xy}}\big(-P\cdot z_x-Q\cdot z_y+R\big)dxdy$$

* אם $\vec{F}$ ו- $\hat{n}$ ניצבים על פני σ, אז $\iint_\sigma(\vec{F}\cdot\hat{n})dS=0$.
* אם נחליף את הכיוון של $\hat{n}$, אז האינטגרל יחליף את סימנו.

יישומים של אינטגרל משטחי סוג II

שטף של שדה וקטורי $\vec{F}$ דרך משטח σ: $\Phi_\sigma(\vec{F})=\iint_\sigma(\vec{F}\cdot\hat{n})dS$

משפט הדיוורגנץ של Gauss: יהי $\vec{F}=(P,Q,R)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים בתחום קומפקטי פשוט קשר G בעל שפה חלקה למקוטעין σ, ויהי $\hat{n}$ נורמל יחידה חיצוני לשפה σ. אז

$$\oiint_\sigma(\vec{F}\cdot\hat{n})dS=\iiint_G div\vec{F}dV$$

כאשר $div\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=P_x+Q_y+R_z$ הוא **הדיוורגנץ** של השדה.

משפט Stokes: יהי $\vec{F}=(P,Q,R)$ שדה מרחבי בעל רכיבים דיפרנציאביליים על פני משטח דו צדדי σ בעל שפה γ, כך שכיוון הנורמל $\hat{n}$ למשטח נבחר לפי כלל יד ימין ביחס לכיוון γ. אז

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_\sigma\big(rot\vec{F}\cdot\hat{n}\big)dS$$

נוסחאות כלליות

זהויות טריגונומטריות

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+\tan^2\alpha=1/\cos^2\alpha$

$1+\cot^2\alpha=1/\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

גבולות מוכרים

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

כלל הסנדוויץ':
$$\left.\begin{cases}f(x)\le g(x)\le h(x)\\ \lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L\end{cases}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to a}g(x)=L$$

כלל L'Hopital: במצב $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, אם $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ אז $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

נגזרות יסודיות

$(x^n)'=nx^{n-1}$

$(e^x)'=e^x$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\sin x)'=\cos x$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

אינטגרלים יסודיים

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ \ (n\ne-1)$

$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

$\int e^x dx=e^x+C$

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

$\int\sin x dx=-\cos x+C$

$\int\cos x dx=\sin x+C$

$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$

$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$

$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C$$

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים: $\int u\cdot v'dx=uv-\int u'\cdot vdx$

החלפת משתנים: אם $x=x(t)$ אז $\int f(x(t))x'(t)dt=\int f(x)dx$

הצבות טריגונומטריות: בחישוב $\int\sin^n x\cos^m xdx$

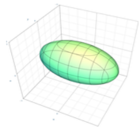
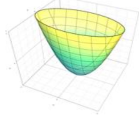
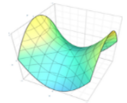
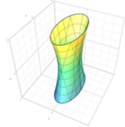
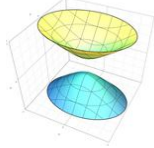
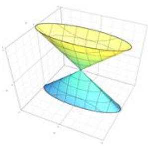
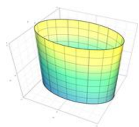
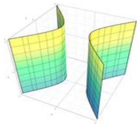
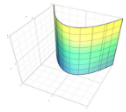
- אם n אי זוגי נציב $t=\cos x$
- אם m אי זוגי נציב $t=\sin x$
- אם שניהם זוגיים ניתן להוריד חזקה ע"י זווית כפולה.

שטחים ונפחים

מעגל ברדיוס r - שטח πr^2, היקף $2\pi r$.

כדור ברדיוס r - נפח $\frac{4\pi r^3}{3}$, שטח פנים $4\pi r^2$.

חרוט ברדיוס r וגובה h - נפח $\frac{\pi r^2 h}{3}$, שטח פנים $\pi r\left(\sqrt{r^2+h^2}+r\right)$.

Ellipsoid	**אליפסויד**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Elliptic paraboloid	**פרבולויד אליפטי**	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	
Hyperbolic paraboloid	**פרבולויד היפרבולי**	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	
Elliptic hyperboloid of one sheet	**היפרבולויד אליפטי I**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
Elliptic hyperboloid of two sheets	**היפרבולויד אליפטי II**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
Elliptic cone	**חרוט אליפטי**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
Elliptic cylinder	**גליל אליפטי**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z\in\mathbf{R}$	
Hyperbolic cylinder	**גליל היפרבולי**	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, z\in\mathbf{R}$	
Parabolic cylinder	**גליל פרבולי**	$x^2+2ay=0, z\in\mathbf{R}$	

From: https://en.wikipedia.org/wiki/User:Sam_Derbyshire/Gallery and https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric

פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - שאלון Y

פתרון שאלה 1.א

לפי הנתונים $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n}x^n$ נובע ש- $x_0=0$, $a_n=(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n}$.

א. רדיוס ההתכנסות שווה ל- $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n}}{(-1)^{n+2}\frac{5^{n+1}}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}$.

לפי משפט Cauchy-Hadamard מסיקים שבתחום $(x_0-R,x_0+R)=\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ הטור מתכנס בהחלט ועבור $|x|>\frac{1}{5}$ הטור מתבדר. נבדוק את הקצוות $x=\pm\frac{1}{5}$. אם $x=\frac{1}{5}$ מציבים ומקבלים טור הרמוני מתחלף שמתכנס בתנאי: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n}\frac{1}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$. אם $x=-\frac{1}{5}$ מציבים ומקבלים טור הרמוני שמתבדר: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n}\frac{1}{(-5)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=-\infty$.

הערה: ידוע ש- $\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}....$ לכל $-1<t\le 1$. מקבלים שאם $-\frac{1}{5}<x\le\frac{1}{5}$ אז $-1<t=5x\le 1$ ולכן $S(x)=\ln(1+5x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(5x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n}x^n$.

פתרון שאלה 1.ב

נבצע אינטגרציה של סכום של טור חזקות:

$$I=\int_0^{0.1}S(x)dx=\int_0^{0.1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_0^{0.1}x^n\,dx)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^{0.1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^n}{n(n+1)}\frac{1}{10^{n+1}}$$

מצאנו טור Leibniz שמתכנס ל- $I=\int_0^{0.1}S(x)dx$. (**נמקו** !)

<u>הערה</u>: אם בוחרים רק 2 איברים הראשונים של הטור מקבלים קירוב ריבועי של I:

$\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n(n+1)}\frac{1}{10^{n+1}}=\frac{5}{1\cdot 2}\frac{1}{10^2}-\frac{5^2}{2\cdot 3}\frac{1}{10^3}=\frac{1}{40}-\frac{1}{240}=\frac{1}{48}$. השגיאה $|I-A|$ קטנה מ- $\frac{5^3}{3\cdot 4}\frac{1}{10^4}=\frac{1}{960}$.

<u>פתרון שאלה 2.א</u>

התחום $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le 8, y\le 0\}$ הוא תחום סגור וחסום הפונקציה f היא רציפה ב- D (**נמקו** !)
לכן לפי משפט Weierstrass קיימות נקודות קיצון מוחלטות (מקסימום ומינימום) של הפונקציה f בתחום D.
נסמן ב- $P=(x,y)$ אחת מהנקודות הקיצון המוחלטות של f. נפתור בשני שלבים:

<u>שלב 1</u> <u>בודקים את הפנים של D</u>: $Int(D)=\{(x,y) \mid x^2+y^2<8, y<0\}$. נשתמש במשפט Fermat.
נמצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה על ידי השוואת שתי הנגזרות החלקיות הראשונות ל- 0:
$f_x(x,y)=6y+2x=0,\quad f_y(x,y)=6x+2y=0$. ולכן $(0,0)$ הינו הפתרון היחיד של מערכת זו, אבל
הנקודה $(0,0)$ <u>לא</u> נמצאת בפנים תחום הנתון. מסיקים שלא קיימות נקודות פנימיות חשודות לקיצון
(ז"א לא קיימות נקודות חשודות לקיצון בקבוצה $Int(D)$).

<u>שלב 2</u> נמצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה על <u>שפת התחום הנתון</u> (D = מחצית תחתונה של עיגול).

<u>שלב 2.1</u>: נבדוק נקודות קריטיות על החלק הישר של השפה: $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$, $y=0$.
$f(x,0)=6x\cdot 0+x^2+0^2=x^2$. הנקודה הקריטית היחידה של הפרבולה $y=x^2$ היא $x=0$ והיא בתחום
ה-x-ים הנדרש. גם קצוות הקטע $x=\pm 2\sqrt{2}$ הן נקודות חשודות לקיצון מוחלט של הפרבולה $y=x^2$ (**נמקו**)

<u>שלב 2.2</u>: נבדוק נקודות קריטיות על חצי המעגל: $H=\{(x,y): x^2+y^2-8=0, y<0\}$. נסמן את
האילוץ: $g(x,y)=x^2+y^2-8=0$. ברור ש- $\vec{\nabla}g\ne\vec{0}$ לכל נקודה (x,y) ששייכת לחצי המעגל H.
לפי שיטת כופלי Lagrange: הגרדיאנט של פונקציה המטרה f פרופורציוני לגרדיאנט של פונקצית
האילוץ g. זה שקול ל- $\underline{\nabla f(x,y)=(6y+2x,\ 6x+2y)=t\cdot\nabla g(x,y)=t(2x,\ 2y)=(2tx,\ 2ty)}$, ז"א

$$(a)\ \ 2x+6y-2tx=0,\quad (b)\ \ 6x+2y-2ty=0,\quad (c)\ \ x^2+y^2-8=0$$

נכפול משוואה ראשונה ב- y ומשוואה שנייה ב-x ונחסיר את המשוואה הראשונה מהמשוואה השנייה.
קבלנו: $x^2=y^2$. אבל $x^2=y^2$ ו- $x^2+y^2-8=0$ גורר ש- $x^2=y^2=4$ ז"א $P=(x,y)$ שייכת ל:
$\{(2,2),(-2,-2),(-2,2),(2,-2)\}$. רק $(-2,-2),(2,-2)$ בתחום הדרוש. נחשב את ערך הפונקציה בכל
5 הנקודות החשודות: $f(0,0)=0,\ f(2,-2)=-16,\ f(2\sqrt{2},0)=8,\ f(-2,-2)=32,\ f(-2\sqrt{2},0)=8$.
הערך המינימלי בתחום הוא: $m=-16$. הערך המקסימלי בתחום הוא: $M=32$.

<u>פתרון שאלה 2.ב</u>

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה $P=(a,b)$ שווה ל-
$\sum: z-z_0=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$. מישור $\sum$ מקביל למישור הנתון $S: z=4x-4y$ אם ורק אם
$f_x(a,b)=4,\ f_y(a,b)=-4$, ז"א $f_x(a,b)=2a+6b=4,\quad f_y(a,b)=6a+2b=-4$. פותרים את המערכת
ומסיקים שיש רק פתרון יחיד: $P=(a,b)=(-1,1)$.

פתרון שאלה 3.א

פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית, לכן כדי למצוא את $\nabla f(1,0)$ נרשום את הביטויים לנגזרות $g'(-1),\ \ h'(0)$ באמצעות כלל השרשרת.

- עבור g נציב $x=3u^2+2u$, $y=2+2u$.

$$y'(-1)=2_{(u=-1)}=2\ \ ,x'(-1)=\left(6u+2\right)\Big|_{(u=-1)}=-4$$

- עבור h נציב $x=\cos t+2t$, $y=e^{3t}-\cos t$.

$$y'(0)=\left(3e^{3t}+\sin t\right)\Big|_{(t=0)}=3\ \ ,x'(0)=(-\sin t+2)\Big|_{(t=0)}=2$$

ונקבל מערכת משוואות ליניאריות: $\begin{cases} g'(-1)=f_x'(1,0)\cdot(-4)+f_y'(1,0)\cdot(2)=16 \\ h'(0)=f_x'(1,0)\cdot(2)+f_y'(1,0)\cdot(3)=32 \end{cases}$. אם נסמן

$\begin{cases} f_x'(1,0)=a \\ f_y'(1,0)=b \end{cases}$ נקבל את המערכת $\begin{cases} -4a+2b=16 \\ 2a+3b=32 \end{cases}$ שפתרונה: $\begin{cases} a=1 \\ b=10 \end{cases}$. מסיקים ש- $\vec{\nabla} f(1,0)=(1,10)$.

פתרון שאלה 3.ב

1. נבדוק שהטור לא מתכנס בהחלט. נשתמש במבחן האינטגרל של Cauchy עבור הטור:

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n\ln(4n)}$. מספיק לבדוק שהאינטגרל $\int_2^{\infty}\frac{1}{3x\ln(4x)}dx$ מתבדר.

(נמק למה אפשר להפעיל את המשפט) זה נכון כי: $\int_2^{\infty}\frac{1}{3x\ln(4x)}dx=\frac{1}{3}\ln\ln(4x)\Big|_2^{\infty}=\infty$

2. נסמן ב- $u_n=\frac{1}{3n\ln(4n)}$. זאת סדרה חיובית, יורדת ומתכנסת לאפס **(**כי $3n\ln(4n)$ היא סדרה עולה ל- $+\infty$**)**.

לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n\ln(4n)}$ מתכנס בתנאי לפי משפט Leibniz .

פתרון שאלה 4.א

מסת התחום $D\subseteq \mathbf{R}^2$ שווה לאינטגרל הכפול $m(D)=\iint\limits_D \rho(x,y)dA=\iint\limits_D 2\sqrt{x^2+y^2}dA$.

נחשב את האינטגרל הכפול בעזרת החלפת משתנים (<u>קאורדינטות קוטביות</u>) :

$$Volume(G)=2\iint\limits_{D:x^2+y^2\le 2y}\sqrt{x^2+y^2}d(x,y)=\begin{bmatrix}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ J=r\end{bmatrix};\left[D^*:\begin{cases}0<\theta<\pi\\ 0\le r\le 2\sin\theta\end{cases}\right]=$$

$$=2\iint_{D^*}(r)rdA=[Fubini]=2\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\sin\theta}r\cdot rdr\right)d\theta\ =2\int_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^{2\sin\theta}=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta=\begin{bmatrix}t=\cos\theta\\ dt=-\sin\theta d\theta\end{bmatrix}=\frac{16}{3}\int_1^{-1}(1-t^2)(-dt)=\frac{16}{3}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)_{-1}^{1}=\frac{64}{9}.$$

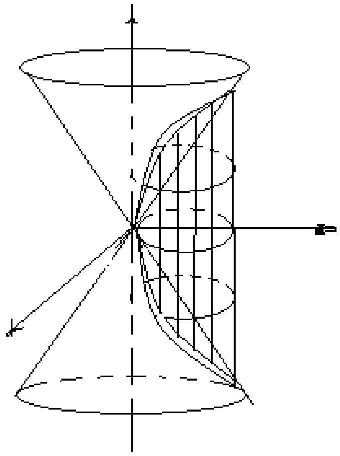
פתרון שאלה 4.ב

נסמן ב- $D=\left\{(x,\ y):\ x^2+y^2\le 2y\right\}$.

הגוף הנתון $\mathbf{G}$ הוא <u>גוף פשוט</u> מפני ששווה ל- $\mathbf{G}=\left\{(x,y,z): z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D\right\}$.

כאשר $z_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ו- $z_1(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$. לפי משפט Fubini :

$$Volume(\mathbf{G})=\iint\limits_D\left[z_2(x,y)-z_1(x,y)\right]d(x,y)=2\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d(x,y)=(question\ \ 4.a)=\frac{64}{9}.$$



פתרון שאלה 5.א

נפתור בשני דרכים.

דרך 1: לפי הנתון $P(x,y)=e^y+y, Q(x,y)=ax+xe^y$ ולכן כל 4 הנגזרות החלקיות של P,Q רציפות.

בנוסף, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\left(a+e^y\right)-\left(1+e^y\right)=a-1$, לכל $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. התחום $\mathbf{R}^2$ תחום **תחום קמור**

ולכן השדה הווקטורי $\vec{F}$ הוא שדה משמר בתחום $\mathbf{R}^2$ אם ורק אם $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0$, ז"א $a=1$.

דרך 2: ידוע שאם $\vec{F}$ שדה משמר ב- $\mathbf{R}^2$, אז $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0$ ב- $\mathbf{R}^2$. זה גורר ש- $a=1$ ושיוויון זה מהווה תנאי הכרחי על מנת ש- $\vec{F}$ שדה משמר ב- $\mathbf{R}^2$. נוכיח בהמשך שאם $a=1$ אז קיימת פונקצית הפוטנציאל $U=U(x,y)$ עבור השדה $\vec{F}$. ניתן למצוא את U ע"י אינטגרציה של אחת משתי המשוואות $\frac{\partial U}{\partial x}=e^y+y, \frac{\partial U}{\partial y}=x+xe^y$. אם נבצע אינטגרציה לפי x נקבל $U(x,y)=\int\left(e^y+y\right)dx$ ולכן $U(x,y)=xe^y+xy+k(y)$. מגזירה של המשוואה האחרונה לפי y והצבה במשוואה $\frac{\partial U}{\partial y}=xe^y+x$ מקבלים $\frac{\partial U}{\partial y}=xe^y+x+k'(y)=xe^y+x$. מכאן $k'(y)=0$ ולכן $k(y)=c$ פונקציה קבועה. מסיקים ש- $U(x,y)=xe^y+xy+c$. מצאנו את פונקציית הפוטנציאל ולכן השדה הווקטורי $\vec{F}$ הוא שדה משמר בתחום $\mathbf{R}^2$.

פתרון שאלה 5.ב

דרך אחד: נתון $a=1$. העבודה שמבצע שדה $\vec{F}$ היא $W_C\left(\vec{F}\right)=\int_C\vec{F}d\vec{r}=\int_C\left(e^y+y\right)dx+\left(x+xe^y\right)dy$.

במצב הזה מצאנו בסעיף 5.א את פונקציית הפוטנציאל U של השדה המשמר $\vec{F}$. משפט היסודי Newton-Leibniz גורר ש- $W_C\left(\vec{F}\right)=U(-1,0)-U(1,0)$, כאשר U היא פונקצית הפוטנציאל של $\vec{F}$. לפיכך

$$W_C\left(\vec{F}\right)=U(-1,0)-U(1,0)=[U(x,y)=xe^y+xy+c]=\left(-1e^0+0-c\right)-\left(1e^0+0-c\right)=-2.$$

דרך שנייה: מכיוון ש- $\vec{F}$ הוא שדה משמר ב- $\mathbf{R}^2$, האינטגרל $W_C\left(\vec{F}\right)$ איננו תלוי במסלול. נגדיר מסלול חדש:

$\left[\begin{matrix}C^*: x=t, y=0\\ -1\le t\le 1\end{matrix}\right]$. מסיקים שוב ש-

$$W_C\left(\vec{F}\right)=\int_C\vec{F}d\vec{r}=-\int_{C^*}\vec{F}d\vec{r}=-\int_{t=-1}^{t=1}\left(\left(e^0+0\right)\cdot 1+\left(t+te^0\right)\cdot 0\right)dt=-\int_{t=-1}^{t=1}1dt=-2$$

פתרון שאלה 6.א

עלינו לחשב את השטף $\Phi=\Phi_\Sigma\left(\vec{F}\right)=\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}\bullet\vec{n}_{ext}dS$, כאשר המשטח הסגור Σ הנו שפת הגוף G. השדה $\vec{F}$ וכל הנגזרות החלקיות שלו רציפות ב $\mathbf{R}^3$, Σ משטח סגור מכוון, הכוון (כלפי חוץ) של Σ הוא הכוון החיובי ולכן ניתן להשתמש במשפט Gauss: לפי הנתון $\vec{F}=\left(2x+y^2\right)\vec{i}-\left(yx+z^2\right)\vec{j}+\left(zx-1\right)\vec{k}$ נובע ש-

$$\Phi=\Phi_\Sigma\left(\vec{F}\right)\underset{Gauss}{=}\iiint\limits_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iiint\limits_G\left(\underbrace{\frac{\partial\left(2x+y^2\right)}{\partial x}}_{=2}+\underbrace{\frac{\partial\left(-yx-z^2\right)}{\partial y}}_{=-x}+\underbrace{\frac{\partial\left(zx-1\right)}{\partial z}}_{=x}\right)dV=\iiint\limits_G 2dV$$

נחשב את האינטגרל המשולש ב- 2 דרכים.

<u>דרך 1</u>: לפי משפט Fubini:

$$\Phi=\Phi_\Sigma\left(\vec{F}\right)=\iiint\limits_G 2dV\;=2\iint\limits_D\left((4-x^2-y^2)-0\right)d(x,y)=$$

$$=2\int_0^2\left(\int_0^{2\pi}(4-r^2)rd\theta\right)dr=2\cdot2\pi\left(4\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2}=2\cdot2\pi\left(8-4\right)=\underbrace{16\pi}$$

<u>דרך 2</u>: נעבור לקואורדינאטות גליליות ונקבל:

$$\Phi=\Phi_\Sigma\left(\vec{F}\right)=\iiint\limits_G 2dV\;=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_0^{4-r^2}dz=2\cdot2\pi\int_0^2\left(4-r^2\right)rdr=\underbrace{16\pi}.$$

פתרון שאלה 6.ב

נסגור את <u>הפרבולואיד</u> $\mathbf{S}$ בעזרת המעגל $\mathbf{S}_1:\left(z=0,x^2+y^2\le4\right)$; נקבל משטח סגור $\Sigma=\mathbf{S}\cup\mathbf{S}_1$ שמהווה את השפת הגוף $G\subseteq\mathbf{R}^3$ הכלוא בין הפרבולויד $\mathbf{S}$ והמעגל $\mathbf{S}_1$.

נמצא את השטף $\Phi_{\mathbf{S}_1}\left(\vec{F}\right)$. המשטח $\mathbf{S}_1$ מוכל במישור $\left(z=0\right)$ ולכן וקטור נורמל היחידה ל- $\mathbf{S}_1$ שווה ל- $\vec{n}=-\vec{k}=(0,0,-1)$. לכן $\vec{F}\cdot\vec{n}=-R(x,y,z)=\left(-zx+1\right)$ ומסיקים ש-

$$\Phi_{\mathbf{S}_1}\left(\vec{F}\right)=\iint\limits_{\mathbf{S}_1}\vec{F}\cdot\vec{n}ds=\iint\limits_{\mathbf{S}_1\subset(z=0)}\left(-zx+1\right)ds=\iint\limits_{\mathbf{S}_1}1ds=area(\mathbf{S}_1)=4\pi.$$

<u>מסקנה</u>: השטף דרך המשטח $\mathbf{S}$ שווה ל-

$$\Phi_{\mathbf{S}}\left(\vec{F}\right)=\iint\limits_{\mathbf{S}}\vec{F}\cdot\vec{n}ds=\Phi_\Sigma\left(\vec{F}\right)-\Phi_{\mathbf{S}_1}\left(\vec{F}\right)=16\pi-4\pi=12\pi.$$