פתרון מבחן במתמטיקה בדידה תשפ"א סמסטר ב שאלון X

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות בכדי לקבל ניקוד מלא. אלא אם כתוב אחרת, יש לנמק את תשובתכם באופן מלא וברור. יש לציין באופן מפורש וברור באילו משפטים, טענות או נוסחאות ידועות אתם משתמשים. תשובות חלקיות, גם אם נכונות, לא ייזכו אותכם בניקוד מלא.

1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** קיבעו האם הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה,

$$((P \wedge (Q \vee R)) \wedge (Q \oplus R) \wedge P) \longrightarrow R$$

פתרון: הפסוק יקבל ערך F אם ורק אם:

(א) R הוא F

(ב) $(P \wedge (Q \vee R)) \wedge (Q \oplus R) \wedge P$ הוא T. אלו נובעים מטבלת האמת של קשר הגרירה. לכן,

(ג) P הוא T **נובע מ:** (ב) , $TT_\wedge$

(ד) $(Q \oplus R)$ הוא T **נובע מ:** (ב) , $TT_\wedge$

(ה) $P \wedge (Q \vee R)$ הוא T **נובע מ:** (ב) , $TT_\wedge$

(ו) Q הוא T **נובע מ:** (א), (ד), $TT_\oplus$.

קיבלנו שעבור הערכים $P \equiv T,\ Q \equiv T,\ R \equiv F$ הפסוק כולו מקבל ערך F ולכן הפסוק **אינו טאוטולוגיה.**

2. **(10 נק)** הראו כי אוסף כל הישרים במישור ($\mathbb{R}^2$) העוברים דרך הראשית הוא מעוצמה $\aleph$.

פתרון: כל ישר במישור העובר דרך הראשית מוגדר באופן יחיד ע"י השיפוע שלו, וכל מספר ממשי מגדיר שיפוע של ישר העובר דרך הראשית. באופן מפורש, יהא

$$\ell_t = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax + by = 0, b \neq 0, t = -\frac{a}{b}\}$$

ישר העובר דרך הראשית בעל שיפוע t. כמו כן, יהא $\ell_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 0\}$ הישר שהוא למעשה ציר Y ב $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. נסמן

$$L = \{\ell_t\}_{t \in \mathbb{R}}$$

נשים לב כי הקבוצה L אינה כוללת את הישר ℓ_∞. נגדיר פונקציה

$$F : L \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(\ell_t) = t$$

הפונקציה F היא חח"ע: נניח כי $F(\ell_t) = F(\ell_s)$ ונוכיח כי $\ell_t = \ell_s$. אכן,

$$\begin{aligned} F(\ell_t) = F(\ell_s) &\iff \\ t = s &\iff \\ \ell_t = \ell_s \end{aligned}$$

הפונקציה F היא על: יהא $t \in \mathbb{R}$ מספר (סופי). אז הישר

$$\ell_t = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid tx - y = 0\}$$

מקיים כי $F(\ell_t) = t$ ולכן הפונקציה היא על.
ולכן בסה"כ

$$|L| = |\mathbb{R}| = \aleph$$

כנדרש.

2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** בכמה דרכים ניתן לחלק 10 כדורים **שונים** ל 4 תאים, כך שאף תא לא יהיה ריק?

פתרון: נשתמש בעקרון הכלה-הפרדה. נגדיר :

A_i - קבוצת כל החלוקות בהן תא מספר i הוא ריק. $i = 1, 2, 3, 4$.

U - קבוצת כל החלוקות האפשריות.

מה שאנחנו מחפשים זה את המשלים של איחוד את הקבוצות A_i, כלומר

$$|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

מתקיים :

$$\begin{aligned} |A_i| &= 3^{10} \\ |A_i \cap A_j| &= 2^{10} \\ |A_i \cap A_j \cap A_k| &= 1^{10} \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 0 \end{aligned}$$

ולכן סה"כ נקבל :

$$\begin{aligned} |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |U| - \binom{4}{1}|A_1| + \binom{4}{2}|A_1 \cap A_2| - \binom{4}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 4^{10} - 4 \cdot 3^{10} + 6 \cdot 2^{10} - 4 \cdot 1 \\ &= 818520 \end{aligned}$$

2. **(10 נק)** הוכיחו כי אם בוחרים 6 מספרים טבעיים שונים מבין המספרים $1, 2, ..., 9$ בהכרח יהיו שני מספרים שסכומם יהיה שווה ל 10.

פתרון: נשתמש בעקרון שובך היונים ונגדיר:

תאים: $\{1,9\},\ \{2,8\},\ \{3,7\},\ \{4,6\},\ \{5\}$

יונים: המספרים שנבחרו.

מכיוון שיש 5 תאים ו 6 יונים, יש לפחות תא אחד שיש בו שתי יונים, כלומר, קיים תא שיש בו שני מספרים וסכומם הוא 10. נשים לב שכיוון שהמספרים שונים, לא ייתכן כי בתא $\{5\}$ יהיו שני מספרים.

3 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** מה מספר האפשרויות לצבוע לוח משבצות בגודל $2\times n$ כך שכל משבצת נצבעת בשחור או בלבן ואסור ששתי משבצות שחורות ייגעו זו בזו (כאן הכוונה שאסור שיהיו שתי משבצות שחורות אחת ליד השניה, אחת מעל השניה או באלכסון)?

   (א) **(1 נק)** כיתבו את תנאי ההתחלה עבור $n=1$.

   (ב) **(5 נק)** כיתבו את נוסחת הנסיגה.

   (ג) **(4 נק)** פיתרו את נוסחת הנסיגה כאשר נתון כי $a_0=1$.

פתרון: נסמן ב a_n את מספר הדרכים לצבוע לוח כזה באורך n. עבור $n=1$, שתי המשבצות יכולות להיות לבנות, או שאחת שחורה ואחת לבנה. לכן סה"כ $a_1=3$.

הלוח מורכב מ n מלבנים כאשר כל מלבן מורכב משתי משבצות. נתבונן במלבן ה nי. אם שתי המשבצות במלבן הnי צבועות בלבן, אז כל צביעה חוקית של $n-1$ הלבנים הראשונים היא אפשרית ולכן סך האפשרויות לכך הוא a_{n-1}.

אם אחת המשבצות במלבן ה nי צבועה בשחור, הרי ששתי המשבצות במלבן ה $n-1$ חייבות להיות צבועות בלבן ואז כל צביעה חוקית של $n-2$ הלבנים הראשונים אפשרית. מכיוון שיש שתי אפשרויות שמשבצת אחת במלבן ה $n-1$ תהיה צבועה שחור נקבל במקרה זה תרומה של $2a_{n-2}$. ולכן סה"כ

$$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$$

נפתור כעת את נוסחת הנסיגה: הפולינום האופייני הוא

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

ולכן מתקיים

$$a_n=A_1 2^n+A_2(-1)^n$$

נשתמש בתנאי ההתחלה: $a_0=1, a_1=3$:

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 3 = 2A_1 - A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{4}{3} \\ A_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

לכן

$$\boldsymbol{a_n = \frac{4}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{1}{3}\left(2^{n+2} + (-1)^{n+1}\right)}$$

2. **(10 נק)** הוכיחו באינדוקציה כי עבור כל $n \geq 1$ הביטוי $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ מתחלק ב 21 ללא שארית.

פתרון: תנאי התחלה $n = 1$**:**

$$4^{1+1} + 5^{2-1} = 16 + 5 = 21$$

ולכן הטענה נכונה עבור $n = 1$. נניח כי הטענה נכונה עבור n מסויים ונוכיח עבור $n + 1$.

$$4^{(n+1)+1} + 5^{2(n+1)-1} = 4 \cdot 4^{n+1} + 5^2 \cdot 5^{2n-1} \quad = 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1}$$

המחובר הראשון מתחלק ב 21 מהנחת האינדוקציה והמחובר השני מתחלק ב 21 כי 21 כופל אותו. ולכן מסקנת האינדוקציה היא שהמספר מתחלק ב 21 לכל $n \geq 1$ כנדרש.

4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** לדנה יש 15 צמידים **שונים** מסוגים שונים: 3 מזהב, 3 מכסף, 3 מנחושת, 3 מעץ ו 3 מחוטים. כל בוקר דנה בוחרת באקראי 4 צמידים שונים מתוך ה 15 ועונדת אותם על ידיה - 2 צמידים על כל יד. כמה אפשרויות שונות יש לדנה לענוד לידיה צמידים מ 4 סוגים שונים? **שימו לב:** יש להבחין בין הצמידים שעל יד שמאל לבין אלו שעל יד ימין.

פתרון: ראשית, נבחר 4 סוגים של צמידים מבין ה 5 שישנם. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{5}{4} = 5$.

כעת, מכל סוג שנבחר, נבחר צמיד אחד מבין השלושה שיש. סה"כ יש $3^4 = 81$ אפשרויות לעשות זאת.
לבסוף, נבחר שני צמידים מתוך הארבעה שיהיו על יד ימין (והשניים האחרים על יד שמאל). מספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{4}{2} = 6$.
סה"כ קיבלנו שיש $5 \cdot 81 \cdot 6 = 2430$ אפשרויות לדנה לבחור צמידים.

2. **(10 נק)** שליח רוצה לעבוד 5 ימים בשבוע, אולם הוא רוצה לנוח לפחות באחד מבין הימים שישי ושבת. בכמה דרכים הוא יכול לעשות זאת?

פתרון: נחשב את סך כל האפשרויות של השליח לבחור 5 ימים מתוך ה 7 לעבוד בהם ונחסר מכך את מספר האפשרויות שהימים שישי ושבת נבחרו שניהם.
סה"כ האפשרויות לבחירת ימים: $\binom{7}{5} = 21$
סה"כ האפשרויות שהימים שישי ושבת נבחרו = סהכ האפשרויות לבחור את שלושת הימים הנותרים: $\binom{5}{3} = 10$
והתשובה הסופית היא $21 - 10 = 11$.

5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(12 נק)** 4 פיראטים מחלקים ביניהם אוצר המורכב מ 70 מטבעות זהב ו 120 מטבעות כסף. כל פיראט יכול לקבל **לפחות** 5 מטבעות זהב ו 20 מטבעות כסף **ולכל היותר** 25 מטבעות זהב ו 40 מטבעות כסף. בכמה דרכים ניתן לחלק את האוצר בין הפיראטים?

פתרון: נשתמש בפונקציות יוצרות בכדי לפתור את השאלה. ראשית, נכתוב פונקציה יוצרת עבור חלוקת מטבעות הזהב. כאן, יש 4 פיראטים, סה"כ מטבעות הזהב הוא 70 וכל פיראט יכול לקבל בין 5 ל 25 מטבעות. כלומר, המשוואה והפונקציה הן:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 70,\ 5 \le x_i \le 25$$

$$f(x) = \left(x^5 + \cdots + x^{25}\right)^4 = \left(x^5\left(1 + x + \cdots + x^{20}\right)\right)^4 = x^{20} \cdot \left(\frac{1 - x^{21}}{1 - x}\right)^4$$

באופן דומה עבור מטבעות הכסף נקבל את הפונקציה

$$g(x) = \left(x^{20} + \cdots + x^{40}\right)^4 = x^{80}\left(1 + x + \cdots + x^{20}\right)^4 = x^{80} \cdot \left(\frac{1 - x^{21}}{1 - x}\right)^4$$

בכדי למצוא את התשובה לשאלה, אנחנו צריכים את המקדם של x^{70} בפונקציה $f(x)$ ואת המקדם של x^{120} בפונקציה $g(x)$ ואז לכפול ביניהם. עבור $f(x)$, מחפשים את המקדם של x^{50} בביטוי $\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4$:

$$\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4 = \left(1-x^{21}\right)^4\left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = (1-4x^{21}+6x^{42}-4x^{63}+x^{84})(1+x+\cdots)^4$$

האפשרויות בכופל הראשון הן עבור $1, x^{21}, x^{42}$.

עבור 1 יש לקחת את המקדם של x^{50} בביטוי $(1+x+\cdots)^4$: $D(4,50)=\binom{53}{3}$

עבור x^{21}יש לכפול ב -4 את המקדם של x^{29} באותו ביטוי : $-4\binom{32}{3} = -4\cdot D(4,29)$

עבור x^{42} יש לכפול ב 6 את המקדם של x^8 : $6\binom{11}{3} = 6\cdot D(4,8)$

ולכן סה"כ האפשרויות עבור מטבעות הזהב הוא $4576 = \binom{53}{3}-4\binom{32}{3}+6\binom{11}{3}$

באופן דומה, עבור הפונקציה $g(x)$, מחפשים את המקדם של x^{120} כלומר את המקדם של x^{40} בביטוי $\left(\frac{1-x^{21}}{1-x}\right)^4$. כאן, בכופל הראשון האפשרויות הן עבור 1 ו x^{21}.

עבור 1 יש לקחת את המקדם של x^{40} בביטוי $(1+x+\cdots)^4$: $D(4,40)=\binom{43}{3}$

עבור x^{21} יש לכפול ב $4-$לקחת את המקדם של x^{19} באותו ביטוי : $\binom{22}{3} = D(4,19)$

ולכן סהכ האפשרויות עבור מטבעות הכסף הוא $6181 = \binom{43}{3}-4\binom{22}{3}$

והתשובה הסופית היא $4576\cdot 6181 = 28284256$

2. **(8 נק)** מהו המקדם של x^3 בביטוי $\left(\frac{x^2}{6}-\frac{3}{x}\right)^{12}$?

פתרון:

$$\left(\frac{x^2}{6}-\frac{3}{x}\right)^{12} = \sum_{n=0}^{12}\binom{12}{n}\left(\frac{x^2}{6}\right)^n\left(\frac{-3}{x}\right)^{12-n} = \sum_{n=0}^{12}\binom{12}{n}\frac{(-3)^{12-n}}{6^n}x^{3n-12}$$

$3n-12=3$ כאשר $n=5$ ולכן המקדם הוא ==

$$\boldsymbol{\binom{12}{5}\frac{(-3)^7}{6^5} = -\binom{12}{5}\frac{3^2}{2^5}} = -222.75$$

6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(5 נק)** האם נכון שבגרף פשוט, לא מכוון מספר הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית הוא זוגי (או אפס)? נמקו היטב בכדי לקבל ניקוד מלא על השאלה.

פתרון: הטענה נכונה. יהא $G = (V, E)$ גרף פשוט לא מכוון כאשר $n = |G|$.
ממשפט לחיצות הידיים מתקיים כי

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2|E|$$

כאשר d_i מסמל את הדרגה של קודקוד i. מכיוון שצד ימין של המשוואה הוא מספר זוגי, מתקיים כי בצד השמאלי חייב להיות מספר זוגי של דרגות אי-זוגיות (או אפס).

2. **(15 נק)** הוכיחו **במפורש** את הטענה הבאה : יהיו A, B קבוצות. אז

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

פתרון:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$\begin{aligned}
&= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c) \\
&= ((A \cup B) \cap (B \cup B^c)) \cap ((A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)) \\
&= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\
&= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
&= (A \cup B) - (A \cap B)
\end{aligned}$$