יונתן כהן

אלגברה לינארית

תרגול מספר 7

תתי מרחבים

צירופים לינאריים

תתי מרחבים

.1

$\mathbb{R}^2 \supseteq U = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$, האם U תת מרחב של $\mathbb{R}^2$?

נבדוק האם הקבוצה U סגורה בחיבור וקטורי וסגורה בכפל בסקלר (של $\mathbb{R}^2$).

נסתכל על הוקטורים $\mathbf{v} = (2,4)$, $\mathbf{w} = (3,9)$.

$2^2 = 4$ ולכן $\mathbf{v} \in U$.

$3^2 = 9$ ולכן $\mathbf{w} \in U$.

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (2,4) + (3,9) = (5,13)$$

$5^2 = 25 \neq 13$ ולכן $\mathbf{v} + \mathbf{w} \notin U$.

$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ אבל $\mathbf{v} + \mathbf{w} \notin U$, ולכן הקבוצה U אינה סגורה בחיבור וקטורי.

ולכן U אינה תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

פתרון אחר :

$2^2 = 4$ ולכן $\mathbf{v} \in U$.

$5 \in \mathbb{R}$

$$5\mathbf{v} = 5 \cdot (2,4) = (10,20)$$

$10^2 = 100 \neq 20$ ולכן $5\mathbf{v} \notin U$.

$\mathbf{v} \in U$ אבל $5\mathbf{v} \notin U$, ולכן הקבוצה U אינה סגורה בכפל בסקלר.

ולכן U אינה תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

.2

$\mathbb{R}^3 \supseteq \{ (x,y,z) \mid 2x+3y-4z=0 \} = U$, האם U תת מרחב של $\mathbb{R}^3$?

נבדוק שהקבוצה U אינה ריקה.
לדוגמה הוקטור $(4,0,2)$ נמצא ב U כי רכיביו מקיימים את התנאי $2\cdot 4+3\cdot 0-4\cdot 2=0$. ולכן הקבוצה U אינה ריקה.

נניח $\mathbf{v},\mathbf{w}\in U$.
$\mathbf{v}=(x,y,z)$ כאשר x,y,z מקיימים את התנאי $2x+3y-4z=0$,
$\mathbf{w}=(a,b,c)$ כאשר a,b,c מקיימים את התנאי $2a+3b-4c=0$,

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=(x,y,z)+(a,b,c)=(x+a,\,y+b,\,z+c)$$

נבדוק אם הוקטור $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ נמצא ב U, נבדוק האם רכיביו מקיימים את התנאי להיות ב U .

$$2(x+a)+3(y+b)-4(z+c)=\underbrace{[2x+3y-4z]}_{=0}+\underbrace{[2a+3b-4c]}_{=0}=0+0=0$$

קיבלנו ש $2(x+a)+3(y+b)-4(z+c)=0$ ולכן $(x+a,\,y+b,\,z+c)\in U$, כלומר $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in U$.
ולכן הקבוצה U סגורה בחיבור וקטורי.

נניח $\mathbf{v}\in U$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$.
$\mathbf{v}=(x,y,z)$ כאשר x,y,z מקיימים את התנאי $2x+3y-4z=0$,

$$\alpha\mathbf{v}=\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$$

נבדוק אם הוקטור $\alpha\mathbf{v}$ נמצא ב U, נבדוק האם רכיביו מקיימים את התנאי להיות ב U .

$$2\alpha x+3\alpha y-4\alpha z=\alpha\cdot\underbrace{[2x+3y-4z]}_{=0}=\alpha\cdot 0=0$$

קיבלנו ש $2\alpha x+3\alpha y-4\alpha z=0$ ולכן $(\alpha x,\alpha y,\alpha z)\in U$, כלומר $\alpha\mathbf{v}\in U$.
ולכן הקבוצה U סגורה בכפל בסקלר.

הקבוצה U אינה ריקה, סגורה בחיבור וקטורי ובכפל בסקלר, ולכן היא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

3.

$U = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$ כאשר A מטריצה מסדר $m \times n$. כלומר U הוא קבוצת הפתרונות של המערכת הלינארית ההומוגנית $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, זו תת קבוצה של $\mathbb{R}^n$.

האם U תת מרחב של $\mathbb{R}^n$?

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ זו מערכת לינארית הומוגנית, ולכן יש לה את הפתרון הטריביאלי $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ולכן $\mathbf{0} \in U$, קבוצת הפתרונות U אינה ריקה.

נניח $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$, כלומר $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

כלומר הסכום $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ הוא פתרון של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, כלומר שייך ל U.

ולכן הקבוצה U סגורה בחיבור וקטורי.

נניח $\mathbf{v} \in U$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbf{v} \in U$ כלומר $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha \cdot A\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

כלומר המכפלה $\alpha\mathbf{v}$ היא פתרון של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, כלומר שייכת ל U.

ולכן הקבוצה U סגורה בכפל בסקלר.

הקבוצה U אינה ריקה, סגורה בחיבור וקטורי ובכפל בסקלר, ולכן היא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

.4

$\mathbb{R}^3 \supseteq U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+\ \ y+\ \ z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{array} \right\}$, האם U תת מרחב של $\mathbb{R}^3$?

U היא בדיוק קבוצת הפתרונות של המערכת הלינארית

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$$

לפי הדוגמה הקודמת, U תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

.5

$U = \{\ p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \mid p(1) + 5p'(2) = 0\ \} \subseteq P_n(\mathbb{R})$, האם U תת מרחב של $P_n(\mathbb{R})$?

נבדוק שהקבוצה U אינה ריקה.

נסתכל על פולינום האפס $p(x) = 0$.

$$p(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad p'(x) = 0$$

$$p(1) + 5p'(2) = 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

ולכן פולינום האפס $p(x) = 0$ נמצא ב U. ולכן הקבוצה U אינה ריקה.

נניח $p(x), q(x) \in U$.

$p(x) \in U$ כלומר מתקיים $p(1) + 5p'(2) = 0$.

$q(x) \in U$ כלומר מתקיים $q(1) + 5q'(2) = 0$.

נסמן $r(x) = p(x) + q(x)$.

נבדוק אם הוקטור $r(x)$ נמצא ב U, נבדוק האם הוא מקיים את התנאי להיות ב U .

$$r(x) = p(x) + q(x) \quad \Rightarrow \quad r'(x) = p'(x) + q'(x)$$

$$r(1) + 5r'(2) = \big(p(1) + q(1)\big) + 5\big(p'(2) + q'(2)\big) = \underbrace{[p(1) + 5p'(2)]}_{=0} + \underbrace{[q(1) + 5q'(2)]}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

קיבלנו ש $r(1) + 5r'(2) = 0$ ולכן $r(x) \in U$, כלומר $p(x) + q(x) \in U$.

ולכן הקבוצה U סגורה בחיבור וקטורי.

נניח $p(x) \in U$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$.

$p(x) \in U$ כלומר מתקיים $p(1) + 5p'(2) = 0$.

נסמן $r(x) = \alpha p(x)$.

נבדוק אם הוקטור $r(x)$ נמצא ב U, נבדוק האם הוא מקיים את התנאי להיות ב U .

$$r(x) = \alpha p(x) \quad \Rightarrow \quad r'(x) = \alpha p'(x)$$

$$r(1) + 5r'(2) = \alpha p(1) + 5 \cdot \alpha p'(2) = \alpha \cdot \underbrace{[p(1) + 5p'(2)]}_{=0} = \alpha \cdot 0 = 0$$

קיבלנו ש $r(1) + 5r'(2) = 0$ ולכן $r(x) \in U$, כלומר $\alpha p(x) \in U$.

ולכן הקבוצה U סגורה בכפל בסקלר.

הקבוצה U אינה ריקה, סגורה בחיבור וקטורי ובכפל בסקלר, ולכן היא תת מרחב של $P_n(\mathbb{R})$.

.6

$M_{n\times n}(\mathbb{R}) \supseteq U=\{\, A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^2=A \,\}$, האם U תת מרחב של $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

נניח ש $A\in U$ כלומר $A^2=A$, ו $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$(\alpha A)^2=\alpha^2A^2 \underbrace{=}_{A^2=A} \alpha^2 A \neq \alpha A$$

$(\alpha A)^2\neq \alpha A$ ולכן $\alpha A\notin U$, ולכן הקבוצה U אינה סגורה בכפל בסקלר.

ולכן U אינה תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.

פתרון אחר :

המטריצה I מקיימת $I^2=I\cdot I=I$ ולכן $I\in U$.

$3\in\mathbb{R}$

$$(3I)^2=3^2I^2=9I\neq 3I$$

$(3I)^2\neq 3I$ ולכן $3I\notin U$.

$I\in U$ אבל $3I\notin U$, ולכן הקבוצה U אינה סגורה בכפל בסקלר.

ולכן U אינה תת מרחב של $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

צירופים לינאריים

1.

$\mathbf{v}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{v}_2=(-1,0,1)$, $\mathbf{v}_3=(1,-1,-1)$.

א. האם $\mathbf{w}=(1,2,3)$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$?

ב. אם כן, האם $\mathbf{w}$ מתקבל כצירוף לינארי של הוקטורים $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ באופן יחיד או בהרבה דרכים ?

ג. אם כן, לרשום את $\mathbf{w}$ כצירוף לינארי של $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.

א.

$\mathbf{w}$ הוא צרוף לינארי של $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$

$\Leftrightarrow$ קיים צירוף לינארי של הוקטורים $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ השווה ל $\mathbf{w}$

$\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים x,y,z כך ש $x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3=\mathbf{w}$

$\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים x,y,z כך שמתקיים

$$x(1,1,1)+y(-1,0,1)+z(1,-1,-1)=(1,2,3)$$

$\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים x,y,z כך שמתקיים

$$(x-y+z\ ,\ x-z\ ,\ x+y-z)=(1,2,3)$$

$\Leftrightarrow$ קיימים סקלרים x,y,z כך שמתקיים

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x\qquad -z=2 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ קיים פתרון למערכת המשוואות המתאימה למטריצה

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

נשים לב :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

לסיכום :

$\mathbf{w}$ הוא צרוף לינארי של $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\,|\,\mathbf{w}$.

נדרג את המטריצה למטריצה מדורגת כדי לקבוע אם למערכת יש פתרון או לא.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

אין שורת סתירה ולכן למערכת יש פתרון.

מכיוון שלמערכת יש פתרון, נובע ש $\mathbf{w}$ הוא אכן צרוף לינארי של הוקטורים $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.

ב.

במטריצה המדורגת, בכל העמודות $1-3$ יש איברים פותחים, ולכן כל המשתנים הם משתנים קשורים.
ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד.

ולכן יש שלשה יחידה של מספרים x, y, z המקיימים $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}$, כלומר $\mathbf{w}$ מתקבל כצירוף לינארי של הוקטורים $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ באופן יחיד.

ג.

נמשיך את הדרוג כדי למצוא את הפתרון היחיד של המערכת.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 + 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ולכן הפתרון היחיד של המערכת הוא $(x, y, z) = (2,1,0)$.

כלומר המספרים היחידים x, y, z המקיימים $x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}$ הם $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$.

כלומר הדרך היחידה לרשום את הוקטור $\mathbf{w}$ כצרוף לינארי של הוקטורים $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ היא

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$$

.2

האם $A_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $W=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ הוא צירוף לינארי של A_1,A_2,A_3 ?

אם כן, לרשום את W כצירוף לינארי של A_1,A_2,A_3 .

הוקטור W הוא צרוף לינארי של הוקטורים A_1,A_2,A_3 , כלומר קיימים סקלרים x,y,z כך ש $xA_1+yA_2+zA_3=W$, אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $A_1,A_2,A_3\,|\,W$.

נדרג את המטריצה למטריצה מדורגת כדי לקבוע אם למערכת יש פתרון או לא.

$$\begin{array}{c}\\ (1,1)\rightarrow\\ (1,2)\rightarrow\\ (2,1)\rightarrow\\ (2,2)\rightarrow\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}A_1 & A_2 & A_3 & W\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]\end{array}\xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{R_2\to R_2+R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

אין שורת סתירה ולכן למערכת יש פתרון.

מכיוון שלמערכת יש פתרון, נובע שהוקטור W הוא אכן צרוף לינארי של הוקטורים A_1,A_2,A_3 .

הערה :

במטריצה המדורגת, בעמודה 3 אין איבר פותח, ולכן משתנה z הוא משתנה חופשי.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

ולכן ישנן אינסוף שלשות של מספרים x,y,z המקיימות $xA_1+yA_2+zA_3=W$, כלומר ישנים אינסוף צירופים לינאריים של הוקטורים A_1,A_2,A_3 השווים ל W, ובמילים אחרות W מתקבל כצירוף לינארי של הוקטורים A_1,A_2,A_3 באינסוף דרכים.

כדי לרשום את W כצירוף לינארי של A_1,A_2,A_3 צריך למצוא פתרון של המערכת. למערכת יש אינסוף פתרונות, צריך למצוא אחד מהם.

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases}x \quad + \; z=1\\ \quad y+2z=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=1-z\ ,\ y=1-2z$$

נבחר ערך ל z (יש כמובן אינסוף אפשרויות לבחור את הערך של z), למשל

$$z=2\quad\Rightarrow\quad x=1-z=-1\ ,\ y=1-2z=-3$$

ומתקבל הפתרון $z=2$, $y=-3$, $x=-1$.

כלומר דרך אחת לרשום את הוקטור W כצרוף לינארי של הוקטורים A_1,A_2,A_3 היא

$$W=-A_1-3A_2+2A_3$$

אפשרות אחרת :

$$z=0\quad\Rightarrow\quad x=1-z=1\ ,\ y=1-2z=1$$

ומתקבל הפתרון $z=0$, $y=1$, $x=1$.

כלומר דרך נוספת לרשום את הוקטור W כצרוף לינארי של הוקטורים A_1,A_2,A_3 היא

$$W=A_1+A_2+0A_3$$

.3

. $p_1(x)=x+1$, $p_2(x)=x+x^2$, $p_3(x)=x^2-1$

עבור איזה ערכים של a,b,c יהיה $w(x)=a+bx+cx^2$ צירוף לינארי של p_1,p_2,p_3 ?

הוקטור $w(x)$ הוא צרוף לינארי של הוקטורים p_1,p_2,p_3 , כלומר קיימים סקלרים α,β,γ כך ש $\alpha p_1(x)+\beta p_2(x)+\gamma p_3(x)=w(x)$, אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $p_1,p_2,p_3 \mid w$.

נדרג את המטריצה למטריצה מדורגת כדי לקבוע אם למערכת יש פתרון או לא.

$$\begin{array}{c} \\ 1\to \\ x\to \\ x^2\to \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת.

למערכת יש פתרון אם ורק אם אין שורת סתירה, וזה קורה אם ורק אם מתקיים התנאי

$$a-b+c=0$$

ולסיכום, הוקטור $w(x)=a+bx+cx^2$ הוא צרוף לינארי של הוקטורים p_1,p_2,p_3 אם ורק אם רכיביו a,b,c מקיימים את התנאי $a-b+c=0$.