פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"ב סמסטר ב
שאלון X

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות בכדי לקבל ניקוד מלא. אלא אם כתוב אחרת, יש לנמק את תשובתכם באופן מלא וברור. יש לציין באופן מפורש וברור באילו משפטים, טענות או נוסחאות ידועות אתם משתמשים. תשובות חלקיות, גם אם נכונות, לא ייזכו אותכם בניקוד מלא.

1 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=4\\ x+ky+4z&=6\\ x+2y+(k+2)z&=6 \end{aligned}$$

(א) מצאו את הערכים של הפרמטר k עבורו למערכת יש פתרון יחיד.אינסוף פתרונות\אין פתרון.

פתרון: נרשום את המטריצה המורחבת ונדרג כמידת האפשר מבלי לחלק בביטויים המכילים את k:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & k & 4 & 6\\ 1 & 2 & k+2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\longrightarrow R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & k-2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & k+2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\longrightarrow R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & k-2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right)$$

כעת,

i. עבור $k=1$: נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

מכיוון שהשורה האחרונה היא שורת סתירה נקבל כי במקרה זה למערכת **אין פתרון.**

ii. עבור $k=2$: נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

מכיוון ששתי השורות האחרונות זהות, נקבל כי במקרה זה למערכת יש **אינסוף פתרונות.**

iii. עבור $k \neq 1,2$: נקבל כי למערכת יש **פתרון יחיד.**

(ב) מצאו עבור אילו ערכים של k וקטור העמודה $v = \begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

פתרון: נציב את הוקטור v במערכת המשוואות:

$$\frac{18}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} = 4$$
$$\frac{18}{7} + k \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{2}{7} = 6$$
$$\frac{18}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + (k+2) \cdot \frac{2}{7} = 6$$

אם נסתכל על המשוואה השנייה (או השלישית) נקבל כי $k=8$.

2. **(10 נק)** נתון כי

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}^{2022} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מצאו את a^2.

רמז: מצאו תחילה מהי דרגת המטריצה הנתונה.

פתרון: ראשית, נשים לב כי לפנינו מערכת הומוגנית שיש לה פתרון לא טריוואלי כי $\begin{pmatrix}14\\6\end{pmatrix}$ הוא פתרון. ולכן, המטריצה אינה הפיכה. נוכל למצוא את הערך של a^2 בשתי דרכים שונות:

דרך 1 חישוב דטרמיננטה:

$$0 = \left|\begin{pmatrix}1 & a\\2a & 1\end{pmatrix}^{2022}\right| = \left|\begin{pmatrix}1 & a\\2a & 1\end{pmatrix}\right|^{2022}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$0 = \left|\begin{pmatrix}1 & a\\2a & 1\end{pmatrix}\right| = 1 - 2a^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a^2 = \frac{1}{2}$$

דרך 2 דירוג המטריצה: מכיוון שהמטריצה אינה הפיכה ואינה מטריצת האפס, נובע כי דרגת המטריצה היא בהכרח 1. נדרג,

$$\begin{pmatrix}1 & a\\2a & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \longrightarrow R_2 - 2aR_1} \begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1-2a^2\end{pmatrix}$$

מכיוון שהדרגה היא 1 מתקיים כי $1 - 2a^2 = 0$ כלומר, $a^2 = \frac{1}{2}$.

2 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** יהא $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2. תהא $U \subseteq V$ הקבוצה המוגדרת ע"י

$$U = \left\{A \in V \mid A\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}A\right\}$$

(א) הראו כי U הוא תת מרחב וקטורי של V.

פתרון: נבדוק כי מתקיימות שלוש הדרישות לתת מרחב.

i. $0 \in U$: תהא $O_{2\times 2}$ מטריצת האפס מסדר 2×2. אז

$$O\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = O = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}O$$

ולכן $O \in U$.

ii. סגירות לחיבור: יהיו $A,B\in U$. צריך להוכיח כי $A+B\in U$. אכן,

$$(A+B)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}A+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(A+B)$$

ולכן $A+B\in U$.

iii. סגירות לכפל בסקלר: תהא $A\in U$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$. צריך להוכיח כי $\alpha A\in U$. אכן,

$$(\alpha A)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\alpha\left(A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)=\alpha\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}A\right)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(\alpha A)$$

ולכן $\alpha A\in U$.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל U.

פתרון: תהא $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ מטריצה כלשהי מסדר 2×2. בכדי ש A תהיה איבר במרחב U עליה לקיים את התנאי:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}$$

מכאן נקבל כי

$$a=a+c\Longrightarrow c=0$$
$$a+b=b+d\Longrightarrow a=d$$

ולכן הצורה הכללית של איבר ב U היא

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

ולכן הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

היא בסיס ל U. ולכן $\dim U=2$.

2. **(10 נק)** יהא V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$. הוכיחו **במפורש** כי לכל $v \in V$ האיבר הנגדי $-v \in V$ הוא יחיד. **שימו לב: אתם יכולים להשתמש אך ורק בהגדרת מרחב וקטורי.**

פתרון: יהא $v \in V$ כלשהו ונניח כי קיימים שני איברים נגדיים שנסמנם ב a, b. מתקיים כי

$$v \oplus a = 0 = a \oplus v$$
$$v \oplus b = 0 = b \oplus v$$

עלינו להראות כי $a = b$. נוסיף b לשני האגפים של המשוואה הראשונה ונקבל:

$$b \oplus (v \oplus a) = b \oplus 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(b \oplus v) \oplus a = b$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$0 \oplus a = b$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a = b$$

3 (20 נקודות)

יהא $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2 במשתנה x ועם מקדמים ממשיים. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$T : V \longrightarrow V$$

$$T(p(x)) = p(x-1)$$

1. מצאו מימד לגרעין ומימד לתמונה.

פתרון: נרשום את המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי $E = \{x^2, x, 1\}$ ואז נדרג בכדי למצוא את המימדים של הגרעין והתמונה.

$$T(x^2) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$
$$T(x) = x - 1$$
$$T(1) = 1$$

ולכן

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה $[T]_E^E$ היא מטריצה משולשת תחתונה שיש לה איברים שונים מאפס על האלכסון הראשי. בפרט, זוהי מטריצה מדורגת ללא שורות אפסים ולכן הפיכה. ולכן

$$\dim \ker T = 0,\ \dim ImT = 3$$

2. יהא $B = \{x + x^2, 1 + x^2, 1 + x\}$ בסיס ל V. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B^B$.
פתרון: מתקיים כי $[T]\,_B^B = \left([Id]\,_E^B\right)^{-1} \cdot [T]_E^E \cdot [Id]_E^B$. את המטריצה $[T]_E^E$ מצאנו בסעיף קודם. מטריצה המעבר מהבסיס B לבסיס הסטנדרטי E נתונה ע"י

$$[Id]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ונמצא את המטריצה $\left([Id]\,_E^B\right)^{-1}$ ע"י חישוב ההופכית. נקבל כי

$$\left([Id]\,_E^B\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$[T]_B^B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. יהא $q(x) = 3x^2 + 2x - 1$. חשבו את וקטורי הקורדינטות של $q(x)$ ושל $T(q(x))$ לפי הבסיס B.
פתרון: מתקיים כי

$$[q(x)]_B = [Id]_B^E\,[q(x)]_E = \left([Id]\,_E^B\right)^{-1}[q(x)]_E$$

ולכן,

$$[q(x)]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מתקיים כי

$$[T]_B^B \cdot [q(x)]_B = [T(q(x))]_B$$

ולכן

$$[T(q(x))]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

4 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** תהא $A_{3\times 3}$ מטריצה מסדר 3×3. ידוע כי הערכים העצמיים של A והוקטורים העצמיים המתאימים להם הם:

$$\lambda_1 = 3,\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 0,\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = 2,\ b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

הראו כי A לכסינה ומיצאו מטריצות D, P כך שניתן לרשום את A בצורה $A = PDP^{-1}$ כאשר $D_{3\times 3}$ מטריצה אלכסונית ו $P_{3\times 3}$ מטריצה הפיכה.
פתרון: נתון כי A היא מטריצה מסדר 3×3 ויש לה שלושה ערכים עצמיים שונים. ולכן, עבור כל ערך עצמי של A הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי שווה ל 1.
מתקיים כי

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & -7 & 2 \\ 10 & -5 & 4 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

2. **(10 נק)** נתונה מטריצה $A_{4\times 4}$ המקיימת את שלושת הבאים:

(א) $rk(A) = 2$

(ב) סכום כל שורה ב A שווה ל 3.

(ג) $(A-I)^{2022}=0$.

הוכיחו כי A מטריצה לכסינה. **הדרכה:** מיצאו תחילה את הערכים העצמיים של A ואת הריבויים הגיאומטריים השונים.

פתרון:

(א) מהנתון הראשון, נובע כי המטריצה A אינה הפיכה, ולכן 0 הוא ערך עצמי של A מריבוי גיאומטרי

$$m_g(0)=n-rk(A)=2-2=2$$

(ב) מהנתון השני, מכיוון שסכום כל שורה הוא 3, אז 3 הוא ערך עצמי של A.

(ג) מהנתון השלישי, 1 הוא שורש של הפולינום האופייני $|A-\lambda I|$, ולכן 1 הוא ערך עצמי של A.

(ד) כעת, מצאנו 3 ערכים עצמיים כאשר הערך העצמי 0 הוא מריבוי אלגברי **לפחות** $n-2$. אבל מכיוון שגם 1 ו 3 הם ערכים עצמיים, נובע כי

$$m_g(0)=2=m_a(0),\ m_g(3)=1=m_a(3),\ m_g(1)=1=m_a(1)$$

ולכן, לכל ערך עצמי של A הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי וסכום כל הריבויים האלגבריים הוא n ולכן המטריצה A לכסינה.

5 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(10 נק)** נתונות הדטרמיננטות של שתי המטריצות הבאות:

$$\det A=\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=5$$
$$\det B=\det\begin{pmatrix} e & 0\\ 0 & f\end{pmatrix}=3$$

(א) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} ae & bf\\ 2ae+ce & df+2bf\end{pmatrix}$$

פתרון: ראשית, נשים לב כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & bf \\ ce & df \end{pmatrix}$$

כעת,

$$\begin{pmatrix} ae & bf \\ 2ae+ce & df+2bf \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \longrightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} ae & bf \\ ce & df \end{pmatrix}$$

ולכן,

$$\det \begin{pmatrix} ae & bf \\ 2ae+ce & df+2bf \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} ae & bf \\ ce & df \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 = 15$$

(ב) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3f \end{pmatrix}$$

פתרון: נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה האחרונה. מתקיים כי

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3f \end{pmatrix} = 3f \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 3e \end{pmatrix} = (3f)(3e) \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 9 \cdot 3 \cdot 5 = 135$$

2. **(10 נק)** עבור כל אחת מהטענות הבאות קיבעו האם היא נכונה או שיקרית. אין צורך להוכיח ואין צורך למצוא דוגמא נגדית:

(א) אם $A_{5\times 5}$ היא מטריצה אנטי סימטרית אז $\det A = 0$. **פתרון: הטענה נכונה.**
הסבר: מתקיימים הבאים:

$$A = -A^T$$
$$\det(A) = \det\left(A^T\right)$$

ולכן,

$$\det(A^T) = \det(A) = \det(-A^T) = (-1)^5 \det(A^T)$$

כלומר קיבלנו כי

$$\det(A^T) = -\det(A^T)$$

ולכן $\det(A) = \det(A^T) = 0$

(ב) מטריצה $A_{n\times n}$ היא לכסינה אם ורק אם היא הפיכה. **פתרון: הטענה שיקרית.** **הסבר:** המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצה אלכסונית ולכן לכסינה, אבל ברור כי אינה הפיכה.

(ג) תהא$A_{n\times n}$ מטריצה ו $D_{n\times n}$ הצורה המדורגת הקנונית של A. נתון כי $A \neq D$ וכי $\det D = 0$. אז למערכת $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות. **פתרון: הטענה נכונה. הסבר:** מכיוון ש $\det(D) = 0$ והמטריצה D התקבלה מ A ע"י דירוג, נובע כי

$$\det(A) = \alpha \det(D) = \alpha \cdot 0 = 0$$

כאשר α הוא סקלר המתקבל ע"י ביצוע פעולות אלמנטריות כלשהן על המטריצה A. ולכן, המטריצה A היא מטריצה ריבועית שאינה הפיכה ולכן למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות.

(ד) אם V מ"ו והקבוצה $\{v_1, v_2, v_3\}$ היא קבוצה בלתי תלויה לינארית אז גם הקבוצה $\{v_2 - v_1, v_2 - v_3, v_1 - v_3\}$ בלתי תלויה לינארית. **פתרון: הטענה שיקרית.** **הסבר:** מתקיים כי

$$(v_2 - v_1) + (v_1 - v_3) = v_2 - v_3$$

ולכן הוקטור $v_2 - v_3$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים האחרים ולכן הקבוצה $\{v_2 - v_1, v_2 - v_3, v_1 - v_3\}$ היא קבוצה תלויה לינארית.

6 (20 נקודות) אין קשר בין הסעיפים השונים של השאלה.

1. **(5 נק)** יהא V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$. ותהא $<,>$ מכפלה פנימית המוגדרת על V. הוכיחו ישירות את משפט פיתגורס: יהיו $x, y \in V$. אז הוקטורים x, y ניצבים

זה לזה אם ורק אם $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

פתרון: מתקיים תמיד כי

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &=< x+y, x+y >=< x, x+y > + < y, x+y > \\ &=< x, x > +2 < x, y > + < y, y > \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x, y > \end{aligned}$$

ולכן, $< x, y >= 0 \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

2. **(15 נק)** יהא $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ יחד עם המכפלה הפנימית $< A, B >= tr(A^T B)$.
תהא

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) מיצאו את הנורמה של A.

פתרון:

$$||A||^2 =< A, A >= tr\left(A^T A\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3$$

ולכן $||A|| = \sqrt{3}$.

(ב) מיצאו מטריצה $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המאונכת למטריצה A. מיצאו מטריצה נוספת C המאונכת למטריצות A ו B שמצאתם.

פתרון: אם נקח $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז תמיד $A \perp B$. נמצא מטריצה נוספת C המאונכת למטריצה A. מכיוון ש B היא מטריצת האפס ייתקיים כי $B \perp C$.
מחפשים C כך ש

$$0 =< A, C >= tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = c + (b+d)$$

ולכן $c = -b - d$ ולכן

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b-d & d \end{pmatrix}$$

תהיה מאונכת ל A עבור כל ערך של a, b, d. נבחר למשל $a = b = d = 1$ ואז

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

תזכורת: עבור מטריצה $C_{n\times n}$ כלשהי העיקבה $tr(C)$ מוגדרת להיות סכום איברי האלכסון הראשי.