יונתן כהן

אלגברה לינארית

תרגול מספר 10

בסיסים לתתי מרחבים
משפטי המימד
קואורדינטות

בסיסים לתתי מרחבים

.1

נתון תת המרחב $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \middle| a+d=b+c \ , \ a+b+c+d=0\right\}$.

א. למצוא ל W בסיס ומימד.

ב. למצוא הצגה של W כתת מרחב span.

א.

תת המרחב W הוא תת המרחב של כל המטריצות מסדר 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ המקיימות את התנאים

$$\begin{cases} a-b-c+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$$

זו מערכת לינארית הומוגנית ב 4 הנעלמים a,b,c,d.

נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2$, ולכן המשתנים a,b הם משתנים קשורים, c,d משתנים חופשיים.

ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases} a \qquad +d=0 \\ \quad b+c \qquad =0 \end{cases} \Rightarrow \quad a=-d \ , b=-c$$

ולכן הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$(-d,-c,c,d)=c(0,-1,1,0)+d(-1,0,0,1)$$

ומכאן שוקטור כללי ב W הוא מהצורה

$$\begin{bmatrix} -d & -c \\ c & d\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ומשמעות הדבר היא ש

$$W=\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

לשם נוחות נסמן

$$w_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} \ , \ w_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

כלומר הקבוצה $\{w_1,w_2\}$ פורשת את W.

ניתן לבדוק שהקבוצה $\{w_1,w_2\}$ היא בת״ל.

זו קבוצה בת 2 וקטורים, ורואים שהוקטורים w_1,w_2 אינם פרופורציוניים, ולכן הקבוצה $\{w_1,w_2\}$ היא בת״ל.

לסיכום הקבוצה $\{w_1,w_2\}$ בת״ל ופורשת את W, ולכן היא בסיס של W.

$$\dim W=2$$

ב.

$\{w_1,w_2\}$ בסיס של W ולכן

$$W=\text{span}\{w_1,w_2\}$$

.2

נתון תת המרחב $V = \text{span}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

א. למצוא ל V בסיס ומימד.

ב. למצוא הצגה של V כתת מרחב של כל הוקטורים שרכיביהם מקיימים תנאים הומוגניים (למצוא את המשוואות של תת המרחב).

א.

כדי למצוא בסיס ל V, נבנה מטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים הפורשים את V $[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

$$\begin{array}{c} \\ (1,1)\to \\ (1,2)\to \\ (2,1)\to \\ (2,2)\to \end{array}\begin{array}{c} \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3$.

ולכן נובע שעמודות $1,2,3$ של המטריצה הן בסיס של מרחב עמודות שלה.

ולכן הוקטורים (המטריצות) המתאימים לעמודות $1,2,3$ של המטריצה הן בסיס של תת המרחב V.

כלומר בסיס של V נתון ע"י

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim V = 3$

ב.

וקטור כללי ב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

הוקטור הכללי $z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ הוא איבר של תת המרחב V, כלומר הוא צרוף לינארי של v_1, v_2, v_3, v_4, אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $v_1, v_2, v_3, v_4 \mid z$.

$$\begin{array}{c} \\ (1,1)\to \\ (1,2)\to \\ (2,1)\to \\ (2,2)\to \end{array}\begin{array}{c} \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad z \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 2 & 0 & c \\ 1 & 1 & 2 & 0 & d \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & d-a \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & d-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-a \end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

למערכת יש פתרון אם ורק אם אין שורת סתירה, וזה קורה אם ורק אם

$b-a=0$

לסיכום, הוקטור הכללי $z=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ הוא צרוף לינארי של v_1,v_2,v_3,v_4, כלומר איבר של תת המרחב V, אם ורק אם רכיביו מקיימים את התנאי

$-a+b=0$

$V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| -a+b=0\right\}$

.3

נתונים תתי המרחבים

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\middle| a+d=b+c\,,\, a+b+c+d=0\right\}$$

$$V=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

א. למצוא בסיס ומימד ל $V+W$.

ב. למצוא מימד ל $V\cap W$.

ג. למצוא בסיס ל $V\cap W$.

א.

אם U,W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V, ואם $U=\operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_k\}$ $W=\operatorname{span}\{w_1,\ldots,w_m\}$ אז $U+W=\operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_k,w_1,\ldots,w_m\}$

תת המרחב V נתון כתת מרחב span

$$V=\operatorname{span}\left\{v_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

תת המרחב W נתון כתת מרחב של כל הוקטורים במרחב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ שרכיביהם מקיימים תנאים הומוגניים. אבל בתרגיל קודם מצאנו הצגה של W כתת מרחב span

$$W=\operatorname{span}\left\{w_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ולכן

$$V+W=\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4,w_1,w_2\}$$

הערה:

מצאנו ש $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V ולכן

$$V=\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$$

ומכאן ש

$$V+W=\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3,w_1,w_2\}$$

נמצא בסיס ל $V+W$ (כפי שמוצאים בסיס לתת מרחב span, בשיטת העמודות).

נבנה מטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים הפורשים את $V+W$ $[v_1,v_2,v_3,w_1,w_2]$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,1)\to \\ (1,2)\to \\ (2,1)\to \\ (2,2)\to \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3,4$.

ולכן נובע שעמודות $1,2,3,4$ של המטריצה הן בסיס של מרחב עמודות שלה.

ולכן הוקטורים (המטריצות) המתאימים לעמודות $1,2,3,4$ של המטריצה הן בסיס של תת המרחב $V+W$.

כלומר בסיס של $V+W$ נתון ע"י

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim V+W = 4$$

פתרון אחר:

נבנה מטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים הפורשים את $V+W$ $[w_2, w_1, v_1, v_2, v_3]$.

$$\begin{array}{c} \\ (1,1)\rightarrow \\ (1,2)\rightarrow \\ (2,1)\rightarrow \\ (2,2)\rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_2 & w_1 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_1]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3,4$.

ולכן נובע שעמודות $1,2,3,4$ של המטריצה הן בסיס של מרחב עמודות שלה.

ולכן הוקטורים (המטריצות) המתאימים לעמודות $1,2,3,4$ של המטריצה הן בסיס של תת המרחב $V+W$.

כלומר בסיס של $V+W$ נתון ע"י

$$\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim V+W = 4$$

ב.

משפט המימד (השני):
אם U,W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V, אז
$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W$

V,W הם תתי מרחבים של המרחב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ שמימדו 4.

בתרגילים קודמים מצאנו מצאנו ש

$$\dim V = 3$$

$$\dim W = 2$$

$$\dim V+W = 4$$

ולכן לפי משפט המימד:

$$\underbrace{\dim(V+W)}_{=4} + \dim(V\cap W) = \underbrace{\dim V}_{=3} + \underbrace{\dim W}_{=2}$$

$$4+\dim(V\cap W) = 2+3 \quad \Rightarrow \quad \dim(V\cap W)=1$$

ג.

אם U,W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V, U הוא תת מרחב של כל הוקטורים ב V שרכיביהם מקיימים k משוואות הומוגניות   ו W הוא תת מרחב של כל הוקטורים ב V שרכיביהם מקיימים m משוואות הומוגניות,   אז $U\cap W$ הוא תת המרחב של כל הוקטורים ב V שרכיביהם מקיימים את $k+m$ המשוואות ההומוגניות (צירוף k המשוואות המגדירות את תת המרחב U ו m המשוואות המגדירות את תת המרחב W).

תת המרחב W נתון כתת מרחב של כל הוקטורים במרחב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ שרכיביהם מקיימים תנאים הומוגניים – תת המרחב של כל המטריצות מסדר 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ המקיימות את התנאים

$$\begin{cases} a-b-c+d=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$$

תת המרחב V נתון כתת מרחב span. אבל בתרגיל קודם מצאנו הצגה של V כתת מרחב של כל הוקטורים שרכיביהם מקיימים תנאים הומוגניים – תת המרחב של כל המטריצות מסדר 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ המקיימות את התנאי

$$\begin{cases} -a+b=0 \end{cases}$$

ולכן $V\cap W$ הוא תת המרחב של כל המטריצות מסדר 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ המקיימות את התנאים

$$\begin{cases} a-b-c+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ -a+b=0 \end{cases}$$

נמצא בסיס ל $V\cap W$ (כפי שמוצאים בסיס לתת מרחב של כל הוקטורים שרכיביהם מקיימים תנאים הומוגניים).
נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3\to -R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת קנונית.
איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3$, ולכן המשתנים a,b,c הם משתנים קשורים, d משתנה חופשי.
ומכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.
המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$$\begin{cases} a+d=0 \\ b+d=0 \\ c-d=0 \end{cases} \Rightarrow \quad a=-d\,,\, b=-d\,,\, c=d$$

ולכן הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$(-d,-d,d,d)=d(-1,-1,1,1)$$

ומכאן שוקטור כללי ב $V\cap W$ הוא מהצורה

$$\begin{bmatrix} -d & -d \\ d & d \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ומשמעות הדבר היא ש

$$V \cap W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

כלומר הקבוצה $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ פורשת את $V \cap W$.

הקבוצה $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ היא בת״ל – קבוצה בת וקטור יחיד השונה מוקטור האפס היא בת״ל.

לסיכום הקבוצה $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ בת״ל ופורשת את $V \cap W$, ולכן היא בסיס של $V \cap W$.

$$\dim V \cap W = 1$$

.4
נתונים תתי המרחבים

$$U=\operatorname{span}\left\{x^3-x\,,\,x^2-x\,,1-x\,,\,x^2-1\,,\,x^3-x^2\right\}$$
$$W=\left\{\,p(x)\in P_3(\mathbb{R})\,\middle|\,p(-1)=0\right\}$$

א. למצוא את $\dim W$, $\dim U$.

ב. למצוא את $\dim U\cap W$ ללא חישוב תת המרחב $U\cap W$.

א.

תת המרחב U :

נסמן :

$$u_1=x^3-x\ ,\ u_2=x^2-x\ ,\ u_3=1-x\ ,\ u_4=x^2-1\ ,\ u_5=x^3-x^2$$

כדי למצוא בסיס ל U, נבנה מטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים הפורשים את U $[u_1,u_2,u_3,u_4,u_5]$.

$$\begin{array}{c}\\ 1\to\\ x\to\\ x^2\to\\ x^3\to\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}u_1&u_2&u_3&u_4&u_5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&0&1&-1&0\\-1&-1&-1&0&0\\0&1&0&1&-1\\1&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{R_1\leftrightarrow R_4}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\-1&-1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_1}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\0&-1&-1&0&1\\0&0&1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\0&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&-1\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3$.

ולכן נובע שעמודות $1,2,3$ של המטריצה הן בסיס של מרחב עמודות שלה.

ולכן הוקטורים (הפולינומים) המתאימים לעמודות $1,2,3$ של המטריצה הן בסיס של תת המרחב U.

כלומר בסיס של U נתון ע"י

$$\{\,u_1=x^3-x\,,\,u_2=x^2-x\,,\,u_3=1-x\,\}$$
$$\dim U=3$$

תת המרחב W :

תת המרחב W הוא תת המרחב של כל הפולינומים $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ ממעלה קטנה/שווה 3 המקיימות את התנאי

$$p(-1)=0$$
$$a+b(-1)+c(-1)^2+d(-1)^3=0$$
$$a-b+c-d=0$$

כלומר

$$W=\{\,a+bx+cx^2+dx^3\,|\,a-b+c-d=0\}$$

זו מערכת לינארית הומוגנית ב 4 הנעלמים a,b,c,d.

נמצא את הפתרון הכללי של המערכת.

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

זו כבר מטריצה מדורגת קנונית.

איבר פותח נמצאים בעמודה 1, ולכן המשתנה a הוא משתנה קשור, b,c,d משתנים חופשיים.

המשוואות המתאימות לשורות השונות משורות אפסים במטריצה הקנונית הן

$a-b+c-d=0 \quad \Rightarrow \quad a=b-c+d$

ולכן הפתרון הכללי של המערכת הוא

$(b-c+d,b,c,d)=b(1,1,0,0)+c(-1,0,1,0)+d(1,0,0,1)$

ומכאן שוקטור כללי ב W הוא מהצורה

$(b-c+d)+bx+cx^2+dx^3=b(1+x)+c(-1+x^2)+d(1+x^3)$

ומשמעות הדבר היא ש

$W=\text{span}\{1+x\,,-1+x^2\;,1+x^3\}$

נסמן :

$w_1=1+x\;,\;w_2=-1+x^2\;,\;w_3=1+x^3$

כלומר הקבוצה $\{w_1,w_2,w_3\}$ פורשת את W.

ניתן לבדוק שהקבוצה $\{w_1,w_2,w_3\}$ היא בת״ל.

לסיכום הקבוצה $\{w_1,w_2,w_3\}$ בת״ל ופורשת את W, ולכן היא בסיס של W.

$\dim W=3$

ב.

נחשב את המימד של $U+W$ ואז בעזרת משפט המימד נמצא את המימד של $U\cap W$.

$U=\text{span}\{u_1,u_2,u_3\}$

$W=\text{span}\{w_1,w_2,w_3\}$

ולכן

$U+W=\text{span}\{u_1,u_2,u_3,w_1,w_2,w_3\}$

נמצא בסיס ל $U+W$ (כפי שמוצאים בסיס לתת מרחב span, בשיטת העמודות).

נבנה מטריצה שהעמודות שלה הן הוקטורים הפורשים את $U+W$ $[u_1,u_2,u_3,w_1,w_2,w_3]$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\rightarrow \\ x\rightarrow \\ x^2\rightarrow \\ x^3\rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\rightarrow R_4-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4\rightarrow R_4+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\rightarrow R_4-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת (לא קנונית).

איברים פותחים נמצאים בעמודות $1,2,3,5$.

ולכן נובע שעמודות $1,2,3,5$ של המטריצה הן בסיס של מרחב עמודות שלה.

ולכן הוקטורים (הפולינומים) המתאימים לעמודות $1,2,3,5$ של המטריצה הן בסיס של תת המרחב $U+W$.

$\dim U+W=4$

ולכן לפי משפט המימד :

$\underbrace{\dim(U+W)}_{=4}+\dim(U\cap W)=\underbrace{\dim U}_{=3}+\underbrace{\dim W}_{=3}$

$4+\dim(U\cap W)=3+3 \quad \Rightarrow \quad \dim(U\cap W)=2$

משפטי המימד

.1

U,W תתי מרחבים של V. $\dim W = 3$, $\dim U = 2$, $\dim V = 4$.

א. מהם הערכים האפשריים ל $\dim(U \cap W)$?

ב. למה שווה $U+W$ אם $\dim(U \cap W) = 2$?

א.

מתקיים

$$\{0\} \subseteq U \cap W \subseteq U \quad \Rightarrow \quad 0 \le \dim(U \cap W) \le \dim U \quad \Rightarrow \quad 0 \le \dim(U \cap W) \le 2$$

$$\{0\} \subseteq U \cap W \subseteq W \quad \Rightarrow \quad 0 \le \dim(U \cap W) \le \dim W \quad \Rightarrow \quad 0 \le \dim(U \cap W) \le 3$$

לסיכום: $0 \le \dim(U \cap W) \le 2$.

U,W תתי מרחבים של V, ולכן $U+W \subseteq V$.

מתקיים

$$U \subseteq U+W \subseteq V \quad \Rightarrow \quad \dim U \le \dim(U+W) \le \dim V \quad \Rightarrow \quad 2 \le \dim(U+W) \le 4$$

$$W \subseteq U+W \subseteq V \quad \Rightarrow \quad \dim W \le \dim(U+W) \le \dim V \quad \Rightarrow \quad 3 \le \dim(U+W) \le 4$$

לסיכום: $3 \le \dim(U+W) \le 4$.

ממשפט המימד:

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = 2+3 = 5$$

האפשרויות היחידות ל $\dim(U \cap W)$, $\dim(U+W)$ המקיימות את שלושת התנאים האלה הן

$$\dim(U+W) = 3 \ , \ \dim(U \cap W) = 2$$

$$\dim(U+W) = 4 \ , \ \dim(U \cap W) = 1$$

ולכן הערכים האפשריים ל $\dim(U \cap W)$ הם: 1 או 2.

ב.

משפט המימד (הראשון):
אם U,W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V, ו $U \subseteq W$, אז
(1) $\dim U \le \dim W$
(2) $\dim U = \dim W \quad \Leftrightarrow \quad U = W$

לפי תוצאת הסעיף הקודם, אם $\dim(U \cap W) = 2$ אז $\dim(U+W) = 3$.

$W \subseteq U+W$, $\dim W = 3 = \dim(U+W)$, ולכן ממשפט המימד (הראשון) נובע ש $U+W = W$.

<u>**קואורדינטות**</u>

.1

$B=\{x+1\,,\,x^3-x\,,\,x^2+x\,,\,x^3-1\}$ בסיס של $P_3(\mathbb{R})$.

$E=\{1\,,\,x\,,\,x^2\,,\,x^3\}$ הבסיס הסטנדרטי של $P_3(\mathbb{R})$.

א. $p(x)=1+2x+3x^2+4x^3$, למצוא את $[p]_B$.

ב. למצוא את $[p]_E$.

ג. $[q]_B=(1,-1,2,-2)$, למצוא את הוקטור q.

ד. $[r]_E=(1,-1,2,-2)$, למצוא את הוקטור r.

א.

כדי למצוא את הקואורדינטות של הוקטור p לפי הבסיס B , נרשום אותו כצירוף לינארי של אברי הבסיס.

נחפש את הפתרון של מערכת המשוואות האי-הומוגנית המתאימה למטריצה שעמודותיה הן $b_1,b_2,b_3,b_4\,|\,p$.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & p \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\rightarrow \\ x\rightarrow \\ x^2\rightarrow \\ x^3\rightarrow \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_2\rightarrow R_2-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4\rightarrow R_4+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4\rightarrow R_4-R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4\rightarrow R_4/2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1\rightarrow R_2-R_4]{R_1\rightarrow R_1+R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

הגענו למטריצה מדורגת (קנונית).

מהמטריצה המדורגת קנונית נובע שלמערכת קיים פתרון יחיד והוא

$(2,3,3,1)$

כלומר הדרך היחידה לכתוב את הוקטור p כצירוף אברי הבסיס B היא

$p=2b_1+3b_2+3b_3+b_4$

משמעות הדבר היא שהקואורדינטות של הוקטור p לפי הבסיס B הן

$\left[p\right]_B=(2,3,3,1)$

ב.

כדי למצוא את הקואורדינטות של הוקטור p לפי הבסיס הסטנדרטי E , נרשום אותו כצירוף לינארי של אברי הבסיס.

אפשר לפתור מערכת משוואות כמו בסעיף הקודם, אך אין צורך כי התוצאה מיידית – הוקטור p כבר כתוב כצרוף לינארי של אברי הבסיס הסטנדרטי E :

$p=1+2x+3x^2+4x^3=1\cdot 1+2\cdot x+3\cdot x^2+4\cdot x^3$

משמעות הדבר היא שהקואורדינטות של הוקטור p לפי הבסיס E הן

$\left[p\right]_E=(1,2,3,4)$

ג.

נתון שהקואורדינטות של הוקטור q לפי הבסיס B הן

$$[q]_B = (1,-1,2,-2)$$

משמעות הדבר היא שהדרך היחידה לכתוב את הוקטור q כצירוף אברי הבסיס B היא

$$q = 1b_1 + (-1)b_2 + 2b_3 + (-2)b_4$$

כלומר

$$q = 1\cdot(x+1) + (-1)\cdot(x^3-x) + 2\cdot(x^2+x) + (-2)\cdot(x^3-1) = 3+4x+2x^2-3x^3$$

ד.

נתון שהקואורדינטות של הוקטור r לפי הבסיס הסטנדרטי E הן

$$[r]_E = (1,-1,2,-2)$$

משמעות הדבר היא שהדרך היחידה לכתוב את הוקטור r כצירוף אברי הבסיס הסטנדרטי E היא

$$r = 1\cdot 1 + (-1)\cdot x + 2\cdot x^2 + (-2)\cdot x^3 = 1 - x + 2x^2 - 2x^3$$

.2

$B=\{b_1\,,b_2\,,b_3\}$ בסיס של מרחב וקטורי V.

האם $C=\{b_1\,,b_1-b_2\,,b_1-b_2+b_3\}$ בת"ל ? פורשת את V ? בסיס של V ?

נסמן :

$c_1=b_1$
$c_2=b_1-b_2$
$c_3=b_1-b_2+b_3$

לוקטורים c_1,c_2,c_3 יש קואורדינטות לפי הבסיס B, אלו הן שלשות ב $\mathbb{R}^3$.
אז מתקיים :

הוקטורים c_1,c_2,c_3 הם בת"ל במרחב V אם ורק אם הקואורדינטות שלהם בת"ל במרחב $\mathbb{R}^3$.

הוקטורים c_1,c_2,c_3 פורשים את המרחב V אם ורק אם הקואורדינטות שלהם פורשות את המרחב $\mathbb{R}^3$.

הוקטורים c_1,c_2,c_3 הם בסיס של המרחב V אם ורק אם הקואורדינטות שלהם בסיס של המרחב $\mathbb{R}^3$.

נחשב את הקואורדינטות של הוקטורים c_1,c_2,c_3 לפי הבסיס B.

$$c_1=b_1 \qquad \Rightarrow \quad [c_1]_B=(1,0,0)$$
$$c_2=b_1-b_2 \qquad \Rightarrow \quad [c_2]_B=(1,-1,0)$$
$$c_3=b_1-b_2+b_3 \quad \Rightarrow \quad [c_3]_B=(1,-1,1)$$

נבדוק האם הקואורדינטות $[c_1]_B\,,[c_2]_B\,,[c_3]_B$ הן בת"ל, פורשות את $\mathbb{R}^3$, בסיס של $\mathbb{R}^3$.

זו קבוצה של 3 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ שמימדו 3, ולכן הקבוצה $\{[c_1]_B\,,[c_2]_B\,,[c_3]_B\}$ היא בת"ל אם ורק אם היא פורשת את $\mathbb{R}^3$ אם ורק אם היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.
נבדוק האם הקבוצה היא בת"ל.

$$\begin{array}{ccc} [c_1] & [c_1] & [c_1] \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

המטריצה כבר מדורגת (לא קנונית).
בכל העמודות $1-3$ יש איברים פותחים, ולכן כל המשתנים הם משתנים קשורים. ומכאן שלמערכת יש פתרון יחיד, הטריביאלי.

ומכאן שהקבוצה $\{[c_1]_B\,,[c_2]_B\,,[c_3]_B\}$ היא בת"ל (במרחב $\mathbb{R}^3$).

ומכאן שהקבוצה $\{c_1,c_2,c_3\}$ היא קבוצה בת"ל לינארית (במרחב V).

הקבוצה $\{[c_1]_B\,,[c_2]_B\,,[c_3]_B\}$ היא בת"ל וכאמור זו קבוצה של 3 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^3$ שמימדו 3,

ולכן הקבוצה $\{[c_1]_B\,,[c_2]_B\,,[c_3]_B\}$ פורשות את $\mathbb{R}^3$ וגם בסיס של $\mathbb{R}^3$.

ומכאן שהקבוצה $\{c_1,c_2,c_3\}$ פורשת את V וגם בסיס של V.