ספר הפרק – מרחבים וקטורים

הגדרות ומשפטים

מרחב וקטורי:

מרחב וקטורי (מ"ו) V היא קבוצה עם שתי פעולות. הפעולה הראשונה היא בין איברים בV ותסומן $' + '$ (חיבור וקטורים), והפעולה השניה היא בין סקלר לוקטור ותסומן $' \cdot '$ (כפל סקלר בוקטור).

הקבוצה V הנ"ל תיקרא מ"ו מעל F אם היא מקיימת את כל התנאים הבאים:

1. סגירות לחיבור וקטורים: לכל $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$:
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$$
2. חוק הקיבוץ לחיבור וקטורים: לכל $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$:
$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$
3. חוק החילוף לחיבור וקטורים: לכל $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$:
$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$
4. קיום איבר ניטרלי לחיבור: קיים $\boldsymbol{0} \in V$ כך שלכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים:
$$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$
5. קיום איבר נגדי: לכל $\boldsymbol{v} \in V$ קיים $\boldsymbol{w} \in V$ $(\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{v})$ כך שמתקיים:
$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$
6. סגירות לכפל בסקלר: לכל $\alpha \in F$, $\boldsymbol{v} \in V$:
$$\alpha \boldsymbol{v} \in V$$
7. קיום מספר ניטרלי לכפל: לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים (עבור $1 \in F$):
$$1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$$
8. חוק הקיבוץ לכפל סקלר בוקטור: לכל $\boldsymbol{v} \in V$ ו- $\alpha, \beta \in F$:
$$(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$$
9. חוק הפילוג לסקלרים: לכל $\boldsymbol{v} \in V$ ו- $\alpha, \beta \in F$:
$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$$
10. חוק הפילוג לוקטורים: לכל $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ ו- $\alpha \in F$:
$$\alpha(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{v} + \alpha\boldsymbol{u}$$

צירוף לינארי:

יהי V מ"ו מעל F, ויהיו $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ ו- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$.

הביטוי $\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}$ נקרא צירוף לינארי (או קומבינציה לינארית של הוקטורים $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$, עם המקדמים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

הצירוף נקרא טריוויאלי אם כל המקדמים הם אפסים (כלומר - $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$).

דוגמה: יהיו $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \in V$. אז הבאים הם צירופים לינאריים שלהם:

- $\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}$
- $\boldsymbol{v_1}$
- $\boldsymbol{0}$

פרישה לינארית/פרוש/span:

יהי מ"ו V מעל F ותהא קבוצת וקטורים $S \subseteq V$: $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$. הפרישה של S מוגדרת באופן הבא:

$$span(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v_i} \mid \alpha_i \in F,\ \boldsymbol{v_i} \in S \right\} = \{\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n} | \ \alpha_i \in F,\ \boldsymbol{v_i} \in S\}$$

כלומר, הפרישה הלינארית של S היא אוסף כל הקומבינציות הלינאריות (צירופים לינאריים) האפשריות של וקטורי S.

דוגמה: נתבונן במ"ו $\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ובקבוצה $S = \left\{ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$span(S) = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

הפרישה של הקבוצה S הנתונה היא קבוצת כל הוקטורים מהצורה הנ"ל (קואורדינטות ראשונה ושניה ממשיות כלשהן, קואורדינטה שלישית אפס).
דוגמה לוקטורים השייכים/לא שייכים לפרישה של S:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \in span(S), \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \notin span(S)$$

הערה 1: נגיד שוקטור מסוים $\boldsymbol{v} \in V$ שייך לפרישה הלינארית של הקבוצה S ($\boldsymbol{v} \in span(S)$) אם ניתן להציג את $\boldsymbol{v}$ כקומבינציה לינארית של איברי S.

הערה 2: יהי V מ"ו מעל F, ותהא $\emptyset$ קבוצה ריקה ב-V. אז: $Span\{\emptyset\} = \{\mathbf{0}_V\}$.
כלומר, הפרישה הלינארית של קבוצה ריקה ב-V שווה לקבוצה המכילה אך ורק את וקטור האפס של המ"ו V.

קבוצה פורשת של מרחב וקטורי:

יהי מ"ו V מעל F ותהא קבוצה $S \subseteq V$. S תיקרא קבוצה פורשת של המ"ו V אם מתקיים:

$$span(S) = V$$

כלומר, נגיד ש-S מהווה קבוצה פורשת של V אם כל וקטור $\boldsymbol{v}$ השייך למרחב הוקטורי V נמצא בפרישה (נפרש ע"י) של S. במילים אחרות, נגיד שהקבוצה S פורשת את V אם ניתן להציג כל וקטור $\boldsymbol{v} \in V$ כצ"ל של וקטורי S.

דוגמה: יהי $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, תהא $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$span(S) = \left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \middle| \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \middle| \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$$

כלומר, במקרה הזה מתקיים $span(S) = \mathbb{R}^2$ ועל כן S מהווה קבוצה פורשת של $\mathbb{R}^2$, ואם כך ניתן להציג **כל** וקטור מהמרחב הוקטורי V כצ"ל של וקטורי S.

- כדי להוכיח שקבוצה $S \subseteq V$ **לא** מהווה קבוצה פורשת של V מספיק שנמצא וקטור אחד $\boldsymbol{u} \in V$ שלא נמצא בפרישה של S ($\boldsymbol{u} \notin span(S)$).

תלות לינארית – הגדרה אינטואיטיבית:

קבוצת איברים במ"ו תיקרא תלויה לינארית (ת"ל) אם לפחות אחד מאיבריה שייך לפרישה של האחרים, או באופן שקול אם אפשר להציג לפחות אחד מאיבריה כצ"ל של האחרים.

לדוגמה: נבחן את הקבוצה הבאה:

$$S=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הקבוצה S תלויה לינארית משום ש- $\boldsymbol{v_3}\in span\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\}$ ($\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}$).

במקרה זה, נגיד ש: $span\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}=span\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\}$

משפט ('משפט הדילול'):

יהי V מ"ו מעל F, ותהא קבוצה $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m},\boldsymbol{u}\}\subseteq V$.

אם $\boldsymbol{u}\in span\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}$ [כלומר אם $\boldsymbol{u}$ הוא צ"ל של $\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}$], אז מתקיים:

$$span\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m},\boldsymbol{u}\}=span\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_m}\}$$

כלומר, אם יש לכם קבוצת וקטורים, ואחד הוקטורים הוא צ"ל של האחרים – אפשר 'לזרוק' אותו מהפרישה מבלי לשנות אותה.

לדוגמה: יהי $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ותהא $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\5\\7\end{pmatrix}\right\}\subseteq V$.

נשים לב כי $\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\\7\end{pmatrix}$. על כן:

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\5\\7\end{pmatrix}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

קבוצה תלויה לינארית (ת"ל):

יהא V מ"ו מעל שדה F. הקבוצה $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_n}\}\subseteq V$ תיקרא קבוצה **תלויה לינארית** אם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in F$**,** שלא כולם שווים לאפס, כך שלממ"ל ההומוגנית הבאה יש פתרון: $\quad (*)\ \alpha_1\boldsymbol{v_1}+\alpha_2\boldsymbol{v_2}+\dots+\alpha_n\boldsymbol{v_n}=\boldsymbol{0}$

במילים אחרות, אנחנו נגיד שהקבוצה S היא תלויה לינארית, אם לממ"ל ההומוגנית $(*)$ יש פתרון לא טריוויאלי.

- כדי להראות שקבוצה היא ת"ל נעשה את אחד משני הדברים הבאים:
  1. נרשום מטריצית את $(*)$ ונחקור את המערכת. אם נקבל אינסוף פתרונות (מעל שדה אינסופי) – הקבוצה תלויה לינארית (ואם פ.יחיד-בת"ל).
  2. נמצא דוגמה (מספיקה אחת) של α-ות שלא כולן אפסים המקיימות את $(*)$ (כלומר נמצא פתרון לא טריוויאלי).
- דוגמה: נראה כי $S=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ קבוצה תלויה לינארית, בדרך השניה שציינו. כלומר, נמצא פתרון לא טריוויאלי לממ"ל ההומוגנית:

$$\alpha_1\boldsymbol{v_1}+\alpha_2\boldsymbol{v_2}+\alpha_3\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{0}$$

נשים לב שהבחירה $\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=-1$, מהווה פתרון לממ"ל. כלומר מצאנו פתרון **לא** טריוויאלי לממ"ל ההומוגנית (כי לא כל ה-α-ות אפסים) ואם כך S קבוצה ת"ל.

קבוצה בלתי תלויה לינארית (בת"ל):

יהא V מ"ו מעל שדה F. הקבוצה $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_n}\}\subseteq V$ תיקרא קבוצה **בלתי תלויה לינארית** אם"ם לממ"ל ההומוגנית:

$$(*)\ \alpha_1\boldsymbol{v_1}+\alpha_2\boldsymbol{v_2}+\dots+\alpha_n\boldsymbol{v_n}=\boldsymbol{0}$$

יש רק פתרון אחד: $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$.

במילים אחרות, אנחנו נגיד שהקבוצה S היא בלתי תלויה לינארית, אם לממ"ל ההומוגנית $(*)$ יש רק פתרון טריוויאלי.

- כדי להראות שקבוצה היא בת"ל נעשה את **אחד** משני הדברים הבאים:

1. נרשום מטריצית את $(*)$ ונחקור את המערכת. אם נקבל פתרון יחיד– הקבוצה בלתי תלויה לינארית.
2. נפתור את הממ"ל ונראה כי כל המקדמים הם בהכרח אפסים.

דוגמה: נבחן את הקבוצה $S = \left\{\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right\}$. נראה כי לממ"ל ההומוגנית הבאה (נסמן $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 4\end{pmatrix}$):

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} = \mathbf{0}$$

יש פתרון יחיד ובכך נוכיח כי מדובר בקבוצה בת"ל:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} = \mathbf{0} \to \alpha_1 \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 0\\0 & 4 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{array}\right) \to \begin{cases}Rank(A) = 2\\ n = 2\end{cases} \to \text{פתרון יחיד} \to \text{קבוצה בת"ל } S$$

הערה: יהי V מ"ו מעל F. קבוצה ריקה $(\emptyset)$ מוגדרת להיות קבוצה בת"ל.

משפט:

(הוכחנו את המשפט באחת משאלות הפרק)

יהי V מ"ו מעל F, תהא קבוצה $V \supseteq \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\}$ בת"ל, ויהי $\boldsymbol{u} \in V$ כך שמתקיים: $\boldsymbol{u} \notin span\{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}\}$.

אז הקבוצה $\{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_k}, \boldsymbol{u}\}$ היא קבוצה בת"ל.

קבוצה בת"ל מקסימלית:

יהא V מ"ו מעל F, ותהא $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ קבוצת וקטורים ב-V.

הקבוצה הבת"ל המקסימלית ב- S היא תת הקבוצה הגדולה ביותר של S המהווה קבוצה בת"ל.

- אם הקבוצה S היא קבוצה בת"ל, אז S עצמה היא הקבוצה הבת"ל המקסימלית.

בדיקת תלות לינארית ומציאת קבוצה בת"ל מקסימלית:

הערה: כאשר לא מדובר במרחב F^n (כלומר, למשל מרחב של מטריצות או פולינומים) – התהליך מעט שונה, ונראה דוגמאות לאיך מתמודדים עם זה בשאלות על פולינומים ומטריצות בפרק. זה די פשוט ומאוד דומה, יש לצפות בשאלות הרלוונטיות)

בהינתן קבוצת וקטורים $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\dots,\boldsymbol{v_n}\}$ המוכלת במ"ו V מעל F:

1. נרשום (לפי הגדרה, עבור סקלרים מהשדה F):

$$\alpha_1\boldsymbol{v_1}+\alpha_2\boldsymbol{v_2}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v_n}=\mathbf{0}$$

2. נעבור לרישום מטריצי של הממ"ל ההומוגנית, כאשר כל וקטור <u>הופך לעמודה במטריצה</u>:

$$(A|\mathbf{0})=\left(\begin{array}{cccc|c}\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \cdots & \boldsymbol{v_n} & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\end{array}\right)$$

3. נדרג קאנונית (מספיק להגיע ל-1-ים מובילים) ונסמן 1-ים מובילים.
4. אם בכל עמודה יש 1-מוביל- S קב' בת"ל. אחרת – קב' ת"ל.
5. למציאת קב' בת"ל מקסימלית (נסמנה C): נסמן את העמודות שבהן יש 1-מוביל.

העמודות באותם המקומות, **במטריצה המקורית** (אסור לקחת את העמודות אחרי הדירוג!), מהווים את הקבוצה הבת"ל המקסימלית ב- S (בדוגמה הם מסומנים בכתום וכחול).

דוגמה:

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$$

$$\xrightarrow{1}\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 0\\ 2 & 4 & 5 & 0\\ 3 & 6 & 6 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{5}C=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$$

למה (למת ההחלפה של שטייניץ):

יהי V מ"ו מעל F,

- תהא $A=\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\dots,\boldsymbol{u_m}\}$ קבוצה פורשת של V [כלומר $V=span\{A\}$].
- תהא $B=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_k}\}$ קבוצה בת"ל ב-V.

אז מתקיים: $m\geq k$.

כלומר, מספר האיברים בכל קב' פורשת של V הוא גדול או שווה ממספר האיברים בכל קב' בת"ל ב-V.

מסקנה חשובה ושימושית:

יהי V מ"ו מעל F, ויהי W תמ"ו של V.
תהא $S=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_k}\}$ קבוצה בת"ל ב-W, אז $dimW\geq k$.

דוגמאות לשימוש:

יהי $V=\mathbb{R}^6$ מעל $\mathbb{R}$ ויהי W,U_1,U_2,U_3 תמ"ו של V.

- נניח שגילינו כי הקבוצה $U_1\supseteq\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{u_3}\}$ בת"ל $\Leftarrow$ $dimU_1\geq 3$.
- נניח שגילינו כי הקבוצה $U_2\supseteq\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\}$ בת"ל $\Leftarrow$ $dimU_2\geq 2$.
- נניח שגילינו כי הקבוצה $U_3\supseteq\{\boldsymbol{t_1}\}$ בת"ל $\Leftarrow$ $dimU_3\geq 1$.
- נניח שגילינו כי הקבוצה $W\supseteq\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\boldsymbol{w_3},\boldsymbol{w_4},\boldsymbol{w_5}\}$ בת"ל $\Leftarrow$ $dimW\geq 5$.

בסיס ומימד:

בסיס: תהא V מ"ו מעל F ותהא $B\subseteq V$ קבוצה סופית של וקטורים.

הקבוצה B מהווה בסיס למ"ו V אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. הקבוצה B היא קבוצה בת"ל.
2. הקבוצה B היא קבוצה פורשת של V, כלומר: $\mathrm{span}(B)=\mathrm{V}$.

מימד: מספר הוקטורים בבסיס B של מ"ו V נקרא מימד המרחב, ומסומן: $\dim(V)$.

דוגמה: יהי $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$. הקבוצה $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל-V (הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$). מימד המרחב הוא 2, כמספר וקטורי הבסיס.

הערה: נגיד כי המרחב הוקטורי V מעל F הוא נוצר סופית, אם הוא בעל מימד סופי, כלומר אם יש לו בסיס עם מספר סופי של וקטורים.

הערות ותכונות:

1. בהינתן מ"ו V ממימד n וקבוצה $B\subseteq V$, אז התנאים הבאים שקולים להיותה של B בסיס:
   i. B קבוצה בת"ל ופורשת (כפי שהגדרנו).
   ii. B קבוצה פורשת מינימלית (קב' פורשת שאם נוריד ממנה וקטור אחד היא כבר לא תהיה פורשת).
   iii. B קבוצה בת"ל מקסימלית (קב' בת"ל במרחב שאם נוסיף לה וקטור כלשהו היא כבר לא תהיה בת"ל).
2. מ"ו המכיל רק את איבר האפס הוא מ"ו שמימדו הוא אפס (וזה המרחב היחיד שמימדו הוא אפס). בסיס של המרחב המכיל רק את איבר האפס של המרחב הוא קבוצה ריקה ($B_{\{\mathbf{0}_V\}}=\emptyset$).
3. לכל מרחב וקטורי יש אינסוף בסיסים שונים.
4. כל בסיס של מ"ו V שמימדו n $(\dim(V)=n)$ מכיל בדיוק n וקטורים (נגזר ישירות מההגדרה).

משפט ('השלישי חינם'):

יהי V מ"ו מעל F, $dimV=n$.

תהא $B\subseteq V$. אם שניים מהתנאים הבאים מתקיים – השלישי מתקיים אוטומטית גם כן:

1. B קבוצה פורשת של V.
2. B קבוצה בת"ל ב-V.

3. B מכילה n איברים.

מסקנות חשובות ושימושיות:

יהי V מ"ו מעל F, כאשר $dimV = n$.

- כל קבוצה בת"ל ופורשת של V $(1 + 2)$ – היא בסיס של V (לא מפתיע, ככה הגדרנו בסיס של מרחב).
- כל קבוצה בת"ל ב-V המכילה n איברים $(2 + 3)$ – היא בסיס של V.
- כל קבוצה פורשת של V המכילה n איברים $(1 + 3)$ – היא בסיס של V.

דוגמה לשימוש:

יהי $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ $(dimV = 3)$, אז:

- כל קבוצה בת"ל ב-$\mathbb{R}^3$ המכילה 3 איברים מ-$\mathbb{R}^3$ - היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.
- כל קבוצה פורשת של $\mathbb{R}^3$ המכילה בדיוק 3 איברים - היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.

דרכים שימושיות למציאת בסיס:

יהי מ"ו V מעל F, כאשר $\dim(V) = n$. אז:

- כל קבוצה בת"ל המכילה n איברים השייכים ל-V היא בסיס של V (קבוצה בת"ל מקסימלית).
- כל קבוצה פורשת של V המכילה בדיוק n איברים היא בסיס של V (קבוצה פורשת מינימלית).
- תהא $V \subseteq S$ המקיימת $span(S) = V$ (כלומר S קבוצה פורשת של V). למציאת בסיס של המ"ו V, כל שעלינו לעשות הוא למצוא קב' בת"ל מקסימלית ב-S. כלומר, קבוצה בת"ל מקסימלית מתוך קבוצה פורשת של המרחב – היא בסיס של המרחב.

(דוגמאות והסברים בוידאו)

שתי הנקודות הראשונות למעשה מגיעות מהמשפט 'השלישי חינם'.

<u>תת מרחב וקטורי (תמ"ו):</u>

יהי מ"ו V מעל F. יהי W תת-קבוצה של V. נגיד כי W הוא תמ"ו של V, אם גם הוא מעל אותו שדה F, עם אותן פעולות $+,\cdot$ ואם הוא מקיים:

1. <u>קיום איבר האפס ב-W:</u>

   מתקיים: $\mathbf{0}_V \in W$.

2. <u>סגירות לחיבור:</u>

   לכל $W \ni \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$ מתקיים: $\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{u_T} \in W$

3. <u>סגירות לכפל בסקלר:</u>

   לכל $\boldsymbol{u_1} \in W$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיים: $\alpha \boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{w} \in W$

- כל תמ"ו הוא בפרט מ"ו.
- תהא $S \subseteq V$. הקבוצה $Span(S)$ היא תמ"ו של V.
  כלומר, פרישה לינארית של כל קבוצת וקטורים ב-V, היא תת מרחב וקטורי של V.

<u>חיתוך, סכום ואיחוד של תמ"ו:</u>

יהי מ"ו V מעל F, ויהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ שני תמ"ו של V. אזי:

1. **<u>חיתוך</u>** תתי המרחבים הוא תמיד תמ"ו של V. החיתוך מוגדר כך:

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \in W_1, \boldsymbol{v} \in W_2\}$$

2. **<u>סכום</u>** תתי המרחבים הוא תמיד תמ"ו של V. הסכום מוגדר כך:

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2} | \boldsymbol{w_1} \in W_1,\ \boldsymbol{w_2} \in W_2\}$$

3. **<u>איחוד</u>** תתי המרחבים הוא תמ"ו של V רק **אם** (אמ"מ) $W_1 \subseteq W_2$ או $W_2 \subseteq W_1$ (אחרת-הוא לא תמ"ו). האיחוד מוגדר כך:

$$W_1\cup W_2=\{\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\in W_1 \text{ או } \boldsymbol{v}\in W_2\}$$

כלומר, חיתוך וסכום של שני תמ"ו של V הם תמיד תמ"ו של V, אך איחוד של שני תמ"ו הוא בדרך כלל איננו תמ"ו (הוא כן תמ"ו במידה ואחד מתתי המרחב מוכל בשני).

תכונות/משפטים:

- $W_1+W_2=span(B_{W_1}\cup B_{W_2})$ (כאשר B_{W_1} הוא בסיס של W_1 ו-B_{W_2} בסיס של W_2).
- אם $W_1\subseteq W_2$ אז:
  - $W_1+W_2=W_2$.
  - $W_1\cap W_2=W_1$.
  - $W_1\cup W_2=W_2$ (במקרה כזה האיחוד הוא **כן** תמ"ו).
- $\dim(W_1+W_2)\geq \max\{\dim(W_1),\dim(W_2)\}$.
- $\dim(W_1\cap W_2)\leq min\{\dim(W_1),\dim(W_2)\}$.
- $W_1,W_2\subseteq W_1+W_2$.
- $W_1\cap W_2\subseteq W_1$.
- $W_1\cap W_2\subseteq W_2$.

משפט המימדים למרחבים וקטורים:

יהי מ"ו V מעל F, ויהיו W_1,W_2 שני תמ"ו של V. אזי:

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

משפט חשוב (מתי תמ"ו שווה למרחב שבו הוא מוכל):

יהי מ"ו V מעל F (V מרחב ממימד סופי), ויהי W תמ"ו של V.
אם מתקיים $\dim(W)=\dim(V)$ אז מתקיים:

$$W=V$$

דוגמה: $V=\mathbb{R}^{10}$ מעל $\mathbb{R}$, W תמ"ו של $\mathbb{R}^{10}$ ומתקיים $\dim(W)=10$. אם כך:

$$\mathrm{W}=\mathbb{R}^{10}$$

משפט:

יהי U מ"ו מעל F, ותהא קבוצה $S \subseteq U$.
אז $span(S) \subseteq U$.
כלומר, אם קבוצה S מוכלת במ"ו U, אז גם הפרישה של S מוכלת במ"ו U.

דוגמה: יהיו $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, אז גם $span\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

השלמה לבסיס:

הערה: כאשר לא מדובר במרחב F^n (כלומר, למשל מרחב של מטריצות או פולינומים) – זה מעט שונה, ועל מנת להדגים כיצד משלימים קב' בת"ל לבסיס במרחב מטריצות ופולינומים – נפתור בפרק שאלה שבה נעשה בדיוק את זה, גם במרחב של מטריצות וגם במרחב של פולינומים.

יהי $V = F^m$ מעל F ‏($\dim F^m = m$), ויהי $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\} \subseteq V$ קבוצה בת"ל ($n \leq m$), כלומר S היא בסיס של תמ"ו כלשהו של V. בשאלות מסוימות יבקשו מאיתנו להשלים את S לבסיס של V.

נעשה זאת כך:

1. נרשום את וקטורי S כעמודות מטריצה.
2. עמודות המטריצה מימין לוקטורי S יהיו וקטורי הבסיס הסטנדרטי של V.
3. נדרג קאנונית את המטריצה ונסמן 1 מובילים.
4. הוקטורים שישלימו את S לבסיס הם בדיוק אלו מהבסיס הסטנדרטי, שבעמודתם לאחר דירוג קאנוני יש 1 מוביל (בדוגמה סימנתי את הוקטור הנ"ל בירוק).

דוגמה:

$V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $S = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\}$. נשלים את S לבסיס של V, לפי השלבים שציינו:

$$S = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\} \xrightarrow{1,2} \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix}1 & 1/3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{4}{\Longrightarrow} B_{\mathbb{R}^2} = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

השלמה לבסיס של תת מרחב וקטורי:

יהי V מ"ו מעל $\boldsymbol{F}$ ויהי $U \subseteq V$ תמ"ו של V עם בסיס $\boldsymbol{B_U} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$. תהא קבוצה בת"ל $S = \{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \dots, \boldsymbol{s_r}\} \subseteq U$.

על מנת להשלים את S לבסיס של U, נמצא קבוצה בת"ל מקסימלית מתוך הקבוצה: $\{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \dots, \boldsymbol{s_r}, \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$ (כאשר חשוב מאוד שוקטורי S יהיו הראשונים, ורק אז וקטור B_U).
(דוגמה לשאלה ופתרון – בוידאו)

סכום ישר של תמ"ו:

יהי V מ"ו מעל F ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו של V. הגדרנו את הסכום $U + W$ כך:

$$U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} | \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{w} \in W\}$$

נגיד שהסכום בין U ל-W הוא **ישר** (נסמן $U \oplus W$) אם $U \cap W = \{\boldsymbol{0}_V\}$.

תכונה: אם הסכום בין U ל-W הוא ישר אז: $dim(U \oplus W) = dim(U) + dim\,(W)$.

משפט (כיצד נבדוק האם סכום בין מרחבים הוא ישר, כלומר האם החיתוך בין שני מרחבים הוא אפס):

יהי V מ"ו מעל F, ויהיו U, W תמ"ו של V כך ש:
$B_U = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_k}\}, B_W = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_r}\}$ בסיסים של U ושל W. אז:

$U \cap W = \{\boldsymbol{0}_V\} \Leftrightarrow$ הקבוצה $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_k}, \boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_r}\}$ היא קבוצה בת"ל.

כלומר, במידה ונרצה לבדוק האם הסכום בין U ל-W הוא ישר [כלומר האם $U \cap W = \{\boldsymbol{0}_V\}$ וניתן לכתוב $U \oplus W$] – נבחן את הקבוצה המכילה את כל הוקטורים משני הבסיסים (עם כפילויות במידה ויש);

- אם הקבוצה הזאת בת"ל – החיתוך הוא אפס והסכום הוא ישר.
- אם הקבוצה הזאת ת"ל – החיתוך לא מכיל רק את אפס, והסכום איננו ישר.

דוגמה מספר 1: יהי $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו U, W תתי מרחבים של V שבסיסיהם:
$B_U = \left\{\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ו-$B_W = \left\{\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נשים לב כי הקבוצה $\left\{\boldsymbol{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{w_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה בת"ל.

על כן, על פי המשפט שלמדנו, מתקיים ש $W\cap U=\{\mathbf{0}_V\}$ והסכום של U ו-W הוא סכום ישר (ניתן לרשום $U\oplus W$).

דוגמה מספר 2: יהי $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו U,W תתי מרחבים של V שבסיסיהם: $B_W=\left\{\boldsymbol{w_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו-$B_U=\left\{\boldsymbol{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{u_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נשים לב כי הקבוצה $\left\{\boldsymbol{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{u_2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{w_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה ת"ל.

על כן, על פי המשפט שלמדנו, מתקיים ש $W\cap U\neq\{\mathbf{0}_V\}$ והסכום של U ו-W הוא איננו סכום ישר (**לא** ניתן לרשום $U\oplus W$).

תכונה: אם הסכום בין U ל-W הוא ישר אז כל וקטור במרחב $W\oplus U$ ניתן להציג בצורה **יחידה** כסכום של וקטור מ-U ו-וקטור מ-W.

כלומר, יהיו U,W תמ"ו של V כך שהסכום ביניהם הוא ישר (כלומר $U\cap W=\{\mathbf{0}_V\}$),
ויהי $\boldsymbol{t}\in U\oplus W$.
אז קיימת רק אופציה אחת לבחירה של $\boldsymbol{u}\in U$ ו- $\boldsymbol{w}\in W$ כך ש: $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$.

(פירוט ודוגמאות על תכונה זאת בפרט, ועל סכום ישר בכלל – בסרטון שבו אנו מדברים על סכום ישר)

תכונות חשובות (קשר בין קב' בת"ל או פורשת למימד המרחב):

יהי V מ"ו מעל F ויהי W תמ"ו של V.

- אם נתון כי $W\supseteq S=\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$ היא קבוצה בת"ל, אז $dimW\geq k$.

  דוגמה: אם נתון כי $W\supseteq\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\boldsymbol{w_3}\}$ קבוצה בת"ל $\Leftarrow dimW\geq 3$.
- אם נתון כי $T=\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\dots\boldsymbol{u_m}\}$ היא קבוצה פורשת של W, אז $dimW\leq m$.

  דוגמה: אם נתון כי $\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{u_3},\boldsymbol{u_4},\boldsymbol{u_5}\}$ קבוצה פורשת של $W \Leftarrow dimW\leq 5$.

מרחב השורות, העמודות והפתרונות של מטריצה:

- מרחב השורות של מטריצה: יהא $A\in M_{m\times n}(F)$. נסמן את שורות המטריצה: $\{R_1,R_2,\dots,R_m\}$.

מרחב השורות של המטריצה A מוגדר באופן הבא:

$$Row(A) = span\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$$

כלומר, מרחב השורות של מטריצה הוא פשוט הפרישה של שורותיה.

- $Row(A)$ הוא תמ"ו של F^n.

- <u>מרחב העמודות של מטריצה</u>: יהא $A \in M_{m\times n}(F)$. נסמן את עמודות המטריצה: $\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$.

מרחב העמודות של המטריצה A מוגדר באופן הבא:

$$Col(A) = span\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$$

כלומר, מרחב העמודות של מטריצה הוא פשוט הפרישה של עמודותיה.

- $Col(A)$ הוא תמ"ו של F^m.

- <u>מרחב הפתרונות של מטריצה</u>: יהא $A \in M_{m\times n}(F)$. מרחב הפתרונות של המטריצה A מוגדר באופן הבא:

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in F^n | A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

כלומר, מרחב הפתרונות של מטריצה הוא פשוט קבוצת כל הפתרונות לממ"ל ההומוגנית שלה.

- $N(A)$ הוא תמ"ו של F^n.

<u>תכונות מעניינות וחשובות</u>: לכל $A \in M_{m\times n}(F)$ מתקיים:

1. $dim(Row(A)) = dim(Col(A)) = Rank(A)$.
2. $dim(Row(A)) + dim(N(A)) = n$
3. כאשר $F = \mathbb{R}$, כלומר $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, מתקיים: $N(A) \oplus Row(A) = \mathbb{R}^n$ ($N(A) \cap Row(A) = \{\boldsymbol{0}\}$).
זה נכון גם עבור $F = \mathbb{Q}$ (כלומר $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Q})$, ואז במקרה זה $N(A) \oplus Row(A) = \mathbb{Q}^n$).
<u>שימו לב</u>: תכונה 3 לאו דווקא נכונה מעל $\mathbb{C}$ או שדות אחרים.

דוגמה: תהא $A \in M_{4\times 6}(\mathbb{R})$, אז מיד ניתן לקבוע כי $Row(A) \cap N(A) = \{\mathbf{0}\}$ וכי $Row(A) \oplus N(A) = \mathbb{R}^6$.

משפט הפיכות מטריצה:

תהא $A \in M_{n\times n}(F)$, אז:

I. A הפיכה $\Leftrightarrow$ עמודותיה מהוות קבוצה בת"ל.

II. A הפיכה $\Leftrightarrow$ שורותיה מהוות קבוצה בת"ל.

III. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ (כלומר לממ"ל $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ יש פתרון טריוויאלי בלבד).

IV. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Row(A) = F^n$.

V. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $Col(A) = F^n$.

וקטור קואורדינטות:

יהי V מ"ו מעל F ממימד סופי n, ויהי $B = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ בסיס סדור של V. וקטור הקואורדינטות של $\boldsymbol{v} \in V$ לפי B, שנסמנו $[\boldsymbol{v}]_B$, הוא הוקטור: $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כך שמתקיים:

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v_n}$$

דוגמה: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ונתון וקטור $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix} \in V$. למציאת $[\boldsymbol{v}]_B$, נחפש $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ המקיימים:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}.$$

ניתן לחשב ולראות כי מתקבל $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 1$. על כן: $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$.

תכונות של וקטור קואורדינטות:

1. אורכו של וקטור הקואורדינטות הוא בדיוק כגודל המימד.
2. וקטור הקואורדינטות הוא יחיד.
3. וקטור הקואורדינטות של כל וקטור עמודה לפי הבסיס הסטנדרטי של המרחב הוא הוקטור עצמו.
4. לינאריות:
   - $[\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}]_B = [\boldsymbol{v}]_B + [\boldsymbol{u}]_B$
   - $[\alpha \cdot \boldsymbol{u}]_B = \alpha \cdot [\boldsymbol{u}]_B$
5. קבוצת וקטורים היא בת"ל $\Leftrightarrow$ קבוצת וקטורי הקואורדינטות המתאימה היא בת"ל.
6. $[\boldsymbol{u}]_B = [\boldsymbol{v}]_B \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ (כאשר $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ ו-B בסיס סדור של V).
7. $[\boldsymbol{v}]_B = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_V$.

מטריצת מעבר בין בסיסים:

יהי V מ"ו מעל F, ויהיו $B = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}\},\ C = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$ שני בסיסים של V.

מטריצת המעבר מ-B ל-C, המסומנת $[I]_C^B \in M_{n\times n}(F)$, מוגדרת באופן הבא:

$$[I]_C^B = \left[\ [\boldsymbol{b_1}]_C \ \vdots\ [\boldsymbol{b_2}]_C \ \vdots\ \cdots \ \vdots\ [\boldsymbol{b_n}]_C\ \right]$$

והיא מקיימת, לכל $\boldsymbol{v} \in V$:

$$[I]_C^B \cdot [\boldsymbol{v}]_B = [\boldsymbol{v}]_C$$

תכונות של מטריצת מעבר בין בסיסים:

1. כל מטריצת מעבר היא מטריצה הפיכה, וההפוכה שלה: $([I]_C^B)^{-1} = [I]_B^C$.
2. לכל בסיס B של V ממימד n מתקיים: $[I]_B^B = I_n$.
3. לכל שלושה בסיסים B, C, D של V ממימד n מתקיים: $[I]_D^C \cdot [I]_C^B = [I]_D^B$.

- הערה: ישנם מרצים המגדירים את מטריצת המעבר בסדר הפוך מאיך שהיא מוגדרת כאן. כלומר, ישנם מרצים שיגדירו את $[I]_C^B$ באופן הבא:

$$[I]_C^B = [\ [\boldsymbol{c_1}]_B \vdots [\boldsymbol{c_2}]_B \vdots \cdots \vdots [\boldsymbol{c_n}]_B\ ]$$

כלומר, מרצים אלו מגדרים את $[I]_C^B$ בדיוק איך שאנחנו מגדירים, בסימונים שלנו, את $[I]_B^C$.
זה רק עניין של הגדרה, סגנון והעדפת המרצה ותו לא. בדקו איך המרצה שלכם הגדיר/ה את מטריצת המעבר, ופתרו בהתאם להגדרתו/ה.

טריקים, קיצורי דרך, טעויות נפוצות וטיפים

❖ טריק להוכחת תלות לינארית של קבוצה:

יהי מ"ו V מעל F, כאשר $\dim(V) = n$. כל קבוצה $S \subseteq V$ המכילה $(n+1)$ איברים או יותר, היא קבוצה תלויה לינארית. אין צורך לבדוק או להוכיח תלות, אלא ניתן לקבוע זאת באופן מידי.

דוגמה: במ"ו $\mathbb{R}^2$, כל קבוצה $S \subseteq V$ המכילה 3 וקטורים או יותר היא קבוצה תלויה לינארית.

❖ טריק לבדיקת תלות לינארית של קבוצה בת 2 איברים:

יהי מ"ו V מעל F ותהא $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\} \subseteq V$. נגיד ש-S קבוצה תלויה לינארית אם קיים $\alpha \in F$ כך שמתקיים $\boldsymbol{v_1} = \alpha \boldsymbol{v_2}$. אם לא קיים α כזה, נגיד ש-S קבוצה בלתי תלויה לינארית. כלומר, אם $\boldsymbol{v_1}$ ו-$\boldsymbol{v_2}$ הם כפל אחד של השני בסקלר נגיד ש-S היא תלויה לינארית, ואם לא – נגיד ש-S בת"ל.

דוגמאות:

- הקבוצה $S_1 = \left\{\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה ת"ל משום ש- $\boldsymbol{v_1} = \frac{1}{3}\boldsymbol{v_2}$.
  כלומר, S_1 היא קבוצה המכילה 2 וקטורים שהם כפל אחד של השני בסקלר, ועל כן S_1 ת"ל.
- הקבוצה $S_2 = \left\{\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה בת"ל משום שהיא קבוצה המכילה 2 וקטורים שהם לא כפל אחד של השני בסקלר.

❖ טריק למציאת בסיס ע"י מציאת קבוצה בת"ל בת $\dim(V)$ איברים:

יהי מ"ו V מעל F, כאשר $\dim(V) = n$. כל קבוצה בת"ל $S \subseteq V$ המכילה בדיוק n איברים, מהווה בסיס ל-V.

דוגמה: במ"ו $\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, כל קבוצה בת"ל המכילה 3 וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ היא בסיס למרחב $\mathbb{R}^3$. למשל, הקבוצה הבאה היא קבוצה בת"ל המכילה 3 וקטורים שכולם שייכים ל-$\mathbb{R}^3$, ועל כן מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$: $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

❖ <u>מציאת בסיס למרחב מתוך קבוצה פורשת של המרחב:</u>

יהי מ"ו V מעל F, כאשר $\dim(V) = n$. תהא $S \subseteq V$ המקיימת $span(S) = V$.
למציאת בסיס B של המ"ו V כל שעלינו לעשות הוא למצוא קב' בת"ל מקסימלית ב-S.

דוגמה: מ"ו $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. נתון כי S קב' פורשת של $\mathbb{R}^2$ (ניתן להראות זאת). למציאת בסיס של $\mathbb{R}^2$ נמצא קבוצה בת"ל מקסימלית (במקרה הזה יש כמה, מספיקה אחת) ב-S: $\mathrm{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

❖ <u>אילוצים לינאריים בלתי תלויים והשפעתם על המימד:</u>

<u>הערה</u>: הסבר על נכונות התכונה והסבר כיצד יש להשתמש בתכונה זאת בבחינה בצורה שתהיה מקובלת על הבודקים – בסרטון מיוחד שהוקדש לכך בסוף תת הפרק *'מרחב השורות, העמודות והפתרונות של מטריצה'*

יהי מ"ו V ממימד n מעל F, ויהיה W תמ"ו של V הנתון על ידי אילוצים. נסמן את מספר האילוצים **הבלתי תלויים** ב- k ($k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$), אז:

$$\dim(W) = \dim(V) - k = n - k$$

כלומר, כל אילוץ ב"ת מוריד את מימד תת המרחב ב-1.

דוגמה: $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, W תמ"ו של V המוגדר כך: $W = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}a+b=0\\a,b,c \in \mathbb{R}\end{matrix}\right\}$.

W הוא תמ"ו של V המוגדר על ידי אילוץ לינארי ב"ת אחד, ועל כן:

$$\dim(W) = 3 - 1 = 2$$

❖ <u>בדיקת שפיות מומלצת</u>: בשאלות שבהן אתם מתבקשים למצוא בסיס ומימד של תמ"ו, של הסכום והחיתוך שלהם:

a. לאחר שמצאתם את הבסיסים והמימדים של כולם – ודאו, באמצעות המימדים שמצאתם, האם משפט המימדים מתקיים. אם הוא אכן מתקיים - זה סימן טוב מאוד. אם לא – טעיתם, אז רוצו לתקן.

b. אם תתי המרחב נתונים על ידי אילוצים – ודאו שוקטורי הבסיסים מקיימים את האילוצים המתאימים. למשל, אם W_1 מוגדר ע"י אילוץ אחד הקובע שסכום הקוארדינטות של כל וקטור ב-W_1 חייב להיות אפס – ודאו שכל וקטורי הבסיס שמצאתם ל-W_1 אכן מקיימים את האילוץ הנ"ל.

❖ <u>טריק למציאת בסיס של חיתוך של שני תמ"ו</u>: יהי V מ"ו מעל F. במידה ונתונים שני תמ"ו של V - W_1, W_2, המוגדרים על ידי אילוצים, ניתן למצוא בסיס ומימד לחיתוך על ידי הגדרת החיתוך כקבוצת כל הוקטורים במרחב המקיימים את כל האילוצים של W_1 וגם את כל האילוצים של W_2 (ראינו מספר דוגמאות בוידאו).

❖ <u>טיפ חשוב למציאת חיתוך של שני תמ"ו</u>: במידה ונתונים שני תמ"ו W_1, W_2 של מ"ו V מעל F, ואנו מתבקשים למצוא בסיס ל-$W_1 \cap W_2$ (לאחר שכבר מצאנו בסיס ל-W_1 ול-W_2), ההמלצה שלי היא להתחיל ממציאת בסיס ומימד ל $W_1 + W_2$ (מאוד פשוט ויחסית מהיר), ואז להשתמש במשפט המימדים למ"ו על מנת לקבוע מהו המימד של $W_1 \cap W_2$.

מדוע? במקרים מסוימים זה עשוי לחסוך המון זמן:
- אם יוצא, למשל, ש- $\dim W_1 \cap W_2 = 0$ – מיד ניתן לקבוע כי $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}_V\}$.
- אם יוצא, למשל, ש- $\dim W_1 \cap W_2 = 1$ – מספיק שנמצא וקטור אחד שונה מאפס הנמצא ב- $W_1 \cap W_2$, והוא יהווה בסיס ל-$W_1 \cap W_2$ (במקרה כזה נחפש וקטור שונה מאפס הנמצא בחיתוך).
- אם יוצא, למשל, ש- $\dim W_1 \cap W_2 = 2$ – מספיק שנמצא קב' בת"ל המכילה 2 וקטורים הנמצאים ב- $W_1 \cap W_2$, והיא תהווה בסיס ל-$W_1 \cap W_2$ (במקרה כזה נחפש 2 וקטורים שהם לא כפל אחד של השני בסקלר, הנמצאים בחיתוך).

❖ <u>מציאת בסיס של סכום ישר של שני תמ"ו באופן מידי</u>: יהי V מ"ו מעל F, ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו של V, שבסיסיהם הם B_U, B_W בהתאמה.
אם ידוע ש- $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, אז $B_{U\oplus W} = \{B_U \cup B_W\}$. כלומר, הבסיס של הסכום הישר של שני תמ"ו הוא פשוט איחוד הבסיסים שלהם (במידה והחיתוך בין U ו-W

הוא רק איבר האפס של V, אחרת אין מה לדבר על סכום ישר ביניהם).

- אם נתון מ"ו V ותמ"ו שלו U (שאת בסיסו אנחנו יודעים), ואנו מתבקשים למצוא בסיס ל- W (תמ"ו של V), כך שמתקיים $U \oplus W = V$, עלינו להשלים את וקטורי הבסיס של U לבסיס של V (השלמה לבסיס). הוקטורים שישלימו את וקטורי הבסיס של U לבסיס של V יהוו בסיס ל-W, כך שתתקיים הדרישה ($U \oplus W = V$).
(בוידאו יש מספר שאלות כאלו שפתרנו באופן מלא ומנומק).

- <u>הכלה של מ"ו במ"ו אחר</u>: יהי V מ"ו מעל F ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו של V.
יהי $B_U = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$ בסיס של U, ויהי $B_W = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_r}\}$ בסיס של W.
על מנת להוכיח כי $U \subseteq W$ מספיק להוכיח כי כל אחד מוקטורי B_U הוא צ"ל של וקטורי B_W.

- <u>שוויון ואי שוויון בין מרחבים וקטורים</u>: יהי V מ"ו מעל F ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו של V.
  - <u>שוויון בין מרחבים וקטורים</u>: על מנת להראות ש- $U = V$ עלינו להראות שכל וקטור הנמצא ב-U נמצא גם ב-W (כלומר $U \subseteq W$) וכי כל וקטור הנמצא ב-W נמצא גם ב-U (כלומר $W \subseteq U$).
  במילים אחרות, ניתן להראות כי $U = V$ על ידי הוכחת הכלה דו כיוונית ($U \subseteq W$ וגם $W \subseteq U$).
  - <u>אי שוויון בין מרחבים וקטורים</u>: על מנת להוכיח כי $U \neq W$ מספיק שנמצא וקטור אחד הנמצא ב-U ולא נמצא ב-W, או ההפך – שנמצא וקטור אחד הנמצא ב-W ולא נמצא ב-U.

  טעות נפוצה: לעיתים, סטודנטים סוברים בטעות כי להגיד ש $U \neq W$ זה להגיד שאין ל-U ול-W אף וקטור משותף. זה כמובן לא נכון, שכן בוודאי ש- $\mathbf{0}_V$ בהכרח נמצא גם ב-U וגם ב-W. להגיד ש $U \neq W$ זה להגיד שיש לפחות איבר אחד השייך לאחד מהם ולא שייך לשני.

שאלות ותשובות סופיות

שאלות

תת פרק 'מ"ו, פרישה ותלות לינארית':

שאלה 1:

תהא $V=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$. נגדיר פעולות $\cdot,+$ על הקבוצה V:

א. $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$ ו-$\alpha(a_1,b_1)=(\alpha\cdot a_1,\ \ b_1)$

ב. $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1,b_2)$ ו- $\alpha(a_1,b_1)=(\alpha\cdot a_1,\ \ \alpha\cdot b_1)$

הוכיחו כי V איננה מרחב וקטורי עבור אף אחד מהמקרים.

שאלה 2:

יהא מ"ו $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונים הוקטורים: $\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}8\\0\\-10\end{pmatrix}$

א. הוכיחו כי $\boldsymbol{v_3}$ הוא צ"ל של $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}$.

ב. מצאו את מקדמי הצירוף α_1,α_2 המקיימים: $\alpha_1\boldsymbol{v_1}+\alpha_2\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v_3}$

שאלה 3:

יהא מ"ו $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונים הוקטורים: $\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}3\\1\\11\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$

האם $\boldsymbol{v_1}$ הוא צ"ל של $\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}$?

שאלה 4:

יהא מ"ו $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונים הוקטורים: $\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

הראו כי הקבוצה $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}$ היא קבוצה פורשת של V.

שאלה 5:

יהא מ"ו $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונים הוקטורים: $\boldsymbol{v_1}=\binom{1}{2},\ \boldsymbol{v_2}=\binom{2}{k},\ \boldsymbol{v_3}=\binom{4}{2k}$

מצאו עבור אילו ערכי $k\in\mathbb{R}$ הקבוצה $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}$ היא קבוצה פורשת של V.

שאלה 6:

יהא מ"ו $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונים הוקטורים: $\boldsymbol{v_1}=\binom{1}{2},\ \boldsymbol{v_2}=\binom{0}{1}$.

האם הקבוצה $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\}$ היא תלויה לינארית? בלתי תלויה לינארית?

שאלה 7:

יהא מ"ו $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונים הוקטורים: $\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}$.

האם הקבוצה $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}$ היא תלויה לינארית? בלתי תלויה לינארית?

אם ת"ל – מצאו קבוצה בת"ל מקסימלית ב- S.

שאלה 8:

יהא מ"ו $V=\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונים הוקטורים:

$$\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}5\\7\\3\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{v_4}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

א. האם הקבוצה $S_1=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}$ היא ת"ל?

אם כן, הביעו את אחד הוקטורים כצ"ל של האחרים.

ב. האם הקבוצה $S_2 = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_4}\}$ היא ת"ל ?

שאלה 9:

יהא $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$, ותהא הקבוצה $D = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{v_5}\}$, כאשר:

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_5} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מצאו קבוצה (נסמנה A) בת"ל מקסימלית ב-D.

שאלה 10:

יהי V מ"ו מעל F. נתון כי $V \supseteq S_1 = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\} \subseteq V$ היא קבוצה בת"ל.

הראו כי הקבוצה $S_2 = \{\boldsymbol{v_1} + 2\boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_2} + 2\boldsymbol{v_3},\ \boldsymbol{v_3} + 2\boldsymbol{v_1}\}$ היא קבוצה בת"ל.

שאלה 11:

יהיה V מ"ו מעל F. נתון כי $S_1 = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\} \subseteq V$ היא קבוצה בת"ל.

הראו כי הקבוצה $S_2 = \{\boldsymbol{v_1} - 2\boldsymbol{v_2},\ 2\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_3},\ \boldsymbol{v_3} - \boldsymbol{v_1}\}$ היא תלויה לינארית.

שאלה 12:

יהיה V מ"ו מעל F. נתון כי $A = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{0}\} \subseteq V$.

הוכיחו כי הקבוצה A היא קבוצה תלויה לינארית.

כלומר, הוכיחו כי כל קבוצה המכילה את וקטור האפס היא קבוצה תלויה לינארית.

שאלה 13:

יהא V מ"ו מעל שדה F, ותהא $S=\{\boldsymbol{v_1}\}\subseteq V$, כאשר $\boldsymbol{v_1}\neq\boldsymbol{0}$. הוכח כי S קבוצה בת"ל.

כלומר, הוכיחו כי כל קבוצה המכילה וקטור אחד בלבד, השונה מאפס, היא קבוצה בת"ל.

שאלה 14:

יהי V מ"ו מעל F, ותהא $A=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_n}\}$ קבוצה בת"ל. תהא קבוצה $B=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_{n-1}},(\boldsymbol{w_n}+a_1\boldsymbol{w_1}+a_2\boldsymbol{w_2}+\dots+a_{n-1}\boldsymbol{w_{n-1}})\}\subseteq V$ עבור $a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\in F$.

הוכיחו כי B קבוצה בת"ל.

שאלה 15:

יהי V מ"ו מעל F ויהא $B=\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\dots,\boldsymbol{u_n}\}$ קבוצה בת"ל.

הוכיחו כי אם $\boldsymbol{v}\notin span(B)$ אז $S=\{\boldsymbol{2u_1}+\boldsymbol{3v},\quad \boldsymbol{2u_2}+\boldsymbol{3v},\dots,\quad \boldsymbol{2u_n}+\boldsymbol{3v}\}$ היא קבוצה בת"ל.

תת פרק 'בסיס, מימד ותת מרחב וקטורי':

שאלה 1:

יהא $V=\mathbb{R}^2$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי $B_1=\left\{\boldsymbol{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל-V (בסיס כזה נקרא הבסיס הסטנדרטי).

ב. האם הקבוצה $B_2=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס למרחב V?

שאלה 2:

יהא $V=\mathbb{R}^4$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי $G=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_4}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ מהווה בסיס ל-V.

ב. מהו המימד של $\mathbb{R}^4$? תנו דוגמה לבסיס נוסף למרחב הוקטורי $\mathbb{R}^4$.

<u>שאלה 3:</u>

יהא $V=\mathbb{R}^4$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי $G_1=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}\pi\\3.5\sqrt{2}\\17.22\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}3.14\\3.23\\3.32\\3.41\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}4.5\\2+\pi\\3+\sqrt{3}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_4}=\begin{pmatrix}0\\181\\242\\1701\end{pmatrix},\boldsymbol{v_5}=\begin{pmatrix}13\\12\\19\\90\end{pmatrix},\boldsymbol{v_6}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$ לא מהווה בסיס ל-V.

ב. הוכיחו כי $G_2=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}\pi\\3.5\sqrt{2}\\17.22\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}3.14\\3.23\\3.32\\3.41\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}4.5\\2+\pi\\3+\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא מהווה בסיס ל-V.

ג. הוכיחו כי $G_3=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}\pi\\3.5\sqrt{2}\\17.22\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}3.14\\3.23\\3.32\\3.41\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}4.5\\2+\pi\\3+\sqrt{3}\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא מהווה בסיס ל-V.

<u>שאלה 4:</u>

יהי $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ ותהא $S=\{\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\boldsymbol{v_3}\}\subseteq V$, כאשר:

$$\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

הוכיחו כי S מהווה בסיס של V.

<u>שאלה 5:</u>

יהי $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונה קב' $S\subseteq V$ המקיימת $span(S)=\mathbb{R}^3$:

$$S=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{v_4}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{v_5}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס ל-V מתוך S.

שאלה 6:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ונתון כי:

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|y=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}\middle|x,z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x+y+z=0\right\}$$

$$W_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$$

א. הראו כי W_1 הוא תמ"ו של V.

ב. הראו כי W_2 הוא תמ"ו של V.

ג. הראו כי W_3 **לא** מהווה תמ"ו של V.

שאלה 7:

יהי $V=M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי W הוא תמ"ו של V: $\quad W=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})|A=A^T\}$

שאלה 8:

יהי V מ"ו, ונתון כי W_1,W_2 תמ"ו של V.

הוכיחו כי כפי שלמדנו, אכן מתקיים ש- $W_1\cap W_2$ הינו תמ"ו של V.

שאלה 9:

יהי $A\in M_{m\times n}(F)$, $\mathbf{0}\neq \boldsymbol{b}\in F^m$.

א. הוכיחו כי קבוצת הפתרונות ל-$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ היא מרחב וקטורי.

ב. הוכיחו כי קבוצת הפתרונות ל-$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$ היא **לא** מרחב וקטורי.

שאלה 10:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו W_1,W_2 תמ"ו של V:

$$W_1 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, W_2=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\0\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

מצאו בסיס ומימד של W_1,W_2.

שאלה 11:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו W_1,W_2 תמ"ו של V:

$$W_1 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, W_2=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\0\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

מצאו בסיס ומימד של: W_1+W_2.

שאלה 12:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו W_1,W_2 תמ"ו של V:

$$W_1 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, W_2=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\0\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

מצאו בסיס ומימד של: $W_1\cap W_2$.

שאלה 13:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו W_1,W_2 תמ"ו של V שבסיסיהם נתונים:

$$B_{W_1}=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad B_{W_2}=\left\{\boldsymbol{u_1}=\begin{pmatrix}7\\7\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{u_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל-W_1+W_2 והוכיחו כי $W_1+W_2=V$

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $W_1 \cap W_2$.

שאלה 14:

יהי $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ויהיו W_1, W_2, W_3 תמ"ו של V:

$$W_1 = span\left\{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$W_2 = \{A \in V | A = A^T\}$$

$$W_3 = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b+3c \\ 2c+a & c+2a \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

א. מצאו בסיס ומימד של W_1.

ב. מצאו בסיס ומימד של W_2.

ג. מצאו בסיס ומימד של W_3.

שאלה 15:

יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$,
ויהיו W_1, W_2 תמ"ו של V:

$$W_1 = span\{\, (1),\ (2x+3),\ (3x^2+x), (4x^3+2)\, \}$$

$$W_2 = \{p(x) | p(2) = p(0)\}$$

א. מצאו בסיס ומימד של W_1.

ב. מצאו בסיס ומימד של W_2.

שאלה 16:

יהי $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו W_1, W_2 תמ"ו של V:

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a+b+c+d=0 \\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\}, \qquad W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a = 2d \\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\}$$

א. מצאו בסיס ומימד של W_1.

ב. מצאו בסיס ומימד של W_2.

ג. מצאו בסיס ומימד של $W_1 + W_2$.

ד. מצאו בסיס ומימד של $W_1 \cap W_2$.

שאלה 17:

V מ"ו מעל שדה F, ו-U_1, U_2 הם תמ"ו של V. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $\dim(V) = 4$, $\dim(U_2) = 3$, $\dim(U_1) = 2$ אז בהכרח:

$$U_1 + U_2 = V$$

ב. אם $\dim(U_2) = 4$, $\dim(U_1) = 3$, $\dim(V) = 5$ ו- U_1 לא מוכל ב-U_2, אז:

$$U_1 + U_2 = V$$

שאלה 18:

יהי $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהי $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

א. הסבירו מדוע S_1 היא בהכרח קבוצה ת"ל (בלי לחשב).

ב. מצאו קב' בת"ל מקסימלית (נסמנה S_2) ב-S_1.

ג. השלימו את S_2 לבסיס של V.

שאלה 19:

א. יהי $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ותהא קבוצה בת"ל $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times2}(\mathbb{R})$.
השלימו את S_1 לבסיס של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

ב. יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ותהא קבוצה בת"ל $S_2 = \{(x^2 + 2x - 4),\ (x + 5)\}$.
השלימו את S_2 לבסיס של $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

שאלה 20:

יהי $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו U, W תמ"ו של $\mathbb{R}^4$ שבסיסיהם הם B_U, B_W:

$$B_U = \left\{ \boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\},\ B_W = \left\{ \boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

א. הוכיחו כי $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ (כלומר שהסכום בין U ל-W הוא ישר).

ב. מצאו בסיס ומימד של $U \oplus W$.

ג. מצאו בסיס ל-W_3, תמ"ו נוסף של $\mathbb{R}^4$, כך שמתקיים $U \oplus W_3 = \mathbb{R}^4$.

שאלה 21:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $S_1, S_2 \subseteq V$ קבוצות וקטורים. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $span(S_1) \subseteq span(S_2)$ אז $S_1 \subseteq S_2$.

ב. אם $span(S_1) = span(S_2)$ אז $S_1 = S_2$.

ג. עבור $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$: $span(S_1 \cap S_2) = span(S_1) \cap span(S_2)$.

שאלה 22:

יהי V מ"ו מעל F ויהא $B_V = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ בסיס של V.

הוכיחו/הפריכו:

לכל תמ"ו של V (נסמנו ב-W) קיים בסיס B_W שהוא תת-קבוצה של B_V.

תת-פרק 'תוספות ושאלות נוספות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)':

שאלה 1:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. נתון כי $S = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\} \subseteq V$ מהווה בסיס ל-W המהווה תמ"ו של V.

הוכיחו כי גם הקבוצה $H = \{\boldsymbol{h_1} = (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}),\ \ \boldsymbol{h_2} = (\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}),\ \ \boldsymbol{h_3} = (\boldsymbol{u_3} + \boldsymbol{u_1})\}$ מהווה בסיס ל-W.

שאלה 2:

(הוכחת משפט)

יהי V מ"ו מעל F, תהא קב' $\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_k}\}\subseteq V$ בת"ל, ויהי $\boldsymbol{u}\in V$,
כך ש $\boldsymbol{u}\notin span\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_k}\}$.

צ"ל כי $\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_k},\boldsymbol{u}\}$ – קבוצה בת"ל.

שאלה 3:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$, יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו של V ויהיו $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2}\in V$,

כך שמתקיים: $B_U=\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2}\},\quad B_W=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2}\}$. נתון כי $U\cap W=\{\boldsymbol{0}\}$.

צ"ל: הקבוצה $\{\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2}\}$ היא קבוצה בת"ל.

שאלה 4:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו U_1,U_2 תמ"ו של V:

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}x+y+2z=0\\x,y,z\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\},\qquad U_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{matrix}x=z\\x,y,z\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$$

נתונות קבוצה $S\subseteq V$ וקבוצה $B_2\subseteq V$:

$$S=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{v_4}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_5}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_6}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$B_2=\left\{\boldsymbol{b_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

א. הוכיחו כי B_2 מהווה בסיס ל-U_2.

ב. מצאו בסיס ל-U_1 **מתוך** S.

ג. מצאו בסיס ומימד ל-$U_1\cap U_2$ ומצאו בסיס ל-U_1+U_2 ללא חישוב.

ד. מצאו בסיס לתמ"ו W כך שמתקיים $W\oplus U_2=V$.

שאלה 5:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ותהא $\{\boldsymbol{t_1},\boldsymbol{t_2},\boldsymbol{t_3}\}\subseteq V$ קבוצה בת"ל. יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו של V, כך שמתקיים:

$$U=span\{\boldsymbol{u_1}=(\boldsymbol{t_1}+\boldsymbol{t_2}),\boldsymbol{u_2}=(\boldsymbol{t_1}+\boldsymbol{t_3})\},\ \ B_W=\{\boldsymbol{w_1}=(\boldsymbol{t_1}-\boldsymbol{t_2}),\boldsymbol{w_2}=(\boldsymbol{t_1}-\boldsymbol{t_3})\}$$

א. מצאו בסיס ל-U. ב. הראו כי $\boldsymbol{u_1} \notin W$. ג. מצאו בסיס ל- $U \cap W$, $U + W$.

שאלה 6:

יהי V מ"ו מעל F ויהי $S = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}, \dots, \boldsymbol{u_m}\} \subseteq V$ ‏($2 \leq m \in \mathbb{N}$).

הוכיחו כי הקבוצה $S \backslash \{\boldsymbol{u_2}\}$ היא קבוצה תלויה לינארית, כאשר נתון כי:

1. $\boldsymbol{u_1} + 7\boldsymbol{u_2} \in span\{\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$. **2.** $\boldsymbol{u_2} \notin span\,\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$.

שאלה 7:

יהי V מרחב וקטורי מעל F ויהיו W_1, W_2, U תמ"ו של V. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $U + W_1 = U + W_2$, אז $W_1 = W_2$.

ב. אם $U + W_1 = U + W_2$ ומתקיים $W_2 \cap U = \{\mathbf{0}\}$, אז $W_1 \cap U = \{\mathbf{0}\}$.

ג. אם $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 + W_2 + U)$, אז מתקיים $U \subseteq W_1 + W_2$.

תת-פרק 'מרחב השורות, העמודות והפתרונות של מטריצה':

שאלה 1:

תהא $A \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ומימד של:

א. מרחב השורות של A.

ב. מרחב העמודות של A.

ג. מרחב הפתרונות של A.

שאלה 2:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו W_1,W_2 תמ"ו של V, המוגדרים כך:

$$W_1=Row(D),\ D=\begin{pmatrix}8&4&-4&0\\ \pi&\pi&\pi&\pi\\ 10&6&-2&2\end{pmatrix}$$

$$W_2=N(A),\ A=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\ -1&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 2&4&2&8\end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל-W_1.

ב. מצאו מימד של $W_3=Col(D)$.

ג. מצאו בסיס ומימד ל-W_2.

ד. מצאו דוגמה למטריצה $C\in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ כך ש- $W_1=N(C)$

שאלה 3:

יהא $A\in M_{m\times n}(F)$ ויהי $\boldsymbol{b}\in F^m$.

הוכיחו כי אם מתקיים $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ אז $\boldsymbol{b}\in Col(A)$.

שאלה 4:

יהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהיו $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^m$. נתון כי:

- קיים פתרון למערכת: $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$
- קיים פתרון למערכת: $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$
- לא קיים פתרון למערכת: $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$

הוכיחו כי $\boldsymbol{d}$ לא שייך לפרישה של $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$

שאלה 5:

תהא $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. הוכיחו כי אם A הפיכה אז $Row(A)=\mathbb{R}^n$ (זה אם"ם, אך אנחנו מתבקשים להוכיח רק כיוון אחד).

שאלה 6:

הוכיחו כי לכל $A \in M_{n\times n}(F)$ מתקיים:

$$Rank(A^2) \leq Rank(A)$$

שאלה 7:

תהיינה $A, B \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, ונתון כי $AB = 0_{4\times 4}$.
צ"ל כי $Rank(A) + Rank(B) \leq 4$.

תת פרק 'וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר בין בסיסים':

שאלה 1:

יהי מ"ו $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ויהי $B = \left\{\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

מצאו את $[\boldsymbol{v}]_B$ עבור $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-6\end{pmatrix}$.

שאלה 2:

יהי מ"ו $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$, ויהי $B = \left\{\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

בסיס של V. מצאו את $[\boldsymbol{v}]_B$ עבור $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\\3\end{pmatrix}$.

שאלה 3:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$, יהי $B=\left\{\boldsymbol{b_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של V, ונתון $\boldsymbol{v}\in V$ המקיים: $[\boldsymbol{v}]_B=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$. מצאו את $\boldsymbol{v}$.

שאלה 4:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$, ויהיו $B=\left\{\boldsymbol{b_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b_3}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$C=\left\{\boldsymbol{c_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c_2}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ בסיסים של V.

א. מצאו את $[I]_C^B$.

ב. רשמו את סדר הפעולות למציאת $[I]_B^C$ (אין צורך לחשב ולפתור עד הסוף).

ג. יהי $\boldsymbol{v}\in V$ כך ש: $[\boldsymbol{v}]_B=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}$. מצאו את $[\boldsymbol{v}]_C$.

שאלה 5:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$, ויהיו

$B=\left\{\boldsymbol{b_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$C=\left\{\boldsymbol{c_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{c_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{c_4}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיסים של V.

א. מצאו את $[I]_C^B$.

ב. יהי $\boldsymbol{v}\in V$ המקיים: $[\boldsymbol{v}]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$. מצאו את $[\boldsymbol{v}]_C$.

שאלה 6:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$, ויהא W תמ"ו של V המוגדר באופן הבא:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a - 2b - 4c = 0 \\ a, b, c \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

יהיו $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $A = \left\{ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} w \\ z \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ בסיסים של W.

נתון כי $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_A$.

א. מצאו את $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. ב. מצאו $[I]_A^B$.

שאלה 7:

א. יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מעל $\mathbb{R}$, ויהי:
$B = \{\boldsymbol{p_1} = (1 + x^2), \boldsymbol{p_2} = (1 + 2x), \boldsymbol{p_3} = (3 - 3x + 5x^2)\}$ - בסיס של V.

יהי $\boldsymbol{q} = 12 + 13x^2$. חשבו $[\boldsymbol{q}]_B$.

ב. יהי $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מעל $\mathbb{R}$, ויהי:
$C = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ - בסיס של V.

תהא $H = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$. חשבו $[H]_C$.

תשובות סופיות

תת פרק 'מ"ו, פרישה ותלות לינארית':

שאלה 1:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

שאלה 2:

א. הוכחה.

ב. $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = -2$.

שאלה 3:

לא.

שאלה 4:

הוכחה.

שאלה 5:

עבור כל $k \neq 4$ ממשי, מתקיים $span(S) = V$.

שאלה 6:

S קבוצה בת"ל.

שאלה 7:

S קבוצה ת"ל.

קבוצה בת"ל מקסימלית (יש עוד אפשרויות): $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

שאלה 8:

א. S_1 קבוצה ת"ל. $\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v_1} + 2\boldsymbol{v_2}$.

ב. S_2 קבוצה בת"ל.

שאלה 9:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 10:

הוכחה.

שאלה 11:

הוכחה.

שאלה 12:

הוכחה.

שאלה 13:

הוכחה.

שאלה 14:

הוכחה.

שאלה 15:

הוכחה.

תת פרק 'בסיס, מימד ותת מרחב וקטורי':

שאלה 1:

א. הוכחה.

ב. B_2 לא מהווה בסיס למרחב הוקטורי V.

שאלה 2:

א. הוכחה.

ב. $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. בסיס נוסף למ"ו $\mathbb{R}^4$ – הבסיס הסטנדרטי:

$$E_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה 3:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

ג. הוכחה.

שאלה 4:

הוכחה.

שאלה 5:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

B היא קב' בת"ל מקסימלית מתוך קב' פורשת של המרחב ולכן מהווה בסיס למרחב.

שאלה 6:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

ג. הוכחה.

שאלה 7:

הוכחה.

שאלה 8:

הוכחה.

שאלה 9:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

שאלה 10:

$$B_{W_1}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\quad \dim(W_1)=3$$

$$B_{W_2}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\quad \dim(W_2)=3$$

שאלה 11:

$$B_{W_1+W_2}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\quad \dim(W_1+W_2)=4$$

שאלה 12:

$B_{W_1 \cap W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim(W_1 \cap W_2) = 2$

שאלה 13:

א. $\dim(W_1 + W_2) = 4$, $B_{W_1+W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ + הוכחה.

ב. $dim(W_1 \cap W_2) = 1$, $B_{W_1 \cap W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 14:

א. $\dim(W_1) = 4$, $B_{W_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

ב. $\dim(W_2) = 3$, $B_{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ג. $\dim(W_3) = 3$, $B_{W_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 15:

א. $\dim(W_1) = 4$, $B_{W_1} = \{\{ (1),\ (2x+3),\ (3x^2+x), (4x^3+2)\}$.

ב. $\dim(W_2) = 3$, $B_{W_2} = \{(x^3-4x), (x^2-2x), 1\}$.

שאלה 16:

א. $\dim(W_1)=3$, $B_{W_1}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ב. $\dim(W_2)=3$, $B_{W_2}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ג. $\dim(W_1+W_2)=4$, $B_{W_1+W_2}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ד. $\dim(W_1\cap W_2)=2$, $B_{W_1\cap W_2}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 17:

א. לא נכון. דוגמה נגדית.

ב. נכון. הוכחה.

שאלה 18:

א. הסבר.

ב. $S_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ג. $B_V=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, כאשר וקטורים משלימים לבסיס הם $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 19:

א. $B_{M_{2\times2}(\mathbb{R})}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.

ב. $B_{\mathbb{R}_{\leq2}[x]}=\{(x^2+2x-4),\ (x+5),x^2\}$.

שאלה 20:

א. הוכחה.

ב. $\dim(U\oplus W)=3$, $B_{U\oplus W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ג. $B_{W_3}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 21:

א. לא נכון.

ב. לא נכון.

ג. לא נכון.

שאלה 22:

לא נכון.

תת-פרק 'תוספות ושאלות נוספות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)':

שאלה 1:

הוכחה.

שאלה 2:

הוכחה.

שאלה 3:

הוכחה (2 דרכים).

שאלה 4:

א. הוכחה.

ב. $B_{U_1} = \left\{ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

ג. $dim(U_1 \cap U_2) = 1$, $B_{U_1 \cap U_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B_{U_1+U_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ד. $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 5:

א. $B_U = \{\boldsymbol{u_1} = (\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{t_2}), \boldsymbol{u_2} = (\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{t_3})\}$.

ב. הוכחה.

ג.

- <u>בסיס ומימד של $U + W$</u>:
$dim\, U + W = 3$, $B_{U+W} = \{\boldsymbol{u_1} = (\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{t_2}), \boldsymbol{u_2} = (\boldsymbol{t_1} + \boldsymbol{t_3}), \boldsymbol{w_1} = (\boldsymbol{t_1} - \boldsymbol{t_2})\}$.
- <u>בסיס ומימד של $U \cap W$</u>:
$\dim U \cap W = 1$, $B_{U \cap W} = \{\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_3}\}$.

שאלה 6:

הוכחה.

שאלה 7:

א. הפרכה.

ב. הפרכה.

ג. הוכחה.

תת פרק 'מרחב השורות, העמודות והפתרונות של מטריצה':

שאלה 1:

א. $\dim(Row(A))=3$, $B_{Row(A)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ב. $\dim(Col(A))=3$, $B_{Col\,(A)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ג. $\dim(N(A))=1$, $B_{N(A)}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

שאלה 2:

א. $\dim(W_1)=2$, $B_{W_1}=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

ב. $\dim(\mathrm{W}_3)=2$.

ג. $\dim(W_2) = 2$, $B_{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ד. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 3:

הוכחה.

שאלה 4:

הוכחה.

שאלה 5:

הוכחה.

שאלה 6:

הוכחה.

שאלה 7:

הוכחה.

תת פרק 'וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר בין בסיסים':

שאלה 1:

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

שאלה 3:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

שאלה 4:

א. $[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 8/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

ב. הסבר + $[I]_B^C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ג. $[\boldsymbol{v}]_C = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -2.5 \end{pmatrix}$

שאלה 5:

א. $[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

ב. $[\boldsymbol{v}]_C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

שאלה 6:

א. $x = 3, y = 0, z = 1, w = -6$.

ב. $[I]_A^B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ (2 דרכים).

שאלה 7:

א. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = [12 + 13x^2]_B = [\boldsymbol{q}]_B$.

ב. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}\right]_C = [H]_{\boldsymbol{C}}$.