7. ידוע כי ההסתברות להתרחשות מאורע A היא 0.5, ההסתברות להתרחשות B היא 0.4, וההסתברות לכך שיתרחש A מבלי שיתרחש B היא 0.2, מהי ההסתברות לכך שיתרחשו A ואו B ?

$P(A) = 0.5 \quad ; \quad P(\bar{A}) = 0.5$

$P(B) = 0.4 \quad ; \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.6$

$P(A \cap \bar{B}) = 0.2 \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$0.2 = 0.5 - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.3$ } יקרו את A וגם B

כעת נמצא את ההסתברות שיקרו A או B:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 \Rightarrow = 0.6$

9. בביקורת איכות של טלוויזיות מתייחסים לשלושה סוגי פגמים: פגם קריטי, פגם בינוני ופגם קל.

הסיכויים הם: פגם קריטי בלבד 2 %, פגם בינוני בלבד 4 %, פגם קל בלבד 8 %.

פגמים קריטיים ובינוניים בלבד 3 %, קריטיים וקלים בלבד 3 %, בינוניים וקלים בלבד 2 %,

כל שלושת סוגי הפגמים 1 %.

א. מהו אחוז הטלביזיות ללא פגמים כלשהם?

ב. מהו אחוז הטלוויזיות בעלות פגם בינוני?

ג. טלוויזיות בעלות פגם קריטי או בינוני (או שניהם) לא יוצאות את שערי המפעל. כמה אחוז הם מהווים?

נסמן את המאורעות:

A = Critical

B = Medium

C = Light

נתון:

1) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = 0.02$

2) $\bar{A} \cap B \cap \bar{C} = 0.04$

3) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C = 0.08$

4) $A \cap B \cap \bar{C} = 0.03$

5) $A \cap \bar{B} \cap C = 0.03$

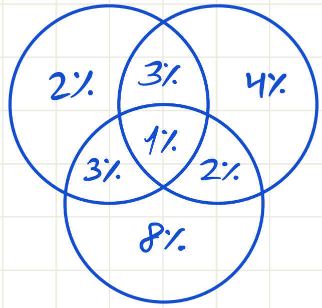
6) $\bar{A} \cap B \cap C = 0.02$

7) $A \cap B \cap C = 0.01$

$$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C} \overset{D.M}{=} \overline{(A\cup B\cup C)} = 1-(A\cup B\cup C)$$

ⓒ נרצה לחשב:

נצ״ר דיאגרמות Venn ע״מ למצוא את $P(A\cup B\cup C)$



ניתן לראות כי: $\Longleftarrow$

$$(A\cup B\cup C) = 0.02\cdot 2+0.03\cdot 2+0.01+0.04+0.08$$

$$= 0.23$$

לכן ההסתברות שאורחנו מחפשים היא:

$$P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right) = 1-P(A\cup B\cup C) = 1-0.23 = 0.77$$

ⓑ נרצה לחשב את $P(B)$ באמצעות הנוסחה הבאה:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\alpha}-\underbrace{P(A\cap C)}_{\beta}-\underbrace{P(B\cap C)}_{\gamma}+0.01$$

1) ראשית נחשב את חיתוכי הזוגות:

$$\alpha:\ P(A\cap B\cap\bar{C}) = P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)$$
$$0.03 = P(A\cap B)-0.01$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=0.04$$

$$\beta:\ P(A\cap\bar{B}\cap C) = P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$
$$0.03 = P(A\cap C)-0.01$$
$$\Rightarrow P(A\cap C)=0.04$$

$$\gamma:\ P(\bar{A}\cap B\cap C) = P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$
$$0.02 = P(B\cap C)-0.01$$
$$\Rightarrow P(B\cap C)=0.03$$

2) כעת נוכל למצוא את הסתברויות המאורעות A,B,C באמצעות נוסחת איחוד בזוגות:

$P(A\cup B\cup C)=0.23$

$$\left.\begin{aligned}
&- P(A\cup B)=0.23-0.08=0.15\\
&\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\
&\Rightarrow 0.15=P(A)+P(B)-0.04
\end{aligned}\right\}\quad P(A)+P(B)=0.19$$

$$\left.\begin{aligned}
&- P(A\cup C)=0.23-0.04=0.19\\
&\Rightarrow P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)\\
&\Rightarrow 0.19=P(A)+P(C)-0.04
\end{aligned}\right\}\quad P(A)+P(C)=0.23$$

$$\left.\begin{aligned}
&- P(B\cup C)=0.23-0.02=0.21\\
&\Rightarrow P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)\\
&\Rightarrow 0.21=P(B)+P(C)-0.03
\end{aligned}\right\}\quad P(B)+P(C)=0.24$$

התקבלו 3 משוואות ב-3 נעלמים.

A	B	C	
1	1	0	19
1	0	1	23
0	1	1	24

$\Longrightarrow$

A	B	C	
1	0	0	9
0	1	0	10
0	0	1	14

וקיבלנו ש- $P(B)=0.1$

ⓑ נרצה לחשב:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=0.09+0.1-0.04=0.15$$

11. בוחרים באקראי מספר מבין המספרים השלמים הלא שליליים $\{0,1,2,...\}$, כך שההסתברות לערך k היא $ca^k/(k!)$.

א. מהו c (כפונקציה של a) ?

ב. מה ההסתברות לכך שנבחר מספר גדול מ-1 ?

(א)

$$P(k) = \frac{c \cdot a^k}{k!} \quad ; \quad \Omega = \{0,1,2,...\}$$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} c \cdot \frac{a^k}{k!} = 1 \implies$$ נמצא את c

$$P(\Omega) = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 1 \implies c = \frac{1}{\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}}_{=e^a}} \implies c = \frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

(ב) נגדיר מאורע: A = נבחר מספר גדול מ-1.

$$P(A) = \underbrace{P(\Omega)}_{=1} - \underbrace{P(\{0\})}_{c} - \underbrace{P(\{1\})}_{c \cdot a}$$

$$\implies P(A) = 1 - c - c \cdot a \xRightarrow{c=e^{-a}} P(A) = 1 - \frac{1}{e^a} - \frac{a}{e^a}$$

2. קוביה בה הפיאות 1, 2, 3, 4 צבועות בלבן והפיאות 5, 6 צבועות בשחור הוטלה פעמיים, ונבדקו הצבעים שהתקבלו בשתי ההטלות, הצע מרחב מדגם לניסוי האמור וחלוקת הסתברויות מתאימה בו, וחשב את הסתברויות המאורעות:

א. בהטלה הראשונה התקבלה פאה לבנה; {0.6667}

ב. בשתי ההטלות התקבלו צבעים שונים. {0.4444}

1) נגדיר את המאורעות:

$W = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{5, 6\}$

2) מרחב המדגם הנו:

$$\Omega = \{\underset{\alpha}{(B,B)}, \underset{\beta}{(B,W)}, \underset{\gamma}{(W,B)}, \underset{\delta}{(W,W)}\}$$

$P(B) = 2/6 = 1/3$; $P(W) = 4/6 = 2/3$

$$\left.\begin{aligned} &- P(\alpha) = (1/3)^2 = 1/9 \\ &- P(\beta) = 1/3 \cdot 2/3 = 2/9 \\ &- P(\gamma) = 2/3 \cdot 1/3 = 2/9 \\ &- P(\delta) = (2/3)^2 = 4/9 \end{aligned}\right\}$$

זרות עם חיבור

$= P(\Omega) = 1$

א) החישוב הנו: $P(W) = 2/3$

ב) החישוב הנו: $P(\beta) + P(\gamma) = 2/9 + 2/9 = 4/9$

4. בקופסא יש 10 כדורים המסומנים במספרים מ 1 עד 10. מן הקופסא מוציאים 4 כדורים באקראי עם החזרה,

א. מהי ההסתברות לכך שאותו מספר מופיע בכל ארבעת הכדורים שהוצאו? {0.001}

ב. מהי ההסתברות לכך שבכל ארבעת הכדורים שהוצאו מופיעים מספרים שונים? {0.504}

ג. מהי ההסתברות לכך שכל הכדורים שהוצאו הכילו מספרים שאינם עולים על 6? {0.1296}

ד. מהי ההסתברות לכך שהמספר המקסימלי מבין המספרים שעל הכדורים שהוצאו הוא בדיוק 6? {0.0671}

מאורע A: א) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0.001$ תליפות עם חזרות

מאורע B: ב) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5{,}040 \Longrightarrow \frac{5{,}040}{|\Omega|} = \frac{5{,}040}{10^4} = 0.504$

מאורע C: ג) $\left(\frac{6}{10}\right)^4 = \frac{1{,}296}{10{,}000} = 0.1296$

נגדיר מאורע D: כל המספרים $\leqslant 5$

ד) $\left(\frac{5}{10}\right)^4 = 0.0625$

נרצה לחשב: $P(C) - P(D) = 0.1296 - 0.0625 = 0.0671$

5. בקופסא יש 10 כדורים מסופררים מ 1 ועד 10, מן הקופסא מוציאים באקראי וללא החזרה 4 כדורים,

א. מהי ההסתברות לכך שכל הכדורים שהוצאו הכילו מספרים שאינם עולים על 6?

ב. מהי ההסתברות לכך שהמספר המקסימלי מבין המספרים שעל הכדורים שהוצאו הוא בדיוק 6?

נגדיר את מרחב המדגם: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$; $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5{,}040$

א) 1) נגדיר את המאורע A. $|A| = 360 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

2) נרצה לחשב: $P_{א} = \frac{|A|}{|\Omega|} \Longrightarrow \frac{360}{5{,}040} = 0.0714$

ב) 1) נגדיר את המאורע B. $|B| = 120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

2) נרצה לחשב: $P_{ב} = \frac{|A| - |B|}{|\Omega|} \Longrightarrow \frac{240}{5{,}040} = 0.0476$