

מבחן X (ספטמבר 2023)

מרצה : ד"ר דבורה קפלן

מתרגלים : גב' אירנה נמירובסקי, מר עמית בנגיאט, מר אלכסנדר מינקין

שאלה 1 - (20 נק') (אין קשר בין שני הסעיפים)

א. (12 נק') מצאו את תחום התכנסות של טור החזקות $(x-2)^n$ וחקרו את התנהגות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות (התכנסות בתנאי, התכנסות בהחלט, התבדרות).

ב. (8 נק') נתון שלטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ יש רדיוס התכנסות $r = 2$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

1. הטור חזקות מתכנס בהחלט לכל $x \in (-1, 2]$.

2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ מתכנס בהחלט.

שאלה 2 - (20 נק')

נתונה הפונקציה : $f(x, y) = x^5 - y^5$.

א. (15 נק') מצאו מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה f בתחום :
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

ב. (5 נק') האם קיים הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$?

שאלה 3 - (20 נק')

נתונה פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ במשתנים x, y דיפרנציאבילית ב- \mathbb{R}^2 . נגדיר פונקציה g באופן הבא: $g(u, v) = f(2u + v^3, e^{(u-v^2)})$.

ידוע כי $\frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) = 4$, $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 1) = 6$ ו- $g(1, 1) = 5$.

א. (9 נק') מצאו את $\vec{\nabla} f(3, 1)$.

ב. (6 נק') מצאו קירוב לינארי של הערך $f(3.01, 1.02)$.

ג. (5 נק') האם קיים וקטור \vec{s} בעל נורמה 1 עבורו מתקיים $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3, 1) = 9$?

שאלה 4 - (20 נק')

חשבו את הנפח של הגוף G , כאשר:

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 10 - x^2 - y^2 \leq z \leq 10 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

שאלה 5 - (20 נק')

נתון השדה הוקטורי: $\vec{F}(x, y) = \left(\sqrt{y} - y + \sqrt{x}, \frac{x}{2\sqrt{y}} - x + \sqrt{y} + \alpha x^2 \right)$, כאשר α פרמטר ממשי.

א. (7 נק') מצאו את הערך של הפרמטר α עבורו השדה \vec{F} הינו שדה משמר בתחום:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

ב. (8 נק') עבור הערך של α שמצאתם בסעיף א. חשבו את העבודה שמבצע השדה \vec{F} על חלקיק הנע לאורך העקומה: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 9 - 2(x-1)^2\}$, מהנקודה $A = (1, 9)$ עד הנקודה $B = (3, 1)$, כלומר הכיוון מ- A ל- B .

ג. (5 נק') עבור $\alpha = 1$ חשבו את העבודה שמבצע השדה \vec{F} על חלקיק הנע לאורך אותה עקומה C כמו בסעיף הקודם.

רמז: $\int_C (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$.

שאלה 6 - (20 נק')

חשבו את השטף של השדה הוקטורי : $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 z^2) \hat{i} + (x^2 z^2) \hat{j} + (z+1)(x^2 + y^2) \hat{k}$
 דרך המשטח הפתוח σ : $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.
 כיוון הנורמליים למשטח הוא "כלפי מעלה" כלומר לכיוון החיובי של ציר \overrightarrow{OZ} .

בהצלחה!!