פתרון שאלון X

1. נתון טור החזקות $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x+4)^n$

(א) (12 נק') מהו תחום ההתכנסות של הטור? קבעו את סוג ההתכנסות (התכנסות בהחלט, בתנאי או התבדרות) בכל נקודה.

פתרון: נסדר את הטור:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x+4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^n(x+2)^n.$$

זהו טור חזקות עם מקדמים $a_n=(n+1)2^n$ סביב $x_0=-2$. נמצא רדיוס התכנסות ע"פ קושי

$$R^{-1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)2^n}=2$$

ולכן $R=\frac{1}{2}$. כלומר הטור מתכנס בהחלט בקטע $(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$. נבדוק בקצוות: עבור $x=-\frac{5}{2}$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n$ שמתבדר ($\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$). עבור $x=-\frac{3}{2}$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$ שמתבדר ($\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$). לסיכום: הטור מתכנס בהחלט כאשר $-\frac{5}{2}<x<-\frac{3}{2}$ ומתבדר כאשר $x\le -\frac{5}{2}, x\ge -\frac{3}{2}$.

(ב) (8 נק') מצאו את סכום הטור בתחום בו הטור מתכנס.

פתרון: מתקיים, עבור $t=2x+4$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2x+4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}t^{n+1}=$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n-1\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}-1\right)=$$

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{1}{[1-(2x+4)]^2}=\frac{1}{(2x+3)^2}$$

כאשר החלפנו סדר גזירה וסכימה של טור הנדסי מתכנס עבור $|t|<1$. בהתאמה, הטור המקורי מתכנס עבור $|2x+4|<1\Longrightarrow -\frac{5}{2}<x<-\frac{3}{2}$.

2. (א) (14 נק') נתונה פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $\mathbb{R}^2$ שקוי הגובה שלה הם הישרים $x+y+c=0$. הראו שהנקודה $(1,2)$ היא נקודה קריטית של הפונקציה $z(u,v)=f(u^2-v^2,2v-4u)$

פתרון: הישרים $x+y+c=0$ בעלי נורמל $\mathbf{n}=(1,1)$. הגרדיאנט מאונך לקו הגובה עבור פונקציה דיפרנציאבילית, ולכן בכל נקודה ב $\mathbb{R}^2$ הגדיאנט מקביל לכוון הזה, כלומר $\nabla f=t(1,1)=(t,t)$. נבצע החלפת משתנים: $\begin{array}{l}x=u^2-v^2\\ y=2v-4u\end{array}$.

נמצא את הנגזרות החלקיות של z בנקודה $(u,v)=(1,2)$ ע"י שימוש בכלל השרשרת:

$$\begin{array}{l}z'_u=f'_xx'_u+f'_yy'_u=t(2u)+t(-4)|_{(u,v)=(2,1)}=4t-4t=0\\ z'_v=f'_xx'_v+f'_yy'_v=t(-2v)+t(2)|_{(u,v)=(2,1)}=-2t+2t=0.\end{array}$$

קיבלנו $\nabla z(2,1)=0$ ולכן זוהי נקודה קריטית.

(ב) (6 נק') חשבו את הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x\sin(y^2)}{x^4+2y^2}$ או הוכיחו שאינו קיים.

פתרון: נחשב

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x\sin(y^2)}{x^4+2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2x\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\frac{y^2}{x^4+2y^2}.$$

כעת $2x\to 0, \frac{\sin y}{y}\to 1$ ו $0\le\frac{y^2}{x^4+2y^2}\le\frac{y^2}{2y^2}=\frac{1}{2}$ ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x\sin(y^2)}{x^4+2y^2}=0$$

3. (20 נק') טמפרטורה של לוחית מישורית הנמצאת בתחום

$$D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4, x\le y\}$$

נתונה ע"י $T(x,y)=x^2+y^3$. מצאו את הטמפרטורה המקסימלית והמינימלית של הלוחית.

פתרון: הפונקציה רציפה בתחום קומפקטי, ולכן ע"פ וירשטראס המינימום והמקסימום מתקבלים בתחום. נמצא אותם:

(א) נקודות קריטיות: $\nabla T=(2x,3y^2)=(0,0)\Longrightarrow(x,y)=(0,0)$

(ב) נקודות על השפה $y=x$: $T(x,x)=x^2+x^3$. נקבל $T'=2x+3x^2=0\Longrightarrow x=0,x=-\frac{2}{3}\Longrightarrow(x,y)=(0,0),(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$

(ג) נקודות על השפה $x^2+y^2=4$ בעזרת כפלי לגראנג':

$$\begin{array}{c}\nabla T=\lambda\nabla g\\ g=0\end{array}\Longrightarrow\begin{array}{c}2x=\lambda\cdot 2x\\ 3y^2=\lambda\cdot 2y\\ x^2+y^2=4\end{array}\Longrightarrow\begin{array}{c}2x(1-\lambda)=0\\ y(3y-2\lambda)=0\\ x^2+y^2=4\end{array}\Longrightarrow$$

$$\begin{array}{c}x=0\Longrightarrow y=2\\ y=0\Longrightarrow x=-2\\ \lambda=1\Longrightarrow y=\frac{2}{3},x=-\frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{array}$$

(ד) נקודות מפגש שפות: $y=x,x^2+y^2=4\Longrightarrow(x,y)=\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

בסה"כ נקבל

$T(0,0)=0,T(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})=\frac{4}{27},T(0,2)=8=T_{\max},T(-2,0)=4,T(\sqrt{2},\sqrt{2})=2(1+\sqrt{2}),T(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=2(1-\sqrt{2})=T_{\min},T(-\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{2}{3})=\frac{104}{27}$

4. (20 נק') נתון השדה $\mathbf{F}=(e^{yz}+x+\sin y,-e^{xz^2}+\ln(z^2+1),\ln\sqrt{x^2+y^2+1})$. חשבו את השטף של השדה דרך החרוט הפתוח $z=1-\sqrt{x^2+y^2}, z\ge 0$ בכוון החיובי (רמז 1: נפח חרוט בגובה h ורדיוס בסיס R הינו $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$, רמז 2: את הפונקציה $f(t)=\frac{t^3}{t^2+1}$ ניתן לרשום בצורה $f(t)=t-\frac{t}{t^2+1}$).

פתרון: השדה רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbb{R}^3$. על כן נוכל לסגור את החרוט ולהשתמש במשפט גאוס. אם כן

$$\Phi=\iint\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds=\iiint div\mathbf{F}dV=\iiint dV=\frac{\pi}{3}.$$

על מנת לחשב את השטף דרך "המכסה" $z=0$ נרשום

$$\Phi_0=\iint \mathbf{F}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)dxdy=-\iint \ln(\sqrt{x^2+y^2+1})dxdy=$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^1 \ln\sqrt{r^2+1})rdrd\theta=-2\pi\int_0^1\frac{1}{2}\ln(r^2+1)rdr=$$

$$-\pi\left[\frac{1}{2}r^2\ln(r^2+1)|_0^1-\int_0^1\frac{r^3}{r^2+1}dr\right]=$$

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2+\pi\int_0^1\left(r-\frac{r}{r^2+1}\right)dr=.$$

$$-\frac{\pi}{2}\ln 2+\pi\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}\ln(r^2+1)\right]|_0^1=\frac{\pi}{2}-\pi\ln 2.$$

כעת, השטף דרך החרוט הפתוח יהיה $\Phi-\Phi_0=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+\pi\ln 2=\pi\left(\ln 2-\frac{1}{6}\right)$.

5. (א) (12 נק') חשבו את המסה של הגוף החסום ע"י התחום $1\le x+y\le 2,\ 0\le y\le x$ עם צפיפות מסה $\rho(x,y)=\frac{y(x+y)^2}{x^3}$.

פתרון: נעבור לקורדינטות $u=x+y,\ v=\frac{y}{x}$ כך ש $1\le u\le 2, 0\le v\le 1$. נחשב

$$J^{-1}=\left|\det\begin{pmatrix} u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix}\right|=\frac{x+y}{x^2}$$

כך ש

$$M=\iint \rho dxdy=\int_0^2\int_0^1\frac{y(x+y)^2}{x^3}Jdudv=$$

$$\int_1^2\int_0^1\frac{y(x+y)^2}{x^3}\frac{x^2}{x+y}dudv=\int_1^2\int_0^1 uvdudv=\frac{3}{4}.$$

(ב) (8 נק') חשבו את מסת העקום $C=\{x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0\}$ כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י $\rho(x,y)=xy^2$

פתרון: יש לחשב למעשה אינטגרל קווי מסוג ראשון כאשר $x=\cos t, y=\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. אם כן

$$M=\int_C\rho dl=\int_0^{\pi/2}\rho(x,y)\sqrt{x'^2+y'^2}dt=$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos t\sin^2 tdt=\frac{1}{3}\sin^3 t|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}.$$

6. נתון השדה $\mathbf{F}=(P(x,y),Q(x,y))=(ay^2\cos x, 2y\sin x)$ כאשר a פרמטר ממשי.

(א) (5 נקודות) עבור אילו ערכים של a השדה משמר ב $\mathbb{R}^2$?

פתרון: השדה רציף ובעל נגזרות חלקיות רציפות בתחום פשוט קשר. על כן הוא משמר אם"ם $Q'_x = P'_y$. אם כן

$$Q'_x = 2y\cos x = P'_y = 2ay\cos x \Longrightarrow a = 1.$$

(ב) (15 נק') עבור $a = \frac{1}{2}$ חשבו את העבודה הדרושה להביא חלקיק נקודתי מהנקודה $(0,-1)$ לנקודה $(0,1)$ לאורך חצי המעגל $C = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1, x \geq 0\}$

(רמז: עבור פונקציה $f(x)$ אי־זוגית בקטע $[-b,b]$ מתקיים $\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0$).

פתרון: עבור $a = \frac{1}{2}$ השדה $\mathbf{F} = (\frac{1}{2}y^2\cos x, 2y\sin x)$ אינו משמר ולכן נעזר במשפט גרין

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy$$

בתחום הקשיר והפתוח $D = \{(x,y) : 0 < x < \sqrt{1-y^2}, -1 < y < 1\}$.

נקבל

$$\iint (Q'_x - P'_y)dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} y\cos x dx =$$

$$\int_{-1}^{1} dy y\sin x|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \int_{-1}^{1} dy y \sin\sqrt{1-y^2} = 0$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש $f(y) = y\sin\sqrt{1-y^2}$ פונקציה אי־זוגית ב $[-1,1]$.

נשאר לחשב את האינטגרל $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ לאורך הקו $x = 0$. אם כן

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{-1}^{1} Q(0,y)dy = -\int_{-1}^{1} 0dy = 0$$

ובסהכ

$$W = \iint (Q'_x - P'_y)dxdy - \left(-\int_{-1}^{1} Q(0,y)dy\right) = 0.$$