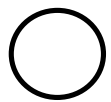


מבחן מבוא להסתברות פתרון X

השב/השיבי תשובות מפורטות והסבר/הסבירי צעדיך! יש להקפיד על כתיבה ברורה, קריאה ומסודרת!

בהצלחה!



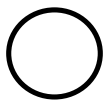
בחינות – היחידה למתמטיקה
שאלה 1 (35 נקודות)

א. (7 נק') בגן "שלדג" לומדים 20 ילדים. בסוף השנה מחלקת הגננת 20 מתנות לילדים כאשר כל ילד מקבל מתנה אחת הנבחרת באופן אקראי. חצי מהמתנות הן צעצועי סימבה וחצי פיקצ'ו. מהי ההסתברות ששלושה חברים דניאל, דוד ואיתן יקבלו צעצוע סימבה כל אחד.

פתרון א:

מספר צעצועי סימבה X הנבחרים עבור שלושת החברים מתפלג לפי התפלגות היפרגאומטרית $HG(20,10,3)$.

$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.1053$$



ב. (10 נק') לדניאל יש קופסה ובה שלושה חרוזים אדומים ושני חרוזים לבנים, לאיתן יש קופסה ובה שני חרוזים אדומים ושני חרוזים לבנים. דניאל ואיתן משחקים במשחק הבא: דניאל בוחר באופן אקראי חרוז אחד מהקופסה שלו ומעביר לקופסא של איתן. אחרי זה איתן בוחר חרוז אחד באופן אקראי מהקופסה שלו. אם שני החרוזים שהחברים בחרו יהיו באותו צבע דניאל ניצח, אחרת איתן ניצח.

1. אם ידוע שדניאל ניצח במשחק מהי ההסתברות שהוא בחר בחרוז אדום?

2. מצאו את התוחלת של מספר החרוזים האדומים ששני החברים בחרו.

פתרון ב:

1. נגדיר מאורעות: A - דניאל בחר בחרוז אדום,

B - דניאל ניצח במשחק.

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.6 \cdot 0.6}{0.6 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.6} = 0.6$$

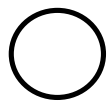
2. נגדיר מ"מ: X - מספר חרוזים אדומים ששני החברים בחרו.

$$P(X=0) = P(W,W) = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24$$

$$P(X=2) = P(R,R) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36$$

$$P(X=1) = 1 - 0.24 - 0.36 = 0.4$$

$$E(X) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.36 = 1.12$$



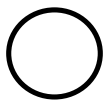
בחינות – היחידה למתמטיקה

ג. (8 נק') בכל יום דניאל בוחר חבר אחד באקראי מ-19 ילדי הגן כדי לשחק איתו בלגו. משחק לגו עם דוד נמשך 20 דקות ועם כל אחד מיתר 18 הילדים האחרים המשחק נמשך 10 דקות. מהי הסתברות שסך הזמן שדניאל ישחק בלגו בשלושת הימים הבאים יהיה יותר מ-50 דקות?

פתרון ג:

נגדיר משתנה מקרי X - מספר ימים מתוך שלושה שבהם דניאל ישחק עם דוד. X מתפלג לפי התפלגות בינומית $Bin(3, 1/19)$. נגדיר Y - זמן של שלושה משחקים. מתקיים: $Y = 20X + 10(3 - X) = 10X + 30$.

$$P(Y > 50) = P(10X + 30 > 50) = P(X > 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{19}\right)^2 \frac{18}{19} + \left(\frac{1}{19}\right)^3 = 0.1497$$



ד. (5 נק') בגן הסמוד, "פעמון", לומדים 36 ילדים. כל ילד התבקש להביא תפוחי עץ לעוגה. כמות תפוחי העץ שילד כלשהו מביא מתפלגת לפי התפלגות אחידה בין 1 ל 3, באופן בלתי תלוי בילדים האחרים. מצאו את החציון של מספר התפוחים הכולל שהביאו כל ילדי הגן.

1. 2

2. 70

3. 36

4. 72

פתרון ד:

נגדיר: X_i - מספר תפוחי עץ שילד ה- i הביא.

X_1, X_2, \dots, X_{36} משתנים מקריים ב"ת ושווי התפלגות עם תוחלת $\mu = \frac{1+3}{2} = 2$ ושונות $\sigma^2 = \frac{3^2-1}{12} = \frac{2}{3}$.

לפי משפט הגבול המרכזי נקבל שסכום תפוח עץ מתפלג בקירוב נורמלית עם תוחלת 72 ושונות 24. נמצא חציון של

$$x_{0.5} = 72 + \sqrt{2/3} \cdot z_{0.5} = 72$$

ה. (5 נק') דניאל משחק עם דוד במשחק זיכרון. הסיכוי שדניאל מנצח במשחק הוא 0.4, הסיכוי שדוד מנצח במשחק הוא 0.4 ואילו הסיכוי שהמשחק יסתיים בתיקו הוא 0.2. דניאל מחליט לשחק במשחק הזה עד שינצח בסך הכל בשלושה משחקים. מהי ההסתברות שהילדים ישחקו לפחות ארבעה משחקים?

1. 0.936

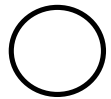
2. 0.875

3. 0.591

4. 0.141

פתרון 1ה:

המשלים של המאורע בשאלה הוא "דניאל ישחק בדיוק שלושה משחקים" ולכן התשובה היא $1 - 0.4^3 = 0.936$



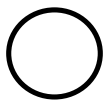
שאלה 2 (35 נקודות)

א. (8 נק') משקל כל נוסע הטס במטוס הוא משתנה מקרי בעל התפלגות נורמלית עם תוחלת $\mu_1 = 70kg$ וסטיית תקן σ_1 . ידוע כי 89.435% מהנוסעים הם בעלי משקל הקטן מ 80 ק"ג. מהי סטיית התקן, σ_1 . יש לפרט את החישובים.

פתרון א:

$$P(X \leq 80) = \Phi\left(\frac{80 - 70}{\sigma_1}\right) = 0.89435$$

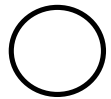
מטבלת התפלגות נורמלית רואים כי $\frac{80-70}{\sigma_1} = 1.25$ ולכן $\sigma_1 = 8$.



ב. (8 נק') משקל כל נוסע הטס במטוס הוא משתנה מקרי בעל התפלגות נורמלית עם תוחלת $\mu_1 = 70kg$ וסטיית תקן $\sigma_1 = 8kg$. יובל, אחד מנוסעי המטוס, שוקל בין 60 ל 80 ק"ג. מהי הסתברות שמשקלו של יובל גדול מ 75 ק"ג?

פתרון ב:

$$\begin{aligned} P(X > 75 | 60 \leq X \leq 80) &= \frac{P(75 < X \leq 80)}{P(60 \leq X \leq 80)} = \\ &= \frac{F_X(80) - F_X(75)}{F_X(80) - F_X(60)} = \frac{\Phi\left(\frac{80-70}{8}\right) - \Phi\left(\frac{75-70}{8}\right)}{\Phi\left(\frac{80-70}{8}\right) - \Phi\left(\frac{60-70}{8}\right)} = \\ &= \frac{\Phi(1.25) - \Phi(0.625)}{\Phi(1.25) - \Phi(-1.25)} = \frac{0.89435 - 0.74215}{0.89435 - 0.10565} = \frac{0.1522}{0.7887} = 0.1929 \end{aligned}$$



בחינות – היחידה למתמטיקה

ג. (9 נק') משקל כל נוסע הטס במטוס הוא משתנה מקרי בעל התפלגות נורמלית עם תוחלת $\mu_1 = 70kg$ וסטיית תקן $\sigma_1 = 8kg$, באופן בלתי תלוי במשקל נוסעים אחרים. כמו כן, כל נוסע מביא עימו מטען אשר משקלו הוא משתנה מקרי בעל התפלגות נורמלית עם תוחלת $\mu_2 = 21kg$ וסטיית תקן $\sigma_2 = 5kg$, באופן בלתי תלוי במשקל המטען של נוסעים אחרים. נניח כי משקלו של נוסע ומשקל המטען שלו הם בלתי תלויים, מהן התוחלת והשונות של סך המשקל של 292 נוסעים, כולל המטען שלהם?

פתרון ג:

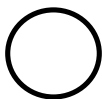
נגדיר משתנים מקריים:

X_i - משקל של נוסע ה- i ,

Y_i - משקל של נוסע ה- i .

$$E\left(\sum_{i=1}^{292} X_i + \sum_{i=1}^{292} Y_i\right) = 292(E(X_1) + E(Y_1)) = 26572$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{292} X_i + \sum_{i=1}^{292} Y_i\right) = 292(V(X_1) + V(Y_1)) = 25988$$



ללא תלות בסעיפים הקודמים:

ד. (5 נק') קבעו מהי הטענה נכונה

1. $E(X^2) = E(X)^2$

2. $E(X - E(X)) = 0$

3. $Var(10 \cdot X) = 10 \cdot Var(X)$

4. $Var(X + 10) = Var(X) + 10$

פתרון ד: לפי ליניאריות של תוחלת של $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$

ה. (5 נק') קבעו מהי הטענה נכונה

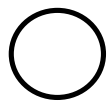
1. מקדם המתאם הוא מדד רק לסוג הקשר הליניארי ולא לעוצמת הקשר הליניארי בין המשתנים.

2. שונות המשותפת היא מדד לעוצמת הקשר הליניארי בין המשתנים.

3. מקדם המתאם הוא מדד לסוג הקשר הליניארי וגם לעוצמת הקשר הליניארי בין המשתנים.

4. שונות המשותפת של משתנים מקריים תלויים בהכרח שונה מאפס.

פתרון ה: תשובה 3.



בחינות – היחידה למתמטיקה
שאלה 3 (30 נקודות)

במאפייה של חנן אופים מטעמים המיוצרים משני סוגי קמחים, קמח חיטה וקמח כוסמין. ספק הקמחים מביא, בכל בוקר, את הקמחים למאפייה של חנן בשלושה סוגים של ארגזים, ארגז א' המכיל: 30 שקים של קמח חיטה ו-30 שקים של קמח כוסמין. ארגז ב' המכיל: 20 שקים של קמח חיטה ו-40 שקים של קמח כוסמין. ארגז ג' המכיל: 40 שקים של קמח חיטה ו-20 שקים של קמח כוסמין. בכל בוקר חנן בודק את משלוח הקמח שקיבל, הוא בוחר באופן אקראי את אחד משלושת הארגזים שהגיעו למאפייה ומוציא מתוכו באקראי וללא החזרה 2 שקים של קמח. יהי X מספר שקי קמח הכוסמין שדגם חנן. יהי Y מספר שקי קמח החיטה בארגז שבחר חנן לבדוק, א. (12 נק')

1. חשבו את ההסתברות $P(Y = 20 | X = 2)$.

2. מצאו את התוחלת $E(X | Y = 20)$.

פתרון א:

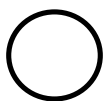
1. נשים לב ש $X | Y = k$ מתפלג לפי התפלגות היפרגאומטרית $HG(60, 60 - k, 2)$.

$$P(Y = 20 | X = 2) = \frac{P(Y = 20, X = 2)}{P(X = 2)} = \frac{P(Y = 20)P(X = 2 | Y = 20)}{P(Y = 20)P(X = 2 | Y = 20) + P(Y = 30)P(X = 2 | Y = 30) + P(Y = 40)P(X = 2 | Y = 40)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59} + \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{60} \cdot \frac{29}{59} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{60} \cdot \frac{19}{59}} = 0.555$$

2. $X | Y = 20$ מתפלג לפי התפלגות היפרגאומטרית $HG(60, 40, 2)$.

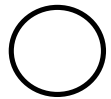
$$E(X | Y = 20) = 2 \cdot \frac{40}{60} = \frac{4}{3}$$



במאפייה של חנן אופים מטעמים המיוצרים משני סוגי קמחים, קמח חיטה וקמח כוסמין. ספק הקמחים מביא, בכל בוקר, את הקמחים למאפייה של חנן בשלושה סוגים של ארגזים, ארגז א' המכיל: 30 שקים של קמח חיטה ו- 30 שקים של קמח כוסמין. ארגז ב' המכיל: 20 שקים של קמח חיטה ו- 40 שקים של קמח כוסמין. ארגז א' המכיל: 40 שקים של קמח חיטה ו- 20 שקים של קמח כוסמין. בכל בוקר חנן בודק את משלוח הקמח שקיבל, הוא בוחר באופן אקראי את אחד משלושת הארגזים שהגיעו למאפייה ומוציא מתוכו באקראי וללא החזרה 2 שקים של קמח. יהי X מספר שקי קמח הכוסמין שדגם חנן. יהי Y מספר שקי קמח החיטה בארגז שבחר חנן לבדוק, ב. (6 נק') האם X ו- Y ב"ת?

פתרון ב:

בסעיף א קיבלנו הסתברות שונה מ $\frac{1}{3}$ ולכן תלויים.



בחינות – היחידה למתמטיקה

ללא תלות בסעיפים הקודמים:

ג. (5 נק') יהיו A ו- B מאורעות כלשהם בעלי הסתברות חיובית, יהי V משתנה המציין את התרחשות המאורע A (כלומר, $V = 1$ אם המאורע A מתרחש, $V = 0$ אם המאורע A לא מתרחש), ויהי U משתנה המציין את התרחשות המאורע B . יהי W משתנה המציין את התרחשות $A \cap B$. מתי $E[W] = E[V] \cdot E[U]$?

1. אם $P(A) = P(B)$.

2. אם A ו- B מאורעות זרים.

3. אם A ו- B מאורעות בלתי תלויים.

4. לא אפשרי כלל.

פתרון ג:

$$P(W = 1) = P(U = 1, V = 1) = P(U = 1)P(V = 1)$$

$$E(W) = 1 \cdot P(U = 1)P(V = 1) = E(U)E(V)$$

תשובה 3.

ד. (5 נק') יהיו T, S משתנים מקריים כלשהם ויהיו a ו- b מספרים קבועים חיוביים. מה מהבאים נכון,

1. $\rho(aT, S + b) = a\rho(T, S)$

2. $\rho(aT, S + b) = \rho(T, S)$

3. $\rho(aT, S + b) = ab\rho(T, S)$

4. $\rho(aT, S + b) = |a|\rho(T, S)$

פתרון ד:

$$\rho(aT, S + b) = \frac{COV(aT, S + b)}{\sigma(aT)\sigma(S + b)} = \frac{aCOV(T, S)}{|a|\sigma(T)\sigma(S)} = \rho(T, S)$$

תשובה 2.

