

חזו"א 2 תרגיל מספר 1 – טורים

**** התרגילים המסומנים עם 2 כוכביות הם תרגילי רשות ללימוד עצמי.

שאלה 1 (טור טלסקופי וטור גיאומטרי).

בדוק האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים. במקרה של התכנסות מצאו את הסכום של הטור.

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) \quad \text{ג)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{n+1} - e^n) \quad \text{ב)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \quad \text{א)}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^n}{2^{n+1}} \quad \text{ה)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} \quad \text{ד)}$	

שאלה 2

א. הוכיחו שהסדרה $S_n = 1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{n!}$ מתכנסת ומצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

רמז: הסדרה הנתונה שווה לפולינום מקלורן ממעלת n בנקודה $x = \frac{1}{10}$, $T_{n,0}\left(\frac{1}{10}\right)$, עבור הפונקציה

$$f(x) = e^x. \text{ מתקיים: } e^{\frac{1}{10}} = T_{n,0}\left(\frac{1}{10}\right) + r_n\left(\frac{1}{10}\right)$$

ב. האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \cdot \frac{1}{n!}$ מתכנס? אם כן, מצאו את הסכום שלו.

רמז: בדוק האם לסדרת הסכומים החלקיים קיים גבול סופי.

שאלה 3 **

א. מצאו את הגבול של הסדרה $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{4!} - \frac{1}{5^6} \cdot \frac{1}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{5^{2n}} \cdot \frac{1}{(2n)!} \right]$

ב. האם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(0.2)^{2k}}{(2k)!}$ מתכנס? אם כן, מצאו את הסכום שלו.

שאלה 4 (מבחן השוואה הראשון).

חקרו את התכנסות הטורים:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n + n^2}{n \ln^3 n + n^4} \quad \text{ג)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \sin^2 n}{\sqrt{n^7} + \cos^2 n} \quad \text{ב)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \quad \text{א)}$
--	--	---

שאלה 5 (מבחן השוואה השני)

בדוק את התכנסות של הטורים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \left(\frac{n + \sin^4(n)}{n^3} \right) \quad \text{ג) } \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n^3}} - 1) \quad \text{ב) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{א) }$$

שאלה 6 **

חקרו את התכנסות של הטורים : א. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$. ב. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

שאלה 7 **

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. הוכיחו שאם הטור של הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אז גם הטור המקורי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

שאלה 8

נתון טור מתכנס $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ וטור מתבדר $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. הוכיחו שטור הסכומים $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ הוא טור מתבדר.

שאלה 9 (תנאי הכרחי להתכנסות, טור של סכום הטורים).

חקרו את התכנסות הטורים :

$$\text{א. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+(n-1)!}{(n+1)!} \quad \text{ב. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+n!}{(n+1)!} \quad \text{ג. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$$

שאלה 10

הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ מתכנס. האם אפשר להשתמש במבחן המנה של D'Alembert ?
האם אפשר להשתמש במבחן השורש של Cauchy ?

שאלה 11

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n}}{3^n} 2^n$ מתכנס ? האם אפשר להשתמש במבחן המנה של D'Alembert ?
האם אפשר להשתמש במבחן השורש של Cauchy ?

שאלה 12

האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ מתכנס ? אם כן, מצאו את הסכום שלו. רמז : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

שאלה 13

נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{\sqrt{n+1}}$, כאשר a מספר ממשי חיובי. עבור איזה $a > 0$ הטור מתכנס?

שאלה 14

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

שאלה 15

הוכיחו שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n + (-6)^n}{n+4} \cdot \frac{1}{7^n} \right)$ מתכנס.

שאלה 16

הוכיחו שהטורים הבאים מתכנסים בהחלט:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ (אפשר להעזר בשאלה 10)

שאלה 17

בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ בשתי דרכים (אפשר להעזר בשאלה 14).

שאלה 18 (מבחן ליבניץ).

נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{3n+1}$. האם הטור מתכנס בתנאי / בהחלט / מתבדר?

שאלה 19 **

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{(-3)^n} (a+5)^n$. הוכיחו שהטור מתכנס בהחלט לכל $-8 < a < -2$.

שאלה 20 (מבחן ליבניץ ומבחן האינטגרל).

נתון הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$. האם הטור מתכנס בתנאי / בהחלט / מתבדר?

Determine whether the series converges / converges absolutely / converges conditionally.

שאלה 21

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$. האם הטור מתכנס בתנאי / בהחלט / מתבדר?