פתרון X

שאלה 1: (20 נקודות)

א. (10 נק') הוכיחו כי לכל $1 \le a < b$ מתקיים : $\ln^2(b) - \ln^2(a) < 2(\ln b)(b-a)$.

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל : $\int \frac{1}{(\cos x - 1)(\cos x - 2)} \sin x \, dx$.

פתרון :

א . נשתמש במשפט לגרנז' : הפונקציה $f(x) = \ln^2(x)$ היא רציפה בקטע $[a,b]$ כאלמנטרית שמוגדרת בקטע , וגזירה בקטע (a,b) (כפל גזירות) ולכן קיים $c \in (a,b)$ כך ש :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow \ln^2(b) - \ln^2(a) = \frac{2\ln c}{c}(b-a) \underset{\substack{1 \le a < c < b \\ 0 < \ln c < \ln b}}{<} \frac{2\ln b}{1}(b-a) = 2\ln b(b-a)$$

ב.

$$\int \frac{1}{(\cos x - 1)(\cos x - 2)} \sin x \, dx \underset{\substack{\cos x = t \\ (-\sin x)dx = dt}}{=} \int \frac{-1}{(t-1)(t-2)} dt \underset{\substack{\frac{-1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} \\ A=1 \\ B=-1}}{=} \int \left(\frac{1}{(t-1)} - \frac{1}{(t-2)}\right) dt =$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t-2| + C = \ln|\cos x - 1| - \ln|\cos x - 2| + C$$

שאלה 2 : (20 נקודות)

א. (10 נק') נתונה הסדרה : $a_n = \frac{5n + \sin(n)}{n}$.

חשבו את הגבול $\lim_{n \to \infty} a_n$ והוכיחו שהגבול שמצאתם מקיים את הגדרת הגבול.

ב. (10 נק') חשבו את הגבול $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 - 1} \right)^{2n}$.

פתרון:

א. $\lim_{n \to \infty} \frac{5n + \sin n}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{5n}{n} \right) + \lim_{n \to \infty} \left(\overset{bounded}{\sin n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{\nearrow 0} \right) = 5$

הוכחה לפי ההגדרה : יהי $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{5n+\sin n}{n}-5\right|=\frac{|\sin n|}{n}\le\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}<n$$

לכן אם נבחר מספר טבעי $n_0\ge\frac{1}{\varepsilon}$ (למשל $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$) אז יתקיים שלכל $n>n_0$:

$\left|\frac{3n+\sin n}{n}-3\right|<\varepsilon$.

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}\right]^{\frac{n}{n^2-1}2n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}=e$ כי $x_n=\frac{n}{n^2-1}\longrightarrow 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1}=\frac{/:n^2}{/:n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1-\frac{1}{n^2}}\right)=2$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-1}{n^2-1}\right)^{2n}=e^2$$

<u>שאלה 3</u> : (20 נקודות)

א. (10 נק') כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה : $e^x+x=-x^3$?
נמקו היטב את התשובה.

ב. (10 נק') נתונה פונקציה f בעלת נגזרות עד סדר 3 רציפות ב- $\mathbb{R}$.
ידוע שהפולינום טיילור-מקלורין שלה מסדר שני הוא $T_2(x)=1+3x+9x^2$, ו- $|f'''(x)|\le 27$
לכל x ממשי.

ב-1) מצאו קירוב של הערך $f\left(\frac{1}{3}\right)$ והעריכו את השגיאה בקירוב שמצאתם .

ב-2) האם יתכן ש - $f\left(\frac{1}{3}\right)=4$?

<u>פתרון</u> :

א. נתבונן בפונקציה $f(x)=e^x+x+x^3$. מספיק לבדוק כמה פתרונות ממשיים יש למשוואה $f(x)=0$. f פונקציה אלמנטרית שמוגדרת לכל x ממשי, לכן f רציפה לכל x ממשי.

בכל תחום של מונוטוניות ממש של f יש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $f(x)=0$. נמצא את התחומים האלה:

$$f'(x)=e^x+1+3x^2$$

הנגזרת f' מוגדרת **וחיובית** לכל x ממשי. **לכן** f **עולה ב -** $\mathbb{R}$ **.**

מתקיים: $f(0)=1>0$ ו – $f(-1)=\frac{1}{e}-2<0$. לכן לפי משפט קושי על ערך הביניים יש למשוואה $f(x)=0$ לפחות פתרון אחד בקטע $(-1,0)$. המונוטוניות ממש **ב -** $\mathbb{R}$ גוררת שהפתרון הזה יחיד.

לכן למשוואה $f(x)=0$ יש פתרון יחיד. מסקנה: למשוואה המקורית יש פתרון יחיד.

ב. 1+2

$$f\left(\frac{1}{3}\right)\cong T_2\left(\frac{1}{3}\right)=3$$

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right)-3\right|=\left|r_2\left(\frac{1}{3}\right)\right|\underset{0<c<\frac{1}{3}}{=}\left|\frac{f'''(c)\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3!}\right|=\frac{|f'''(c)|\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3!}\le\frac{27}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{6}$$

לכן $3-\frac{1}{6}\le f\left(\frac{1}{3}\right)\le 3+\frac{1}{6}<4$ ואז **לא יתכן** ש- $f\left(\frac{1}{3}\right)=4$.

<u>שאלה 4</u> : (20 נקודות)

א. (12 נק') נתונה פונקציה $f(x)=x^3+px+q$ כאשר p,q מקדמים ממשיים וידוע שבנקודה $x=1$ הפונקציה מקבלת מינימום מקומי, והערך של המינימום המקומי הוא -1 . מצאו (אם קיימת) נקודת מקסימום מקומי וחשבו את ערך הפונקציה בנקודה הזאת.

ב. (8 נק') נתונה הפונקציה $f(x)=4x+\sin^2 x$. הוכיחו כי f חד – חד ערכית ב – $\mathbb{R}$.

<u>פתרון :</u>

א.

f פולינום, לכן f פונקציה גזירה לכל x ממשי. לכן לפי משפט פרמה, בנקודות הקיצון המקומי של הפונקציה הנגזרת שווה ל – 0.

$$f'(x)=3x^2+p \;\Rightarrow\; f'(1)=3+p=0 \;\Rightarrow\; p=-3$$

מכאן

$$f'(x)=3x^2-3=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$$

כלומר יש נקודה נוספת חשודה לקיצון: $x=-1$. מתקיים: $f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0$ לכן $x=-1$ נקודת מקסימום מקומי.

מכיוון ש – $p=-3$ ו – $f(1)=-1$ מקבלים : $f(1)=1^3-3\cdot1+q=-1$ ⇐ $q=1$

לכן $f(x)=x^3-3x+1$ וערך הפונקציה בנקודת המקסימום המקומי הינו $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+1=3$.

ב. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים : $f'(x)=4+2\sin x\cos x=4+\sin 2x>0$.

לכן הפונקציה עולה (ממש) ב - $\mathbb{R}$, ולכן היא חד- חד ערכית.

<u>שאלה 5</u> : (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $F(x)=\int_2^{e^x}\frac{\ln t}{t^2}dt$.

א. (10 נק') מצאו תחומי קמירות, קעירות ונקודות פיתול של הפונקציה F .

ב. (10 נק') האם הישר $x=\ln 2$ מהווה אסימפטוטה אנכית לפונקציה : $G(x)=\frac{F(x)}{x-\ln 2}$?

<u>פתרון:</u> א . הפונקציה $f(t)=\frac{\ln t}{t^2}$ רציפה בקטע $(0,\infty)$ כי מוגדרת בקטע והיא אלמנטרית.

בנוסף הקטעים $\left[2,e^x\right]$ או $\left[e^x,2\right]$ מוכלים בקטע $(0,\infty)$, והפונקציה $b(x)=e^x$ גזירה לכל x.

ואז לפי משפט היסודי המוכלל מתקיים לכל x ממשי : $F'(x)=\left(\frac{\ln e^x}{\left(e^x\right)^2}\right)e^x=\frac{x}{e^x}$.

ולכן $F''(x)=\left(\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{1-x}{e^x}$ לכל x ממשי .

ולכן סימן הנגזרת השנייה של F הוא הסימן של $1-x$: חיובי ל- x קטן מ- 1 ושלילי לגדול מ- 1 וב- $x=1$ הנגזרת השנייה שווה 0.

ולכן : הפונקציה קמורה בקטע $(-\infty,1]$ והיא קעורה בקטע $[1,\infty)$. בנקודה $x=1$ הפונקציה גזירה ועוברת מקמורה לקעורה לכן יש פה נקודת פיתול.

ב. $\lim\limits_{x\to\ln2}G(x)=\lim\limits_{x\to\ln2}\left(\frac{F(x)}{x-\ln2}\right)=(\frac{0}{0},LOPITAL)=\lim\limits_{x\to\ln2}\frac{F'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to\ln2}\left(\frac{x}{e^x}\right)=\frac{\ln2}{2}$

נימוק על הגבול של F: הפונקציה F גזירה ולכן רציפה לכל x ממשי , לכן :

$$\lim_{x\to\ln2}F(x)=F(\ln2)=\int_2^{e^{\ln2}}\frac{\ln t}{t^2}dt=\int_2^2\frac{\ln t}{t^2}dt=0$$

כמסקנה : הישר הנתון לא מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף של G כי קבלנו גבול סופי כאשר x שואפת לנקודה $x=\ln 2$, ולכן שני הגבולות החד צדדיים הם סופיים.

שאלה 6 : (20 נקודות)

א. (10 נק') האם קיים ערך של הפרמטר הממשי a עבורו הפונקציה :

$$f(x)=\begin{cases} x^{4x} & (x>0) \\ 1 & (x=0) \\ e^{\left(\frac{2}{x}\right)}+a & (x<0) \end{cases}$$ היא רציפה בנקודה $x_0=0$?

ב. (10 נק') מצאו את השטח הכלוא בין הגרף של הפונקציה $f(x)=x+\ln x$, המשיק לגרף של הפונקציה בנקודה $(1,\ f(1))$ והישרים $x=1$ ו- $x=e$.

פתרון :

א .

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^{4x} \underset{0^0}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{4x\ln x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{4\ln x}{x^{-1}}}=e^0=1$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{4\ln x}{x^{-1}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\ Lopital\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4}{x}}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-4x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}-4x=0\right)$$

$$f(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{2}{x}}+a\right)=0+a=a$$

ואז הפונקציה רציפה ב-0 רק אם $a=1$ כי רק אז הגבולות החד צדדיים שווים לערך שלה ב -0.

ב. $f(x)=x+\ln x$, ולכן לכל $x>0$ (כלומר בתחום של הפונקציה) מתקיים :

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=1+\frac{1}{x} \\ f''(x)&=\frac{-1}{x^2} \end{aligned}\right\}$$

הנגזרת השנייה שלילית לכל x בתחום לכן הפונקציה קעורה בתחומה ואז ערכי הפונקציה בכל נקודה קטנים מהערך של משיק כלשהו (חוץ מבנקודת ההשקה איפה שווה למשיק).

משוואת הישר המשיק בנקודה : $(1,\ f(1))=(1,1)$ היא :

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=1+2(x-1)=2x-1$$

ולכן השטח :

$$AREA = \int_1^e \left(2x - 1 - (x + \ln x)\right)dx = \int_1^e \left(x - 1 - \ln x\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x - x\ln x + x\right) \Big|_1^e =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - x\ln x\right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}$$

הערה :

$$\int 1\ln x\, dx = (PARTS) = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$