פתרון מבחן באלגברה לינארית תשפ"ב סמסטר א שאלון X

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6 השאלות הבאות. יש לנמק את התשובות באופן מלא (אלא אם כתוב במפורש שלא צריך)

שאלה 1. (20 נקודות) **אין קשר בין סעיפים א,ב**

א. (14 נקודות) נתונה מערכת המשוואות
$$\begin{cases} -ax & +(a-1)\,y & +(4a-1)\,z & = & 2a-a^2 \\ x & & -2z & = & a \\ ax & +(a-1)\,y & +(a-3)\,z & = & 3a-3+a^2 \end{cases}$$

(i) מצאו את הערכים של הפרמטר a עבורם יש למערכת פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרון.

(ii) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר a וקטור העמודה $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת.

ב. (6 נקודות) קבעו אם הטענות הבאות נכונות או לא. אין צורך לנמק
תהי A מטריצה לא ריבועית מסדר $m\times n$, ו-b עמודה מסדר $m\times 1$.

(i) אם הדרגה של A שווה ל-m, (כלומר $\text{rank}(A)=m$) אז למשוואה $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

(ii) אם למשוואה $Ax=b$ יש פתרון יחיד, אז למשוואה $Ax=0$ יש פתרון יחיד.

פתרון

א. נדרג את המטריצה המורחבת של המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-1 & 4a-1 & -a^2+2a \\ 1 & 0 & -2 & a \\ a & a-1 & a-3 & a^2+3a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ -a & a-1 & 4a-1 & -a^2+2a \\ a & a-1 & a-3 & a^2+3a-3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-aR_1\to R_3]{R_2+aR_1\to R_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & a-1 & 2a-1 & 2a \\ 0 & a-1 & 3a-3 & 3a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & a-1 & 2a-1 & 2a \\ 0 & 0 & a-2 & a-3 \end{array}\right)$$

(i) אם $a\neq 2,1$ המטריצה שאליה הגענו היא מטריצה מדורגת שדרגתה 3, ולכן דרגת המטריצה המצומצמת שווה לדרגת המטריצה המורחבת שווה למספר המשתנים, ולכן למערכת יש פתרון יחיד. נבדוק כרגע את שאר המקרים.

i. מכיוון שהפעולות האלמנטריות שביצענו בתחילת השאלה היו פעולות אלמנטריות עבור כל בחירה של a נקבל כי עבור $a=2$ דרגת המטריצה המצומצמת שווה ל-2, ודרגת המטריצה המורחבת שווה ל-3, כלומר למערכת אין פתרונות.

ii. באותו אופן, עבור $a=1$ נקבל מהדירוג שביצענו קודם כי המטריצה המורחבת שקולת שורות למטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-1 & 4a-1 & -a^2+2a \\ 1 & 0 & -2 & a \\ a & a-1 & a-3 & a^2+3a-3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

דרגת המטריצה המורחבת והמצומצמת היא 2, מכאן שלמערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות. נסכם:

- כאשר $a \neq 1,2$ למערכת יש פתרון יחיד.
- כאשר $a = 1$ למערכת אין פתרונות.
- כאשר $a = 2$ למערכת יש אינסוף פתרונות.

(ii) נציב את העמודה כפתרון ונבדוק מתי מתקיים שוויון:

$$\begin{cases} -2a & +(a-1) & +(4a-1)\cdot 0 & = & 2a-a^2 \\ 2 & & -2\cdot 0 & = & a \\ 2a & +(a-1) & (a-3)\cdot 0 & = & 3a-3+a^2 \end{cases}$$

מהמשוואה השניה נקבל כי $a = 2$, וכאשר נציב ערך זה בשתי המשוואות הנותרות נקבל

$$-4+1=0, \quad 4+1=6-3+4$$

כלומר העמודה אינה פתרון עבור אף ערך של a, כי קיבלנו שתי שורות סתירה.

ב. לפי משפט המבנה של קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית, אם למערכת משוואות יש פתרון, אז מספר הפתרונות של המערכת שווה למספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה, ולכן

(i) דוגמה נגדית: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, b = 1$. הטענה לא נכונה.

(ii) הטענה נכונה

שאלה 2. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א,ב

א. (10 נקודות) נסמן $V = \mathbb{R}_3[x] = P_3(\mathbb{R})$ את מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר שלוש. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קיבעו האם היא תת-מרחב וקטורי של V. (יש לנמק את התשובה באופן מלא).

(i) $U_1 = \{p(x) \in V \mid p(2) = 0\}$

(ii) $U_2 = \{p(x) \in V \mid p(1)\cdot p(2) = 0\}$

ב. (10 נקודות) תהי A מטריצה ריבועית עם מקדמים ממשיים מסדר $n \times n$, ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש $Av \neq 0, A^2v = 0$. הוכיחו כי הקבוצה $\{v, Av\}$ בת"ל.

פתרון

א. נראה כי הקבוצה U_1 היא תת מרחב:

(i) **$U_1 \neq \emptyset$:** מתקיים כי הפולינום $p(x) = x-2$ שייך ל U_1.

(ii) **סגירות לחיבור:** יהיו $p(x), q(x) \in U_1$ שני פולינומים. כלומר, מתקיים כי $p(2) = 0 = q(2)$. בכדי להראות סגירות לחיבור יש להראות כי הפולינום $h(x) = p(x) + q(x)$ שייך ל U_1. כלומר, יש להראות כי $h(2) = 0$. אכן,

$$h(2) = q(2) + p(2) = 0 + 0 = 0$$

(iii) **סגירות לכפל בסקלר:** יהא $p(x) \in U_1$ ו $\alpha \in \mathbb{R}$. צריך להראות כי $h(x) = \alpha p(x) \in U_1$. כלומר, יש להראות כי $h(2) = 0$. אכן,

$$h(2) = \alpha p(2) = \alpha \cdot 0 = 0$$

ולכן U_1 הוא תת מרחב וקטורי.

נראה כי הקבוצה U_2 **אינה** תת-מרחב. אכן, נתבונן בפולינומים

$$p(x) = x - 2, \quad q(x) = x - 1$$

מתקיים כי

$$\begin{aligned} p(1) \cdot p(2) = (1-2) \cdot (2-2) = 0 \\ q(1) \cdot q(2) = (1-1) \cdot (1-2) = 0 \end{aligned}$$

כלומר שני הפולינומים הם איברים ב U_2. אולם,

$$(p+q)(x) = (x-2) + (x-1) = 2x - 3$$

ופולינום זה אינו מתאפס ב $x = 1$ וגם לא ב $x = 2$. ולכן, לא מתקיימת סגירות לחיבור ו U_2 אינו מרחב וקטורי.

ב. נתון כי $v \in \mathbb{R}^n$ מקיים כי $Av \neq 0, A^2v = 0$, ונראה כי הקבוצה $\{v, Av\}$ בת"ל. נניח כי

$$av + b(Av) = 0$$

נכפיל את השיוויון ב-A ונקבל כי

$$A\left(av + b(Av)\right) = a\left(Av\right) + b(\cancelto{0}{A^2v}) = a\left(Av\right) = 0.$$

כעת, נתון כי $Av \neq 0$ ולכן בהכרח $a = 0$. ולכן $av + bAv = bAv = 0$, ושוב $Av \neq 0$ ולכן $b = 0$ כלומר מקדמי צירוף לינארי שמתאפס חייבים להיות שווים לאפס, כלומר הקבוצה בת"ל.

שאלה 3. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) עבור המטריצה $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ נגדיר

$$\begin{aligned} T: \quad M_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\rightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ T(A) &= MA^T \end{aligned}$$

(i) מצאו בסיסים ומימדים לגרעין ולתמונה של T.

(ii) קבעו אם T חח"ע ואם היא על.

ב. (10 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ שמימדו $\dim V = 3$, ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס של V. נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ המקיימת

$$T(v_1) = v_1,\ T(v_2) = -v_2,\ T(v_3) = -v_3$$

(i) הוכיחו כי $T \circ T$ היא העתקת הזהות על V, כלומר $T(T(v)) = v$ לכל $v \in V$

(ii) קבעו האם T הפיכה. אם כן, מצאו את $T^{-1}(v_1 + v_2 + v_3)$

פתרון

א. נמצא תחילה את המטריצה המייצגת של ההעתקה לפי הבסיס הסטנדרטי של V,

$$B = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מתקיים כי

$$[T(u_1)]_B=\left[Mu_1^T\right]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\ [T(u_2)]_B=\left[Mu_2^T\right]_B=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$[T(u_3)]_B=\left[Mu_3^T\right]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\ [T(u_4)]_B=\left[Mu_4^T\right]_B=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-2\end{pmatrix}$$

כלומר

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\-1&-2&0&0\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה המייצגת ונקבל כי

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\-1&-2&0&0\\0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to R_4+R_2]{R_3\to R_3+R_1}\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מרחב הפתרונות של המטריצה הם וקטורי קואורדינטות של איברי הגרעין, ולכן בסיס למרחב הפתרונות מורכב מוקטורי קואורדינטות של בסיס לגרעין. בסיס למרחב הפתרונות הוא

$$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן בסיס לגרעין הוא

$$\left\{\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-2&1\end{pmatrix}\right\}$$

מרחב העמודות של המטריצה הם וקטורי קואורדינטות של איברי התמונה, ולכן בסיס של מרחב העמודות הם וקטורי קואורדינטות של בסיס לתמונה. מהדירוג, ומכך שפעולות אלמנטריות על שורות שומרות על תלויות לינאריות של העמודות, נקבל כי בסיס למרחב העמודות הוא העמודות הראשונה והשלישית של המטריצה המייצגת, כי במטריצה המדורגת ניתן לראות שהעמודות המתאימות הן קבוצה בת"ל ששאר העמודות תלויות לינארית בה. בסיס למרחב העמודות הוא, אם כן

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן בסיס לתמונה הוא

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

כמו כן, קיבלנו כי $\dim \mathrm{Im}T=2=\dim \mathrm{Ker}T$. T לא חח"ע כי $\dim \mathrm{Ker}T\neq 0$, והיא לא על כי $\dim \mathrm{Im}T=2<4$

ב. נראה כי לכל $v \in V$ מתקיים כי $T(T(v)) = v$: יהי $v \in V$, אזי קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, ולכן

$$T(v) = T(av_1 + bv_2 + cv_3) = aT(v_1) + bT(v_2) + cT(v_3) = av_1 - bv_2 - cv_3$$

$$T \circ T(v) = T(T(v)) = T(av_1 - bv_2 - cv_3) = aT(v_1) - bT(v_2) - cT(v_3) = av_1 + bv_2 + cv_3 = v$$

כלומר T היא ההפכית של עצמה, ולכן T הפיכה ומתקיים כי $T^{-1}(v) = T(v) = av_1 - bv_2 - cv_3$ ובפרט

$$T^{-1}(v_1 + v_2 + v_3) = v_1 - v_2 - v_3.$$

שאלה 4. (20 נקודות) אין קשר בין סעיפים א, ב

א. (10 נקודות) מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & k & k & k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה.

ב. (10 נקודות) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. עבור כל טענה, אם היא נכונה הוכיחו אותה, ואם היא לא נכונה מצאו דוגמה נגדית שמפריכה אותה.

(i) לכל שתי מטריצות ריבועיות אנטי סימטריות מסדר 2×2 מתקיים כי $AB = BA$

(ii) לכל שתי מטריצות אנטי-סימטריות C, D שמקיימות $CD = -DC$ המטריצה CD אנטיסימטרית.

פתרון

א. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה :

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{\scriptstyle R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \begin{vmatrix} 1+3k & 1+3k & 1+3k & 1+3k \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} = (1+3k) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k & k \\ k & k & 1 & k \\ k & k & k & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{\substack{R_4 \to R_4 - kR_1 \\ R_2 \to R_2 - kR_1 \\ R_3 \to R_3 - kR_1}}$$

$$(1+3k) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = \qquad (1+3k)\,(1-k)^3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}, 1$$

כלומר המטריצה הפיכה אם"ם $k \neq -\frac{1}{3}, 1$

ב. (i) הטענה נכונה : מטריצה אנטיסימטרית מסדר 2×2 היא מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. תהיינה נתונות שתי מטריצות אנטיסימטריות מסדר 2×2

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 a_2 & 0 \\ 0 & -a_1 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) הטענה נכונה כי

$$(CD)^T = D^T C^T = -D(-C) = DC = -CD$$

כלומר המטריצה CD מקיימת $(CD)^T = -CD$ כלומר אנטיסימטרית.

שאלה 5. (20 נקודות) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

א. (15 נקודות) מצאו את ערכי הפרמטר הממשי a עבורם המטריצה A לכסינה.

ב. (5 נקודות) עבור $a = 5$ רשמו שתי מטריצות אלכסוניות שונות D_1, D_2 שדומות ל-A, כלומר שעבורן קיימות P_1, P_2 כך ש-

$$A = P_1^{-1} D_1 P_1 = P_2^{-1} D_2 P_2$$

אין צורך למצוא את P_1, P_2.

פתרון

א. נמצא תחילה את הערכים העצמיים:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -3 & 9 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - a)(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a, 3, -3$$

כלומר הערכים העצמיים הם $a, 3, -3$. נחלק למקרים:

(i) מקרה ראשון: $a \neq \pm 3$ למטריצה קיימים 3 ערכים עצמים שונים והיא מסדר 3 על 3 לכן היא לכסינה.

(ii) מקרה שני: $a = 3$: במקרה הזה הפולינום האופייני הוא:

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$$

עבור הערך העצמי -3 הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי שהוא 1, כי הריבוי האלגברי שווה ל1.
נבדוק את הערך העצמי 3:

$$\dim(Ker(A - 3I)) = 3 - rank(A - 3I) = 3 - rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

ולכן גם במקרה של הערך העצמי 3 הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי שווה ל- 2. בסיכום: עבור $a = 3$ הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים והריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי שווים ביניהם, ולכן A לכסינה.

(iii) מקרה שלישי: $a=-3$ במקרה הזה הפולינום האופייני הוא:

$$|A-\lambda I|=-(\lambda+3)^2(\lambda-3)$$

עבור הערך העצמי 3 הריבוי הגיאומטרי שווה לאלגברי שהוא 1, כי הריבוי האלגברי שווה ל1.

נבדוק את הערך העצמי -3:

$$\dim(Ker(A+3I))=3-rank(A+3I)=3-rank\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&1\\-3&9&3\end{pmatrix}=3-2=1$$

ובמקרה זה A לא לכסינה: הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי -3 קטן מהאלגברי.

בסיכום: A לכסינה לכל $a\neq -3$.

ב. עבור $a=5$ המטריצה לכסינה והערכים העצמיים שלה הם $5,\pm 3$ ולכן שתי מטריצות אלכסוניות מתאימות הן, למשל

$$\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

שאלה 6. (20 נקודות) במרחב מכפלה פנימית ממשי V נתונים שני וקטורים $\{u,v\}$ כך ש –

$$\|v\|=2,\ \langle u,v\rangle=-1,\ \|u\|=a$$

כאשר $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ היא הנורמה של הוקטור $x\in V$.

א. מצאו עבור איזה ערכים של הפרמטר a הוקטור $u-2v$ אורתוגונלי לוקטור $u+3v$.

ב. עבור הערך שמצאתם בסעיף הקודם, מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $\text{Span}\{u-2v,u+3v\}$

פתרון

א. לפי הנתון $\langle u-2v,u+3v\rangle=0$, ולכן

$$\langle u-2v,u+3v\rangle=\langle u,u\rangle+3\langle u,v\rangle-2\langle v,u\rangle-6\langle v,v\rangle=0\Leftrightarrow$$
$$\langle u,u\rangle+3\langle u,v\rangle-2\langle u,v\rangle-6\langle v,v\rangle=0\Leftrightarrow$$
$$\|u\|^2+\langle u,v\rangle-6\|v\|^2=0\Leftrightarrow$$
$$\|u\|^2=-\langle u,v\rangle+6\|v\|^2=-(-1)+6\cdot 4=25\Leftrightarrow$$
$$a^2=25\to a=\pm\sqrt{25}\underset{a\geqslant 0}{\to}a=5$$

ב. לפי הסעיף הקודם נובע שהוקטורים $u+2v, u-3v$ אורתוגונליים, ולכן מהווים קבוצה אורתוגונלית, ולכן בסיס למרחב.
לכן נשאר לנרמל את הבסיס הארתוגונלי, ע"י חישוב הנורמות:

$$\|u-2v\|^2 = \langle u-2v, u-2v\rangle = \langle u,u\rangle - 4\langle u,v\rangle + 4\langle v,v\rangle = \|u\|^2 - 4\langle u,v\rangle + 4\|v\|^2 = 25+4+16 = 45$$
$$\|u+3v\|^2 = \langle u+3v, u+3v\rangle = \langle u,u\rangle + 6\langle u,v\rangle + 9\langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 6\langle u,v\rangle + 9\|v\|^2 = 25-6+36 = 55$$

מכאן הבסיס האורתונורמלי $\left\{\frac{1}{\sqrt{45}}(u-2v), \frac{1}{\sqrt{55}}(u+3v)\right\}$

בהצלחה