יונתן כהן
חדו"א 2
תרגול מספר 3

טורים כלליים
טורי חזקות

טורים כלליים, התכנסות בהחלט ובתנאי

.1

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}$, לקבוע האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$a_n=\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}$.

יש אינסוף n ים עבורם $\sin(n^2+n+1)$ חיובי ואינסוף n ים עבורם $\sin(n^2+n+1)$ שלילי, ולכן זהו טור כללי.

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$0\le|a_n|=\left|\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}\right|=\frac{|\sin(n^2+n+1)|}{|n^2+n+1|}=\frac{|\sin(n^2+n+1)|}{n^2+n+1}\le\frac{1}{n^2+n+1}<\frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ הוא טור מסוג $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (טור הרמוני מוכלל) עם $p=2>1$ ולכן הוא מתכנס, ולכן ממבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט.

הערות:

בתרגיל זה חישוב $\lim_{n\to\infty}a_n$ אינו פותר את התרגיל כי מתקבל $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

כמו כן, את תרגיל זה אי אפשר לפתור ע"י משפט Leibniz כי טור זה אינו טור מתחלף / טור סימנים מתחלפים / טור מחליף סימן, ולכן אינו טור Leibniz. אבל זה לא אומר דבר לגבי התכנסות או התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ או טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. כלומר העובדה שטור זה אינו טור Leibniz אינה מניבה שום מידע על הטור המקורי.

.2

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{n}\right)^3+3^{\frac{1}{n}}}$, לקבוע האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$a_n=\frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{n}\right)^3+3^{\frac{1}{n}}}$.

ניתן לכתוב את האיבר הכללי a_n באופן הבא: $a_n=(-1)^n\cdot b_n$ כאשר $b_n=\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^3+3^{\frac{1}{n}}}$.

נשים לב שלכל n, $b_n>0$. כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ הוא טור מתחלף / טור סימנים מתחלפים / טור מחליף סימן.

נשים לב גם לעובדה הבאה:

$a_n=(-1)^n\cdot b_n$ כאשר $b_n>0$ כלומר

$$\left|a_n\right|=\left|(-1)^n\cdot b_n\right|=\left|(-1)^n\right|\cdot\left|b_n\right|=\left|\pm1\right|\cdot b_n=1\cdot b_n=b_n$$

נשתמש בטענה מועילה:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\left|a\right|_n=0}$$

נחשב את $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|$ (כי הוא קל יותר לחישוב מאשר $\lim_{n\to\infty}a_n$).

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^3+3^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{0^3+3^0}=\frac{1}{1}=1$$

קיבלנו $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|\neq0$, ולפי טענת העזר $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, לא מתקיים התנאי ההכרחי ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{1}{n}\right)^3+3^{\frac{1}{n}}}$ מתבדר.

הערות:

תרגיל זה אי אפשר לפתור באופן מלא ע"י בדיקת התכנסות בהחלט.

אם היינו בודקים התכנסות בהחלט, היינו בודקים את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$.

כפי שראינו, $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|\neq0$, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ אינו מקיים את התנאי ההכרחי ולכן הוא מתבדר.

אבל זה רק אומר שהטור המקורי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ אינו מתכנס בהחלט, ועדיין לא ידוע אם הוא מתכנס בתנאי או מתבדר.

כמו כן תרגיל זה אי אפשר לפתור ע"י משפט Leibniz.

$a_n = (-1)^n \cdot b_n$ אבל כפי שנאמר למעלה, למעשה $b_n = |a_n|$. מצאנו ש $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ כלומר $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$,
ולכן טור זה אינו טור Leibniz.

3.

א. נתון הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\ln\ln n}$, לקבוע האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

ב. לחשב בקירוב את סכום הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\ln\ln n}$ בדיוק של 10^{-3}.

א.

$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n+\ln\ln n}$.

נשים לב שלכל $n\geq 3$

$$n\geq 3>e \quad\Rightarrow\quad \ln n>\ln e=1 \quad\Rightarrow\quad \ln\ln n>\ln 1=0 \quad\Rightarrow\quad n+\ln\ln n>0$$

ולכן a_n מוגדר.

ניתן לכתוב את האיבר הכללי a_n באופן הבא: $a_n=(-1)^{n-1}\cdot b_n$ כאשר $b_n=\frac{1}{n+\ln\ln n}$.

נשים לב שלכל $n\geq 3$, $b_n>0$. כלומר הטור $\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ הוא טור מתחלף / טור סימנים מתחלפים / טור מחליף סימן.

נחשב את $\lim_{n\to\infty}b_n$:

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{n}_{\to\infty}+\underbrace{\ln\ln n}_{\to\infty}}="\frac{1}{\infty}"=0$$

נבדוק האם הסדרה b_n מונוטונית יורדת.

נסמן $f(x)=\frac{1}{x+\ln\ln x}$, נשים לב כי $f(n)=\frac{1}{n+\ln\ln n}=b_n$.

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+\ln\ln x)^2}\cdot\left(1+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

לכל $x\geq 3$ מתקיים

$$x\geq 3 \quad\Rightarrow\quad x>0\,,\ln x>0 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\underbrace{\frac{1}{(x+\ln\ln x)^2}}_{>0}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right)}_{>0}<0$$

ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע $[3,\infty)$.

ומכיוון שכך הסדרה $f(n)$, כלומר b_n היא סדרה יורדת.

לסיכום קיבלנו שהטור הנתון הוא $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ כאשר הסדרה b_n היא חיובית, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ ומונוטונית יורדת. מכיוון שכך הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\ln\ln n}$ הוא טור Leibniz ולכן הוא מתכנס.

נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט או בתנאי.

נבדוק האם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=3}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

נשים לב ש

$$\sum_{n=3}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=3}^{\infty} b_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n+\ln\ln n}$$

עבור n מאוד גדולים $\ln\ln n$ זניח לעומת n ולכן $b_n = \frac{1}{n+\ln\ln n}$ מאוד 'דומה' ל $\frac{1}{n}$.

נסמן $c_n = \frac{1}{n} > 0$.

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+\ln\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\ln\ln n} = "\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\ln\ln x} = "\frac{\infty}{\infty}" \overset{\text{L'hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to"\frac{1}{\infty}=0"}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1$$

קיבלנו $0 < L = 1 < \infty$, ולפי מבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n+\ln\ln n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$. בתורו, הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (השמטת שני איברים לא משפיעה על התכנסות הטור). זהו הטור ההרמוני והוא מתבדר, ולכן גם הטור $\sum_{n=3}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n+\ln\ln n}$ מתבדר.

לסיכום:

הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\ln\ln n}$ מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט, ולכן הוא מתכנס בתנאי.

הערות:

כדי להוכיח שהטור $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי צריך להוכיח שני דברים: שהטור $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ מתכנס ושהטור הערכים המוחלטים $\sum_{n=3}^{\infty}|a_n|$ מתבדר. שני שלבים אלה בלתי תלויים אחד בשני ואפשר היה לבדוק קודם את ההתבדרות של $\sum_{n=3}^{\infty}|a_n|$ ואח"כ את ההתכנסות של $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$.

תרגיל זה אי אפשר לפתור באופן מלא ע"י בדיקת התבדרות לפי התנאי ההכרחי, וגם אי אפשר לפתור באופן מלא ע"י בדיקת התכנסות בהחלט, מכיוון ששתי טכניקות אלה אינן עונות על השאלה.

כפי שראינו, $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ולכן גם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ולכן התנאי ההכרחי אינו נותן שום תוצאה מועילה. בדיקת התכנסות בהחלט מעלה שטור הערכים המוחלטים $\sum_{n=3}^{\infty}|a_n|$ מתבדר, כלומר הטור $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס בהחלט. אבל זה עדיין לא נותן תשובה מלאה לשאלה כי עדיין לא ידוע אם הטור מתכנס בתנאי או מתבדר.

ב.

משפט Leibniz:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ או $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ הוא טור Leibniz, ואם נסמן ב s_n את סדרת הסכומים החלקיים שלו ו $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ הגבול של סדרת הסכומים החלקיים, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ הוא סכום הטור, אז מתקיים $|s_n - s| < b_{n+1}$.

אנו מעוניינים לחשב את סכום הטור s בדיוק של 10^{-3}, כלומר לחשב מספר שמרחקו מ s קטן מ 10^{-3}.
נקרב את סכום הטור s ע״י סכום חלקי s_n עבור n גדול מספיק. דרישת הדיוק של 10^{-3} פרושה שנרצה שיתקיים

$$|s_n - s| < 10^{-3}$$

נעזר בתוכנה של טורי Leibniz כדי לחסום את $|s_n - s|$:

$$|s_n - s| < b_{n+1} = \frac{1}{(n+1) + \ln\ln(n+1)}$$

ולכן אם מתקיים

$$\frac{1}{(n+1) + \ln\ln(n+1)} \le 10^{-3}$$

אז ינבע מכך ש

$$|s_n - s| < \frac{1}{(n+1) + \ln\ln(n+1)} \le 10^{-3}$$

כנדרש.

לסיכום צריך למצוא n המקיים $\frac{1}{(n+1) + \ln\ln(n+1)} < 10^{-3}$.

כפי שראינו בסעיף א', מתקיים $n + \ln\ln n > 0$ ולכן

$$\frac{1}{(n+1) + \ln\ln(n+1)} < \frac{1}{n+1}$$

ולכן מספיק למצוא n המקיים $\frac{1}{(n+1)} \le 10^{-3}$.

$$\frac{1}{(n+1)} \le 10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \ge 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 999$$

ולכן אפשר לבחור $n = 999$ (או כל n גדול יותר).

לסיכום:

$$|s_{999} - s| < b_{1000} = \frac{1}{1000 + \ln\ln(1000)} < \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

כלומר המספר s_{999} הוא מספר שמרחקו מסכום הטור s קטן מ 10^{-3}, ולכן הוא מקרב את s בדיוק של 10^{-3} כנדרש.

$$s_{999} = \sum_{n=3}^{999} \frac{(-1)^{n-1}}{n + \ln\ln n} = \frac{1}{3 + \ln\ln 3} - \frac{1}{4 + \ln\ln 4} + \cdots + \frac{1}{999 + \ln\ln 999} = 0.19303375\ldots$$

כלומר סכום הטור הוא בקירוב $s_{999} = 0.19303375$, והשגיאה בקירוב זה קטנה מ 10^{-3}.

הערה: באופן דומה ניתן לקבל ש $s \cong s_{100,000,000} = 0.19253446...$, השגיאה בקירוב זה קטנה מ 10^{-8}.

טורי חזקות

.1

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+8)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}$. למצוא את תחום ההתכנסות (כולל בדיקת התכנסות בקוות).

הטור הנתון הוא טור חזקות סביב הנקודה $x_0=-8$, ומקדמי הטור הם $a_n=\frac{(-1)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}$.

$$|a_n|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}\right|=\frac{|(-1)^n|}{|(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n|}=\frac{1}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות לפי נוסחת השורש של Cauchy-Hadamard.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+3)^2(5-\tfrac{1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+3)^2}\cdot\sqrt[n]{(5-\tfrac{1}{n})^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n+3})^2\cdot(5-\tfrac{1}{n})$$

נחשב את הגבול של הביטוי $\sqrt[n]{n+3}$.

$$n<n+3\le n+3n=4n \quad\Rightarrow\quad \sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{n+3}\le\sqrt[n]{4n}=\sqrt[n]{4}\sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\sqrt[n]{n}=1\cdot1=1$$

ולפי משפט הסנדוויץ' מתקבל $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+3}=1$. ומכאן רדיוס ההתכנסות הוא

$$R=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n+3})^2\cdot(5-\tfrac{1}{n})=1^2\cdot5=5$$

קטע ההתכנסות הפתוח הוא הקטע

$$(x_0-R,x_0+R)=(-8-5,-8+5)=(-13,-3)$$

נבדוק את התנהגות הטור בקצוות $x=-3$, $x=-13$.

בקצה $x=-13$ מתקבל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-13+8)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-5)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}$$

נסמן

$$y_n=\frac{5^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}$$

עבור n מאוד גדולים $(5-\frac{1}{n})^n$ מאוד 'דומה' ל 5^n , ולכן y_n מאוד 'דומה' ל $\frac{1}{n^2}$.

נסמן $b_n=\frac{1}{n^2}>0$.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+3)^2}\cdot\frac{5^n}{(5-\frac{1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{5-\frac{1}{n}}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}=\frac{\left(\dfrac{n}{n+3}\right)^2}{\left(\dfrac{5-\frac{1}{n}}{5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+\frac{3}{n}}\right)^2}{\left(1-\dfrac{1}{5n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+\frac{3}{n}}\right)^2}{\left[\left(1+\dfrac{1}{-5n}\right)^{-5n}\right]^{-1/5}}=\frac{1^2}{e^{-1/5}}=e^{1/5}$$

קיבלנו $0<L=e^{1/5}<\infty$, ולפי מבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ מתנהג כמו הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. זהו טור מסוג $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (טור הרמוני מוכלל) עם $p=2>1$ ולכן הוא מתכנס, ולכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ מתכנס. כלומר טור החזקות מתכנס ב $x=-13$. (זהו טור חיובי ולכן התכנסות משמעותה התכנסות בהחלט).

בקצה $x=-3$ מתקבל הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3+8)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}$$

נסמן

$$z_n=\frac{(-5)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}$$

נשים לב ש

$$|z_n|=\left|\frac{(-5)^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}\right|=\frac{|(-5)^n|}{|(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n|}=\frac{5^n}{(n+3)^2(5-\frac{1}{n})^n}=y_n$$

וכבר ראינו שטור זה $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ מתכנס. כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ מתכנס בהחלט.

לסיכום תחום ההתכנסות טור החזקות הוא $[-13,-3]$.

.2

נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-8)^n}{(8n)!}$. למצוא את תחום ההתכנסות (כולל בדיקת התכנסות בקצוות).

הטור הנתון הוא טור חזקות סביב הנקודה $x_0=8$, ומקדמי הטור הם $a_n=\frac{(-1)^n}{(8n)!}$.

$$|a_n|=\left|\frac{(-1)^n}{(8n)!}\right|=\frac{|(-1)^n|}{|(8n)!|}=\frac{1}{(8n)!}$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות לפי נוסחת המנה של d'Alembert.

$$|a_n|=\frac{1}{(8n)!}\quad\Rightarrow\quad|a_{n+1}|=\frac{1}{(8(n+1))!}=\frac{1}{(8n+8)!}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(8n+8)!}{(8n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(8n)!\cdot(8n+1)(8n+2)\cdot\ldots\cdot(8n+8)}{(8n)!}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(8n+1)}_{\to\infty}\cdot\underbrace{(8n+2)}_{\to\infty}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(8n+8)}_{\to\infty}=\infty$$

קיבלנו שרדיוס ההתכנסות הוא $R=\infty$, ולכן תחום ההתכנסות הוא $\mathbb{R}$.

.3

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{7n}(x+10)^n$. למצוא את תחום ההתכנסות (כולל בדיקת התכנסות בקצוות).

הטור הנתון הוא טור חזקות סביב הנקודה $x_0=-10$, ומקדמי הטור הם $a_n=n^{7n}$.

$$a_n=n^{7n}>0 \quad \Rightarrow \quad |a_n|=a_n=n^{7n}$$

נחשב את רדיוס ההתכנסות לפי נוסחת השורש של Cauchy-Hadamard.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{7n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^7}=0$$

קיבלנו שרדיוס ההתכנסות הוא $R=0$, ולכן תחום ההתכנסות הוא $\{x_0\}=\{-10\}$.