פתרון מבחן חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 - שאלון X

פתרון שאלה 1.א

א. לפי הנתונים $x_0=0$, $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{6^n n}$ ולכן רדיוס ההתכנסות שווה ל-

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{6^n n}}{(-1)^{n+2}\frac{1}{6^{n+1}(n+1)}}\right|=\lim_{n\to\infty}6\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}6\left(1+\frac{1}{n}\right)=6$$.

לפי משפט Cauchy-Hadamard מסיקים שבתחום $(x_0-R,x_0+R)=(-6,6)$ הטור מתכנס בהחלט ועבור $|x|>6$ הטור מתבדר.

נבדוק את הקצוות $x=\pm 6$. אם $x=6$ מציבים ומקבלים טור הרמוני מתחלף שמתכנס בתנאי:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{6^n n}6^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$. אם $x=-6$ מציבים ומקבלים טור הרמוני שמתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{6^n n}(-6)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=-\infty$$.

פתרון שאלה 1.ב

ידוע ש- $\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}....$ לכל $-1<t\le 1$. מקבלים שאם

$-6<x\le 6$, אז $-1<t=\frac{x}{6}\le 1$ ולכן $S(x)=\ln\left(1+\frac{x}{6}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x/6)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{6^n n}x^n$.

נבצע אינטגרציה של סכום של טור חזקות (אינטגרל הסכום שווה לסכום האינטגרליים (#)):

$$I=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n\right)dx\underset{(\#)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_0^1 x^n\,dx)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{6^n n(n+1)}$$

<u>פתרון שאלה 2.א</u>

צריך למצוא מינימום לפונקציה $d(x,y,z)=\sqrt{(x-6)^2+(y-6)^2+(z-4)^2}$ תחת האילוץ :
$S: x^2+y^2+z^2-2z-8=0$.

כיוון שהמרחק הוא תמיד חיובי, שקול ויותר פשוט למצוא מינימום של הפונקציה $d^2(x,y,z)$.

נבנה פונקציית Lagrange לגרנז': $L(x,y,z)=(x-6)^2+(y-6)^2+(z-4)^2-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-2z-8\right)$

ונמצא לה נקודה קריטית :

$$\begin{cases} L_x=2(x-6)-2\lambda x=0\Rightarrow x(2-2\lambda)=12 \underset{\lambda\neq 1}{\Rightarrow} x=6/(1-\lambda) \\ L_y=2(y-6)-2\lambda y=0\Rightarrow y(2-2\lambda)=12 \underset{\lambda\neq 1}{\Rightarrow} y=6/(1-\lambda) \\ L_z=2(z-4)-\lambda(2z-2)=0\Rightarrow z(2-2\lambda)=8+2\lambda \underset{\lambda\neq 1}{\Rightarrow} z=(4-\lambda)/(1-\lambda) \\ L_\lambda=0\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2z-8=0 \end{cases}.$$

מציבים ומקבלים : $\left(\frac{6}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{6}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{4-\lambda}{1-\lambda}\right)^2-2\frac{4-\lambda}{1-\lambda}=8$. זה שקול ל-

$$\lambda^2-2\lambda-8=0 \Leftrightarrow 36+36+(4-\lambda)^2-2(4-\lambda)(1-\lambda)=8(1-\lambda)^2$$

הפתרונות הם : $\lambda=-2\Rightarrow(x=2,y=2,z=2)$ and $\lambda=4\Rightarrow(x=-2,y=-2,z=0)$.

תחום האילוץ S קבוצה קומפקטית; לכן לפי משפט Weierstrass הפונקציה הרציפה $d^2(x,y,z)$ בעלת נקודות קיצון מוחלטים. כיוון שקיבלנו רק שתי נקודות קריטית חשודות לקיצון אחת חייבת להיות מינימום מוחלט.

נציב בפונקציית המטרה ומקבלים שפתרון הוא $\mathbf{P}=(2,2,2)$ מפני ש-

$$d^2(2,2,2)=(2-6)^2+(2-6)^2+(2-4)^2=36 \;<\; d^2(-2,-2,0)=(-2-6)^2+(-2-6)^2+(0-4)^2=144$$

<u>פתרון שאלה 2.ב</u>

ברור ש- $f(0,y)=\frac{3y^9}{y^8}=3y$, לכן נקבל שהגבול $\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$.

אבל $\lim_{y\to 0} f(y^2,y)=\lim_{y\to 0}\frac{3y^9+y^4\left(y^2\right)^2+\left(y^2\right)^5}{y^8+\left(y^2\right)^4} \underset{:y^8}{=} \lim_{y\to 0}\frac{3y+1+y^2}{1+1}=\frac{1}{2}\neq 0$.

לכן הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים. נובע ש- f גם לא רציפה בנקודה $\mathbf{0}=(0,0)$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

נתון כי הפונקציה דיפרנציאבילית, ולכן לכל וקטור יחידה מתקיים

$g(\theta)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}(\theta)}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot \mathbf{u}(\theta)$ ובפרט הנגזרת הכיוונית הגדולה ביותר היא בכיוון הגרדיאנט, הנמוכה ביותר בכיוון מנוגד לגרדיאנט, מתאפסת בכיוון מאונך לגרדיאנט. הפונקציה g לא אפס ולכן $\nabla f(0,0)\neq \mathbf{0}$.

כעת,

א. הטענה לא נכונה. מהנתון נובע כי $g(\theta_2)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}(\theta_2)}(0,0)=0<1=g(\theta_1)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}(\theta_1)}(0,0)$

כלומר בנקודה זו לא מתקבלת הנגזרת הכיוונית הגדולה ביותר, ולכן θ_2 לא בכיוון הגרדיאנט.

ב. הטענה נכונה. מהנתון נובע כי הנגזרת הכיוונית $g(\theta_2)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}(\theta_2)}(0,0)=0$ מתאפסת,

ולכן הכיוון $\mathbf{u}(\theta_2)$ מאונך לגרדיאנט.

ג. הטענה לא נכונה. נשים לב כי אם $\theta_3=\theta_1+\pi$, אז

$\mathbf{u}(\theta_3)=\mathbf{u}(\theta_1+\pi)=(\cos(\theta_1+\pi),\sin(\theta_1+\pi))=-(\cos\theta_1,\sin\theta_1)=-\mathbf{u}(\theta_1)$, ולכן

$$g(\theta_3)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}(\theta_3)}(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot \mathbf{u}(\theta_3)=\nabla f(0,0)\cdot(-\mathbf{u}(\theta_1))=-g(\theta_1)$$

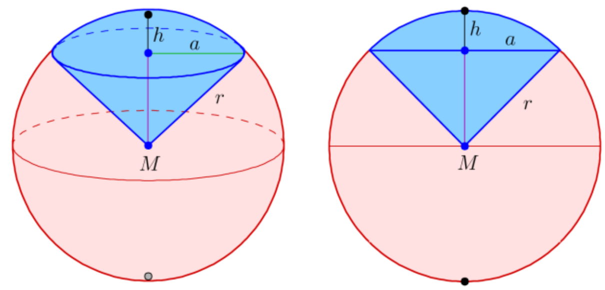
בסתירה לנתון ש- $g(\theta_1)=1, g(\theta_3)=-2$.

פתרון שאלה 4

נמצא את חיתוך החרוט $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$ והספירה $\sum: x^2+y^2+z^2=1$ ונטיל את הקבוצה הזאת על המישור $z=0$:

$$x^2+y^2+(x^2+y^2)=1 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{2}$$

קיבלנו את המעגל הקנוני ברדיוס $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$. אם נסתכל בהיטל על המישור YZ נקבל את הציורים הבאים:



את *היטל* הגוף G על המישור (x,y) שווה לעיגול (disk) נתון על ידי: $D=\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le a^2\right\}$.

במשולש ישר הזווית שמימין יש לו יתר באורך $r=1$ וניצבים באורך a ו- $r-h=1-h$. לפי משפט פיתגורס:

$$a^2+(1-h)^2=1^2=1 \Rightarrow \frac{1}{2}+(1-h)^2=1 \Rightarrow 1-h=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ולכן יכולים לסכם:

$$M=(0,0,0),\ \ r=1\,,\ \ a=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \ h=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ולכן המשולש הוא שווה שוקיים $\Leftarrow$ $\angle M=\frac{\pi}{4}$, ומכאן נקבל את תיאור התחום בקואורדינטות כדוריות:

$$0\le \rho\le 1\,,\ \ 0\le \theta\le 2\pi\,,\ \ 0\le \phi\le \frac{\pi}{4}$$

ולכן מסת הגוף נתונה ע"י:

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 3\rho\cos\phi\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=2\pi\cdot 3\int_0^1\rho^3\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\phi\sin\phi\,d\phi=$$

$$=\frac{6\pi}{4}\left(\frac{-\cos 2\phi}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{6\pi}{16}\cdot(0-1)=\frac{3\pi}{8}$$

<u>פתרון שאלה 5.א</u>

$$P(x,y)=ye^{xy}+axy^3+4\ ,\ Q(x,y)=xe^{xy}+3x^2y^2+5$$
$$Q_x(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}+6xy^2\ \ ,\ P_y(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}+3axy^2$$
$$Q_x=P_y \quad \Leftrightarrow \quad 6xy^2=3axy^2 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$$

$\mathbf{R^2}$ הוא הוא תחום פשוט קשר (ללא חורים), רכיבי השדה $\vec{F}$ (כלומר הפונקציות P,Q) הם בעלי נגזרות חלקיות רציפות ב $\mathbf{R^2}$. ולכן השדה משמר ב $\mathbf{R^2}$ אם ורק אם מתקיים $Q_x=P_y$ ב $\mathbf{R^2}$ כלומר אם ורק אם $a=2$.

<u>פתרון שאלה 5.ב</u>

נניח $a=2$ ונמצא פונקציית פוטנציאל ϕ לשדה $\vec{F}$ ב $\mathbf{R^2}$.

$$\phi_x(x,y)=P(x,y)=ye^{xy}+2xy^3+4$$
$$\phi(x,y)=\int(ye^{xy}+2xy^3+4)dx=e^{xy}+x^2y^3+4x+c(y)$$

כאשר $c(y)$ קבוע האינטגרציה.

$$\Rightarrow \quad \phi_y(x,y)=xe^{xy}+3x^2y^2+c'(y)$$

מצד שני

$$\phi_y(x,y)=Q(x,y)=xe^{xy}+3x^2y^2+5$$
$$\Rightarrow \quad xe^{xy}+3x^2y^2+c'(y)=xe^{xy}+3x^2y^2+5$$
$$\Rightarrow \quad c'(y)=5 \quad \Rightarrow \quad c(y)=\int 5dy=5y+c$$
$$\Rightarrow \quad \phi(x,y)=e^{xy}+x^2y^3+4x+5y+c$$

המסילה γ :

נקודת ההתחלה היא $x=\cos 0=1$, $y=\sin 0=0$.

נקודת הסיום היא $x=\cos(\frac{1}{2}\pi)=0$, $y=\sin(\frac{1}{2}\pi)=1$. ולכן העבודה המבוקשת היא

$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(0,1)-\phi(1,0)=(e^0+5)-(e^0+4)=1$.

פתרון שאלה 6

נשתמש במשפט Gauss גאוס. המשטח הנתון S אינו סגור (זהו משטח גלילי פתוח).

כדי לחשב את השטף הדרוש נסגור את המעטפת בשני הבסיסים.

נבמן $D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le a^2\right\}$. נסמן $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : 0\le z\le h,(x,y)\in D\right\}$.

נסמן את הבסיס התחתון של G ב- $S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : z=0,(x,y)\in D\right\}$.

נסמן את הבסיס העליון של G ב- $S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : z=h,(x,y)\in D\right\}$.

שפת הגוף G שווה לאיחוד $\mathbf{\Sigma}=Bd\left(G\right)=S\cup S_1\cup S_2$.

רכיבי השדה $\vec{F}$ הם בעלי נגזרות חלקיות רציפות, המשטח $\mathbf{\Sigma}$ סגור ובוחרים וקטור נורמל יחידה כלפי חוץ.
הגוף G שווה לתחום הכלוא בתוך המשטח הסגור $\mathbf{\Sigma}$, ולכן השפה של G עם הכוון הנכון במובן משפט Gauss.
$\mathbf{\Sigma}$ הוא משטח חלק למקוטעין ולכן מתקיימות דרישות משפט Gauss. מסיקים ש-

$$\phi=\phi_\Sigma\left(\vec{F}\right)=\iint_{\mathbf{\Sigma}}\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS=\iiint_G div\vec{F}dV$$

נחשב את הדיברגנץ של השדה :

$$div\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xz-x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(yz\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2z-z^2\right)=2z-1+z+2-2z=z+1$$

לפי משפט גאוס השטף הכולל החוצה מהגליל נתון על-ידי

$$\phi_{total}=\phi_\Sigma\left(\vec{F}\right)=\iint_{\mathbf{\Sigma}}\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS=\iiint_G(1+z)dV=\iiint_G 1dV+\iiint_G zdV=vol(G)+\iiint_G zdV=\pi a^2h+\iiint_G zdV$$

נחשב את האינטגרל המשולש האחרון באמצעות קואורדינטות גליליות :

$$\iiint_G zdV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_0^h zdz=2\pi\frac{a^2}{2}\frac{h^2}{2}=\frac{\pi a^2h^2}{2}$$

כלומר, השטף הכולל החוצה דרך שטח פני הגליל הוא $\phi_{total}=\pi a^2h+\dfrac{\pi a^2h^2}{2}$.

נחשב כעת את השטף דרך הבסיסים ונדרוש $\phi_{total}=\phi_S+\phi_{S_1}+\phi_{S_2}$

<u>על הבסיס התחתון</u> S_1, מכיוון שהנורמל החיצוני הוא בכיוון ציר z השלילי $\vec{n}=(0,0,-1)$, נקבל כי

$\phi_{S_1}=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot(0,0,-1)dS=\iint_{S_1}-\left(2z-z^2\right)dS=\iint_{S_1}0dS=0$ ולכן השטף הוא אפס.

<u>על הבסיס העליון</u> S_2 , מכיוון שהנורמל החיצוני הוא בכיוון ציר z החיובי $\vec{n}=(0,0,1)$, נקבל כי

$$\phi_{S_2}=\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_2}\vec{F}\cdot(0,0,1)dS=\iint_{S_2}\left(2z-z^2\right)dS=\iint_{S_2}\left(2h-h^2\right)dS=\left(2h-h^2\right)\iint_{S_2}1dS=\left(2h-h^2\right)\pi a^2$$

נסכם ונקבל כי

$$\phi_{total}=\phi_S+\phi_{S_1}+\phi_{S_2}=\phi_S+0+\pi a^2\left(2h-h^2\right)\Rightarrow$$

$$\phi_S=\phi_{total}-\pi a^2\left(2h-h^2\right)=\left(\pi a^2h+\frac{\pi a^2h^2}{2}\right)-\pi a^2\left(2h-h^2\right)=\frac{3}{2}\pi a^2h^2-\pi a^2h.$$

בהצלחה!