פתרון חדו"א 1 מועד Y

סמסטר ב 2022

שאלה 1:

1. נתונה הסדרה a_n המוגדרת היטב ע"י נוסחת הנסיגה

$$a_1 = 3$$
$$a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:

- נוכיח באינדוקציה שהסדרה חסומה בין 2 ל-4:
  עבור $n=1$, $2 \le a_1 = 3 \le 4$, סיימנו.

  נשאר להוכיח כי עבור כל n טבעי מתקיים:

  אם $2 \le a_n \le 4$ (הנחה) אז בהכרח גם $2 \le a_{n+1} \le 4$

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{6 \cdot 2 - 8} \le \underbrace{\sqrt{6a_n - 8}}_{a_{n+1}} \le \sqrt{6 \cdot 4 - 8} = \sqrt{16} = 4$$

- נוכיח כי הסדרה עולה. לשם כך נוכיח כי עבור כל מספר טבעי n מתקיים $a_{n+1} \ge a_n$. ז"א

$$a_n \le a_{n+1} \Leftrightarrow a_n \le \sqrt{6a_n - 8} \Leftrightarrow a_n^2 \le 6a_n - 8 \Leftrightarrow a_n^2 - 6a_n + 8 \le 0$$

נגדיר פונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ כאשר $2 \le x \le 4$. ברור כי $f(a_n) \le 0$ לכל n.

- סדרה עולה וחסומה, מתכנסת. יהיה L גבולה.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6a_n - 8} \Rightarrow L = \sqrt{6L - 8} \Rightarrow L^2 = 6L - 8 \Rightarrow L = 4$$

2. נתונה הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & x>0 \\ c & x=0 \\ 2-x & x<0 \end{cases}$$

עבור אלו ערכים של c יש לפונקציה נקודת קיצון מקומי ב-0? (מומלץ לצייר)

פתרון: אם $c<-2$ יהיה לנו מינימום מקומי ואם $c>2$ יהיה מקסימום מקומי. קל לראות בגרף.

שאלה 2:

1. תהיה $f(x)$ פונקציה רציפה ואי זוגית המוגדרת בכל $\mathbb{R}$. חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x\sin x}$$

פתרון:

במונה פונקציה רציפה וגזירה (המשפט היסודי הראשון) , וכשנציב $x=0$ הוא ייתאפס. גם במכנה פונקציה רציפה וגזירה, כמכפלה של פונקציות רציפות וגזירות, ומתאפס ב-0. לכן מדובר בגבול מהצורה $0/0$

ננסה להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x\sin x} \overset{??}{=}_{LH} \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2).2x}{x\cos x+\sin x}$$

קיבלנו שוב מצב של $0/0$. אבל לא נוכל להשתמש בכלל פעם שנייה כי לא ידוע לנו אם המונה גזיר. אז נסתדר אם משפט אריתמטיקה של גבולות ומשפטים נוספים.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{\cos x+\frac{\sin x}{x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{2f(0)}{1+1}=f(0)=0$$

$f(0)=0$ מכיוון שהפונקציה היא אי זוגית .

פתרון:

2. נסמן $a_n = \left(\frac{1+\cos^2 1}{n^4 -1} + \frac{2+\cos^2 2}{n^4 -2} + ... + \frac{n+\cos^2 n}{n^4 -n} \right)$.

מתקיים $0 \le n\frac{1}{n^4} \le a_n \le n\frac{n+\cos^2 n}{n^4 -n} \le n\frac{n+1}{n^4 -n}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^4 -n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n^2 -\frac{1}{n}} = 0$. לכן, לפי כלל סנדוויץ', גם גבול של הסדרה שווה ל- 0.

שאלה 3:

1. חשבו את האינטגרל

$$\int x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dt$$

פתרון:

$$\int x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx \underset{\substack{t=x^2 \\ dt=2xdx}}{=} \frac{1}{2}\int \ln\left(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \int \ln\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \int \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 dt = \int 2\left(\ln(t+1) - \ln t\right)dt = 2\left[\int \ln(t+1)dt - \int \ln t dt\right]$$

את האינטגרל השני ניתן לפתור בקלות באינטגרציה בחלקים:

$$\int \underset{v'}{1}.\underset{u}{\ln t}\, dt \Rightarrow \begin{cases} u=\ln t & u'=1/t \\ v'=1 & v=t \end{cases} \Rightarrow \int \ln t dt = t\ln t - \int 1.dt = t\ln t - t + C$$

תוך כדי שימוש באינטגרל השני ובעזרת הצבה פשוטה מאוד, נקבל כי

$$\int \ln(t+1)dt = (t+1)\ln(t+1) - (t+1) + K$$

ולכן האינטגרל הנתון יהיה

$$2\left[\int \ln(t+1)dt - \int \ln t dt\right] = 2t\ln t - 2t - 2(t+1)\ln(t+1) + 2(t+1) + C =$$

$$2t\ln t - 2(t+1)\ln(t+1) + 2 + C = 2x^2\ln(x^2) - 2(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2 + C$$

2. הוכיחו כי למשוואה $x^7+2e^{3x}=3$ יש בדיוק פתרון אחד ממשי.

פתרון:

נגדיר פונקצית עזר $f(x)=x^7+2e^{3x}-3$. הפונקציה היא רציפה וגזירה בכל $\mathbb{R}$ כסכום של פונקציות אלמנטריות רציפות וגזירות. הפונקציה מקיימת $f(0)<0,\ f(1)>0$ ולכן ממשפט ערך הביניים הפונקציה חייבת להתאפס לפחות פעם אחת בין שני הערכים האלה.

כדי להוכיח כי הפונקציה לא מתאפסת יותר מפעם אחת, נניח (בשלילה) כי יש לפונקציה שני שורשים שונים ונגיע לסתירה.

במקרה שלפונקציה יש שני שורשים שונים, הנגזרת מתאפסת בנקודות ביניים (משפט רול). אבל הנגזרת לא מתאפסת אף פעם כי $f'(x)=\underbrace{7x^6}_{\ge 0}+\underbrace{6e^{3x}}_{>0}>0$. סתירה זו מראה שההנחה הייתה שגויה. לכן אין יותר משורש אחד.

שאלה 4:

פתרון:

.1

$$f(2)=1\ ,\quad f'(x)=\tfrac{1}{2}(x-1)^{-1/2}\Rightarrow f'(2)=\tfrac{1}{2}\ ,\quad f''(x)=-\tfrac{1}{4}(x-1)^{-3/2}\Rightarrow f''(2)=-\tfrac{1}{4}\ ,$$

$$f^{(3)}(x)=\tfrac{3}{8}(x-1)^{-5/2}\Rightarrow f^{(3)}(2)=\tfrac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x)=-\tfrac{15}{16}(x-1)^{-7/2}$$

מכאן נקבל שנוסחת טיילור של $f(x)$ ממעלה 3 סביב הנקודה 2 היא:

$$f(x)=1+\tfrac{1}{2}(x-2)-\tfrac{1}{8}(x-2)^2+\tfrac{3}{48}(x-2)^3+R_3(x)$$

כאשר $R_3(x)$ היא השארית. הואיל ש- $\sqrt{2}=\sqrt{3-1}=f(3)$, נקבל את הקירוב הדרוש ע"י הצבת $x=3$ בנוסחה שקיבלנו, כלומר: $\sqrt{2}\cong 1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{3}{48}=1\frac{21}{48}$.

השארית היא:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-2)^4=-\frac{15}{16\cdot 24}(c-1)^{-7/2}(x-2)^4$$

כאשר (בקירוב שחישבנו): $2<c<3$ וכן $x=3$. לכן, הערכה לשגיאה היא:

$$\left|R_3(3)\right|=\left|-\frac{15}{16\cdot 24}\cdot\frac{1}{\sqrt{c-1}^{7}}(3-2)^4\right|=\frac{15}{16\cdot 24}\frac{1}{\sqrt{c-1}}<\frac{15}{384}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-1}}=\frac{15}{384}<0.04$$

פתרון:

2. הוכחה דרך השלילה: אם הפונקציה אינה פונקציה קבועה 0, ומפני שהפונקציה רציפה, אז היא מקבלת מקסימום ומינימום מוחלטים בקטע (משפט ווירשטרס), ולפחות אחד מהם אינו בקצוות. בה"כ נניח כי המקסימום המוחלט מתקבל בנקודה $x_0\in(a,b)$. אז בנקודה יש בפרט מקסימום מקומי. ז"א הנגזרת מתאפסת בנקודה. לכן נקבל כי $f(x_0)=f''(x_0)$. מפני שערך המקסימום חייב להיות גדול מ-0, אז $f(x_0)=f''(x_0)>0$. אבל אז זה אומר שיש בנקודה x_0 מינימום מקומי, סתירה.

שאלה 5:

פתרון:

1. נגדיר פונקצית עזר $f(x)=x^2\ln x$. הפונקציה רציפה וגזירה בקטע $[u,v]$. לכן ממשפט לגרנג נקבל

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=\frac{v^2\ln v-u^2\ln u}{v-u}=f'(c)=2c\ln c+c\left(1\le u<c<v<a\right)$$

את הנגזרת ניתן לחסום באופן הבא:

$$\underbrace{2\cdot 1\cdot\ln 1+1}_{1}\le 2c\ln c+c\le 2a\ln a+a$$

מפה נסיק כי

$$1\le\frac{v^2\ln v-u^2\ln u}{v-u}\le 2a\ln a+a\Rightarrow(v-u)\le v^2\ln v-u^2\ln u\le\left(2a\ln a+a\right)\left(v-u\right)$$

פתרון:

2. נשים לב כי עבור $x\ge e$ המכנה תמיד מוגדר וחיובי. לכן הפונקציה הנתונה היא רציפה (כמנה של פונקציות רציפות כאשר המכנה לא מתאפס) וחיובית. במקרה הזה השטח שווה לאינטגרל של הפונקציה בקטע הנתון.

$$A=\int_e^b\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\frac{3}{8}$$

אם נציב $t=\ln x, dt=\frac{1}{x}dx$ ונחליף את הקצוות בהתאם נקבל כי

$$A=\int_1^{\ln b}\frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{2t^2}\Big|_1^{\ln b}=\frac{-1}{2\ln^2 b}+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\ln^2 b}=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}\Rightarrow \ln^2 b=4\Rightarrow \ln b=2\Rightarrow b=e^2$$

<u>שאלה 6:</u>

1. מצאו את כל הערכים הממשיים של x_0 עבורם הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2-2\ln x$ בנקודה x_0 מקביל לישר $y=7-3x$

<u>פתרון:</u>

מחפשים את כל הנקודות בהן הנגזרת שווה ל- 3-.

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=-3\Rightarrow \frac{2x^2-2+3x}{x}=0$$

השורשים של המשוואה הריבועית הם : $x_1=-2; x_2=1/2$. אבל רק השורש השני שייך לתחום.

<u>התשובה:</u> $x_0=\frac{1}{2}$

2. נתונה הפונקציה

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{4-x}}$$

חשבו את המקסימום **המוחלט** של הפונקציה.

<u>פתרון:</u>

שימו לב כי הפונקציה מוגדרת רק בקטע $[0,4]$ וכי הפונקציה רציפה בקטע הזה (המונה רציף, המכנה רציף, המכנה לא מתאפס). ולכן ממשפט ויירשטרס הפונקציה מקבלת מקסימום מוחלט בקטע.

בפנים הקטע ניתן לגזור

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{4-x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{4-x})^2}$$

נשים לב כי המכנה הוא תמיד חיובי, וגם המונה, כסכום של ביטויים חיוביים. נסיק מזה שהפונקציה עולה ולכן המקסומום שלה מתקבל ב- $x=4$ והוא $f(4)=2$