

מס' נבחן



שם הקורס: מבוא להסתברות

קוד הקורס: 90911

הוראות לנבחן:

-חומר עזר שימושי לבחינה:

מותר שימוש בשלושה דפי נוסחאות,

ודף טבלת התפלגות נורמלית.

-אין לכתוב בעפרון / עט מחיק

-אין להשתמש בטלפון סלולארי

-אין להשתמש במחשב אישי או בידי

-אין להשתמש בדיסק און קי ו/או

מכשיר מדיה אחר

-אין להפריד את דפי שאלון הבחינה

בחינת סמסטר: 2018א

השנה: תשע"ח

מועד: כ

תאריך הבחינה: 5/2/18

שעת הבחינה: 17:00

משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: ד"ר חנה קלבנר,

ד"ר מאיר אזור,

ד"ר לובה טטראשווילי,

ד"ר אלכס סגל

***** שאלון הבחינה לא יבדק ע"י המרצה, לא יסרק ולא יישמר *****

***** לא ינתן ציון על תשובות אשר תיכתבנה בשאלון זה *****

מבנה הבחינה והנחיות לפתרון:

יש לענות על כל השאלות, משקל כל שאלה רשום ליד השאלה.

יש לנמק היטב את הפתרון. תשובה לא מנומקת לא תזכה במלוא

הניקוד.

כל שאלה להתחיל בעמוד חדש: יש לציין את מספר השאלה, ויש לציין

את מספר הסעיף אותו פותרים.

שאלה 1 (40 נקודות)

אורך החיים של מנוע בשנים, הוא משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(10-x), & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

- מה ערכו של c ?
- מהי תוחלת אורך החיים של מנוע?
- מה ההסתברות שמנוע יעבוד באופן תקין מעל 7 שנים?
- מפעל רכש מנועים בזה אחר זה. מה ההסתברות שהמנוע החמישי יהיה הראשון שיעבוד יותר מ-7 שנים?
- חברה רכשה 40 מנועים עבור המפעלים שלה. מה ההסתברות שיהיו לפחות 10 מנועים שיעבדו לפחות 7 שנים?

שאלה 2 (30 נקודות)

- בקופסה יש חמישה כדורים אדומים, שלושה כדורים ירוקים ושני כדורים כחולים. מציעים לנו את המשחק: מוציאים באקראי 3 כדורים מהקופסה (בלי החזרה). אם שלושת הכדורים באותו צבע, נרוויח 20 ₪.
- אם שני כדורים הם באותו צבע ואחד שונה, נרוויח 10 ₪.
- אם שלושת הכדורים בצבעים שונים, נפסיד 30 ₪.
- מהי פונקציית ההתפלגות של הרווח למשחק.
 - מהם התוחלת והשונות של הרווח למשחק. בהמשך, אם יש צורך, השתמשו בתוחלת 1 ושונות 300.
 - 50 אנשים שיחקו במשחק. מה ההסתברות שסך הרווחים היה גדול מ-90 ₪?
 - מה ההסתברות שבין 50 אנשים ששיחקו במשחק, השחקן השמיני היה השלישי שהפסיד במשחק?

שאלה 3 (30 נקודות)

- דני חובב ספורט צועד בכל יום מספר ק"מ באופן בלתי תלוי בימים אחרים. מספר הק"מ שעובר דני ביום הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 4 ק"מ. ביום בהיר סטיית התקן היא 3 ק"מ, וביום גשום סטיית התקן היא 1 ק"מ. ההסתברות ליום גשום היא 0.3.
- מה ההסתברות שביום מסוים דני יצעד יותר מ-5 ק"מ?
 - אם ידוע שביום מסוים דני צעד יותר מ-5 ק"מ, מה ההסתברות שבאותו היום ירד גשם?
 - מה סטיית התקן של מספר הק"מ שדני צועד ביום?
 - מה ההסתברות שממוצע הק"מ היומי על פני 20 ימי גשם יהיה לכל היותר 3.4 ק"מ?

בהצלחה!

כל הזכויות שמורות ©. מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכאנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה

פתרון

פתרון מועד א'
90911

שם הקורס: מבוא להסתברות

פתרון בחינה

שאלה 1 (40 נקודות)

אורך החיים של מנוע בשנים, הוא משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(10-x), & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

- מה ערכו של c ?
- מהי תוחלת אורך החיים של מנוע?
- מה ההסתברות שמנוע יעבוד באופן תקין מעל 7 שנים?
- מפעל רכש מנועים בזה אחר זה. מה ההסתברות שהמנוע החמישי יהיה הראשון שיעבוד יותר מ-7 שנים?
- חברה רכשה 40 מנועים עבור המפעלים שלה. מה ההסתברות שיהיו לפחות 10 מנועים שיעבדו לפחות 7 שנים?

פתרון

א.

$$\int_0^{10} cx^2(10-x)dx = 1 \Rightarrow c \int_0^{10} (10x^2 - x^3)dx = 1$$

$$\Rightarrow c \left[\frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{10} = 1 \Rightarrow c = 0.0012$$

ב.

$$E(X) = \int_0^{10} cx^3(10-x)dx = c \int_0^{10} (10x^3 - x^4)dx = c \left[\frac{10}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^{10} = 6$$

ג.

$$P(X > 7) = \int_7^{10} cx^2(10-x)dx = c \left[\frac{10}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_7^{10} = c \left(\frac{10,000}{12} - \frac{6,517}{12} \right) = 0.3483$$

ד.

$$(1 - 0.3483)^4 \times 0.3483$$

ה.

נגדיר: $Y =$ מספר המנועים שעבדו לפחות 7 שנים: $Y \sim B(40, 0.3483)$

$$40 \times 0.3483 > 5, \quad 40 \times 0.6517 > 5$$

קירוב נורמלי לבינומי: $Y \sim N(13.932, 9.08)$

$$P(Y \geq 10) = 1 - P(Y \leq 9) = 1 - \Phi\left(\frac{9.5 - 13.932}{\sqrt{9.08}}\right) = 1 - \Phi(-1.47) = \Phi(1.47) = 0.9292$$

שאלה 2 (30 נקודות)

בקופסה יש חמישה כדורים אדומים, שלושה כדורים ירוקים ושני כדורים כחולים.

מציעים לנו את המשחק: מוציאים באקראי 3 כדורים מהקופסה (בלי החזרה).

אם שלושת הכדורים באותו צבע, נרוויח 20 ₪.

אם שני כדורים הם באותו צבע ואחד שונה, נרוויח 10 ₪.

אם שלושת הכדורים בצבעים שונים, נפסיד 30 ₪.

א. מהי פונקציית ההתפלגות של הרווח למשחק.

ב. מהם התוחלת והשונות של הרווח למשחק. בהמשך, אם יש צורך, השתמשו בתוחלת 1 ושונות 300.

ג. 50 אנשים שיחקו במשחק. מה ההסתברות שסך הרווחים היה גדול מ-90 ₪?

ד. מה ההסתברות שבין 50 אנשים ששיחקו במשחק, השחקן השמיני היה השלישי שהפסיד במשחק?

פתרון

א.

נגדיר: $X =$ רווח למשחק

$$P(X = 20) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}$$

$$P(X = -30) = \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{30}{120}$$

$$P(X = 10) = 1 - \frac{41}{120} = \frac{79}{120}$$

ב.

$$E(X) = 20 \times \frac{11}{120} + 10 \times \frac{79}{120} - 30 \times \frac{30}{120} = 0.9167$$

$$E(X^2) = 20^2 \times \frac{11}{120} + 10^2 \times \frac{79}{120} + (-30)^2 \times \frac{30}{120} = 327.5$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 327.5 - 0.9167^2 = 326.66$$

ג.

$$\sum_{i=1}^{50} X_i \sim N(50 \times 1, 50 \times 300)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i > 90\right) = 1 - \Phi\left(\frac{90 - 50}{122.47}\right) = 1 - \Phi(0.33) = 1 - 0.6293 = 0.3707$$

ד.

$$\binom{7}{2} \times 0.25^2 \times 0.75^5 \times 0.25 = 0.0779$$

שאלה 3 (30 נקודות)

דני חובב ספורט צועד בכל יום מספר ק"מ באופן בלתי תלוי בימים אחרים. מספר הק"מ שעובר דני ביום הוא משתנה מקרי נורמלי עם תוחלת 4 ק"מ. ביום בהיר סטיית התקן היא 3 ק"מ, וביום גשום סטיית התקן היא 1 ק"מ. ההסתברות ליום גשום היא 0.3.

- מה ההסתברות שביום מסוים דני יצעד יותר מ-5 ק"מ?
- אם ידוע שביום מסוים דני צעד יותר מ-5 ק"מ, מה ההסתברות שבאותו היום ירד גשם?
- מה סטיית התקן של מספר הק"מ שדני צועד ביום?
- מה ההסתברות שממוצע הק"מ היומי על פני 20 ימי גשם יהיה לכל היותר 3.4 ק"מ?

פתרון

א.

נגדיר A = יום גשום, B = יום בהיר: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.7$

נגדיר: X = מספר הק"מ שדני צועד ביום.

$$X|A \sim N(4, 1^2), \quad X|B \sim N(4, 3^2)$$

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= P(X > 5|A)P(A) + P(X > 5|B)P(B) = \\ &= \left(1 - \Phi\left(\frac{5-4}{1}\right)\right) \times 0.3 + \left(1 - \Phi\left(\frac{5-4}{3}\right)\right) \times 0.7 = \\ &= (1 - \Phi(1)) \times 0.3 + (1 - \Phi(0.33)) \times 0.7 = \\ &= (1 - 0.8413) \times 0.3 + (1 - 0.6293) \times 0.7 = 0.307 \end{aligned}$$

ב.

$$P(A|X > 5) = \frac{P(X > 5|A)P(A)}{P(X > 5)} = \frac{(1 - 0.8413) \times 0.3}{0.307} = 0.1551$$

.3

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X) = E(X | A)P(A) + E(X | B)P(B) = 4 \times 0.3 + 4 \times 0.7 = 4$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(X^2 | A)P(A) + E(X^2 | B)P(B) = \\ &= (1+16) \times 0.3 + (9+16) \times 0.7 = 22.6 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 22.6 - 16 = 6.6$$

$$\sigma(X) = 2.57$$

.7

$$\begin{aligned} \bar{X}_{20} \sim N\left(4, \frac{1^2}{20}\right) &\Rightarrow P(\bar{X}_{20} \leq 3.4) = \Phi\left(\frac{3.4-4}{1/\sqrt{20}}\right) = \\ &= \Phi(-2.68) = 1 - \Phi(2.68) = 1 - 0.9963 = 0.0037 \end{aligned}$$