ספר הפרק – מרחבי מכפלה פנימית

הגדרות ומשפטים

מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$:

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{R}$. הפעולה $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ הפועלת על שני איברים מתוך המרחב V ומחזירה סקלר מהשדה $\mathbb{R}$, היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ אם מתקיים:

1. אדיטיביות (ברכיב הראשון וגם בשני): לכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{u_1}+\boldsymbol{u_2}\,,\,\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u_1}\,,\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u_2}\,,\boldsymbol{v}\rangle$$

$$\langle \boldsymbol{u_1}\,,\,\boldsymbol{u_2}+\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u_1}\,,\boldsymbol{u_2}\rangle + \langle \boldsymbol{u_1}\,,\boldsymbol{v}\rangle$$

2. הומוגניות (ברכיב הראשון וגם בשני): לכל $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ ולכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\in V$:

$$\langle \alpha\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle$$

$$\langle \boldsymbol{u_1},\beta\boldsymbol{v}\rangle = \beta\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle$$

3. סימטריה: לכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u_1}\rangle$$

4. חיוביות: לכל $\boldsymbol{v}\in V$:

$$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \ \geq 0$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0$$

* הערה: מ"ו V עם מ"פ נקרא מרחב מכפלה פנימית.

❖ איך מוכיחים שפעולה מסוימת היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$?

V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. כדי להוכיח שהפעולה $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ היא מ"פ מספיק להראות (לכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{v}\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$):

1. אדיטיביות ברכיב הראשון: $\langle \boldsymbol{u_1}+\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u_2},\boldsymbol{v}\rangle$.
2. הומוגניות ברכיב הראשון: $\langle \alpha\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle$.

3. סימטריה: $\langle \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_1}\rangle$.

4. חיוביות: $\langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}\rangle \geq 0$ ו $\langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

- נורמה: יהי $\boldsymbol{v} \in V$. נגדיר את הנורמה של $\boldsymbol{v}$ להיות:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} \in \mathbb{R}$$

תכונות של נורמה ומשפטים: לכל $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים:

1. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \|\boldsymbol{v}\|^2 \ \geq 0$, $\|\boldsymbol{v}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.
2. $\|\alpha \boldsymbol{v}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$.
3. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (אי שוויון המשולש).
4. $|\langle \boldsymbol{u},\ \ \boldsymbol{v}\rangle| \leq \|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$ (אי שוויון קושי-שוורץ).
5. אם $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ אז מתקיים $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$ (משפט פיתגורס).
6. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$ (שוויון המקבילית).

- מכפלה פנימית סטנדרטית מעל $\mathbb{R}$: יהיו $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, אז:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$$

דוגמה - עבור $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ עם מ"פ סטנדרטית, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

- זווית בין וקטורים: יהי $V = \mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ עם מ"פ סטנדרטית, ויהיו $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$. נגדיר את הזווית ביניהם להיות α המקיימת:

$$cos(\alpha) = \frac{\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|}$$

- נורמה סטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$:

יהי $V=\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ עם מ"פ סטנדרטית. יהי $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$, אז:

$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}=\sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\right\rangle}=\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}\in\mathbb{R}$$

לדוגמה, אם $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם מ"פ סטנדרטית, ו- $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, אז:

$$\|\boldsymbol{v}\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

- מרחק בין וקטורים: יהיו $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$. נגדיר את המרחק ביניהם להיות הנורמה של הפרש הוקטורים, כלומר- $\operatorname{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$:

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{C}$. הפעולה $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{C}$ הפועלת על שני איברים מתוך המרחב V ומחזירה סקלר מהשדה $\mathbb{C}$, היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ אם מתקיים:

1. אדיטיביות (ברכיב הראשון וגם בשני): לכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{u_1}+\boldsymbol{u_2}\,,\,\boldsymbol{v}\rangle=\langle \boldsymbol{u_1}\,,\boldsymbol{v}\rangle+\langle \boldsymbol{u_2}\,,\boldsymbol{v}\rangle$$

$$\langle \boldsymbol{u_1}\,,\,\boldsymbol{u_2}+\boldsymbol{v}\rangle=\langle \boldsymbol{u_1}\,,\boldsymbol{u_2}\rangle+\langle \boldsymbol{u_1}\,,\boldsymbol{v}\rangle$$

2. הומוגניות (ברכיב הראשון והומוגניות עד כדי צמוד ברכיב השני): לכל $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ ולכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\in V$:

$$\langle \alpha\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle=\alpha\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle$$

$$\langle \boldsymbol{u_1},\beta\boldsymbol{v}\rangle=\bar{\beta}\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle$$

3. הרמיטיות: לכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{u_1},\ \boldsymbol{v}\rangle=\overline{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u_1}\rangle}$$

4. חיוביות: לכל $\boldsymbol{v}\in V$:

$$\mathbb{R}\ni\|\boldsymbol{v}\|^2=\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle\geq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0$$

* הערה: מ"ו V עם מ"פ נקרא מרחב מכפלה פנימית.

❖ איך מוכיחים שפעולה מסוימת היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$?

V מ"ו מעל $\mathbb{C}$. כדי להוכיח שהפעולה $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{C}$ היא מ"פ מספיק להראות (לכל $\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{v}\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{C}$):

1. אדיטיביות ברכיב הראשון: $\langle \boldsymbol{u_1}+\boldsymbol{u_2},\ \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u_2},\boldsymbol{v}\rangle$.
2. הומוגניות ברכיב הראשון: $\langle \alpha\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle$.
3. הרמיטיות: $\langle \boldsymbol{u_1},\boldsymbol{v}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u_1}\rangle}$.
4. חיוביות: $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \ge 0$ ו $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

- נורמה: יהי $\boldsymbol{v}\in V$. נגדיר את הנורמה של $\boldsymbol{v}$ להיות:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}\in\mathbb{R} \quad (\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = \|\boldsymbol{v}\|^2)$$

תכונות של נורמה ומשפטים: לכל $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{C}$ מתקיים:

1. $\|\boldsymbol{v}\|\ge 0$, $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.
2. $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\cdot\|\boldsymbol{v}\|$.
3. $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|\le\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|$ (אי שוויון המשולש).
4. $|\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\rangle|\le\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|$ (אי שוויון קושי-שוורץ).
5. אם $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ אז מתקיים $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2$ (משפט פיתגורס).
6. $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2+\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2)$ (שוויון המקבילית).

- מכפלה פנימית סטנדרטית מעל $\mathbb{C}$: יהיו $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$, אז:

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\right\rangle = u_1\cdot\overline{v_1}+u_2\cdot\overline{v_2}+\cdots+u_n\cdot\overline{v_n}$$

דוגמה: עבור $V=\mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{C}$ עם מ"פ סטנדרטית, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}4i\\5i\\6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}i\\2i\\3i\end{pmatrix}$ מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}i\\2i\\3i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4i\\5i\\6\end{pmatrix}\right\rangle=i\cdot\overline{4i}+2i\cdot\overline{5i}+3i\cdot\overline{6}=i\cdot(-4i)+2i\cdot(-5i)+3i\cdot(6)=4+10+18i=14+18i$$

- זוית בין וקטורים: יהי $V=\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ עם מ"פ סטנדרטית, ויהיו $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$. נגדיר את הזוית ביניהם להיות α המקיימת:

$$\cos(\alpha)=\frac{Re\{\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\rangle\}}{\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|}$$

- נורמה סטנדרטית ב-$\mathbb{C}^n$: יהי $V=\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ עם מ"פ סטנדרטית. יהי $\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$, אז:

$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}=\sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}\right\rangle}=\sqrt{v_1\cdot\overline{v_1}+v_2\cdot\overline{v_2}+\cdots+v_n\cdot\overline{v_n}}=\sqrt{|v_1|^2+|v_2|^2+\cdots+|v_n|^2}\in\mathbb{R}$$

דוגמה: אם $V=\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$ עם מ"פ סטנדרטית, ו- $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}$, אז:

$$\|\boldsymbol{v}\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{|1|^2+|2i|^2}=\sqrt{5}$$

- מרחק בין וקטורים: יהיו $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$. נגדיר את המרחק ביניהם להיות הנורמה של הפרש הוקטורים, כלומר- $\text{dist}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

וקטורים מאונכים, קבוצה אורתוגונלית וקבוצה אורתונורמלית:

- וקטורים אורתוגונלים (א"ג): יהי V ממ"פ מעל F, ויהיו $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$.

$\boldsymbol{u}$ ו-$\boldsymbol{v}$ הם וקטורים אורתוגונלים (מאונכים) $\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\rangle=0$. נסמן $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$.

תכונה: יהי V ממ"פ מעל F. איבר האפס של V, כלומר $\boldsymbol{0}_V$, הוא א"ג לכל וקטור ב-V. במילים אחרות, המ"פ של $\boldsymbol{0}_V$ עם כל $\boldsymbol{v}\in V$ שווה לאפס.

- קבוצה אורתוגונלית (א"ג): תהא קבוצה $S = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n}\}$ בממ"פ V. הקבוצה תיקרא א"ג אם לכל i, j $(i \neq j)$ מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{w_i}, \boldsymbol{w_j} \rangle = 0$$

כלומר, קבוצה א"ג היא קבוצה שכל זוג איברים בה הם אורתוגונליים.

משפט:

יהי V ממ"פ, ו-$S = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n}\}$ היא קבוצה א"ג שלא מכילה את איבר האפס של V (כלומר $\boldsymbol{w_i} \neq \boldsymbol{0} \ \ \forall i = 1,2, \dots, n$), אז S קבוצה בת"ל.

כלומר, כל קבוצה א"ג שלא מכילה את איבר האפס היא קבוצה בת"ל.

*הערה: ההפך לא בהכרח נכון. כלומר, לא כל קבוצה בת"ל היא א"ג.
למשל, הקבוצה $\left\{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\right\}$ היא קבוצה בת"ל אך לא א"ג (ביחס למ"פ הסטנדרטית).

- קבוצה אורתונורמלית (א"נ): תהא קבוצה $S = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n}\}$ בממ"פ V. הקבוצה תיקרא א"נ אם מתקיים:

1. $\langle \boldsymbol{w_i}, \boldsymbol{w_j} \rangle = 0$ לכל $i, \ \ j$ $(i \neq j)$.
2. $\|\boldsymbol{w_i}\| = 1$ לכל i (כל אחד מאיברי S הוא מנורמל, כלומר הנורמה שלו היא 1).

כלומר, קבוצה א"נ היא קבוצה שכל זוג איברים בה הם אורתוגונליים ובנוסף הנורמה של כל אחד מאיבריה היא 1.

במילים אחרות, קבוצה אורתונורמלית היא קבוצה אורתוגונלית המקיימת תנאי נוסף – הנורמה של כל אחד מאיבריה היא 1.

בסיס אורתוגונלי ובסיס אורתונורמלי:

- בסיס אורתוגונלי (א"ג): תהא קבוצה $S=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_n}\}$ בממ"פ V. הקבוצה תיקרא בסיס א"ג של V אם S מהווה בסיס ל-V ובנוסף לכל i,j $(i\neq j)$ מתקיים:

$$\langle \boldsymbol{w_i},\ \boldsymbol{w_j}\rangle = 0$$

כלומר, בסיס א"ג הוא בסיס שכל זוג איברים (שונים) בו הם מאונכים זה לזה.

- בסיס אורתונורמלי (א"נ): תהא קבוצה $S=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_n}\}$ בממ"פ V. הקבוצה תיקרא בסיס א"נ של V אם S מהווה בסיס ל-V ובנוסף מתקיים:
  1. $\langle \boldsymbol{w_i},\ \boldsymbol{w_j}\rangle = 0$ לכל i,j $(i\neq j)$.
  2. $\|\boldsymbol{w_i}\|=1$ לכל i.

כלומר, בסיס א"נ הוא בסיס א"ג שהנורמה של כל אחד מאיבריו היא 1.

היטל אורתוגונלי של וקטור על תת מרחב וקטורי:

נניח שיש לנו ממ"פ V (מרחב וקטורי שמוגדרת עליו מכפלה פנימית), ותמ"ו W של V. יהי וקטור $\boldsymbol{v}\in V$, ויהיה בסיס **א"ג** של W: $B_{W,\text{א"ג}}=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_m}\}$.

נסמן $P_W(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}$ -ההיטל הא"ג של $\boldsymbol{v}$ על המרחב W. נחשב זאת באופן הבא:

$$P_W(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}\ =\ \frac{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w_1}\rangle}{\|\boldsymbol{w_1}\|^2}\cdot\boldsymbol{w_1}+\frac{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w_2}\rangle}{\|\boldsymbol{w_2}\|^2}\cdot\boldsymbol{w_2}+\cdots+\frac{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w_m}\rangle}{\|\boldsymbol{w_m}\|^2}\cdot\boldsymbol{w_m}$$

❖ תכונות והערות:

אם יש לנו וקטור $\boldsymbol{v}\in V$, תמ"ו W ונסמן את ההיטל הא"ג של $\boldsymbol{v}$ על W להיות $\mathrm{P_W}(\boldsymbol{v})=\mathbf{w}$, אז:

1. ההיטל של $\boldsymbol{v}$ על המרחב הנפרש ע"י $\boldsymbol{w_1}$ למשל, הוא החלק של $\boldsymbol{v}$ השייך למרחב $sp(\boldsymbol{w_1})$.
2. הוקטור $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v}-\mathrm{P_W}(\boldsymbol{v}))$ מאונך (א"ג) לכל וקטור השייך לתמ"ו W.

   כלומר, לכל וקטור $\boldsymbol{t}\in W$ מתקיים: $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}\rangle=0$.

3. הוקטור $\mathbf{w} = \mathrm{P_W}(\boldsymbol{v})$ הוא הוקטור הקרוב ביותר ל-$\boldsymbol{v}$ מבין וקטורי W.
4. אם $\boldsymbol{v} \in W$ אז ההיטל הא"ג של $\boldsymbol{v}$ על W הוא הוקטור $\boldsymbol{v}$.

   כלומר, במצב כזה $\mathrm{P_W}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$.
5. אם $\boldsymbol{v}$ מאונך לכל וקטור ב-W, אז ההיטל הא"ג של $\boldsymbol{v}$ על W הוא $\mathbf{0}$.

   כלומר, במצב כזה $\mathrm{P_W}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$.

סדר פעולות למציאת היטל א"ג של וקטור על תת מרחב וקטורי:

- יהיו ממ"פ V, תמ"ו שלו W ו-וקטור $\boldsymbol{v} \in V$. למציאת היטל א"ג של $\boldsymbol{v}$ על W נפעל באופן הבא:
  1. נמצא בסיס א"ג של W - $B_{W,\text{א"ג}} = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_m}\}$.
  2. נחשב היטל של $\boldsymbol{v}$ על W כפי שלמדנו:

$$P_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_1} \rangle}{\|\boldsymbol{w_1}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_1} + \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_2} \rangle}{\|\boldsymbol{w_2}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_2} + \cdots + \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_m} \rangle}{\|\boldsymbol{w_m}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_m}$$

אלגוריתם גראם-שמידט (ג"ש):

מטרת האלגוריתם:

תהליך גראם-שמידט מקבל בסיס של מ"ו (או תמ"ו) מסוים W, $B_W = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}$, ומוציא בסיס א"ג או א"נ של W (לבחירתנו).

האלגוריתם:

נחלק את תהליך ג"ש לשני חלקים:

1. מציאת בסיס א"ג:

יש לנו את $B_W = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}\}$, ואנחנו רוצים ליצור בעזרתו את $B_{W,\text{א"ג}} = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_m}\}$:

1. $\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{v_1}$
2. $\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{v_2} - \left(\frac{\langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{w_1}\rangle}{\|\boldsymbol{w_1}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_1}\right)$
3. $\boldsymbol{w_3} = \boldsymbol{v_3} - \left(\frac{\langle \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{w_1}\rangle}{\|\boldsymbol{w_1}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_1} + \frac{\langle \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{w_2}\rangle}{\|\boldsymbol{w_2}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_2}\right)$
4. $\boldsymbol{w_4} = \boldsymbol{v_4} - \left(\frac{\langle \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{w_1}\rangle}{\|\boldsymbol{w_1}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_1} + \frac{\langle \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{w_2}\rangle}{\|\boldsymbol{w_2}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_2} + \frac{\langle \boldsymbol{v_4}, \boldsymbol{w_3}\rangle}{\|\boldsymbol{w_3}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_3}\right)$

$\vdots$

K. $\boldsymbol{w_k} = \boldsymbol{v_k} - \left(\frac{\langle \boldsymbol{v_k}, \boldsymbol{w_1}\rangle}{\|\boldsymbol{w_1}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_1} + \frac{\langle \boldsymbol{v_k}, \boldsymbol{w_2}\rangle}{\|\boldsymbol{w_2}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_2} + \cdots + \frac{\langle \boldsymbol{v_k}, \boldsymbol{w_{k-1}}\rangle}{\|\boldsymbol{w_{k-1}}\|^2} \cdot \boldsymbol{w_{k-1}}\right)$

2. מציאת בסיס א"נ (נרמול הבסיס הא"ג שמצאנו):

- ננרמל כל אחד מוקטורי הבסיס הא"ג שמצאנו בשלב הראשון, כלומר – נדאג שהנורמה של כל אחד מוקטורי הבסיס תהיה 1.
- נעשה זאת על ידי חילוק כל אחד מוקטורי הבסיס הא"ג בנורמה שלו:

$$B_{W,\text{א"נ}} = \left\{\frac{\boldsymbol{w_1}}{\|\boldsymbol{w_1}\|}, \frac{\boldsymbol{w_2}}{\|\boldsymbol{w_2}\|}, \dots, \frac{\boldsymbol{w_m}}{\|\boldsymbol{w_m}\|}\right\}$$

מציאת מרחק וקטור מתת מרחב וקטורי:

יהי V ממ"פ ותמ"ו של V - W. בהינתן $\boldsymbol{v} \in V$, נרצה לחשב את המרחק של $\boldsymbol{v}$ מהמרחב W.

על מנת למצוא את המרחק של v מהמרחב W, נעבוד על פי השלבים הבאים:

1. נמצא את $\boldsymbol{w} = P_W(\boldsymbol{v})$ - ההיטל של $\boldsymbol{v}$ על W (לפי השלבים שלמדנו, כלומר 1. מציאת בסיס א"ג של W. 2. מציאת היטל לפי הנוסחה).
2. נחשב את הוקטור $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - P_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.
3. נחשב את המרחק של $\boldsymbol{v}$ מ-W: $dist = \|\boldsymbol{u}\| \ (= \|\boldsymbol{v} - P_W(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|)$.

מקרים מיוחדים:

1. אם $\boldsymbol{v} \in W$ אז המרחק של $\boldsymbol{v}$ מ-W הוא 0 (המרחק המינימלי האפשרי של $\boldsymbol{v}$ מ-W).
2. אם $\boldsymbol{v}$ מאונך לכל וקטור ב-W, אז המרחק של $\boldsymbol{v}$ מ-W הוא $\|\boldsymbol{v}\|$ (המרחק המקסימלי האפשרי של $\boldsymbol{v}$ מ-W).

השלמה לבסיס א"ג/א"נ:

יהי V ממ"פ, ותהא $S \subseteq V$ קבוצה בת"ל ב-V.

על מנת להשלים את S לבסיס א"ג/א"נ של V יש לבצע את הפעולות הבאות:

1. נשלים את S לבסיס של V (כפי שלמדנו בעבר).
2. נפעיל על הבסיס שמצאנו את ג"ש לקבלת בסיס א"ג או א"נ, כנדרש בשאלה.

מרחב משלים ניצב (א"ג):

יהי מרחב וקטורי V מעל F, ויהי W תמ"ו של V.

המרחב משלים הניצב (או בשמו האחר – המרחב המשלים הא"ג) של W, שנסמנו $W^{\perp}$, הוא קבוצת כל הוקטורים במרחב V המאונכים לכל וקטורי W.

כלומר:

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V | \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0 \ \ , \forall \boldsymbol{w} \in W\}$$

תכונות:

1. $W \perp W^{\perp}$ (כל וקטור ב-W ניצב לכל וקטור ב-$W^{\perp}$, נגזר ישירות מההגדרה).
2. $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$.
3. $W \oplus W^{\perp} = V$.
4. יהי V מ"ו מעל F ויהיו U, W תמ"ו של V. אז: $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.
5. לכל מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ מתקיים, ביחס למ"פ סטנדרטית מעל $\mathbb{R}$:
$N(A) = Row(A)^{\perp}$ וההפך - $N(A)^{\perp} = Row(A)$.
כלומר, אם יש לנו את מרחב הפתרונות של מטריצה – ניתן למצוא בקלות את מרחב השורות של המטריצה (יש מספר שאלות בפרק שבהן נשתמש בתכונה הזאת).

אי שוויון קושי שוורץ:

יהי V ממ"פ. לכל $u, v \in V$ מתקיים $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

תכונה מעניינת (מתי מתקבל שוויון):

שוויון מתקבל אם"ם הוקטורים $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ הם כפל אחד של השני בסקלר (כלומר פרופורציוניים אחד לשני).

מכפלה פנימית לא סטנדרטית:

ישנן מכפלות פנימיות (עומדות בכל התנאים שדיברנו עליהם כשהגדרנו מהי מכפלה פנימית) שהן שונות מהצורה הסטנדרטית האהובה והמוכרת. דוגמאות:

1. עבור $f,g\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]$, $\langle f,g\rangle = f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1)$ - מכפלה פנימית (נראה זאת בשאלה נפרדת).

2. עבור $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$: $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle = \boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{u}$ - מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ (נראה זאת בשאלה נפרדת).

3. עבור f,g פונקציות רציפות מחזוריות 2π, $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ - מכפלה פנימית.

4. עבור $f,g\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]$, $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ - מכפלה פנימית.

את כל מה שלמדנו (מציאת בסיס א"ג/א"נ, מציאת מרחק וקטור מתמ"ו, מציאת היטל א"ג של וקטור על תמ"ו [הקירוב הטוב ביותר]) ניתן לבצע עם כל מכפלה פנימית, לאו דווקא מ"פ סטנדרטית.

אופרטור הטלה א"ג והקירוב הטוב ביותר:

❖ אופרטור הטלה אורתוגונלית:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F, W תמ"ו של V ו-$B_{W,\text{א"ג}}=\{\boldsymbol{w_1},\boldsymbol{w_2},\dots,\boldsymbol{w_m}\}$ בסיס א"ג של W.

נגיד כי $P_W: V\to V$ הוא אופרטור הטלה א"ג על W אם מתקיים לכל וקטור $\boldsymbol{v}\in V$:

$$P_W(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w_1}\rangle}{\|\boldsymbol{w_1}\|^2}\cdot\boldsymbol{w_1} + \frac{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w_2}\rangle}{\|\boldsymbol{w_2}\|^2}\cdot\boldsymbol{w_2} + \cdots + \frac{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w_m}\rangle}{\|\boldsymbol{w_m}\|^2}\cdot\boldsymbol{w_m}$$

למעשה, כשאנחנו מפעילים את אופרטור ההטלה על וקטור $\boldsymbol{v}\in V$ אנחנו מקבלים בדיוק את ההיטל האורתוגונלי של $\boldsymbol{v}$ על W.

תכונות:

1. $P_W{}^2 = P_W$ ($P_W{}^2 = P_W \circ P_W$). כלומר, לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים $P_W{}^2(\boldsymbol{v}) = P_W(\boldsymbol{v})$.
2. $Im(P_W) = W$.
3. $Ker(P_W) = W^{\perp}$.
4. הע"ע של אופרטור הטלה א"ג יכולים להיות רק 0 או 1 (נובע מהתכונה ה-1. ראינו שאלה בעבר שבה נתון אופרטור T המקיים $T^2 = T$ והוכחנו כי יש לו רק ע"ע 0 ו-1).

❖ הקירוב הטוב ביותר:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F, W תמ"ו של V ו- $\boldsymbol{v} \in V$. נגיד כי $\boldsymbol{w} \in W$ הוא הקירוב הטוב ביותר של $\boldsymbol{v}$ בתמ"ו W אם מתקיים:

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}'\| \ \forall \boldsymbol{w}' \in W$$

- תזכורת: למדנו כי במכ"פ V, המרחק בין $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$ הוא: $dist(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|$.
- במילים אחרות, הקירוב הטוב ביותר של וקטור $\boldsymbol{v}$ בתמ"ו W הוא הוקטור ש"הכי קרוב אליו" ב-W.
- כשדיברנו על מציאת היטל א"ג, ציינו שהוקטור $\boldsymbol{w} = P_W(\boldsymbol{v})$, הוא הוקטור הקרוב ביותר ל-$\boldsymbol{v}$ מבין וקטורי W. כלומר, הקירוב הטוב ביותר של וקטור $\boldsymbol{v}$ בתמ"ו W הוא $P_W(\boldsymbol{v})$.
- על כן, כאשר אנחנו מתבקשים למצוא את הקירוב הטוב ביותר של וקטור $\boldsymbol{v}$ בתמ"ו W, פשוט נחשב את $P_W(\boldsymbol{v})$.

אי שוויון בסל:

יהי ממ"פ V, קבוצה אורתו**נורמלית** $S = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_k}\}$ ו-$\boldsymbol{v} \in V$. אז מתקיים:

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 \geq |\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_1} \rangle|^2 + |\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_2} \rangle|^2 + \dots + |\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_k} \rangle|^2$$

<u>שימו לב</u>: המשפטים וההגדרות שיצוינו החל מעכשיו קשורים לנושא של אופרטורים מיוחדים במרחבי מכפלה פנימית, משפט הפירוק הספקטרלי ולכסון אוניטרי. חומר זה רלוונטי רק לחלק מהקורסים והמחלקות. לפני הקריאה והצפיה בסרטונים הרלוונטים לנושא זה (הסברים ושאלות), אנא וודאו כי נושא זה נמצא בסילבוס של הקורס שלכם ושאתם נבחנים על חומר זה בבחינה.

אופרטורים מיוחדים במרחבי מכפלה פנימית ולכסון אוניטרי

אופרטור צמוד ומטריצה צמודה:

אופרטור צמוד:

יהיה V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה F, ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

קיים אופרטור לינארי אחד ויחיד $S: V \to V$ כך שמתקיים לכל $u, v \in V$:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, S(v)\rangle$$

נסמן את S ב-T^*. כלומר, לכל אופרטור לינארי $T: V \to V$ קיים אופרטור יחיד T^* כך שמתקיים לכל $u, v \in V$:

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$$

<u>תכונות</u>: יהיו $T: V \to V$, $S: V \to V$, אז:

- T^* תמיד קיים והוא יחיד.
- $(T^*)^* = T$.
- $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.
- $(S + T)^* = S^* + T^*$.
- T הפיך $\Leftrightarrow$ T^* הפיך.
- $(TS)^* = S^*T^*$.

מטריצה צמודה:

תהא מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$. נגדיר את המטריצה הצמודה של A להיות $A^* = \overline{A^T}$.

דוגמה: תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3i & -i \end{pmatrix}$ אז A^*:

$$A^* = \overline{A^T} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2\imath \\ 3\imath & -\imath \end{pmatrix}^T} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 3\imath \\ 2\imath & -\imath \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -3i \\ -2i & i \end{pmatrix}$$

תכונה חשובה (קשר בין מטריצות מייצגות של אופרטור והצמוד שלו):

יהי $T: V \to V$ ויהי B בסיס א"נ של V. נסמן $A = [T]_B$, אז:

T^* הוא אופרטור צמוד של T $\Leftrightarrow$ מתקיים $[T^*]_B = A^*$.
(כלומר $[T^*]_B = A^* = ([T]_B)^* = \overline{([T]_B)^T}$).

סדר פעולות למציאת אופרטור צמוד:

יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי (V ממ"פ). על מנת למצוא את הנוסחה של האופרטור הצמוד שלו, $T^*: V \to V$, נעבוד על פי השלבים הבאים:

1. נמצא את $A = [T]_B$ כאשר B הוא בסיס א"נ של V (ביחס למ"פ הנתונה בשאלה).
2. נחשב את A^*. לפי המשפט שלמדנו, $A^* = [T^*]_B$.
3. נשתמש ב- $[T^*]_B$ על מנת לחשב את הנוסחה של T^* (מציאת נוסחה של אופרטור מתוך מטריצה מייצגת שלו).

❖ הערה: משום שמדובר במושג מעט מבלבל, פתרנו שאלות רבות בנושא של אופרטור צמוד (מציאת אופרטור צמוד לעצמו ושאלות הוכחה, גם במקרים שבהם האופרטור עובד על מרחב פולינומים ומכפלה פנימית לא סטנדרטית). הצפיה מומלצת בחום.

אופרטור צמוד לעצמו (הרמיטי) ומטריצה צמודה לעצמה (הרמיטית):

אופרטור צמוד לעצמו (הרמיטי):

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה F, ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.
נגיד כי T הוא **צמוד לעצמו** אם מתקיים $T^* = T$.

תכונות והערות:

- הערכים העצמיים של אופרטור צמוד לעצמו הם בהכרח ממשיים (הוכחנו באחת מהשאלות בוידאו).
- אופרטור היטל א"ג הוא אופרטור שצמוד לעצמו.
כלומר, אם $P_W: V \to V$ הוא אופרטור היטל א"ג, אז $(P_W)^* = P_W$.
- כאשר $F = \mathbb{R}$ נגיד כי T אופרטור סימטרי.
- אופרטור T המקיים $T^* = -T$ נקרא אופרטור **אנטי**-הרמיטי.

מטריצה צמודה לעצמה (הרמיטית):

נגיד כי מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ היא צמודה לעצמה אם מתקיים $\overline{A^T} = A^* = A$.
דוגמה למטריצה צמודה לעצמה: תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$, אז $A^* = A$:

$$A^* = \overline{A^T} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}^T} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = A$$

תכונות:

- הערכים העצמיים של מטריצה צמודה לעצמה הם בהכרח ממשיים.
- <u>משפט</u>: יהי אופרטור לינארי $T: V \to V$ ויהי B בסיס **א"נ** של V, אז:

T צמוד לעצמו (הרמיטי) $\Leftrightarrow$ $[T]_B$ מטריצה צמודה לעצמה (הרמיטית).

❖ <u>איך נבדוק האם אופרטור הוא צמוד לעצמו?</u>

יהי אופרטור לינארי $T: V \to V$ (V ממ"פ מעל F), ויהי B בסיס א"נ כלשהו של V.

נמצא $A = [T]_B$, ואז:

- אם A היא מטריצה צמודה לעצמה, כלומר מתקיים $A = A^*$ $\leftarrow$ T אופרטור צמוד לעצמו.
- אם A היא לא מטריצה שצמודה לעצמה, כלומר $A^* \neq A$ $\leftarrow$ T איננו אופרטור שצמוד לעצמו.

אופרטור אוניטרי ומטריצה אוניטרית:

אופרטור אוניטרי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה F, ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

נגיד כי T **אוניטרי** במידה ומתקיים ש-$T^*T = TT^* = Id$.

שימו לב - T אופרטור אוניטרי אם"ם:

- $T^* = T^{-1}$.
- לכל $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v}) \rangle$ (אופרטור שומר מ"פ, הוכחנו באחת השאלות בוידאו).
- לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים: $\|T(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$ (אופרטור שומר נורמה, הוכחנו באחת השאלות בוידאו).
- לכל $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים $dist(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = dist(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v}))$ (אופרטור שומר מרחק).

תכונה והערה:

- אם $\lambda \in F$ הוא ע"ע של T אוניטרי, אז בהכרח $|\lambda| = 1$ (הוכחנו באחת השאלות בוידאו).
- אם $T^*T = TT^* = Id$ ו- $F = \mathbb{R}$, אז נגיד כי T אופרטור אורתוגונלי.

מטריצה אוניטרית:

נגיד כי מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ היא אוניטרית אם מתקיים $A^*A = AA^* = I$. דוגמה למטריצה אוניטרית: $A = I$.

נגיד כי מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא מטריצה אורתוגונלית אם מתקיים $A^TA = AA^T = I$.

תכונה חשובה ושימושית:

יהי אופרטור לינארי $T: V \to V$ ויהי B בסיס **א"נ** של V, אז:

T אוניטרי $\Leftrightarrow$ $[T]_B$ מטריצה אוניטרית.

❖ איך נבדוק האם אופרטור הוא אוניטרי?

יהי אופרטור לינארי $T:V\to V$ (V ממ"פ מעל F), ויהי B בסיס א"נ כלשהו של V.
נמצא $A=[T]_B$.

- אם A היא מטריצה אוניטרית, כלומר מתקיים $A^*A=AA^*=I$ $\leftarrow$ T אופרטור אוניטרי.
- אם A היא לא מטריצה אוניטרית, כלומר $A^*A\neq I$ $\leftarrow$ T איננו אופרטור אוניטרי.

אופרטור נורמלי ומטריצה נורמלית:

אופרטור נורמלי:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה F, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. נגיד כי אופרטור לינארי $T:V\to V$ הוא **נורמלי** אם $TT^*=T^*T$.

תכונות, הערות ומשפטים:

- אופרטור צמוד לעצמו הוא נורמלי (כי $T=T^*$ כך שמתקיים $TT^*=T^*T=T^2$).
- אופרטור אוניטרי הוא נורמלי (כי $TT^*=T^*T=Id$ ובפרט $TT^*=T^*T$).
- כאשר T הוא אופרטור נורמלי מתקיים שו"ע של ע"ע שונים של T הם א"ג (הוכחנו באחת השאלות).
  כלומר, אם T הוא נורמלי, אז לכל שני ע"ע שונים זה מזה λ_1 ו-λ_2 עם ו"ע $\boldsymbol{v_1}$ ו-$\boldsymbol{v_2}$ בהתאמה, מתקיים $\langle \boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}\rangle=0$.
- T אופרטור נורמלי $\Leftrightarrow$ לכל $\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים $\|T(\boldsymbol{v})\|=\|T^*(\boldsymbol{v})\|$ (הוכחנו באחת השאלות).
- בהמשך נדבר בהרחבה (ונראה שאלות בנושא) על המשפט הספקטרלי הקושר בין נורמליות של אופרטור להיותו לכסין אוניטרית.

מטריצה נורמלית:

נגיד כי מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ היא נורמלית אם מתקיים $A^*A=AA^*$.

תכונה:

יהי אופרטור לינארי $T:V\to V$ ויהי B בסיס א"נ של V, אז:

T נורמלי $\Leftrightarrow$ $[T]_B$ מטריצה נורמלית.

❖ איך נבדוק האם אופרטור הוא נורמלי?

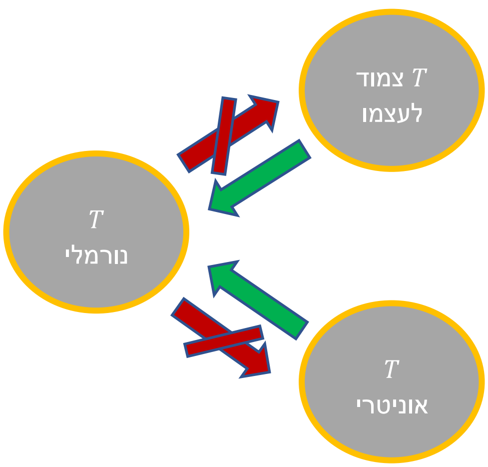
יהי אופרטור לינארי $T: V \to V$ (V ממ"פ מעל F), ויהי B בסיס א"נ כלשהו של V.
נמצא $A = [T]_B$.
- אם A היא מטריצה נורמלית, כלומר מתקיים $AA^* = A^*A$ $\leftarrow$ T אופרטור נורמלי.
- אם A היא לא מטריצה נורמלית, כלומר $AA^* \neq A^*A$ $\leftarrow$ T איננו אופרטור נורמלי.

אופרטורים מיוחדים במרחבי מכפלה פנימית - סיכום:

למדנו מספר סוגי אופרטורים במרחבי מכפלה פנימית. נעשה קצת סדר:

יהי V ממ"פ מעל F, ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. נגיד כי T:

1. אופרטור נורמלי: אם $TT^* = T^*T$.
2. אופרטור צמוד לעצמו (הרמיטי): אם $T^* = T$ (כאשר $F = \mathbb{R}$ נגיד כי T אופרטור סימטרי).
3. אופרטור אוניטרי: אם מתקיים $T^*T = TT^* = I$ (אם $F = \mathbb{R}$ נגיד כי T אורתוגונלי).
   - T צמוד לעצמו $\leftarrow$ T נורמלי (ההפך לא בהכרח נכון).
   - T אוניטרי $\leftarrow$ T נורמלי (ההפך לא בהכרח נכון).



❖ איך נבדוק האם T הוא נורמלי/צמוד לעצמו/אוניטרי?

V ממ"פ מעל F, $T: V \to V$ אופרטור לינארי.
יהי B בסיס א"נ של V. נמצא $A = [T]_B$, ואז:

- T אופרטור נורמלי $\Leftrightarrow$ A מטריצה נורמלית (כלומר $AA^* = A^*A$).
- T אופרטור צמוד לעצמו $\Leftrightarrow$ A מטריצה צמודה לעצמה (כלומר $A^* = A$).
- T אופרטור אוניטרי $\Leftrightarrow$ A מטריצה אוניטרית (כלומר $A^*A = AA^* = I$).

מטריצה לכסינה אוניטרית ומשפט הפירוק הספקטרלי למטריצות נורמליות:

מטריצה לכסינה אוניטרית:

תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. נגיד כי A מטריצה לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אלכסונית $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ומטריצה **אוניטרית** $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (כלומר $P^* = P^{-1}$), כך ש:

$$A = PDP^{-1} = PDP^*$$

- משפט: A מטריצה לכסינה אוניטרית $\Leftrightarrow$ יש לה n ו"ע אורתונורמליים.
- המשפט הספקטרלי הממשי (כבר למדנו):

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ לכסינה א"ג $\Leftrightarrow$ A מטריצה סימטרית

(לכסינה א"ג כלומר $P^{-1} = P^T$ ואז - $A = PDP^{-1} = PDP^T$).

- המשפט הספקטרלי המרוכב:

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה לכסינה אוניטרית $\Leftrightarrow$ A מטריצה נורמלית

כיצד נלכסן אוניטרית מטריצה?

כדי ללכסן אוניטרית מטריצה A נעשה בדיוק את מה שעשינו כשלמדנו ללכסן א"ג מטריצה (כאן זו גרסה מרוכבת, כלומר P אוניטרית במקום א"ג):

1. נמצא ע"ע של A.
2. נמצא בסיסים למ"ע של הע"ע של A.
3. נמצא בסיסים **א"נ** של המ"ע (ג"ש במידת הצורך).
4. D היא מטריצה אלכסונית עם ע"ע על האלכסון, P היא מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים המהווים את הבסיסים הא"נ של המ"ע (מצאנו בשלב 3) ואז $P^{-1} = P^*$.
ויתקיים:

$$A = PDP^{-1} = PDP^*$$

אופרטור לכסין אוניטרית ומשפט הפירוק הספקטרלי עבור אופרטורים נורמליים:

אופרטור לכסין אוניטרית/אורתונורמלית:

הגדרה1: נגיד כי $T: V \to V$ אופרטור לכסין אוניטרית/אורתונורמלית אם קיים בסיס B **אורתונורמלי** של V כך שהמטריצה $[T]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

כלומר, נגיד כי T אופרטור לכסין אוניטרית/אורתונורמלית אם T הוא לכסין וקיים בסיס מלכסן B שהוא בסיס אורתונורמלי של V.

הגדרה2: נגיד כי $T: V \to V$ לכסין אוניטרית/אורתונורמלית אם קיים ל-V בסיס א"נ המורכב כולו מו"ע של האופרטור T.

- המשפט הספקטרלי המרוכב: יהי V ממ"פ (מימד סופי) מעל $\mathbb{C}$, אז:

$T: V \to V$ אופרטור לכסין אוניטרית $\Leftrightarrow$ T אופרטור נורמלי

- המשפט הספקטרלי הממשי: יהי V ממ"פ (מימד סופי) מעל $\mathbb{R}$, אז:

$T: V \to V$ אופרטור לכסין אוניטרית $\Leftrightarrow$ T אופרטור נורמלי + $F_T[\lambda]$ מתפרק לגורמים ליניאריים.

כיצד נלכסן אוניטרית אופרטור?

כדי ללכסן אוניטרית אופרטור ליניארי $T: V \to V$ נפעל בדרך הבאה.

1. נמצא ע"ע של T.
2. נמצא בסיסים למ"ע של הע"ע של T.
3. נמצא בסיסים א"נ של המ"ע (ג"ש במידת הצורך).
4. בסיס B א"נ של V, שהוא גם בסיס מלכסן אוניטרית של T, הוא בסיס המכיל בדיוק את הו"ע מהבסיסים הא"נ שמצאנו בשלב 3. $[T]_B$ מטריצה אלכסונית שעל האלכסון שלה נמצאים הע"ע של T, לפי הסדר של וקטורי הבסיס המלכסן.

טריקים, טיפים וטעויות נפוצות

- כאשר אתם מפעילים את גראם-שמידט, מומלץ להפעיל בדיקת שפיות בסוף כל שלב, בסוף מציאת כל וקטור $\boldsymbol{w_i}$. כלומר, כאשר מצאתם את $\boldsymbol{w_2}$ ודאו כי הוא א"ג ל-$\boldsymbol{w_1}$, **לפני** שאתם ממשיכים למציאת $\boldsymbol{w_3}$. לאחר שמצאתם את $\boldsymbol{w_3}$ ודאו כי הוא א"ג ל-$\boldsymbol{w_1}$ ול-$\boldsymbol{w_2}$ **לפני** שאתם ממשיכים למציאת את $\boldsymbol{w_4}$, וכן הלאה. בדיקת השפיות הזאת יכולה לחסוך זמן יקר וטעויות מיותרות.

- כאשר מצאתם בסיס ומימד של מרחב משלים ניצב $(W^{\perp})$ ניתן לבצע שתי בדיקות שפיות חשובות:
  a. ודאו כי $\dim(W)+\dim(W^{\perp})=\dim(V)$.
  b. ודאו כי כל וקטור בבסיס של $W^{\perp}$ א"ג לכל וקטור בבסיס של W.

- לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מתקיים $Row(A)=N(A)^{\perp}$ ביחס למכפלה פנימית סטנדרטית מעל $\mathbb{R}$. לכן, אם יש לכם מטריצה A מעל $\mathbb{R}$ ובסיס ל-$N(A)$, אתם יכולים למצוא בקלות בסיס ל-$Row(A)$ וההפך (משלים ניצב). ראינו מספר שאלות שבהן השתמשנו בתכונה השימושית הזאת.

- <u>טריק חשוב(!)</u>: יהי V ממ"פ מעל F ויהי U תמ"ו של V. כל $\boldsymbol{v}\in V$ ניתן לרישום כסכום ההיטלים שלו על U ועל $U^{\perp}$. כלומר:

$$\boldsymbol{v}\overset{(**)}{=}P_U(\boldsymbol{v})+P_{U^{\perp}}(\boldsymbol{v})$$

על כן, אם יש לכם את $\boldsymbol{v}$ ואת $P_{U^{\perp}}(\boldsymbol{v})$, אתם יכולים לחשב את $P_U(\boldsymbol{v})$ בקלות בעזרת $(**)$, וההפך (אם יש לכם את $\boldsymbol{v}$ ואת $P_U(\boldsymbol{v})$ אתם יכולים לחשב את $P_{U^{\perp}}(\boldsymbol{v})$ בקלות).

- <u>בדיקת שפיות לאחר מציאת היטל א"ג</u>:
יהי V מ"ו מעל F, יהי $V\subseteq U$ תמ"ו של V, ויהי $\boldsymbol{v}\in V$. במידה וחישבנו את $P_U(\boldsymbol{v})$, ניתן לבצע בדיקת שפיות: חייב להתקיים כי

$$P_U(\boldsymbol{v})\perp\left(\boldsymbol{v}-P_U(\boldsymbol{v})\right)$$

מדוע? כיוון ש $\boldsymbol{v}-P_U(\boldsymbol{v})$ זה בדיוק $P_{U^{\perp}}(\boldsymbol{v})$ (לפי $(**)$ מהטריק החשוב), וכמובן שמתקיים $P_U(\boldsymbol{v})\perp P_{U^{\perp}}(\boldsymbol{v})$ (כי $P_U(\boldsymbol{v})\in U$ ו- $P_{U^{\perp}}(\boldsymbol{v})\in U^{\perp}$, ואנחנו יודעים שכל וקטור ב-U הוא א"ג לכל וקטור ב-$U^{\perp}$).

כלומר, ברגע שחישבנו את $P_U(\boldsymbol{v})$, מומלץ לוודא כבדיקת שפיות כי מתקיים $\langle P_U(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{v} - P_U(\boldsymbol{v})\rangle = 0$.

- <u>תכונה של מטריצה אורתוגונלית</u>: תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית, כלומר מתקיים $A \cdot A^T = I_n$ ($A^T \cdot A =$). אז קבוצת העמודות של A וקבוצת השורות של A מהוות בסיס א"נ של $\mathbb{R}^n$ ביחס למ"פ סטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$.
כלומר, אם נסמן את שורות A להיות: $\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_2}, \dots, \boldsymbol{R_n}$ ואת עמודות A להיות $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}$, אז הקבוצה $\{\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_2}, \dots, \boldsymbol{R_n}\}$ היא בסיס אורתו**נורמלי** של $\mathbb{R}^n$ ביחס למ"פ סטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$, וכך גם הקבוצה $\{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n}\}$.

- <u>טעות נפוצה</u>: כאשר אתם מחשבים היטל א"ג של וקטור על מרחב, אסור להכפיל את ההיטל (הוקטור) שקיבלתם בסקלר.
זה בסדר לעשות את זה בבסיס (כל עוד לא מדובר בבסיס א"נ) או בפרישה (הכפלה בסקלר שונה מאפס) כדי להיפטר משברים או ביטויים לא יפים לעין או לא נוחים, אך לא בחישוב היטל. לגודל יש משמעות, וכשאתם מכפילים בסקלר אתם משנים את הגודל.

- <u>טעות נפוצה+תכונה שימושית</u>: יהי V ממ"פ מעל F ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו של V.
  - **זה לא נכון**:
    x $(U+W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
    x $(U\cap W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
  - **זה נכון** (ועשוי להיות שימושי):
    ✓ $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
    ✓ $(U\cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

שאלות ותשובות סופיות

שאלות

תת פרק ראשון:

שאלה 1:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ ממ"פ (מ"פ סטנדרטית), ויהיה W תמ"ו של V.

$W=span\left\{\boldsymbol{w_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{w_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{w_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$. מצאו היטל א"ג של $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$ על W.

שאלה 2:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ ממ"פ (מ"פ סטנדרטית), ויהיה W תמ"ו של V.

$$W=span\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right\}.$$

א. מצאו בסיס א"נ של W.

ב. מצאו בסיס א"נ של V.

שאלה 3:

יהי $V=\mathbb{R}^4$ ממ"פ (מ"פ סטנדרטית), ויהיה W תמ"ו של V.

$$W=span(S),\quad S=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

מצאו בסיס א"נ של W.

שאלה 4:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ ממ"פ (מ"פ סטנדרטית), ויהיה W תמ"ו של V.

$$B_{W,\text{א"ג}}=\left\{\boldsymbol{w_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{w_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.\quad \boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{v_3}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

א. מצאו מרחק של הוקטור $\boldsymbol{v_1}$ מהמרחב W.

ב. מצאו מרחק של הוקטור $\boldsymbol{v_2}$ מהמרחב W.

ג. מצאו מרחק של הוקטור $\boldsymbol{v_3}$ מהמרחב W.

שאלה 5:

יהי $V=\mathbb{R}^3$ ממ"פ (מ"פ סטנדרטית), ויהיה W תמ"ו של V.

$$B_W=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

מצאו את המרחק של הוקטור $\boldsymbol{v}$ מהמרחב W.

שאלה 6:

יהי מישור ב-$\mathbb{R}^3$ הנתון על ידי המשוואה הבאה: $x+y+z=0$.

מצאו את המרחק של הוקטור $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ מהמישור הנתון.

שאלה 7:

השלימו את הקבוצה $S=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ לבסיס א"נ של $\mathbb{R}^2$ (מ"פ סטנדרטית).

שאלה 8:

השלימו את הקבוצה $S=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ לבסיס א"ג של $\mathbb{R}^3$ (מ"פ סטנדרטית).

שאלה 9:

יהי V ממ"פ ו-W תמ"ו של V עם בסיס B_W.

הוכיחו כי וקטור $\boldsymbol{v} \in V$ מאונך לכל וקטור ב-W $\Longleftrightarrow$ הוקטור $\boldsymbol{v} \in V$ מאונך לכל אחד מוקטורי B_W.

<u>שאלה 10</u>:

יהי $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ עם מ"פ סטנדרטית. W הוא תמ"ו של V, כאשר:

$$B_W = \left\{ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

מצאו בסיס ומימד של $W^{\perp}$.

<u>שאלה 11</u>:

נתון מ"ו $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ ו-W תמ"ו של V.

נתון בסיס S של W: $S = \left\{ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

מצאו מטריצה $B \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ המקיימת $N(B) = W$.

<u>שאלה 12</u>:

מצאו דוגמה למטריצה $H \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ כך שלממ"ל $H\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ יש פתרון, וכך ש:

$$B_{N(H)} = \left\{ \boldsymbol{h_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{h_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

<u>שאלה 13</u>:

יהי V ממ"פ מעל F. הוכיחו כי הוקטור היחיד שהוא א"ג לכל וקטור ב-V הוא $\boldsymbol{0}_V$.

<u>שאלה 14</u>:

יהיו 3 וקטורים $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, מ"פ מעל $\mathbb{R}$, ונתון כי מתקיים:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = 7,\ \ \|\boldsymbol{v}\|^2 = 2,\ \ \|\boldsymbol{w}\|^2 = 3$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 2,\ \ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\rangle = 1,\ \ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$$

הוכיחו כי הקבוצה $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ היא קבוצה בת"ל.

<u>שאלה 15</u>:

יהי V ממ"פ מעל F, יהי $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}$ תת מרחב וקטורי של V, ויהי $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$.

נתון שמרחקו של $\boldsymbol{v}$ מ-U הוא 12 בעוד שמרחקו של $\mathbf{v}$ מ-$\mathrm{U}^{\perp}$ הוא 5.

הוכיחו כי $\|\boldsymbol{v}\| = 13$.

<u>תת-פרק 'שאלות נוספות וחשובות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)'</u>:

<u>שאלה 1</u>:

יהי $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$ עם מ"פ סטנדרטית. יהיו $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

מצאו וקטור $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ המקיים:

1) ההיטל הא"ג שלו על $span(\boldsymbol{u})$ הוא $1 \cdot \boldsymbol{u}$

2) ההיטל הא"ג שלו על $span(\boldsymbol{w})$ הוא $2 \cdot \boldsymbol{w}$.

<u>שאלה 2</u>:

יהי V ממ"פ מעל F (לאו דווקא סטנדרטית), ותהא $T = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \dots, \boldsymbol{v}_r\} \subseteq V$ קבוצה פורשת של V.

יהי $V \in \boldsymbol{u}$ ונתון כי $\boldsymbol{u}$ א"ג לכל וקטור ב-T. הוכיחו כי $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}_V$.

<u>שאלה 3:</u>

תהיינה $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}),\quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, כך שמתקיים $A \cdot B = 0_{m\times p}$.

הוכיחו כי $Row(A) \subseteq Col(B)^{\perp}$ (ביחס למ"פ סטנדרטית מעל $\mathbb{R}$).

<u>שאלה 4:</u>

V מ"ו מעל F, $dim(V) = n$, W_1, W_2 תמ"ו של V.

נתון כי $W_1 \oplus W_2 = V$. הוכיחו כי $W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ וכי $W_1^{\perp} + W_2^{\perp} = V$
(כלומר הוכיחו כי $W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp} = V$).

<u>שאלה 5 (סעיף ב' חשוב, נא לצפות גם אם אין לכם מ"פ לא סטנדרטית במבחן):</u>

יהי $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ממ"פ עם מ"פ המוגדרת באופן הבא: $\langle A, B\rangle = \text{trace}(A \cdot B^T)$.

יהי $W \subseteq V$ תמ"ו של V הנתון באופן הבא: $W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -6a-b & -a+6b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$

א. מצאו בסיס א"ג של $W^{\perp}$.

ב. חשבו את $P_W(G)$, כלומר את ההיטל הא"ג של $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ על W.

<u>שאלה 6:</u>

יהי ממ"פ $V = \mathbb{R}^4$ מעל $\mathbb{R}$ עם מ"פ סטנדרטית, ויהי U תמ"ו של V עם בסיס: $B_U = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. מצאו את ההיטל של $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ על U, כלומר את $P_U(\boldsymbol{v})$.

<u>שאלה 7:</u>

תהא ממ"פ $V=\mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית, ויהי W תת מרחב וקטורי של V כאשר

$$B_W=\left\{\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}0\\5\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.\ \text{יהי}\ V\ni\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

מצאו וקטור $\boldsymbol{w}\in W$ ו-וקטור $\boldsymbol{t}\in W^{\perp}$, כך שמתקיים $\boldsymbol{t}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$.

תת פרק 'מכפלה פנימית לא סטנדרטית וקושי-שוורץ':

שאלה 1:

צריך להוכיח כי:

$$\left|a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+a_3\overline{b_3}\right|^2\le\left(|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2\right)\cdot\left(|b_1|^2+|b_2|^2+|b_3|^2\right)$$

כאשר $a_i,b_i\in\mathbb{C}$ לכל $i=1,2,3$.

שאלה 2:

יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ חיוביים. נתון כי $a+b+c+d\overset{**}{\le}19$.

הוכיחו כי $\frac{16}{19}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

שאלה 3:

הוכיחו כי הפעולה $\langle\cdot,\cdot\rangle$ היא מכפלה פנימית:

א. $f,g\in\mathbb{R}_{\le2}[x]$, $\langle f,g\rangle=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1)$.

ב. $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$: $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\rangle=\boldsymbol{v}^TA\boldsymbol{u}$ מעל $\mathbb{R}$.

שאלה 4:

תהא מ"פ (לא סטנדרטית) במ"ו $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \in \mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

נתון כי המכפלה הפנימית מקיימת:

$$(1)\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \qquad (2)\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \qquad (3)\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

חשבו את $\|\boldsymbol{v_3}\|, \langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \rangle, \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \rangle$.

שאלה 5:

יהי $V = \mathbb{R}^3$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ (לא סטנדרטית), ונתון כי

$B = \left\{ \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס א"נ ל-V.

מצאו את הנוסחה של המכפלה הפנימית. כלומר, מצאו נוסחה ל-$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ כאשר $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

שאלה 6:

תהיינה f, g פונקציות ממשיות רציפות בקטע $[a_0, a_1]$. צריך להוכיח כי:

$$\left| \int_{a_0}^{a_1} f(t)g(t)dt \right| \le \sqrt{\int_{a_0}^{a_1} f^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_{a_0}^{a_1} g^2(t)dt}$$

שאלה 7:

יהי $V = \mathbb{R}_{\le 3}[x]$ מעל $\mathbb{R}$ עם מכפלה פנימית המקיימת לכל $f, g \in \mathbb{R}_{\le 3}[x]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

יהי W תמ"ו של V עם בסיס $B_W = \{v_1 = (x^3),\ v_2 = (x^3 + 2x),\ \ v_3 = (x^2 + x + 1)\}$.
מצאו בסיס א"ג ל-W מתוך B_W.

שאלה 8:

יהי $V=\mathbb{R}_{\le 2}[x]$ מעל $\mathbb{R}$, ונתונה המכפלה הפנימית הבאה: $\langle f,g\rangle=\int_{-2}^{2}f(x)g(x)dx$.

מצאו את הקירוב הטוב ביותר של הפולינום $p(x)=x^2+2x+3$ על תמ"ו $W=span\{x,1\}$.

תת פרק 'אופרטורים מיוחדים במרחבי מכפלה פנימית':

שאלה 1:

יהי $V=\mathbb{C}^2$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ עם מ"פ סטנדרטית.

יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים לכל $x,y\in\mathbb{C}$: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ix+2y\\iy\end{pmatrix}$.

מצאו את הנוסחה של האופרטור הצמוד של T, כלומר את הנוסחה של T^*.

שאלה 2:

יהי $V=\mathbb{C}^3$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ (מ"פ סטנדרטית).

יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים לכל $x,y,z\in\mathbb{C}$: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+(1+2i)y+iz\\3ix+4y+(3-i)z\\x+6iz\end{pmatrix}$.

מצאו את הנוסחה של האופרטור הצמוד של T, כלומר את הנוסחה של T^*.

שאלה 3:

יהי $V=\mathbb{C}^2$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ עם מ"פ סטנדרטית, ויהי $T:V\to V$ המקיים:

$$T\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2i\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3i\\-1\end{pmatrix}$$

א. חשבו את $A=[T]_E$, כאשר E – בסיס סטנדרטי של $\mathbb{C}^2$ (וגם א"נ ביחס למ"פ סטנדרטית).

ב. חשבו את הנוסחה של T^*, כלומר את $T^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

ג. הראו כי עבור T^* שמצאתם מתקיים לכל $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^2$: $\langle T(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle=\langle \boldsymbol{u},T^*(\boldsymbol{v})\rangle$.

שאלה 4:

יהי $V=\mathbb{R}_{\le 2}[x]$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, עם מ"פ המקיימת לכל $f(x),g(x)\in\mathbb{R}_{\le 2}[x]$:

$$\langle f,g\rangle = f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1)$$

יהי אופרטור לינארי $T:V\to V$ המקיים לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$:

$$T(ax^2+bx+c)=ax^2+(a+b)x+(a+c)$$

מצאו את הנוסחה של האופרטור הצמוד של T, כלומר את הנוסחה של T^*. עשו זאת לפי הסעיפים:

א. מצאו בסיס B א"נ של V.
ב. מצאו $A=[T]_B$.
ג. מצאו את $[T^*]_B$.
ד. מצאו את $T^*(ax^2+bx+c)$.

שאלה 5:

יהי $S:V\to V$ אופרטור לינארי, כאשר V ממ"פ מעל שדה F.
$S^*:V\to V$ הוא האופרטור הצמוד של S.

א. הוכיחו כי לכל $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ מתקיים $\langle \boldsymbol{u},S(\boldsymbol{v})\rangle=\langle S^*(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle$.
ב. יש להוכיח כי מתקיים: $\left(Im(S)\right)^{\perp}=Ker(S^*)$.

שאלה 6:

יהי $V=\mathbb{C}^2$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, עם מ"פ סטנדרטית.
עבור כל אחד מהאופרטורים הבאים קבעו האם הוא צמוד לעצמו, אוניטרי, נורמלי או אף אחד מהם:

א. $T:V\to V$ הנתון על ידי: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ix+2iy\\2x-y\end{pmatrix}$
ב. $S:V\to V$ הנתון על ידי: $S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x+iy\\ix+y\end{pmatrix}$.

שאלה 7:

יהי V ממ"פ מעל F, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי.
א. הוכיחו כי אם T הרמיטי (צמוד לעצמו) אז הערכים העצמיים של T הם ממשיים.
ב. הוכיחו כי אם T אנטי הרמיטי, כלומר $T^*=-T$, אז הערכים העצמיים של T הם מדומים טהורים.

שאלה 8:

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, ויהי $T: V \to V$ אופרטור ליניארי.
ציינו עבור כל אחת מהטענות הבאות נכון/לא נכון והסבירו:

א. קיים T צמוד לעצמו שהפ"א שלו הוא $F_T[\lambda] = \lambda^2 + 4$.
ב. קיים T אוניטרי שהפ"א שלו הוא $F_T[\lambda] = \lambda^2 - 9$.

שאלה 9:

יהי V ממ"פ מעל F, ויהי $T: V \to V$ אופרטור אוניטרי (כלומר $T^*T = TT^* = I$). הוכיחו כי:

א. לכל $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ מתקיים: $\langle T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ (אופרטור שומר מ"פ).
ב. לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים: $\|T(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$ (אופרטור שומר נורמה)
ג. $|det([T]_B)| = 1$ עבור B בסיס א"נ של V.
ד. יהי $\lambda \in F$ ע"ע של T, אז $|\lambda| = 1$.

שאלה 10:

יהי V ממ"פ מעל F, ויהי $T: V \to V$ אופרטור ליניארי נורמלי ($TT^* = T^*T$). הוכיחו כי:

א. האופרטור $(T - \lambda I): V \to V$ הוא נורמלי.
ב. לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים $\|T(\boldsymbol{v})\| = \|T^*(\boldsymbol{v})\|$.
ג. $\boldsymbol{v}$ ו"ע של T השייך לע"ע λ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{v}$ ו"ע של T^* השייך לע"ע $\bar{\lambda}$.
ד. ו"ע של ע"ע שונים של T הם א"ג.

שאלה 11:

יהי V ממ"פ מעל F, ויהי $T: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו ($T^* = T$).
א. הוכיחו כי לכל $\boldsymbol{v} \in V$ מתקיים $\|\boldsymbol{v} + 5iT(\boldsymbol{v})\|^2 = \|\boldsymbol{v} - 5iT(\boldsymbol{v})\|^2$.
ב. הוכיחו כי האופרטור $(I + \alpha i T): V \to V$, הוא הפיך לכל $\alpha \in \mathbb{R}$.
ג. הוכיחו כי האופרטור $S: V \to V$, $S = (I + 4iT)^{-1}(I - 4iT)$, הוא אופרטור הפיך וכי $S^{-1} = S^*$.

שאלה 12:

הוכיחו כי לא קיימת מטריצה $G \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך שמתקיים: $G = 2G^*G + 3I$.
(רמז: הניחו בשלילה כי קיימת G כזו בדקו למה שווה G^*)

שאלה 13:

יהי $V = \mathbb{C}^2$ ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ (מ"פ סטנדרטית), ויהי $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ כך שמתקיים לכל $x, y \in \mathbb{C}$:

$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-iy\\ix+y\end{pmatrix}$.

א. האם T אופרטור צמוד לעצמו? נורמלי? אוניטרי? לכסין אוניטרית?

ב. לכסנו את T אוניטרית במידה והוא לכסין אוניטרית.

שאלה 14:

יהי ממ"פ $V=\mathbb{C}^3$ מעל $\mathbb{C}$ (מ"פ סטנדרטית), ויהי אופרטור לינארי $T:V\to V$

כך שמתקיים לכל $x,y,z\in\mathbb{C}$: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+iy+iz\\ix+5y+iz\\ix+iy+5z\end{pmatrix}$.

א. הראו כי T אופרטור נורמלי וכי הוא לכסין אוניטרית.

ב. חשבו ע"ע של T.

ג. לכסנו את T אוניטרית (מצאו בסיסים א"נ של המ"ע, בסיס מלכסן א"נ של T).

ד. לכסנו את המטריצה $[T]_E$ אוניטרית.

שאלה 15:

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, $dim(V)=n$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי נורמלי.

נתון כי 7 הוא הע"ע היחיד של T (כלומר כל הע"ע של T שווים ל- 7). הוכיחו כי $T=7I$.

שאלה 16:

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ $(dimV=n)$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי נורמלי.

נתון כי כל הע"ע של T הם ממשיים. הוכיחו כי T צמוד לעצמו.

שאלה 17:

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, $dimV=n$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור נורמלי המקיים: $T^7=T^5$.

א. הוכיחו כי T הרמיטי (כלומר צמוד לעצמו).

ב. הוכיחו כי $T^5=T$.

תשובות סופיות

תת פרק ראשון:

שאלה 1:

$$P_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 2:

א. $B_{W,\text{א"נ}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{114}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}.$

ב. $B_{\mathbb{R}^3,\text{א"נ}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

שאלה 3:

$$B_{W,\text{א"נ}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

שאלה 4:

א. $dist_{(\boldsymbol{v_1},W)} = \sqrt{2/3}.$

ב. $dist_{(\boldsymbol{v_2},W)} = \sqrt{6}$

ג. $dist_{(\boldsymbol{v_3},W)} = 0.$

<u>שאלה 5</u>:

$.dist=\sqrt{1/13}$

<u>שאלה 6</u>:

$dist_{(\boldsymbol{v},W)}=\sqrt{16/3}$

<u>שאלה 7</u>:

$$B_{\mathbb{R}^2,\text{א"נ}}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\binom{1}{2},\frac{1}{\sqrt{20}}\cdot\binom{4}{-2}\right\}$$

<u>שאלה 8</u>:

$$B_{\mathbb{R}^3,\text{א"ג}}=\left\{\boldsymbol{w_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{w_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{w_3}=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

<u>שאלה 9</u>:

הוכחה.

<u>שאלה 10</u>:

$$.B_{W^\perp}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\},dim(W^\perp)=1$$

<u>שאלה 11</u>:

דוגמה למטריצה כזאת:

$$.B=\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&-1/2&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

שאלה 12:

$.H=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-4&2&2\end{pmatrix}$

שאלה 13:

הוכחה.

שאלה 14:

הוכחה.

שאלה 15:

הוכחה (שתי דרכים).

תת-פרק 'שאלות נוספות וחשובות (ניתן לצפות ולפתור לפני המבחן)':

שאלה 1:

- תשובה אפשרית אחת: $.v=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24\\23\\2\end{pmatrix}$

- תשובה אפשרית שניה: $.v_{\text{אחר}}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-29\\29\\0\end{pmatrix}$

שאלה 2:

הוכחה.

שאלה 3:

הוכחה.

שאלה 4:

הוכחה (שני חלקים).

שאלה 5:

א. $B_{W^\perp,\text{א"ג}} = \left\{A_1 = \begin{pmatrix}6 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix}1 & -6\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

ב. $P_W(G) = \begin{pmatrix}-3/19 & 3/19\\15/19 & 21/19\end{pmatrix}$.

שאלה 6:

$$P_U(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix}$$

שאלה 7:

הוקטורים $\boldsymbol{t} \in W^\perp$ ו-$\boldsymbol{w} \in W$ כך ש-$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{v}$:

- $W^\perp \ni \boldsymbol{t} = P_{W^\perp}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}2/3\\-1/3\\-7/15\\3/5\end{pmatrix}$.
- $W \ni \boldsymbol{w} = P_W(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}4/3\\4/3\\22/15\\2/5\end{pmatrix}$.

תת פרק שני – מכפלה פנימית לא סטנדרטית וקושי-שוורץ:

שאלה 1:

הוכחה.

שאלה 2:

הוכחה.

שאלה 3:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

שאלה 4: (פתרון בשתי דרכים שונות)

$\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \rangle = 3$

$\langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \rangle = 4$

$\|\boldsymbol{v_3}\| = \sqrt{58}$

שאלה 5:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = z_1 z_2 + \frac{(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)}{4} + \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{9}$$

שאלה 6:

הוכחה.

שאלה 7:

$$B_{W,\text{א"ג}} = \{w_1 = (x^3), \quad w_2 = (-2.8x^3 + 2x), \quad w_3 = (x^2 + 1)\}$$

שאלה 8:

הקירוב הטוב ביותר של הפולינום $p(x) = x^2 + 2x + 3$ על תמ"ו $W = span\{x, \quad 1\}$ הוא $\left(2x + \frac{13}{3}\right)$

תת פרק שלישי – אופרטורים מיוחדים במרחבי מכפלה פנימית:

שאלה 1:

$$T^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3ix\\2x-iy\end{pmatrix}$$

שאלה 2:

$$T^*\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3iy+z\\(1-2i)x+4y\\-ix+(3+i)y-6iz\end{pmatrix}$$

שאלה 3:

א. $[T]_E=A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&3i\\3i&1\end{pmatrix}$.

ב. $T^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3x-3iy\\-3ix+y\end{pmatrix}$.

ג. ביצענו את בדיקת השפיות.

שאלה 4:

א. $B_{V,\text{א"נ}}=\left\{\boldsymbol{u_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^2\right),\boldsymbol{u_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right),\boldsymbol{u_3}=(-x^2+1)\right\}$.

ב. $A=[T]_B=\begin{pmatrix}2&0&-\sqrt{2}\\1&1&-\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&0&0\end{pmatrix}$.

ג. $A^*=[T^*]_B=\begin{pmatrix}2&1&1/\sqrt{2}\\0&1&0\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$.

ד. $T^*(ax^2+bx+c)=(4a+3b+4.5c)\cdot x^2+(b)\cdot x+(-2a-2b-2c)\cdot 1$.

שאלה 5:

א. הוכחה.

ב. הוכחה.

שאלה 6:

א. T אופרטור נורמלי (אך לא אוניטרי ולא צמוד לעצמו).

ב. S אופרטור נורמלי ואוניטרי (אך לא צמוד לעצמו).

שאלה 7:

א. הוכחה.
ב. הוכחה.

שאלה 8:

א. לא נכון, הסבר בוידאו.

ב. לא נכון, הסבר בוידאו.

שאלה 9:

א. הוכחה.
ב. הוכחה.
ג. הוכחה.
ד. הוכחה.

שאלה 10:

א. הוכחה.
ב. הוכחה.
ג. הוכחה.
ד. הוכחה.

שאלה 11:

א. הוכחה.
ב. הוכחה.
ג. הוכחה.

שאלה 12:

הוכחה.

שאלה 13:

א. T אופרטור צמוד לעצמו, נורמלי ולכסין אוניטרית (אך לא אוניטרי)
ב. לכסון אוניטרי של T:

$$B_{\text{מלכסן}} = B = \left\{ \boldsymbol{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שאלה 14:

א. הוכחה.

ב. ל-T יש את הע"ע הבאים:

- $\lambda_1 = 5+2i$, ר"א = 1, ר"ג = 1.
- $\lambda_2 = 5-i$, ר"א = 2, ר"ג = 2.

ג. לכסון אוניטרי של T:

$$B_{\text{מלכסן}} = B = \left\{ \boldsymbol{u_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{u_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix}5+2i & 0 & 0\\ 0 & 5-i & 0\\ 0 & 0 & 5-i\end{pmatrix}$$

ד. לכסון אוניטרי של $[T]_E$: $[T]_E = PDP^*$, כאשר:

- $D = \begin{pmatrix}5+2\mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 5-\mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & 5-\mathrm{i}\end{pmatrix}$.
- $P = [\boldsymbol{u_1} \vdots \boldsymbol{u_2} \vdots \boldsymbol{u_3}] = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.
- $P^{-1} = P^* = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

שאלה 15:

הוכחה.

שאלה 16:

הוכחה.

שאלה 17:

א. הוכחה.
ב. הוכחה.