

מבוא להסתברות - תרגיל מס' 5

1. במשחק מזל בו ההסתברות לזכות היא 0.3, ותוצאות משחקים שונים הינן בלתי תלויות, אדם מחליט להפסיק מיד לאחר ההפסד הראשון או כשיסיים 4 משחקים. יהי X מספר המשחקים הכולל שישחק.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות של X ; $\{P(1)=0.7, P(2)=0.21, P(3)=0.063, P(4)=0.027\}$
 - ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ;
 - ג. מהי ההסתברות שמספר המשחקים ששיחק אינו עולה על 3? $\{0.973\}$
 - ד. מהו השכיח של X ? $\{1\}$
 - ה. מהי התוחלת של X ? $\{1.417\}$
2. בכד יש 4 כדורים ירוקים, 3 כדורים ורודים, ושני כדורים סגולים. מן הכד מוציאים באקראי וללא החזרה ארבעה כדורים. יהי X מספר הצבעים השונים במדגם ויהי Y מספר הירוקים שהוצאו.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות של X ; $\{P(1)=0.0079, P(2)=0.4206, P(3)=0.5714\}$
 - ב. מצא וצייר את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ;
 - ג. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של X ?
 - ד. מצא את התפלגות Y ; $\{E(X)=2.5635, \sigma(X)=0.5117\}$
 - ה. מהם השכיחים של X ושל Y ? $\{P(0)=0.0397, P(1)=0.3175, P(2)=0.4762, P(3)=0.1587, P(4)=0.0079\}$
 - ו. האם המאורעות $A=\{X=1\}$ ו $B=\{Y=3\}$ הם מאורעות בלתי תלויים? $\{Mode(X)=3, Mode(Y)=2\}$
3. בכד יש 10 כדורים ממוספרים מ 1 ועד 10, מן הכד מוציאים באקראי חמישה כדורים. נגדיר משתנה מקרי X : "המספר המקסימלי מבין מספרי הכדורים שהוצאו".
 - א. מהי פונקציית ההתפלגות המצטברת של X ? גזור ממנה את פונקציית ההסתברות של X ;
 - ב. כאשר ההוצאה נעשית עם החזרה;
 - א. כאשר ההוצאה נעשית ללא החזרה.
4. במפעל התקבל משלוח של 100 פריטים שחלקם עלול להיות פגומים, כדי להחליט מה לעשות עם המשלוח: לקבל אותו למחסן המפעל או להחזירו ליצרן, נוקטים במדיניות הבאה:
 - בוחרים חמישה פריטים באקראי ובודקים אותם: אם יש יותר מפריט אחד פגום במדגם זה מחזירים את כל המשלוח ליצרן, ואחרת מאשרים את קבלתו למחסן.
 - א. אם בתהליך הייצור של הפריטים כל פריט הוא תקין בהסתברות 0.8, ללא תלות במצבם של יתר הפריטים, מהי ההסתברות לכך שחבילה של 100 פריטים תהיה חבילה "גרועה" כלומר שיהיו בה לפחות 20 פריטים פגומים?
 - ב. אם מתקבל משלוח "גרוע" שבו 30 פריטים פגומים – מה ההסתברות שהוא יאושר ויתקבל למחסן? (הסתברות זו נקראת "סיכון הצרכן"). $\{0.5261\}$
 - ג. אם מתקבל משלוח "טוב" שבו רק 5 פריטים פגומים – מה ההסתברות שהוא יוחזר ליצרן? (הסתברות זו נקראת "סיכון היצרן"). $\{0.019\}$
5. $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, הוכח כי $E[X]=\text{Var}[X]=\lambda$.
6. יהי X משתנה מקרי, המקבל ערכים מ 5 ועד 120 בקפיצות של 2.5, בהסתברויות שוות.
 - א. מהי ההסתברות לכך ש X יקבל ערך גדול מ 14? $\{0.915\}$
 - ב. מהי התוחלת ומהי השונות של X ? $\{E[X]=62.5, \text{Var}[X]=1150\}$

7. הערכה מקובלת היא כי בלידת ילדים ההסתברות לילוד זכר שווה להסתברות לילוד נקבה, וכן כי מינם של ילודים שונים (ואפילו לאותם הורים) הם בלתי תלויים זה בזה. יהי X מספר הילדים שיהיו לזוג הורים שהחליטו להמשיך ולהוליד ילדים עד שיהיה להם לפחות ילד אחד מכל מין,
- מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 - מהי התוחלת ומהי השונות של X ?
- $\{E[X]=3, \text{Var}\{X\}=2\}$
- בתרבויות מסוימות מקובל להוליד ילדים עד לבן הראשון, ואז להפסיק,
- מהי תוחלת מספר הבנים במשפחה כזו, ומהי תוחלת מספר הבנות במשפחה כזו? $\{\text{שניהם}=1\}$
8. מספר האנשים הנכנסים לבנק בכל דקה הוא מ"מ בעל התפלגות פואסון עם תוחלת של 0.5 (אנשים), מקובל גם להניח כי אין תלות בין מספר הנכנסים לבנק בדקות שונות;
- מהי ההסתברות לכך שבין 10:00 ל 10:01 לא יכנס לבנק אף אחד? בדיוק אדם אחד? לפחות שלושה אנשים?
 - מהי ההסתברות לכך שאף אדם לא ייכנס בין 12:00 ל 12:02? שבדיוק שני אנשים ייכנסו בזמן זה?
- השווה את ההסתברות שהתקבלה להסתברות שתחושב בהנחה שמספר האנשים הנכנסים בפרק זמן של 2 דקות הוא פואסוני עם תוחלת כפולה.
- $\{P(0)=0.3679, P(2)=0.1839\}$
9. לפניך המספרים (1, 3, 5, 7, 9). נגדיר:
- X – תוצאה של בחירת מספר אחד מהמספרים באופן מקרי.
 - Y – ממוצע התוצאות בבחירת 2 מספרים באופן מקרי עם החזרה.
 - Z – ממוצע התוצאות בבחירת 2 מספרים באופן מקרי ללא החזרה.
- רשום את פונקציית ההתפלגות של X , של Y ושל Z .
 - חשב את התוחלת ואת השונות של המשתנים האמורים $\{E[X]=E[Y]=E[Z]=5, \text{Var}\{X\}=8; \text{Var}\{Y\}=4; \text{Var}\{Z\}=3\}$
 - מצא את התפלגות $W=1/X$, חשב את $E(W)$ והשווה ל $1/E(X)$.
- $\{E[1/X]=0.3575\}$
10. מכשיר אלקטרוני בנוי מ 4 רכיבים שמתוכם 2 תקינים ו 2 פגומים. טכנאי בודק את הרכיבים, אחד אחרי השני, ללא החזרה, עד שהוא מגלה את שני הרכיבים הפגומים. נגדיר את X כמספר הרכיבים שנבדקים עד שמתגלים שני הפגומים (ועד בכלל).
- מצא את פונקציית ההתפלגות של X .
 - חשב את התוחלת והשונות של X .
- $\{P(2)=0.1667, P(3)=0.3333, P(4)=0.5\}$
 $\{E[X]=3.333, \text{Var}\{X\}=0.5556\}$
11. לטיול יצאו שלושה אוטובוסים, באוטובוס מס' 1 יש 60 מטיילים, באוטובוס מס' 2 יש 30 מטיילים, ובאוטובוס השלישי יש 10 מטיילים.
- בחרים אוטובוס באקראי, ויהי X מספר המטיילים באוטובוס הנבחר, מהי התפלגות X ומהי תוחלתו?
 - בחרים מטייל באקראי מתוך כלל המטיילים, ויהי Y מספר המטיילים באוטובוס בו נמצא המטייל הנבחר, מהי התפלגות Y ומהי תוחלתו?
- $\{E[X]=33.33; E\{Y\}=46\}$
12. משתתפים בחידון מקבלים שתי שאלות, שאלה אחת נבחרת ממאגר שאלות קשות ועל סמך ניסיון העבר ההסתברות לענות עליה תשובה נכונה היא 0.4, ואם עונים עליה תשובה נכונה מקבלים פרס של 500 ₪, השאלה השנייה נבחרת ממאגר שאלות קלות יחסית, ההסתברות לענות עליה תשובה נכונה היא 0.8, ואם עונים תשובה נכונה מקבלים פרס של 100 ₪. המשתתף צריך לבחור את הסדר בו ישאלו השאלות, כאשר הוא נכשל הוא מפסיק את ההשתתפות בחידון והוא מקבל את הפרסים אותם צבר עד לאותו רגע.
- מהו הסדר בו יעדיף להישאל אם מטרתו להביא למקסימום את תוחלת רווחיו?
- $\{\text{להתחיל בקלה, תוחלת 240}\}$

13. במכון רנטגן ההסתברות שצילום יצליח היא 0.6. אדם המגיע למכון לצורך צילום ממשיך להצטלם עד שהצילום מצליח.

- א. מה ההסתברות שאדם המגיע לצילום יצטלם 4 צילומים?
- ב. מה ההסתברות שיצטלם יותר מ-2 צילומים?
- ג. הצילום הראשון לא הצליח. מה ההסתברות שבסך הכל יצטלם 3 צילומים?
- ד. לסדרת צילומים יש עלות קבועה של 15 ₪ לאדם. בנוסף, כל צילום עולה 5 ₪. מהי העלות הממוצעת לאדם עד לקבלת צילום מוצלח?

14. מספר החלקיקים הנפלטים בשניה מחומר בעל רדיואקטיביות חלשה הוא משתנה מקרי בעל התפלגות פואסונית עם תוחלת של 0.5 חלקיקים.

חשב את ההסתברויות לכך שיפלטו:

- א. שני חלקיקים בשניה אחת.
 - ב. לכל היותר שני חלקיקים בשניה אחת.
 - ג. חמישה חלקיקים במשך שתי שניות.
15. כד מכיל 10 כדורים לבנים ו-20 כדורים אדומים. מוציאים 5 כדורים, עם החזרה.

- א. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק שלושה כדורים לבנים?
- ב. מה ההסתברות שהוצאו יותר משלושה כדורים לבנים?
- ג. מה ההסתברות שכולם אדומים?
- ד. מה תוחלת מספר הכדורים האדומים שהוצאו?
- ה. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 4 כדורים אדומים אם ידוע שהוצא לפחות כדור אדום אחד?
- ו. כעת מוציאים 5 כדורים ללא החזרה, חזרו על סעיפים א-ה.

16. בכד יש 3 כדורים לבנים, 2 כדורים אדומים, וכדורים שחור אחד. מן הכד מוציאים באקראי וללא החזרה כדורים בזה אחר זה עד אשר הוצא כדור לבן. יהי Y מספר הכדורים האדומים שהוצאו בניסוי.

- א. מצא את פונקציית ההסתברות של Y ;
- ב. מצא וצייר את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y ;
- ג. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של Y ?