

応用 2 : 不完備市場モデルの数値計算

経済産業研究所
東京大学経済学研究科
北尾 早霧

2021年5月15日

不完備市場モデルの数値計算

- 完備市場 (Complete market)
- 不完備市場 (Incomplete market)
 - ⊕ 一般均衡 (General equilibrium)
 - ⊕ 世代重複型モデル (Overlapping generations model)
 - ⊕ 移行過程 (Transition dynamics)

不完備市場

- 完備市場

- 状態条件付き資産 (state-contingent asset) を取引する市場が存在

- 不完備市場：ビューリーモデル

- 家計は固有の所得ショック＋借入制約に直面
- 状態条件付き資産は存在しないが、リスクのない資産は取引可

→ 予備的貯蓄が生じ、マクロ変数も変化

完備市場：家計・企業・一般均衡

- 完備市場のベルマン方程式

$$V(a) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta V(a')\}$$

subject to

$$c + a' = (1 + r)a + w$$

$$a' \geq -b$$

- 最適化条件

$$u'(c) = \beta(1 + r)u'(c')$$

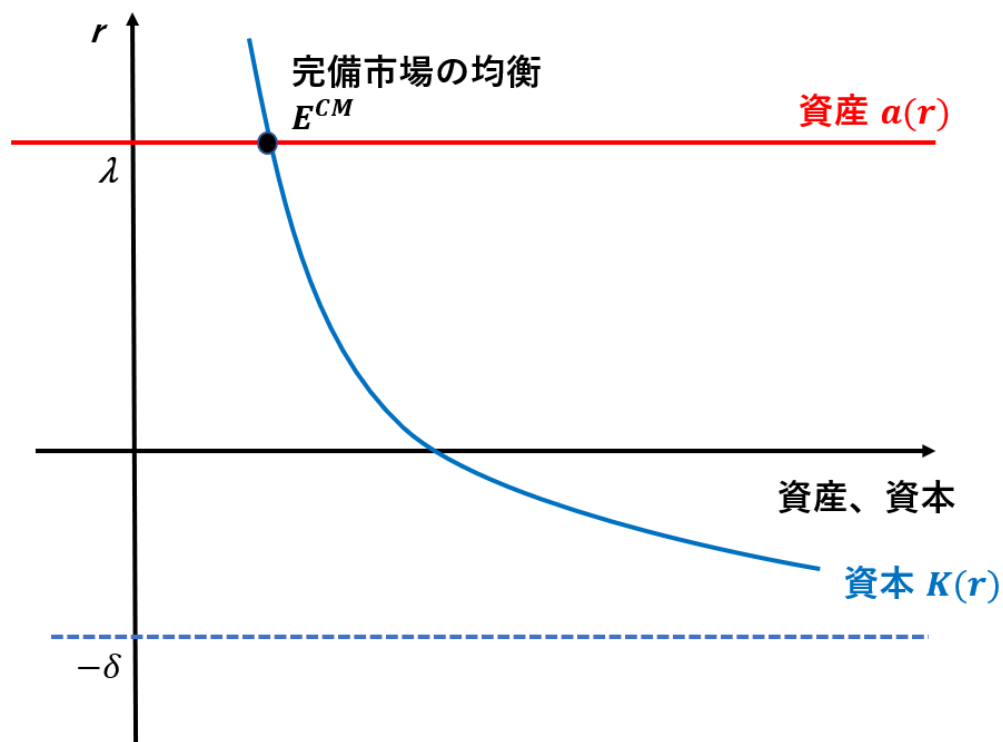
$$r = \frac{1}{\beta} - 1 \equiv \lambda$$

- 企業の利潤最大化

$$r = F_K(K, L) - \delta$$

$$w = F_L(K, L)$$

完備市場：一般均衡



不完備市場

- 不完備市場のベルマン方程式：マルコフ賃金ショック $l \rightarrow l'$

$$V(a, l) = \max_{c, a'} \{u(c) + \beta \mathbb{E} V(a', l')\}$$

s.t.

$$c + a' = (1 + r)a + wl$$

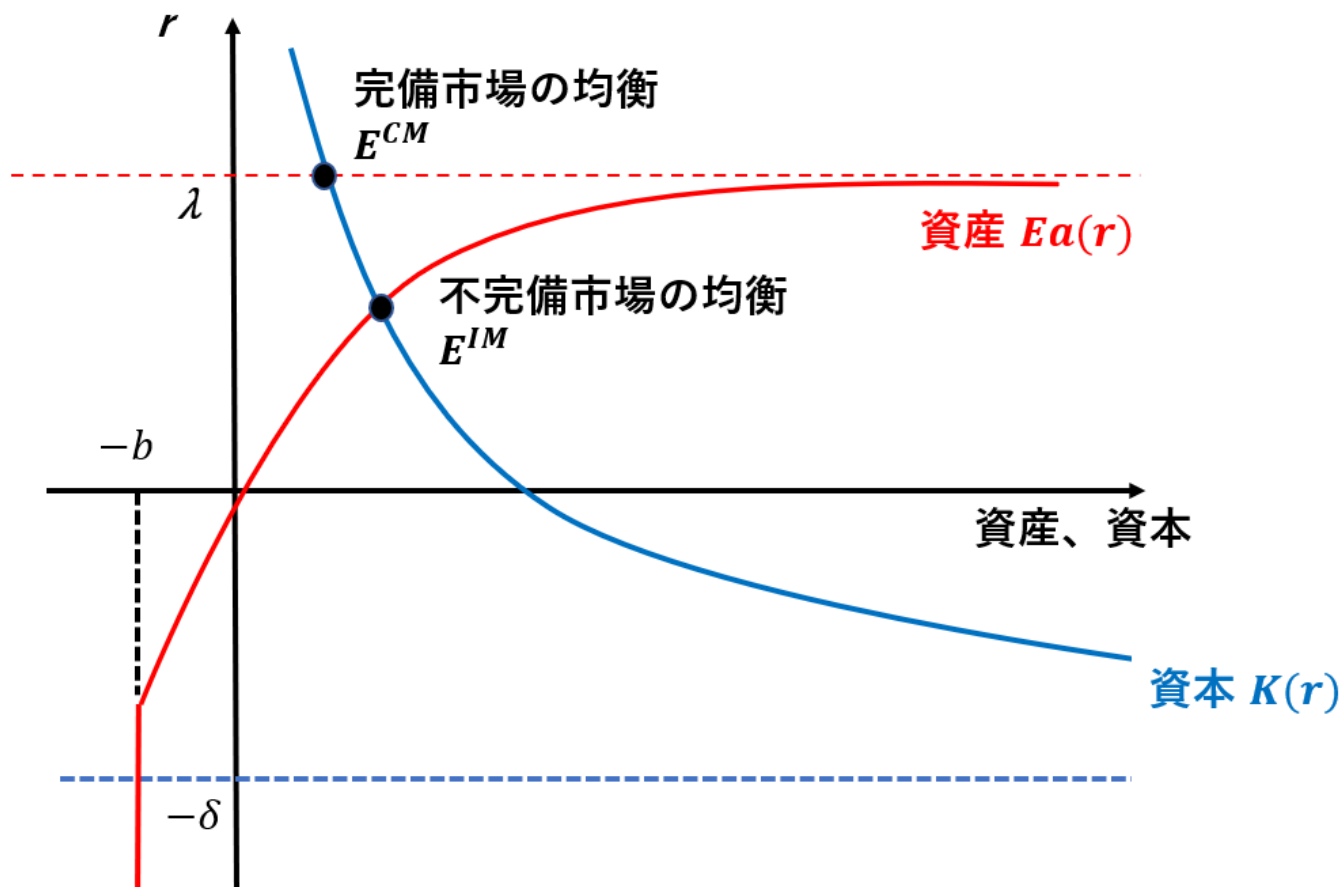
$$a' \geq -b$$

- 最適化条件

$$u'(c) \geq \beta(1 + r) \mathbb{E} u'(c')$$

- 企業の利潤最大化：完備市場と同じ

不完備市場：一般均衡



一般均衡計算のアルゴリズム

1. 初期セットアップ

労働生産性を N_l 個のグリッドに離散化 (e.g. Tauchen's method) $l \rightarrow l'$ の遷移確率を求める。
総労働供給 L を計算する。個人の資産について、状態空間を N_a 個のグリッドに区切る。

2. マクロ変数の初期値設定

金利水準 r_0 を当て推量する。 r_0 における企業の資本需要 K_0 を $r_0 = F_K(K_0, L)$ から求める。
 K_0 に基づく賃金 $w_0 = F_L(K_0, L)$ を計算。

3. 個人の「政策」関数を導出

価値関数反復法 (Value function iteration) や、政策関数を直接的に求める時間反復法 (Time iteration) などを用いて、各状態変数 (a, l) における政策関数 $a' = g(a, l)$ を求める。

4. 定常分布の導出

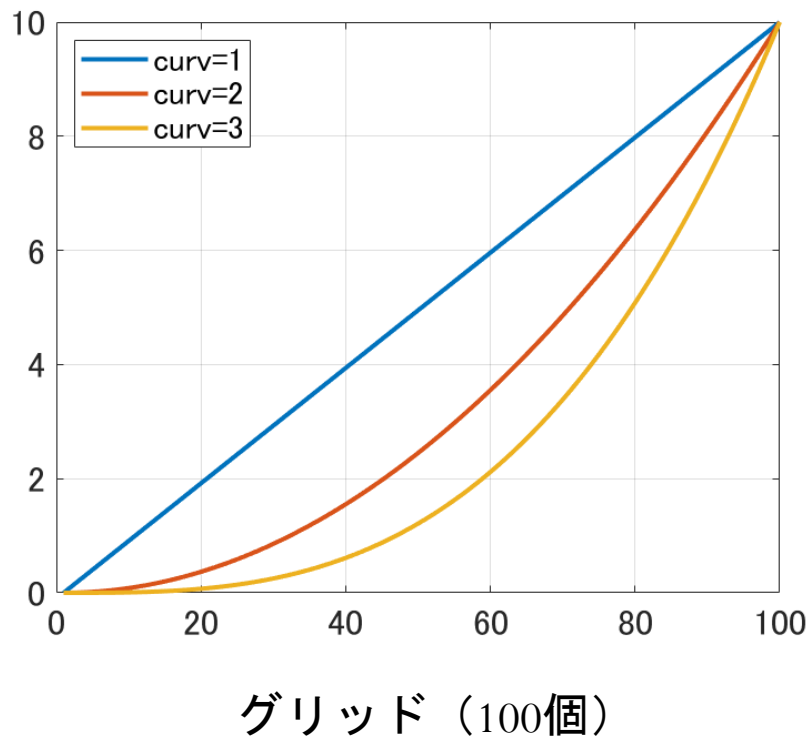
状態変数 (a, l) 空間 の分布を求め、総資産 (資本供給) A_0 を計算。

5. 均衡条件の確認

$|A_0 - K_0| < \varepsilon$ (収束基準) でストップ。 $> \varepsilon$ ならば r_0 を調整してステップ2に戻る。

一般均衡計算のアルゴリズム

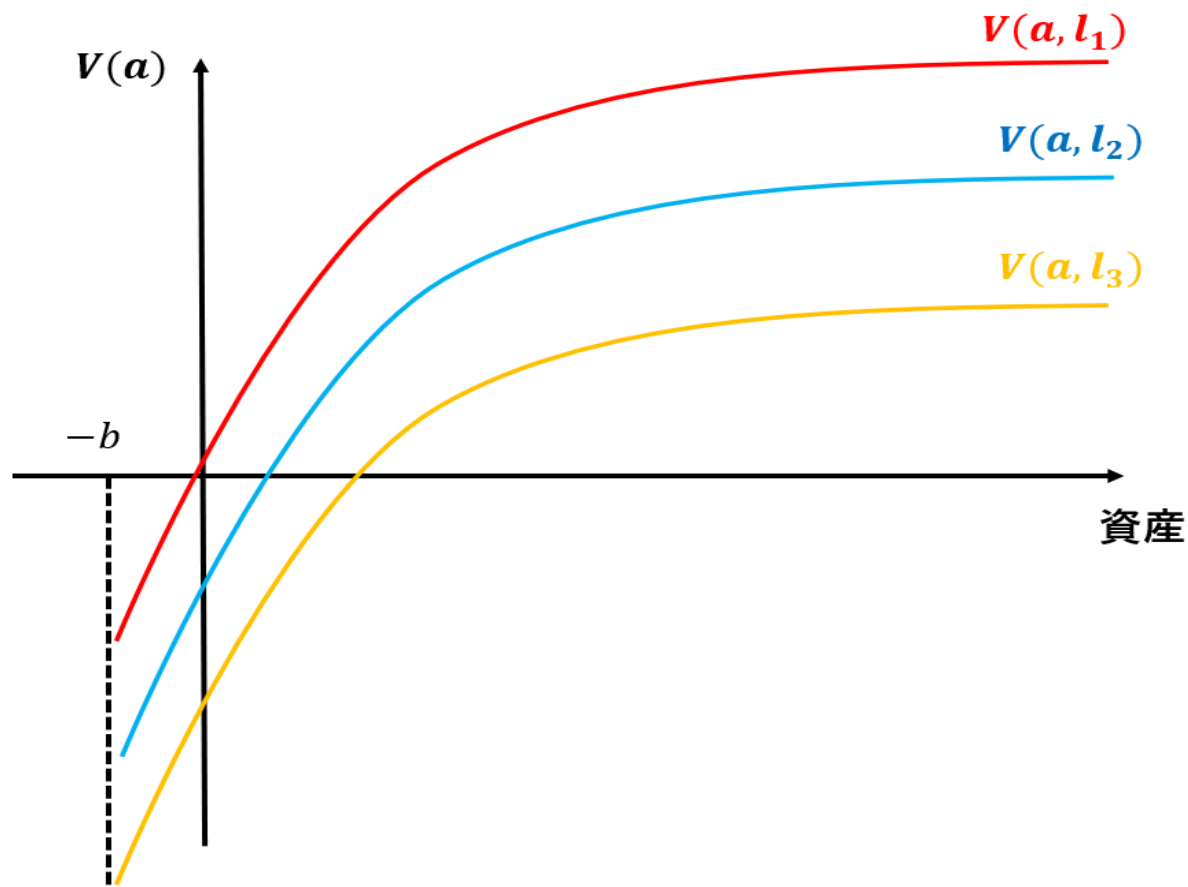
資産=[0, 10]



```
N=100  
maxA=10  
for i=1:100  
    grid(i)=maxA*((i-1)/(N-1))^curv  
end
```

※ r_0 の代わりに K_0 を当て推量してもOK

一般均衡計算のアルゴリズム



不完備市場＋世代重複型モデル

$$V(a, l, j) = \max_{c, a'} \{ u(c) + \beta s_j \mathbb{E} V(a', l', j+1) \}$$

subject to

$$c + a' \leq \begin{cases} (1+r)a + (1-\tau)w\theta_j l + b, & \text{for } j = 1, \dots, j^R - 1 \\ (1+r)a + p + b, & \text{for } j = j^R, \dots, J \end{cases}$$

$$a' \geq \begin{cases} -\underline{a} & \text{if } j < J \\ 0 & \text{if } j = J \end{cases}$$

不完備市場＋世代重複型モデル 均衡計算のアルゴリズム

- 初期セットアップ、マクロ変数の計算、均衡条件の確認は無限期間モデルと同じ
- 個人の政策関数：後ろ向き帰納法（backward induction）
 - ライフサイクル最終期（ $j = J$ ）の価値関数は $V(a, l, J) = u(c_j) = u[a(1 + r) + p + b]$
 - 計算済の $V(a, l, J)$ をもとに一期前 $J - 1$ 歳時における政策関数 $a' = g(j, a, l)$ を解く & 繰り返し
 - 無限期間モデルにおける反復計算は不要
- 定常分布の導出
 - $j = 1$ 歳時の所与の分布からスタートし、政策関数 $a' = g(j, a, l)$ に基づき各年齢の分布を計算
 - 反復計算は不要

移行過程 (Transition Dynamics)

- 例：消費税10%→15%にして所得税を下げる
- 例：年金の受給開始年齢を65歳から67歳にする
- 二つの定常状態を計算・比較
 - 長期的な政策の良し悪し
- 移行過程を計算・初期定常状態と比較
 - 増税に直面する家計はどう反応する？
 - 誰が損して誰が得する？
 - 世代間の厚生はどう変わる？

移行過程の計算アルゴリズム

1. 初期および最終定常状態を求める
2. 移行過程 $t = 1, \dots, N$ における総資本 $\{K_t\}_{t=1}^N$ を当て推量する。
ただし、 K_1 および K_N は定常状態の値とする。
均衡条件から $r_t = F_{K,t} - \delta$ 、 $w_t = F_{L,t}$ を計算
3. 最終T期からの「後ろ向き」計算で、各期における政策関数 $a' = g_t(j, a, l)$ を導出する
4. 初期定常状態の分布を $t = 1$ 期の分布とし、計算した政策関数を基に $t = 2, \dots, N$ 期の分布を計算する
5. 各期の分布を基に、各期の総資産 $\{A_t\}_{t=1}^N$ を計算する。当て推量した総資本と一致するか確認。 $\max_t |A_t - K_t| < \varepsilon$ ならばストップ。そうでなければ $\{K_t\}_{t=1}^N$ を調整してステップ2に戻る

様々な不完備市場

- “Happy families are all alike; every unhappy family is unhappy in its own way.”
- 固有なショックの源泉
 - 所得：生産性、失業、資本所得（貯蓄・ビジネス）、遺産・・・
 - 支出：医療費、介護費用、障害、出産・育児・・・
 - その他：健康、婚姻、死亡、自己破産・・・
- 保険へのアクセス
 - 予備的貯蓄
 - 政府による保険：失業保険、年金、医療保険・・・
 - 民間保険市場：がん保険、自動車保険、学資保険・・・
- 資本市場へのアクセス
 - 外生的借入制約
 - 内生的借入制約

Fukai, Ichimura, Kitao, Mikoshiba (2021)

- 医療費リスクを世代重複型モデルに組み込み、ライフサイクル貯蓄・消費に与える影響、保険制度（医療保険・生活保護等）の役割を分析
 - 性別、労働生産性、婚姻状況など、保険効果を分析する上で数量的に重要（quantitatively important）となる異質性を考慮
 - 高齢期の貯蓄パターンを捉えるために遺産動機も考慮
- 婚姻状況ごとに状態変数が変わるので、ベルマン方程式に複数のタイプの価値関数を導入

ベルマン方程式（独身）

$$\begin{aligned} S(j, g, s, a, \mathbf{h}) = & \max_{c, a'} \{ u(c/\eta) + \beta [\pi_{j,g,\mathbf{h}}(1 - \xi_{j,g}) E S(j+1, g, s, a', \mathbf{h}') \\ & + \pi_{j,g,\mathbf{h}} \xi_{j,g} E M(j+1, s_m, s_f, a' + \tilde{a}, \mathbf{h}'_m, \mathbf{h}'_f)] \\ & + (1 - \pi_{j,g,\mathbf{h}}) \chi(a') \} \end{aligned}$$

様々な不完備市場

- 経済セミナー連載『定量的マクロ経済学と数値計算』
(2018–2020) や quantecon.org など基本をおさえる
 - Heer and Maussner (2009) などの「実用的」参考書もお勧め
- お気に入りの論文のコードを熟読
 - Review of Economic Dynamics, Quantitative Economics など