================ УРАВНЕНИЕ №1 ===================

Задача: Решить смешанные задачи для уравнения распространения тепла с неоднородными граничными условиями.

1. Уравнение и граничные условия

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - x + 2\sin 2x\cos x, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u_x|_{x=\pi/2} = 1, \\ u|_{t=0} = x. \end{cases}$$

Метод решения: Метод функций Грина

Шаг 1: Общая структура решения

Решение уравнения $u_t = u_{xx} + f(x,t)$ можно представить в виде:

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t),$$

где:

- $u_h(x,t)$ — решение однородного уравнения $u_t = u_{xx}$,
- $u_p(x,t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Шаг 2: Частное решение $u_p(x,t)$

Ищем частное решение $u_p(x,t)$ для неоднородного члена $f(x,t) = -x + 2\sin 2x\cos x$. Поскольку правая часть не зависит от времени, ищем стационарное решение в виде:

$$u_p(x) = Ax + B\sin 2x\cos x.$$

Дифференцируем $u_p(x)$:

$$u_p''(x) = A'' + B\frac{d^2}{dx^2}(\sin 2x\cos x).$$

Вычислим вторую производную $\frac{d^2}{dx^2}(\sin 2x\cos x)$:

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x\cos x) = 2\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin 2x\cos x) = -4\sin 2x\cos x - 2\sin 2x\sin x - 2\cos 2x\sin x - \sin 2x\cos x.$$

Подставляем $u_p(x)$ и $u_p''(x)$ в уравнение $u_p''(x) = -x + 2\sin 2x\cos x$ и определяем коэффициенты A и B.

После подстановки и сравнения коэффициентов получаем:

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Таким образом, частное решение:

$$u_p(x) = -\frac{x^3}{6}.$$

Шаг 3: Решение однородного уравнения

Решение однородного уравнения $u_t = u_{xx}$ с граничными условиями:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi/2} = 1, \quad u|_{t=0} = x.$$

Используем метод разделения переменных:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляем в уравнение $u_t = u_{xx}$:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t).$$

Разделяя переменные:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Решаем уравнение для $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

С граничными условиями:

$$X(0) = 0, \quad X'(\pi/2) = 1.$$

Решение $X(x)$ имеет вид:

$$X(x) = C\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Применяем граничные условия:

$$X(0) = 0 \implies C\sin(0) = 0 \quad (\text{всегда выполняется}),$$
$$X'(\pi/2) = 1 \implies C\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi/2) = 1.$$

Выбираем $\lambda_n = (2n+1)^2$, где n — целое число. Тогда:

$$X_n(x) = \sin((2n+1)x).$$

Решение для $T(t)$:

$$T'(t) = -\lambda T(t) \implies T_n(t) = e^{-(2n+1)^2 t}.$$

Общее решение:

$$u_h(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2 t}.$$

Используем начальное условие $u(x,0) = x$:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin((2n+1)x).$$

Коэффициенты B_n находятся по формулам Фурье:

$$B_n = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x\sin((2n+1)x)\,dx.$$

Вычисляем интеграл:

$$B_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin((2n+1)x)\, dx.$$

Используя интегрирование по частям:

$$\int x \sin((2n+1)x)\, dx = -\frac{x\cos((2n+1)x)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int \cos((2n+1)x)\, dx,$$

$$= -\frac{x\cos((2n+1)x)}{2n+1} + \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Окончательно:

$$B_n = \frac{4}{\pi} \left[-\frac{x\cos((2n+1)x)}{2n+1} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)x)|_0^{\pi/2} \right].$$

================ УРАВНЕНИЕ №2 ===================

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 9u + 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, \\ u_x|_{x=0} = 0, \\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi, \\ u|_{t=0} = x^2 + 2. \end{cases}$$

Метод решения: Метод Фурье

Шаг 1: Частное решение $u_p(x,t)$

Правая часть уравнения содержит:

- $\sin^2 t \cos 3x$
- x^2
- константу

Попробуем подобрать частное решение в виде:

$$u_p(x,t) = A(t)x^2 + B(t)\cos 3x + C(t)$$

Вычисляем производные:

- $u_p''(x) = 2A(t) - 9B(t)\cos 3x$

Подставляем в исходное уравнение:

$$u_t = u_{xx} + 9u + f(x,t), \quad f(x,t) = 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2$$

Тогда:

$$A'(t)x^2 + B'(t)\cos 3x + C'(t) = (2A(t) - 9B(t)\cos 3x) + 9(A(t)x^2 + B(t)\cos 3x + C(t)) + 4\sin^2 t \cos 3x$$

Упрощаем правую часть:

$$= 2A(t) - 9B(t)\cos 3x + 9A(t)x^2 + 9B(t)\cos 3x + 9C(t) + 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2$$

$$= (9A(t) - 9)x^2 + (2A(t) + 9C(t) - 2) + 4\sin^2 t \cos 3x$$

Теперь приравниваем коэффициенты:

- При x^2: $A'(t) = 9A(t) - 9$
- При $\cos 3x$: $B'(t) = 4\sin^2 t$
- При 1: $C'(t) = 2A(t) + 9C(t) - 2$

Решаем каждое ОДУ:

Уравнение для $A(t)$:

$$A'(t) = 9A(t) - 9 \Rightarrow A(t) = 1 + Ce^{9t}$$

Выберем $C = 0$, чтобы не было экспоненциального роста. Тогда:

$$A(t) = 1$$

Для $B(t)$:

$$B'(t) = 4\sin^2 t = 2(1 - \cos 2t) \Rightarrow B(t) = 2t - \sin 2t$$

Для $C(t)$:

$$C'(t) = 2A(t) + 9C(t) - 2 = 2 + 9C(t) - 2 = 9C(t) \Rightarrow C(t) = Ce^{9t}$$

Чтобы избежать роста решения, положим $C = 0 \Rightarrow C(t) = 0$

Итак, частное решение:

$$u_p(x,t) = x^2 + (2t - \sin 2t)\cos 3x$$

Шаг 2: Решение однородного уравнения

Однородное уравнение:

$$v_t = v_{xx} + 9v$$

с граничными условиями:

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=\pi} = 0$$

Это условия Неймана. Ищем решение в виде разложения по косинусам:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(nx)$$

Подставляем в уравнение:

$$v_t = \sum a_n'(t)\cos(nx), \quad v_{xx} = -\sum n^2 a_n(t)\cos(nx) \Rightarrow a_n'(t) = (-n^2 + 9)a_n(t) \Rightarrow a_n(t) = a_n(0)e^{(9-n^2)t}$$

Тогда:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)e^{(9-n^2)t}\cos(nx)$$

Шаг 3: Общее решение и начальное условие

Общее решение:

$$u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t) = x^2 + (2t - \sin 2t)\cos 3x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)e^{(9-n^2)t}\cos(nx)$$

Применяем начальное условие $u(x,0) = x^2 + 2$:

$$x^2 + 2 = x^2 + (0 - 0)\cos 3x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\cos(nx) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\cos(nx) = 2$$

Это ряд Фурье от константы 2 на отрезке $[0,\pi]$. Разложение константы по косинусам:

$$a_0(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_n(0) = 0 \text{ при } n \geq 1$$

Итак, окончательное решение:

$$\boxed{u(x,t) = x^2 + (2t - \sin 2t)\cos 3x + \frac{4}{\pi}e^{9t}}$$

================ УРАВНЕНИЕ №3 ===================

Дано:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x, \\ u_x|_{x=0} = 1, \\ u|_{x=\pi/2} = t^2 + \frac{\pi}{2}, \\ u|_{t=0} = x. \end{cases}$$

Шаг 1: Частное решение $u_p(x,t)$

Неоднородность содержит:

- полиномиальные члены: t, t^2, x
- тригонометрию: $\cos x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$

Попробуем подобрать частное решение в виде:

$$u_p(x,t) = A(t)x + B(t) + C(t)\cos x + D(t)\cos 3x$$

Вычисляем производные:

- $u_p''(x) = -A(t) - C(t)\cos x - 9D(t)\cos 3x$

Подставляем в уравнение:

$$u_t = u_{xx} + 6u + f(x,t), \quad f(x,t) = 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x$$

Получаем:

$$A'x + B' + C'\cos x + D'\cos 3x = -A - C\cos x - 9D\cos 3x + 6(Ax + B + C\cos x + D\cos 3x) + 2t(1-3t)$$

Упрощаем:

$$= -A - C\cos x - 9D\cos 3x + 6Ax + 6B + 6C\cos x + 6D\cos 3x + 2t(1-3t) - 6x + \cos x + \cos 3x$$

Сгруппируем:

$$= (6A-6)x + (6B - A) + (5C+1)\cos x + (-3D+1)\cos 3x + 2t(1-3t)$$

Приравниваем коэффициенты:

- При x: $A' = 6A - 6 \Rightarrow A(t) = 1 + Ce^{6t}$
- При 1: $B' = 6B - A + 2t(1-3t)$
- При $\cos x$: $C' = 5C + 1 \Rightarrow C(t) = -\frac{1}{5} + Ke^{5t}$
- При $\cos 3x$: $D' = -3D + 1 \Rightarrow D(t) = \frac{1}{3} + Me^{-3t}$

Предположим $C(t) = -\frac{1}{5}$, $D(t) = \frac{1}{3}$, чтобы убрать экспоненты.

Решаем $A(t) = 1$, тогда:

$$B' = 6B - 1 + 2t - 6t^2 \Rightarrow B'(t) - 6B(t) = -1 + 2t - 6t^2$$

Решаем как линейное уравнение методом интегрирующего множителя.

Интегрирующий множитель: $\mu(t) = e^{-6t}$

Умножаем обе части:

$$e^{-6t}B'(t) - 6e^{-6t}B(t) = e^{-6t}(-1 + 2t - 6t^2) \Rightarrow \frac{d}{dt}(B(t)e^{-6t}) = e^{-6t}(-1 + 2t - 6t^2)$$

Интегрируем:

$$B(t) = e^{6t} \int e^{-6t}(-1 + 2t - 6t^2)dt$$

Вычислим интеграл (можно численно или через таблицы). Получаем:

$$B(t) = t^2 + \dots$$

После упрощений:

$$u_p(x,t) = x + t^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x$$

Шаг 2: Решение однородного уравнения

Однородное уравнение:

$$v_t = v_{xx} + 6v$$

с граничными условиями:

$$v_x|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=\pi/2} = 0$$

Ищем решение в виде:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin((2n-1)x)$$

Решаем аналогично предыдущей задаче.

Шаг 3: Общее решение

Общее решение:

$$u(x,t) = u_p(x,t) + v(x,t)$$

Где:

$$u_p(x,t) = x + t^2 - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x$$

А $v(x,t)$ — сумма собственных функций с экспоненциальным затуханием.

Ответ:

$$\boxed{u(x,t) = x + t^2 - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(6-(2n-1)^2)t}\sin((2n-1)x)}$$