CAPÍTULO 10

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Reseña HISTÓRICA

Matemático francés, Cauchy fue pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Gracias a Cauchy el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual, toma el concepto de límite como punto de partida del análisis y elimina de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos ahora otorgan rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que queda eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangente.

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Constante de integración

Dada la integral indefinida $\int f'(x)\,dx = F(x) + C$, representa la familia de funciones de $F(x)$ donde C recibe el nombre de constante de integración.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la función cuya derivada sea e^{2x}

Solución

La derivada de la función que se busca es:

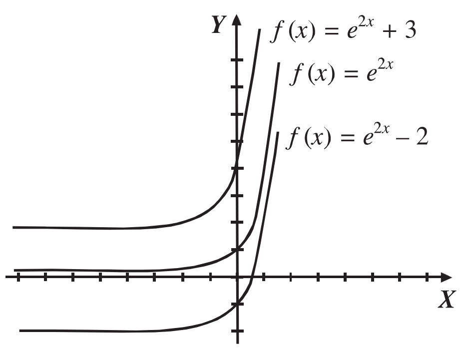
$$f'(x) = e^{2x}$$

Se integra $f'(x)$ para obtener $f(x)$

$$f(x) = \int e^{2x}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Si $C = -2, 0, 2$ se obtiene una famila de curvas para $f(x)$,



Finalmente, la función que se busca es: $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

2 Determina la ecuación de la curva, cuya pendiente de la recta tangente en el punto (4, 5) es $y' = \sqrt{2x+1}$

Solución

Se integra $y' = \sqrt{2x+1}$

$$y = \int \sqrt{2x+1}\,dx \quad \rightarrow \quad y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (4, 5) se obtiene el valor de C,

$$5 = \frac{(2(4)+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad \rightarrow \quad 5 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -4$$

De acuerdo con el resultado anterior, la ecuación de la curva es:

$$y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4$$

3 Encuentra la ecuación de la curva cuya pendiente de la recta tangente en el punto (3, 1) es igual a $2xy$

Solución

La derivada es implícita, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Ahora, se agrupan las variables,

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

Se integra la expresión y se obtiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \quad \rightarrow \quad \ln y = x^2 + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (3, 1), se encuentra el valor de la constante de integración,

$$\ln 1 = 3^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -9$$

Por consiguiente, la ecuación de la curva es:

$$\ln y = x^2 - 9 \quad \rightarrow \quad y = e^{x^2 - 9}$$

4 Una motocicleta viaja a razón de $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y acelera a un ritmo de $(3t - 5)\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Determina la velocidad a la que viaja la motocicleta al transcurrir 4 segundos.

Solución

La aceleración se define como $\frac{dv}{dt} = a$, entonces, $dv = a\,dt$

Integrando esta expresión, se obtiene la velocidad v

$$\int dv = \int (3t - 5)\,dt \quad \rightarrow \quad v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + C$$

Para un tiempo inicial $t = 0$, la velocidad de la motocicleta es $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, estos datos se sustituyen en la función para obtener el valor de C.

$$10 = \frac{3}{2}(0)^2 - 5(0) + C \quad \text{donde} \quad C = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por consiguiente, $v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + 10$, luego, la velocidad de la motocicleta al cabo de 4 segundos es:

$$v = \frac{3}{2}(4)^2 - 5(4) + 10 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

EJERCICIO 20

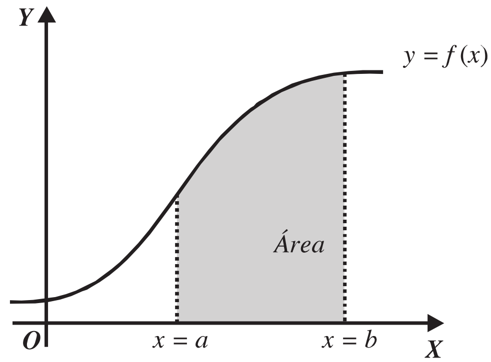
1. La pendiente de la recta tangente a una curva es $x + 3$. Obtén la ecuación de la curva si pasa por el punto (2, 4)
2. La derivada de una función está dada como $f'(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$. Encuentra $f(x)$ si ésta contiene al punto de coordenadas $(2\pi, 1)$
3. Una curva pasa por el punto $(3, e^3)$ y su derivada en este punto es igual a xe^x. Determina la ecuación de dicha curva.
4. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\dfrac{2a}{3}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en este punto es $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 9x^2}}{x^2}$
5. Determina la ecuación de la curva, cuya derivada es $\dfrac{dx}{dy} = 3y^2 - 4y$ cuando pasa por el punto $\left(-\dfrac{19}{8}, \dfrac{1}{2}\right)$
6. Obtén la ecuación de la curva que pasa por el punto $(-\ln 4, 1)$ y cuya derivada es $x' = -\dfrac{3y^2 - 12y + 3}{(2-y)^2(y+1)}$
7. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$ y cuya pendiente de la recta tangente en este punto es $y' = x\sqrt{x^2 - 9}$
8. Encuentra la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en dicho punto es $x' = \operatorname{sen}^4 \dfrac{y}{2}$
9. La derivada de una función es $\dfrac{y+3}{2-x}$. Encuentra la función cuando pasa por el punto $(-3, -1)$.
10. La pendiente de la recta tangente a una curva en el punto (0, 4) es $\dfrac{2x^2 y}{x^2 + 1}$. Encuentra la ecuación de la curva.
11. La derivada de una función en el punto $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ es $x^2 \operatorname{sen}^2 y$. Obtén la función.
12. Determina la función del desplazamiento de una partícula que lleva una velocidad constante de 11 m/s y al transcurrir 8 segundos se desplazó 73 m.
13. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba y 3 segundos después su velocidad es de 30.6 $\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcula la velocidad del lanzamiento.
14. Una partícula parte del reposo y se mueve con una aceleración de $(t + 2)\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$, para un tiempo de 4 segundos su velocidad es de 12 $\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Determina la distancia recorrida en este tiempo.
15. En un proceso de enfriamiento, conforme transcurre el tiempo, la rapidez de pérdida de temperatura (T) es el cuádruplo de los t minutos transcurridos. Si al principio del proceso el material tenía una temperatura de 64º C, determina la temperatura al transcurrir t minutos.
16. Desde lo alto de un edificio se deja caer un objeto y tarda 6 segundos en llegar al suelo. Calcula la altura del edificio.
17. Desde la parte más alta de una torre se arroja hacia abajo un cuerpo con una velocidad de $8\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ y tarda 3.2 segundos en tocar al suelo. Calcula la altura de la torre y la velocidad con la que choca el cuerpo contra el suelo.

    Nota: $g = 9.8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integral definida

Representa el área que forma la función $f(x)$ con el eje X en el intervalo $[a, b]$.



Teorema fundamental

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

a = límite inferior
b = límite superior

Cálculo de una integral definida

a) Se integra la diferencial de la función.
b) Se sustituye la variable de la integral que se obtuvo, por los límites superior e inferior, y los resultados se restan para obtener el valor de la integral definida.

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\left[F(b) - F(a)\right]$ donde c es una constante

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ con $c \in [a, b]$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \dfrac{2a^3}{3}$

Solución

Se integra, $\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^a$

se sustituyen los límites

$$= \left[a^2(a) - \frac{a^3}{3}\right] - \left[a^2(0) - \frac{0^3}{3}\right] = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

2 Demuestra que: $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \frac{4}{3}$

Solución

Se integra y se sustituyen los límites,

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\right]_2^6 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3(6)-2} - \frac{2}{3}\sqrt{3(2)-2}\right] = \left[\frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(2)\right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

3 Verifica que la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi-2}{8}$

Solución

Se integra la expresión

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Se sustituyen los límites

$$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2(0)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[0 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(0)\right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi-2}{8}$$

Finalmente tenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi-2}{8}$$

4 Demuestra que: $\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{1}{4}(e^2+1)$

Solución

Se integra por partes,

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e$$

Se sustituyen los límites,

$$\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1^2}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

Por consiguiente,

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

5 Calcula el valor de la integral $\int_0^4 2^{\frac{x}{2}} dx$

Solución

Se integra y se sustituyen los límites:

$$\int_0^4 2^{\frac{x}{2}} dx = \left[\frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2}\right]_0^4 = \left[\frac{2^{\frac{4}{2}+1}}{\ln 2}\right] - \left[\frac{2^{\frac{0}{2}+1}}{\ln 2}\right] = \frac{8}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = \frac{6}{\ln 2}$$

EJERCICIO 21

Determina el valor de las siguientes integrales:

1. $\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx$
2. $\int_{-2}^{2}(x+5)\,dx$
3. $\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x}+3x\right)dx$
4. $\int_{-1}^{2}(x^2-4x+3)dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\operatorname{sen}x\cos x\,dx$
6. $\int_{0}^{\pi}3\operatorname{sen}x\,dx$
7. $\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{x^2-4}$
8. $\int_{e}^{4}\frac{dx}{2x}$
9. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$
10. $\int_{-1}^{2}\frac{x\,dx}{x^2+4}$
11. $\int_{-2}^{3}e^{\frac{x}{2}}dx$
12. $\int_{1}^{5}xe^{x}dx$
13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3 x\operatorname{sen}x\,dx$
14. $\int_{3}^{6}\frac{dx}{x^2-3x+2}$
15. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
16. $\int_{e}^{e^2}\frac{\cos(\ln x)dx}{x}$
17. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
18. $\int_{3}^{5}\frac{(7x-11)dx}{x^2-3x+2}$
19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$
20. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\tan^3(2x)\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área bajo la curva

El área limitada por la curva $y = f(x)$ continua en $[a, b]$, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$, es:

$$\text{Área} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} y\,dx$$

El área limitada por la curva $x = f(y)$ continua en $[c, d]$, el eje Y y las rectas $y = c$, $y = d$, es:

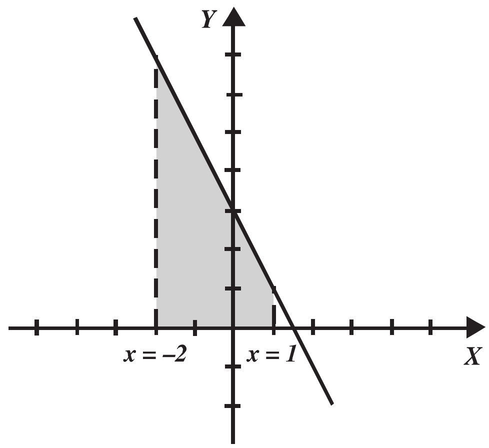
$$\text{Área} = \int_{c}^{d} f(y)\,dy = \int_{c}^{d} x\,dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el área limitada por la recta $y = -2x + 3$ desde $x = -2$ hasta $x = 1$

Solución



$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-2x+3)\,dx = \left[-x^2 + 3x\right]_{-2}^{1}$$

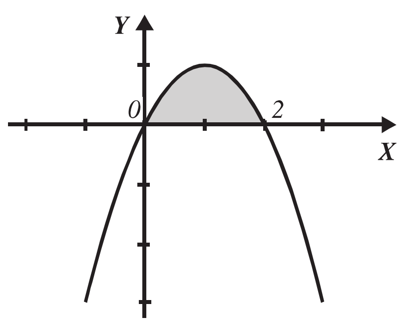
$$= [-(1)^2 + 3(1)] - [-(-2)^2 + 3(-2)]$$

$$= 2 - (-10) = 12u^2$$

2 Encuentra el área comprendida entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje X

Solución

Se buscan los puntos de intersección de la curva con el eje X,



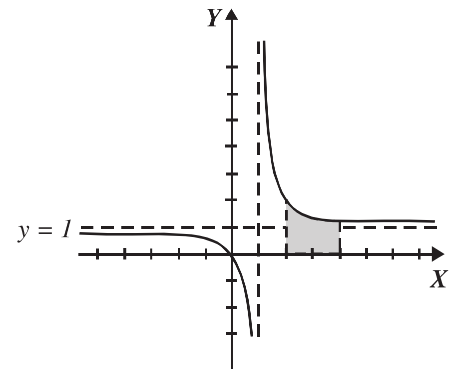
$$2x - x^2 = 0,\ x(2-x) = 0 \quad \text{donde} \quad x = 0,\ x = 2$$

$$\text{Área} = \int_{0}^{2} (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$\text{Área} = \left[(2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$$

3 Determina el área limitada por el eje X, la curva $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y las rectas $x = 2$ y $x = 4$

Solución



$$\text{Área} = \int_2^4 \frac{x}{x-1}\,dx = \left[x + \ln(x-1)\right]_2^4$$

$$= [4 + \ln(4-1)] - [2 + \ln(2-1)]$$

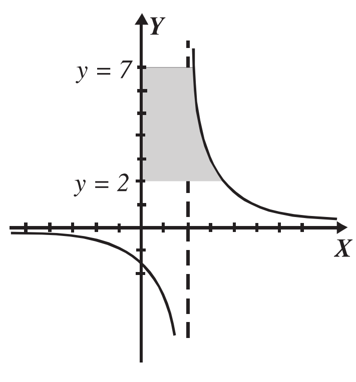
$$= 2 + \ln(3) = 3.098\ u^2$$

4 Calcula el área limitada por la curva $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$, limitada por el eje Y y las rectas $y = 2$, $y = 7$

Solución

Se despeja x de la función y se obtiene

$$x = \frac{3}{y} + 2$$



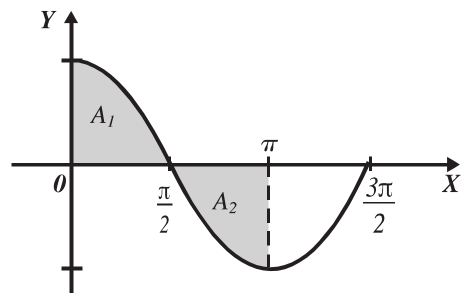
$$\text{Área} = \int_2^7 x\,dy = \int_2^7 \left(\frac{3}{y} + 2\right) dy = \left[3\ln y + 2y\right]_2^7$$

$$= \left(3\ln\left(\frac{7}{2}\right) + 10\right) u^2$$

5 Encuentra el área limitada por el eje X, la función $f(x) = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$

Solución

Se traza la gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Parte del área sombreada queda por debajo del eje X, así que se multiplica por -1

$$\text{Área}_T = A_1 - A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx$$

$$= [\text{sen}\, x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\text{sen}\, x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\text{sen}\frac{\pi}{2} - \text{sen}\, 0\right] - \left[\text{sen}\, \pi - \text{sen}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 1 - [-1] = 1 + 1 = 2u^2$$

EJERCICIO 22

Determina las áreas comprendidas entre las curvas y las rectas dadas.

1. $f(x) = 2x + 1, x = 1, x = 4$
2. $f(x) = x^2, x = 0, x = 3$
3. $f(x) = x^3, x = 2, x = 5$
4. $f(x) = \sqrt{x}, x = 0, x = 9$
5. $f(x) = 4 - x^2, x = -2, x = 2$
6. $f(x) = x^2 - 6x + 9, x = 3, x = 6$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}, x = -3, x = 1$
8. $f(x) = \sqrt{x-2}, x = 2, x = 11$
9. $f(x) = \text{sen}\, x, x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}$
10. $f(x) = x^2 - 2x + 1, x = -1, x = 3$
11. $x = \dfrac{1}{6}(5 - 4y - y^2)$, el eje Y
12. $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4$
13. $x = y - 1, y = 1, y = 5$
14. $y = 9 - x^2$, el eje X
15. $y = \dfrac{2}{x+1}, x = 0, x = 3$
16. $f(y) = y^3 - y, y = -1, y = 1$
17. $y = (a\,x)^3, x = -\dfrac{2}{a}, x = \dfrac{2}{a}$
18. $x = \dfrac{y-3}{y-2}, y = 3, y = 5$
19. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}, x = 1, x = \sqrt{10}$
20. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}, x = 0, x = 4$
21. $x = \ln y, y = 1, y = 4$
22. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}}, x = 0, x = 1$

23. $x = \frac{2y}{\sqrt{9-y^2}}, y = 0, y = 2$

24. $y = 3 \operatorname{sen} 2x, x = 0, x = \pi$

25. $y = e^{2x}, x = 0, x = \frac{1}{2}$

26. $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}, x = -2, x = -1$

27. $x = \sqrt{4-y^2}, y = -2, y = 2$

28. $y = x^2 \cos x, x = -\frac{\pi}{2}, x = 0$

29. $x = \frac{3y-5}{y^2-2y-3}, y = 4, y = 6$

30. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-x-6}, x = 4, x = 6$

31. $x = ye^y, y = -2, y = 0$

32. $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, x = 4, x = 9$

33. $x = \frac{e^{\sqrt[3]{y}}}{\sqrt[3]{y^2}}, y = 1, y = 8$

34. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x = -a, x = a$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula de trapecios

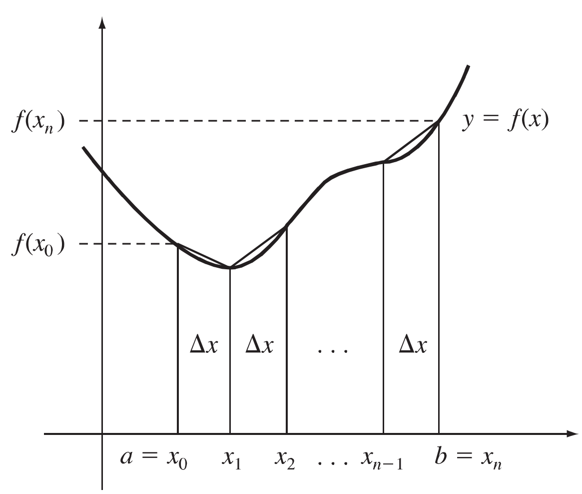
Determinada la función $y = f(x)$, el área aproximada que está limitada por la curva en el intervalo $[a, b]$ es:

$$A = \left(\frac{1}{2}f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + ... + \frac{1}{2}f(x_n)\right)\Delta x \quad \text{donde} \quad x_o = a, x_n = b$$

n = número de partes iguales en las que se divide el intervalo $[a, b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

es la longitud de cada parte.

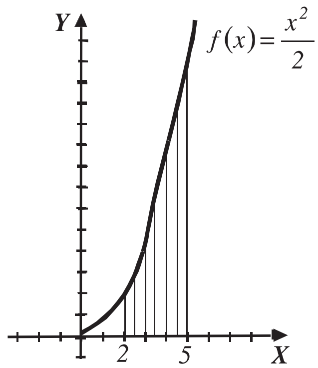


EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\int_2^5 \left(\frac{x^2}{2}\right)dx$ utilizando la fórmula de trapecios, dividiendo el intervalo [2, 5] en 6 partes iguales.

Solución



Los datos son:

$$x_o = 2, n = 6, x_6 = 5$$

Con los cuales se obtiene la longitud de cada parte:

$$\Delta x = \frac{5-2}{6} = 0.5$$

Se determinan las ordenadas de los puntos mediante la función $y = \frac{x^2}{2}$,

x_n	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x_n)$	2	3.125	4.5	6.125	8	10.125	12.5

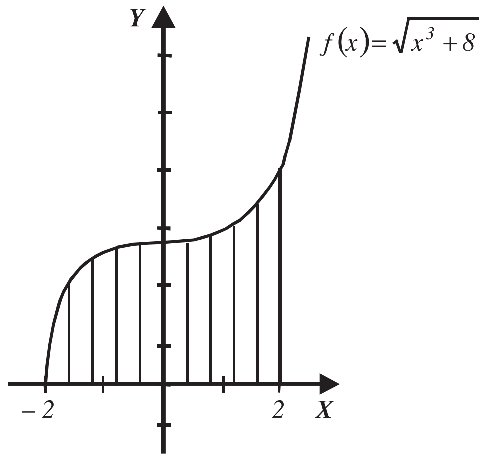
Se aplica la fórmula de trapecios para obtener el área en el intervalo [2, 5],

$$A = \left(\frac{1}{2}(2) + 3.125 + 4.5 + 6.125 + 8 + 10.125 + \frac{1}{2}(12.5)\right)(0.5)$$

$$A = 19.5625\ u^2$$

2 Evalúa la siguiente integral $\int_{-2}^{2}\sqrt{x^3+8}\,dx$ con $n = 10$ intervalos.

Solución



Los datos son:

$$x_0 = -2\,, \quad n = 10, \quad x_{10} = 2$$

Se obtiene el valor de Δx,

$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{10} = 0.4$$

Se realiza la tabla para encontrar las ordenadas de x_n, sustituyendo en:

$$f(x) = \sqrt{x^3+8}$$

x_n	−2	−1.6	−1.2	−0.8	−0.4	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
$f(x_n)$	0	1.975	2.504	2.736	2.817	2.828	2.839	2.917	3.118	3.477	4

Se aplica la fórmula de área de trapecios,

$$A = \left(\frac{1}{2}(0) + 1.975 + 2.504 + 2.736 + 2.817 + 2.828 + 2.839 + 2.917 + 3.118 + 3.477 + \frac{1}{2}(4)\right)0.4$$

Por consiguiente, el área es 10.884 u^2

3 Encuentra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x^2 dx$ tomando 5 intervalos.

Solución

De acuerdo con la integral se tienen los siguientes datos:

$$x_0 = 0, \quad x_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad n = 5$$

La longitud de cada trapecio está determinada por,

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Se realiza la tabulación para obtener las ordenadas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

x_n	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_n)$	0	−0.5877	−0.5877	0.5877	0.5877	0

Entonces, se concluye que,

$$\text{Área} = \left(\frac{1}{2}(0) + |-0.5877| + |-0.5877| + 0.5877 + 0.5877 + \frac{1}{2}(0)\right)\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.7385\ u^2$$

EJERCICIO 23

Utiliza la fórmula de trapecios para obtener las siguientes áreas:

1. $\int_1^3 x^2\, dx$ con $n = 5$
2. $\int_2^4 (2x - 1)dx$ con $n = 8$
3. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^3}\, dx$ con $n = 4$
4. $\int_0^5 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+4}}\, dx$ con $n = 8$
5. $\int_1^3 \sqrt{\ln x}\, dx$ con $n = 8$
6. $\int_1^2 \sqrt{x^5 - \sqrt{x}}\, dx$ con $n = 5$
7. $\int_1^3 e^{x^2 - 1}\, dx$ con $n = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula de Simpson $\frac{1}{3}$

Dada la función $y = f(x)$, el área limitada por la función y el eje X en el intervalo $[a, b]$ está determinada por:

$$\text{Área} = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + f(x_n)\right)$$

Donde:

$$x_o = a, \quad x_n = b, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \text{número par de intervalos.}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Evalúa $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx$ con $n = 4$ intervalos.

Solución

Los datos son:

$$x_o = 1, \quad x_4 = 3, \quad n = 4$$

Se determina el valor de Δx,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

Se sustituyen los valores de x_n en la función $y = \sqrt{x}$ para obtener las ordenadas,

x_n	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_n)$	1	1.224	1.414	1.581	1.732

Por consiguiente,

$$\text{Área} = \frac{0.5}{3}(1 + 4(1.224) + 2(1.414) + 4(1.581) + 1.732)$$

$$\text{Área} = 2.796\ u^2$$

2 Evalúa $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}dx$ con $n = 6$ intervalos.

Solución

$x_0 = 0, \quad x_n = 2, \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3},$

entonces el área es:

$$\text{Área} = \frac{\frac{1}{3}}{3}(0 + 4(0.327) + 2(0.585) + 4(0.707) + 2(0.726) + 4(0.702) + 0.66)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{9}(10.226) = 1.136\ u^2$$

EJERCICIO 24

Utiliza el método de Simpson $\frac{1}{3}$ para evaluar las siguientes integrales:

1. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ con $n = 4$ intervalos
2. $\int_1^4 \sqrt[3]{x^5-2}\, dx$ con $n = 6$ intervalos
3. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx$ con $n = 8$ intervalos
4. $\int_0^8 \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+1}}{x+1} dx$ con $n = 6$ intervalos
5. $\int_0^{\pi} \cos x^2\, dx$ con $n = 4$ intervalos

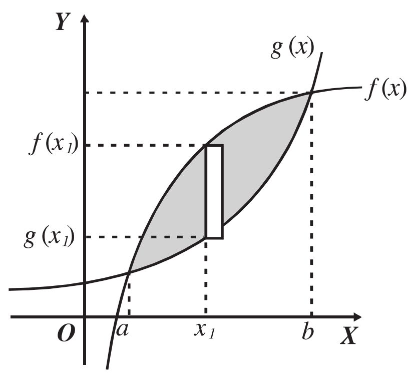
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área entre curvas planas

Rectángulos de base *dx*

El área comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, tomando rectángulos de base dx, está definida como:

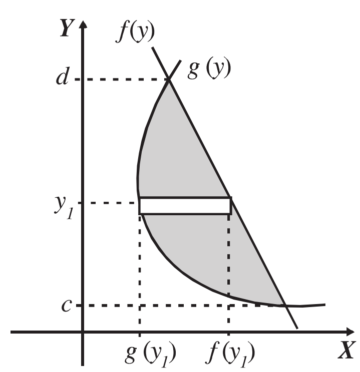
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Rectángulos de base *dy*

El área comprendida entre las curvas $f(y)$ y $g(y)$, tomando rectángulos de base dy, se define como:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$



Es conveniente graficar las funciones para determinar la fórmula que se debe utilizar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área limitada entre las curvas $y = x^3 + 1$ y $x - y + 1 = 0$

Solución

Se buscan los puntos de intersección de ambas curvas igualando las funciones:

$$x^3 + 1 = x + 1$$

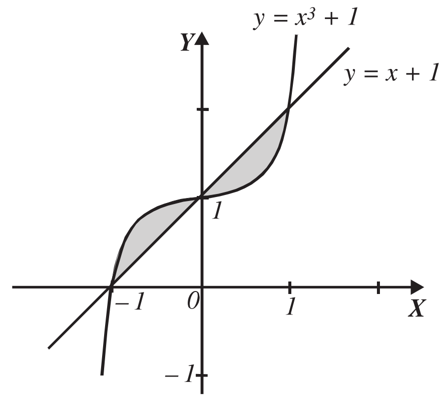
$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1) = 0$$

Por consiguiente,

$$x = 0,\ x = 1 \text{ y } x = -1$$



Se eligen rectángulos verticales de base dx para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0}(y_1 - y_2)dx + \int_{0}^{1}(y_2 - y_1)dx \quad \text{siendo} \quad y_1 = x^3 + 1 \text{ y } y_2 = x + 1$$

$$= \int_{-1}^{0}[(x^3 + 1) - (x + 1)]\,dx + \int_{0}^{1}[(x + 1) - (x^3 + 1)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)\,dx$$

Pero

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = -\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$

entonces,

$$\text{Área} = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = 2\int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^4}{4}\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}u^2$$

Finalmente, el área comprendida entre las curvas es $\frac{1}{2}u^2$

2 Obtén el área limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $4x + y - 6 = 0$

Solución

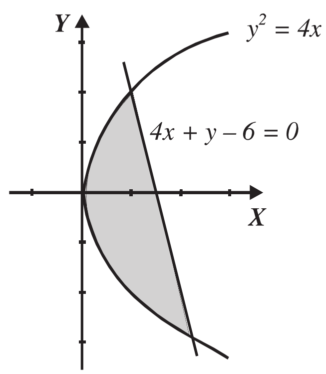
Se buscan las intersecciones de las curvas igualando los despejes en x,

$$\frac{y^2}{4} = \frac{6-y}{4}$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$y = -3;\ y = 2$$



Se eligen rectángulos horizontales de base dy, para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2}[x_1 - x_2]\,dx = \int_{-3}^{2}\left(\frac{6-y}{4} - \frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-3}^{2}(6 - y - y^2)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{125}{6}\right)$$

$$= \frac{125}{24}u^2$$

Finalmente, tenemos que el área comprendida por las curvas es $\frac{125}{24}u^2$

3 Encuentra el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ y $y^2 - 8x + 16 = 0$

Solución

Los puntos de intersección entre las curvas se obtienen al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \\ \quad\;\; y^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}$$

Al multiplicar por -1 la segunda ecuación y sumar con la primera, se obtiene,

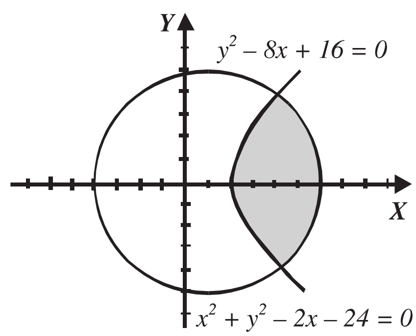
$$x^2 + 6x - 40 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+10)(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -10;\; x = 4$$

Se sustituye el valor de $x = 4$ en la ecuación de la parábola,

$$y^2 - 8(4) + 16 = 0$$
$$y^2 - 16 = 0$$
$$y = \pm 4$$

Por consiguiente, los puntos de intersección son los puntos (4, 4) y (4, -4) y el área está determinada por:

$$\text{Área} = \int_{-4}^{4} (x_2 - x_1)\, dx$$



Se despeja x de ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \qquad\qquad y^2 - 8x + 16 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 24 - y^2 + 1 \qquad\qquad -8x = -y^2 - 16$$
$$(x-1)^2 = 25 - y^2 \qquad\qquad x = \frac{y^2 + 16}{8}$$
$$x - 1 = \sqrt{25 - y^2}$$
$$x = \sqrt{25 - y^2} + 1$$

Al final se sustituyen en la fórmula del área:

$$A = \int_{-4}^{4}\left[\left(\sqrt{25 - y^2} + 1\right) - \left(\frac{y^2+16}{8}\right)\right]dy = \int_{-4}^{4}\left(\sqrt{25 - y^2} - \frac{y^2}{8} - 1\right)dy$$

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{25 - y^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\frac{y}{5} - \frac{y^3}{24} - y\right]_{-4}^{4}$$

$$= \left[\frac{4}{2}\sqrt{25 - 4^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{4^3}{24} - 4\right] - \left[\frac{-4}{2}\sqrt{25 - (-4)^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{-4}{5}\right) - \frac{(-4)^3}{24} - (-4)\right]$$

$$= [6 + 11.59 - 2.66 - 4] - [-6 - 11.59 + 2.66 + 4] = 21.86\, u^2$$

EJERCICIO 25

Obtén el área limitada entre las siguientes curvas:

1. $y = x^2$; $y = x + 2$
2. $x = y^3$; $x^2 + y = 0$
3. $y = 4x - x^2$; $y = x^2$
4. $y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$; $y = 2x + 3$
5. $4x^2 - 17x - 15y + 30 = 0$; $y = \sqrt{x+4}$
6. $x^2 + y^2 = 18$; $x^2 = 6y - 9$
7. $x^2 + y^2 = 25$; $y^2 - 8x + 8 = 0$
8. $5x^2 + 16y^2 = 84$; $4x^2 - y^2 = 12$
9. $3x^2 + 16y - 48 = 0$; $x^2 + y^2 = 16$
10. $y = x^3$; $y = \dfrac{3x}{x+2}$
11. $y^2 = x$; $xy^2 + 2x = 3$
12. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$; $x^2 + y^2 = 16$
13. $x = 9 - y^2$; $x = 1 - \dfrac{1}{9}y^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

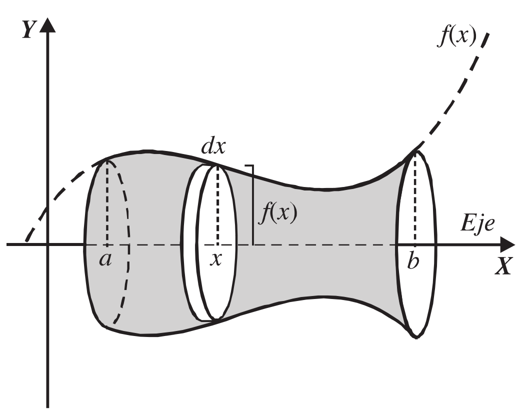
Volumen de sólidos de revolución

Se generan al girar un área plana en torno a una recta conocida como eje de rotación o revolución. Para calcular el volumen se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos.

Método de discos

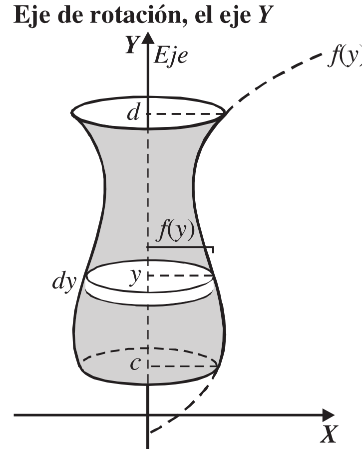
Se utiliza cuando el eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

Eje de rotación, el eje X



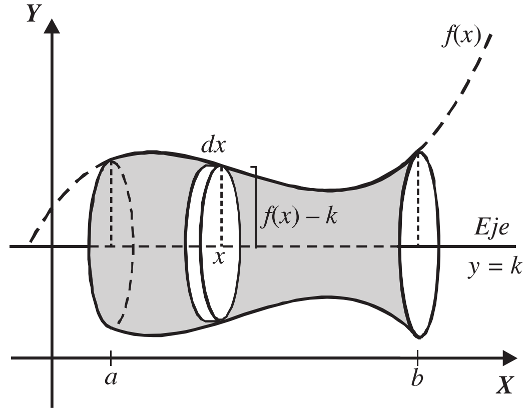
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

Eje de rotación, el eje Y



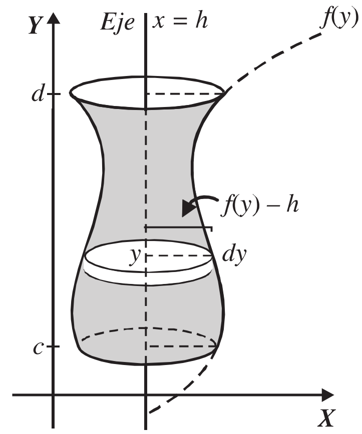
$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2\, dy$$

Eje de rotación, la recta $y = k$



$$V = \pi\int_a^b [f(x) - k]^2\, dx$$

Eje de rotación, la recta $x = h$



$$V = \pi\int_c^d [f(y) - h]^2\, dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el volumen que se genera al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x - 2 = 0$ alrededor del eje X.

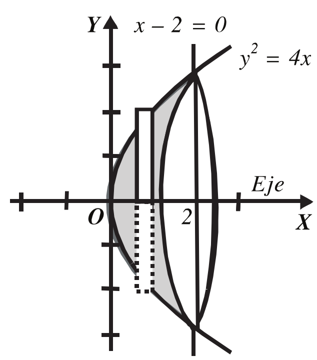
Solución

Al hacer girar el rectángulo de altura $f(x)$ y ancho dx alrededor del eje X, se forma un disco de volumen,

$$dV = \pi y^2\, dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = 2$, se obtiene el volumen del sólido,

$$V = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 (4x)dx = \left[2\pi x^2\right]_0^2 = 8\pi u^3$$



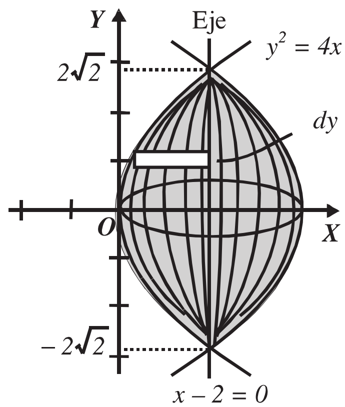
2 Encuentra el volumen generado al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ en torno a la recta $x - 2 = 0$

Solución

Para generar el sólido se deben girar los rectángulos alrededor del eje $x = 2$, que es paralelo al eje Y, por tanto el volumen de los discos es:

$$dV = \pi(2 - x)^2\, dy$$

Integrando desde $y = -2\sqrt{2}$ hasta $y = 2\sqrt{2}$ se obtiene el volumen del sólido.



$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}(2 - x)^2 dy$ con $x = \frac{y^2}{4}$, sustituyendo y simplificando:

$$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(2 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(2 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(4 - y^2 + \frac{y^4}{16}\right)dy$$

$$= 2\pi\left[4y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{80}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{128\sqrt{2}}{15}\pi u^3$$

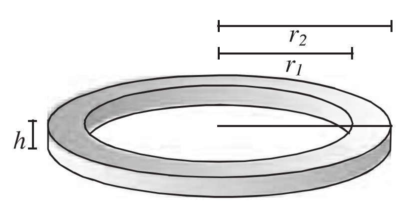
Método de las arandelas

Se emplea cuando el eje de rotación no es parte del contorno del área limitada por las curvas, esto significa que se generan sólidos de revolución con un hueco en el centro, al tipo de discos con hueco en el centro que se utilizan para hallar el volumen se denomina, arandela.

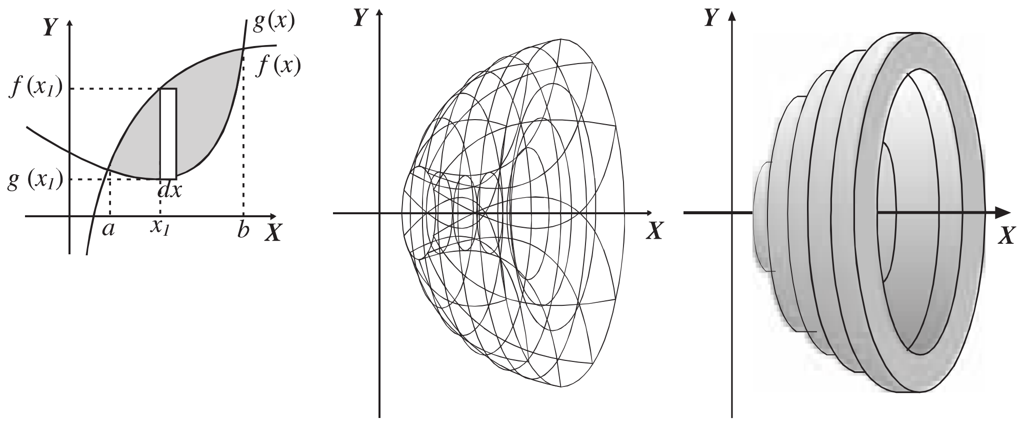
Volumen de una arandela

Sea V el volumen de la arandela, entonces se define como la diferencia de volúmenes de los cilindros de radio r_2 y r_1

$$V = V_1 - V_2 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$



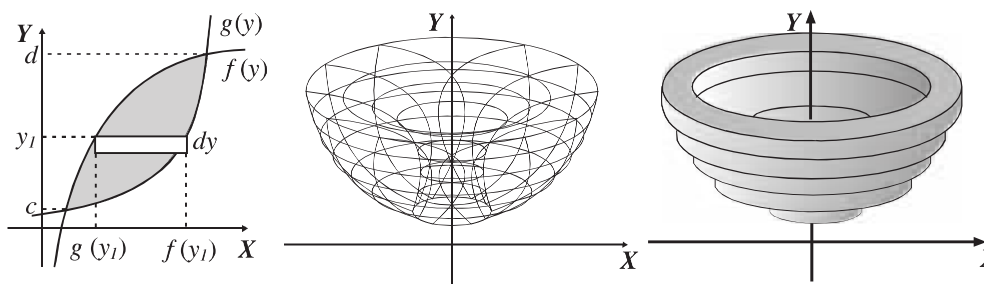
- **Eje de rotación horizontal**



El volumen generado en torno al eje X se define como:

$$V=\pi\int_a^b\left(\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right)dx$$

- **Eje de rotación vertical**



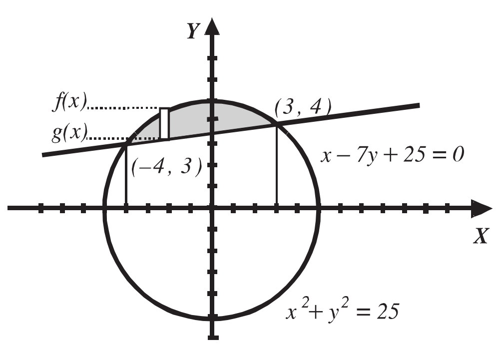
El volumen generado en torno al eje Y se define como:

$$V=\pi\int_c^d\left(\left[f(y)\right]^2-\left[g(y)\right]^2\right)dy$$

Ejemplo

Determina el volumen que se genera al girar el área limitada por la circunferencia $x^2+y^2=25$ y la recta $x-7y+25=0$ en torno al eje X.

Solución



Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los puntos de intersección,

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad x - 7y + 25 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad y = \frac{x + 25}{7}$$

$$\pm\sqrt{25 - x^2} = \frac{x + 25}{7}$$

$$\left(\pm\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = \left(\frac{x + 25}{7}\right)^2$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Por consiguiente, las abscisas de los puntos son $x = -4$ y $x = 3$, los cuales resultan ser los límites de integración.
El eje de rotación no es parte del contorno de la superficie, por lo que se emplea la fórmula:

$$V = \pi\int_a^b\left(\left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2\right)dx$$

Donde $f(x)$ es la circunferencia y $g(x)$ la recta.
Al calcular el volumen se obtiene:

$$V = \pi\int_{-4}^{3}\left(\left[\pm\sqrt{25 - x^2}\right]^2 - \left[\frac{x + 25}{7}\right]^2\right)dx = \pi\int_{-4}^{3}\left(25 - x^2 - \frac{x^2 + 50x + 625}{49}\right)dx$$

$$= \pi\int_{-4}^{3}\left(\frac{600 - 50x - 50x^2}{49}\right)dx = \frac{50}{49}\pi\int_{-4}^{3}(12 - x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{50}{49}\pi\left[12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}$$

$$= \frac{50}{49}\pi\left[\left(12(3) - \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(12(-4) - \frac{(-4)^2}{2} - \frac{(-4)^3}{3}\right)\right]$$

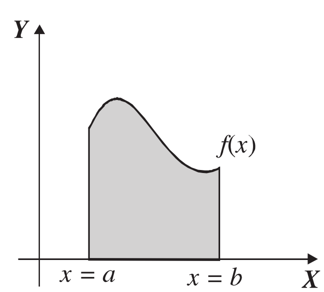
Por consiguiente, se deduce que el volumen es igual a: $V = \dfrac{175}{3}\pi\, u^3$

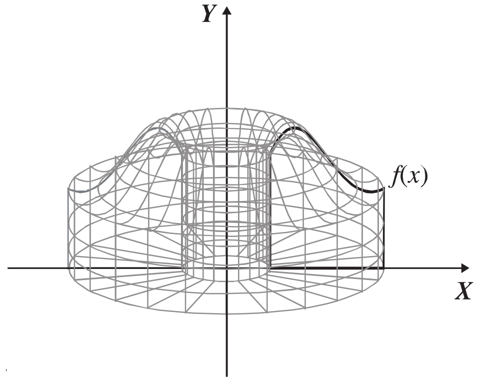
Método de capas

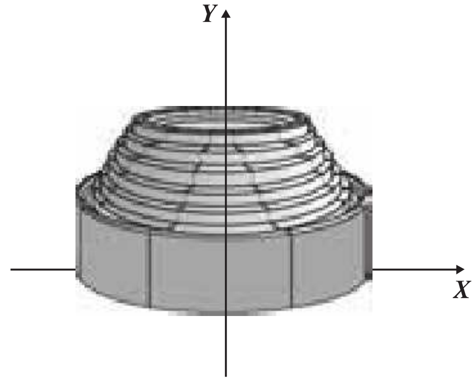
En este método el volumen de la capa se expresa en función de la circunferencia media, la altura y el espesor de la capa cilíndrica, engendrada al girar el rectángulo en torno al eje de rotación.

La gráfica de la derecha muestra el área comprendida por la función $y = f(x)$ con $f(x) > 0$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Al girarla sobre el eje Y se genera el sólido de revolución, éste se divide en n capas o casquetes cilíndricos, unos dentro de otros, con la finalidad de obtener el volumen del sólido.







El volumen de un casquete cilíndrico se define como el volumen del cilindro exterior menos el interior, entonces:

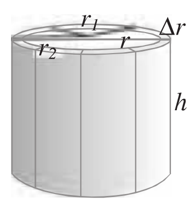
$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi h(r_2^2 - r_1^2)$$
$$= \pi h(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

pero

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{y} \quad \Delta r = r_2 - r_1$$

entonces:

$$V = 2\pi r h \Delta r$$



➲ **Eje de rotación el eje "y"**

En el plano cartesiano se elige el i-ésimo casquete cilíndrico de dimensiones $r = x_i$, $h = f(x_i)$ y $\Delta r = \Delta x$, al sumar los volúmenes de los n casquetes cilíndricos cuando n es muy grande se obtiene:

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i) \Delta x = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

➲ **Eje de rotación el eje "x"**

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i f(y_i) \Delta y = 2\pi \int_c^d y f(y)\, dy$$

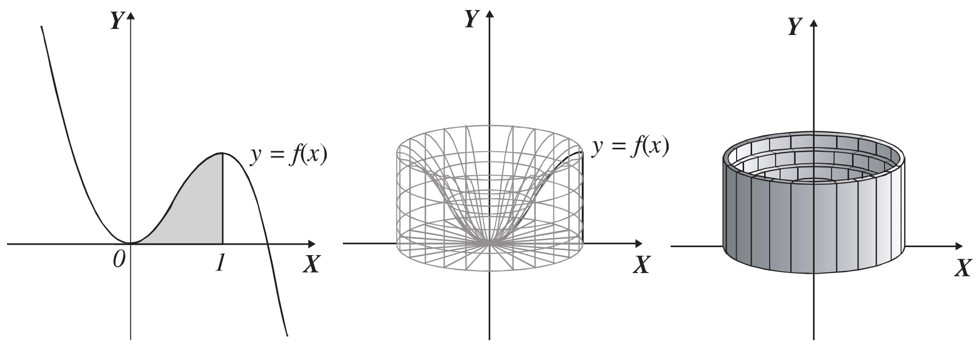
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Utiliza el método de capas para hallar el volumen que se genera al girar sobre el eje Y el área limitada por la curva $y = 3x^2 - 2x^3$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

Gráfica del área a rotar y del sólido de revolución seccionado en capas



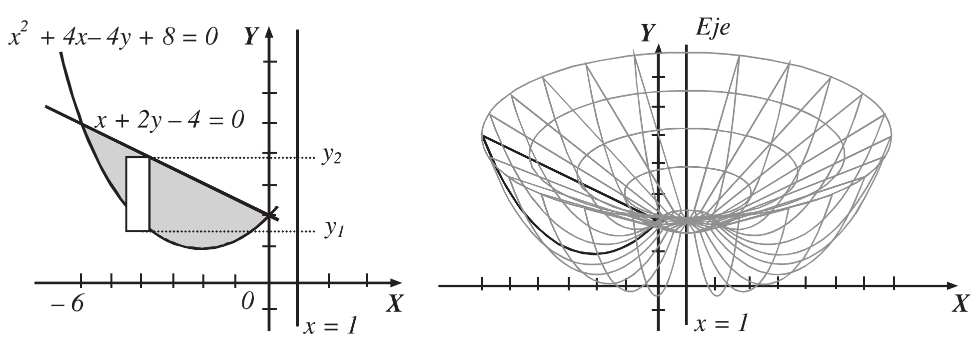
Luego, el volumen se define:

$$V = 2\pi\int_0^1 x(3x^2 - 2x^3)dx = 2\pi\int_0^1 (3x^3 - 2x^4)dx = 2\pi\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{5}(1)^5\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right] = 2\pi\left[\frac{15-8}{20}\right] = 2\pi\left[\frac{7}{20}\right] = \frac{7}{10}\pi\, u^3$$

2 Obtén el volumen que genera el área plana acotada por la parábola $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ y la recta $x + 2y - 4 = 0$, al girar en torno a la recta $x - 1 = 0$

Solución



Para encontrar los puntos de intersección de la recta y la parábola se igualan las ordenadas y se resuelve la ecuación para x.

$$\frac{x^2 + 4x + 8}{4} = \frac{4 - x}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x = 0 \qquad x(x + 6) = 0$$

$$x = 0, x = -6$$

La altura del rectángulo está determinada por

$$y_2 - y_1 = \frac{4-x}{2} - \frac{x^2+4x+8}{4} = -\frac{6x+x^2}{4}$$

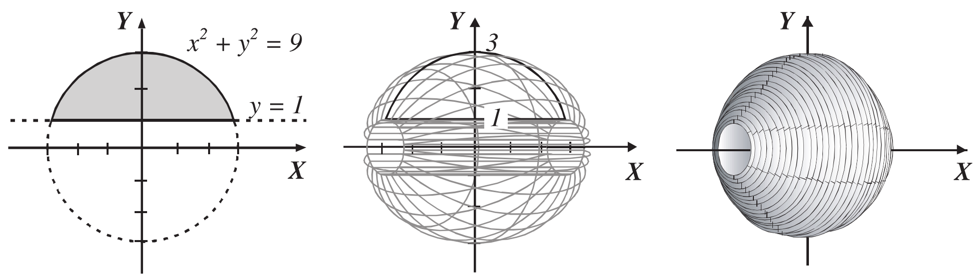
la distancia del rectángulo al eje de rotación es $(1 - x)$ y su ancho dx, al aplicar la fórmula se obtiene el volumen,

$$V = 2\pi\int_{-6}^{0}(1-x)\left(-\frac{6x+x^2}{4}\right)dx = \frac{2\pi}{4}\int_{-6}^{0}(x^3+5x^2-6x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-3x^2\right]_{-6}^{0}$$

Finalmente, el volumen resulta ser: $V = 72\,\pi u^3$

3 Determina el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar sobre el eje X el área limitada por la curva $x^2 + y^2 = 9$ y la recta $y - 1 = 0$

Solución



El volumen se genera tanto en el lado positivo como en el lado negativo del eje X, por tanto:

$$V = 2\int_{1}^{3}2\pi y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy = 4\pi\int_{1}^{3}y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy$$

Se resuelve la integral:

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{1}^{3}$$

Al evaluar se obtiene como resultado

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-9)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{(9-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = 4\pi\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi u^3$$

EJERCICIO 26

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 4 alrededor del eje X.
2. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x-2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 11$, alrededor del eje X.
3. Obtén el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^2$ y las rectas $x = 0$, $x = 3$ alrededor del eje X.
4. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 2$, $x = 0$ alrededor del eje Y.
5. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^3$, y las rectas $x = 0$, $y = 8$, alrededor del eje Y.
6. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = 16$ alrededor del eje Y.
7. Determina el volumen que origina la superficie limitada por la parábola $y + x^2 = 0$ y la recta $y + 4 = 0$, al girar en torno del eje Y.
8. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno al eje X el área limitada por la curva $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 0$.
9. Encuentra el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $y = \sqrt{x^2+1}$ y las rectas $x = -2$ y $x = 2$ en torno al eje X.
10. Determina el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $x^2 - y^2 + 1 = 0$ y las rectas $y = 1.5$, $y = 3$ en torno al eje Y.
11. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje X la superficie limitada por la semielipse $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ y el eje X.
12. Obtén el volumen generado al girar en torno al eje Y la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
13. Encuentra el volumen que se origina al girar en torno al eje X, la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
14. Determina el volumen generado por las curvas $x^2 + y^2 = 25$ y $y^2 - 6x + 15 = 0$, al girar en torno al eje Y.
15. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje X la superficie limitada por la curva $y = 4x - x^2$ y la recta $x - y = 0$
16. Calcula el volumen generado al rotar en torno al eje X, la superficie limitada por la parábola $x^2 - 6x - 8y + 17 = 0$ y la recta $x - 4y + 5 = 0$
17. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, cuando gira en torno a la recta $x + 3 = 0$
18. Calcula el volumen que se genera al girar la superficie limitada por la parábola $y^2 + 4x - 6y - 11 = 0$, y la recta $2x + y - 9 = 0$, en torno a la recta $y + 1 = 0$
19. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno a la recta $x - 2 = 0$, la superficie limitada por la curva $4x^2 + y^2 + 48x + 128 = 0$
20. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la primera arcada de la función sen x, al girar en torno a la recta $2x - 3\pi = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Longitud de arco

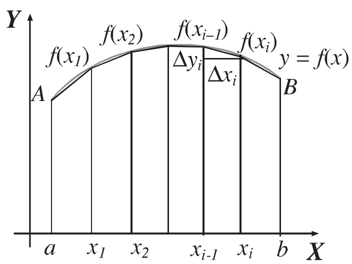
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco se define como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Demostración

Se eligen n puntos del arco AB y se unen los puntos adyacentes mediante cuerdas, las cuales tendrán longitud Δs, la línea quebrada resultante tendrá longitud

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$



El límite al que tiende esta longitud cuando Δs_i tiende a cero es la longitud (L) del arco AB, siendo

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}} \;=\; \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

y por el teorema del valor medio:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x)$$

para cualquier valor de x que cumpla $x_{i-1} < x < x_i$, entonces:

$$L = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

En forma semejante, si la curva tiene por ecuación $x = h(y)$, entonces la longitud de la curva está determinada por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [h'(y)]^2}\, dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la longitud del arco de la curva $y = x^2$, en el intervalo [2, 4]

Solución

Se deriva la función y se obtiene

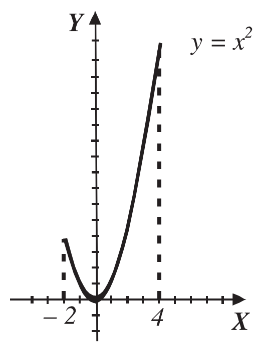
$$y' = 2x$$

Al sustituir en la fórmula,

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1+4x^2}\, d$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_2^4$$

$$= 2\sqrt{65} - \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\frac{8+\sqrt{65}}{4+\sqrt{17}} = 12.170\ u$$



2 Obtén la longitud del arco de la curva, cuya ecuación es $x = y^{\frac{3}{2}}$, entre los puntos (0, 0) y (64, 16)

Solución

Al derivar con respecto a Y se obtiene,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, se sustituye en la fórmula:

$$L = \int_0^{16} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dy = \int_0^{16} \sqrt{1+\frac{9}{4}y}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^{16} \sqrt{4+9y}\, dy$$

$$= \left[\frac{\sqrt{(4+9y)^3}}{27}\right]_0^{16}$$

$$= 66.685\ u$$

EJERCICIO 27

Encuentra la longitud de arco en los intervalos dados de cada una de las siguientes curvas.

1. $y^2 = x^3$ $\quad 1 \leq x \leq 4$
2. $x = y^2$ $\quad 0 \leq x \leq 1$
3. $f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ $\quad 1 \leq x \leq 4$
4. $f(x) = 4\,x^{\frac{3}{2}}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$
5. $f(x) = \dfrac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$ $\quad 1 \leq x \leq 3$
6. $f(x) = \ln \cos x$ $\quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$
7. $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$ $\quad \dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$
8. $y = \ln x^2$ $\quad 1 \leq x \leq 5$
9. $y = \ln x$ $\quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ $\quad 2 \leq x \leq 5$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones a la economía

Función de costos

El costo total para producir, vender y distribuir un artículo es igual a la suma de los costos fijos más los costos variables.

$$C(x)_t = C_f + C_v$$

Los costos variables dependen del número de unidades x, mientras que los costos fijos no. Estos últimos permanecen constantes, algunos son el pago de la renta, el mantenimiento, y otros más en los cuales no importa si se produce, vende y distribuye una pieza, mil o cualquier otra cantidad y se representan, como:

$$C(x = 0) = C_f$$

El costo marginal es el costo para producir una unidad adicional más cuando ya se tiene un nivel de producción determinado y se expresa como la derivada del costo total respecto al número de unidades:

$$\text{Costo marginal} = \frac{dC(x)}{dx}$$

De forma contraria, si lo que se conoce es el costo marginal, entonces el costo total es la integral:

$$C = \int C'(x)\,dx$$

Cuando se resuelve esta integral se obtiene una constante de integración, la cual se puede conocer mediante las condiciones iniciales, la cual regularmente es equivalente a los costos fijos.

Ejemplo

El costo marginal que emplea un fabricante de pernos está dado por $\frac{dC(x)}{dx} = 302 - 0.04x$ y el costo fijo es de \$12. Obtén la función de costo total.

Solución

El costo total se obtiene resolviendo la integral:

$$C = \int (302 - 0.04x)\,dx$$

$$C = 302x - 0.02x^2 + K$$

Pero K, en realidad, son los costos fijos C_f, entonces:

$$C(x = 0) = 302(x) - 0.02(x)^2 + K,$$

pero se sabe que $C(x = 0) = C_f$, entonces:

$$C_f = 12 = K$$

Entonces la función del costo total es:

$$C(x) = 302x - 0.02x^2 + 12$$

Función de ingresos

La demanda de un producto se define como $p(x)$, mientras el ingreso total es el producto del precio, por el número de unidades x, que se venden.

$$I(x) = p(x) \cdot x$$

El ingreso marginal está en función de la cantidad demandada y matemáticamente se representa como la derivada del ingreso total, con respecto a la cantidad x

$$\text{Ingreso marginal} = \frac{d\,I(x)}{dx}$$

Si lo que se desea obtener es el ingreso total y se tiene el ingreso marginal, entonces se procede a efectuar una integración:

$$I(x) = \int I'(x)\,dx$$

En este caso, cuando se integra y se encuentra la constante ésta será siempre igual a cero, ya que si no se comercializa ninguna pieza x, no existirán ingresos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función del ingreso marginal al producir una bicicleta está dada por la función $\frac{dI(x)}{dx} = 3x^2 - 2x + 20$, determina la función del ingreso total y la función de demanda total.

Solución

El ingreso total se obtiene resolviendo la integral:

$$I(x) = \int (3x^2 - 2x + 20)dx$$

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x + C$$

Pero $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de C

$$I(x = 0) = (0)^3 - (0)^2 + 20(0) + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x$$

Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se obtiene:

$$p(x) = \frac{x^3 - x^2 + 20x}{x} = x^2 - x + 20$$

2 Una compañía manufacturera sabe que la función del ingreso marginal de un producto es $I'(x) = 20 - 0.002x$, en donde $I'(x)$ se cuantifica en pesos y x es el número de unidades.

Con base en la información antes mencionada, determina:

a) La función de ingresos totales
b) La función de la demanda del producto
c) Los ingresos totales al venderse 500 unidades
d) El precio, cuando se venden 3 500 artículos

Solución

a) La función de los ingresos totales se obtiene al resolver la integral:

$$I(x) = \int (20 - 0.002x)\,dx$$

$$I(x) = 20x - 0.001x^2 + C$$

La condición $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de C

$$I(0) = 20(0) - (0.001)(0)^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = 20x - 0.001x^2$$

b) Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se determina que:

$$p(x) = \frac{20x - 0.001x^2}{x} = 20 - 0.001x$$

c) Para determinar los ingresos totales al venderse 500 artículos, se sustituye en:

$I(x) = 20x - 0.001x^2$
$I(500) = 20(500) - (0.001)(500)^2$
$I(500) = 10\,000 - 250$
$I(500) = \$\,9\,750$

d) Si se desea obtener el precio, cuando se venden 3 500 unidades, se sustituye en:

$p(x) = 20 - 0.001x$
$p(3\,500) = 20 - 0.001(3\,500)$
$p(3\,500) = 20 - 3.5$
$p(3\,500) = \$16.5$

EJERCICIO 28

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. El costo marginal para producir un perno metálico está dado por $C'(x) = 20 - x - x^2$, además se sabe que el costo fijo es \$4.00
   Determina:
   a) La función de costo total
   b) El costo de producir 5 unidades

2. La función del ingreso marginal de un cierto producto es $I'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, determina la función de ingreso total.

3. La función $f(x) = 4e^{0.005x}$, representa el costo marginal de producción de un buje de cobre, en donde los costos fijos están dados por $C_f = \$200.00$. Obtén:
   a) La función del costo total
   b) El costo cuando se producen 500 piezas

4. El ingreso marginal que tiene registrado un productor de bicicletas de montaña es: $I'(x) = 8 + 3(2x - 3)^2$, determina la función del ingreso total y la demanda.

5. El gerente de una empresa productora de dulces sabe que su costo marginal está dado por la función
   $$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{5}{\sqrt{2x+1}},$$
   además sabe que el costo de producir 40 dulces, es \$53.00.
   Encuentra:
   a) La función del costo total
   b) El costo de fabricar 220 piezas

6. Una máquina de coser industrial se deprecia en función del tiempo t, según la función $P'(t) = -\dfrac{8160}{(3t+2)^2}$.
   Determina:
   a) La función del precio $P(t)$, de la máquina, t años después de su adquisición
   b) ¿Cuál es su valor después de 5 años?

7. Una compañía deprecia una computadora en función del tiempo t medido en años, según la función
   $$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{24\,000}{(t+3)^4}$$
   en donde $P(t)$, es el precio de la máquina t años después de su adquisición. ¿Cuál es su valor después de 2 años?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente