CAPÍTULO 8

INTEGRALES DE DIFERENCIALES TRIGONOMÉTRICAS

Reseña HISTÓRICA

Matemático y físico francés nacido en Auxerre y fallecido en París, conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas series de Fourier.

Participó en la Revolución Francesa y, gracias a la caída del poder de Robespierre, se salvó de ser guillotinado. Se incorporó a la Escuela Normal Superior de París en donde tuvo entre sus profesores a Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace. Posteriormente ocupó una cátedra en la Escuela Politécnica.

Según él, cualquier oscilación periódica, por complicada que sea, se puede descomponer en serie de movimientos ondulatorios simples y regulares, la suma de los cuales es la variación periódica compleja original. Es decir se expresa como una serie matemática en la cual los términos son funciones trigonométricas. El teorema de Fourier tiene muchas aplicaciones; se puede utilizar en el estudio del sonido y de la luz y, desde luego, en cualquier fenómeno ondulatorio. El estudio matemático de tales fenómenos, basado en el teorema de Fourier se llama análisis armónico.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen}^m v\, dv$, $\int \cos^n v\, dv$, con m y n impar

En aquellas integrales cuya función seno o coseno sea una potencia impar, se realiza la separación en potencias pares y siempre sobra una lineal, la cual funcionará como diferencial; el resto se transforma mediante las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

Solución

Se separa la potencia de la siguiente manera:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx$$

Se sustituye $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, de esta forma:

$$v = \cos x,\ dv = -\operatorname{sen} x\, dx,\ -dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx &= \int (1-v^2)(-dv) = \int -dv + \int v^2 dv\\ &= -v + \frac{1}{3}v^3 + C\\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

2 Precisa el resultado de $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x}$

Solución

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x}$$

Se realiza el cambio de variable, $v = \operatorname{sen} x$ y $dv = \cos x\, dx$,

$$\int \frac{\left(1-v^2\right)dv}{v^4} = \int \frac{dv}{v^4} - \int \frac{dv}{v^2} = \int v^{-4}dv - \int v^{-2}dv = \frac{v^{-3}}{-3} - \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3v^3} + \frac{1}{v} + C$$

Pero $v = \operatorname{sen} x$, entonces,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

Finalmente, $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

3 Encuentra el resultado de $\int \frac{\text{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$

Solución

$$\int \frac{\text{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = \int \frac{\text{sen}^4 y \,\text{sen}\, y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = \int \frac{(\text{sen}^2 y)^2 \text{sen}\, y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

Se sustituye $\text{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$ en la integral:

$$\int \frac{(1-\cos^2 y)^2 \text{ sen } y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

se realiza el cambio de variable, $v = \cos y$, $dv = -\text{sen } y\, dy$, $-dv = \text{sen } y\, dy$

$$-\int \frac{\left(1-v^2\right)^2 dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{\left(1-2v^2+v^4\right)dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} + 2\int v^{\frac{3}{2}}\, dv - \int v^{\frac{7}{2}}\, dv$$

$$= -2\sqrt{v} + \frac{4}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9}v^{\frac{9}{2}} + C$$

Al factorizar $-2\sqrt{v}$ de la expresión se obtiene:

$$= -2\sqrt{v}\left(1 - \frac{2}{5}v^2 + \frac{1}{9}v^4\right) + C \text{, pero } v = \cos y$$

Finalmente,

$$\int \frac{\text{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C$$

EJERCICIO 8

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \text{sen}^3 4x \cos 4x\, dx$
2. $\int \cos^5 3x \text{ sen } 3x\, dx$
3. $\int \text{sen}^3 ax\, dx$
4. $\int \text{sen}^3 5x\, dx$
5. $\int \text{sen}^3 \frac{x}{4}\, dx$
6. $\int \cos^3 x\, dx$
7. $\int \cos^3 ax\, dx$
8. $\int \cos^3 6x\, dx$
9. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int \text{sen}^5 x\, dx$
11. $\int \text{sen}^5 ax\, dx$
12. $\int \text{sen}^5 4x\, dx$
13. $\int \text{sen}^5 \frac{x}{2}\, dx$
14. $\int \cos^5 y\, dy$
15. $\int \cos^5 bx\, dx$
16. $\int \cos^5 \frac{x}{3}\, dx$

17. $\int \text{sen}^7\theta\, d\theta$

18. $\int \text{sen}^7 3x\, dx$

19. $\int \cos^7 y\, dy$

20. $\int \cos^7 4x\, dx$

21. $\int \text{sen}^3 4x \cos^5 4x\, dx$

22. $\int \cos^3 x\, \text{sen}^5 x\, dx$

23. $\int \frac{\cos^5 2x}{\sqrt{\text{sen}\, 2x}}\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \tan^n v\, dv$, $\int \cot^n v\, dv$ con n par o impar

En este tipo de integrales se separan potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 x\, dx$

Solución

Se realiza la separación de la potencia:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx$$

Se sustituye $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,

$$\int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$

Al aplicar $v = \tan x$, $dv = \sec^2 x\, dx$, para la primera integral, entonces:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx = \int v\, dv - \int \tan x\, dx = \frac{v^2}{2} - (-\ln|\cos x|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

2 Obtén el resultado de $\int (\sec 3x + \tan 3x)^2 dx$

Solución

Se desarrolla el binomio al cuadrado y se obtiene:

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \tan^2 3x)\, dx$$

se realiza el cambio $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \sec^2 3x - 1) dx$$

Se simplifican términos semejantes y resulta:

$$\int (2\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x - 1)\, dx$$

Se efectúa el cambio, $v = 3x$, entonces $dv = 3dx$ y $\frac{dv}{3} = dx$

Se procede a integrar

$$= \int \frac{2}{3}\sec^2 v\,dv + \int \frac{2}{3}\sec v \tan v\,dv - \int \frac{dv}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\int \sec^2 v\,dv + \frac{2}{3}\int \sec v \tan v\,dv - \frac{1}{3}\int dv$$

$$= \frac{2}{3}\tan v + \frac{2}{3}\sec v - \frac{1}{3}v + C\ ;$$

pero $v = 3x$, entonces finalmente se obtiene:

$$\int (\sec 3x + \tan 3x)^2\,dx = \frac{2}{3}\tan 3x + \frac{2}{3}\sec 3x - x + C$$

3 Determina el resultado de $\int \cot^5 ax\,dx$

Solución

Al separar la integral

$$\int \cot^5 ax\,dx = \int \cot^3 ax \cot^2 ax\,dx$$

Se realiza el cambio $\cot^2 ax = \csc^2 ax - 1$

$$\int \cot^3 ax(\csc^2 ax - 1)dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\,dx - \int \cot^3 ax\,dx$$

De nueva cuenta se tiene una potencia impar, por lo que se vuelve a separar y a sustituir la identidad:

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\,dx - \int \cot ax \cot^2 ax\,dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\,dx - \int \cot ax(\csc^2 ax - 1)dx$$

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\,dx - \int \cot ax \csc^2 ax\,dx + \int \cot ax\,dx$$

$v = \cot ax$ y $dv = -a\csc^2 ax\,dx$

$$= -\frac{1}{a}\int v^3 dv + \frac{1}{a}\int v dv + \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{v^4}{4} + \frac{1}{a}\cdot\frac{v^2}{2} + \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2} - \ln|\operatorname{sen} ax|\right) + C,$$

pero $v = \cot ax$, por lo que finalmente,

$$\int \cot^5 ax\,dx = -\frac{1}{a}\left(\frac{\cot^4 ax}{4} - \frac{\cot^2 ax}{2} - \ln|\operatorname{sen} ax|\right) + C$$

EJERCICIO 9

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \tan^3 5x\, dx$
2. $\int \tan^3 \frac{x}{2}\, dx$
3. $\int \cot^3 4x\, dx$
4. $\int \cot^3 \frac{x}{3}\, dx$
5. $\int \cot^5 6x\, dx$
6. $\int \cot^5 \frac{y}{4}\, dy$
7. $\int \tan^5 5x\, dx$
8. $\int \cot^4 5x\, dx$
9. $\int \tan^4 6x\, dx$
10. $\int (\tan 3x - \cot 3x)^3\, dx$
11. $\int (\tan^2 2y + \tan^4 2y)\, dy$
12. $\int (\cot^4 3x + \cot^2 3x)\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \sec^n v\, dv$, $\int \csc^n v\, dv$ con n par

En este tipo de integrales se separa en potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva.

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x\ ;\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Precisa el resultado de $\int \sec^4 x\, dx$

Solución

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

Se realiza el cambio con la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$\int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \text{ y } dv = \sec^2 x\, dx$$

se obtiene:

$$\int (1+v^2)dv = \int dv + \int v^2 dv = v + \frac{v^3}{3} + C$$

Pero $v = \tan x$, entonces,

$$\int \sec^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \csc^4 \frac{x}{4}\, dx$

Solución

$$\int \csc^4 \frac{x}{4} dx = \int \csc^2 \frac{x}{4}\ \csc^2 \frac{x}{4} dx \ = \int\left(1+\cot^2 \frac{x}{4}\right)\csc^2 \frac{x}{4} dx$$

Donde

$$v = \cot\frac{x}{4} \text{ y } dv = -\frac{1}{4}\csc^2\frac{x}{4} dx$$

entonces:

$$= -4\int(1+v^2)dv = -4\int dv - 4\int v^2\ dv \ = -4v - \frac{4}{3}v^3 + C$$

pero $v = \cot \frac{x}{4}$, por consiguiente

$$\int \csc^4 \frac{x}{4} dx = -\frac{4}{3}\cot^3\frac{x}{4} - 4\cot\frac{x}{4} + C$$

Integrales de la forma: $\int \tan^m v \cdot \sec^n v\, dv$, $\int \cot^m v \cdot \csc^n v\, dv$ con *n* par y *m* par o impar

En este tipo de integrales se emplean las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1;\ \csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$

Solución

En la integral la secante tiene potencia par, entonces se realiza la separación de una secante cuadrada y se sustituye por la identidad trigonométrica correspondiente.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx \ = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \quad \text{y} \quad dv = \sec^2 x\, dx$$

finalmente se determina que:

$$= \int v^2(1+v^2)dv \ = \int (v^2+v^4)dv = \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + C \ = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\,dx$

Solución

En la integral las potencias, tanto de la tangente como de la secante, son impares, por lo que la separación es para ambas funciones.

$$\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\,dx = \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\,dx$$

Luego

$$\tan^2 \frac{x}{4} = \sec^2 \frac{x}{4} - 1$$

por consiguiente,

$$= \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\,dx = \int \left(\sec^2 \frac{x}{4} - 1 \right) \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\,dx$$

Ahora, al hacer

$$v = \sec \frac{x}{4} \text{ y } dv = \frac{1}{4} \sec \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4}\,dx$$

se obtiene:

$$= 4\int (v^2 - 1)v^2 dv = 4\int v^4 dv - 4\int v^2\,dv = \frac{4}{5}v^5 - \frac{4}{3}v^3 + C$$

$$= \frac{4}{5}\sec^5 \frac{x}{4} - \frac{4}{3}\sec^3 \frac{x}{4} + C$$

EJERCICIO 10

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \sec^4 3x\,dx$
2. $\int \sec^4 ax\,dx$
3. $\int \sec^4 \frac{x}{6}\,dx$
4. $\int \csc^4 9x\,dx$
5. $\int \csc^4 bx\,dx$
6. $\int \csc^4 \frac{x}{7}\,dx$
7. $\int \sec^4 \frac{2x}{3}\,dx$
8. $\int \csc^4 \frac{5x}{4}\,dx$
9. $\int \tan^2 8x \sec^4 8x\,dx$
10. $\int \tan^2 ax \sec^4 ax\,dx$
11. $\int \tan^2 \frac{x}{7} \sec^4 \frac{x}{7}\,dx$
12. $\int \tan^2 \frac{5x}{3} \sec^4 \frac{5x}{3}\,dx$
13. $\int \tan^3 5x \sec^3 5x\,dx$
14. $\int \tan^3 bx \sec^3 bx\,dx$

15. $\int \tan^3 \frac{x}{6} \sec^3 \frac{x}{6}\, dx$

16. $\int \tan^3 \frac{4x}{7} \sec^3 \frac{4x}{7}\, dx$

17. $\int \cot^3 bx \csc^3 bx\, dx$

18. $\int \cot^3 4x \csc^3 4x\, dx$

19. $\int \sec^6 \frac{x}{2}\, dx$

20. $\int \csc^4 \left(\frac{3\theta}{2}\right) d\theta$

21. $\int 2x^2 \sec^4 x^3\, dx$

22. $\int \left(1+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}\right)^3 dx$

23. $\int \sec^6 \alpha \cos 2\alpha\, d\alpha$

24. $\int \frac{dt}{\cos^4 2t}$

25. $\int \csc^4 (3x-1) dx$

26. $\int \tan^5 x \sec x\, dx$

27. $\int \tan 2x \sec^3 2x\, dx$

28. $\int \operatorname{ctg}^5 x \csc^3 x\, dx$

29. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 3x\, dx}{\cos^8 3x}$

30. $\int \frac{\sec^6 x\, dx}{\sqrt{\tan x}}$

31. $\int \left(\sec^4 3t - \csc^4\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$

32. $\int \csc^4 (2x-1)\, dx$

33. $\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^6\left(\frac{\theta}{5}\right)}$

34. $\int \csc^8 x\, dx$

35. $\int x(1-\tan^4 x^2)\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \operatorname{sen}^m v\, dv$ y $\int \cos^n v\, dv$, con *m* y *n* par

En estas integrales cuando las potencias de las funciones sen x y cos x son pares, se utilizan las identidades trigonométricas del doble de un ángulo:

$$\operatorname{sen} v \cos v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2v \quad \operatorname{sen}^2 v = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2v \quad \cos^2 v = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2v$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

Solución

Se emplea la identidad correspondiente y se integra:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$$

2 Determina el resultado de $\int \operatorname{sen}^4 2x\, dx$

Solución

$$\int \operatorname{sen}^4 2x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\ 4x + \frac{1}{4}\cos^2 4x\right) dx$$

Ahora se transforma la potencia par de cos $4x$, utilizando la identidad:

$$\cos^2 v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$$

Entonces,

$$\int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\ 4x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x\right)\right) dx = \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right) dx$$

Ahora bien, al integrar cada uno de los términos queda:

$$\int \operatorname{sen}^4 2x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{\operatorname{sen}\ 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen}\ 8x}{64} + C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \cos^6 \frac{x}{3}\, dx$

Solución

La integral se expresa de la siguiente manera

$$\int \cos^6 \frac{x}{3}\, dx = \int \left(\cos^2 \frac{x}{3}\right)^3 dx$$

Se sustituye $\cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 \frac{x}{3}\, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}\right)^3 dx \\
&= \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{8}\cos^2\frac{2x}{3} + \frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{4x}{3}\right) + \frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\cos^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{2x}{3}\right)\cos\frac{2x}{3}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} + \frac{1}{8}\cos\frac{2x}{3} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3} + \frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right) dx \\
&= \frac{5}{16}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{2x}{3}\, dx + \frac{3}{16}\int \cos\frac{4x}{3}\, dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\, dx
\end{aligned}$$

Se aplica el cambio de variable para cada una de las integrales,

$$v = \frac{2x}{3} \quad dv = \frac{2}{3}dx \quad z = \frac{4}{3}x \quad dz = \frac{4}{3}dx \quad w = \operatorname{sen}\frac{2x}{3}, \quad dw = \frac{2}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$$

Entonces,

$$= \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int \cos v\,dv + \frac{3}{16}\cdot\frac{3}{4}\int \cos z\,dz - \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}\int w^2 dw$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} v + \frac{9}{64}\operatorname{sen} z - \frac{3}{16}\cdot\frac{w^3}{3} + C$$

$$= \frac{5}{16}x + \frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2x}{3} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}\frac{4x}{3} - \frac{1}{16}\operatorname{sen}^3\frac{2x}{3} + C$$

EJERCICIO **11**

Verifica las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{5}\,dx$
4. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{3x}{4}\,dx$
5. $\int \cos^2 5x\,dx$
6. $\int \cos^2 bx\,dx$
7. $\int \cos^2 \frac{x}{7}\,dx$
8. $\int \cos^2 \frac{7x}{2}\,dx$
9. $\int \operatorname{sen}^4 8x\,dx$
10. $\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx$
11. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{x}{7}\,dx$
12. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{3x}{4}\,dx$
13. $\int \cos^4 9x\,dx$
14. $\int \cos^4 bx\,dx$
15. $\int \cos^4 \frac{x}{3}\,dx$
16. $\int \cos^4 \frac{5x}{3}\,dx$
17. $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$
18. $\int \operatorname{sen}^6 4x\,dx$
19. $\int \operatorname{sen}^6 ax\,dx$
20. $\int \operatorname{sen}^6 \frac{x}{4}\,dx$
21. $\int \operatorname{sen}^6 \frac{5x}{2}\,dx$
22. $\int \cos^6 x\,dx$
23. $\int \cos^6 3x\,dx$
24. $\int \cos^6 bx\,dx$
25. $\int \cos^6 \frac{x}{2}\,dx$
26. $\int \cos^6 \frac{2x}{5}\,dx$
27. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sec^5 x}$
28. $\int \operatorname{sen}^4 3x\,dx$

29. $\int \frac{dy}{\csc^4 \frac{y}{2}}$

30. $\int \frac{dx}{\csc^2 x}$

31. $\int \frac{\cos^2 3x\, dx}{1+\tan^2 3x}$

32. $\int 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

33. $\int (3-\cos\alpha)^2 d\alpha$

34. $\int (\text{sen } x+1)^3 dx$

35. $\int \text{sen}^2\left(\frac{x}{b}\right)\cos^2\left(\frac{x}{b}\right)dx$

36. $\int\left(\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)-\sqrt{\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}\right)^2 d\theta$

37. $\int \cos^8 x\, dx$

➡ **Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

Integrales de la forma $\int \text{sen } mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \text{sen } mx \cdot \text{sen } nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

En las siguientes integrales se utilizan las identidades trigonométricas:

$$\int \text{sen } mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

$$\int \text{sen } mx \text{ sen } nx\, dx = -\frac{\text{sen}(m+n)\,x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\,x}{2(m-n)} + C$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\text{sen}(m+n)\,x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\,x}{2(m-n)} + C, \text{ cuando } m \neq n$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx$

Solución

$$\int \text{sen } 2x \cos 4x\, dx = -\frac{\cos(2+4)\,x}{2(2+4)} - \frac{\cos(2-4)\,x}{2(2-4)} + C = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos(-2x)}{-4} + C$$

$$= -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

2 Determina el resultado de $\int \cos 3x \cos x\, dx$

Solución

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos x\, dx &= \frac{\operatorname{sen}(3+1)x}{2(3+1)}+\frac{\operatorname{sen}(3-1)x}{2(3-1)}+C\\ &= \frac{\operatorname{sen} 4x}{2(4)}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2(2)}+C\\ &= \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C\end{aligned}$$

EJERCICIO 12

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen} x \cos 3x\, dx$
3. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x\, dx$
4. $\int \cos 7y \cos 3y\, dy$
5. $\int \cos(5x)\operatorname{sen}(2x)\, dx$
6. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha$
7. $\int \cos\left(\frac{3}{5}w\right)\cos\left(\frac{1}{4}w\right) dw$
8. $\int \operatorname{sen}(mx+b)\operatorname{sen}(mx-b)\, dx$
9. $\int \operatorname{sen}(3x+4)\operatorname{sen}(3x-4)\, dx$
10. $\int \operatorname{sen} 3w \operatorname{sen} 2w \operatorname{sen} w\, dw$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente