CAPÍTULO 9

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

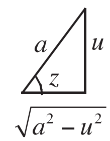
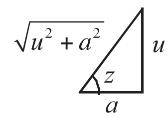
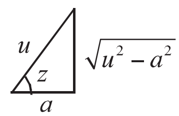
Reseña HISTÓRICA

Uno de los científicos matemáticos y físicos italianos más importantes de finales del siglo XVIII. Inventó y maduró el cálculo de variaciones y más tarde lo aplicó a una nueva disciplina, la mecánica celeste, sobre todo al hallazgo de mejores soluciones al problema de tres cuerpos. También contribuyó significativamente con la solución numérica y algebraica de ecuaciones y con la teoría numérica. En su clásica *Mecanique analytique* (*Mecánicas analíticas*, 1788), transformó la mecánica en una rama del análisis matemático. El tratado resumió los principales resultados sobre mecánica que se saben del siglo XVIII y es notable por su uso de la teoría de ecuaciones diferenciales. Otra preocupación central de Lagrange fueron los fundamentos del cálculo. En un libro de 1797 enfatizó la importancia de la serie de Taylor y el concepto de función. Sus trabajos sirvieron de base para los de Augustin Cauchy, Niels Henrik Abel, y Karl Weierstrass en el siguiente siglo.

Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)

Sustitución trigonométrica

Algunas integrales que involucran expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 + a^2}$ y $\sqrt{u^2 - a^2}$, deben resolverse utilizando las siguientes transformaciones:

Caso	**Cambio**	**Diferencial**	**Transformación**	**Triángulo**
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a \operatorname{sen} z$	$du = a \cos z\, dz$	$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos z$	
$\sqrt{u^2 + a^2}$	$u = a \tan z$	$du = a \sec^2 z\, dz$	$\sqrt{u^2 + a^2} = a \sec z$	
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a \sec z$	$du = a \sec z \tan z\, dz$	$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan z$	

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \frac{dy}{(y^2 + 7)^{\frac{3}{2}}}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza el segundo caso y se hacen los cambios propuestos, entonces

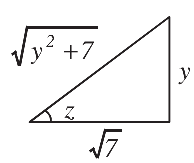
$$u^2 = y^2 \;\rightarrow\; u = y, \quad \text{luego} \quad a^2 = 7 \;\rightarrow\; a = \sqrt{7}$$

Cambiando los elementos, se sustituyen en la integral:

$$y = \sqrt{7} \tan z \qquad dy = \sqrt{7} \sec^2 z\, dz \qquad \sqrt{y^2 + 7} = \sqrt{7} \sec z$$

$$\int \frac{dy}{(y^2\ 1\ 7)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dy}{\left(\sqrt{y^2 + 7}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{7} \sec^2 z\, dz}{\left(\sqrt{7} \sec z\right)^3} = \int \frac{dz}{7 \sec z} = \frac{1}{7} \int \cos z\, dz = \frac{1}{7} \operatorname{sen} z + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces



$$\operatorname{sen} z = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 7}}$$

Se concluye que,

$$\int \frac{dy}{\left(y^2 + 7\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{7\sqrt{y^2 + 7}} + C$$

2 Resuelve $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

Solución

$$u^2 = x^2 \quad \rightarrow \quad u = x;\ a^2 = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

Para resolver la integral se aplica el tercer caso, por tanto, los cambios se sustituyen en la integral:

$$x = 2\sec\theta,\ dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$

Entonces,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{(2\sec\theta)^3(2\sec\theta\tan\theta)}{2\tan\theta}\,d\theta = \int 8\sec^4\theta\,d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\ \sec^2\theta\,d\theta$$

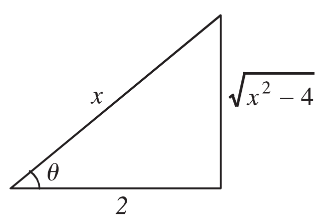
$$= 8\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 8\int (\sec^2\theta + \sec^2\theta\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\,d\theta + 8\int \tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces



En el triángulo

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = 8\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3 + C$$

$$= 4\left(\sqrt{x^2-4}\right) + \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2+8)\sqrt{x^2-4}}{3} + C$$

3 Determina el resultado de $\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx$

Solución

$$v^2 = 16x^2 \quad \rightarrow \quad v = 4x;\ a^2 = 25 \quad \rightarrow \quad a = 5$$

Para resolver la integral se utiliza el primer caso, donde

$$4x = 5 \operatorname{sen}\theta,\ x = \frac{5}{4}\operatorname{sen}\theta,\ dx = \frac{5}{4}\cos\theta\,d\theta \ \text{ y } \ \sqrt{25-16x^2} = 5\cos\theta$$

La nueva integral es:

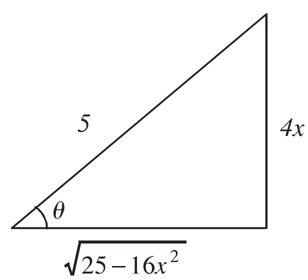
$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = \int \frac{5\cos\theta}{\frac{5}{4}\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{5}{4}\cos\theta\,d\theta = 5\int\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = 5\int\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$

$$= 5\int(\csc\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$= 5(\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| - (-\cos\theta)) + C$$

$$= 5\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + 5\cos\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo,



$$\csc\theta = \frac{5}{4x}$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Finalmente,

$$\int\frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = 5\ln\left|\frac{5}{4x} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + 5\cdot\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5} + C$$

$$= 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + \sqrt{25-16x^2} + C$$

EJERCICIO 13

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+36}}$
2. $\int \frac{dw}{(w^2+5)^{\frac{3}{2}}}$
3. $\int \frac{y^2dy}{(y^2+3)^{\frac{3}{2}}}$
4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$
5. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2+25}}$
6. $\int \frac{(36-25x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}dx$
7. $\int \frac{\alpha^2d\alpha}{\sqrt{4\alpha-\alpha^2}}$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2+16}}$
9. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-16}}$
10. $\int \frac{\sqrt{5-\theta^2}}{\theta^2}d\theta$
11. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$
12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$
13. $\int \frac{y^2dy}{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}$
14. $\int y^3\sqrt{3-y^2}dy$
15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2}}$
16. $\int \frac{w^3}{\sqrt{w^2+7}}dw$
17. $\int \frac{x^4}{\sqrt{3-x^2}}dx$
18. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{x^2-11}}$
19. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$
20. $\int \frac{\ln w}{w\sqrt{4+4\ln w-\ln^2 w}}dw$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por partes

Deducción de la fórmula
Sean u y v funciones, la diferencial del producto es:

$$d(uv) = u\cdot dv + v\cdot du$$

Se despeja $u\,dv$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Al integrar la expresión se obtiene la fórmula de integración por partes,

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Donde:

1. u es una función fácil de derivar.
2. dv es una función fácil de integrar.
3. $\int v\,du$ es más sencilla que la integral inicial.

La integral por partes se aplica en los siguientes casos:

1. Algebraicas por trigonométricas.
2. Algebraicas por exponenciales.
3. Exponenciales por trigonométricas.
4. Logarítmicas.
5. Logarítmicas por algebraicas.
6. Funciones trigonométricas inversas.
7. Funciones trigonométricas inversas por algebraicas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Solución

Se determinan u y dv y mediante una diferencial e integral se obtienen du y v respectivamente.

$$u = x \qquad\qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

Se aplica la fórmula:

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2 Determina el resultado de $\int xe^x\,dx$

Solución

Se eligen u y dv de la siguiente manera:

$$u = x \qquad\qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = \int e^x dx = e^x$$

Se sustituyen los datos en la fórmula, entonces,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

por tanto,

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \ln x\, dx$

Solución

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \int dx = x$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = (\ln x - 1) + C$$

4 Obtén el resultado de $\int \arctan x\, dx$

Solución

$$u = \arctan x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = \int dx = x$$

Por consiguiente,

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}$$

La nueva integral se resuelve por cambio de variable, entonces se elige

$$w = 1 + x^2, \quad dw = 2x\, dx$$

Y el resultado es:

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w}$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln|w| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + C$$

5 Determina el resultado de $\int e^x \cos x\, dx$

Solución

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

La nueva integral se resuelve integrando por partes,

$$u = e^x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$$

Resulta

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx\right) = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

Entonces,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

Se despeja $\int e^x \cos x\, dx$; $\qquad \int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$$

Finalmente,

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

EJERCICIO 14

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int xe^{3x} dx$
2. $\int xe^{ax} dx$
3. $\int x\, e^{\frac{x}{3}} dx$
4. $\int x \operatorname{sen} 5x\, dx$
5. $\int x \operatorname{sen} ax\, dx$
6. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{4}\, dx$
7. $\int x \cos 4x\, dx$
8. $\int x \cos bx\, dx$
9. $\int x \cos \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int 2x \ln x^2\, dx$
12. $\int x^5 \ln x\, dx$
13. $\int x^4 \ln 5x\, dx$
14. $\int x^n \ln x\, dx$

15. $\int x^2 e^x \, dx$

16. $\int y^2 e^{3y} \, dy$

17. $\int x^3 e^{4x} \, dx$

18. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x \, dx$

19. $\int x^2 \operatorname{sen} bx \, dx$

20. $\int x^3 \cos \frac{x}{2} \, dx$

21. $\int x \csc^2 ax \, dx$

22. $\int y \sec^2 my \, dy$

23. $\int \operatorname{arc\,cos} ax \, dx$

24. $\int \operatorname{arc\,sen} bx \, dx$

25. $\int \operatorname{arc\,tan} ax \, dx$

26. $\int \operatorname{arc\,sec} mx \, dx$

27. $\int \operatorname{arc\,cot} \frac{x}{n} dx$

28. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$

29. $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$

30. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{5t+3}}$

31. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^4}$

32. $\int \frac{x^2\,dx}{(2x+1)^5}$

33. $\int \frac{\ln(\ln y)}{y} dy$

34. $\int x^3 e^{2x} \, dx$

35. $\int \frac{\operatorname{arc\,cos}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

36. $\int e^{2x} \cos x \, dx$

37. $\int (\operatorname{arc\,cos} y)^2 dy$

38. $\int \frac{\operatorname{arc\,cos} x}{x^2} dx$

39. $\int \frac{w^2}{\sqrt{16-w^2}} dw$

40. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x) \, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por fracciones parciales

Integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$

Caso I. El denominador tiene sólo factores de 1er grado que no se repiten
A cada factor de la forma:

$$ax + b$$

Le corresponde una fracción de la forma,

$$\frac{A}{ax+b}$$

Donde A es una constante por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}$

Solución

Se factoriza el denominador

$$\frac{7x+29}{x^2+8x+15}=\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$7x+29=A(x+3)+B(x+5)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$7x+29=x(A+B)+3A+5B$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 3A+5B=29 \end{cases}$$

la solución del sistema es:

$$A=3 \quad \text{y} \quad B=4$$

Entonces:

$$\int \frac{(7x+29)}{x^2+8x+15}dx=\int\left(\frac{3}{x+5}+\frac{4}{x+3}\right)dx=\int\frac{3}{x+5}dx+\int\frac{4}{x+3}dx=3\ln|x+5|+4\ln|x+3|+C$$

$$\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}=\ln\left|(x+5)^3\cdot(x+3)^4\right|+C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

Solución

Se factoriza el denominador,

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

Se hace la equivalencia como sigue:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$4x-2=A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$4x-2=x^2(A+B+C)+x(-A+B-2C)-2A$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=4 \\ -2A=-2 \end{cases},$$

la solución del sistema es:

$$A=1, B=1, C=-2$$

Entonces:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C$$

$$=\ln|x|+\ln|x-2|-\ln(x+1)^2+C$$

Se aplican las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión:

$$=\ln\frac{|x(x-2)|}{(x+1)^2}+C=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

Por consiguiente:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

➲ **Caso II.** Los factores del denominador son todos de 1er grado y algunos se repiten
Si se tiene un factor de la forma $(ax+b)^n$, se desarrolla una suma como sigue:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots+\frac{Z}{ax+b}$$

En donde A, B, C y Z son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\int \frac{\left(3x^2+5x\right)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

Solución

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x-1)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad:

$$3x^2+5x=x^2(A+C)+x(2A+B)+A-B-C$$

Entonces se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5, \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

su solución es:

$$A=2, B=1, C=1$$

finalmente,

$$\int\frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|(x+1)(x-1)^2\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

2 Resuelve $\int\frac{(y^4-8)}{y^3+2y^2}\,dy$

Solución

Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división.

$$\frac{y^4-8}{y^3+2y^2}=y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}$$

Entonces,

$$\int\frac{\left(y^4-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\int\left(y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}\right)dy$$

Se separan las integrales,

$$=\int y\,dy-2\int dy+\int\frac{\left(4y^2-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\int\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$$

La integral $\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$ se resuelve mediante fracciones parciales,

$$\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}=\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} \quad \rightarrow \quad \frac{4y^2-8}{y^2(y+2)}=\frac{A}{y^2}+\frac{B}{y}+\frac{C}{y+2}$$

$$\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} = \frac{A(y+2)+By(y+2)+Cy^2}{y^2(y+2)} = \frac{y^2(B+C)+y(A+2B)+2A}{y^2(y+2)}$$

De la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C=4 \\ A+2B=0 \\ 2A=-8 \end{cases},$$

donde

$$A=-4, B=2 \text{ y } C=2$$

La integral se separa de la siguiente manera:

$$\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^{2y}}=-4\int\frac{dy}{y^2}+2\int\frac{dy}{y}+2\int\frac{dy}{y+2}=\frac{4}{y}+2\ln|y|+2\ln|y+2|+C$$

$$=\frac{4}{y}+2(\ln|y|+\ln|y+2|)+C$$

$$=\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

Se concluye que,

$$\int\frac{(y^4-8)\,dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

EJERCICIO 15

Obtén las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}dx$
2. $\int \frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}dx$
3. $\int \frac{(x^2+11x-30)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$
4. $\int \frac{(12+10x-2x^2)\,dx}{x^3-4x}$
5. $\int \frac{(-9x-9)\,dx}{x(x^2-9)}$
6. $\int \frac{7x^2-4}{x^3+x^2-2x}$
7. $\int \frac{(16x^2-48x+15)\,dx}{2x^3-7x^2+3x}$
8. $\int \frac{(8+3x-x^2)\,dx}{(2x+3)(x+2)^2}$
9. $\int \frac{2x^2-5x+4dx}{(x-2)^3}$
10. $\int \frac{2x^2-10x+14}{(x-3)^3}$
11. $\int \frac{(x^2+x-1)}{x^3+2x^2+x}dx$
12. $\int \frac{dy}{(y-m)(y-n)}$

13. $\int \frac{w^2 - 9w + 25}{w^2 - 9w + 20} dw$

14. $\int \frac{dy}{(y-3)(y-2)(y-1)}$

15. $\int \frac{3 - 5x}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx$

16. $\int \frac{3\,dw}{w^3 - w}$

17. $\int \frac{(11x - 7)\,dx}{2x^2 - 3x - 2}$

18. $\int \frac{w^2 dw}{(w-6)(w^2 - 36)}$

19. $\int \frac{8x - 3}{12x^2 - 7x + 1} dx$

20. $\int \frac{(x - x^2)dx}{3x^3 + 26x^2 + 64x + 32}$

21. $\int \frac{5x^2 - 5}{x^3 - 9x^2 + 23x - 15} dx$

22. $\int \frac{2x^5 + x^4 - 39x^3 - 22x^2 + 112x + 96}{4x^3 - 25x^2 + 38x - 8} dx$

23. $\int \frac{dx}{16x - x^3}$

24. $\int \frac{5 - 4x}{6x - x^2 - x^3} dx$

25. $\int \frac{m}{(1-m)^2} dm$

26. $\int \frac{y\,dy}{(y+5)^2(y-5)}$

27. $\int \frac{(x+2)dx}{x(x+6)^2}$

28. $\int \frac{x^2 + 1}{(2x-1)^3} dx$

29. $\int \frac{1 + x^5}{(x-1)^4} dx$

30. $\int \frac{x^3}{(x-3)^2(x+3)^2} dx$

31. $\int \frac{x^3 - 1}{x^3(x-2)^2} dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Caso III. El denominador contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite

A todo factor de la forma $ax^2 + bx + c$, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

En donde A y B son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}$

Solución

La expresión

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x}=\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$

entonces:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{x^2(A+B)+Cx+3A}{x(x^2+3)}$$

De la igualdad resulta el sistema:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=2, C=0$$

Entonces,

$$\int\frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\int\frac{2dx}{x}+\int\frac{(2x+0)dx}{x^2+3}=2\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{x\,dx}{x^2+3}=2\ln|x|+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2(x^2+3)+C$$

Por consiguiente,

$$\int\frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\ln x^2(x^2+3)+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales,

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$= \frac{A(x^2+1)+Bx^2-3Bx+Cx-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+x(-3B+C)+A-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

De la igualdad resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3B+C=1 \\ A-3C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=\frac{6}{5},\ B=-\frac{1}{5} \text{ y } C=\frac{2}{5}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int \frac{(x^2+x)dx}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{6}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{\left(-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{6}{5}\ln|x-3| - \frac{1}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{6}{5}\ln|x-3| - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\arctan x + C$$

$$= \ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right| + \frac{2}{5}\arctan x + C$$

Finalmente:

$$\int \frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx = \ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right| + \frac{2}{5}\arctan x + C$$

➲ **Caso IV.** Los factores del denominador son todos de segundo grado y algunos se repiten
Si existe un factor de segundo grado de la forma

$$(ax^2+bx+c)^n$$

Se desarrolla una suma de n fracciones parciales, de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{Vx+W}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales:

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x^3+2x)+(Dx+E)x}{x(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^4+4x^2+4)+(Bx^4+2Bx^2+Cx^3+2Cx)+(Dx^2+Ex)}{x(x^2+2)^2}$$

Se agrupan términos semejantes,

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{x^4(A+B)+Cx^3+x^2(4A+2B+D)+x(2C+E)+4A}{x(x^2+2)^2}$$

De la igualdad anterior se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+2B+D=4 \\ 2C+E=2 \\ 4A=8 \\ C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=-2, C=0, D=0 \text{ y } E=2$$

La integral se puede separar en:

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$=2\ln|x|-\ln|x^2+2|+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

La última integral se resuelve por sustitución trigonométrica y el resultado es:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}+C$$

Este resultado se sustituye en la integral.

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=\ln|x^2|-\ln|x^2+2|+2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}\right)+C$$

Entonces se concluye que:

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)\,dx}{x(x^2+2)^2}=\ln\left|\frac{x^2}{x^2+2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)+\frac{x}{2x^2+4}+C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2}$

Solución

Como el numerador es más grande en grado que el denominador, se realiza la división,

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2} = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}$$

Entonces la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int xdx - \int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

La integral

$$\int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

se realiza por fracciones parciales,

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+x(4A+C)+4B+D}{(x^2+4)^2}$$

De la cual se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A=8 \\ B=0 \\ 4A+C=16 \\ 4B+D=0 \end{cases}$$

donde $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$

$$\int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = 8\int \frac{x\,dx}{x^2+4} - 16\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^2} = 4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}$$

Finalmente, este resultado se sustituye en la integral

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int xdx - \int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - \left(4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\ln\left|x^2+4\right| - \frac{8}{x^2+4} + C$$

EJERCICIO 16

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dm}{m^3+m^2}$

2. $\int \frac{dm}{m^3+m}$

3. $\int \frac{x^5-6x^3-6x^2-8}{x^3-6x}\,dx$

4. $\int \frac{(2x^5+x^4+37x^3+28x^2+171x+162)}{x(x^2+9)^2}\,dx$

5. $\int \frac{8\,dy}{y^4-16}$

6. $\int \frac{x^4-1}{x^3-x^2+9x-9}\,dx$

7. $\int \frac{4x^2+48}{16-x^4}\,dx$

8. $\int \frac{y^3+5y}{(y^2+1)^2}\,dy$

9. $\int \frac{x^3+4}{x^4-5x^2+4}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{x^3-8}$

11. $\int \frac{y^5}{1-y^4}\,dy$

12. $\int \frac{2x^3+9x^2+14x+8}{(x^2+2x)(x^2+2)}\,dx$

13. $\int \frac{(5x^4-x^3+8x^2-4x+4)}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx$

14. $\int \frac{(3x^2+5x-1)}{(x^2+2x-1)^2}\,dx$

15. $\int \frac{x^2-5x+3}{(x^2-6x+8)^2}\,dx$

16. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+4)^2}$

17. $\int \frac{(4x^4+x^3+30x^2+7x+49)}{(x^2+4)^2(x+1)}\,dx$

18. $\int \frac{(3x^4+x^3+22x^2+5x+50)}{x(x^2+5)^2}\,dx$

19. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+5)^2}$

20. Demuestra que $\int \frac{3x^5+13x^4+32x^3+8x^2-40x-75}{x^2(x^2+3x+5)^2}\,dx$ equivale a:

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4(x^2+3x+5)\right|-\frac{35\sqrt{11}}{121}\arctan\left(\frac{\sqrt{11}(2x+3)}{11}\right)+\frac{3}{x}-\frac{4(3x+10)}{11(x^2+3x+5)}+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por sustitución de una nueva variable

Algunas integrales que contienen exponentes fraccionarios o radicales no se pueden integrar de manera inmediata; por lo anterior se hace una sustitución por una nueva variable, de tal modo que la integral que resulte se pueda integrar por alguno de los métodos estudiados.

Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de x

Una integral que contenga potencias fraccionarias de x, se puede transformar a otra mediante la sustitución:

$$x = w^n$$

Donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

Ejemplo

Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

Solución

Se obtiene el menor denominador común que en este caso es 4, por lo que la sustitución es:

$$x = w^4$$

Luego,

$$x^{\frac{1}{2}} = w^2,\ x^{\frac{1}{4}} = w \quad \text{y} \quad dx = 4w^3dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4w^3dw}{w^2 - w}$$

Se integra,

$$\begin{aligned}\int \frac{4w^3}{w^2 - w}dw = 4\int\left(w + 1 + \frac{w}{w^2 - w}\right)dw &= 4\int wdw + 4\int dw + 4\int \frac{wdw}{w^2 - w}\\ &= \frac{4w^2}{2} + 4w + 4\int \frac{w\,dw}{w(w-1)}\\ &= 2w^2 + 4w + 4\int \frac{dw}{w-1} + C\\ &= 2w^2 + 4w + \ln|w - 1| + C\end{aligned}$$

Pero $w = x^{\frac{1}{4}}$, se demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de $a + bx$

Una integral que contenga potencias fraccionarias de $a + bx$, se puede transformar en otra, mediante la sustitución:

$$a + bx = w^n$$

Donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1 + (x+1)^{\frac{2}{3}}}dx = (x + 1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3\arctan\sqrt[3]{x+1} + C$

Solución

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores de las potencias fraccionarias y se realiza el cambio,

$$x + 1 = w^3$$

donde $dx = 3w^2\,dw \quad \text{y} \quad (x+1)^{\frac{2}{3}} = w^2,$

Por tanto, la nueva integral resulta,

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx \quad \int \frac{w^2}{1+w^2}(3w^2dw) = 3\int \frac{w^4}{w^2+1}\,dw$$

Se resuelve la división y se integra:

$$3\int \frac{w^4}{w^2+1}\,dw = 3\int\left(w^2-1+\frac{1}{w^2+1}\right)dw = 3\int w^2dw - 3\int dw + 3\int \frac{dw}{w^2+1}$$

$$= w^3 - 3w + 3\text{ arc tan } w + C$$

$x + 1 = w^3$, entonces $w=(x+1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x+1}$, por consiguiente se deduce que:

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = (x+1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3\text{ arc tan}\sqrt[3]{x+1} + C$$

2 Demuestra que $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3}-\ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right|+C$

Solución

La sustitución que se realiza es:

$$w^2 = x + 3$$

donde,

$$x + 1 = w^2 - 2,\ x + 2 = w^2 - 1 \quad \text{y} \quad dx = 2w\,dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = \int \frac{(w^2-2)}{(w^2-1)(w)}(2w\,dw) = 2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}\,dw$$

Ahora bien, al resolver la división e integrar, se obtiene:

$$2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}\,dw = 2\int\left(1-\frac{1}{w^2-1}\right)dw = 2\int dw - 2\int \frac{dw}{w^2-1} = 2w - \ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right| + C$$

$w^2 = x + 3$, entonces $w = \sqrt{x+3}$ y al sustituir se obtiene:

$$= 2\sqrt{x+3}-\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right| + C$$

Se racionaliza,

$$= 2\sqrt{x+3}-\ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$$

Por consiguiente, se comprueba que:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3}-\ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right|+C$$

EJERCICIO 17

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{3x^{\frac{1}{3}}dx}{1+x^{\frac{2}{3}}}$

2. $\int \frac{x^{\frac{1}{5}}dx}{1+x^{\frac{3}{5}}}$

3. $\int \frac{x\,dx}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}$

4. $\int \frac{x}{3\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}}dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}$

6. $\int \frac{x^{\frac{1}{6}}dx}{\sqrt{4+x^{\frac{1}{3}}}}$

7. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}$

8. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+2}$

9. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}-3}$

10. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{3}}+1}$

11. $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x}(x+5)}$

12. $\int \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{2}}+(x-3)^{\frac{1}{4}}}$

13. $\int \frac{(t-1)\,dt}{t\sqrt{t+2}}$

14. Demuestra que $\int \frac{(x+2)^{\frac{1}{6}}\,dx}{\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}}$ equivale a:

$$\left[(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{8(x+2)^{\frac{5}{6}}-10(x+2)^{\frac{1}{2}}+15(x+2)^{\frac{1}{6}}}{8}\right]-\frac{15}{8}\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{6}}+\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}\right|+C$$

15. Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{3}}}$ equivale a:

$$\sqrt[12]{x}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{7}{12}}-\frac{12}{7}x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{12}}-\frac{12}{5}x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{1}{6}}+6x^{\frac{1}{12}}-12\right)+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}+1\right|+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración de las diferenciales binomias

Son aquellas integrales que contienen expresiones de la forma $x^w(a+bx^t)^{\frac{p}{q}}$ con $t>0$ y se reducen mediante los cambios de variable que se indican:

Caso I

Si $\dfrac{w+1}{t}=L$ con $L\in Z$ su cambio de variable es:

$$u=(a+bx^t)^{\frac{1}{q}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{4+x^3}+C$

Solución

En la integral se observa que

$$w=2,\ t=3,\ p=-1 \text{ y } q=2$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t}=\frac{2+1}{3}=1,\quad 1\in Z$$

Por tanto, el cambio de variable es:

$$u=(4+x^3)^{\frac{1}{2}}\quad \text{donde}\quad u^2=4+x^3$$

Se despeja la variable x y se determina la diferencial,

$$x=(u^2-4)^{\frac{1}{3}}\quad \text{y}\quad dx=\frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int\frac{x^2dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}}=\int x^2(4+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx=\int(u^2-4)^{\frac{2}{3}}(u^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

$$=\frac{2}{3}\int du=\frac{2}{3}u+C$$

Pero

$$u=(4+x^3)^{\frac{1}{2}}$$

por consiguiente:

$$\int\frac{x^2dx}{\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{4+x^3}+C$$

2 Comprueba que $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$

Solución

En esta integral

$$w = 3, t = 2, p = -1 \text{ y } q = 3$$

entonces

$$\frac{w+1}{t} = \frac{3+1}{2} = 2\,,\ 2 \in Z$$

El cambio de variable es,

$$u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{donde} \quad u^3 = 1 + x^2$$

Se despeja la variable x y se determina la diferencial,

$$x = (u^3-1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad dx = \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

Se sustituye en la integral y se obtiene:

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}dx = \int (u^3-1)^{\frac{3}{2}}(u^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\int (u^3-1)u\,du = \frac{3}{10}u^5 - \frac{3}{4}u^2 + C$$

Pero $u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$, por tanto, al sustituir y simplificar el resultado

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{10}(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{5}(x^2+1) - \frac{1}{2}\right) + C$$

$$= \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

Caso II

Si $\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q}=L$, $L\in Z$ el cambio de variable es:

$$u=\left(\frac{a+bx^t}{x^t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ejemplo

Demuestra que:

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=-\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}+C$$

Solución

En esta integral

$$w=-2,\ t=4,\ p=-3\ \text{ y }\ q=4$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q}=\frac{-2+1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$$

Por consiguiente, el cambio de variable es,

$$u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}\quad \text{donde}\quad x=\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}}\quad \text{y}\quad dx=\frac{-u^3\,du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}$$

Al sustituir en la integral se obtiene,

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=\int x^{-2}(1+x^4)^{-\frac{3}{4}}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}}\right)^{-2}\left(\frac{u^4}{u^4-1}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{-u^3du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)=-\int du=-u+C$$

Pero $u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}$, entonces de acuerdo con el resultado anterior

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=-\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}+C$$

EJERCICIO 18

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{y^3\,dy}{(2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

2. $\int x^3\sqrt{7-5x^2}\,dx$

3. $\int \frac{x^5\,dx}{(9+x^3)^{\frac{5}{4}}}$

4. $\int x^3(3+4x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx$

5. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

6. $\int \frac{(4+3x^4)^{\frac{3}{2}}dx}{x}$

7. $\int \frac{5\,dx}{x(x^5+16)^{\frac{1}{4}}}$

8. $\int \frac{dx}{x^2(4-x^4)^{\frac{3}{4}}}$

9. $\int x^2(3+x)^{\frac{5}{3}}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformaciones de diferenciales trigonométricas

Aquellas integrales que tengan una forma racional, cuyos elementos sean funciones trigonométricas seno y coseno, se emplean las siguientes sustituciones, mediante la transformación:

De la identidad trigonométrica,

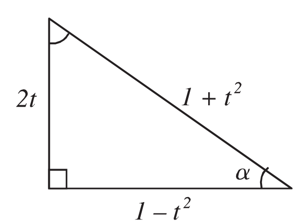
$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se realiza el cambio $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$

$$t^2=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se despeja cos α, $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dada la función trigonométrica cos α, se completa el triángulo rectángulo de la siguiente figura:



Por tanto, $\text{sen}\,\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\qquad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

luego, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$ entonces $d\alpha=2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha}$

Solución

Se emplea el cambio

$$d\alpha = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

se sustituye en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3-2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{5t^2+1}{1+t^2}}dt = 2\int \frac{dt}{5t^2+1} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\ t\right)\right] + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, por tanto, se deduce que,

$$\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{d\theta}{5\text{sen}\,\theta - 1}$

Solución

Se sustituye

$$d\theta = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-1}dt = 2\int \frac{dt}{-t^2+10t-1} = -2\int \frac{dt}{(t-5)^2-24} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{t-2\sqrt{6}-5}{t+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, por tanto, se concluye que,

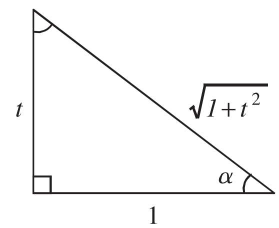
$$\int \frac{d\theta}{5\,\text{sen}\,\theta - 1} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-2\sqrt{6}-5}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

Fórmulas equivalentes de transformación

Otro cambio que se emplea en las integrales en forma racional que contienen funciones trigonométricas seno y coseno es:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \tan\alpha = t \quad \text{y} \quad d\alpha = \frac{dt}{1+t^2}$$

Cuyo triángulo es,



Se recomienda utilizar estas sustituciones cuando se tienen las expresiones: $\operatorname{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

EJEMPLOS

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{dy}{(5-\operatorname{sen} y)(5+\operatorname{sen} y)}$

Solución

La integral es equivalente a

$$\int \frac{dy}{25-\operatorname{sen}^2 y}$$

Entonces,

$$dy = \frac{dt}{1+t^2}\ ;\ \operatorname{sen} y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene,

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{25-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{24t^2+25}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{24t^2+25} = \frac{\sqrt{6}}{60}\arctan\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}t\right)+C$$

Pero $\tan y = t$, por tanto, se concluye que,

$$\int \frac{dy}{(5-\operatorname{sen} y)(5+\operatorname{sen} y)} = \frac{\sqrt{6}}{60}\arctan\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\tan y\right)+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{(\tan^3 x + 1)\, dx}{3\cos^2 x - 2\text{sen}\, x \cos x + \text{sen}^2 x}$

Solución

Se sustituyen las equivalencias en la integral y se simplifican:

$$\int \frac{\left(\tan^3 x + 1\right) dx}{3\cos^2 x - 2\ \text{sen}\ x \cos x + \text{sen}^2 x} = \int \frac{\left(t^3 + 1\right)\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2}\, dt}{\frac{3}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2}\, dt}{\frac{3-2t+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{(t^3+1)\, dt}{t^2 - 2t + 3}$$

La integral resultante se expresa de la siguiente manera,

$$\int \frac{(t^3+1)dt}{t^2-2t+3} = \int \left(t + 2 + \frac{t-5}{t^2-2t+3}\right) dt$$

Se resuelve cada una de las integrales,

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1-4}{t^2-2t+3}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1}{t^2-2t+3}\, dt - 4\int \frac{dt}{t^2-2t+3}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\int \frac{dt}{(t-1)^2+2}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tan}\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C$$

Pero $t = \tan x$, entonces:

$$\frac{1}{2}\tan^2 x + 2\tan x + \frac{1}{2}\ln\left|\tan^2 x - 2\tan x + 3\right| - 2\sqrt{2}\ \text{arc tan}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

EJERCICIO 19

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{d\theta}{4+5\cos\theta}$
2. $\int \frac{d\theta}{1+2\cos\theta}$
3. $\int \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha + 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$
4. $\int \frac{dx}{1-\cos x+\operatorname{sen} x}$
5. $\int \frac{3}{(1+\operatorname{sen}\beta)^2}\,d\beta$
6. $\int \frac{dw}{\operatorname{sen} w+\cos w-1}$
7. $\int \frac{d\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}$
8. $\int \frac{d\theta}{3\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$
9. $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta+\operatorname{sen} 2\theta}$
10. $\int \frac{d\theta}{4\sec\theta-1}$
11. $\int \frac{d\alpha}{6-3\operatorname{sen}\alpha+4\cos\alpha}$
12. $\int \frac{dx}{2+3\sec x}$
13. $\int \frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}\,d\beta$
14. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}\,d\theta$
15. $\int \frac{3\operatorname{sen}\theta+4\cos\theta}{4\operatorname{sen}\theta-3\cos\theta}\,d\theta$
16. $\int \frac{dw}{\operatorname{sen}^2 w-5\operatorname{sen} w\cdot\cos w+\cos^2 w}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente