Capítulo 7

Integrales inmediatas

Reseña histórica

Matemático ruso conocido por sus trabajos en teoría de aproximación de funciones, geometría diferencial, polinomios ortogonales y probabilidad.

El nombre "Chevichev" es una transliteración del alfabeto cirílico, por lo que a veces se encuentra con grafías diferentes, por ejemplo: Chevyshev, Tchebyshef y otras similares.

Su aportación en matemáticas es notable, debido a sus múltiples aplicaciones tanto en teoría de la aproximación de funciones por polinomios, como en análisis numérico (inversión de matrices, la evaluación numérica de integrales, la integración numérica de ecuaciones diferenciales, o la más precisa aproximación a una función).

Pafnuti Lvovich Chevichev murió el 26 de noviembre de 1894 en San Petersburgo.

Pafnuti Lvovich Chevichev
(1821-1894)

Definición

Si $F(x)$ es una función con derivada $f'(x)$ entonces, $F(x)$ se llama *integral indefinida* o *antiderivada de* $f'(x)$.
La antiderivada de una función no es única.

Ejemplo

$$x^3, x^3+4, x^3-1$$

Son todas antiderivadas de $f'(x)=3x^2$, puesto que todas las antiderivadas de $f'(x)$ quedan incluidas en $F(x)=x^3+C$, en donde C se llama constante de integración.

Para denotar la integral indefinida de $f'(x)$ se utiliza:

$$\int f'(x)dx$$

Entonces,

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

Fórmulas

1. $\int (du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw$
2. $\int a\,dv = a\int dv$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,,\ n\neq -1$
5. $\int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C\,,\ n\neq -1$
6. $\int \frac{dv}{v}=\ln|v|+C$
7. $\int a^v\,dv=\frac{a^v}{\ln a}+C$
8. $\int e^v\,dv=e^v+C$
9. $\int \operatorname{sen} v\,dv=-\cos v+C$
10. $\int \cos v\,dv=\operatorname{sen} v+C$
11. $\int \sec^2 v\,dv=\tan v+C$
12. $\int \csc^2 v\,dv=-\cot v+C$
13. $\int \sec v\tan v\,dv=\sec v+C$
14. $\int \csc v\cot v\,dv=-\csc v+C$
15. $\int \tan v\,dv=-\ln|\cos v|+C=\ln|\sec v|+C$
16. $\int \cot v\,dv=\ln|\operatorname{sen} v|+C$
17. $\int \sec v\,dv=\ln|\sec v+\tan v|+C$
18. $\int \csc v\,dv=\ln|\csc v-\cot v|+C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int x^4dx$

Solución

$$\int x^4dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{x^5}{5}+C$$

2 Encuentra $\int 3ab^2x^4dx$

Solución

$$\int 3ab^2x^4\,dx = 3ab^2\int x^4\,dx = 3ab^2\,\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{3ab^2x^5}{5} + C$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\int (5x^3 + 2x^2 - 6x + 3)dx$?

Solución

$$\begin{aligned}\int (5x^3 + 2x^2 - 6x + 3)dx &= 5\int x^3dx + 2\int x^2dx - 6\int x\,dx + 3\int dx\\ &= 5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C\\ &= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 3x + C\\ &= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + C\end{aligned}$$

4 Obtén $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

5 ¿Cuál es el resultado de $\int -\frac{3\,dx}{x^3}$?

Solución

$$\int -\frac{3\,dx}{x^3} = -3\int \frac{dx}{x^3} = -3\int x^{-3}dx = -3\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{-3x^{-2}}{-2} + C = \frac{3}{2x^2} + C$$

Integrales por cambio de variable

Algunas integrales no se pueden resolver de forma inmediata, entonces se tratará de ser posible transformar la integral a una de las siguientes expresiones

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$$

En las integrales que se resuelven por cambio de variable, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se identifica la variable.
2. Se obtiene la diferencial de esta variable y se efectúa el despeje de la misma.
3. Se realiza la sustitución correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente integral:

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}} x\,dx$$

Solución

Se elige, de la siguiente forma, la nueva variable que se va a integrar:

$$v = 2 + x^2 \qquad \rightarrow \qquad dv = 2x\,dx$$

Se realizan las sustituciones y se resuelve la integral para obtener el resultado.

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}} x\,dx = \int (2+x^2)^{\frac{3}{2}}(2x)dx = \int v^{\frac{3}{2}}dv = \frac{v^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

Por consiguiente,

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}} x\,dx = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

2 Determina el resultado de $\int \sqrt{m+nx}\,dx$

Solución

$v = m + nx,\ dv = ndx$ donde $dx = \dfrac{dv}{n}$

Al realizar las sustituciones se genera la integral:

$$\int \sqrt{m+nx}\,dx = \int (m+nx)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{n}\int v^{\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3n} + C = \frac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} + C$$

Finalmente, $\int \sqrt{m+nx}\,dx = \dfrac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} + C$

3 Encuentra el resultado de $\int x(2+x^3)^2 dx$

Solución

$v = 2 + x^3,\ dv = 3x^2dx$ donde $dx = \dfrac{dv}{3x^2}$

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int x\cdot v^2\frac{dv}{3x^2} = \int v^2\frac{dv}{3x}$$

En este ejemplo el cambio de variable no se puede efectuar debido a que la nueva integral tiene dos variables. Entonces, se realiza el producto indicado y se resuelve la integral.

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int (4+4x^3+x^6)x\,dx = \int (4x+4x^4+x^7)dx = 2x^2 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^8}{8} + C$$

Por consiguiente,

$$\int x(2+x^3)^2dx = 2x^2 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^8}{8} + C$$

4 Precisa la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{2+3x}$$

Solución

$v = 2 + 3x$, $dv = 3dx$ donde $\frac{dv}{3} = dx$

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\ln|v| + C = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

5 Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}}$$

Solución

$v = c + ae^{\theta}$, $dv = ae^{\theta}d\theta$ donde, $\frac{dv}{a} = e^{\theta}d\theta$

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\ln|v| + C = \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

6 Encuentra la primitiva de

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\,dx$$

Solución

$v = 1 - \cos 5x$, $dv = 5 \text{ sen } 5x\, dx$ donde $\frac{dv}{5} = \text{sen } 5x\, dx$

Se realiza la sustitución:

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\,dx = \int \frac{1}{5} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\ln|v| + C = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{\text{sen } 5x\, dx}{1-\cos 5x} = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

EJERCICIO 3

Efectúa las siguientes integrales:

1. $\int x^6 dx$
2. $\int 5x^4 dx$
3. $\int bx^3 dx$
4. $\int \sqrt{3}x^2 dx$
5. $\int a\, dx$
6. $\int \frac{3\,dx}{4}$
7. $\int \frac{dx}{3}$
8. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$
9. $\int 5\sqrt[4]{x}\, dx$
10. $\int \frac{dx}{x^3}$
11. $\int \frac{5\,dx}{x^4}$
12. $\int \frac{4\,dx}{x}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$
14. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt[3]{x}}$
15. $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$
16. $\int \frac{a\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
17. $\int \frac{5\,dx}{2x}$
18. $\int \sqrt{bx}\, dx$
19. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}} - 4\sqrt[3]{x}\right) dx$
20. $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x}\right) dx$
21. $\int \sqrt[3]{at}\, dt$
22. $\int \sqrt{6t}\, dt$
23. $\int (8x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 3)\, dx$
24. $\int (ax^3 - bx^2 - cx + d)\, dx$
25. $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{3x}{\sqrt{a}} - 5\sqrt{b}\right) dx$
26. $\int \left(\frac{x^4 - 6x^3 - 7x}{x}\right) dx$
27. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$
28. $\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$
29. $\int \left(y^{\frac{5}{2}} - 5y^{\frac{4}{3}} - 2y^{\frac{1}{4}} - \sqrt{y}\right) dy$
30. $\int \left(\frac{y^{\frac{7}{2}} - y^{\frac{5}{3}} - y^{\frac{1}{4}}}{y^2}\right) dy$
31. $\int \sqrt[3]{t}\,(5t^2 - 3t + 2)\, dt$
32. $\int \sqrt[3]{7t}\, dt$
33. $\int (3x+4)^6 dx$
34. $\int (ax^2 - b)^5 x\, dx$
35. $\int t^2 (t^3 - 4)^2 dt$
36. $\int (a - by)^4 dy$
37. $\int (t^2 - 6)^2 dt$
38. $\int x(x+4)^2 dx$

39. $\int x^2(x+1)^3\,dx$

40. $\int \sqrt{m+ny}\,dy$

41. $\int \sqrt{5x-3}\,dx$

42. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{at^2+b}}$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}}$

44. $\int \left(\sqrt{x}-4\right)^2 dx$

45. $\int \frac{x\,dx}{(3x^2-4)^4}$

46. $\int \frac{5\,dx}{(3x-4)^2}$

47. $\int \frac{8x\,dx}{(2x^2+5)^4}$

48. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-b\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\int \frac{dt}{at+b}$

50. $\int \frac{x\,dx}{3x^2-4}$

51. $\int \frac{dx}{x+3}$

52. $\int \frac{4x\,dx}{2x^2-6}$

53. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{(x^2-3x+6)^2}$

54. $\int (x^2-2)\sqrt{x^3-6x+3}\,dx$

55. $\int \frac{y^{n-1}dy}{(ay^n+b)^m}$

56. $\int e^{3x}(1-e^{3x})^2\,dx$

57. $\int \frac{(4-\ln|x+3|)^3\,dx}{x+3}$

58. $\int \cos 4x(1-\operatorname{sen} 4x)^3\,dx$

59. $\int \csc^2 x\sqrt{3+\cot x}\,dx$

60. $\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{\sqrt{1-\sec 2x}}\,dx$

61. $\int \frac{\cos ax}{1-\operatorname{sen} ax}\,dx$

62. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{e^{\sqrt{x}}-1}}{\sqrt{x}}\,dx$

63. $\int \cot x(2+\ln|\operatorname{sen} x|)\,dx$

64. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{(1-\cos^2 x)^3}$

65. $\int \operatorname{sen}^2 bx \cos bx\,dx$

66. $\int \cot mx \csc^2 mx\,dx$

67. $\int \cos^2 4x \operatorname{sen} 4x\,dx$

68. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\operatorname{sen} 5x+4}}\,dx$

69. $\int \frac{4x+2}{x+2}\,dx$

70. $\int \frac{(3x^2+2)\,dx}{x-1}$

71. $\int \frac{dy}{y\ln^2 y}$

72. $\int \frac{dx}{2x\ln 3x}$

73. $\int x^n\sqrt{ax^{n+1}+b}\,dx$

74. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\,dx$

75. $\int \csc^2 3x \cos 3x\,dx$

76. $\int \left(\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+1}\right)dx$

77. $\int\left(\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{4}{x+5}\right)dx$

78. $\int\left(\dfrac{3}{2x-1}+\dfrac{5}{3x-4}\right)dx$

79. $\int\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$

80. $\int \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} 2x\,dx$

81. $\int\dfrac{dw}{\operatorname{sen}^2 w\sqrt{1-\cot w}}$

82. $\int\dfrac{3\operatorname{sen} y\cos y}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2 y}}\,dy$

83. $\int\sqrt{1+\cos\alpha}\,d\alpha$

84. $\int\dfrac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{4}} x}{\cos^{\frac{11}{4}} x}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de funciones exponenciales

Las siguientes fórmulas se emplean para integrar funciones exponenciales

$$\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln a}+C \quad \text{y} \quad \int e^v dv=e^v+C$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la integral indefinida de $\int e^{2x}dx$

Solución

Se escoge la variable de acuerdo con la fórmula que se va a emplear, en este caso,

$$v=2x,\quad \text{su diferencial}\quad dv=2dx\quad \text{donde,}\quad dx=\frac{dv}{2}$$

Se realiza el cambio de variable y el resultado es,

$$\int e^{2x}dx=\int e^v\frac{dv}{2}=\frac{1}{2}\int e^v dv=\frac{1}{2}e^v+C\ =\ \frac{1}{2}e^{2x}+C$$

Finalmente,

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

2 Determina el resultado de $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$

Solución

$$v=\frac{x}{3},\quad dv=\frac{1}{3}\,dx\quad \text{donde,}\quad 3dv=dx$$

Por consiguiente, al realizar la sustitución se obtiene:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx=3\int e^v\,dv=3e^v+C\ =\ 3e^{\frac{x}{3}}+C$$

3 Obtén la función primitiva de $\int a^{nx}dx$

Solución

$v = nx, dv = n\,dx$ donde, $\frac{dv}{n} = dx$

Se realiza la sustitución,

$$\int a^{nx}dx = \frac{1}{n}\int a^{v}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{a^{v}}{\ln a} + C = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

Por tanto,

$$\int a^{nx}dx = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \frac{dx}{e^{2x}}$

Solución

$v = -2x, dv = -2dx$ donde, $\frac{dv}{-2} = dx$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{v}dv = -\frac{1}{2}e^{v} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C = \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

EJERCICIO 4

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int e^{4x}dx$
2. $\int 8e^{\frac{x}{2}}\,dx$
3. $\int e^{ax+b}dx$
4. $\int \frac{e^{\sqrt{3x}}dx}{\sqrt{3x}}$
5. $\int \frac{e^{8x}}{e^{5x}}\,dx$
6. $\int e^{\cos 4x}\operatorname{sen} 4x\,dx$
7. $\int 2x^{2}e^{x^{3}}dx$
8. $\int b^{4x}dx$
9. $\int 3^{2x}dx$
10. $\int 2^{x}e^{x}dx$
11. $\int \sqrt[3]{e^{x}}\,dx$
12. $\int \sqrt{e^{3x}}\,dx$
13. $\int \frac{dx}{5^{4x}}$
14. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^{2}}}}{x^{3}}\,dx$
15. $\int \left[\sqrt[3]{e^{x}}\right]^{4}dx$
16. $\int x^{2}(3 - e^{x^{3}})\,dx$
17. $\int (2x-3)e^{x^{2}-3x+1}dx$
18. $\int \frac{dt}{\sqrt[5]{e^{2t}}}$

19. $\int e^{\frac{1}{\sec 2x}} \operatorname{sen} 2x\, dx$

20. $\int \frac{t^3 dt}{e^{2t^4}}$

21. $\int 4^x \cdot e^{2x} dx$

22. $\int \left(e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{x}{2}} \right) dx$

23. $\int (e^{3x} - 2)^2 dx$

24. $\int x \cdot 5^{x^2} dx$

25. $\int (e^{2x} - e^{-2x})^2 dx$

26. $\int e^{\tan 3x} \sec^2 3x\, dx$

27. $\int x^2 5^{x^3} dx$

28. $\int (10^{3x} - 2^x)\, dx$

29. $\int \left(e^{\frac{x}{n}} - a^{\frac{x}{n}} \right) dx$

30. $\int \left(\frac{e^{4x} - 5}{e^{2x}} \right) dx$

31. $\int \left(\frac{1 - e^{ax}}{e^{ax}} \right) dx$

32. $\int \frac{e^{\cos^2 x}}{\csc 2x} dx$

33. $\int \frac{e^{\operatorname{arc sen} 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$

34. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx$

35. $\int (3^{2x} + 3^{4x})^2 dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se integran con las siguientes fórmulas y en algunos casos auxiliándose de un cambio de variable.

1. $\int \operatorname{sen} v\, dv = -\cos v + C$

2. $\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + C$

3. $\int \sec^2 v\, dv = \tan v + C$

4. $\int \csc^2 v\, dv = -\cot v + C$

5. $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + C$

6. $\int \csc\ v \cot\ v\ dv = -\csc\ v + C$

7. $\int \tan v\, dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$

8. $\int \cot v\, dv = \ln|\operatorname{sen} v| + C$

9. $\int \sec v\, dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$

10. $\int \csc v\, dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \cos my\, dy$

Solución

Se hace un cambio de variable y se obtiene su diferencial:

$$v = my, \quad dv = mdy, \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{m} = dy$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int \cos my\, dy = \int \cos v \frac{dv}{m} = \frac{1}{m}\int \cos v\, dv = \frac{1}{m}\operatorname{sen} v + C = \frac{1}{m}\operatorname{sen} my + C$$

2 ¿Cuál es el resultado de $\int \sec 7x\, dx$?

Solución

$v = 7x, \quad dv = 7dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{7} = dx$

$$\int \sec 7x\, dx = \frac{1}{7}\int \sec v\, dv = \frac{1}{7}\ln|\sec v + \tan v| + C = \frac{1}{7}\ln|\sec 7x + \tan 7x| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int x \cot x^2 dx$

Solución

$v = x^2, \quad dv = 2x\, dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{2} = x\, dx$

Se realiza el cambio de variable y se resuelve la integral:

$$\int x \cot x^2 dx = \int \cot v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \cot v\, dv = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} v| + C = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2| + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

Solución

La fórmula que se va a utilizar es $\int \tan v\, dv = \ln|\sec v| + C$, de manera que:

$$v = \sqrt{x}, \quad dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{donde,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dv$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral:

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \tan v\, dv = 2\ln|\sec v| + C = 2\ln|\sec \sqrt{x}| + C$$

5 Determina $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx$

Solución

Antes de resolver esta integral se recomienda emplear identidades trigonométricas.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\cos x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}=\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$$

$$=\tan 2x$$

Al sustituir la identidad encontrada, se tiene $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx=\int \tan 2x\,dx$, donde:

$$v=2x,\quad dv=2dx;\quad dx=\frac{dv}{2}$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx=\int \tan 2x\,dx=\frac{1}{2}\int \tan v\,dv=-\frac{1}{2}\ln|\cos v|+C=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$$

EJERCICIO **5**

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 5x\,dx$
2. $\int \cos 6x\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}\frac{x}{4}\,dx$
4. $\int \tan bx\,dx$
5. $\int \sec^2\frac{x}{a}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax}$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 bx}$
8. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$
9. $\int \csc\frac{t}{4}\cot\frac{t}{4}\,dt$
10. $\int x\operatorname{sen} 4x^2dx$
11. $\int x^2\cos\frac{x^3}{5}\,dx$
12. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$
13. $\int \sec ax\tan ax\,dx$
14. $\int 3x\sec^2 4x^2dx$
15. $\int \csc^2(3x-1)dx$
16. $\int \cot(ax-b)dx$
17. $\int \sec ax\,dx$
18. $\int x\csc 4x^2dx$

19. $\int \cot x\sqrt{\csc x}\, dx$

20. $\int (\cot b\theta + \tan b\theta)^2\, d\theta$

21. $\int (\csc 3x - \cot 3x)^2\, dx$

22. $\int (\tan 5x - \sec 5x)^2\, dx$

23. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1-\cos x}\, dx$

24. $\int x\cos(2-x^2)\, dx$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

26. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}\, dx$

27. $\int \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\, dx$

28. $\int \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]^{-2} dx$

29. $\int \frac{dw}{\cos^2 w - \cos 2w}$

30. $\int \left(\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos 2x}\right) dx$

31. $\int (\cot^2 x + \cot^4 x)\, dx$

32. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$

33. $\int \frac{dw}{\operatorname{sen}^2 w(1-4\cot w)}$

34. $\int \left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\right) dx$

35. $\int \frac{dy}{\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)}$

36. $\int \frac{2\tan\alpha\, d\alpha}{\sec^2\alpha - 2\tan^2\alpha}$

37. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + 1}}\, d\theta$

38. $\int e^{2x}\operatorname{sen}(e^{2x})\, dx$

39. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x^2)}{x}\, dx$

40. $\int \frac{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}{3x}\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales con expresiones de la forma

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2 - v^2},\ v^2 \pm a^2,\ a^2 - v^2$$

Fórmulas

1. $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{v}{a} + C$

2. $\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + C$

3. $\int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| + C$

4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{v}{a} + C$

5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{v}{a} + C$

7. $\int \sqrt{a^2-v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{v}{a} + C$

8. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{dx}{x^2 + 36}$

Solución

Se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{v}{a} + C$$

se deducen las siguientes equivalencias y se sustituyen en la fórmula.

$$v^2 = x^2,\ v = x \text{ y } dv = dx;\ a^2 = 36,\ a = 6$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 36} = \frac{1}{6} \arctan \frac{x}{6} + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{16x^2 - 9}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v - a}{v + a} \right| + C$$

se determina la variable y se encuentra su diferencial,

$$v^2 = 16x^2,\ v = 4x,\ dv = 4dx \quad \text{y} \quad \frac{dv}{4} = dx;\ a^2 = 9,\ a = 3$$

Finalmente, se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{16x^2 - 9} = \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2(3)} \ln \left| \frac{4x - 3}{4x + 3} \right| + C = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{4x - 3}{4x + 3} \right| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int \frac{m}{n^2 x^2 - p^2} dx$

Solución

$$a^2 = p^2,\ a = p \quad v^2 = n^2 x^2;\ v = nx, dv = ndx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{n} = dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral,

$$\int \frac{mdx}{n^2 x^2 - p^2} = \frac{m}{n} \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{2(p)} \ln \left| \frac{nx - p}{nx + p} \right| + C = \frac{m}{2np} \ln \left| \frac{nx - p}{nx + p} \right| + C$$

Se concluye que,

$$\int \frac{mdx}{n^2 x^2 - p^2} = \frac{m}{2np} \ln \left| \frac{nx - p}{nx + p} \right| + C$$

4 Precisa el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C$$

se deduce a, v y la diferencial dv

$$a^2 = 9,\ a = 3;\ v^2 = 25x^2,\ v = 5x,\ dv = 5\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{5} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3} + C$$

5 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}}$

Solución

$$a^2 = 5,\ a = \sqrt{5}\ ;\ v^2 = 9x^2,\ v = 3x,\ dv = 3\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{3} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}} = \int \frac{\frac{dv}{3}}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x + \sqrt{9x^2+5}\right| + C$$

EJERCICIO 6

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^2+81}$
2. $\int \frac{dy}{by^2+b^3}$
3. $\int \frac{dy}{y^2-16}$
4. $\int \frac{dx}{25-4x^2}$
5. $\int \frac{dx}{2x^2-16}$
6. $\int \frac{dx}{9x^2-144}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-7}}$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8}}$

11. $\int \frac{4\,dx}{b^4x^2 + m^2}$

12. $\int \frac{2v\,dv}{v^4 - b^4}$

13. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 4)}$

14. $\int \frac{dx}{\sec x(1 - \operatorname{sen}^2 x)}$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9 - x^4}}$

16. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{3 - 3x^2}}$

17. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x}\sqrt{e^x + 4}}$

18. $\int \frac{dy}{\sqrt{5 - 4y^2}}$

19. $\int \frac{dy}{25a - a^3y^2}$

20. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2 + 5}}$

21. $\int \frac{dy}{5 - 2y^2}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

23. $\int \frac{dx}{x^2 + b^4}$

24. $\int \frac{dy}{\sqrt{4 - 2y^2}}$

25. $\int e^{2x}\sqrt{16 - e^{4x}}\,dx$

26. $\int \sqrt{1 - 2x^2}\,dx$

27. $\int \frac{dm}{\sqrt{8 - \frac{m^2}{5}}}$

28. $\int \sqrt{(2x+1)^2 - a^2}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{28 + 343x^{2m}}}{x^{1-m}}\,dx$

30. $\int \frac{dt}{2t^2 + 7}$

31. $\int \frac{(3x + 2)\,dx}{\sqrt{5x^2 - 16}}$

32. $\int \frac{dt}{\csc(2t)\cdot(5 - \cos^2 2t)}$

33. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1 + \cos^2 x}$

34. $\int \sqrt{t^2 \ln^2(3t) + 4}\,dt + \int \ln(3t)\sqrt{t^2 \ln^2(3t) + 4}\,dt$,

demuestra que:

$$\frac{t\ln(3t)}{2}\sqrt{t^2\ln^2(3t) + 4} + 2\ln\left(t\ln(3t) + \sqrt{t^2\ln^2(3t) + 4}\right) + C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales en las que se completa un trinomio cuadrado perfecto

En aquellas integrales con un denominador de la forma $ax^2 + bx + c$, se utiliza el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para llegar a las formas:

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2 - v^2},\ v^2 \pm a^2, a^2 - v^2$$

Según sea el caso.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

Solución

Se completa el TCP, entonces, el denominador se expresa como:

$$x^2+4x+3=(x^2+4x+4)-4+3=(x+2)^2-1$$

Donde,

$$v^2=(x+2)^2,\ v=x+2,\ dv=dx;\ a^2=1,\ a=1$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-1}=\frac{1}{2(1)}\ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$

Solución

La expresión

$$x^2-8x+25=(x^2-8x+16)-16+25=(x-4)^2+9$$

Donde,

$$v^2=(x-4)^2,\ v=x-4,\ dv=dx;\ a^2=9,\ a=3$$

Finalmente,

$$\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}=3\int \frac{dx}{(x-4)^2+9}=3\cdot\frac{1}{3}\text{arc tan}\frac{x-4}{3}+C=\text{arc tan}\left(\frac{x-4}{3}\right)+C$$

3 Encuentra el resultado de la integral indefinida $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

Solución

Se completa el TCP y el trinomio se convierte a la expresión equivalente.

$$2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

Se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a}+C$$

se obtiene la variable, su diferencial y el valor de a, entonces,

$$v^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\ v=x-\frac{1}{2},\ dv=dx;\ a^2=\frac{1}{4},\ a=\frac{1}{2}$$

Se realizan los cambios y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\text{arc tan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C = \text{arc tan}\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{1}{2}}+C$$

Por tanto, el resultado de la integral es:

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1} = \text{arc tan}(2x-1)+C$$

4 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

Solución

La expresión

$$2-3x-4x^2 = -4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right) = -4\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right] = 4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]$$

Se deduce entonces la fórmula que se va a utilizar:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\frac{v}{a}+C$$

Donde,

$$v^2 = \left(x+\frac{3}{8}\right)^2 \quad v = x+\frac{3}{8},\ dv = dx;\ a^2 = \frac{41}{64},\ a = \frac{\sqrt{41}}{8}$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{x+\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C = \frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{\frac{8x+3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C = \frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$$

5 Encuentra el resultado de $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5}$

Solución

En este caso, la expresión se representa como:

$$\frac{2x+5}{x^2+2x+5} = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{3}{x^2+2x+5}$$

Se ha elegido esta separación debido a que,

$$\text{si } v = x^2+2x+5 \text{ entonces } dv-(2x+2)dx$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Para la integral $\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el cambio,

$$v = x^2+2x+5\,,\; dv = (2x+2)dx \;\text{ y }\; \frac{dv}{(2x+2)} = dx$$

Resultando:

$$\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + C$$

Ahora, con la integral $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el siguiente cambio:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

Finalmente, al sustituir se obtiene:

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + 3\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

6 Obtén el resultado de $\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}\;dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}}$

Solución

La integral se expresa de la siguiente manera:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}\,dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}} = \int \frac{\sqrt{e^{x}}\,(e^{2x}+4e^{x})dx}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{(e^{2x}+4e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$$

Se realiza la separación en el numerador

$$\int \frac{(e^{2x}+4e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^{x}+e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} + \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$$

Ahora, para la integral $\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se realiza el siguiente cambio:

$$v = e^{2x} + 6e^{x} + 5,\ dv = (2e^{2x} + 6e^{x})dx = 2(e^{2x} + 3e^{x})dx$$

Entonces,

$$\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}$$

Por consiguiente, para la integral $\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se completa el trinomio cuadrado perfecto y se realiza el cambio de variable.

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-9+5}} = \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-4}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}}$$

Donde,

$$w = e^{x} + 3,\ dw = e^{x}dx$$

Entonces,

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}} = \int \frac{dw}{\sqrt{w^{2}-4}} = \ln\left|w+\sqrt{w^{2}-4}\right| = \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}\right|$$

$$= \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right|$$

Por tanto, se concluye que:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}}+4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5} + \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right| + C$$

EJERCICIO 7

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^{2}+6x}$
2. $\int \frac{dx}{x^{2}+8x}$
3. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x+6}$
4. $\int \frac{dx}{2x^{2}+3x+1}$
5. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x-14}$
6. $\int \frac{dx}{2x^{2}+9x+4}$
7. $\int \frac{dx}{a^{2}x^{2}+8ax+15}$
8. $\int \frac{3e^{x}dx}{e^{2x}+9e^{x}+20}$
9. $\int \frac{dw}{13w-2w^{2}-15}$
10. $\int \frac{d\alpha}{5+9\alpha-2\alpha^{2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8}$

12. $\int \frac{e^{2x} + 3e^x - 3}{e^{2x} + 2e^x - 3}\, dx$

13. $\int \frac{\cos x\, dx}{(\operatorname{sen} x - 3)^2 - 3}$

14. $\int \frac{dw}{\sqrt{-5w^2 + 22w - 8}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}$

16. $\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2 + 4z}}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 7 \ln x + 6}}$

19. $\int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 9w + 5}}$

20. $\int \sqrt{x^2 + 4x - 3}\, dx$

21. $\int \sqrt{4 - 3x - 2x^2}\, dx$

22. $\int \sqrt{3x - x^2}\, dx$

23. $\int \sqrt{3x^2 - 4x}\, dx$

24. $\int x\sqrt{x^4 - x^2 - 20}\, dx$

25. $\int \sqrt{-x^2 - 5x + 24}\, dx$

26. $\int \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + 2}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - 21x}}$

28. $\int e^{nx}\sqrt{3 + 2e^{nx} - e^{2nx}}\, dx$

29. $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + y + 1}}$

30. $\int \sqrt{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

31. $\int \frac{dw}{\sqrt{5w - 2w^2}}$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 3x\sqrt{ax} + 2x}}$

33. $\int \frac{dy}{\sqrt{3y^2 + 13y - 10}}$

34. $\int \frac{(6x - 5)}{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

35. $\int \frac{3x - 4}{9 - x^2}\, dx$

36. $\int \frac{4 - 7x}{9x^2 - 16}\, dx$

37. $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 4x + 1}\, dx$

38. $\int \frac{x - 2}{3x^2 + 5x - 4}\, dx$

39. $\int \frac{x + 5}{x^2 - 7x + 6}\, dx$

40. $\int \frac{2x + 21}{3x^2 + 27x - 15}\, dx$

41. $\int \frac{(3x + 2)}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$

42. $\int \frac{3x - 11}{\sqrt{4 - 9x^2}}\, dx$

43. $\int \frac{5 - 2x}{\sqrt{16x^2 + 25}}\, dx$

44. $\int \frac{4 - 3x}{\sqrt{7 - 2x^2}}\, dx$

45. $\int \frac{x+6}{8+14x-10x^2}\,dx$

46. $\int \frac{5x-11}{\sqrt{x^2+3x-5}}\,dx$

47. $\int \frac{2-x}{\sqrt{2x^2+5x-1}}\,dx$

48. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$

49. $\int (2x+1)\sqrt{x^2-3x+4}\,dx$

50. $\int (3x+7)\sqrt{x^2+7x+6}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente