CAPÍTULO 11

ECUACIONES DIFERENCIALES

Reseña HISTÓRICA

Inventó un método para determinar aproximadamente el tiempo de un fósil. Su teoría (de la datación o fechamiento con radiocarbono), está basada en que la razón de la cantidad de carbono 14 al carbono ordinario es constante de tal forma que la cantidad proporcional absorbida por los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Por lo que cuando muere un organismo la absorción de este elemento cesa y empieza a desintegrarse (vida media de un material radiactivo).

De tal forma que solo basta con comparar la cantidad de carbono 14 presente en el fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera. Con base en la vida media del carbono que es aproximadamente de 5600 años se plantea la variación de una cantidad inicial C_0 de carbono 14 en el fósil con respecto al tiempo, obteniendo una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0 \quad \text{en donde} \quad C_0 = C_0(0)$$

La cual resolveremos en este capítulo.

Willard Libby
(1908-1980)

Introducción

Casi cualquier problema del mundo real se puede resolver mediante la formulación de un modelo matemático que, al resolverlo con los conocimientos adquiridos (en particular de cálculo), permita obtener conclusiones matemáticas, las cuales posteriormente nos permitirán hacer una interpretación acerca del fenómeno sobre el cual gira el problema y entonces podremos hacer predicciones sobre el mismo. Estas predicciones siempre se deben verificar con los datos nuevos que se derivan de la práctica. Es decir, si las predicciones no coinciden con los datos nuevos, entonces hay que ajustar el modelo.

La mayoría de estos problemas a resolver surgen en la física, la química y las ciencias sociales (crecimiento de población, decaimiento radiactivo, problemas donde interviene la velocidad y la aceleración, antigüedad de un fósil, etc.…). En muchas ocasiones, cuando se utiliza el cálculo, es porque se presenta una ecuación diferencial surgida del modelo encontrado, por esta razón una de las aplicaciones más importantes del cálculo son, sin duda, las ecuaciones diferenciales.

En este capítulo sólo se dará una introducción a las ecuaciones diferenciales (definición, clasificación, algunos métodos de solución y ejemplos de aplicación); es decir, no se pretende dar un curso completo, sólo haremos referencia a lo básico para que el alumno posteriormente pueda iniciar un curso formal de ecuaciones diferenciales.

Definición

Una ecuación diferencial es aquella que tiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

La representación de una ecuación diferencial en su forma general es:

$$F(x, y, y', y'' \cdot y''', ..., y^n) = 0$$

Con x variable independiente, $y = f(x)$ variable dependiente (en este caso la función desconocida), $y', y'', y''', \ldots, y^n$, sus derivadas.

El **orden** de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

El **grado** de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Por ejemplo:

Ecuación	Orden	Grado
$\frac{dy}{dx} - x = 7$	Primero	Primero
$2xy' - y = 6$	Primero	Primero
$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = -4y$	Segundo	Primero
$(y'')^2 + 2(y')^3 + 2y = x$	Segundo	Segundo
$2y''' - 4(y'')^2 - y' = 6x$	Tercero	Primero

Si una ecuación tiene una variable independiente se denomina ***ecuación diferencial ordinaria***, ya que sus derivadas son ordinarias.

Por ejemplo:

$$y' - 2x = 8 \qquad y'' - y' = x \qquad y''' - xy'' + 2y(y')^2 - xy = 0$$

Si una ecuación diferencial tiene dos o más variables independientes, se llama ecuación entre derivadas parciales, ya que las derivadas son parciales:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}t + \frac{\partial z}{\partial t} = xyt$$

La **solución** de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que junto con sus derivadas sucesivas se transforma en una identidad al ser sustituidas en ella.

Ejemplo

Comprueba que $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, es solución de la ecuación $3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$

Solución

Se obtienen la primera y segunda derivada de $f(x)$

$y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ Función

$y' = f'(x) = 3x^2 + 6x + 6$ Primera derivada

$y'' = f''(x) = 6x + 6$ Segunda derivada

Se sustituyen y, y', y'' en la ecuación

$$3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$$

$$3(x^3 + 3x^2 + 6x + 1) - x(3x^2 + 6x + 6) + 3 = (6x + 6) + 3(2x + x^2)$$

$$3x^3 + 9x^2 + 18x + 3 - 3x^3 - 6x^2 - 6x + 3 = 6x + 6 + 6x + 3x^2$$

$$3x^2 + 12x + 6 = 3x^2 + 12x + 6$$

Por tanto, $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ es solución de la ecuación.

Una **solución general** es una función de una variable que tiene un número de constantes arbitrarias no conocidas igual al orden de la ecuación y que al sustituirla en la ecuación se transforma en una igualdad.

Una **solución particular** es una función de una sola variable que se obtiene de la solución general, obteniendo el valor de sus constantes y que al sustituirla en la ecuación la transforma en una identidad.

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 5 - 2x$$

Determina cuál de las siguientes funciones es solución e indica de qué tipo es:

a) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

b) $y = -e^x - x + 1$

Solución

a) Se sustituye $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será del tipo general.

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1$

$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x}$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (C_1e^x + 4C_2e^{2x}) - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1) \\ &= C_1e^x - 3C_1e^x + 2C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 6C_2e^{2x} + 2C_2e^{2x} + 3 - 2x + 2 \\ &= 5 - 2x \end{aligned}$$

C_1, C_2 son constantes no conocidas, por tanto es una solución general.

b) Se sustituye $y=-e^x-x+1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será particular.

$$y=-e^x-x+1$$

$$y'=-e^x-1$$

$$y''=-e^x$$

$$\begin{aligned} y''-3y'+2y &= (-e^x)-3(-e^x-1)+2(-e^x-x+1)\\ &= -e^x+3e^x-2e^x+3-2x+2\\ &= 5-2x \end{aligned}$$

La solución tiene constantes definidas $C_1=-1$, $C_2=0$, por tanto es una solución particular.

Ecuación diferencial de primer orden

Ahora se resolverán algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden con el método de variables separables y homogéneas.

Al resolver ecuaciones diferenciales seguramente se necesitarán ciertos métodos de integración, por ello te sugerimos tomarte algunos minutos en repasar los capítulos anteriores.

Variables separables

La técnica más simple es la aplicada en una ecuación diferencial que se reduce a la forma:

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

Donde $M(x)$ es una función que depende de x y $N(y)$ es una función que depende de y. Con ello han sido separadas las variables, por lo cual la ecuación diferencial es del tipo de **variables separables**. Su solución se obtiene por integración directa:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C$$

Donde C es una constante arbitraria.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=6x^2$

Solución

La ecuación se transforma a:

$$dy=6x^2\,dx$$

Se integran ambos miembros de la ecuación

$$\int dy=\int 6x^2dx$$

$$y=2x^3+C$$

Por consiguiente la solución es:

$$y=2x^3+C$$

2 Resuelve la ecuación $(1 + y^2)dx + xydy = 0$

Solución

Se trasponen los términos:

$$(1 + y^2)dx + xydy = 0$$

$$(1 + y^2)dx = -xydy$$

Se multiplica por $\dfrac{1}{x(1+y^2)}$ y se simplifica:

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1 + y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}(-xydy)$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{ydy}{1+y^2}$$

Se integra cada lado de la igualdad:

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{ydy}{1+y^2} + C_1$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C_1$$

Se sustituye $C_1 = \ln C_2$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C_2$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln a^m = m \ln a$

$$\ln x + \ln\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln x\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

$$x\sqrt{1+y^2} = C$$

$$\left(x\sqrt{1+y^2}\right)^2 = (C_2)^2$$

Se despeja y, se sustituye $(C_2)^2 = C$

$$x^2(1+y^2) = C$$

$$1 + y^2 = \frac{C}{x^2}$$

$$y^2 = \frac{C}{x^2} - 1 = \frac{C - x^2}{x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{C-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{C-x^2}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{C-x^2}$$

Por tanto, la solución general es: $y = \dfrac{1}{x}\sqrt{C-x^2}$

3 Resuelve la ecuación $(y^2 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$

Solución

La ecuación se transforma en:

$$(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$$

Se factoriza cada término

$$y^2(1 + x)\frac{dy}{dx} + x^2(1 - y) = 0$$

$$y^2(1 + x)dy + [x^2(1 - y)]dx = 0$$

Se multiplica cada término por $\dfrac{1}{(1+x)(1-y)}$

$$\frac{1}{(1+x)(1-y)}[y^2(1 + x)]dy + \frac{1}{(1+x)(1-y)}[x^2(1 - y)]dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2}{1+x}dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy = -\frac{x^2}{1+x}dx$$

Al integrar ambos miembros de la igualdad

$$\int\frac{y^2}{1-y}dy = -\int\frac{x^2}{1+x}dx$$

se divide y se obtiene que

$$\frac{y^2}{1-y} = -y - 1 + \frac{1}{1-y}$$

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Regresando a la integral

$$\int\left(-y-1+\frac{1}{1-y}\right)dy = -\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$-\int ydy - \int dy + \int\frac{dy}{1-y} = -\int xdx + \int dx - \int\frac{dx}{x+1}$$

$$-\frac{1}{2}y^2 - y - \ln|y - 1| = -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x + 1| + C_1$$

Se multiplica por 2

$$-y^2 - 2y - 2\ln|y - 1| = -x^2 + 2x - 2\ln|x + 1| + 2C_1$$
$$x^2 - y^2 - 2x - 2y + 2\ln|x + 1| - 2\ln|y - 1| = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln a^m = m\ln a$ y al factorizar $x^2 - y^2$ se obtiene:

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + \ln(x + 1)^2 - \ln(y - 1)^2 = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$$(x+y)(x-y) - 2(x+y) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x+y)(x-y-2) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x+y)(x-y-2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

Finalmente, la solución general es:

$$(x+y)(x-y-2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

4 Resuelve $(1+y^2)dx = xdy$

Solución

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x(1+y^2)}$, cada término de la igualdad

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1+y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}xdy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+y^2}$$

Al integrar se obtiene:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| = \arctan(y) + C_1$$

Se aplica la definición de logaritmo natural, si $\ln b = c$, entonces $e^c = b$

$$x = e^{\arctan(y) + C_1}$$

$$x = e^{\arctan(y)} \cdot e^{C_1}$$

$$x = e^{\arctan(y)} \cdot C$$

$$x = Ce^{\arctan(y)}$$

Por tanto, la solución es:

$$x = Ce^{\arctan(y)}$$

Otra forma de representar la solución es la siguiente:

$$\ln|x| = \arctan(y) + C_1$$

$$\ln|x| - C_1 = \arctan(y)$$

Se sustituye $\ln C = -C_1$

$$\ln|x| + \ln C = \arctan(y)$$

Se aplica la propiedad $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln|Cx| = \text{arc tan}(y)$$

Se obtiene la tangente de cada término de la igualdad

$$\tan(\ln|Cx|) = \tan(\text{arc tan}(y))$$
$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

Finalmente, la solución es:

$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

5 Resuelve $e^{-y}(1 + y') = 1$

Solución

Se resuelve el producto

$$e^{-y}(1 + y') = 1$$
$$e^{-y} + e^{-y}y' = 1$$

La ecuación se transforma en:

$$e^{-y} + e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1 - e^{-y}$$

$$e^{-y}\,dy = (1 - e^{-y})dx$$

$$\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = dx$$

Se integra cada término de la igualdad

$$\int\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = \int dx$$

$$\ln|1 - e^{-y}| = x + C_1$$

$$\ln|1 - e^{-y}| - C_1 = x$$

$$\ln|1 - e^{-y}| + \ln|C| = x$$

$$\ln|C(1 - e^{-y})| = x$$

$$C(1 - e^{-y}) = e^x$$

Por consiguiente, la solución es:

$$e^x = C(1 - e^{-y})$$

6 Determina la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

para la cual

$$y = 2$$

cuando

$$x = 0$$

Solución

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$2y\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int 2y\,dy = \int 3x^2 dx$$

$$y^2 = x^3 + C$$

En la solución general se sustituyen los valores de: $y = 2, x = 0$

$$y^2 = x^3 + C$$

$$(2)^2 = (0)^3 + C$$

Por tanto,

$$C = 4$$

Este resultado se sustituye en la solución general, se despeja y

$$y^2 = x^3 + C$$

$$y = \sqrt{x^3 + C}$$

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

Por tanto, la ecuación particular es:

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

7 Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración debida a la gravedad de un cuerpo que cae es de $9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, esto es posible si se desprecia la resistencia del aire. Si se arroja un cuerpo hacia arriba desde una altura inicial de 30 m, con una velocidad de $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, determina su velocidad y su altura tres segundos más tarde.

Solución

La altura s se tomara positiva hacia arriba, entonces la velocidad v es positiva, pero la aceleración a es negativa ya que la atracción de la gravedad tiende a disminuir v, por tanto la solución esta dada por la ecuación diferencial.

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

Con las condiciones iniciales

$$v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{y} \quad s = 30 \text{ m}$$

La ecuación $\frac{dv}{dt} = -9.81$, se resuelve por el método de variables separables, es decir:

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

$$dv = -9.81\,dt$$

$$\int dv = -\int 9.81dt + C$$

$$v = -9.81t + C$$

En el instante $t = 0$, $v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces

$$v = -9.81t + C$$

$$20 = -9.81(0) + C$$

$$C = 20$$

Por tanto

$$v = -9.81t + 20$$

Luego, $v = \frac{ds}{dt}$, entonces se tiene una segunda ecuación diferencial.

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

Al resolver la ecuación diferencial por variables separables resulta:

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

$$\int ds = \int(-9.81t + 20)dt + K$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

Se determina el valor de K, con los valores iniciales $s = 30$, $t = 0$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

$$30 = -\frac{9.81}{2}(0)^2 + 20(0) + K$$

Por tanto, $K = 30$, entonces la solución es:

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30$$

Finalmente se obtiene el valor de la velocidad y la altura 3 s más tarde.

$$v = -9.81t + 20 = -9.81(3) + 20 = -29.43 + 20 = -9.43\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30 = -\frac{9.81}{2}(3)^2 + 20(3) + 30 = (-4.905)(9) + 20(3) + 30 = -44.14 + 60 + 30 = 45.86 \text{ m}$$

8 Se tiene un cultivo con una cantidad N_0 de bacterias, al pasar una hora el número de bacterias es de $\frac{5}{2}N_0$. Si la razón en la que se reproducen es proporcional al número de bacterias, ¿en cuánto tiempo se cuadriplicará la cantidad inicial de bacterias?

Solución

Si la razón de reproducción, la variación de N_0 respecto al tiempo $\left(\frac{dN_0}{dt}\right)$, es proporcional al número de bacterias, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dN_0}{dt} = kN_0$$

La cual es una ecuación de variables separables, al resolverla se obtiene:

$$\frac{dN_0}{N_0} = kdt$$

$$\ln N_0 = kt + C_1$$

$$e^{kt+C_1} = N_0$$

$$N_0(t) = e^{kt+C_1}$$

$$N_0(t) = e^{kt}e^{C_1}$$

donde

$$N_0(t) = Ce^{kt}$$

Cuando $t = 0$ entonces $N_0(0) = Ce^{k(0)} = Ce^0 = C(1) = C$, pero sabemos que la cantidad inicial de bacterias es N_0, es decir $C = N_0$, por tanto $N_0(t) = N_0e^{kt}$.

Encontremos el valor de k, para eso tenemos que $N_0(1) = \frac{5}{2}N_0$, de donde

$$N_0e^{k(1)} = \frac{5}{2}N_0$$

$$N_0e^{k} = \frac{5}{2}N_0$$

Se divide entre N_0

$$e^k = \frac{5}{2}$$

Se aplica logaritmo natural en ambos lados

$$\ln e^k = \ln \frac{5}{2}$$

$$k = \ln \frac{5}{2}$$

$$k = 0.9163$$

Por tanto. la función solución a nuestro problema es $N_0(t) = N_0 e^{0.9163t}$
Si queremos saber en cuánto tiempo se cuadriplicará la población, entonces se plantea la siguiente igualdad:

$$4\,N_0 = N_0 e^{0.9163t}$$

Se divide entre N_0

$$4 = e^{0.9163t}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln 4 = \ln e^{0.9163t}$$

$$\ln 4 = 0.9163t$$

$$\frac{\ln 4}{0.9163} = t$$

$$t \approx 1.51$$

En aproximadamente 1.51 horas se cuadriplicará la población inicial.

9 Al analizar el hueso de un fósil se encontró que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original. ¿Cuál es la edad del fósil?

Solución

Existe un método basado en la cantidad de carbono 14 (C − 14) que existe en los fósiles. El químico Willard Libby inventó la teoría de la datación con radiocarbono, la cual se basa en que la razón de la cantidad de carbono 14 en la atmósfera es constante, lo que trae como consecuencia que la cantidad de este isótopo en los organismos es proporcional al que existe en la atmósfera. Al morir un organismo deja de absorber carbono 14, es decir la cantidad absorbida de este elemento cesa, y al ser un elemento radiactivo se va desintegrando (recuerda que la vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de este elemento). Entonces basta con comparar la cantidad proporcional de carbono 14 en el fósil con la cantidad constante en la atmósfera. Para hacer esto se toma en cuenta la vida media del carbono 14 que es aproximadamente de 5600 años.

Ahora regresemos a nuestro problema: digamos que C_0 es la cantidad inicial de carbono 14 en el fósil, entonces la variación de esta cantidad respecto al tiempo es proporcional a la cantidad inicial, es decir:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0$$

en donde

$$C_0 = C_0(0)$$

La ecuación diferencial obtenida es parecida al modelo del ejemplo 10, al resolverlo se obtiene:

$$C_0(t) = C_0 e^{kt}$$

Para obtener el valor de k, consideremos que la vida media del carbono 14 es de 5600 años, esto quiere decir que:

$$\frac{C_0}{2} = C_0(5600)$$

$$\frac{C_0}{2} = C_0 e^{5600k}$$

Se divide entre C_0

$$\frac{1}{2} = e^{5600k}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5600k}$$

$$\ln\frac{1}{2} = 5600k$$

$$\frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} = k$$

$$k = -0.00012378$$

Por tanto,

$$C_0(t) = C_0 e^{-0.00012378t}$$

Si nos dicen que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original, entonces basta con plantear la siguiente igualdad.

$$\frac{C_0}{100} = C_0 e^{-0.00012378t}$$

$$\frac{1}{100} = e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = \ln e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = -0.00012378t$$

$$\frac{\ln\frac{1}{100}}{-0.00012378} = t$$

de donde

$$t \approx 37\,204$$

Por tanto, el fósil tiene aproximadamente 37 200 años.

EJERCICIO 29

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y(1-x^3)}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{5+y^2}$
4. $(4 - y^2)dx - (4 - x^2)dy = 0$
5. $(9 + y^2)dx + 4xy\, dy = 0$
6. $(2y^2 - xy^2)y' + 2x^2 - yx^2 = 0$
7. $x\sqrt{y^2-2}\, dx + y\sqrt{x^2-2}\, dy = 0$
8. $e^{3y}(y' + 3) = 2$
9. $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y \cos 2x$
10. $y' = \cos(x + y)$
11. $(-4y + y^2)dx + x(x - 6)dy = 0$
12. $4x^3 - y^3y' = 0$
13. $y' = \frac{2x+1}{y^3+1}$
14. $e^x dx - \frac{1}{y}dy = 0$
15. $\frac{3}{x}dx + \frac{2}{y}dy = 0$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - y}{y+4}$
17. $y' = x^2 \operatorname{sen} 2x$
18. $\frac{dy}{dx} = e^{2x-3y}$
19. $ydx + x\ln x dy = 0$
20. $(1 + e^x)e^y y' = y^{-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones homogéneas

$f(x, y)$ es una función homogénea de grado n si $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$
Por ejemplo: $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^2$ es homogénea, hagamos la evaluación:

$$f(\alpha x, \alpha y) = 3(\alpha x)^4 - (\alpha x)^3(\alpha y) = 3\alpha^4x^4 - \alpha^4x^3y = \alpha^4(3x^4 - x^3y) = \alpha^4 f(x, y)$$
$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4 f(x, y)$$

por tanto es homogénea de grado 4.

Una ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se llama homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas.

Por ejemplo:

La ecuación $\frac{x^2}{y}\arccos\frac{x}{y}dy + x\ln\frac{x}{y}dx = 0$ es homogénea ya que para

$$M(x, y) = \frac{x^2}{y}\arccos\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad N(x, y) = x\ln\frac{x}{y}$$

se tiene que:

$$M(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2}{\alpha y}\arccos\frac{\alpha x}{\alpha y} = \frac{\alpha^2x^2}{\alpha y}\arccos\frac{x}{y} = \alpha\frac{x^2}{y}\arccos\frac{x}{y} = \alpha M(x, y)$$

$$N(\alpha x, \alpha y) = \alpha x\ln\frac{\alpha x}{\alpha y} = \alpha x\ln\frac{x}{y} = \alpha N(x, y)$$

Ambas son homogéneas de grado 1, por tanto, la ecuación $\frac{x^2}{y}\text{arc cos}\frac{x}{y}dy + x\ln\frac{x}{y}dx = 0$ es homogénea.

Para resolver una ecuación homogénea se utiliza la siguiente transformación:

$$y = vx \quad \text{de donde} \quad dy = vdx + xdv$$

Ejemplo

Resuelve la ecuación $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$

Solución

Sustituimos $y = vx$ de donde $dy = v\,dx + x\,dv$ en la ecuación:

$$(4x - 3(vx))dx + (2(vx) - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

$$(4x - 3vx)dx + (2vx - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

Se multiplica y simplifica:

$$4xdx - 3vxdx + 2v^2xdx + 2vx^2dv - 3xvdx - 3x^2dv = 0$$

$$(2v^2x - 3vx - 3vx + 4x)dx + (2vx^2 - 3x^2)dv = 0$$

$$(2v^2 - 6v + 4)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

$$2(v^2 - 3v + 2)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x^2(v^2 - 3v + 2)}$

$$\frac{2(v^2 - 3v + 2)xdx}{x^2(v^2 - 3v + 2)} + \frac{(2v - 3)x^2dv}{x^2(v^2 - 3v + 2)} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} = -\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2}$$

Se integra

$$2\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 4}$$

$$2\ln x + C_1 = -\ln|v^2 - 3v + 2| + C_2$$

$$2\ln x + \ln|v^2 - 3v + 2| = C_2 - C_1$$

Se hace la sustitución $C_3 = C_2 - C_1$ y se aplican las propiedades $\ln a^n = n\ln a$,

$$\ln x^2|v^2 - 3v + 2| = C_3$$

Se aplica la definición de logaritmo $\ln b = c$ quiere decir $e^c = b$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = e^{C_3}$$

Se sustituye $C = e^{C_3}$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = C$$

De $y = vx$ se despeja v, $v = \dfrac{y}{x}$ para sustituirla en la función.

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 2\right) = C$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2} - \frac{3x^2y}{x} + 2x^2 = C$$

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = C$$

Se factoriza

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Por tanto, la solución es

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Existen ecuaciones que son lineales pero no homogéneas, aunque se pueden reducir a ellas, haciendo una traslación. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

En donde si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, la ecuación se reduce a la forma homogénea

$$(a_1x' + b_1y')dx' + (a_2x' + b_2y')dy' = 0$$

Al hacer una traslación por medio de las transformaciones:

$$x = x' + h \qquad dx = dx'$$
$$y = y' + k \qquad dy = dy'$$

(h, k) es el punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación de variables separables

$$P(x, t)dx + Q(x, t)dt = 0$$

Mediante la transformación $a_1x + b_1y = t$ de donde

$$dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

Solución

Tenemos la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

En donde $(2)(2) - (3)(-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0$, por tanto resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$2x - y + 4 = 0$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

Al resolverlo se obtiene que el punto $(h, k) = (-1, 2)$, se sustituye en las fórmulas de transformación:

$$x = x' + h \qquad y = y' + k$$
$$x = x' - 1 \qquad y = y' + 2$$
$$dx = dx' \qquad dy = dy'$$

Posteriormente en la ecuación dada:

$$(2[x' - 1] - [y' + 2] + 4)dx' + (3[x' - 1] + 2[y' + 2] - 1)dy' = 0$$
$$(2x' - 2 - y' - 2 + 4)dx' + (3x' - 3 + 2y' + 4 - 1)dy' = 0$$
$$(2x' - y')dx' + (3x' + 2y')dy' = 0$$

Se obtuvo una ecuación homogénea y se sustituye $y' = vx' \; dy' = vdx' + x'dv$

$$(2x' - vx')dx' + (3x' + 2vx')(vdx' + x'dv) = 0$$
$$2x'dx' - vx'dx' + 3x'vdx' + 3x'^2dv + 2v^2x'dx' + 2vx'^2dv = 0$$
$$2v^2x'dx' + 2vx'dx' + 2x'dx' + 2vx'^2dv + 3x'^2dv = 0$$
$$2(v^2 + v + 1)x'dx' + (2v + 3)x'^2dv = 0$$

Se multiplica por el factor: $\dfrac{1}{x'^2(v + v + 1)}$

$$\frac{2(v^2 + v + 1)x'dx'}{x'^2(v^2 + v + 1)} + \frac{(2v + 3)x'^2\,dv}{x'^2(v^2 + v + 1)} = 0$$

$$\frac{2dx'}{x'} = -\frac{(2v + 3)dv}{v^2 + v + 1}$$

Se integran ambos lados

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+3)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1+2)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-\int\frac{2dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v^2+v+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$2\ln x'+C_1=-\ln(v^2+v+1)-2\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\frac{v+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]+C_2$$

$$2\ln x'+\ln(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\frac{2v+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]=C_2-C_1$$

$$\ln x'^2(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2v+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

Al sustituir $v=\frac{y'}{x'}$

$$\ln x'^2\left(\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\left(\frac{y'}{x'}\right)+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2}{x'^2}+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{x'}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2+x'y'+x'^2}{x'^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{\sqrt{3}x'}\right)=C$$

Se sustituye $x'=x+1$, $y'=y-2$

$$\ln(x+1)^2\left(\frac{(y-2)^2+(x+1)(y-2)+(x+1)^2}{(x+1)^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(y-2)+\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{3}(x+1)}\right)=C$$

2 Resuelve la ecuación:

$$(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$$

Solución

En la ecuación se tiene que $(1)(-6) - (3)(-2) = -6 + 6 = 0$, entonces utilizamos la transformación:

$$a_1x + b_1y = t, \qquad dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

$$x - 2y = t, \qquad dy = \frac{dt - dx}{-2} = -\frac{dt - dx}{2}$$

Se sustituye en la ecuación:

$$(x - 2y - 1)dx + (3(x - 2y) + 2)dy = 0$$

$$(t - 1)dx + (3t + 2)\left(-\frac{dt - dx}{2}\right) = 0$$

$$tdx - dx - \frac{3}{2}tdt + \frac{3}{2}tdx - dt + dx = 0$$

$$tdx - \frac{3}{2}tdt + \frac{3}{2}tdx - dt = 0$$

$$2tdx - 3tdt + 3tdx - 2dt = 0$$

$$5tdx - (3t + 2)dt = 0$$

$$5tdx = (3t + 2)dt$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t}(5tdx = (3t + 2)dt)$$

$$5dx = 3dt + \frac{2}{t}dt$$

Se integran ambos miembros

$$5\int dx = 3\int dt + 2\int \frac{dt}{t}$$

$$5x = 3t + 2\ln t + C$$

$$5x = 3(x - 2y) + 2\ln(x - 2y) + C_1$$

$$5x = 3x - 6y + 2\ln(x - 2y) + C_1$$

$$2x + 6y - 2\ln(x - 2y) = C_1$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{2}$

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = \frac{1}{2}C_1$$

Se sustituye $C = \frac{1}{2}C_1$

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = C$$

Por tanto, la solución es:

$$x + 3y - \ln(x - 2y) = C$$

EJERCICIO 30

1. $xdy = (2x + 2y)dx$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3xy + y^2}{x^2}$
3. $xy\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + 2y^2$
4. $y' = \dfrac{x - y}{2x}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{x}{y}$
6. $(x^2 - y^2)y' = xy$
7. $(4x^2 - 5xy + y^2) + x^2y' = 0$
8. $(x^2 + y^2)y' = y^2$
9. $(2x - y)dy = (2y + x)dx$
10. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\sec\dfrac{y}{x}$
11. $(x - y)y' + (y - 2x) = 0$
12. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
13. $(x + y)y' + y = x$
14. $x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$
15. $(y^2 - 5xy)y' - (xy - 5x^2) = 0$
16. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$
17. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$
18. $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$
19. $(2x - 5y + 3)dx + (-2x - 4y + 6)dy = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente