# CAPÍTULO 6

## SUMAS

**Reseña HISTÓRICA**

Nació en Breselenz, una aldea cercana a Dannenberg en el reino de Hannover, actualmente parte de Alemania.

Fue un matemático que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados se incorporaron a la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein. La cátedra de Gauss en Gottingen fue ocupada por Dirichlet en el año 1855 y después de su muerte por Riemann. En esos tiempos sufrió de tuberculosis y estuvo sus últimos años en Italia en un intento por mejorar su salud.

George Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)

## Definición

La suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

se representa con el símbolo sigma $\sum$, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

**Ejemplo**

Determina $\sum_{i=1}^{5} i^2$

**Solución**

Se sustituye $i$ por los valores de 1 a 5, se eleva cada uno de ellos al cuadrado y se suman los resultados:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

De manera que, $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55$

## Propiedades

1. $\sum_{i=a}^{n} k = (n - a + 1)k$

2. $\sum_{i=a}^{n} [f(i) + g(i)] = \sum_{i=a}^{n} f(i) + \sum_{i=a}^{n} g(i)$

3. $\sum_{i=a}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=a}^{n} f(i)$

4. $\sum_{i=1}^{n} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$

**EJEMPLOS**

Ejemplos

**1** Encuentra $\sum_{i=3}^{7} 8$

**Solución**

Al aplicar la propiedad correspondiente a una constante, se obtiene:

$$\sum_{i=3}^{7} 8 = (7 - 3 + 1)8 = 40$$

**2** Precisa el valor de $\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i)$

**Solución**

Se aplican las propiedades de las sumas y se determina que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = \sum_{i=1}^{4} i^2 + \sum_{i=1}^{4} 3i = \sum_{i=1}^{4} i^2 + 3\sum_{i=1}^{4} i$$

Se desarrollan,

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 30;\ 3\sum_{i=1}^{4} i = 3\,(1 + 2 + 3 + 4) = 3(10) = 30$$

Finalmente tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = 30 + 30 = 60$$

3 Calcula el valor de $\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3 - \frac{2}{3}n + 7\right)$

**Solución**

Al aplicar las propiedades de las sumas, se determina:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3 - \frac{2}{3}n + 7\right) = \sum_{n=0}^{5}2n^3 - \sum_{n=0}^{5}\frac{2}{3}n + \sum_{n=0}^{5}7 = 2\sum_{n=0}^{5}n^3 - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n + \sum_{n=0}^{5}7$$

Se desarrollan las sumas,

$$2\sum_{n=0}^{5}n^3 = 2[(0)^3 + (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 + (4)^3 + (5)^3] = 450;$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n = -\frac{2}{3}(0+1+2+3+4+5) = -\frac{2}{3}(15) = -10;$$

$$\sum_{n=0}^{5}7 = 7(5 - 0 + 1) = 7(6) = 42$$

Por tanto, se precisa que:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3 - \frac{2}{3}n + 7\right) = 450 - 10 + 42 = 482$$

4 Determina el valor de $\sum_{i=6}^{8}(3ai^2 + 12bi - 3c)$

**Solución**

Al aplicar las propiedades de las sumas se encuentra que:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2 + 12bi - 3c) = \sum_{i=6}^{8}3ai^2 + \sum_{i=6}^{8}12b\,i - \sum_{i=6}^{8}3c = 3a\sum_{i=6}^{8}i^2 + 12b\sum_{i=6}^{8}i - \sum_{i=6}^{8}3c$$

Se desarrollan las sumas,

$$3a\sum_{i=6}^{8}i^2 = (3a)[(6)^2 + (7)^2 + (8)^2] = (3a)(149) = 447a;$$

$$12b\sum_{i=6}^{8}i = (12b)(6 + 7 + 8) = (12b)(21) = 252b; \quad \sum_{i=6}^{8}3c = (3c)(8 - 6 + 1) = (3c)(3) = 9c$$

Finalmente el resultado es:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2 + 12bi - 3c) = 447a + 252b - 9c$$

# EJERCICIO 1

Realiza las siguientes sumas:

1. $\sum_{i=1}^{4} i^4$

2. $\sum_{i=2}^{6} (4-3i)$

3. $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{2-i}{4}\right)$

4. $\sum_{n=3}^{8} \left(\frac{2}{n-1}\right)$

5. $\sum_{i=1}^{7} (3i-2)^3$

6. $\sum_{n=2}^{4} (n^2-4)$

7. $\sum_{i=4}^{10} \left(\frac{i-i^2}{3}\right)$

8. $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{ai+b}{2a}\right)$

9. $\sum_{n=2}^{4} (3n^2-5n+7)$

10. $\sum_{n=1}^{5} \frac{n(n+1)}{n+2}$

11. $\sum_{n=3}^{6} (n^3-n)$

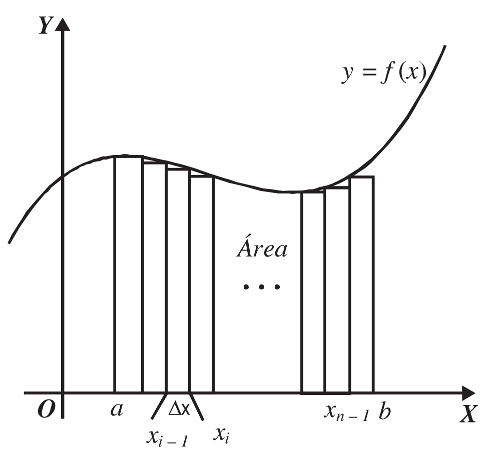
12. $\sum_{i=1}^{9} \left(i^2-(i-1)^2\right)$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**

## Suma de Riemann (rectángulos inscritos y circunscritos)

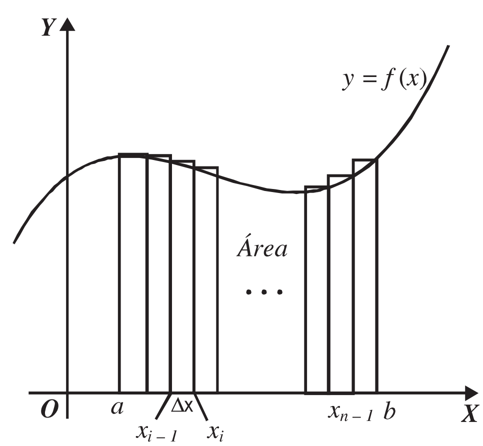
Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ el área $A$ bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo dado, se obtiene realizando estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra.

Rectángulos inscritos
sumas inferiores




$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+(i-1)\Delta x)$$

Rectángulos circunscritos
sumas superiores




$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

*Sumas básicas*

1. $\sum_{i=1}^{n} k = kn$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$

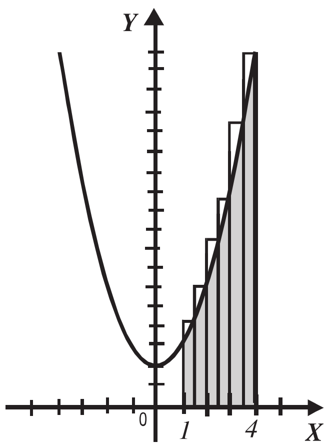
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ y el eje $x$ en el intervalo [1, 4]. Utiliza sumas superiores.

**Solución**

Gráfica




Se sustituye en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(a + i\Delta x) = f\left(1+\frac{3i}{n}\right) = \left(1+\frac{3i}{n}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + \frac{6i}{n} + 3$$

Por consiguiente,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}+\frac{6i}{n}+3\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}+\frac{18i}{n^2}+\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{27i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

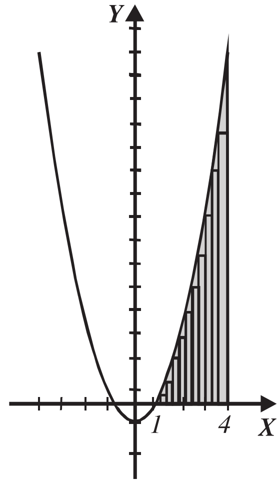
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2}+\frac{9}{n}\cdot n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(27+\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right) = 27u^2$$

Finalmente, el área es $A = 27u^2$

2 Aplica sumas inferiores para encontrar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 - 1$ y el eje $x$ en el intervalo $[1, 4]$

**Solución**




Se aplica la fórmula

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + (i-1)\Delta x)$$

Donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + (i-1)\Delta x = 1 + (i-1)\frac{3}{n} = \frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1$$

$$f(a + (i-1)\Delta x) = f\left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right) = \left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right)^2 - 1$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + i\left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right) + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^2}i^2 + \left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right)i + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3}i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}i + \left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\left(\frac{n^2 + n}{2}\right) + n\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} + 9 + \frac{9}{n} - \frac{27}{n} - \frac{27}{n^2} + \frac{27}{n^2} - \frac{18}{n}\right]$$

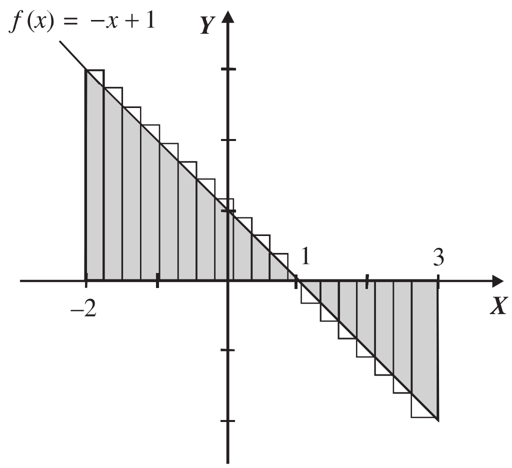
$$= \lim_{n\to\infty}\left[18 - \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right] = 18u^2$$

Por tanto, $A = 18u^2$

3 Determina el área limitada por la recta $f(x) = -x + 1$ y el eje $X$, mediante sumas superiores en el intervalo $[-2, 3]$

**Solución**

Al analizar la gráfica, se consideran 2 intervalos $[-2, 1]$ y $[1, 3]$.




Cálculo del área de $[-2, 1]$
Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{3}{n}$

$$f(a+i\Delta x) = -\left(-2+\frac{3i}{n}\right)+1 = -\frac{3i}{n}+3$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(-\frac{3i}{n}+3\right) = \frac{9}{2}u^2$$

Se realiza el cálculo del área de $[1, 3]$,
Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{2}{n}$

$$f(a + i\Delta x) = -\left(1+\frac{2i}{n}\right)+1 = -\frac{2i}{n}$$

Se sustituye en la fórmula y se tiene como resultado:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2i}{n}\right) = -2u^2$$

El signo negativo indica que el área se encuentra por debajo del eje $x$, pero para efectos del cálculo del área total, se considera su valor absoluto.
Por tanto, el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{9}{2}u^2 + 2u^2 = \frac{13}{2}u^2$$

# EJERCICIO 2

Emplea sumas superiores para encontrar el área limitada por la curva, el eje $X$, las rectas dadas o el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x + 5$; $x = 2, x = 5$
2. $f(x) = -2x + 6$; $x = 1, x = 4$
3. $f(x) = 4 - x^2$; $[-2, 2]$
4. $f(x) = x^3 - 4x$; $[-1, 1]$
5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$; $x = 0, x = 2$

Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje $X$ en el intervalo indicado utilizando sumas inferiores o superiores.

6. $f(x) = \frac{h}{b}x$; $[0, b]$
7. $f(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2$; $[-3, 3]$
8. $f(x) = (x - 2)^3 + 1$; $[1, 3]$
9. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$; $[0, 3]$
10. $f(x) = 5x^4$; $[1, 3]$

**Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente**