
Tomographie

THÉORIE ET RÉSULTATS

RAPPORT FINAL - PROJET 2
DANS LE CADRE DU COURS BSIQ101

24 février 2024

Présenté à :
M. Karl Thibault
M. Maxime Dion

Présenté par :
Geneviève Gervais
Sahar Sahoudi
Daphnée Blais

Table des matières

1	Introduction	2
2	Théorie	2
3	Code	3
3.1	Diagonalisation	3
3.2	Valeurs moyennes	3
3.3	Tomographie	4
4	Résultats	4
5	Analyse	4

1 Introduction

En physique quantique, on ne peut jamais connaître absolument l'état d'un système en superposition. En effet, comme il est impossible de mesurer un état sans en altérer les probabilités, c'est en créant des copies de ce-dit état et en les étudiant qu'il sera possible d'en estimer les composantes. Plusieurs méthodes existent pour arriver à cette fin. Celle qui sera présentée ici est un procédé appelé la tomographie, qui consiste à reconstituer un état quantique en mesurant à répétition des duplications de l'état original. Plus précisément, ce procédé sera appliqué afin d'identifier une matrice densité de laquelle il est possible d'extraire un vecteur d'état se rapprochant de celui de l'état cherché. Dans ce rapport, il sera question de la théorie derrière l'algorithme utilisé, de son implémentation, des résultats obtenus

2 Théorie

Les fondements théoriques de la tomographie quantique peuvent se diviser en quatre concepts clés : la matrice densité, les chaînes de Pauli, la valeur moyenne d'une observable et la valeur propre.

Premièrement, la matrice densité, notée $\hat{\rho}$, d'un état quantique $|\psi\rangle$ est définie par $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Puisque $|\psi\rangle\langle\psi||\psi\rangle = 1|\psi\rangle$, il est possible d'en extraire $|\psi\rangle$ en trouvant le vecteur propre de $\hat{\rho}$ associé à 1.

Deuxièmement, une chaîne de Pauli constitue un produit tensoriel entre une ou plusieurs matrices dites de Pauli. Il existe quatre matrices de Pauli : $\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Celles-ci forment une base à partir de laquelle on peut écrire tout opérateur à un qubit. De même, tout opérateur décrit par un produit tensoriel de plusieurs qubits peut s'écrire à partir d'une somme de produits tensoriels de matrices de Pauli, appelés chaînes de Pauli. Étant donné que $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ est un opérateur unitaire, on peut alors l'écrire sous forme d'une combinaison de chaînes de Pauli $\hat{\rho} = \sum a_j \hat{P}_j$.

Troisièmement, la valeur moyenne d'une observable sur un état quantique peut être calculée par l'expression $\langle\psi|\hat{P}_j|\psi\rangle$ ou par l'expression $Tr(\hat{\rho}\hat{P}_j)$. Cette dernière équation, appelée trace, représente une somme de tous les éléments de la diagonale de la matrice formée par $\hat{\rho}\hat{P}_j$. On peut ainsi avoir les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}\langle\psi|\hat{P}_j|\psi\rangle &= Tr(\sum_i a_i P_i P_j) \\ \langle\psi|\hat{P}_j|\psi\rangle &= \sum_i a_i Tr(P_i P_j)\end{aligned}$$

Or, la trace d'une matrice de Pauli peut s'écrire sous la forme

$$Tr(P_i) = \begin{cases} 2^n & \text{si } P_i = \hat{\mathbb{I}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{De ce fait, } Tr(P_i P_j) = 2^n \delta_{ij}$$

Ainsi, on peut remplacer dans l'équation précédente $Tr(P_i P_j)$:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{P}_j | \psi \rangle &= \sum_i a_i 2^n \delta_{ij} \\ \langle \psi | \hat{P}_j | \psi \rangle &= a_j 2^n \\ \langle \psi | \hat{P}_j | \psi \rangle \frac{1}{2^n} &= a_j \end{aligned}$$

En mesurant le circuit et en calculant trouver le coefficient a_j pour reconstituer la matrice densité comme une combinaison de chaîne de Pauli $\hat{\rho} = \sum a_j \hat{P}_j$.

Quatrièmement, en mécanique quantique, les valeurs propres d'une observable correspondent aux résultats possibles d'une mesure de celle-ci. Pour $\hat{\mathbf{I}}$, on a 1 et pour $\hat{\mathbf{Z}}$, on a +1 et -1.

3 Code

3.1 Diagonalisation

L'algorithme de tomographie quantique se divise en trois fichiers distincts : `diagonalization`, `expectation_values` et `tomography`. Le premier, `diagonalization`, possède une fonction principale, `diagonalize_pauli_with_circuit`, prend en entrée une chaîne de Pauli, et retourne un circuit quantique qui transforme la chaîne originale en une chaîne de $\hat{\mathbf{I}}$ et de $\hat{\mathbf{Z}}$, ainsi que la chaîne transformée. Cette opération est réalisée afin de permettre la mesure de l'état, puisque cette-dite mesure ne peut qu'être effectuée sur l'axe des z.

3.2 Valeurs moyennes

Le deuxième fichier, soit `expectation_values`, possède trois fonctions principales : `diag_pauli_eigenvalue`, `diag_pauli_expectation_value`, et `estimate_expectation_values`. La première fonction permet de calculer la valeur propre d'une chaîne de Pauli diagonale (uniquement des $\hat{\mathbf{I}}$ et des $\hat{\mathbf{Z}}$). La deuxième calcule la valeur moyenne d'une chaîne de Pauli diagonale à partir des résultats d'une mesure en faisant appel à la fonction précédente. La troisième fonction prend une liste de chaînes de Pauli, un circuit préparant un état inconnu et un Backend sur lequel rouler le circuit et retourne une liste de valeurs moyennes pour chaque chaîne. Pour cela, elle commence par diagonaliser chaque chaîne de Pauli avec `diagonalize_pauli_with_circuit`, puis elle exécute le circuit de chaque chaîne. Ensuite, elle appelle `diag_pauli_expectation_value` pour obtenir les valeurs moyennes à partir des résultats de mesure.

3.3 Tomographie

Le dernier fichier, `tomography`, possède deux fonctions : `create_density_matrix` et `state_tomography`. La première fonction permet de créer la matrice densité à partir de la chaîne de Pauli et des coefficients. La deuxième créer la matrice densité, pour en faire ressortir le vecteur d'état (vecteur propre associée la valeur propre se rapprochant le plus de 1). De ce fait, la tomographie quantique de l'état est effectuée, et donc le vecteur d'état est trouvé.

4 Résultats

Nous avons testé notre algorithme avec un circuit qui projette l'état suivant : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ ou $|\psi\rangle = .7071|00\rangle + 0.7071|11\rangle$ en décimal. La matrice densité obtenue grâce aux résultats de nos mesures est

$$\begin{pmatrix} 0.492 & 0.011 & 0.015 & 0.500 \\ 0.011 & 0.005 & 0.02 & 0.014 \\ 0.015 & 0.02 & 0.005 & 0.02 \\ 0.500 & 0.014 & 0.0199 & 0.508 \end{pmatrix}.$$

Ses vecteurs propres sont $\begin{pmatrix} 0.051 & -0.701 & -0.114 & -0.701 \\ -0.697 & -0.146 & 0.700 & -0.018 \\ 0.712 & -0.037 & 0.700 & -0.025 \\ -0.701 & -0.018 & -0.025 & -0.712 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres

sont -0.015, -0.000, 0.025 et 1.001. Le vecteur propre associé à la valeur propre 1.001 est $(-0.701 -0.019 -0.025 -0.712)$. Notre état estimé est donc $-0.7013571|00\rangle - 0.0187021|01\rangle - 0.02543754|10\rangle - 0.71211051|11\rangle$, ce qui est similaire à notre état réel avec une phase globale de -1.

5 Analyse

Notre algorithme parvient à estimer de façon relativement précise l'état d'un système en nous basant sur son circuit quantique. L'écart moyen entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales était de 14%, ce qui représente une marge acceptable. En roulant le circuit un plus grand nombre de fois, nous aurions probablement pu obtenir des résultats avec une plus grande précision.

Par contre, la complexité exponentielle de notre algorithme le rend peu utile en situation concrète. En effet, le nombre de chaînes de Pauli nécessaires pour effectuer une tomographie quantique est 4^n , où n est le nombre de qubits de l'état. Il existe des méthodes qui rendrait cet algorithme plus efficace. Notre utilisation de la tomographie quantique était purement à des fins pédagogiques.