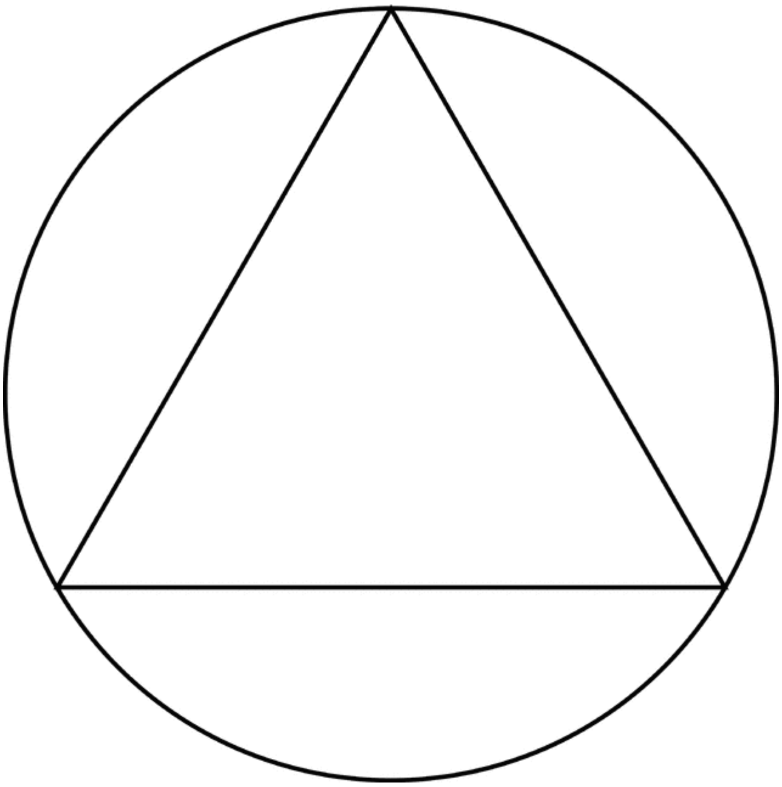
یک سوال ریاضی

مسیله از این قرار است:

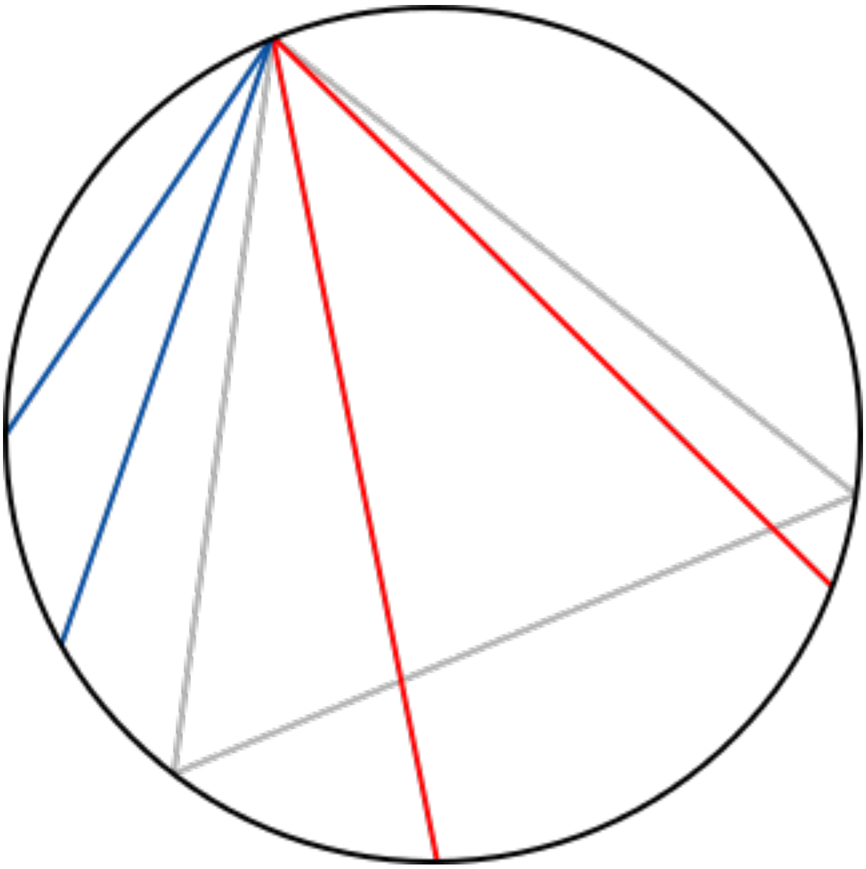
احتمال اینکه طول وتری از دایره، بزرگتر از طول مثلث متساوی الاضلاع محاط شده در ان دایره باشد چقدر است؟



Random endpoints

استراتژی اول

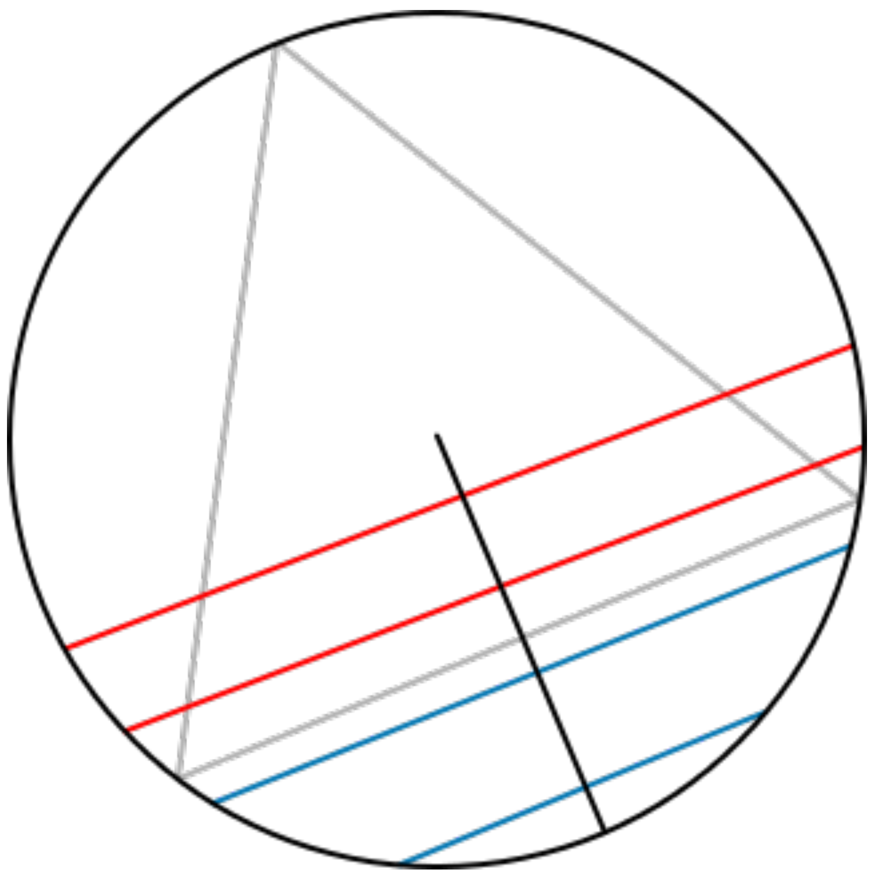
باتوجه به تقارن برای رسم یک وتر تصادفی می‌توان ابتدا دو نقطهٔ تصادفی روی محیط دایره انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را به‌هم وصل می‌کنیم تا وتر بین این دو نقطه حاصل شود. نقطهٔ اول را A و نقطهٔ دوم را D می‌نامیم. فرض کنید A یکی از رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد؛ دراینصورت وتر AD وقتی و تنها وقتی بزرگتر از طول ضلع مثلث ABC خواهد بود که نقطهٔ D روی کمان BC قرار بگیرد. از آنجا که طول کمان BC به اندازهٔ ۱/۳ طول محیط دایره است و نقطهٔ D هم به‌طور تصادفی از محیط دایره انتخاب شده‌است با احتمال ۱/۳ روی کمان BC قرار می‌گیرد، لذا احتمال موردنظر نیز برابر ۱/۳ است.



Random radius

استراتژی دوم

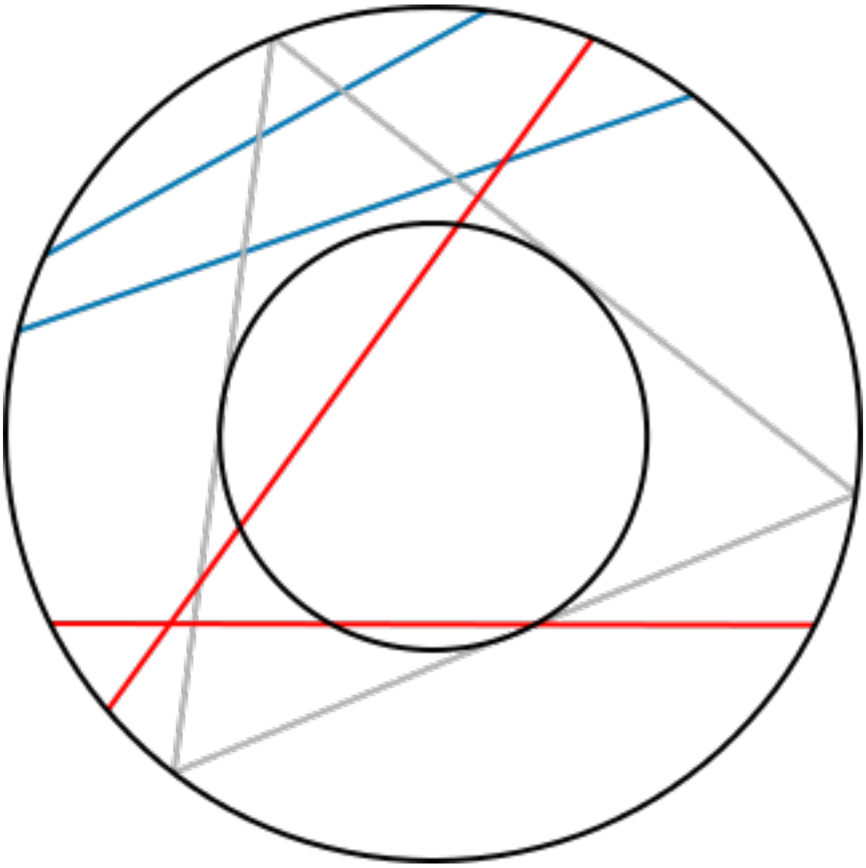
باتوجه به تقارن برای رسم یک وتر تصادفی نقطه‌ای تصادفی روی محیط دایره انتخاب کرده و آن را به مرکز دایره وصل می‌کنیم. به این طریق توانسته‌ایم یک شعاع تصادفی از دایره انتخاب کنیم. سپس نقطه‌ای تصادفی از روی این شعاع انتخاب می‌کنیم. وتری وجود دارد که این شعاع در این نقطه عمودمنصف آن است و این وتر وقتی و تنها وقتی از ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگتر است که نقطه‌ای که به تصادف روی شعاع انتخاب کرده بودیم، فاصله‌اش تا مرکز کمتر از نصف شعاع باشد. لذا احتمال مورد نظر در این استراتژی به انتخاب نقطه‌ای تصادفی روی بازهٔ یکنواخت (r, 0) محدود می‌شود به‌طوری‌که در بازهٔ (r/2, 0) قرار گیرد. پس احتمال موردنظر برابر است با ۱/۲.



Random midpoints

استراتژی سوم

چون هر وتر از دایره عمود بر شعاعی از دایره است که از نقطهٔ وسط آن به مرکز دایره وصل می‌شود لذا هر وتر به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ نقطهٔ میانی آن وتر مشخص می‌شود. برای رسم یک وتر تصادفی نقطه‌ای تصادفی داخل دایره انتخاب می‌کنیم و به مرکز دایره وصل می‌کنیم. سپس وتر عمود بر این خط در نقطهٔ انتخابی را رسم می‌کنیم. واضح است که این وتر وقتی و تنها وقتی بزرگتر از طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره است که نقطهٔ وسط آن (یعنی همان نقطهٔ تصادفی که درون دایره انتخاب کردیم) درون دایره‌ای قرار بگیرد که هم‌مرکز با دایره اولیه است و شعاعش نصف شعاع آن است. چون با انتخاب هر نقطه به‌طور یکتا یک وتر تعیین می‌شود، لذا احتمال موردنظر برابر است با خارج‌قسمت مساحت دایرهٔ کوچک به مساحت دایرهٔ اصلی. بنابراین احتمال پیشامد موردنظر برابراست با ۱/۴.



چرا؟

Bertrand paradox (probability)

مسئله Bertrand paradox یکی از مسئله های معروف احتمال کلاسیک است که جوزف برترند(joseph Bertrand) که اونو توی کتاب(calcul des probabilités) اورده به عنوان مثالی از این که احتمال احتمالا تعریف درست و دقیقی نداره اگر مکانیزم و متدی که با ان متغیر تصادفی تولید می کنید متغیر باشه!

Joseph Louis François Bertrand

Born	11 March 1822 Paris, France
Died	5 April 1900 (aged 78) Paris, France
Residence	France
	Scientific career
Fields	Mathematics

همانطور که توی معرفی سوال مطرح شد علت این که مکانیزم و متد که وتر تصادفی تولید میکنه فرق داره و به بیان بهتر ما ۳ تابع احتمال متفاوت برای حل سوال واحد دادیم که منجر به این تناقص شد.

اما ما در هر ۳ روش وتر ها رو کامل تصادفی انتخاب کردیم پس علت تفاوت تابع ها چیه؟

دلیل جواب متفاوت اینکه درسته که ما وتر ها رو در هر ۳ روش کاملا اتفاقی تولید کردیم اما در هر کدام از ۳ تابع نگاه متفاوتی به «قطر» ها دارند و هر کدوم وزن متفاوتی به قطر میدهند

متد۱: هر دو نقطه دقیقا یک وتر رو نشون میده بدون توجه به اینکه قطر هست یا نه.

متد۲: در این متد هر وتر دقیقا به یک صورت انتخاب میشه اما هر قطر به ۲ شکل انتخاب میشه

متد۳: هر نقطه دقیقا یک وتر رو نشون میده اما مرکز دایره به همه س قطر ها اشاره میکنه