Décomposition des différentes rotations. Création de la matrice rotation

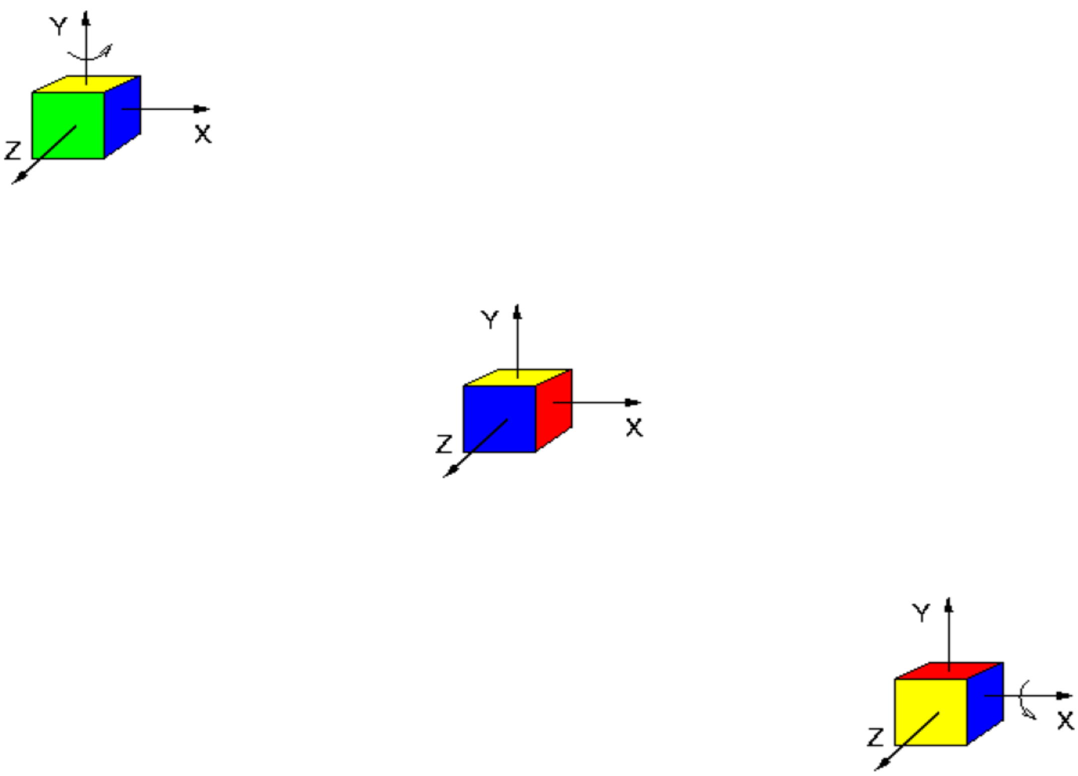

Illustration Wikipédia

Nous calculons ici la matrice qui permet de passer du trièdre de mesure au trièdre de référence de la centrale. Pour cela nous introduisons trois angles de rotation :

Rotation autour de l'axe des X d'un angle φ

Rotation autour de l'axe des Y d'un angle θ

Rotation autour de l'axe Z d'un angle ψ

Rotation autour de l'axe Z d'un angle ψ

Axe des x	Axe des y	Axe des z
$X = \cos\psi$ $Y = -\sin\psi$ $Z = 0$	$X = \sin\psi$ $Y = \cos\psi$ $Z = 0$	$X = 0$ $Y = 0$ $Z = 1$

On forme donc la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe des Y d'un angle θ

Axe des x	Axe des y	Axe des z
$X = \cos\theta$ $Y = 0$ $Z = \sin\theta$	$X = 0$ $Y = 1$ $Z = 0$	$X = -\sin\theta$ $Y = 0$ $Z = \cos\theta$

On forme donc la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe des X d'un angle φ

Axe des x	Axe des y	Axe des z
$X = 1$ $Y = 0$ $Z = 0$	$X = 0$ $Y = \cos\varphi$ $Z = -\sin\varphi$	$X = 0$ $Y = \sin\varphi$ $Z = \cos\varphi$

On forme donc la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Suite à la formation de chaque rotation unitaire, nous composons ces différentes rotations afin d'obtenir une matrice de passage unique.

Nous formons donc $R_Z \times R_Y \times R_X$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Nous obtenons la matrice rotation suivante :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix}$$

Le calcul permettant de faire passer les accélérations d'un système à l'autre est alors assez simple :

$$\begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

On obtient finalement :

$$\begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\theta\cos\psi)\times a_x + (\sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi)\times a_y + (\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi)\times a_z \\ (\cos\theta\sin\psi)\times a_x + (\sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi)\times a_y + (\cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi)\times a_z \\ \sin\theta\times a_x + (\sin\varphi\cos\theta)\times a_y + (\cos\varphi\cos\theta)\times a_z \end{bmatrix}$$