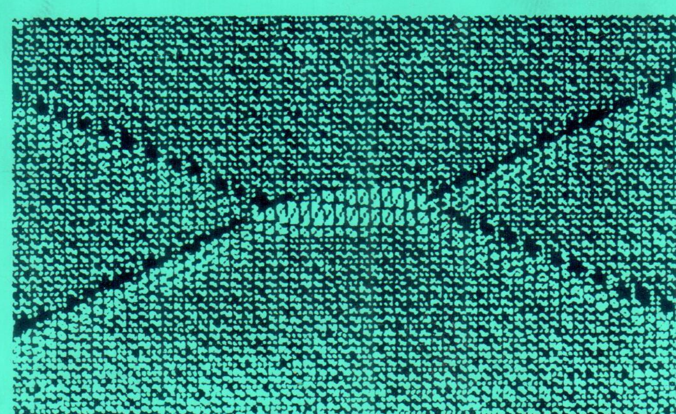
VOLUME 8, No. 1 2002.
ISSN 0854-1380

JOURNAL OF INDONESIAN MATHEMATICAL SOCIETY

MIHMI

MAJALAH ILMIAH HIMPUNAN MATEMATIKA INDONESIA



Diterbitkan oleh Departemen Matematika FMIPA ITB
Untuk
Himpunan Matematika Indonesia

Journal of Indonesian Mathematical Society

MIHMI

MAJALAH ILMIAH HIMPUNAN MATEMATIKA INDONESIA

ALAMAT Redaksi MIHMI:
d/a Departemen Matematika FMIPA ITB
Jalan Ganesha 10, Bandung 40132
Tlp. (022) 2502545
Fax. (022) 2506450

MIHMI diterbitkan dua kali (dua nomor) setiap tahun (periode Januari-Pebruari dan Juli-Agustus).

Harga langganan per tahun (volume), termasuk biaya pos, Vol. 7 No. 1 dan 2:
Institusi/perpustakaan Rp. 200.000,00,-(dalam Negeri), Rp. US$ 100,00,-(luar negeri)
Anggota Himpunan Matematika Indonesia : Rp. 50.000,-(dalam negeri),
US$. 40,-(luar negeri).
Bukan anggota himpunan Matematika Indonesia : Rp. 75.000,-(dalam negeri)
US$. 50,-(luarnegeri).
Penulis Makalah yang diterima dikenakan biaya Rp. 10.000,-/lembar.
Pembayaran biaya langganan dapat ditransfer melalui:

MIHMI, Account No. 236783013788-901
BNI Cabang ITB, Bandung

Diterbitkan oleh : Departemen Matematika FMIPA ITB untuk HIMPUNAN MATEMATIKA INDONESIA. SK Dirjen DIKTI Akreditasi Jurnal No. 2082/D/T/1996 dan SK No. 53/DIKTI/Kep/1999.

Gambar cover depan: Interaksi dua soliton

Volume 8, Number 1, 2002

Model Stokastik Proses Penggantian Komponen Berdistribusi Gagal Identik

Sahid
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA UNY

Abstract

This article discusses the stochastic models of replacement of a component which is done immidiately when the component fails. Some random variables involving this process are **the interarrival times (T_n)** – which are the interval times between two consecutive failures, **the time when the nth failure occurs (S_n)**, and **the number of renewals up to time t, $N(t)$**.

Assumming that the interarrival times T_n are independent and identically distributed, some probabilistic characteristics of the variables S_n and $N(t)$ can be derived. Furthermore, the long term limit of the rate of increament of $N(t)$ can also be determined together with some other results, including *the central limit theorem for renewal process.* A simulation result for exponential-distributed interarrival time renewal process (called the *Poisson process*) is also presented, to confirm the theoretical results.

The Laplace tranform can be used to simplify some calculations in the renewal theory.

Keywords: *renewal process, renewal function, renewal equation, Laplace transform*

1 Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai proses penggantian sebuah komponen, misalnya bola lampu, komponen sebuah mesin, dll. Proses penggantian dapat dilakukan dengan beberapa alasan, misalnya karena usia komponen yang sudah tua, karena munculnya produk baru yang lebih baik, atau karena komponen tersebut rusak (tidak berfungsi lagi). Waktu penggantian sebuah komponen dapat dilakukan secara periodik, sesaat setelah sebuah komponen rusak, atau beberapa saat setelah sebuah komponen rusak. Komponen pengganti mungkin memiliki karakteristik yang berbeda dengan komponen yang diganti, misalkan kalau kita meng-*upgrade* komponen komputer.

Artikel ini membahas proses penggantian komponen sebagai berikut. Misalkan pada waktu $t_0 = 0$ dioperasikan sebuah komponen baru, yang akan rusak dalam jangka waktu T_1. Begitu komponen tersebut rusak, langsung diganti dengan komponen baru, yang akan rusak dalam jangka waktu T_2. Demikian seterusnya, proses berlangsung sehingga proses penggantian ke-n terjadi pada saat S_n, dengan

$$S_n = T_1 + T_2 + ... + T_n. \tag{1}$$

Dalam hal ini diasumsikan $S_0 = 0$ dan $T_1, T_2, ..., T_n$ merupakan variabel-variabel acak, masing-masing merupakan *usia hidup* komponen ke -1, 2, ..., dan n. Diasumsikan pula bahwa T_n saling bebas dan berdistribusi identik, dengan fungsi kerapatan $f(t)$ (fungsi distribusi $F(t)$) dan nilai rata-rata $\mu = E(T_1) < \infty$.

Untuk setiap waktu $t > 0$, terdapat sebuah variabel acak $N(t)$, yang menyatakan banyaknya proses penggantian yang dilakukan sampai waktu t. Variabel acak ini telah menarik perhatian para ahli dan telah melahirkan sebuah teori yang dikenal dengan nama **Teori Pembaruan** (*Renewal Theory*). Selanjutnya akan dibahas sifat-sifat stokastik variabel acak $N(t)$, khususnya distribusi peluang dan nilai ekspektasi $N(t)$, untuk setiap $t > 0$. Beberapa pengertian dasar perlu dijelaskan sebelum pembahasan sifat-sifat stokastik tersebut.

2 Pengertian Dasar

Definisi 1. Proses Pembaruan (*Renewal Process*)

Himpunan variabel acak $\{N(t) : t > 0\}$, dengan $N(t)$ sebagaimana dijelaskan di atas, disebut **proses pembaruan** (*renewal process*) dengan distribusi pembaruan F. Proses pembaruan dilukiskan pada Gambar 1.

Dari definisi dan ilustrasi tersebut dapat dicatat beberapa fakta sebagai berikut (lihat Ross, 1997:354-355 dan van der Weide, 1997:55):

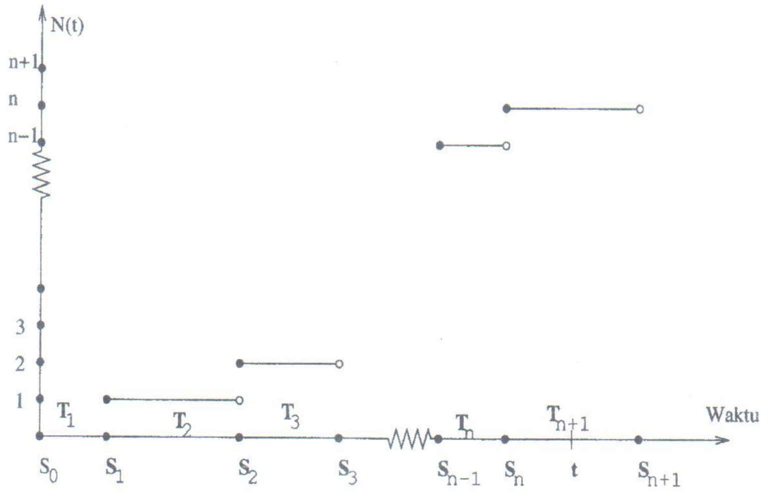
$$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad untuk \quad t > 0; \tag{2}$$

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t, \quad untuk \quad n \geq 0 \quad dan \quad t > 0; \tag{3}$$

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t) = F_n(t), \quad untuk \quad n \geq 0 \quad dan \quad t > 0; \tag{4}$$

dengan F_n adalah fungsi distribusi S_n.

Secara umum dapat dikatakan bahwa variabel acak $N(t)$ menyatakan banyaknya peristiwa yang sama terjadi pada interval waktu $[0, t]$. Peristiwa yang dimaksud dapat berupa kedatangan orang, kendaraan, permintaan sambungan telepon, atau kerusakan sebuah komponen. Variabel acak S_n menyatakan "waktu kedatangan" peristiwa ke-n dan T_n menyatakan "interval kedatangan" ke-n. Selanjutnya, S disebut waktu kedatangan dan T adalah interval kedatangan proses pembaruan N.



GAMBAR 1. Proses Pembaruan

Definisi 2. Fungsi Pembaruan (*Renewal Function*)
Misalkan $\{N(t) : t \geq 0\}$ adalah sebuah proses pembaruan dengan distribusi F. **Fungsi pembaruan** (*renewal function*) m didefinisikan sebagai

$$m(t) = E(N(t)), \tag{5}$$

yakni nilai harapan rata-rata (**ekspektasi**) banyaknya penggantian atau kerusakan yang telah terjadi pada saat t.

Dapat ditunjukkan dengan mudah (lihat Grimmett & Stirzaker, 1995:389-390 ;van der Weide, 1997:56; Ross, 1997:354) bahwa

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t), \; t \geq 0. \tag{6}$$

Definisi 3. Proses Pembaruan Tertunda (*Delayed Renewal Process*)

Misalkan $T_1, T_2, T_n, \ldots$ adalah variabel-variabel acak yang saling bebas dan bernilai nonnegatif, sedemikian hingga T_1 berdistribusi F^D dan $T_2, T_3, \ldots$ berdistrubusi F. (Fungsi distribusi F^D tidak perlu sama dengan F.) Variabel acal $S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ menyatakan waktu kedatangan ke-n. Jika $N^D(t)$ menyatakan banyaknya kedatangan sampai dengan saat t, maka proses stokastik $\{N^D(t) : t \geq 0\}$ disebut **proses pembaruan tertunda** (*delayed renewal process*). Jika F^D dapat dinyatakan sebagai

$$F^D(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t [1 - F(x)]dx, \tag{7}$$

maka N disebut **proses pembaruan stasioner** atau **seimbang** (*stationary renewal process*). (van der Weide, 1997:60; Grimmett & Stirzaker, 1995:407).

Definisi 4. Fungsi Kelangsungan (*Survival Function*)

Misalkan F adalah fungsi distribusi variabel acak T. **Fungsi kelangsungan** K dari variabel acak T didefinisikan sebagai

$$K(t) = P(t < T) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t). \tag{8}$$

Definisi 5. Distribusi **BBB (Baru lebih Baik daripada Bekas)**

Suatu distribusi F dikatakan **BBB (Baru lebih Baik daripada Bekas)** atau NBU (***New Better than Used***) jika

$$\forall t, u \geq 0 : K(t+u) \leq K(t)K(u). \tag{9}$$

F dikatakan **BJB** (Baru lebih Jelek daripada Bekas) atau **NWU** (*New Worse than Used*) jika $\forall t, u \geq 0 : K(t+u) \geq K(t)K(u)$.

Definisi 6. Distribusi **HBBB (Harapannya Baru lebih Baik daripada Bekas)**

Fungsi distribusi F dikatakan **HBBB (Harapannya Baru lebih Baik daripada Bekas)** atau **NBUE** (*New Better than Used in Expectation*) jika

$$\forall t \geq 0, \int_t^\infty K(x)dx \leq \mu K(t), \tag{10}$$

dengan μ adalah rata-rata distribusi F, yakni rata-rata interval waktu kedatangan. Pengertian distribusi **HBJB** (Harapannya Baru lebih Jelek daripada Bekas) didefinisikan dengan cara serupa.

Definisi 7. Laju Kegagalan (*failure rate*)

Misalkan F adalah distribusi usia hidup sebuah komponen, F kontinu (distribusi usia hidup mempunyai fungsi kerapatan f), dan $F(0) = 0$ (sebuah komponen baru akan berfungsi selama periode waktu positif). **Laju kegagalan** distribusi F didefinisikan sebagai (Cox, 1967:3-5)

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{P(t < T < t + \Delta t | t < T)}{\Delta t}.$$

Dengan mengingat rumus probabilitas bersyarat, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, pengertian fungsi kerapatan variabel acak kontinu T, $f_T(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t}$, dan hubungan antara fungsi distribusi dan fungsi kelangsungan (8), dapat diturunkan rumus laju kegagalan,

$$\lambda(t) = -\frac{K'(t)}{K(t)}. \tag{11}$$

Dari (11) diperoleh hubungan

$$f(t) = \lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(u)du},$$

yang menunjukkan bahwa fungsi **laju kegagalan** suatu variabel acak menentukan distribusinya.

Selanjutnya, **laju kegagalan kumulatif** didefinisikan sebagai

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du. \tag{12}$$

Dari definisi tersebut dapat dengan mudah diturunkan rumus untuk laju kegagalan kumulatif adalah

$$\Lambda(t) = -\ln K(t). \tag{13}$$

Dalam perhitungan distribusi suatu variabel acak sering digunakan transformasi Laplace, yang untuk beberapa kasus dapat menyederhanakan perhitungan. Berikut diberikan definisi transformasi Laplace dan inversnya.

Definisi 8. (*Transformasi Laplace*)

Misalkan X adalah suatu variabel acak dengan fungsi kerapatan probabilitas f. **Transformasi Laplace** f, ditulis f^*, didefinisikan sebagai (Cox, 1967:8-12)

$$f^*(s) = E(e^{-sX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx. \tag{14}$$

Apabila diketahui transformasi Laplace f^*, maka fungsi f dapat dicari dengan rumus inversi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx} f^*(s)ds, \tag{15}$$

dengan garis integrasi sejajar sumbu imaginer, c dipilih sedemikian hingga semua singularitas $f^*(s)$ terletak di sebelah kiri garis integrasi.

Beberapa sifat penting yang berkaitan dengan transformasi Laplace adalah:

$$F^*(s) = \frac{f^*(s)}{s}; \tag{16}$$

dan

$$K^*(s) = \frac{1 - f^*(s)}{s}. \tag{17}$$

Selain itu, $f^*(s)$ merupakan **fungsi penghasil momen** variabel acak X, karena

$$f^*(s) = E(e^{-sX}) = E\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(sX)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-s)^k}{k!}\mu_k, \tag{18}$$

dengan $\mu_k = E(X^k)$. Jika X_1, X_2, ..., X_n adalah variabel-variabel acak yang saling bebas dan berdistribusi identik, dengan fungsi kerapatan probabilitas f, dan f_{S_n}adalah fungsi kerapatan probabilitas variabel acak $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, maka

$$f^*_{S_n}(s) = (f^*(s))^n. \tag{19}$$

3 Distribusi Kedatangan

Pada bagian ini ditentukan distribusi-distribusi yang terkait dengan variabel acak $N(t)$ dan S_n. Distribusi asimptotik untuk nilai t mendekati tak berhingga juga ditentukan.

3.1 Distribusi Banyaknya Kegagalan

Telah diketahui hubungan antara banyaknya kegagalan, $N(t)$, dan waktu pada saat terjadinya kegagalan ke-n, S_n, yakni $N(t) < n$ jika dan hanya jika $S_n > t$. Jadi,

$$P(N(t) < n) = P(S_n > t) \tag{20}$$
$$= 1 - F_n(t), \tag{21}$$

dengan $F_n(t)$ adalah fungsi distribusi kumulatif S_n. Selanjutnya, diperoleh

$$P[N(t) = n] = F_n(t) - F_{n+1}(t), \tag{22}$$

dengan $F_0(t) = 1$. Oleh karena itu, distribusi peluang $N(t)$ dapat diperoleh secara eksplisit untuk semua nilai n. Persamaan (22) cocok digunakan, khususnya, untuk menghitung distribusi peluang $N(t)$ secara numerik untuk nilai-nilai n kecil (Cox, 1967:36).

Apabila F_n tidak dapat diturunkan secara langsung, maka dapat digunakan hubungan (16) dan (19), mengingat $f(t)$ diketahui, sehingga dapat dicari transformasi Laplace-nya.

Proposisi 1. *Misalkan F kontinu, $F(0) = 0$ dan $\Lambda(t) = -\ln K(t)$ adalah laju kegagalan kumulatif. Jika F bersifat BBB, maka*

$$P(N(t) < n) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} e^{-\Lambda(t)}, \quad \textit{untuk } n = 1, 2, \ldots.$$

Bukti: Menuruf Definisi 9, jika F bersifat **BBB**, maka $K(t+u) \leq K(t)K(u)$, sehingga $\ln K(t+u) \leq \ln K(t) + \ln K(u)$. Karena $\Lambda(t) = -\ln K(t)$, maka $\Lambda(t+u) \geq \Lambda(t) + \Lambda(u)$, sehingga

$$\Lambda(T_1 + T_2 + \ldots + T_n) \geq \sum_{k=1}^{n} \Lambda(T_k).$$

Sekarang kita perhatikan bahwa,

$$K_{\Lambda(T_1)}(x) = P(\Lambda(T_1) > x) = P(T_1 > \Lambda^{-1}(x)) = K_{T_1}(\Lambda^{-1}(x)) = e^{-\Lambda[\Lambda^{-1}(x)]} = e^{-x}$$

yang ternyata merupakan fungsi kelangsungan distribusi eksponensial dengan rata-rata $\mu = 1$ (lihat Cox, 1967:5). Jadi $\Lambda(T_1)$ berdistribusi eksponensial dengan rata-rata $\mu = 1$. Demikian pula, $\Lambda(T_2)$, ..., $\Lambda(T_n)$, masing-masing berdistribusi eksponensial dengan rata-rata $\mu = 1$ dan saling bebas (karena T_k saling bebas), sehingga $\sum_{k=1}^{n} \Lambda(T_k)$ berdistribusi $\Gamma(1, n)$ (lihat Grimmett & Stirzaker, 1995:122), yang mempunyai fungsi kerapatan peluang $f(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}$, $x > 0$. Dengan teknik integrasi parsial dapat dihitung bahwa fungsi kelangsungan distribusi ini adalah $K(x) = P(\sum_{k=1}^{n} \Lambda(T_k) > x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k e^{-x}}{k!}$.

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} P(N(t) < n) &= P(S_n > t) = P(T_1 + T_2 + ... + T_n > t) \\ &= P(\Lambda(T_1 + T_2 + ... + T_n) > \Lambda(t)) \\ &\geq P(\sum_{k=1}^{n} \Lambda(T_k) > \Lambda(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Lambda(t)^k e^{-\Lambda(t)}}{k!}, \end{aligned}$$

dan lengkaplah buktinya. □

Beberapa batas lain untuk $P(N(t) < n)$ diberikan dalam proposisi berikut ini (van der Weide, 1997: 65).

Proposisi 2. *Misalkan F mempunyai laju kegagalan $\lambda(t)$ naik dan laju kegagalan kumulatif Λ serta rata-rata μ. Untuk $n = 1, 2, ...,$*

(1) Untuk $0 \leq t < \mu$ berlaku $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t/\mu)^k}{k!} e^{-t/\mu} \leq P(N(t) < n)$;

(2) $P(N(t) < n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n\Lambda(t/n)]^k}{k!} e^{-k\Lambda(t/n)}$.

3.2 Distribusi Asimptotik

Dengan menggunakan Teorema Limit Pusat (lihat misalnya, Grimmett, 1995:175) dapat diketahui bahwa untuk n yang cukup besar S_n secara asimptotik berdistribusi normal dengan nilai rata-rata $n\mu$ dan simpangan baku $\sigma\sqrt{n}$, yakni

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-u^2/2} du, \tag{23}$$

dengan μ dan σ berturut-turut adalah nilai rata-rata dan simpangan baku interval waktu kegagalan. Hasil berikut dikenal sebagai **Teorema Limit Pusat Proses Pembaruan.**

Teorema 1. *(Central Limit Theorem for Renewal Process) (lihat Cox, 1967:40 dan Ross, 1997:365)*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{ \frac{N(t) - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du. \tag{24}$$

Bukti: Misalkan $n_t = \frac{t}{\mu} + x\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}$. Jelas bahwa $n_t \to \infty$ jika $t \to \infty$. Dengan menggunakan hubungan antara $N(t)$ dan S_n, dan setelah sedikit perhitungan aljabar, diperoleh

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{N(t) - t/\mu}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}} < x\right\} &= P(N(t) < n_t) = P(S_{n_t} > t) \\ &= P\left\{\frac{S_{n_t} - n_t\mu}{\sigma\sqrt{n_t}} > \frac{t - n_t\mu}{\sigma\sqrt{n_t}}\right\} \\ &= P\left\{\frac{S_{n_t} - n_t\mu}{\sigma\sqrt{n_t}} > -x\right\}. \end{aligned}$$

Hasil selengkapnya diperoleh dengan mengambil limit kedua ruas dan menggunakan sifat simetris (23). □

Teorema di atas mengatakan bahwa $N(t)$ secara asimptotik berdistribusi normal dengan nilai rata-rata t/μ dan variansi $\sigma^2 t/\mu^3$. Hasil berikut merupakan akibat terorema di atas .

Akibat 1. *Jika $N(t)$ adalah banyaknya kedatangan sampai dengan waktu t dalam suatu proses pembaruan yang mempunyai nilai rata-rata dan simpangan baku interval waktu kedatangan berturut-turut μ dan σ, maka*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Var[N(t)]}{E[N(t)]} = \frac{\sigma^2}{\mu^2}. \tag{25}$$

4 Laju Kedatangan Jangka Panjang

Teorema 2. $P(N(t) < \infty) = 1 \iff E(T_1) > 0$.

Bukti: I. Misalkan $P(N(t) < \infty) = 1$ dan andaikan $E(T_1) = 0$. Dengan demikian, untuk semua $n \geq 0$ berlaku $P(T_n = 0) = 1$ karena $T_n \geq 0$. Akibatnya $P(N(t) = \infty) = 1$ untuk setiap $t > 0$. Kontradiksi dengan yang diketahui $P(N(t) < \infty) = 1$.

II. Andaikan $E(T_1) = 0$. Ini artinya, terdapat $\epsilon > 0$ sedemikian hingga $P(T_1 > \epsilon) = \delta > 0$. Definisikan himpunan-himpunan $A_n = \{T_n > \epsilon\}$ dan $A = \{T_n > \epsilon$ untuk tak berhingga nilai $n\} = \lim\ \sup\ A_n$. Jadi, untuk nilai M yang cukup besar berlaku $P(A^c) = P(T_n \leq \epsilon\ \forall n \gg M) = \lim_{m\to\infty}(1-\delta)^m = 0$. Selanjutnya, $P(N(t) = \infty) = P(T_n < t,\ \forall n \geq 0) \leq P(A^c) = 0$. Terjadi suatu kontradiksi, sehingga pengandaian tidak benar. □

Telah disebutkan bahwa $\mu = E(T_1)$ adalah rata-rata interval waktu kedatangan (katakan dalam detik/kedatangan). Dengan kata lain, nilai $N(t)$ bertambah satu rata-rata dalam setiap interval waktu μ detik, atau $N(t)$ bertambah dengan kecepatan $\frac{1}{\mu}$ kedatangan per detik. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3. $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$, *dengan probabilitas 1.*

Bukti: Dari definisi proses pembaruan, dapat diketahui bahwa $S_{N(t)}$ adalah saat kedatangan ke-$N(t)$, sedangkan $N(t)$ adalah banyaknya kedatangan sampai dengan waktu t. Dengan demikian, jelas bahwa $S_{N(t)} \leq t$. Kedatangan ke-$N(t)+1$ pasti terjadi setelah waktu t. Jadi, diperoleh hubungan

$$S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}.$$

Apabila ketaksamaan tersebut dibagi dengan $N(t)$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} &\leq \tfrac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \\ \frac{1}{N(t)}\sum_{k=1}^{N(t)} T_k &\leq \tfrac{t}{N(t)} \leq \left(\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right)\left(\frac{N(t)+1}{N(t)}\right). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan aturan *Strong Law of Large Number*, diperoleh

$$E(T_1) \leq \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq E(T_1).$$

□

Teorema berikut ini menyatakan **Persamaan Pembaruan (*Renewal Equation*).**

Teorema 4. *(Renewal Equation)*

Fungsi pembaruan $m(t)$ memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^t [1 + m(t-u)]dF(u) \\ &= F(t) + \int_0^t m(t-u)dF(u). \end{aligned} \tag{26}$$

Bukti: Dari definisi fungsi pembaruan, kita dapatkan

$$\begin{aligned} m(t) &= E(N(t)) = E(E[N(t)|T_1]) \\ &= \int_0^\infty E[N(t)|T_1 = u]dF(u) \\ &= \int_0^t E[N(t)|T_1 = u)dF(u) + \int_t^\infty E[N(t)|T_1 = u)dF(u) \\ &= \int_0^t [1 + E(N(t-u))]dF(u). \end{aligned}$$

Hasil terakhir pada kesamaan di atas diperoleh dari fakta bahwa $N(t) = 0$ untuk $0 < t < u$, mengingat perhitungan di atas menggunakan ekpektasi bersyarat dengan $T_1 = u$. Dengan demikian untuk $t \geq u$, $N(t) = 1 + N(t-u)$. □

Dari rumus $m(t)$ pada (6) dan sifat-sifat transformasi Laplace (16) dan (19) diperoleh hubungan

$$m^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F^*_{S_n}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^*_{S_n}(s)}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}[f^*(s)]^n = \frac{f^*(s)}{s[1-f^*(s)]}, \qquad (27)$$

yang menunjukkan korespondensi satu-satu antara fungsi pembaruan $m(t)$ dan fungsi kerapatan probabilitas interval waktu kedatangan. Fungsi pembaruan $m(t)$ merupakan penyelesaian tunggal yang terbatas pada interval-interval berhingga persamaan integral (26) (Grimmett, 1995:390-391).

Perhatikan, dari persamaan (27) diperoleh

$$\begin{aligned} m^*(t) &= \frac{f^*(s)}{s} + m^*(s)f^*(s) \\ &= F^*(s) + m^*(s)f^*(s), \end{aligned}$$

dan dengan menggunakan sifat transformasi Laplace, bahwa hasil kali transformasi Laplace dua buah fungsi merupakan konvolusi kedua fungsi, diperoleh persamaan pembaruan (26). Jadi transformasi Laplace dapat digunakan sebagai alternatif di dalam penurunan persamaan pembaruan.

Hasil berikut dikenal sebagai *Teorema Pembaruan Elementer.*

Teorema 5. *(Elementary Renewal Theorem)*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \qquad (28)$$

Bukti: Kita tahu, $m(t) = E(N(t))$. Dari persamaan (24) kita tahu bahwa nilai rata-rata $N(t)$ untuk $t \to \infty$ adalah t/μ. □

Teorema 5 juga dapat diturunkan dengan menggunakan proposisi berikut ini (bukti proposisi tersebut dapat dilihat pada Ross, 1997:262-263).

Proposisi 3.

$$E[S_{N(t)+1}] = \mu[m(t)+1]. \qquad (29)$$

Untuk membuktikan (28) dengan mengggunakan proposisi di atas, misalkan $Y(t)$ adalah waktu dari saat t sampai dengan kedatangan berikutnya, yakni

$$t + Y(t) = S_{N(t)+1}. \qquad (30)$$

Dengan mengambil nilai ekspektasi dan menggunakan Proposisi 3 diperoleh

$$t + E[Y(t)] = \mu[m(t)+1], \qquad (31)$$

yang selanjutnya menghasilkan

$$\frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} + \frac{E[Y(t)]}{\mu t}.$$

Sekarang, jika dimisalkan $C(t)$ adalah waktu dari kedatangan ke-$N(t)$ sampai saat t, yakni $C(t) = t - S_{N(t)}$, maka $T_{N(t)+1} = C(t) + Y(t)$. Dari asumsi dasar proses pembaruan dan sifat linieritas operator E, diperoleh $E[Y(t)] + E[C(t)] = E[T_{N(t)+1}] = \mu < \infty$. Oleh karena nilai-nilai tersebut nonnegatif, maka $E[Y(t)] < \infty$. Dengan demikian

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[Y(t)]}{\mu t} = 0,$$

dan (28) dapat diperoleh. □

Analog dengan Teorema 5, dari Teorema 1 dapat pula diturunkan hasil berikut, yang merupakan bentuk lain (25).

Teorema 6. *Untuk distribusi asimptotik dipenuhi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Var[N(t)]}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}. \tag{32}$$

5 Contoh Kasus: Simulasi Proses Poisson

Misalkan sebuah lampu listrik baru dipasang di ruang gawat darurat sebuah rumah sakit. Misalkan pula bahwa usia hidup lampu listrik tersebut berdistribusi eksponensial dengan rata-rata usia hidup μ bulan (dengan kata lain, laju kematian lampu adalah $\lambda = 1/\mu$, yakni sekali dalam $1/\mu$ bulan). Anggap bahwa begitu lampu mati langsung diganti dengan lampu baru yang mempunyai distribusi usia hidup sama. Proses penggantian lampu demikian merupakan sebuah proses pembaruan khusus, yang dikenal dengan nama **proses Poisson**, dengan $N(t)$ menyatakan banyaknya **penggantian** yang telah dilakukan pada saat t, dihitung sejak saat pemasangan lampu pertama kali. Oleh karena interval-interval waktu kedatangan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ maka $N(t)$ berdistribusi Poisson dengan rata-rata λt dan varians $\sigma^2_{N(t)} = \lambda t$. Dalam hal ini, varians usia hidup lampu adalah $\sigma^2 = \mu^2$.

Proses Poisson ini memenuhi persamaan-persamaan (25), (28), dan (32), yakni:

(1) $\lim_{t\to\infty} \frac{Var[N(t)]}{E[N(t)]} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda t}{\lambda t} = 1$, karena $\frac{\sigma^2}{\mu^2} = 1$;

(2) $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda t}{t} = \lambda = \frac{1}{\mu}$;

(3) $\lim_{t\to\infty} \frac{Var[N(t)]}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda t}{t} = \lambda$, karena $\frac{\sigma^2}{\mu^3} = \frac{1}{\mu} = \lambda$.

Terlihat bahwa proporsi dalam limit-limit di atas tidak tergantung pada t.

Berikut disajikan hasil simulasi proses Poisson di atas dengan mengambil observasi pada beberapa nilai t. Pada setiap nilai t dilakukan sampling dengan melakukan pengulangan simulasi sebanyak n kali sedemikian hingga $\lambda t/n \leq 0.01$. Tampak bahwa hasil simulasi tersebut sesuai dengan hasil-hasil limit di atas dan juga dengan Proposisi 3. Simulasi dengan laju kedatangan dan waktu-waktu observasi lain juga memberikan hasil yang serupa. Simulasi tersebut dilakukan dengan menggunakan program MATLAB yang disusun penulis, seperti tercantum pada lampiran.

TABEL 1. Hasil simulasi sebuah proses Poisson (**Proses Pembaruan dengan waktu kedatangan eskponensial**) dengan laju kedatangan $\lambda = 1/25$.

Waktu (t)	Sampel (n)	$\overline{N(t)/t}$	$\frac{\overline{Var[N(t)]}}{t}$	$\frac{\overline{Var[N(t)]}}{\overline{N(t)}}$	$\overline{S_{N(t)+1}}$
100	400	0.040675	0.039478	0.97057	126.71
200	800	0.039756	0.037554	0.94460	225.58
300	1200	0.040033	0.038015	0.94958	324.47
400	1600	0.040344	0.041663	1.03270	424.86
500	2000	0.039710	0.040006	1.00750	525.69
600	2400	0.040084	0.041236	1.02870	625.40
700	2800	0.040043	0.038440	0.95997	725.11
800	3200	0.040056	0.041061	1.02510	825.63
900	3600	0.039901	0.038985	0.97704	924.25
1000	4000	0.040190	0.039371	0.97961	1025.6
Limit Teoritis		$\lambda = 1/25$	$\lambda = 1/25$	1	$t + \mu = t + 25$

6 Penutup

Telah dijelaskan beberapa pengertian dan definisi untuk mendeskripsikan secara stokastik **proses pembaruan** (*renewal process*) sebagaimana dijelaskan pada bagian pendahuluan. Terdapat tiga kelompok variabel acak yang terkait dalam proses pembaruan, yakni T_n , S_n, dan $N(t)$, dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$, dan $t > 0$ menyatakan waktu dari saat proses diukur. Ketiga variabel acak tersebut saling terkait, sebagaimana dijelaskan pada "kesamaan" (1), (2), (3), dan (4).

Distribusi S_n tergantung pada distribusi T_1, distribusi $N(t)$ tergantung pada distribusi S_n. Selanjutnya, telah dapat diberikan beberapa batas bawah maupun atas untuk distribusi $N(t)$ yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Dengan menggunakan teorema limit pusat, telah ditunjukkan bahwa untuk t mendekati tak berhingga, distribusi $N(t)$ mendekati distribusi normal dengan nilai rata-rata t/μ dan variansi $t\sigma^2/\mu^3$, dengan $\mu = E[T_1]$ dan $\sigma^2 = var(T_1)$.

Dari hasil pada Teorema 3 dan 5, ternyata baik $N(t)$ maupun ekspektasinya, $m(t) = E[N(t)]$, mempunyai laju pertambahan yang sama untuk t mendekati tak berhingga.[1] . Hasil ini adalah hal khusus dalam teori pembaruan.

Hasil-hasil di atas merupakan sifat-sifat dasar proses pembaruan biasa, yang mengasumsikan interval-interval waktu kedatangan saling bebas dan berdistribusi identik. Sebagai catatan akhir, berikut beberapa hal yang menarik untuk dikaji lebih lanjut adalah:

(1) Keberlakuan (padanan) sifat-sifat dan hasil-hasil yang telah dijelaskan di atas untuk **proses pembaruan tertunda** dan **proses pembaruan stasioner**.
(2) Dari limit laju pertambahan $m(t)$ untuk nilai t yang cukup besar di atas, secara intuitif dapat diperkirakan bahwa perubahan nilai $m(t)$ dalam interval waktu sepanjang h di sekitar t adalah h/μ, yakni $\lim_{t\to\infty}[m(t+h) - m(t)] = h/\mu$.

Daftar Rujukan

[1] Cox, D.R. *Renewal Theory*. Methuen & Co. LTD. London, 1967
[2] Grimmett, G.R. and D.R. Stirzaker. *Probability and Random Process*. second edition. Oxford University Press, Inc. New York, 1995
[3] Leon, Alberto and Garcia. *Probability and Random Process for Electrical Engineering*. second edition. Addison Wesley. New York, 1994
[4] Ross, Sheldon M. *Introduction to Probability Models*. Academic Press.Chestnut Hill, MA, 1997
[5] van der Weide, J.A.M. *wi483: Betrouwbaarheidstheorie*. Faculteit Informatietechnologie en Systemen, TUDelft. Delft, 1997

[1]Akan tetapi hal ini tidak berlaku secara umum untuk semua barisan variabel acak, lihat Ross (1997: 358-359).

Lampiran: Program-program MATLAB untuk melakukan Simulasi Proses Poisson

```
function T=poicess0(lambda,t)
% Simulate a Poisson process with rate 'lambda' until time 't'
% (c): Sahid (2002)
% Result: vector T of interarrival times
% Algorithm (inversion method):
% Generate i.i.d Uniform(0,1) rvs. U1, U2, ... Un such that
% n = min { k: -log(U1*U2*...*Uk) > lambda*time}
bound=lambda*t;
T=[];
while sum(T)<=bound
       T=[T, -log(rand)];
end
T=T/lambda; % note:T(n)=interval time of the first arrival after t
```

GAMBAR 2. Fungsi MATLAB `poicess0` untuk menghasilkan vektor interval-interval waktu kedatangan dalam proses Poisson

```
function N=poicess(lambda,t,n)
% Simulate n times a Poisson process with rate lambda until time t
% (c): Sahid (2002)
% Result: N the two-rows matrix with
% 1st row is Nt, the number of arrivals by time t
% 2nd row is SNt_1, he next arrival time after time t
N=[];
for k=1:n,
      T=poicess0(lambda,t);
      SNt_1=sum(T);
      if SNt_1>t, Nt=length(T)-1;
          else Nt=length(T);
      end
      N=[N [Nt;SNt_1]];
end
```

GAMBAR 3. Fungsi MATLAB `poicess` untuk melakukan sampling proses Poisson dengan hasil vektor-vektor variabel acak Poisson $N(t)$ dan saat kedatangan ke-$N(t)+1$.

```
function P=poissim(lambda,t)
% Simulation Poisson process having rate lambda
% (c): Sahid (2002)
w=length(t); % the number different observation times
P=[];
for k=1:w,
    n=ceil(100*lambda*t(k));
    % simulate the Poisson processes n times
    N=poicess(lambda,t(k),n);
    M=mean(N,2);
    V=var(N(1,:));    % the varians of the Poisson numbers
    mu=M(1);% the average of the Poisson numbers
    ES=M(2); % the average of the next arrival time after time t
    P=[P; t(k) n mu/t(k) V/t(k) V/mu ES]; % store in matrix
end
```

GAMBAR 4. Fungsi MATLAB `poissim` untuk melakukan simulasi observasi sebuah proses Poisson pada beberapa titik waktu