

BAHAN AJAR PERKULIAHAN
Mata Kuliah: Aplikasi Komputer



Oleh: Drs. Sahid, M.Sc.

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2022**

DAFTAR ISI

1 Pengenalan dan Belajar Menggunakan Software EMT	2
2 Menggunakan EMT untuk menyelesaikan masalah-masalah Aljabar	18
2.0.1 EMT4Aljabar	18
2.0.2 Latihan Soal	69
3 Menggunakan EMT untuk mengambar grafik 2 dimensi (2D)	71
4 Menggunakan EMT untuk mengambar grafik 3 dimensi (3D)	152
5 Menggunakan EMT untuk kalkulus	217
6 Menggunakan EMT untuk Geometri	259
7 Menggunakan EMT untuk Statistika	343

BAB 1

PENGENALAN DAN BELAJAR MENGGUNAKAN SOFTWARE EMT

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.

- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.

- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorials and Examples", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan meng-klik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: F (x) = \int_a^x f (t) dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$
$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C

http://www.euler-math-toolbox.de

See: http://www.google.de | Google

image: hati.png

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.

- Sebuah koma mencetak hasilnya.

- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

4 . 90873852123
7 . 85398163397

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

```
> (2+6) *3
```

24

```
>(10000-500)/20
```

475

```
>444^2-100
```

197036

```
>(sqrt (289)+13)/100
```

0 . 3

```
>69^4-999
```

22666122

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!

- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).

- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.

- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.

- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan := sebagai ganti =
```

1 . 25

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187  
-1  
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan $^{\circ}$. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi. EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika. Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
> (sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi  $x^2-x+1=0$ 
```

```
1.61803398875  
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

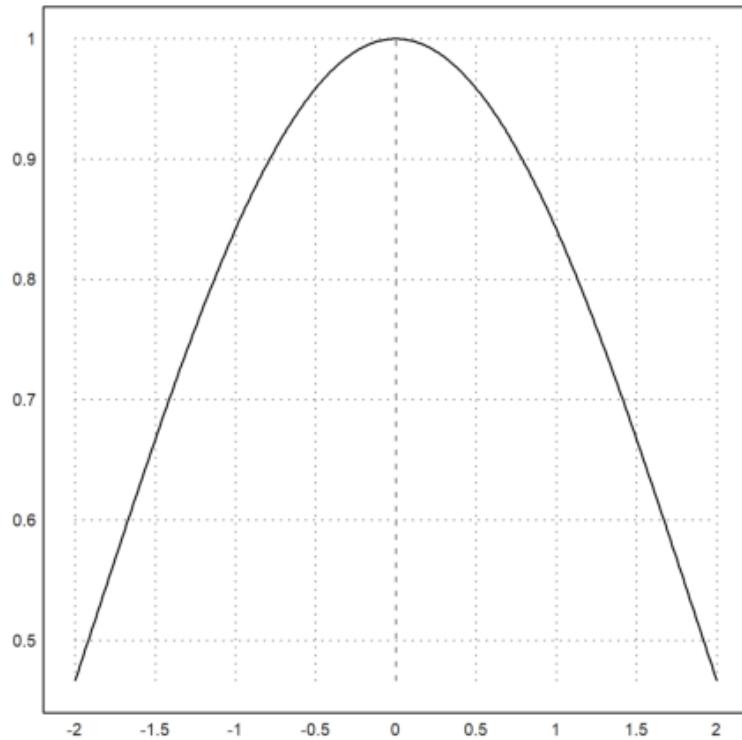
```
> {phi,r}=polar(1,2); degprint(phi), r,
```

```
63°26'5.82''  
2.2360679775
```

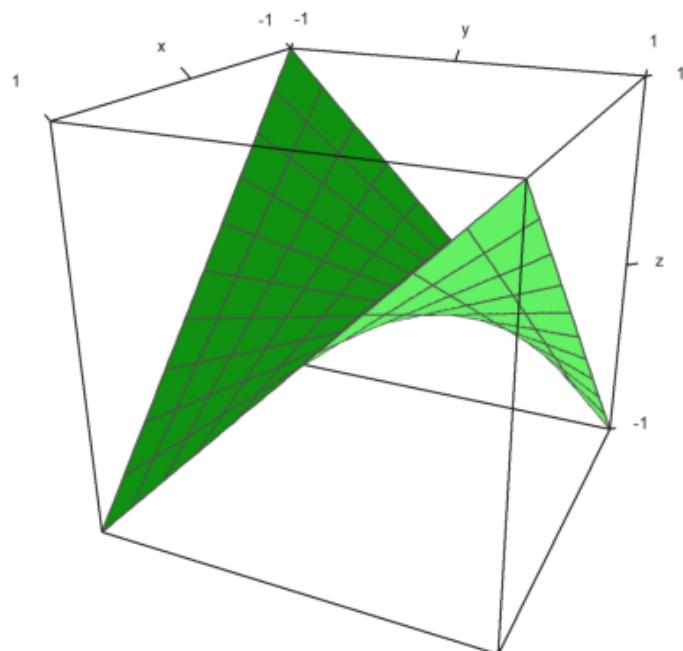
```
> factor(gcd(11^4*123*1237,11^2*123^2))
```

```
[3, 11, 11, 41]
```

```
> plot2d("1-x^2/3!+x^4/5!"):
```



```
> plot3d("x*y"); insimg;
```



Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles // 1 mil = 1609,344 m
```

1609.344

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar (\$), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.

```
kilometer$:=1000;  
km$:=kilometer$;  
cm$:=0.01;  
mm$:=0.001;  
minute$:=60;  
min$:=minute$;  
minutes$:=minute$;  
hour$:=60*minute$;  
h$:=hour$;  
hours$:=hour$;  
day$:=24*hour$;  
days$:=day$;  
d$:=day$;  
year$:=365.2425*day$;  
years$:=year$;  
y$:=year$;  
inch$:=0.0254;  
in$:=inch$;  
feet$:=12*inch$;  
foot$:=feet$;  
ft$:=feet$;  
yard$:=3*feet$;  
yards$:=yard$;  
yd$:=yard$;  
mile$:=1760*yard$;  
miles$:=mile$;  
kg$:=1;  
sec$:=1;  
ha$:=10000;  
Ar$:=100;  
Tagwerk$:=3408;  
Acre$:=4046.8564224;  
pt$:=0.376mm;
```

Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

2.48548476895

101.6 mm

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatramilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
3.1
```

```
>fraction pi
```

```
312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
1612.7
```

```
2.71828182846
```

```
3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "deformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, deformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

```
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

0.392857142857

11/28

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

-0.138444501319

-3.61155549868

Menampilkan Daftar Variabel

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

r	1.25
a	4
b	15
c	2
D	1.73655549868123

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m\$".

```
>listvar m$
```

km\$	1000
cm\$	0.01
mm\$	0.001
nm\$	1853.24496
gram\$	0.001
m\$	1
hquantum\$	6.62606957e-34
atm\$	101325

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D  
>D
```

Variable D not found!

Error in:

D ...
^

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah "inrandom" berikut ini!

```
>inrandom(10,6)
```

[4, 2, 6, 2, 4, 2, 3, 2, 2, 6]

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.

Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

[0.270906, 0.704419, 0.217693, 0.445363, 0.308411, 0.914541, 0.193585,
0.463387, 0.095153, 0.595017]

```
>normal(10)
```

[-0.495418, 1.6463, -0.390056, -1.98151, 3.44132, 0.308178, -0.733427,
-0.526167, 1.10018, 0.108453]

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(), antar baris dipisahkan oleh titik koma();).

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

[4, 5, 6, 3, 2, 1]

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:), seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1, 2, 3, 4, 5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.35
```

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.  
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.  
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.  
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan kompleks x.  
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.  
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!  
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i  
2  
3  
2-3i  
0.982793723247  
56.309932474  
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

90

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

0+1i

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

-1+0i
0+1i

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT). Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>& (a+b)^2
```

$$(b + a)^2$$

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

$$\frac{2}{b^2 + 2ab + a^2}$$

$$(x^2 + 2)(x^2 + 3)$$

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

$$[x = \frac{(-\sqrt{b^2 - 4ac}) - b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}]$$

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2 + a^2}$$

$$a^2 - b^2$$

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

3628800

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

3628800

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda ":" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

[2, 2, 2, 5, 5, 5]

```
>::: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

```
>::: factor(20!)
```

$$\begin{matrix} 18 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 \end{matrix}$$

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

$$10$$

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

$$\frac{(m - 3)(m - 2)(m - 1)m}{24}$$

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x) sin(y)
```

$$\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

$$\cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)$$

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi tri
```

$$\frac{\sin(x) + \cos^4(x)}{\cos^3(x)}$$

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1) / (x+1)
```

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

```
>&ratsimp(p1)
```

$$\frac{x^2 - x + 1}{x}$$

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1) / (3+1)
```

7

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

$$\frac{(b + a)^3 + 1}{b + a + 1}$$

$$b^2 + (2ab - 1)b^2 + a^2 - a + 1$$

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \\ 3x \quad x + 1 \\ \hline x + 1 \quad 2 \\ (x + 1) \end{array}$$

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ 2x - 3x + 6x \\ \hline 6 \end{array}$$

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitungan simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar (\$) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima. Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$& (a+b)^2
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
>$& (a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.

- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
 - Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
 - Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.
- Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

Soal 1

Tentukan nilai x dari persamaan $x^2+4x-12=0$

Penyelesaian

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+4*x-12=0)
```

$$b^2 + 2ab + a^2$$

$$(x - 2)(x + 6) = 0$$

Soal 2

Tentukan nilai $f(x)=x^2-2x-15$ untuk $x=11$, $x=23$, dan $x=27$

Penyelesaian

```
>pl &= (x^2-2*x-15)
```

$$x^2 - 2x - 15$$

```
>&pl with x=11 // (11^2-2*11-15)
```

84

```
>&pl with x=23 // (23^2-2*23-15)
```

468

```
>&pl with x=27 // (27^2-2*27-15)
```

660

BAB 2

MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH-MASALAH ALJABAR

2.0.1 EMT4Aljabar

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
> $& 6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9)
```

Menjabarkan:

$$(6x^{-3} + y^5)(-7x^2 - y^{-9})$$

```
>$&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9))))
```

Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler diikuti oleh titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.

Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>ter:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

16.7551608191

Perintah harus dipisahkan dengan yang kosong. Baris perintah berikut dicetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

50.2654824574

100.530964915

Baris perintah dieksekusi dalam urutan yang ditekan pengguna kembali. Jadi Anda mendapatkan nilai baru setiap kali Anda menjalankan baris kedua.

```
>x := 1;  
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

0.540302305868

```
>x := cos(x)
```

0.857553215846

Jika dua garis terhubung dengan "..." kedua garis akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...  
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

1.41666666667

1.41421568627

1.41421356237

Ini juga merupakan cara yang baik untuk menyebarkan perintah panjang pada dua baris atau lebih. Anda dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi garis menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctrl+Back untuk menggabungkan baris.

Untuk melipat semua multi-garis tekan Ctrl+L. Maka baris berikutnya hanya akan menjadi terlihat, jika salah satunya memiliki fokus. Untuk melipat satu multi-garis, mulailah baris pertama dengan "%+".

```
>%+ x=4+5; ...
```

Garis yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

81

Euler mendukung perulangan di baris perintah, selama mereka masuk ke dalam satu perulangan garis atau multi-garis. Dalam program, pembatasan ini tidak berlaku, dari kursus. Untuk informasi lebih lanjut, lihat pengantar berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5  
1.4166666667  
1.41421568627  
1.41421356237  
1.41421356237
```

Tidak apa-apa untuk menggunakan multi-baris. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // comments go here before the ...  
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~≈x; ...  
> x := xnew; ...  
>end; ...  
>x,
```

```
1.41421356237
```

Struktur bersyarat juga berfungsi.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Saat Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun dalam perintah garis. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengklik ke bagian komentar di atas perintah untuk pergi ke perintah.

Saat Anda menggerakkan kursor di sepanjang garis, pasangan pembuka dan penutup dari kurung atau kurung akan disorot. Juga, perhatikan baris status. Setelah kurung buka dari fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan a teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol kembali.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks untuk dicari. Di baris kosong, bantuan untuk bantuan jendela akan ditampilkan. Anda dapat menekan mlarikan diri untuk menghapus garis, atau untuk menutup jendela bantuan. Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Mencoba mengklik dua kali perintah exp di bawah ini di baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

2.5

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersama dengan tombol kursor apa pun. Lebih-lebih lagi, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

Sintaks Dasar

Euler mengetahui fungsi matematika biasa. Seperti yang Anda lihat di atas, trigonometri fungsi bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilai, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat adalah disebut sqrt di Euler. Tentu saja, $x^{(1/2)}$ juga dimungkinkan.

Untuk menyetel variabel, gunakan "=" atau ":=". Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak masalah. Tapi ruang antara perintah diharapkan.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan keluaran dari perintah. Di akhir baris perintah "," diasumsikan, jika ";" adalah hilang.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

30.65625

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Memasuki

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3 + 4 \log(0.6)} + \frac{1}{7} \right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Tonton yang disorot kurung untuk bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

```
>E^2 * (1 / (3+4*log(0.6)) + 1/7)
```

8.77908249441

Untuk menghitung ekspresi rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + 2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \right)^2 \pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

23.2671801626

Dengan hati-hati letakkan tanda kurung di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyorot ekspresi yang diakhiri dengan kurung tutup. Anda juga harus memasukkan nama "pi" untuk huruf Yunani pi.

Hasil dari perhitungan ini adalah bilangan floating point. Ini oleh default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita bisa merujuk ke yang sebelumnya hasil dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

0.47619047619

10/21

Perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Sebuah ekspresi terbuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, itu harus mengandung tanda kurung untuk memaksa urutan eksekusi yang benar. Diragukan, menyentel braket itu bagus ide. Perhatikan bahwa EMT menunjukkan tanda kurung buka dan tutup saat mengedit garis komando.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

14.4978445072

Operator numerik Euler meliputi

+ unary atau operator plus

- unary atau operator dikurangi

*, /

. produk matriks

a^b daya untuk positif a atau bilangan bulat b (a**b juga berfungsi)

n! operator faktorial

dan masih banyak lagi.

Berikut adalah beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Ada banyak lagi.

sin,cos,tan,atan,asin,acos,rad,deg

log,exp,log10,sqrt,logbase

bin,logbin,logfac,mod,floor,ceil,round,abs,sign

conj,re,im,arg,conj,nyata,kompleks

beta,betai,gamma,complexgamma,ellrf,ellf,ellrd,elle

bit dan, bitor, bitxor, bitnot

Beberapa perintah memiliki alias, misalnya ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

2

0.5

```
>sin(30°)
```

0.5

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (kurung bulat), setiap kali ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan $(2^3)^4$, yaitu default untuk 2^3^4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+24  
4096  
2.41785163923e+24
```

Bilangan Asli

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan real. Real adalah diwakili dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
1.01010101010101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
5.555555555554*16^-1
```

String

Sebuah string dalam Euler didefinisikan dengan "...".

```
>"A string can contain anything."
```

```
A string can contain anything.
```

String dapat digabungkan dengan `|` atau dengan `+`. Ini juga bekerja dengan angka, yang dikonversi ke string dalam kasus itu.

```
>"The area of the circle with radius " + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."
```

```
The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi cetak juga mengonversi angka menjadi string. Ini bisa memakan waktu jumlah digit dan jumlah tempat (0 untuk keluaran padat), dan secara optimal a satuan.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Tidak ada string khusus, yang tidak dicetak. Itu dikembalikan oleh beberapa berfungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Ini dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan kembali.)

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi saja. Ini berfungsi untuk ekspresi juga (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

1234.5

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v := ["affe", "charlie", "bravo"]
```

affe
charlie
bravo

Vektor string kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat berupa digabungkan.

```
>w := [none]; w | v | v
```

affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini mengandung kode UTF-8. Untuk menghasilkan string seperti itu, gunakan u"..." dan salah satu dari HTML entitas.

String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"\&alpha;" = " + 45 + u"\&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

= 45°

I

Dalam komentar, entitas yang sama seperti a, & dll dapat digunakan. Ini mungkin alternatif cepat untuk Lateks. (Lebih detail di komentar di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsinya strtochar() akan mengenali string Unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v= strtochar(u"\&Auml; is a German letter")
```

[196, 32, 105, 115, 32, 97, 32, 71, 101, 114, 109, 97, 110,
32, 108, 101, 116, 116, 101, 114]

Hasilnya adalah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah grafikoutf().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;") [1]; chartoutf(v)
```

Ü is a German letter

Fungsi utf() dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi a string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta; ."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

We have =.

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"Ähnliches"
```

Ähnliches

Nilai Boolean

Nilai Boolean direpresentasikan dengan 1=true atau 0=false dalam Euler.
String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0  
1
```

"and" adalah operator "&&" dan "or" adalah operator "||", seperti pada bahasa C. (kata - kata "and" dan "or" hanya dapat digunakan dalam kondisi untuk "if".)

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]  
[6, 7, 8, 9, 10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi bukan nol() untuk mengekstrak elemen tertentu dari bentuk a vektor. Dalam contoh, kami menggunakan isprime bersyarat(n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29,
31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57,
59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85,
87, 89, 91, 93, 95, 97, 99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N)) ] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]
```

Format Keluaran

Format output default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kami melihat default, kami mengatur ulang format.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk bilangan ganda dengan sekitar 16 angka desimal. Untuk melihat jumlah digit penuh, gunakan perintah "format terpanjang", atau kita menggunakan operator "terpanjang" untuk menampilkan hasilnya di format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari bilangan ganda.

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format output dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
0.33333
3.14159
0.84147
```

Standartnya adalah format(12).

```
>format(12); 1/3
```

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" berfungsi dengan cara berikut

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
0.66    0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44    0.3  
0.28    0.88    0.27    0.7     0.22    0.45    0.31    0.91  
0.19    0.46    0.095   0.6     0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format (12). Tapi ini bisa diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi "longestformat" mengatur format skalar juga.

```
>longestformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

Untuk referensi, berikut adalah daftar format keluaran yang paling penting.

```
shortestformat shortformat longformat, longestformat  
format(length,digits) goodformat(length)  
fracformat(length)  
defformat
```

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan IEEE standar. Angka disimpan dalam format internal ini.

Tetapi format keluaran EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
3.14159
```

Standarnya adalah defformat().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator "longest" akan mencetak semua digit angka yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
4.934802200544679
```

Ada juga operator pendek untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kita telah menggunakan di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

25/12

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilainya 0,1 tidak akan terwakili dengan tepat. Kesalahan bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat di mengikuti perhitungan.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

-1.110223024625157e-16

Tetapi dengan "longformat" default Anda tidak akan melihat ini. Untuk kenyamanan,keluaran dari bilangan yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

0

Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda berniat menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy" dll. Ekspresi mengambil didahulukan dari fungsi. Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

12.56637061435917

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan itu. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

-0.919535764538

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, bahkan jika ada a variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang disebut fungsi.)

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

36

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" daripada nilai global yang Anda perlukan tambahkan "at=nilai".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

45

Untuk referensi, kami menyatakan bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita bisa membuat contoh di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

45

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti fungsi. Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti simbol global ekspresi menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara simbolik ekspresi dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

12

Dengan cara konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

Bentuk khusus dari ekspresi memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk evaluasi ekspresi, bukan hanya "x", "y" dll. Untuk ini, mulai ekspresi dengan "@(variabel) ...".

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

@(a,b) a^2+b^2

41

Ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, maka ekspresi dapat dievaluasi seperti fungsi. Seperti yang Anda lihat dalam contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x; ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

-0.475

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

-0.425

Sebuah ekspresi tidak perlu simbolis. Ini perlu, jika ekspresi berisi fungsi, yang hanya diketahui di kernel numerik, tidak di Maksimal.

Matematika Simbolik

EMT melakukan matematika simbolis dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan mengikuti tutorial, atau telusuri referensi untuk Maxima. Pakar di Maxima harus dicatat bahwa ada perbedaan sintaks antara yang asli sintaks Maxima dan sintaks default ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik terintegrasi secara mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apa pun dimulai dengan & adalah ekspresi simbolis. Itu dievaluasi dan dicetak oleh Maksimal.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika "tak terbatas" yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$& 44 !
```

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita hitung

$$C(44, 10) = \frac{44!}{34! \cdot 10!}$$

```
>$& 44!/ (34!*10!) // nilai C(44,10)
```

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini (seperti halnya bagian numerik dari EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali padanya. Misalnya, coba klik dua kali pada "&binomial" di baris perintah sebelumnya. Ini membuka dokumentasi Maxima sebagai disediakan oleh penulis program itu.

Anda akan mengetahui bahwa yang berikut ini juga berfungsi.

$$C(x, 3) = \frac{x!}{(x-3)!3!} = \frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

```
>$binomial(x, 3) // C(x, 3)
```

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan "with".

```
>$&binomial(x, 3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x, 3)
```

Dengan begitu Anda dapat menggunakan solusi persamaan dalam persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasan untuk ini adalah spesial bendera simbolis dalam string.

Seperti yang akan Anda lihat pada contoh sebelumnya dan berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolis dengan Lateks. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolis dengan LaTeX, gunakan \$ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan & sebelum perintah. Jangan jalankan perintah Maxima dengan \$, jika Anda tidak memiliki LaTeX terpasang.

```
> $ (3+x) / (x^2+1)
```

Ekspresi simbolik diurai oleh Euler. Jika Anda membutuhkan sintaks yang kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat menyertakan ekspresi dalam "...". Untuk menggunakan lebih dari ekspresi sederhana dimungkinkan, tetapi sangat tidak disarankan.

```
> &"v := 5; v^2"
```

25

Untuk kelengkapan, kami menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi harus diapit dalam tanda kutip. Selain itu, itu jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

```
> $&expand((1+x)^4), $&factor(diff(% ,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah kita menyimpan solusi ke variabel simbolik.

Variabel simbolik didefinisikan dengan "&=".

```
> fx &= (x+1) / (x^4+1); $&fx
```

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
> $&factor(diff(fx,x))
```

Input langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "compatibility mode").

```
>&factor(20!)
```

2432902008176640000

```
>::: factor(10!)
```

$$\begin{matrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{matrix}$$

```
>::: factor(20!)
```

```
18 8 4 2  
2 3 5 7 11 13 17 19
```

Jika Anda seorang ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli dari Maxima. Anda dapat melakukannya dengan ":::".

```
>::: av:g$ av^2;
```

```
2  
g
```

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

```
3 x  
x E
```

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa dalam mengikuti perintah sisi kanan &= dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
5  
125 E
```

```
18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk evaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "with". Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima dapat mengevaluasi dan ekspresi secara numerik dengan float().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
10          5  
1000 E   - 125 E
```

```
2.20079141499189e+7
```

```
>${factor(diff(fx,x,2))}
```

Untuk mendapatkan kode Lateks untuk ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

```
x^3\, e^{x }
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolik, ini tidak berfungsi, karena Maxima tidak mendukung dia. Sebagai gantinya, gunakan sintaks "with" (bentuk yang lebih bagus dari perintah at(...) dari Maxima).

```
>${&fx with x=1/2}
```

Tugas juga bisa simbolis

```
>${&fx with x=1+t}
```

Perintah solve memecahkan ekspresi simbolik untuk variabel di Maxima. Itu hasil adalah vektor solusi.

```
>${&solve(x^2+x=4,x)}
```

Bandingkan dengan perintah numerik "selesaikan" di Euler, yang perlu dimulai nilai, dan secara opsional nilai target.

```
>solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolis dapat dihitung dengan evaluasi dari hasil simbolis. Euler akan membacaikan tugas x= dll. Jika Anda tidak memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numerik.

```
>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

```
[-3.23607, 1.23607]
```

Untuk mendapatkan solusi simbolis tertentu, seseorang dapat menggunakan "with" dan indeks.

```
>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

Ekspresi simbolik dapat memiliki tanda, yang menunjukkan perlakuan khusus dalam Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, yang lain tidak. flag adalah ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih bagus dari "ev(...,flags)")

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan  
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan  
>$&factor(%)
```

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang didefinisikan dengan perintah "fungsi". Ini bisa menjadi fungsi satu baris atau fungsi multibaris. Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolis. Fungsi satu baris numerik adalah ditentukan oleh ":=".

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Untuk gambaran umum, kami menunjukkan semua kemungkinan definisi untuk fungsi satu baris. SEBUAH fungsi dapat dievaluasi seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini akan bekerja untuk vektor juga, mematuhi bahasa matriks dari Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi divektorkan.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0, 0.100499, 0.203961, 0.313209, 0.430813, 0.559017, 0.699714,  
0.854459, 1.0245, 1.21083, 1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Alih-alih ekspresi, kita hanya perlu menyediakan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus disediakan dalam sebuah string.

```
>solve("f", 1, y=1)
```

0.786151377757

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi bawaan, Anda harus menambahkan kata kunci "timpa". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menyebabkan masalah untuk fungsi lain tergantung pada fungsi tersebut.

Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "...", jika itu adalah fungsi di inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redefine sine in degrees  
>sin(45)
```

0.707106781187

Lebih baik kita menghapus definisi ulang sin ini.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

0.707106781187

Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default

```
>function f(x, a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

16

Menyetelnya akan menimpa nilai default.

```
>f(4, 5)
```

80

Parameter yang ditetapkan juga menimpanya. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4, a=1)
```

16

Jika sebuah variabel bukan parameter, itu harus global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2  
>a=6; f(2)
```

24

Tetapi parameter yang ditetapkan menimpa nilai global.

Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditentukan, itu harus dideklarasikan dengan ":="!

```
>f(2,a:=5)
```

20

Fungsi simbolis didefinisikan dengan "&=". Mereka didefinisikan dalam Euler dan Maxima, dan bekerja di kedua dunia. Ekspresi yang menentukan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan bekerja jika EMT dapat menginterpretasikan semua yang ada di dalam fungsi.

```
>g(5+g(1))
```

178.635099908

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolis lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegralkan  
>solve(&g(x),0.5)
```

0.703467422498

Berikut ini juga berfungsi, karena Euler menggunakan ekspresi simbolis dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan jika ada fungsi simbolis g.

```
>solve(&g,0.5)
```

0.703467422498

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)  
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)  
>$&P(x,4), $&expand(%)  
>P(3,4)
```

625

```
> $&P(x, 4) + Q(x, 3), $&expand(%)
> $&P(x, 4) - Q(x, 3), $&expand(%), $&factor(%)
> $&P(x, 4) * Q(x, 3), $&expand(%), $&factor(%)
> $&P(x, 4) / Q(x, 1), $&expand(%), $&factor(%)
> function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

Dengan `&=` fungsinya adalah simbolis, dan dapat digunakan dalam simbol lainnya ekspresi.

```
> $&integrate(f(x), x)
```

Dengan `:=` fungsinya numerik. Contoh yang baik adalah integral tak tentu seperti

$$f(x) = \int_1^x t^t dt,$$

yang tidak dapat dievaluasi secara simbolis.

Jika kita mendefinisikan kembali fungsi dengan kata kunci "peta" itu dapat digunakan untuk vektor `x`. Secara internal, fungsi dipanggil untuk semua nilai `x` satu kali, dan hasil disimpan dalam vektor.

```
> function map f(x) := integrate("x^x", 1, x)
> f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431, -0.410816, 0, 0.676863, 2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
> function mylog (x, base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang fungsi dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
> mylog(100), mylog(2^6.7, 2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
> mylog(E^2, base=E)
```

```
2
```

Seringkali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk individu elemen di tempat lain. Ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
> function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

Fungsi simbolis seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.

Tetapi fungsi juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

17

Ada juga fungsi simbolis murni, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &=& diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua  
diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(% ,x,y)
```

Tapi tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolis atau dalam definisi dari fungsi simbolis.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

Untuk meringkas

- &= mendefinisikan fungsi simbolis,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolis murni.

Menyelesaikan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolis.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan solve() fungsi. Perlu nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode garis potong.

```
>solve("x^2-2",1)
```

1.41421356237

Ini juga berfungsi untuk ekspresi simbolis. Ambil fungsi berikut.

```
>$&solve(x^2=2,x)  
>$&solve(x^2-2,x)  
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)  
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])  
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

Sekarang kita cari titiknya, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), defaultnya nilai target y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan. Kami menggunakan y=2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

0.966715594851
2

Memecahkan ekspresi simbolis dalam bentuk simbolis mengembalikan daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolik solve() yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusinya secara numerik seperti ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
-0.6180339887498949      1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "with".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

Memecahkan sistem persamaan secara simbolis dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan pemecah simbolik solve(). Jawabannya adalah daftar daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2, x^3+2*y+x=4], [x, y])
```

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Tapi seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

$$a^x - x^a = 0.1$$

with a=3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameternya (sebaliknya adalah parameter titik koma).

```
>solve({{"f", 3}}, 2, y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Ini juga bekerja dengan ekspresi. Tapi kemudian, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar di tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^a-a^x", a=3}}, 2, y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/fo\
urier_elim/fourier_elim.lisp

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0  
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0  
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0  
>$&fourier_elim([x # 6],[x])  
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian  
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R  
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])  
>$&fourier_elim([\cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal  
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan  
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])  
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])  
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or (x - y >8),[x,y])  
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])
```

[6 < x, x < 8, y < - 11] or [8 < x, y < - 11]
or [x < 8, 13 < y] or [x = y, 13 < y] or [8 < x, x < y, 13 < y]
or [y < x, 13 < y]

```
>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])
```

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi diskusi terperinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan oleh koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[1,2;3,4]
```

1	2
3	4

Produk matriks dilambangkan dengan titik.

```
>b=[3;4]
```

3
4

```
>b' // transpose b
```

```
[3, 4]
```

```
>inv(A) //inverse A
```

```
-2 1  
1.5 -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
11  
25
```

```
>A.inv(A)
```

```
1 0  
0 1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah semua fungsi dan operator bekerja elemen untuk elemen.

```
>A.A
```

```
7 10  
15 22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
1 4  
9 16
```

```
>A.A.A
```

```
37 54  
81 118
```

```
>power(A, 3) //perpangkatan matriks
```

```
37 54  
81 118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
1 1  
1 1
```

```
>A\b // pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)
```

```
0.333333      0.666667  
0.75          1
```

```
>A\b // hasil kali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
-2  
2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
-2  
2.5
```

```
>A\A // A^(-1)A
```

```
1          0  
0          1
```

```
>inv(A).A
```

```
1          0  
0          1
```

```
>A*A // perkalian elemen-elemen matriks seletak
```

```
1          4  
9          16
```

Ini bukan produk matriks, tetapi perkalian elemen demi elemen. Itu sama bekerja untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

```
9  
16
```

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, itu diperluas dalam cara alami.

```
>2*A
```

```
2          4  
6          8
```

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemen-elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
> [1, 2] *A
```

1	4
3	8

Jika itu adalah vektor baris, itu diterapkan ke semua kolom A.

```
>A * [2, 3]
```

2	6
6	12

Seseorang dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v adalah digandakan untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1, 2], 2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1, 2] sebanyak 2 kali (baris)
```

1	2
1	2

```
>A * dup([1, 2], 2)
```

1	4
3	8

Ini juga berlaku untuk dua vektor di mana salah satunya adalah vektor baris dan lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung i^*j untuk i, j dari 1 hingga 5. Triknya adalah mengalikan 1:5 dengan transposnya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

```
>(1:5) * (1:5)' // hasil kali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Sekali lagi, ingat bahwa ini bukan produk matriks!

```
>(1:5) . (1:5)' // hasil kali vektor baris dan vektor kolom
```

55

```
>sum((1:5) * (1:5)) // sama hasilnya
```

55

Bahkan operator seperti < atau == bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
[1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
```

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi syarat tertentu kondisi dengan fungsi sum().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

```
5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti " $==$ ", yang memeriksa kesetaraan. Kami mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
```

Dari vektor seperti itu, "bukan nol" memilih elemen bukan nol.

Dalam hal ini, kita mendapatkan indeks dari semua elemen yang lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8, 9, 10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan yang sesuai nilai dalam t.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64, 81, 100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrad dari angka 1 hingga 1000, yang adalah 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4, 48, 95, 139, 147, 191, 238, 282, 290, 334, 381, 425, 433, 477, 524, 568, 576, 620, 667, 711, 719, 763, 810, 854, 862, 906, 953, 997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan bilangan bulat. Ini menggunakan titik mengambang presisi ganda secara internal. Namun, seringkali sangat berguna.

Kita dapat memeriksa keutamaan. Mari kita cari tahu, berapa banyak kotak ditambah 1 adalah bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

112

Fungsi nonzeros() hanya berfungsi untuk vektor, untuk matriks mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

0.765761	0.401188	0.406347	0.267829
0.13673	0.390567	0.495975	0.952814
0.548138	0.006085	0.444255	0.539246

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

1	4
2	1
2	2
3	2

Indeks ini dapat digunakan untuk mengatur elemen ke beberapa nilai.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

0.765761	0.401188	0.406347	0
0	0	0.495975	0.952814
0.548138	0	0.444255	0.539246

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen pada indeks ke entri dari beberapa matriks lainnya.

```
>mset(A,k,-random(size(A)) )
```

0.765761	0.401188	0.406347	-0.126917
-0.122404	-0.691673	0.495975	0.952814
0.548138	-0.483902	0.444255	0.539246

Dan adalah mungkin untuk mendapatkan elemen dalam sebuah vektor.

```
>mget(A,k)
```

[0.267829, 0.13673, 0.390567, 0.006085]

Fungsi lain yang berguna adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimum dan nilai maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

0.267829	4	0.765761	1
0.13673	1	0.952814	4
0.006085	2	0.548138	1

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal di setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

[0.765761, 0.952814, 0.548138]

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi max().

```
>max (A) '
```

```
[0.765761, 0.952814, 0.548138]
```

Tetapi dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

```
>j=(1:rows (A))' |ex[,4], mget (-A, j)
```

```
1          1  
2          4  
3          1  
[-0.765761, -0.952814, -0.548138]
```

Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks)

Untuk membangun sebuah matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek akan diisi dengan 0

```
>v=1:3; v_v
```

```
1          2          3  
1          2          3
```

Demikian juga, kita dapat melampirkan matriks ke yang lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

```
0.032444  0.0534171  0.595713  0.564454  1  
0.83916   0.175552   0.396988  0.83514   2  
0.0257573  0.658585  0.629832  0.770895  3
```

Jika mereka tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek adalah diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang melekat pada matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan real tersebut.

```
>A|1
```

```
0.032444  0.0534171  0.595713  0.564454  1  
0.83916   0.175552   0.396988  0.83514   1  
0.0257573  0.658585  0.629832  0.770895  1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

```
1           2           3  
1           2           3
```

```
> [v', v']
```

```
1           1  
2           2  
3           3
```

Tujuan utama dari ini adalah untuk menginterpretasikan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x, x^2]"(v')
```

```
1           1  
2           4  
3           9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
2  
4  
[2, 4]  
4
```

Untuk vektor, ada length().

```
>length(2:10)
```

```
9
```

Ada banyak fungsi lain, yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

```
1           1  
1           1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan yang lain angka dari 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
[6, 6, 6, 6, 6]
```

Juga matriks angka acak dapat dihasilkan dengan acak (uniform distribution) atau normal (Gauß distribution).

```
>random(2,2)
```

```
0.66566   0.831835  
0.977     0.544258
```

Berikut adalah fungsi lain yang berguna, yang merestrukturisasi elemen a matriks ke matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang vektor n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3]  
[1, 1, 2, 2, 2, 3, 3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() mengembalikan urutan baris atau kolom matriks. Yaitu, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5, 4, 3, 2, 1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft() dan rotright().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2, 3, 4, 5, 1]
```

Sebuah fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghilangkan elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]
```

Perhatikan bahwa vektor i di drop(v,i) mengacu pada indeks elemen di v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda perlu menemukan elemennya terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk menemukan elemen x dalam vektor yang diurutkan v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
[0, 5, 0, 6, 0, 0, 0, 7, 0, 8, 0]
[2, 3, 5, 7, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya memasukkan indeks di luar jangkauan (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak disortir.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau menghasilkan a matriks diagonal. Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

```
1 0 0 0 0
0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 1
```

Kemudian kita atur diagonal bawah (-1) menjadi 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

```
1 0 0 0 0
1 1 0 0 0
0 2 1 0 0
0 0 3 1 0
0 0 0 4 1
```

Perhatikan bahwa kami tidak mengubah matriks A. Kami mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari setdiag().

Berikut adalah fungsi, yang mengembalikan matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

```
2 3 0 0 0
1 2 3 0 0
0 1 2 3 0
0 0 1 2 3
0 0 0 1 2
```

Diagonal suatu matriks juga dapat diekstraksi dari matriks tersebut. Ke menunjukkan hal ini, kami meres-trukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sekarang kita dapat mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A,0)
```

[1, 5, 9]

Misalnya Kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. bahwa matriks memastikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke baris matriks dengan baris.

```
>fraction A/d'
```

1	2	3
4/5	1	6/5
7/9	8/9	1

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler juga berfungsi untuk input matriks dan vektor, kapan pun ini masuk akal. Misalnya, fungsi sqrt() menghitung akar kuadrat dari semua elemen dari vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

[1, 1.41421, 1.73205]

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk merencanakan function (alternatifnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampilkan
```

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dihasilkan dengan mudah.

Dalam contoh berikut, kita membangkitkan sebuah vektor nilai t[i] dengan spasi 0.1 dari -1 ke 1. Kemudian kita membangkitkan sebuah vektor dari nilai-nilai fungsi

$$s = t^3 - t$$

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

[0, 0.171, 0.288, 0.357, 0.384, 0.375, 0.336, 0.273, 0.192,
0.099, 0, -0.099, -0.192, -0.273, -0.336, -0.375, -0.384,
-0.357, -0.288, -0.171, 0]

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikalikan vektor baris menjadi matriks, jika sebuah operator diterapkan. Berikut ini, v' adalah vektor yang ditransposisikan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Perhatikan, bahwa ini sangat berbeda dari produk matriks. Matriks produk dilambangkan dengan titik "." di EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

55

Secara default, vektor baris dicetak dalam format ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

[1, 2, 3, 4]

Untuk matriks operator khusus . menunjukkan perkalian matriks, dan A' menunjukkan transpos. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

5
25

Untuk mentranspos matriks kita menggunakan apostrof.

```
>v=1:4; v'
```

1
2
3
4

Jadi kita dapat menghitung matriks A kali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

30
70

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi $v'.v$ berbeda dari vv' .

```
>v' . v
```

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

vv' menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah a vektor 1×1 , yang bekerja seperti bilangan real.

```
>v.v'
```

30

Ada juga norma fungsi (bersama dengan banyak fungsi lainnya dari Aljabar linier).

```
>norm(v)^2
```

30

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut adalah ringkasan aturannya.

- Fungsi yang diterapkan ke vektor atau matriks diterapkan ke setiap elemen.
- Operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan secara berpasangan ke elemen matriks.
- Jika kedua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas dalam cara yang masuk akal, sehingga mereka memiliki ukuran yang sama.

Misalnya, nilai skalar dikalikan dengan vektor mengalikan nilai dengan setiap elemen dari vektor. Atau matriks kali vektor (dengan *, bukan .) memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator 2 .

```
>[1,2,3]^2
```

[1, 4, 9]

Ini adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikali vektor kolom mengembang keduanya dengan menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

1	2	3
2	4	6
3	6	9

Perhatikan bahwa produk skalar menggunakan produk matriks, bukan *!

```
>v.v'
```

14

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus berkonsultasi dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah ini.

```
sum, prod menghitung jumlah dan produk dari baris  
cumsum, cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif  
menghitung nilai ekstrem dari setiap baris  
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrim  
diag(A,i) mengembalikan diagonal ke-i  
setdiag(A,i,v) menetapkan diagonal ke-i  
id(n) matriks identitas  
det(A) penentu  
charpoly(A) polinomial karakteristik  
eigenvalues(A) nilai eigen
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1, 4, 9]  
14  
[1, 5, 14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris spasi yang sama, opsional dengan langkah ukuran.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1, 2, 3, 4]  
[1, 3, 5, 7, 9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor ada operator "|" dan "_" .

```
>[1,2,3] | [4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1, 2, 3, 4, 5]  
1 2 3  
1 1 1
```

Elemen matriks disebut dengan "A[i,j]" .

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

```
6
```

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i lengkap dari matriks.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6  
[7, 8, 9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris dari indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2, 4]  
2  
5  
8
```

Bentuk singkat untuk : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Untuk tujuan vektorisasi, elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A[4]
```

4

Sebuah matriks juga dapat diratakan, menggunakan fungsi redim(). Ini adalah diimplementasikan dalam fungsi flatten().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

Untuk menggunakan matriks untuk tabel, mari kita reset ke format default, dan menghitung tabel nilai sinus dan kosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

0
45
90
135
180
225
270
315
360

Sekarang kita menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

0	0	1	0
45	0.785398	0.707107	0.707107
90	1.5708	0	1
135	2.35619	-0.707107	0.707107
180	3.14159	-1	0
225	3.92699	-0.707107	-0.707107
270	4.71239	0	-1
315	5.49779	0.707107	-0.707107
360	6.28319	1	0

Menggunakan bahasa matriks, kita dapat menghasilkan beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus. Dalam contoh berikut, kita menghitung $t[j]^i$ untuk i dari 1 hingga n . Kami mendapatkan matriks, di mana setiap baris adalah tabel t^i untuk satu i . Yaitu, matriks memiliki elemen latex: $a_{i,j} = t_j^i$, $\quad 1 \leq j \leq 101, \quad 1 \leq i \leq n$

Sebuah fungsi yang tidak bekerja untuk input vektor harus "vectorized". Ini dapat dicapai dengan kata kunci "map" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi akan dievaluasi untuk setiap elemen dari parameter vektor. Integrasi numerik integrate() hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu membuat vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
```

Kata kunci "map" membuat vektor fungsi. Fungsinya sekarang akan bekerja untuk vektor angka.

```
>f([1:5])
```

```
[0, 2.05045, 13.7251, 113.336, 1241.03]
```

Sub-Matriks dan Matriks-Elemen

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi braket.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9
5		

Kita dapat mengakses baris matriks yang lengkap.

```
>A[2]
```

```
[4, 5, 6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen dari vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks $1 \times n$ dan $m \times n$, menentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

```
>A[2, ]
```

```
[4, 5, 6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai.

Di sini kita menginginkan baris pertama dan kedua dari A .

```
>A[ [1, 2] ]
```

1	2	3
4	5	6

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Lebih tepatnya, kami melakukannya tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi A yang disusun ulang.

```
>A[ [3, 2, 1] ]
```

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Trik indeks bekerja dengan kolom juga.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[ 1:3, 2:3 ]
```

2	3
5	6
8	9

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[ :, 3 ]
```

3
6
9

Atau, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[ , 2:3 ]
```

2	3
5	6
8	9

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir dari A.

```
>A[ -1 ]
```

[7, 8, 9]

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan sub matriks A ke beberapa nilai. Ini sebenarnya mengubah matriks A yang tersimpan.

```
>A[ 1, 1 ]=4
```

4	2	3
4	5	6
7	8	9

Kita juga dapat menetapkan nilai ke baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

-1	-1	-1
4	5	6
7	8	9

Kita bahkan dapat menetapkan sub-matriks jika memiliki ukuran yang tepat.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

5	6	-1
7	8	6
7	8	9

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

0	0	-1
0	0	6
7	8	9

Peringatan: Indeks di luar batas mengembalikan matriks kosong, atau kesalahan pesan, tergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah kesalahan pesan. Ingat, bagaimanapun, bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

Row index 4 out of bounds!

Error in:

```
A[4] ...  
^
```

Penyortiran dan Pengacakan

Fungsi sort() mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

[1, 4, 5, 6, 8, 9]

Seringkali kita perlu mengetahui indeks dari vektor yang diurutkan dalam vektor asli. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain di cara yang sama.

Mari kita mengocok sebuah vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

[4, 5, 10, 6, 8, 9, 1, 7, 2, 3]

Indeks berisi urutan yang tepat dari v.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

Ini juga berfungsi untuk vektor string.

```
>s=[ "a", "d", "e", "a", "aa", "e" ]
```

```
a  
d  
e  
a  
aa  
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a  
a  
aa  
d  
e  
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4, 1, 5, 2, 6, 3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar elemen unik yang diurutkan dari a vektor.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4, 4, 9, 2, 6, 5, 10, 6, 5, 1]  
[1, 2, 4, 5, 6, 9, 10]
```

Ini juga berfungsi untuk vektor string.

```
>unique(s)
```

```
a  
aa  
d  
e
```

Aljabar linier

EMT memiliki banyak fungsi untuk menyelesaikan sistem linier, sistem sparse, atau masalah regresi. Untuk sistem linier $Ax=b$, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks terbalik atau kecocokan linier. Operator $A\bslash b$ menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
-4  
4.5
```

Untuk contoh lain, kami membuat matriks 200×200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita selesaikan $Ax=b$ menggunakan matriks invers. Kami mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja benar solusi.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak memiliki solusi, kecocokan linier meminimalkan norma kesalahan $Ax-b$.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Determinan matriks ini adalah 0.

```
>det (A)
```

```
0
```

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolis. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk masalah aljabar linier sederhana seperti itu. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &:=, dan kemudian menggunakan dalam ekspresi simbolis. Bentuk [...] biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan dalam Euler untuk mendefinisikan simbolik matriks.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A  
>$&det (A), $&factor (%)  
>$&invert (A) with a=0  
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan di lain ekspresi simbolis.

```
>$&det (A-x*ident (2)), $&solve (% , x)
```

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan multiplisitas.

```
> $&eigenvalues([a,1;1,a])
```

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu perlu pengindeksan yang cermat.

```
> $&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

```
[1, - 1]
```

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti ekspresi simbolik lainnya.

```
> A (a=4, b=5)
```

```
1 4  
5 2
```

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

```
> $&A with [a=4, b=5]
```

Akses ke baris matriks simbolik berfungsi seperti numerik matriks.

```
> $&A[1]
```

Ekspresi simbolis dapat berisi tugas. Dan itu mengubah matriks A.

```
> &A[1,1]:=t+1; $&A
```

Ada fungsi simbolis di Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, lihat dokumentasi Maxima atau ke tutorial tentang Maxima di EMT.

```
> v &= makelist(1/(i+j), i, 1, 3); $v
```

```
> B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik dalam Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

```
> $&invert(B)()
```

```
-2 1  
1.5 -0.5
```

Euler juga memiliki fungsi kuat `xinv()`, yang membuat usaha lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan `&:=` matriks `B` telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan sebagai numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita dapat menggunakan di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

1	0
0	1

Misalnya nilai eigen dari `A` dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
[16.1168, -1.11684, 0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
>$&eigenvalues (@A)
```

Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolis

Ekspresi simbolis hanyalah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai baik untuk ekspresi simbolik maupun numerik ekspresi, kita harus menggunakan "`&:=`".

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

1.00	3.14
4.00	5.00

Masih ada perbedaan antara numerik dan simbolik membentuk. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolis, pecahan perkiraan untuk `real` akan digunakan.

```
>$&A
```

Untuk menghindari ini, ada fungsi "`mxmset(variable)`".

```
>m xmset (A); $&A
```

Maxima juga dapat menghitung dengan angka floating point, dan bahkan dengan besar angka mengambang dengan 32 digit. Evaluasi jauh lebih lambat,namun.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\  
4592307816406286208998628034825342117068b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolis apa pun menggunakan "@var". Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah didefinisikan dengan ":" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det (@B)
```

Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk perhitungan suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal 5000 (katakanlah dalam dolar).

```
>K=5000
```

```
5000.00
```

Sekarang kita asumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu tarif sederhana dan menghitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

```
5150.00
```

Sekarang kita asumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu tarif sederhana dan menghitung hasilnya.

```
>K+K*3%
```

```
5150.00
```

Tetapi lebih mudah menggunakan faktornya

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03  
5150.00
```

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktornya dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

6719.58

Untuk tujuan kita, kita dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

6719.58

Mari kita cetak yang dibulatkan menjadi 2 digit dalam kalimat lengkap.

```
>"Starting from " + K + "$ you get " + round(K*q^10,2) + "$."
```

Starting from 5000\$ you get 6719.58\$.

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 sampai tahun 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis loop, tetapi cukup masukkan

```
>K*q^(0:10)
```

Real 1 x 11 matrix

5000.00 5150.00 5304.50 5463.64 ...

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama ekspresi 0:10 mengembalikan vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

Kemudian semua operator dan fungsi dalam Euler dapat diterapkan ke elemen vektor untuk elemen. Jadi

```
>short q^(0:10)
```

[1, 1.03, 1.0609, 1.0927, 1.1255, 1.1593, 1.1941, 1.2299,
1.2668, 1.3048, 1.3439]

adalah vektor faktor q^0 sampai q^{10} . Ini dikalikan dengan K , dan kita mendapatkan vektor nilai.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistik untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan dibulatkan ke sen terdekat setelah setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
1271.61  
1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n , dan kita harus mengulang bertahun-tahun. Euler memberikan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah iterasi fungsi, yang mengulangi fungsi yang diberikan a berkali-kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix  
5000.00 5150.00 5304.50 5463.64 ...
```

Kami dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan desimal tetap tempat.

```
>VKr'
```

```
5000.00  
5150.00  
5304.50  
5463.64  
5627.55  
5796.38  
5970.27  
6149.38  
6333.86  
6523.88  
6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen tertentu dari vektor, kami menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
5150.00  
5000.00 5150.00 5304.50
```

Anehnya, kita juga dapat menggunakan vektor indeks. Ingat bahwa 1:3 diproduksi vektor [1,2,3]. Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
6719.60  
6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil

Menyelesaikan Persamaan

Sekarang kita mengambil fungsi yang lebih maju, yang masing-masing menambahkan tingkat uang tertentu tahun.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus mendefinisikan nilai-nilai ini. Kami memilih R=200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix  
5000.00 5350.00 5710.50 6081.82 ...
```

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
Real 1 x 11 matrix  
5000.00 4950.00 4898.50 4845.45 ...
```

Kami melihat bahwa uang berkurang. Jelas, jika kita hanya mendapatkan 150 bunga di tahun pertama, tetapi menghapus 200, kami kehilangan uang setiap tahun.

Bagaimana kita bisa menentukan berapa tahun uang itu akan bertahan? Kami akan memiliki untuk menulis loop untuk ini. Cara termudah adalah dengan iterasi cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

```
Real 1 x 51 matrix  
5000.00 4950.00 4898.50 4845.45 ...
```

Menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dalam mengikuti cara.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

48.00

Alasan untuk ini adalah bahwa bukan nol(VKR<0) mengembalikan vektor indeks i, di mana VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi. Ini dapat mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

-19.83
47.00

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita tahu bahwa nilai adalah 0 setelah 50 tahun. Apa yang akan menjadi tingkat bunga?

Ini adalah pertanyaan, yang hanya dapat dijawab secara numerik. Di bawah ini, kami akan mendapatkan formula yang diperlukan. Maka Anda akan melihat bahwa tidak ada yang mudah formula untuk tingkat bunga. Tapi untuk saat ini, kami bertujuan untuk solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan sebuah fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kita tambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + R$$

Tapi kita tidak lagi menggunakan nilai global R dalam ekspresi kita. Fungsi seperti: iterate() memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai-nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.

Selain itu, kami hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kita ambil indeksnya [-1].

Mari kita coba tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

-19.83

Sekarang kita bisa memecahkan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

3.15

Rutin pemecahan memecahkan ekspresi=0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kami mengambil nilai awal 3% untuk algoritma. Pemecahan() fungsi selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita? hapus per tahun sehingga modal benih habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

-336.08

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat memecahkan jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan n sebagai nilai integer.

Solusi Simbolik untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik dari Euler untuk mempelajari masalah. Pertama kita definisikan fungsi kita onepay() secara simbolis.

```
>function op(K) &= K*q+R; \$&op(K)
```

Sekarang kita dapat mengulangi ini.

```
> $&op (op (op (op (K) ))) , $&expand (%)
```

Kita melihat sebuah pola. Setelah n periode yang kita miliki

$$K_n = q^n K + R(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q^n K + \frac{q^n - 1}{q - 1} R$$

Rumusnya adalah rumus untuk jumlah geometri, yang diketahui Maxima.

```
> &sum(q^k, k, 0, n-1); $& % = ev(%, simpsum)
```

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan bendera "simpsum" untuk dikurangi ke hasil bagi. Mari kita membuat fungsi untuk ini.

```
> function fs(K, R, P, n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K, R, P, n)
```

Fungsi melakukan hal yang sama seperti fungsi f kita sebelumnya. Tapi itu lebih efektif.

```
> longest f(5000, -200, 3, 47), longest fs(5000, -200, 3, 47)
```

```
-19.82504734650985  
-19.82504734652684
```

Sekarang kita dapat menggunakan rumus untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Kita tebakan awal adalah 30 tahun.

```
> solve("fs(5000, -330, 3, x)", 30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan bahwa itu akan menjadi negatif setelah 21 tahun.

Kita juga dapat menggunakan sisi simbolis Euler untuk menghitung rumus untuk pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n pembayaran sebesar R (dimulai setelah yang pertama tahun) menyisakan sisa hutang sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Itu rumus untuk ini jelas

```
> equ &= fs(K, R, P, n)=Kn; $&equ
```

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

$$i = \frac{P}{100}$$

```
> equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

Kita dapat memecahkan tingkat R secara simbolis.

```
> $& solve(equ, R)
```

Seperti yang Anda lihat dari rumus, fungsi ini mengembalikan kesalahan titik mengambang untuk $i=0$. Euler tetap merencanakannya.

Tentu saja, kami memiliki batas berikut.

```
> $& limit(R(5000, 0, x, 10), x, 0)
```

Jelas, tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 tarif 500.

Persamaan juga dapat diselesaikan untuk n . Kelihatannya lebih bagus, jika kita menerapkan beberapa penye-derhanaan untuk itu.

```
> fn &= solve(equ, n) | ratsimp; $&fn
```

2.0.2 Latihan Soal

Latihan Soal

Soal

1

Hitunglah $(4(8-6)^2-4*3+2*8)/(3^1+19^0)$

Penyelesaian

```
> (4 * (8-6) ^2-4 * 3+2 * 8) / (3 ^1+19 ^0)
```

5

Soal 2

Diketahui fungsi $f(x)=x^5-10x^4+20x^3-5x-100$, cari nilai $f(-10)$ dan $f(5)$

Penyelesaian

```
>function f(x) := x^5-10*x^4+20*x^3-5*x-100  
>f(-10)
```

-220050

```
>f(5)
```

-750

Soal 3

Faktorkan fungsi $f(x)=x^3+4x^2+x-6$. Kemudian selesaikan persamaan $f(x)=0$

Penyelesaian

```
>function f(x) &= factor((x^3+4*x^2+x-6)); \$&f(x)
```

$$(x - 1) (x + 2) (x + 3)$$

```
>function f(x) := x^3+4*x^2+x-6  
>f(0)
```

Soal 4

Lakukan operasi hitung dari $(-5m^4n^2)(6m^2n^3)$

Penyelesaian

```
> $& (-5*m^4*n^2) * (6*m^2*n^3)
```

$$-30 m^6 n^5$$

Soal 5

Sederhanakan bentuk dari $((a^2-b^2)/(x-y))/((a+b)/(x-y))$

Penyelesaian

```
> $& ( (a^2-b^2) / (x-y) ) / ( (a+b) / (x-y) )
```

$$\frac{a^2 - b^2}{b + a}$$

```
> $& (a-b) * (a+b) / (a+b)
```

$$a - b$$

BAB 3

MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 2 DIMENSI (2D)

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

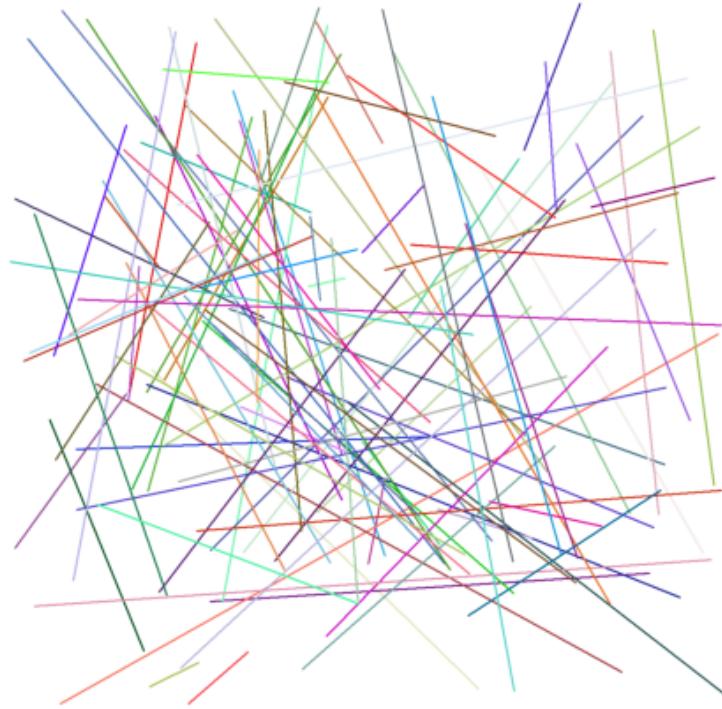
Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagai kurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Plot Dasar

Ada fungsi yang sangat mendasar dari plot. Ada koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya persegi atau tidak. Semut ada koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antara koordinat tergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail tentang fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clc; // clear screen
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates
>hold on; // start overwrite mode
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2); // get random points
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // end overwrite mode
>insimg; // insert to notebook
```



```
>reset;
```

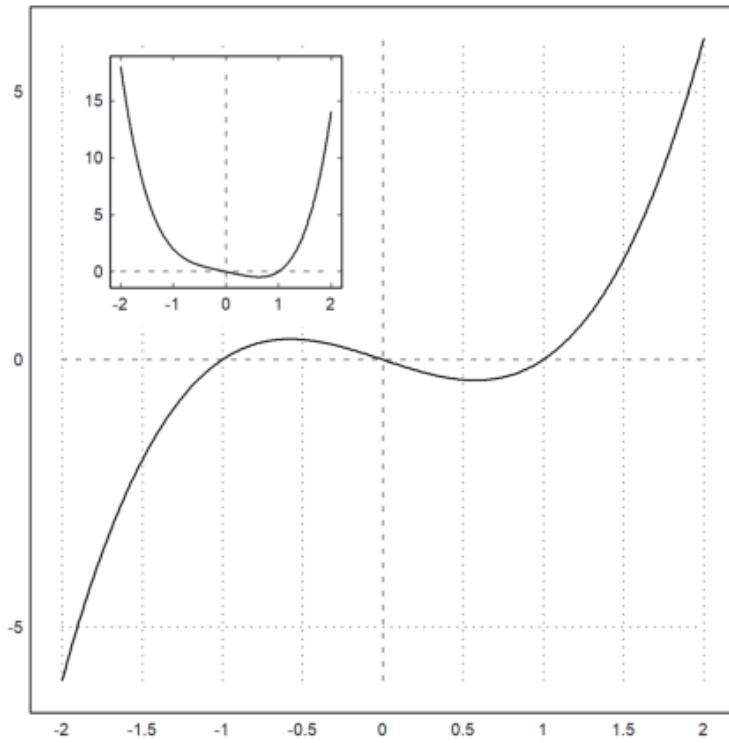
Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.

Untuk menghapus semua yang kami lakukan, kami menggunakan reset().

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lain adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Untuk contoh lain, kami menggambar plot sebagai sisipan di plot lain. Ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kami menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini saat kami memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow>window();
>>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6);
```



```
>hold off;
>window(ow);
```

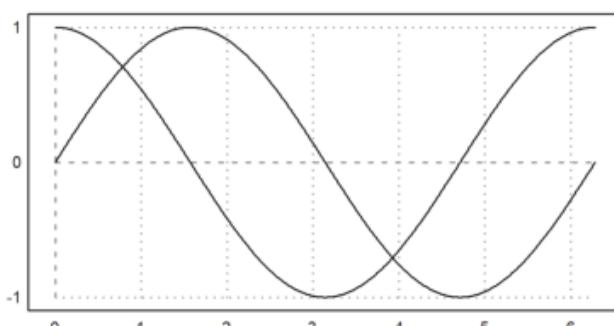
Plot dengan banyak angka dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi figure() utilitas untuk ini.

Aspek Plot

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspek(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspek nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafis saat ini.

Tetapi Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)", "cos(x")], 0, 2pi):
```



```
>aspect();  
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk rasio aspek.

Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.

Euler dapat memplot plot 2D dari

- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva parameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik di pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang dan plot berbayang.

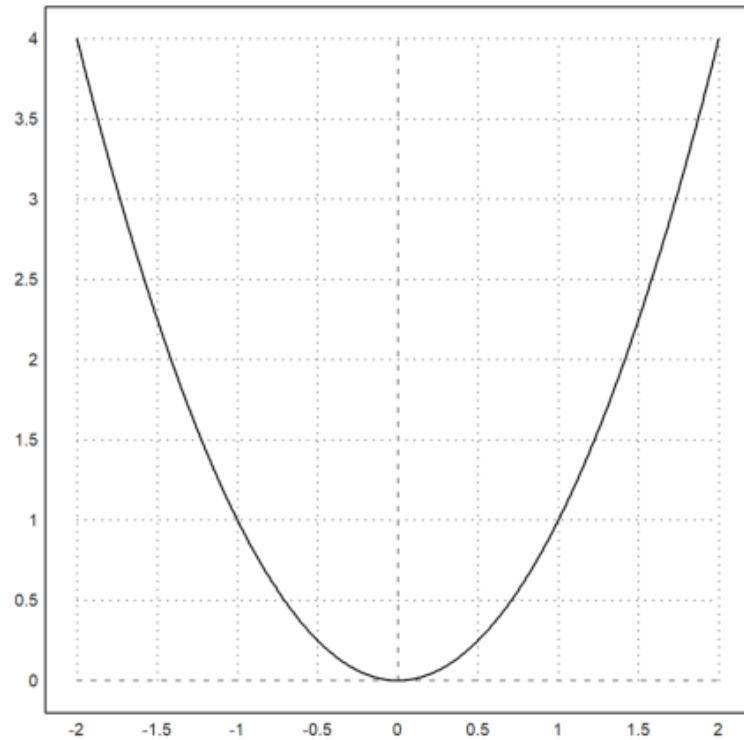
Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (mis. "4*x^2") atau nama fungsi (mis. "f") menghasilkan grafik fungsi.

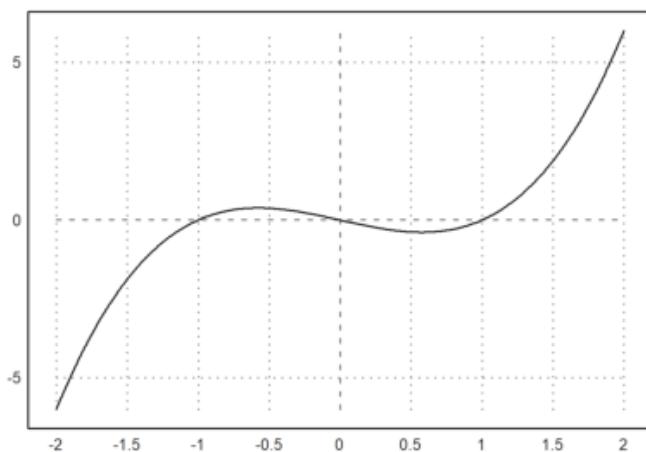
Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.

Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":" , plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

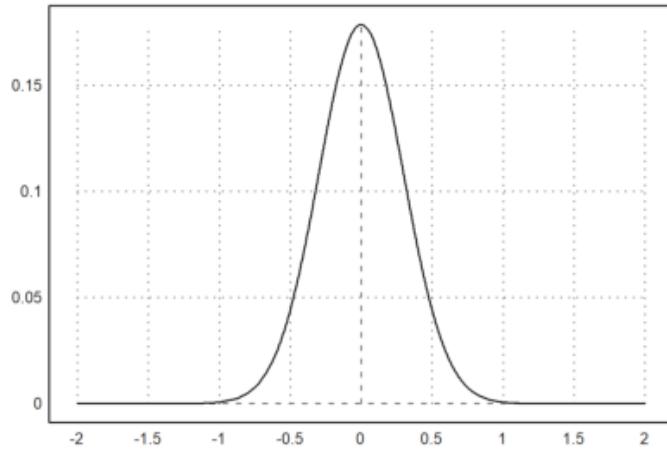
```
>plot2d("x^2"):
```



```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```



```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25
```

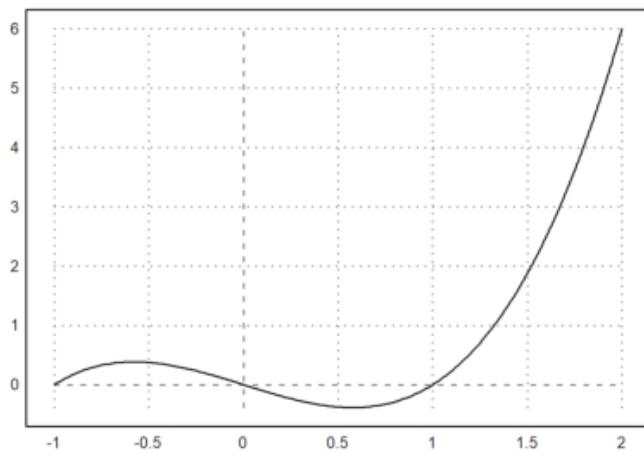


Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa Gambaran gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

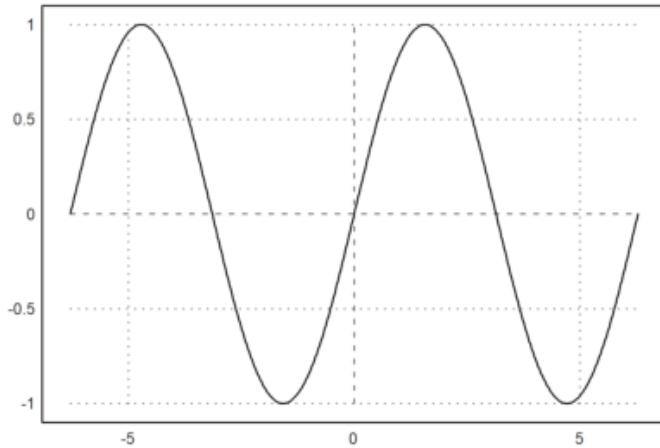
Rentang plot diatur dengan parameter yang ditetapkan berikut:

- a,b: rentang-x (default -2,2)
- c,d: y-range (default: skala dengan nilai)
- r: sebagai alternatif radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

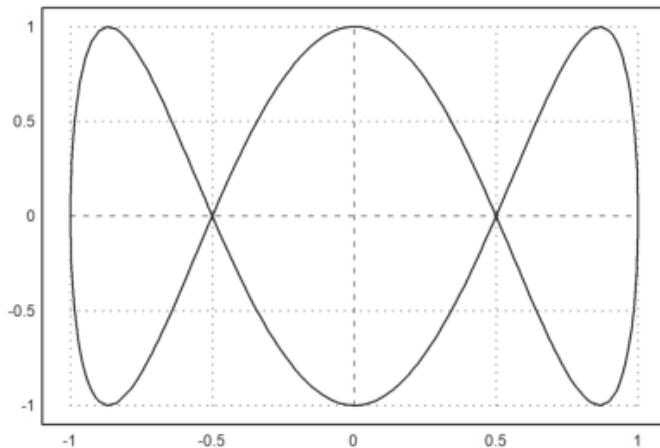
```
>plot2d("x^3-x", -1, 2):
```



```
>plot2d("sin(x)", -2*pi, 2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```



```
>plot2d("cos(x)", "sin(3*x)", xmin=0, xmax=2pi):
```



Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(baris), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur untuk muncul

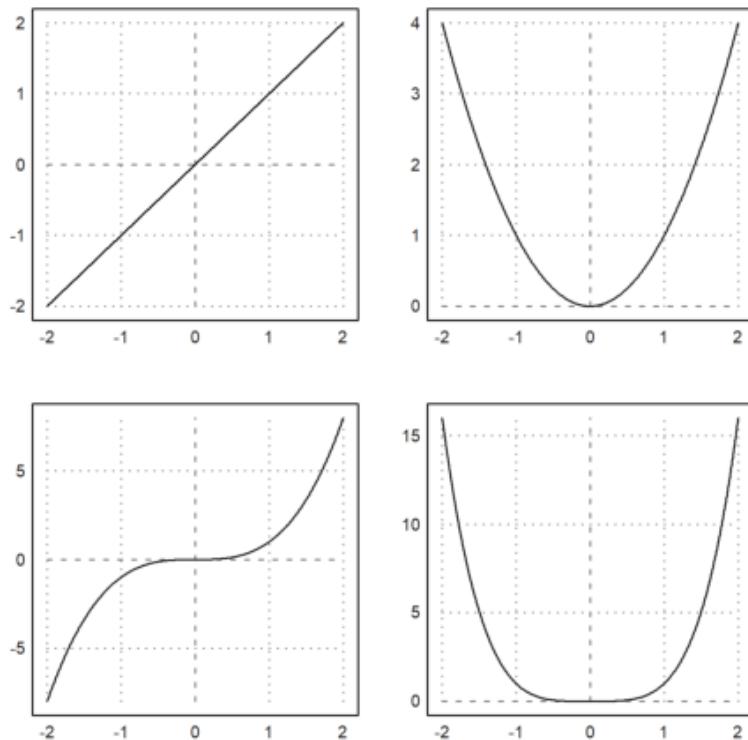
- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.

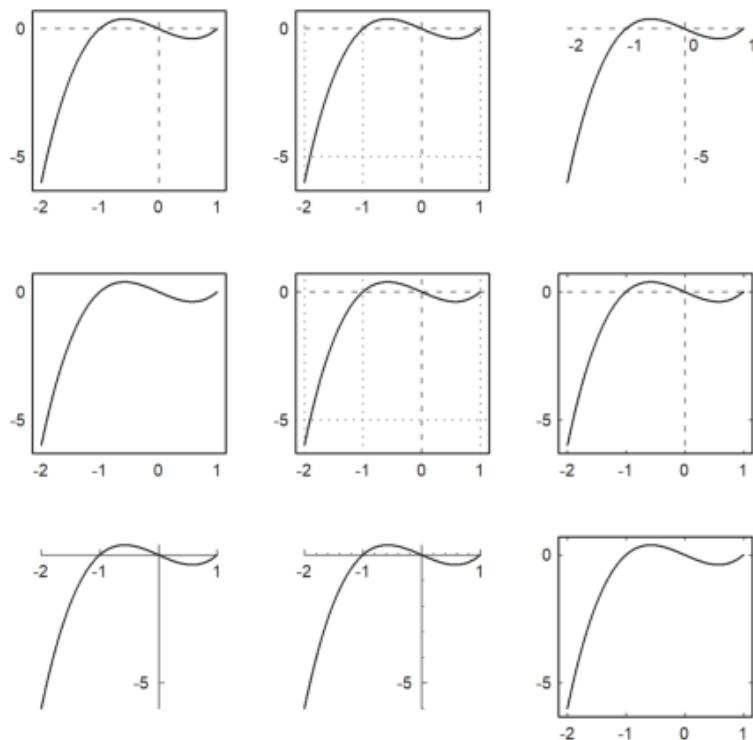
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kami memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. figure(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```



Di `plot2d()`, ada gaya alternatif yang tersedia dengan `grid=x`. Untuk gambaran umum, kami menunjukkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah `figure()`). Gaya `kisi=0` tidak disertakan. Ini menunjukkan tidak ada grid dan tidak ada bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0);
```

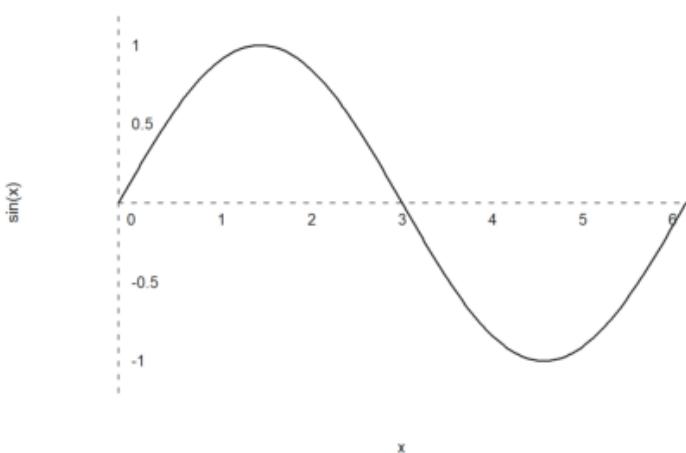


Jika argumen ke `plot2d()` adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.

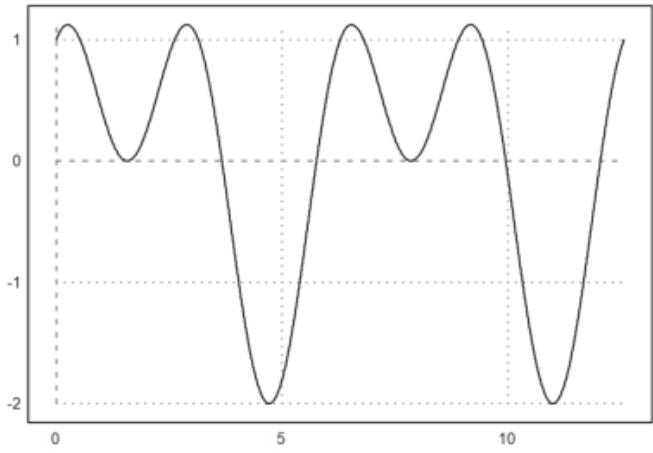
Atau, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.

Dalam contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)", 0, 2pi, -1.2, 1.2, grid=3, xl="x", yl="sin(x)":
```



```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)", 0, 4pi):
```

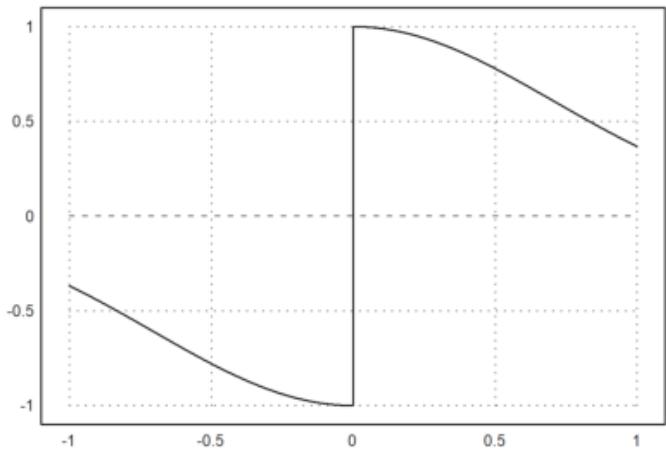


Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default di subdirektori bernama "gambar". Mereka juga digunakan oleh ekspor HTML.

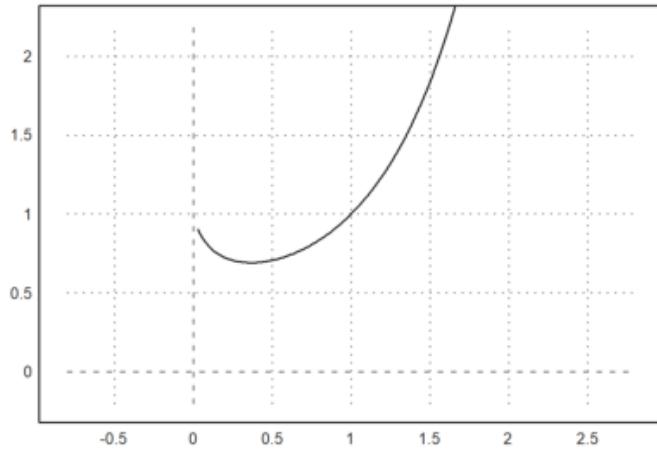
Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan lebih, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

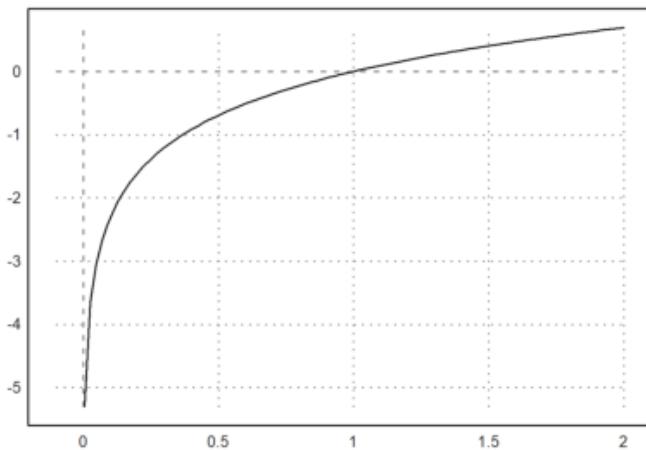


```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```



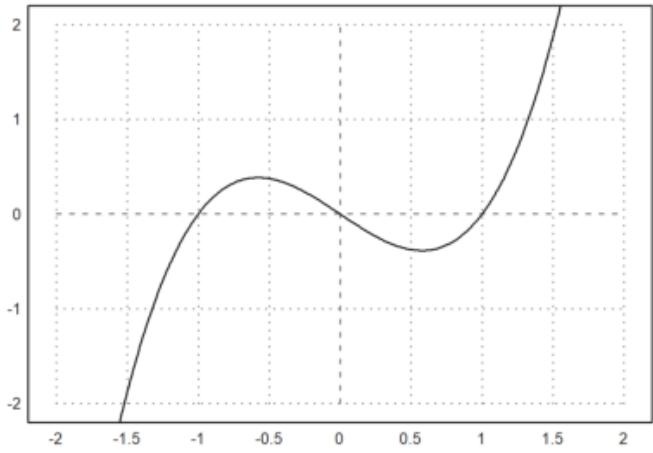
Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk $x \leq 0$. Fungsi `plot2d` menangkap kesalahan ini, dan mulai merencanakan segera setelah fungsi didefinisikan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN keluar dari jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)", -0.1, 2):
```

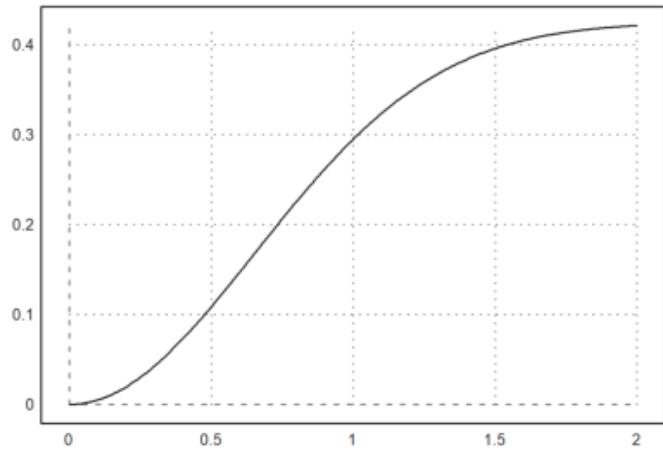


Parameter `square=true` (atau `>square`) memilih y-range secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x", >square):
```

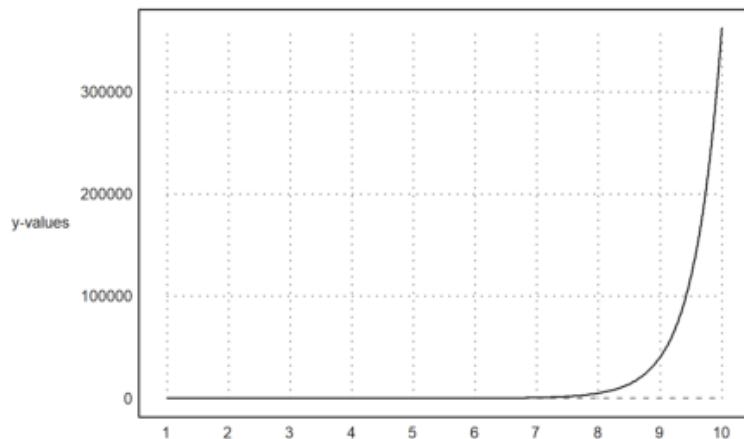


```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```



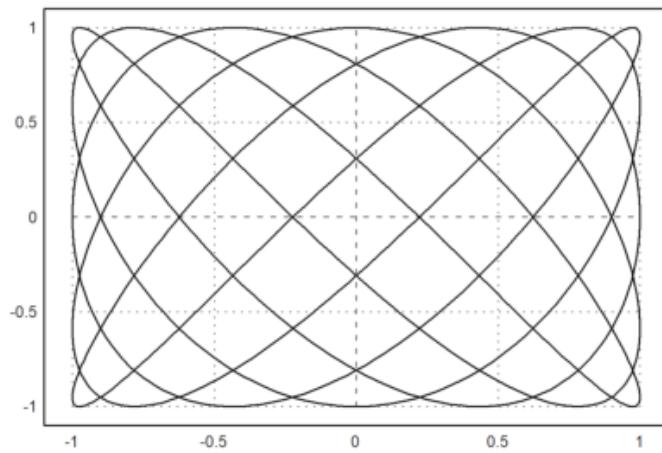
Jika Anda membutuhkan lebih banyak ruang untuk label-y, panggil shrinkwindow() dengan parameter yang lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

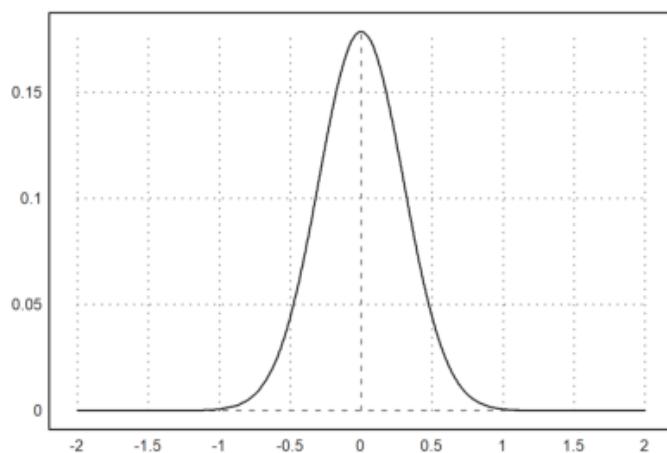


Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

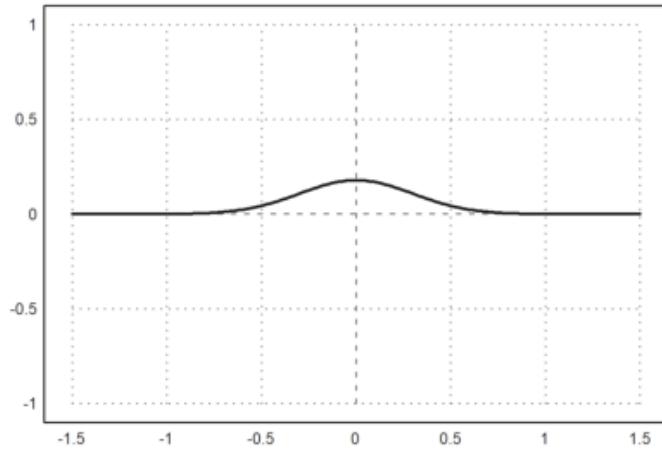
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```



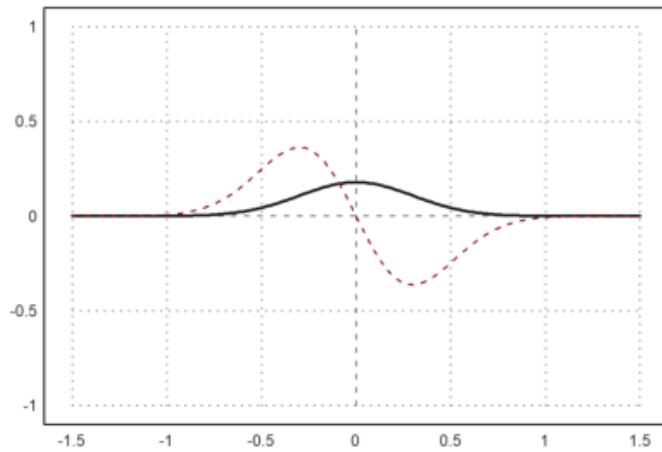
```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression  
>plot2d(expr,-2,2); // plot from -2 to 2
```



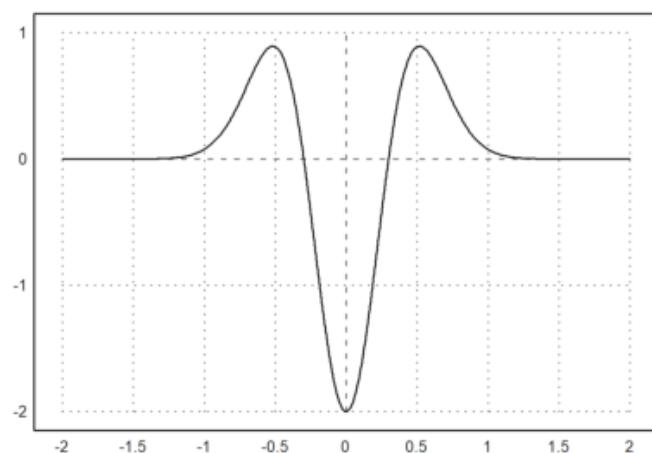
```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2); // plot in a square around (0,0)
```



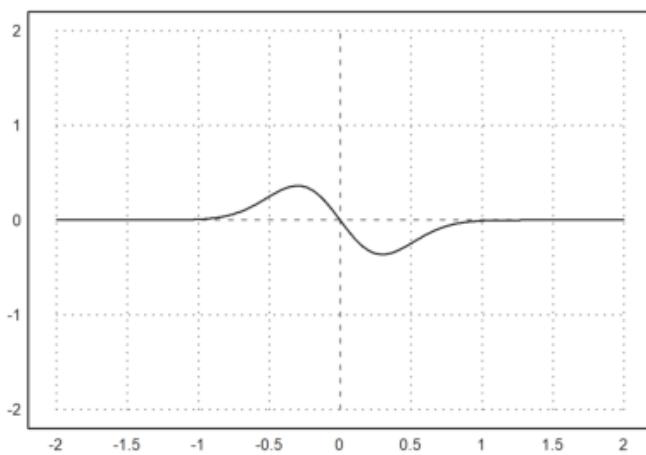
```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```



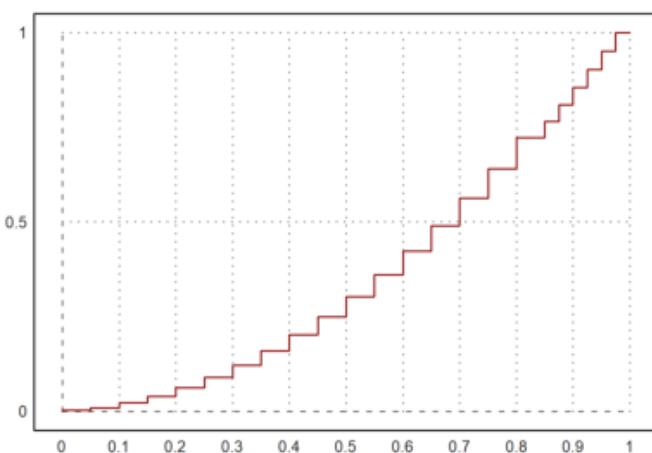
```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```



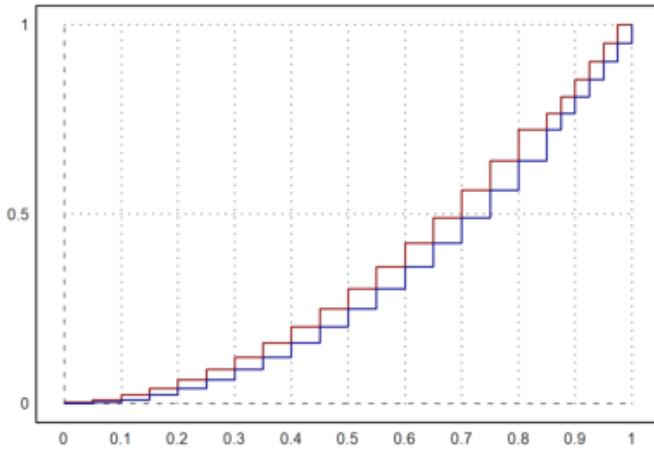
```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```



```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```



```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```

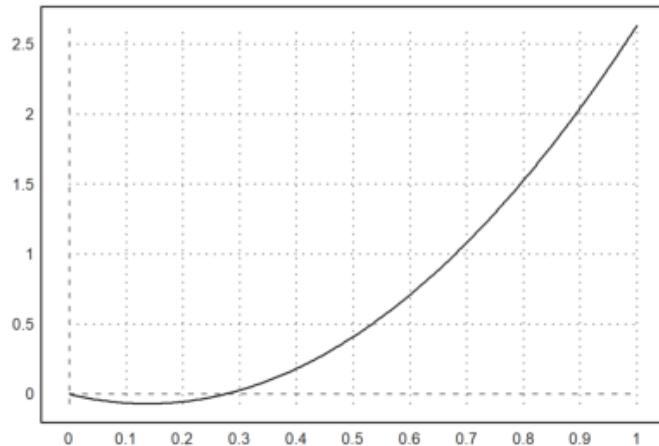


Fungsi dalam satu Parameter

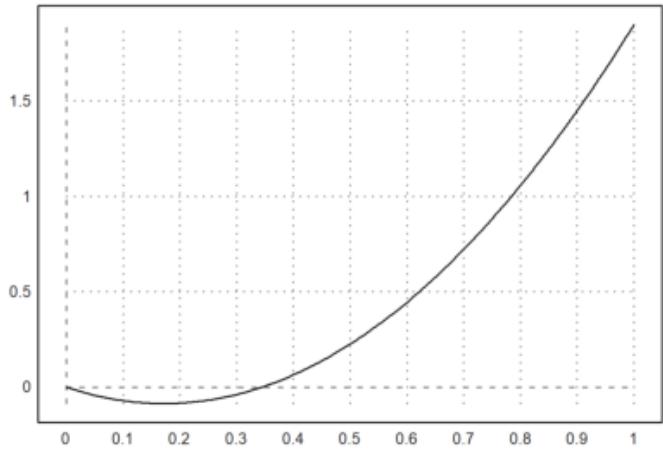
Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah `plot2d()`. Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat di awal program.

Berikut adalah beberapa contoh menggunakan fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.

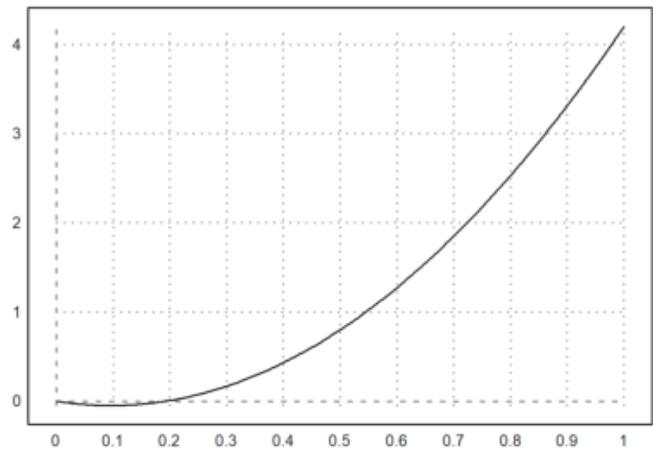
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a); // plot with a=0.3
```



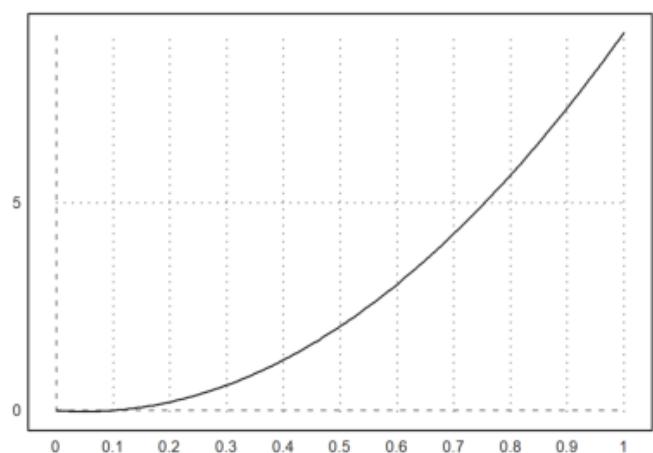
```
>plot2d("f",0,1;0.4); // plot with a=0.4
```



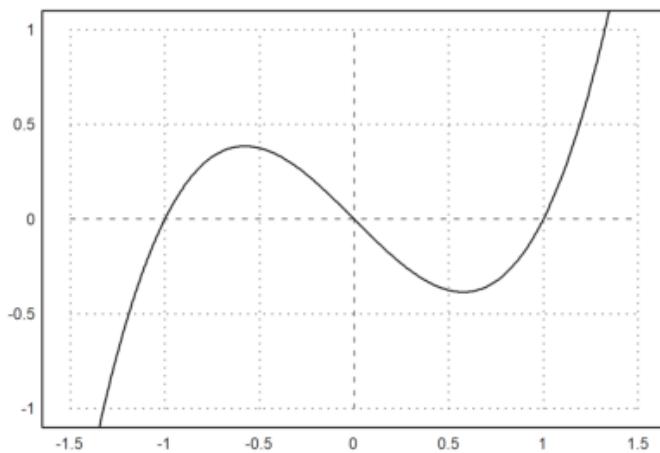
```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1); // plot with a=0.2
```



```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1); // plot with 0.1
```



```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```



Berikut adalah ringkasan dari fungsi yang diterima

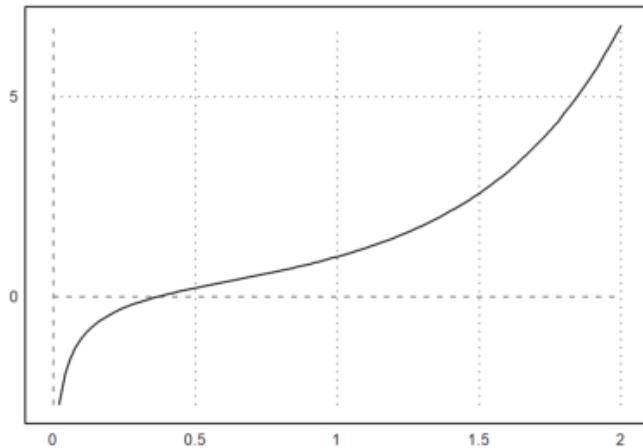
- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x
- fungsi atau fungsi simbolis dengan nama sebagai "f"
- fungsi simbolis hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolis. Untuk fungsi simbolis, nama saja yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

$$x \cdot (log(x) + 1)$$

```
>plot2d(f,0,2):
```

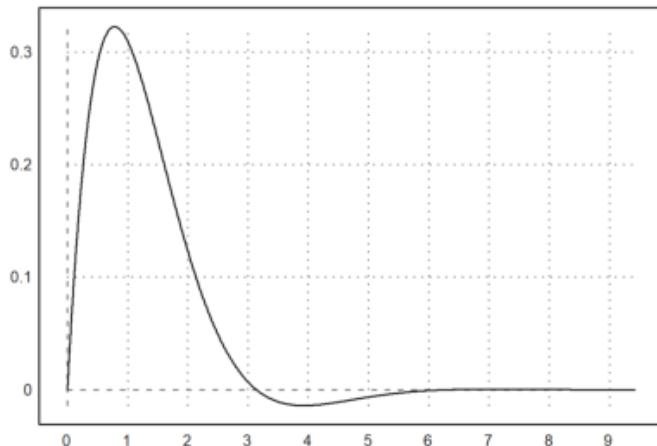


Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

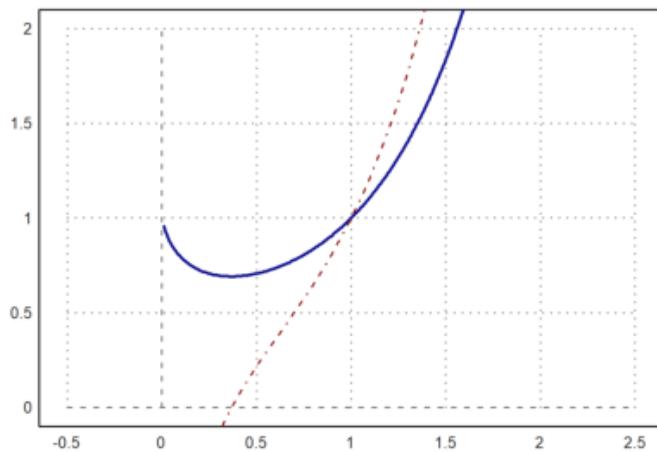
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

$$E^{-x} \sin(x)$$

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```



```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.

- `gaya="..."`. Pilih dari "-", "-.", "-.", ".-", "-.-".

- warna: Lihat di bawah untuk warna.

- ketebalan: Default adalah 1.

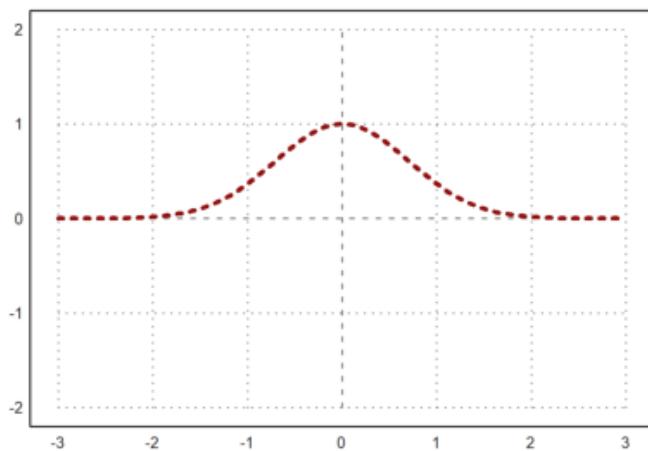
Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

- 0.15: indeks warna default.

- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye terang, kuning

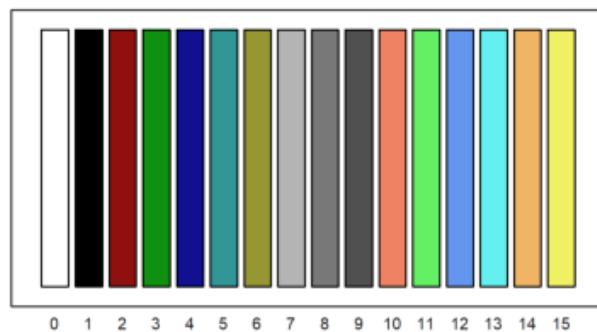
- `rgb(merah, hijau, biru)`: parameter adalah real dalam [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)", r=2, color=red, thickness=3, style="--") :
```



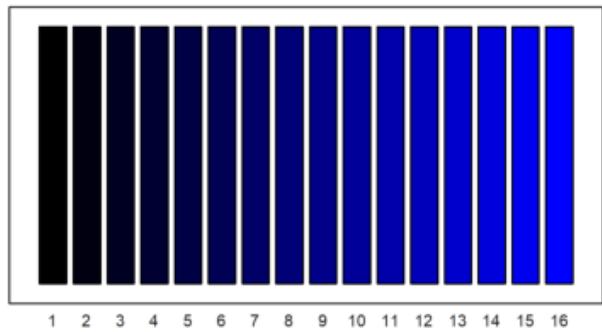
Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16), lab=0:15, grid=0, color=0:15) :
```



Tapi Anda bisa menggunakan warna apa saja.

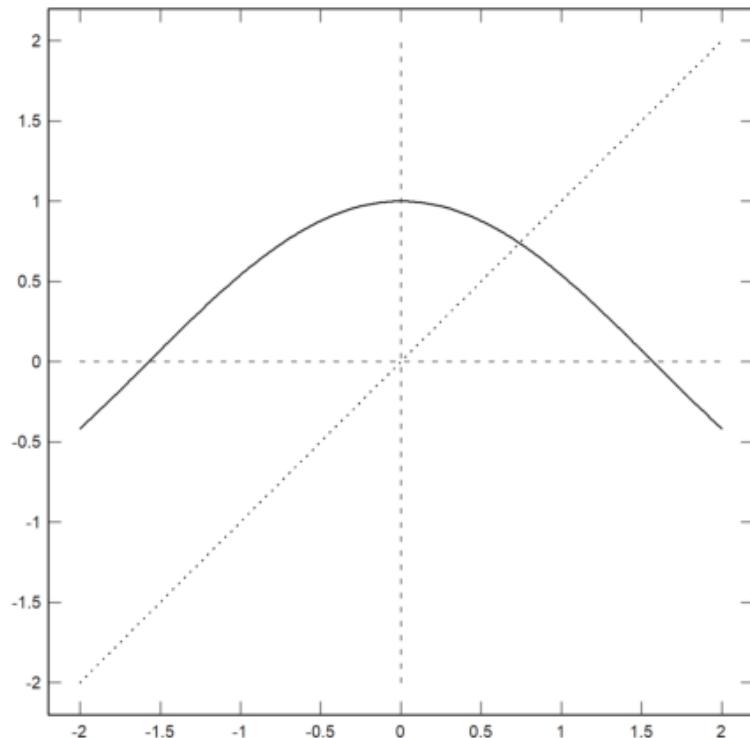
```
>columnsplot(ones(1,16), grid=0, color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))) :
```



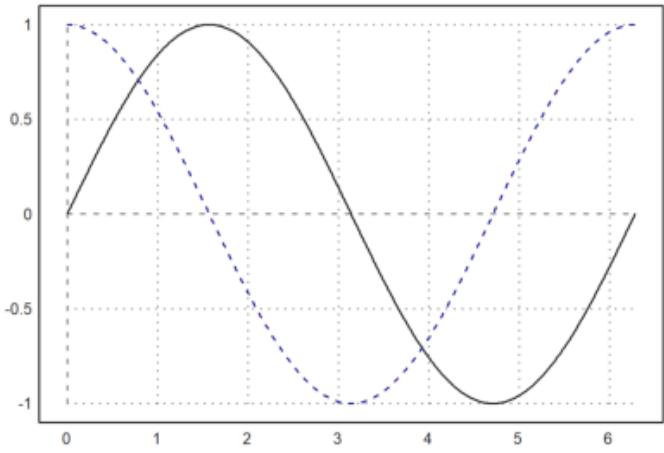
Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metode menggunakan `>add` untuk beberapa panggilan ke `plot2d` secara keseluruhan, tetapi panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini dalam contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```



```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--",>add):
```



Salah satu kegunaan `>add` adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```



Kami menambahkan titik persimpangan dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan memasukkan hasilnya ke dalam notebook. Kami juga menambahkan judul ke plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
> color=[black,blue],style=["-","."], ...
> grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1); ...
> plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo"); ...
> label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```



images/EMT4Plot2D_Dinda_Mushthafa_21305141018-042.png

Dalam demo berikut, kami memplot fungsi $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolis.

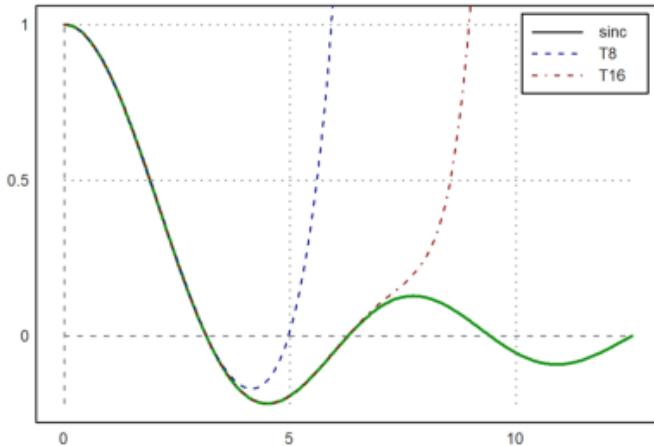
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke `plot2d()`. Yang kedua dan yang ketiga memiliki set flag `>add`, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.

Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsi.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

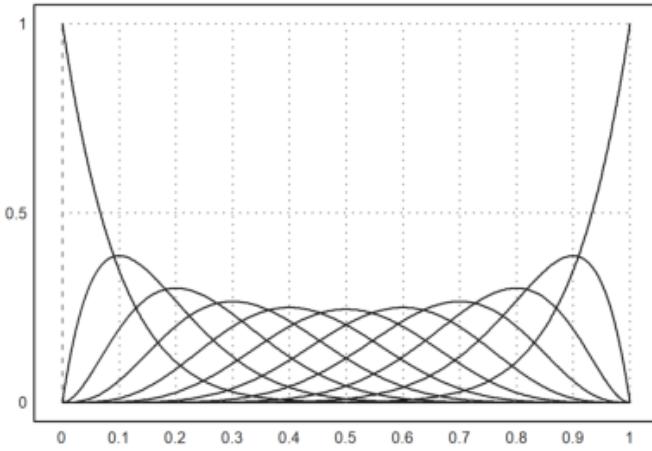
```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
> plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
> plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-."); ...
> labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-."], ...
> colors=[black,blue,red]):
```



Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Bernstein-Polinomial.

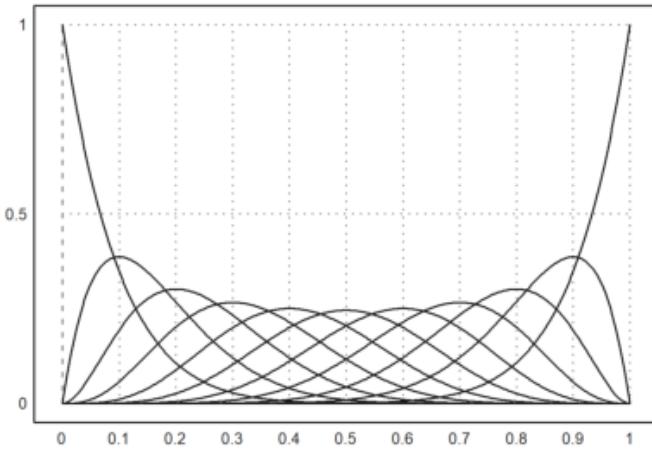
lateks: $B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```



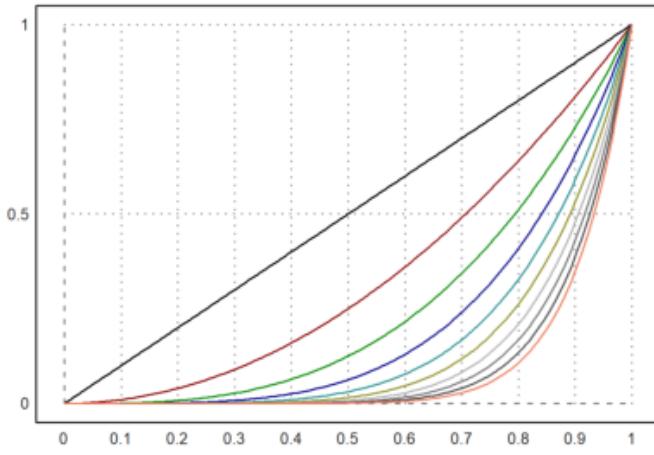
Metode kedua menggunakan pasangan matriks nilai-x dan matriks nilai-y yang berukuran sama. Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```



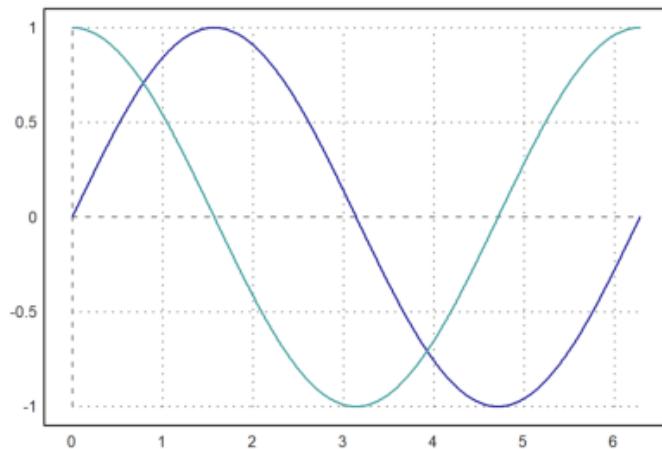
Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

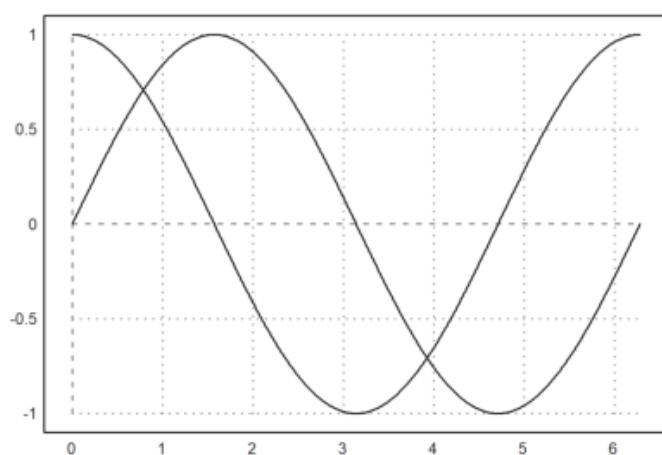


Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan larik warna, larik gaya, dan larik ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)", "cos(x)"], 0, 2pi, color=4:5):
```



```
>plot2d(["sin(x)", "cos(x)"], 0, 2pi): // plot vector of expressions
```



Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

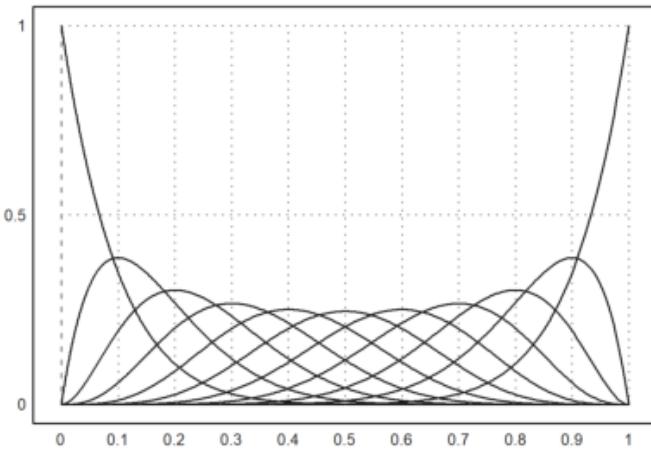
```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
          10          9          8  2          7  3
[(1 - x) , 10 (1 - x) x, 45 (1 - x) x , 120 (1 - x) x ,
 6  4          5  5          4  6          3  7
210 (1 - x) x , 252 (1 - x) x , 210 (1 - x) x , 120 (1 - x) x ,
 2  8          9  10
45 (1 - x) x , 10 (1 - x) x , x ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

```
(1-x)^10
10*(1-x)^9*x
45*(1-x)^8*x^2
120*(1-x)^7*x^3
210*(1-x)^6*x^4
252*(1-x)^5*x^5
210*(1-x)^4*x^6
120*(1-x)^3*x^7
45*(1-x)^2*x^8
10*(1-x)*x^9
x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```

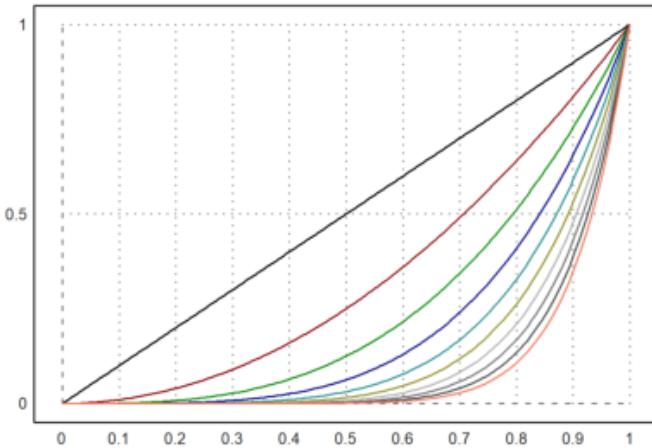


Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.

Jika ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot ke dalam satu plot.

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan, itu akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```

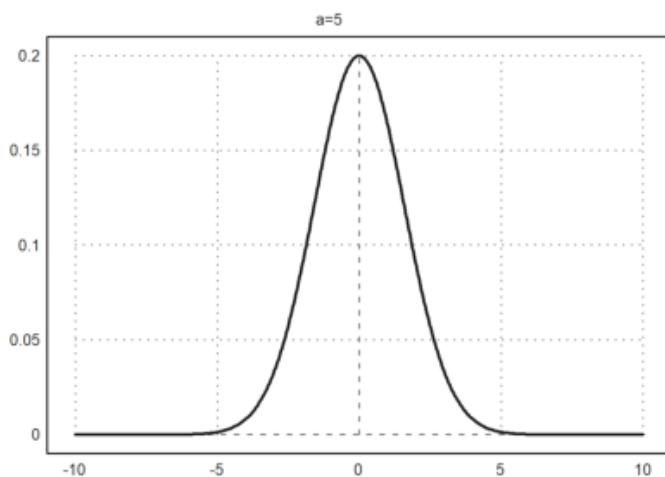


Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.

Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh kita meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

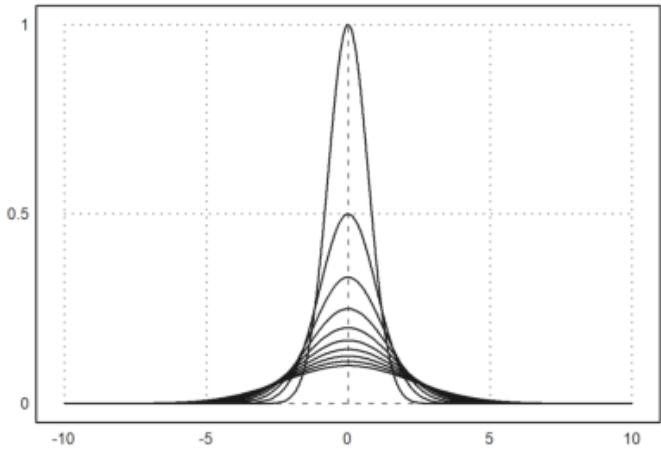
```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```



Atau, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut koleksi panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke fungsi yang dengan sendirinya diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

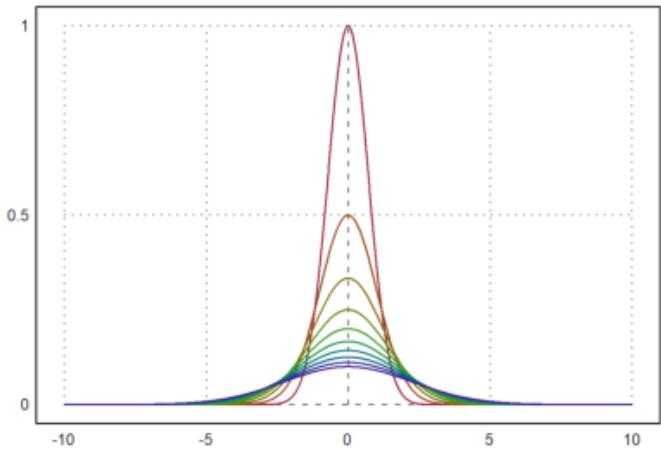
Dalam contoh berikut, kami menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman untuk loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



Kami dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks $f(x,a)$ adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```



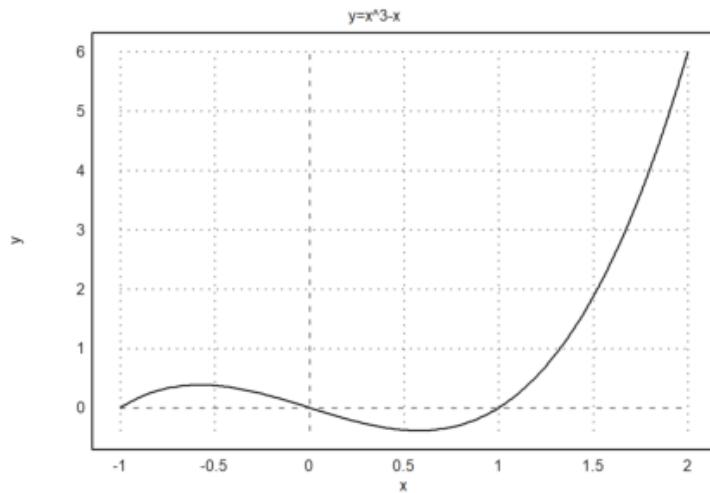
Label Teks

Dekorasi sederhana bisa

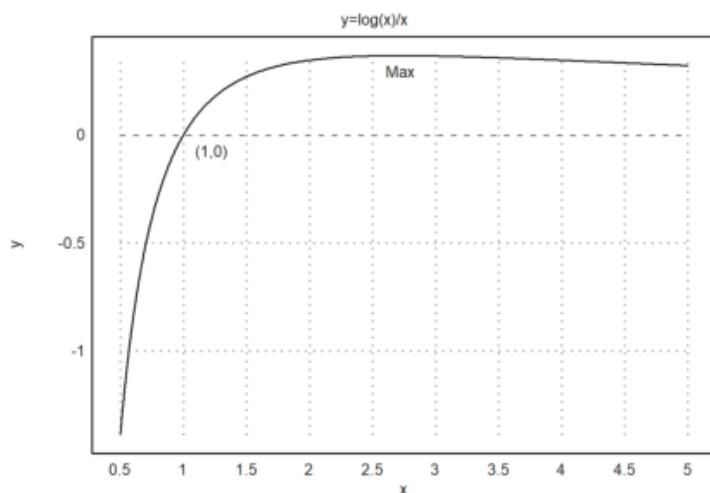
- judul dengan judul="..."
- x- dan y-label dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)

Perintah label akan memplot ke dalam plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Itu bisa mengambil argumen posisi.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

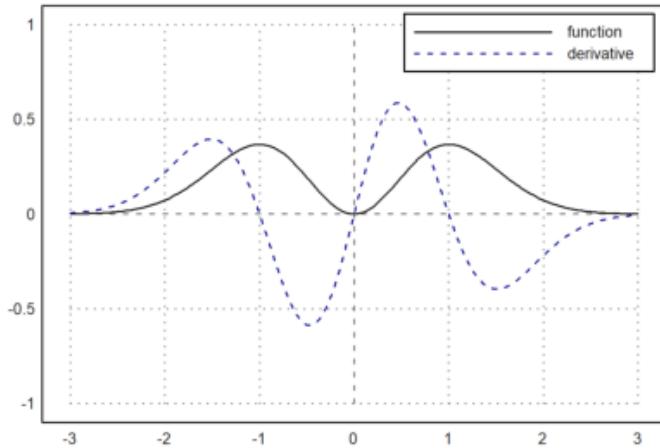


```
>expr := "log(x)/x"; ...
> plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
> label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



Ada juga fungsi `labelbox()`, yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2); ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1); ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=[["-", "--"], ...
> colors=[black,blue],w=0.4):
```

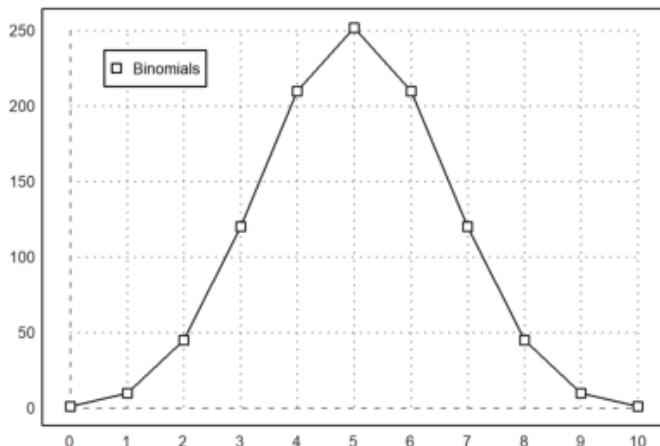


Kotak ditambahkan di kanan atas secara default, tetapi `> kiri` menambahkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter `>points`, atau vektor flag, satu untuk setiap label.

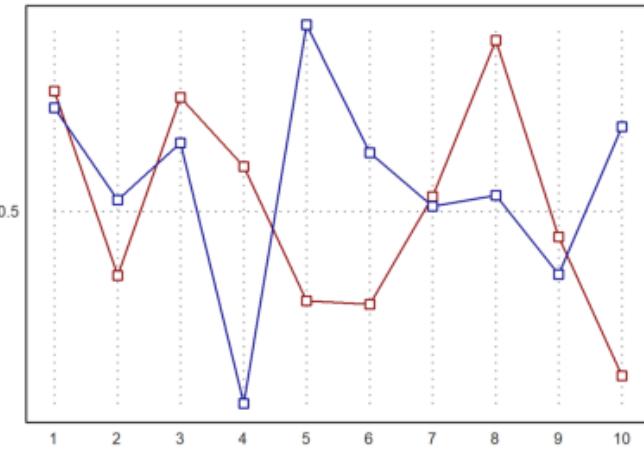
Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```



Gaya plot ini juga tersedia di `statplot()`. Seperti di `plot2d()` warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada lebih banyak plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

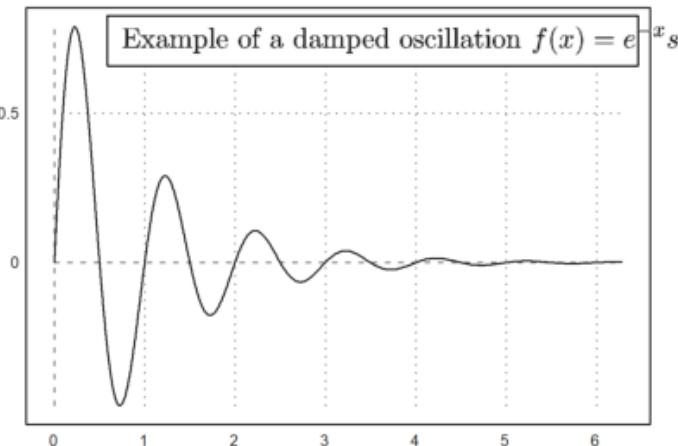
```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```



Fitur serupa adalah fungsi `textbox()`.

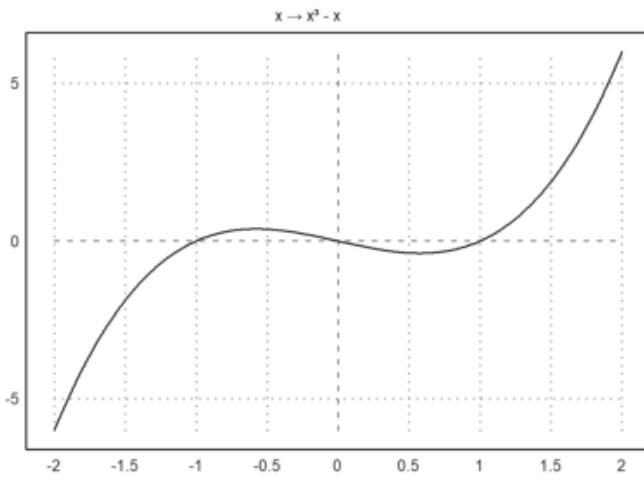
Lebar secara default adalah lebar maksimal dari baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\\" f(x)=e^{-x}\sin(2\pi x)" ),w=0.85);
```



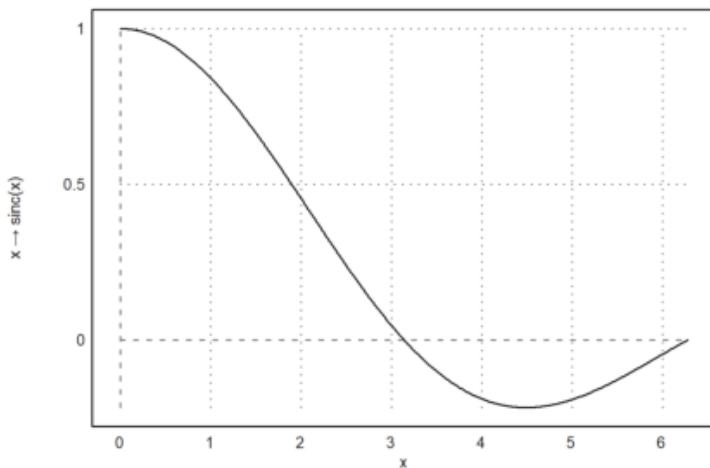
Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x^3 - x");
```



Label pada sumbu x dan y bisa vertikal, begitu juga sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)", 0, 2pi, xl="x", yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```



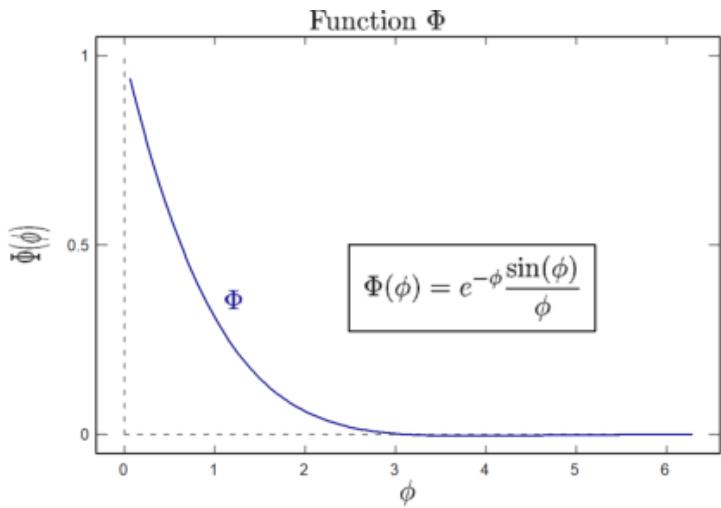
LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "lateks" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perhatikan, bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil `latex()` sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

Dalam plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

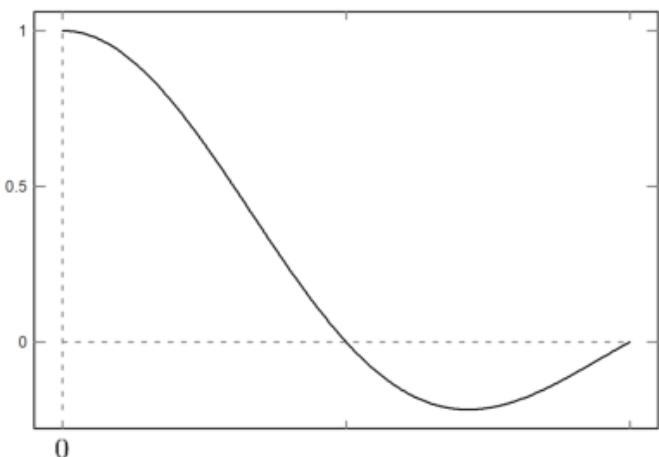
```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
> title=latex("\text{Function } \$\Phi\$"), ...
> xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)"); ...
>textbox( ...
> latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```



Seringkali, kami menginginkan spasi dan label teks non-konformal pada sumbu x. Kita dapat menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah dengan membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Dalam contoh berikut, kami menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6); ...
>xlabel("0","π","2π",>tex);
>insimg;
```

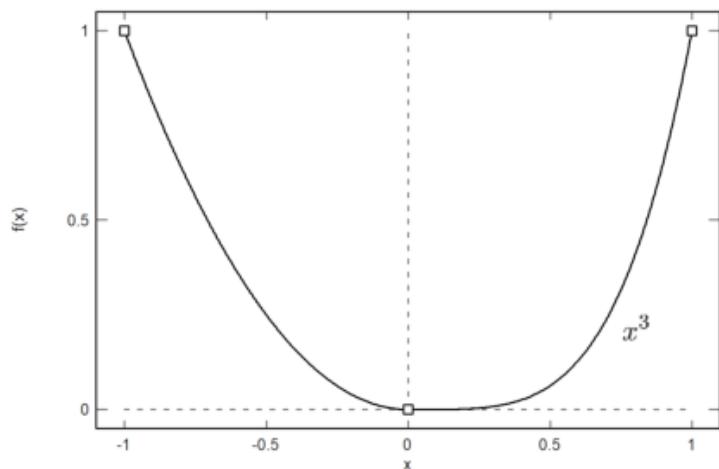


Tentu saja, fungsi juga dapat digunakan.

```
>function map f(x) ...
if x>0 then return x^4
else return x^2
endif
endfunction
```

Parameter "peta" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, itu tidak perlu. Tetapi untuk menunjukkan vektorisasi itu berguna, kami menambahkan beberapa poin kunci ke plot di $x=-1$, $x=0$ dan $x=1$. Pada plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakan untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya akan dapat menggunakan LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6); ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2);
>insimg;
```



Interaksi pengguna

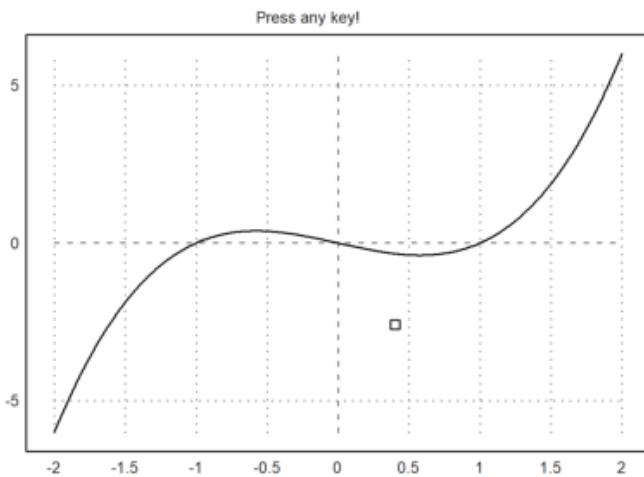
Saat memplot fungsi atau ekspresi, parameter `>user` memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol cursor atau mouse. Pengguna dapat

- perbesar dengan + atau -
- pindahkan plot dengan tombol cursor
- pilih jendela plot dengan mouse
- atur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali

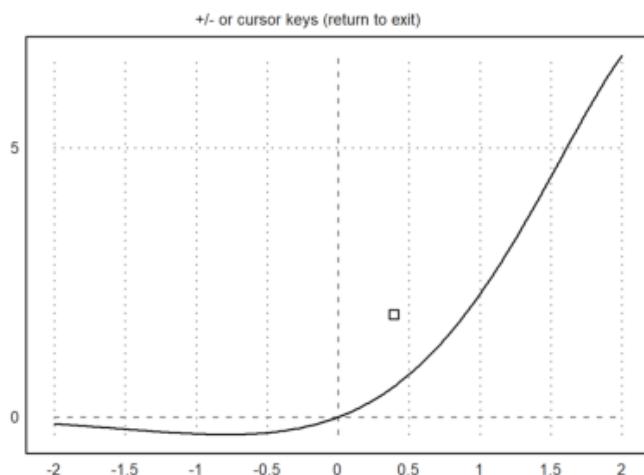
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.

Saat memplot data, flag `>user` hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x"},a=1},>user,title="Press any key!");
>insimg;
```



```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
> title="+/- or cursor keys (return to exit)";
>insimg;
```



Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

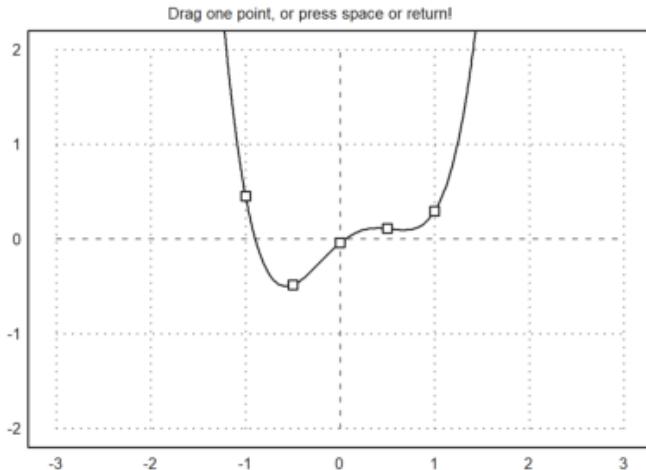
Fungsi bawaan mousedrag() menunggu event mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, mouse dipindahkan atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Sebagai contoh, kita interpolasi dalam 5 titik dengan polinomial. Fungsi harus diplot ke area plot tetap.

```
>function plotf(xp,yp,select) ...
d=interp(xp,yp);
plot2d("interpval(xp,d,x);d,xp,r=2";
plot2d(xp,yp,>points,>add);
if select>0 then
  plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
endif;
title("Drag one point, or press space or return!");
endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.
 Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret poin.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5);
>insimg;
```



Ada juga fungsi, yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

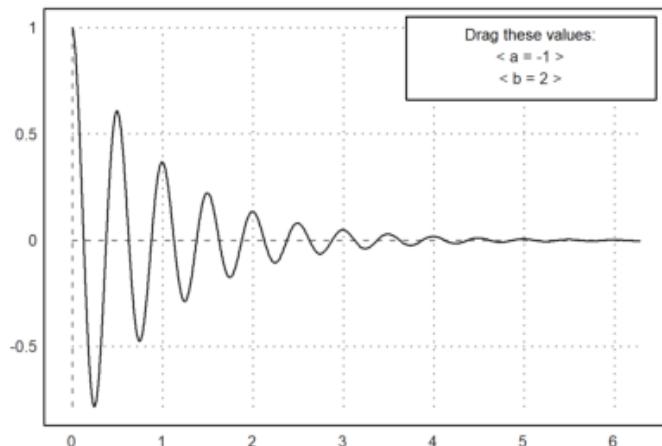
Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)", 0, 2pi;a,b);
```

Kemudian kita membutuhkan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional baris judul.

Ada slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf", ["a", "b"], [-1, 2], [[-2, 2]; [1, 10]], ...
> heading="Drag these values:", hcolor=black);
>insimg;
```

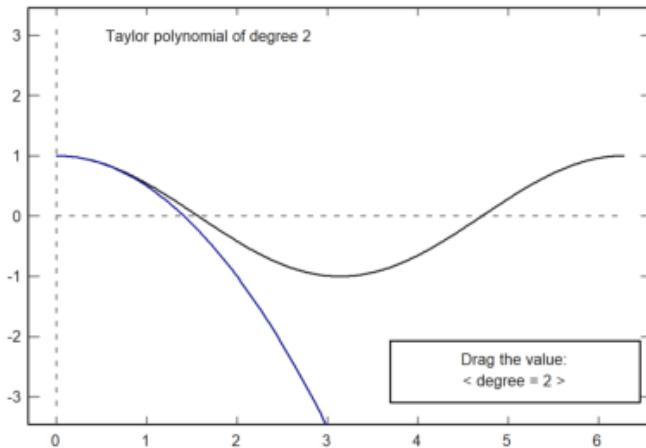


Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret ke bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor derajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
endfunction
```

Sekarang kami mengizinkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 pemberhentian. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
> heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd);
>insimg;
```



Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsi tersebut. Pengguna dapat menggambar di atas jendela plot, meninggalkan jejak poin.

```
>function dragtest ...
plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
start=0;
repeat
{flag,m,time}=mousedrag();
if flag==0 then return; endif;
if flag==2 then
    hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
endif;
end
endfunction
```

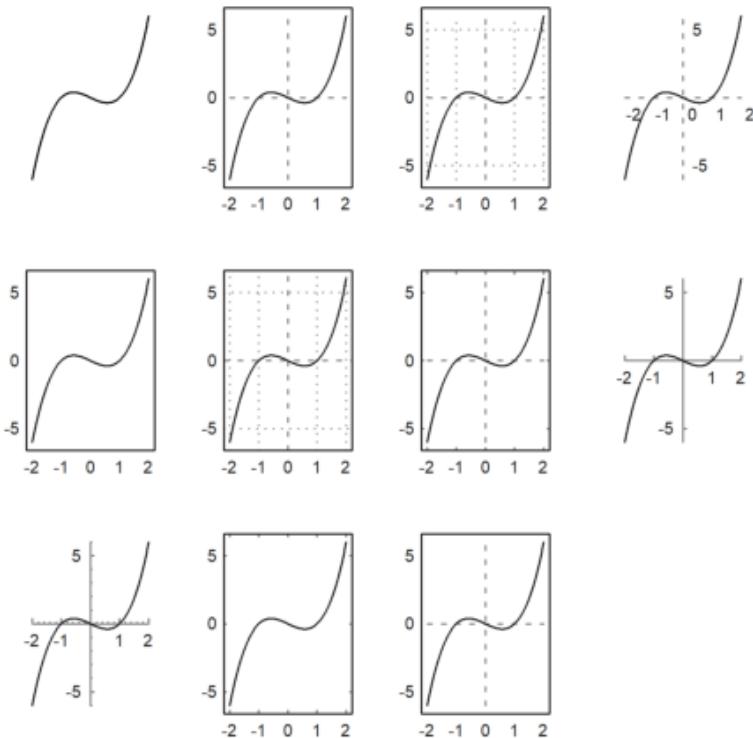
```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

```
Interrupt with Escape key!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
dragtest:
{flag,m,time}=mousedrag();
```

Gaya Plot 2D

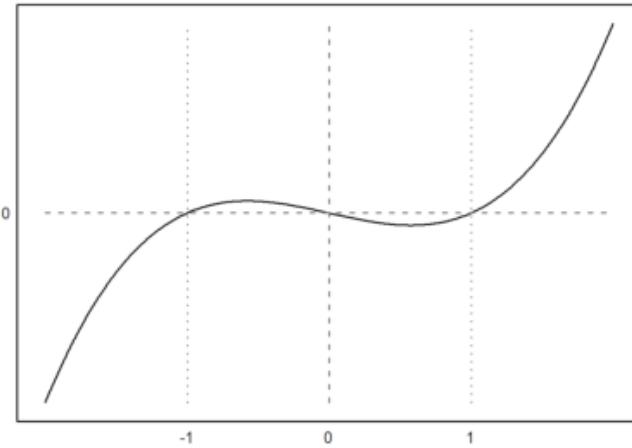
Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```



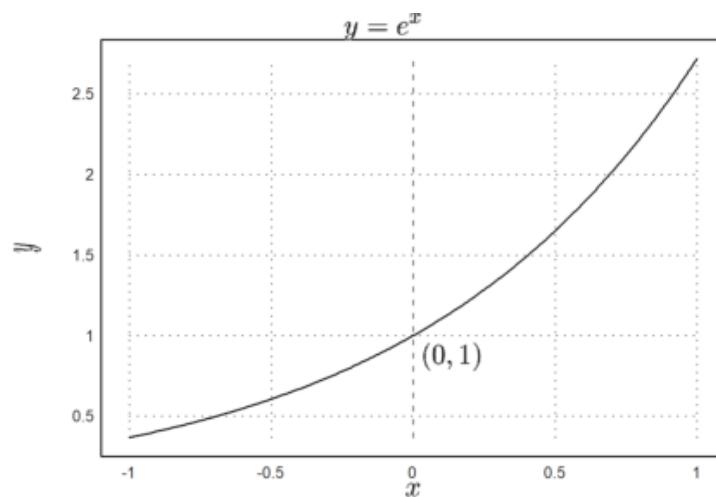
Parameter `<frame` mematikan frame, dan `framecolor=blue` mengatur frame ke warna biru. Jika Anda ingin centang sendiri, Anda dapat menggunakan `style=0`, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0); // add frame and grid
```



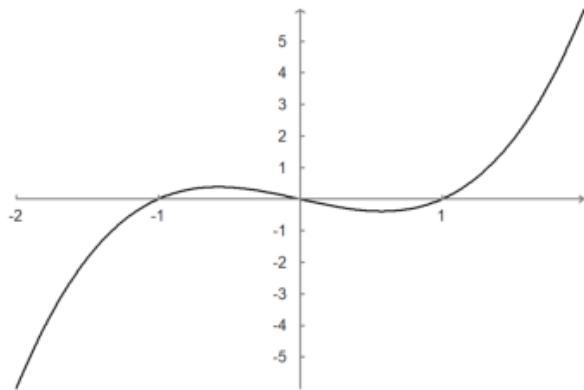
Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)'),0,1,color=blue); // label a point
```



Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan `xaxis()` dan `yaxis()`.

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

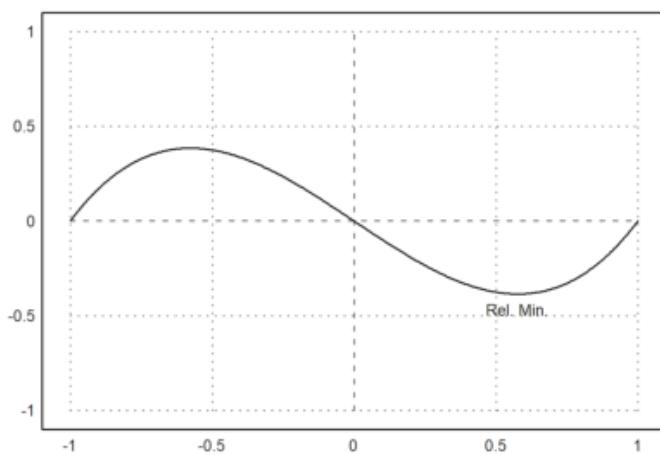


Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti tengah bawah. Ini mengatur posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

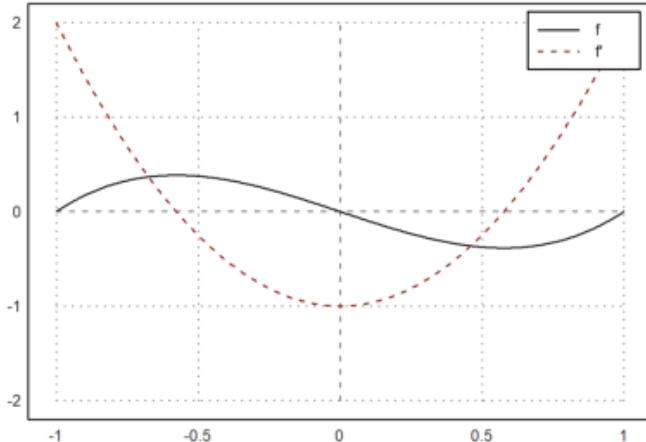
$$x^3 - x$$

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"); // add a label there
```

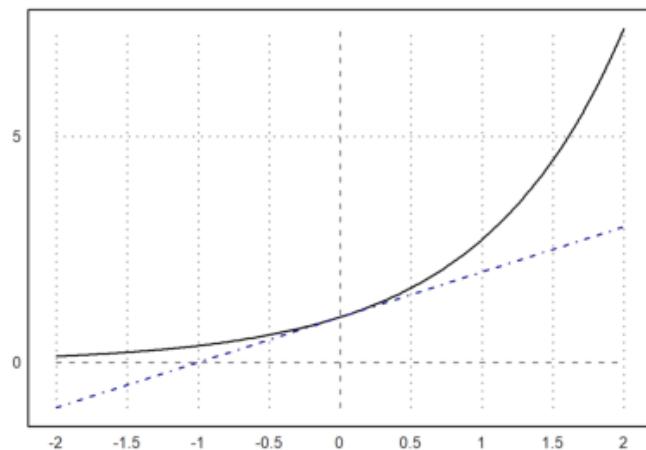


Ada juga kotak teks.

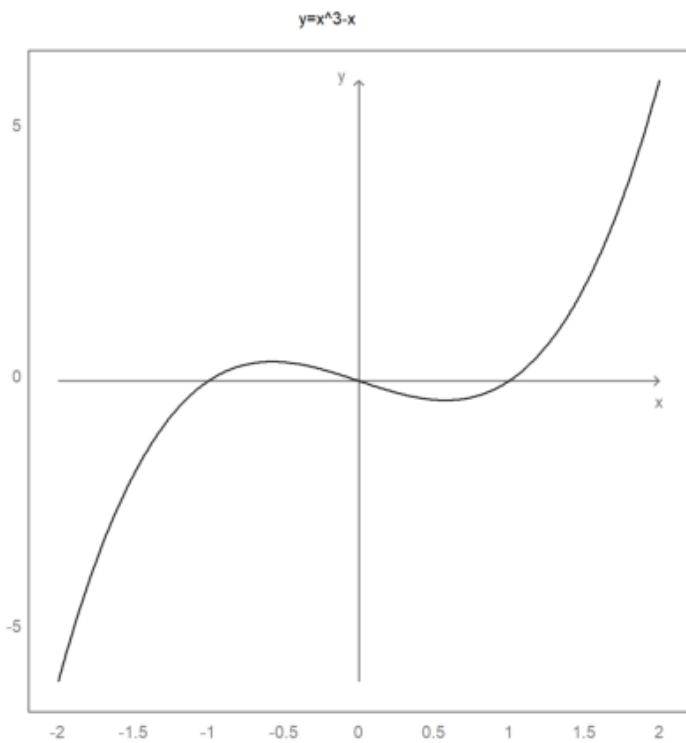
```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function  
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative  
>labelbox(["f","f'"],["-", "--"],[black,red]): // label box
```



```
>plot2d(["exp(x)", "1+x"],color=[black,blue],style=["-", "-.-"]):
```



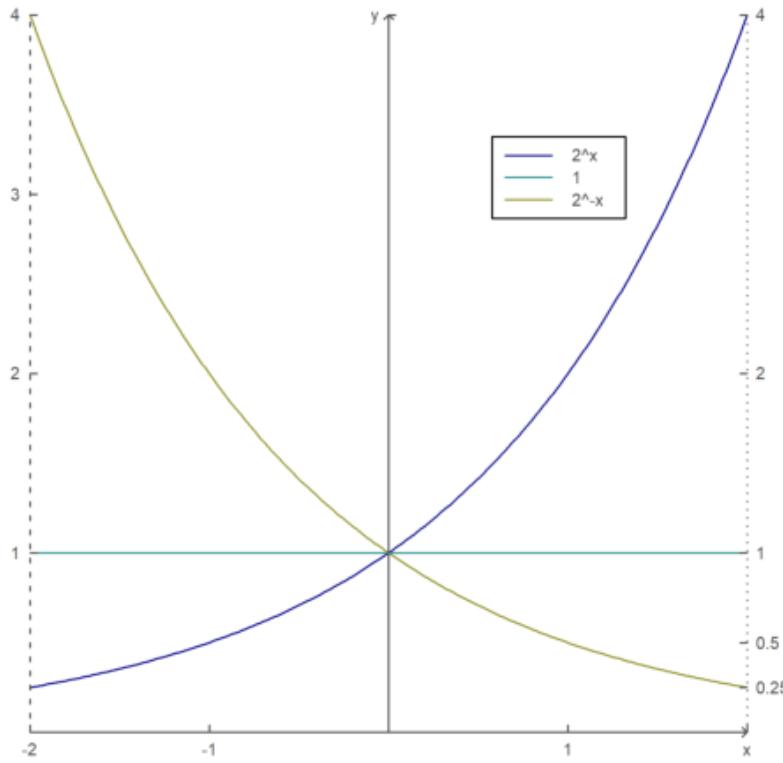
```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray); ...  
> plot2d("x^3-x",grid=1); ...  
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...  
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray); ...  
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...  
> reset():
```



Untuk kontrol lebih, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

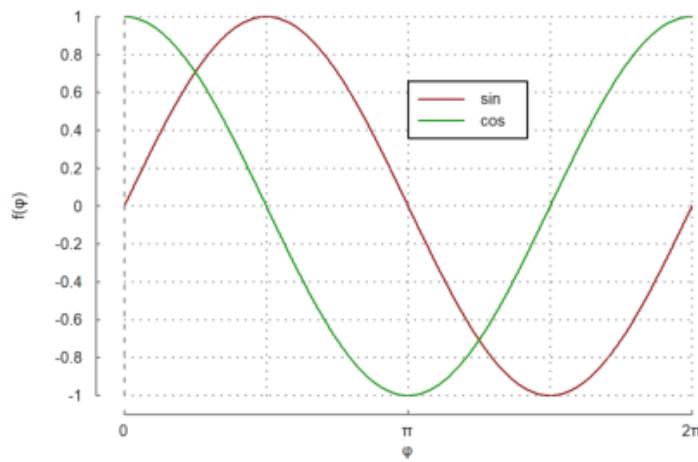
Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi membutuhkan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk mengatur ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```



Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x")],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
>xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"\u03c0;","u"2\u03c0;"],style="-",>ticks,>zero); ...
>xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
>yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
>labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
>xlabel(u"\u03c6"); ylabel(u"f(\u03c6)"):
```



Merencanakan Data 2D

Jika x dan y adalah vektor data, data ini akan digunakan sebagai koordinat x dan y dari suatu kurva. Dalam hal ini, a , b , c , dan d , atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Atau, >persegi dapat diatur untuk menjaga rasio aspek persegi.

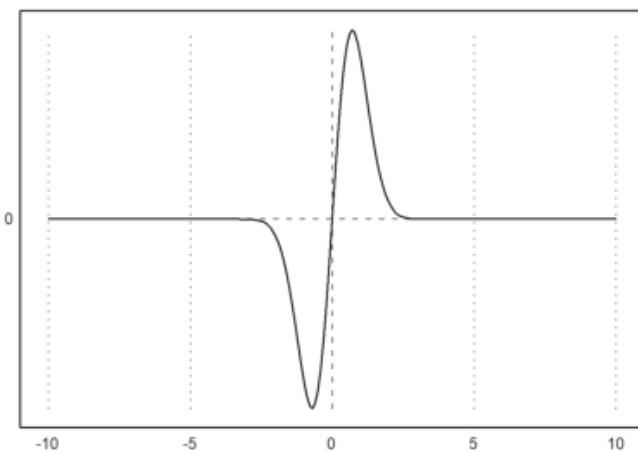
Memplot ekspresi hanyalah singkatan untuk plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x , dan satu atau beberapa baris nilai y . Dari rentang dan nilai- x , fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis campuran dan titik gunakan ">tambahan".

Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y .

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y);
```



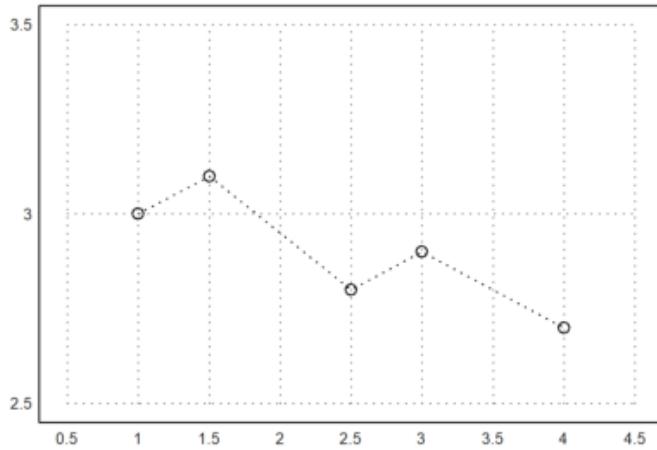
Data juga dapat diplot sebagai titik. Gunakan poin=true untuk ini. Plotnya bekerja seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudut-sudutnya.

- style="...": Pilih dari "[", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[", "<>", "o", "..", "", "|".

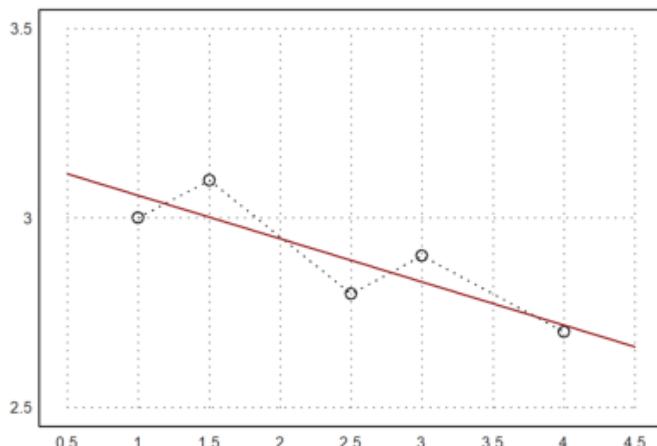
Untuk memplot set poin gunakan >points. Jika warna adalah vektor warna, setiap titik mendapat warna yang berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku untuk baris matriks.

Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"); // add points
```



```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red); // add plot of line
```



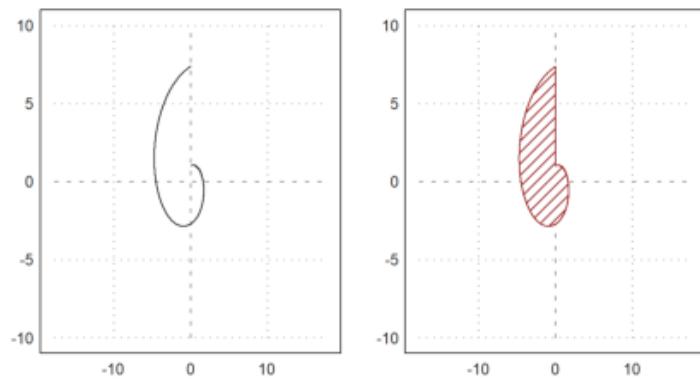
Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data benar-benar poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

- terisi=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "", "/", "\", "\\".
- fillcolor: Lihat di atas untuk warna yang tersedia.

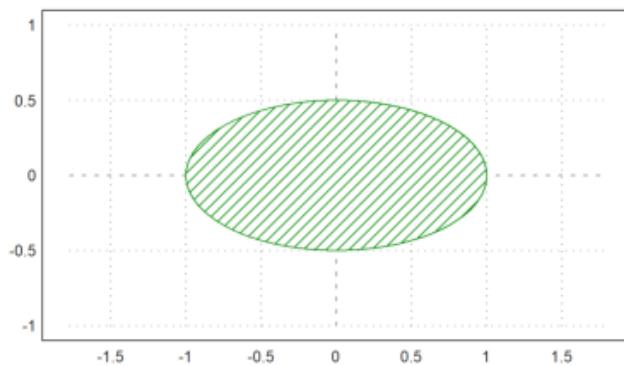
Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali yang default.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```

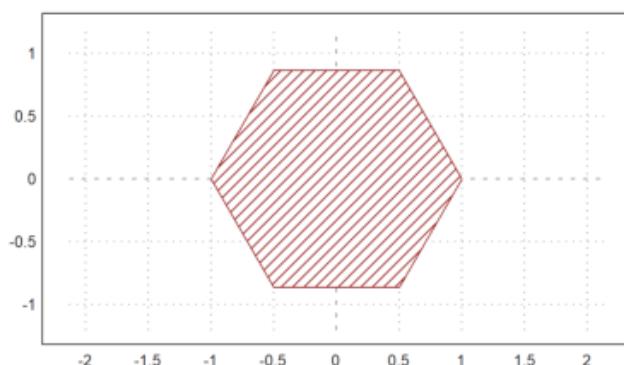


Dalam contoh berikut kami memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

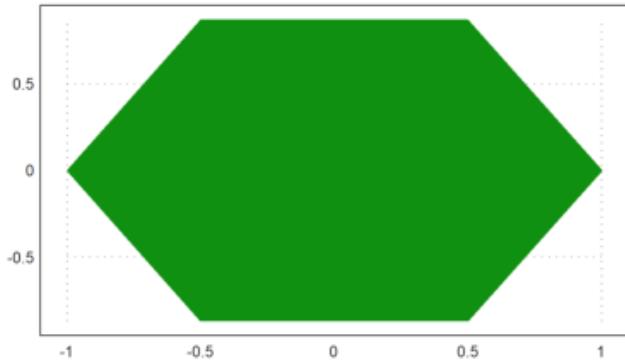
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```



```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

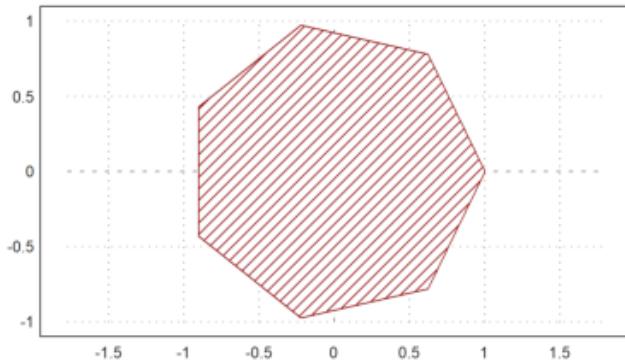


```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



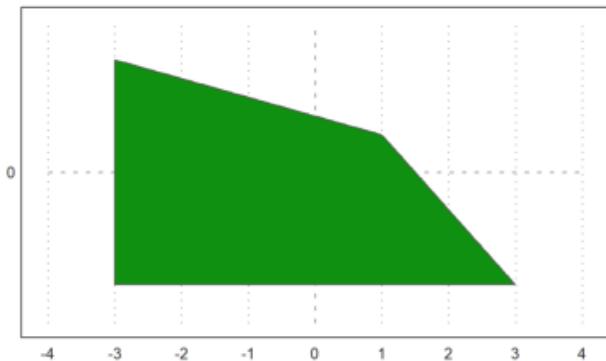
Contoh lainnya adalah segi empat, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7); ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```



Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah $A[k].v \leq 3$ untuk semua baris A . Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

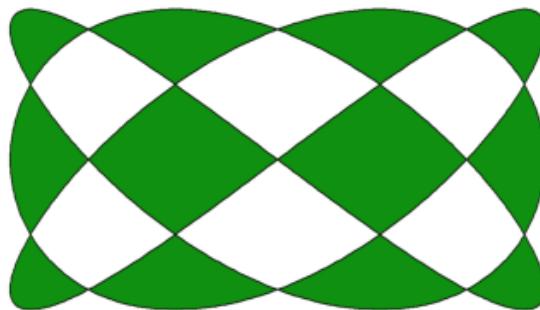


Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan untuk menghasilkan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kami sekarang memiliki vektor x dan y nilai. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik. Plotnya bisa diisi. Pada kasus ini ini menghasilkan hasil yang bagus karena aturan lilitan, yang digunakan untuk isi.

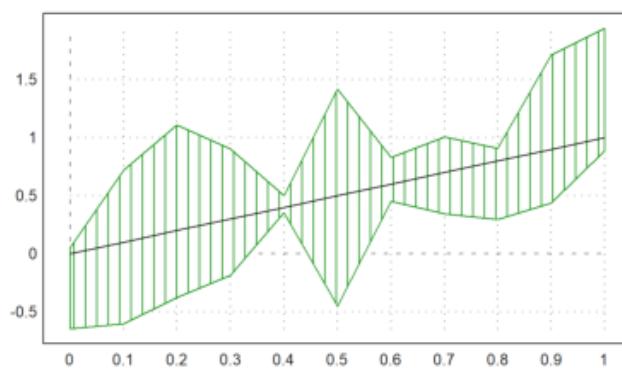
```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled) :
```



Sebuah vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai daerah terisi antara nilai interval bawah dan atas.

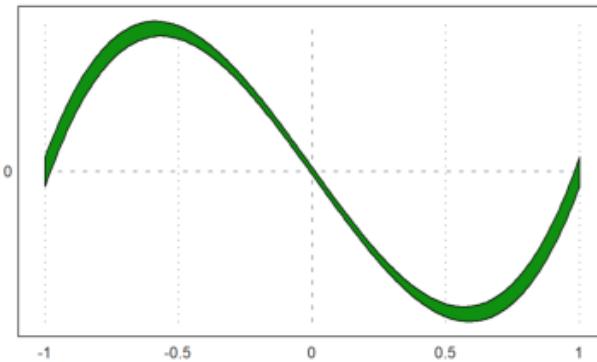
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa juga digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|"); ...
> plot2d(t,t,add=true) :
```



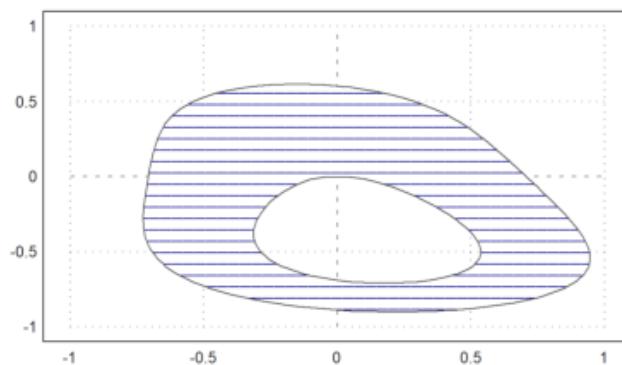
Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi dalam bidang. Gaya isian sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y);
```



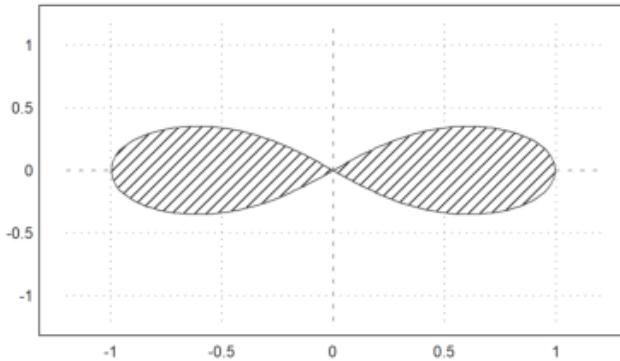
Memungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue); // 0 <= f(x,y) <= 1
```

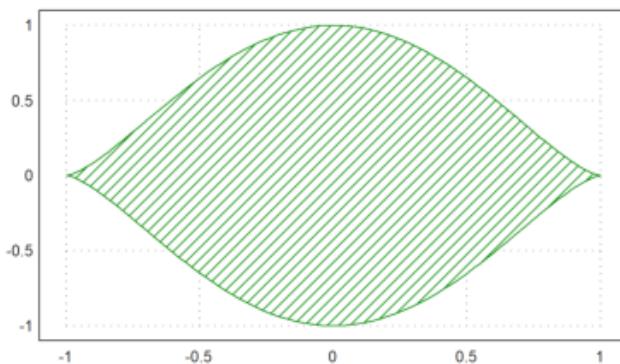


Kami juga dapat mengisi rentang nilai seperti
lateks: $-1 \leq (x^2+y^2)^2-x^2+y^2 \leq 0$.

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/");
```



```
>plot2d("cos(x)", "sin(x)^3", xmin=0, xmax=2pi, >filled, style="/") :
```



Grafik Fungsi Parametrik

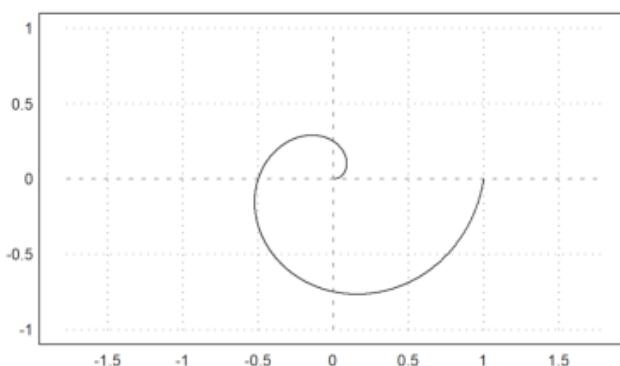
Nilai-x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik fungsi.

Dalam contoh berikut, kami memplot spiral

lateks: $\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

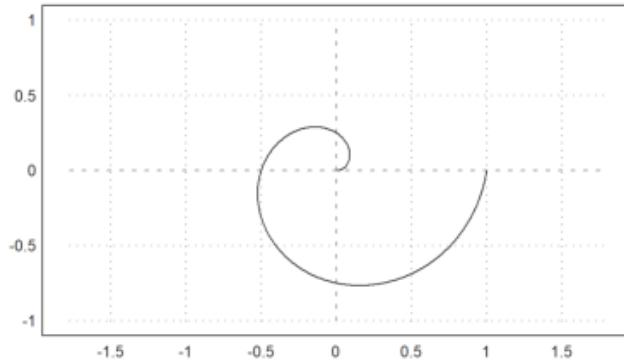
Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptif() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptif() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1) :
```

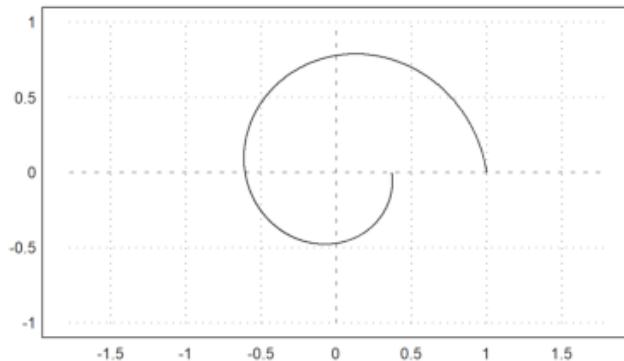


Atau, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)", "x*sin(2*pi*x)", xmin=0, xmax=1, r=1) :
```

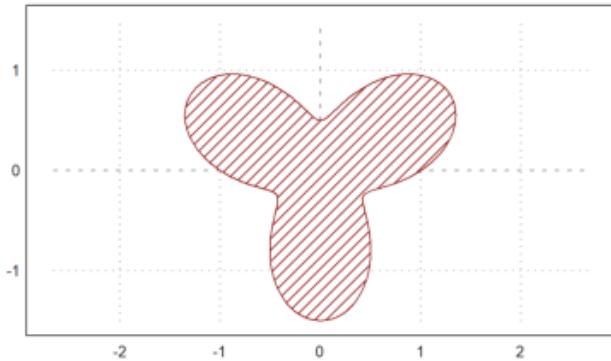


```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);  
>plot2d(x,y,r=1) :
```



Dalam contoh berikutnya, kami memplot kurva
lateks: \gamma(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t))
dengan
lateks: r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...  
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/" ,r=1.5) :
```



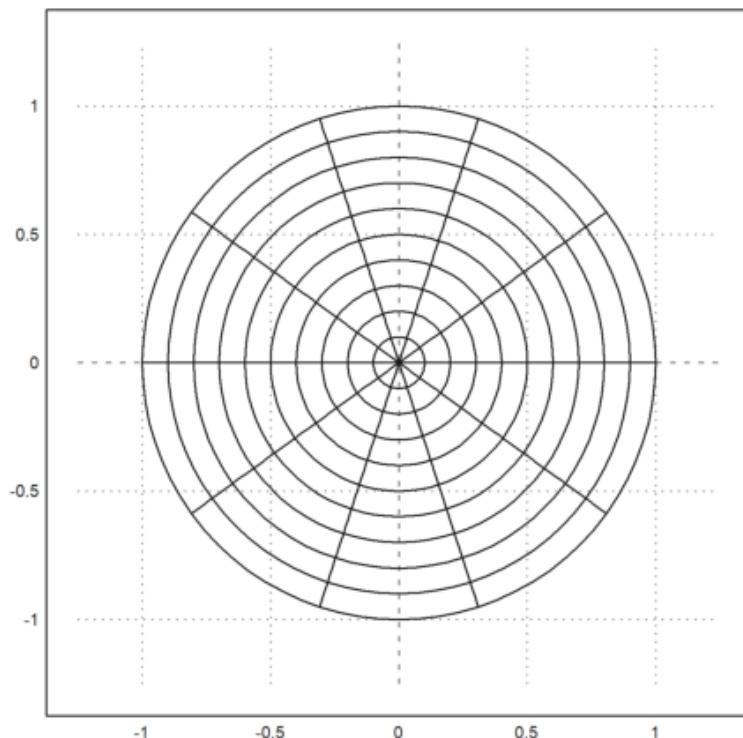
Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Array bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan terhubung. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1×2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.

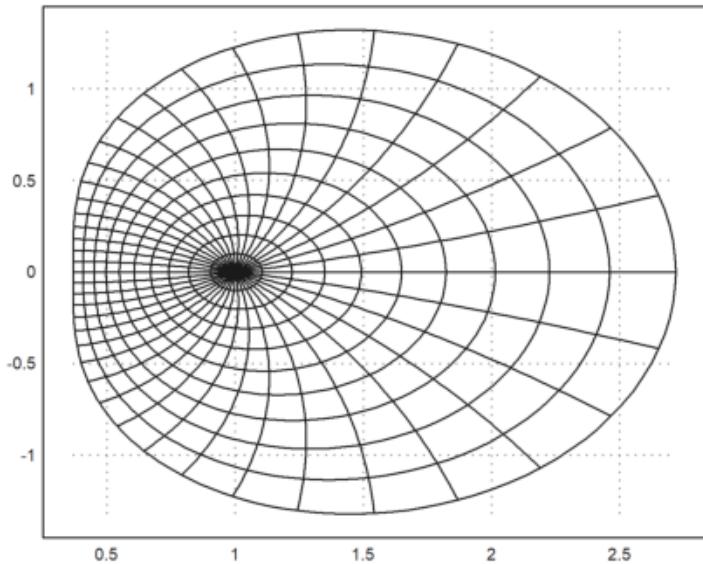
Matriks bilangan kompleks akan secara otomatis diplot sebagai kisi di bidang kompleks.

Dalam contoh berikut, kami memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

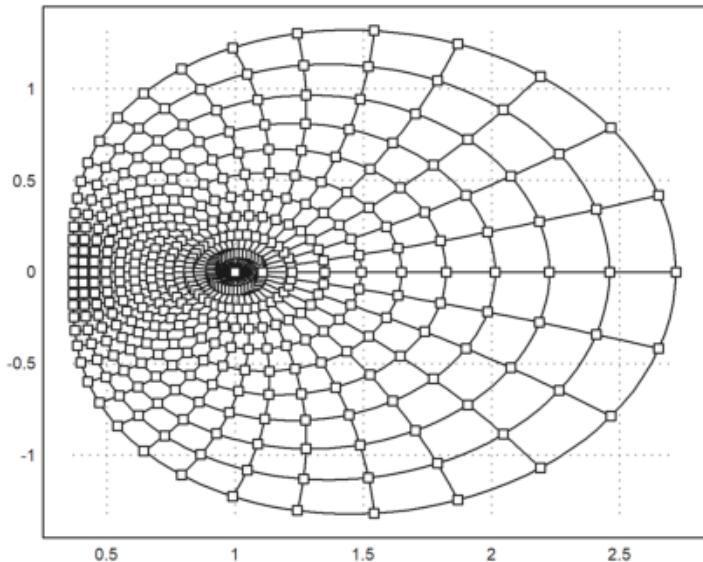
```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```



```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```



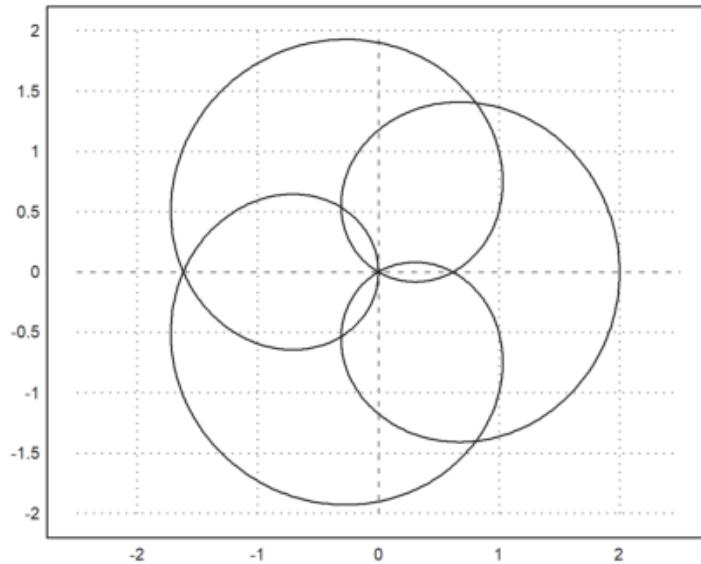
```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```



Sebuah vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian real dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kami memplot lingkaran satuan dengan lateks: $\gamma(t) = e^{it}$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



Plot Statistik

Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

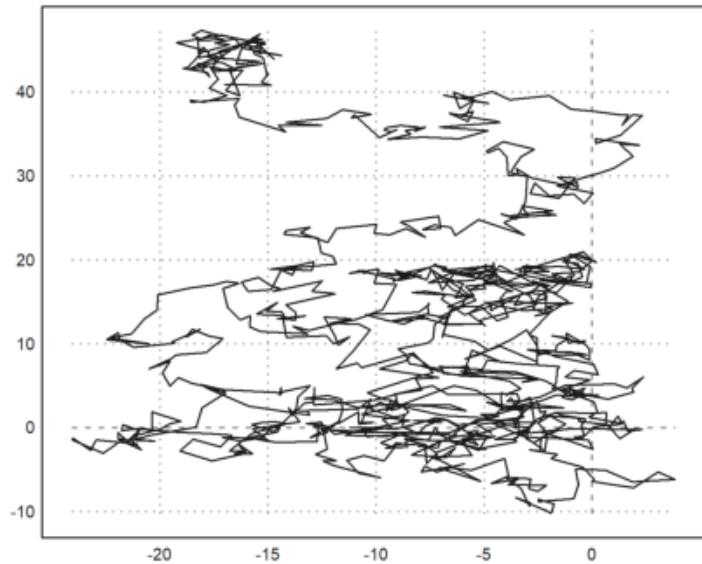
Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi 0-1-normal menghasilkan jalan acak.

```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

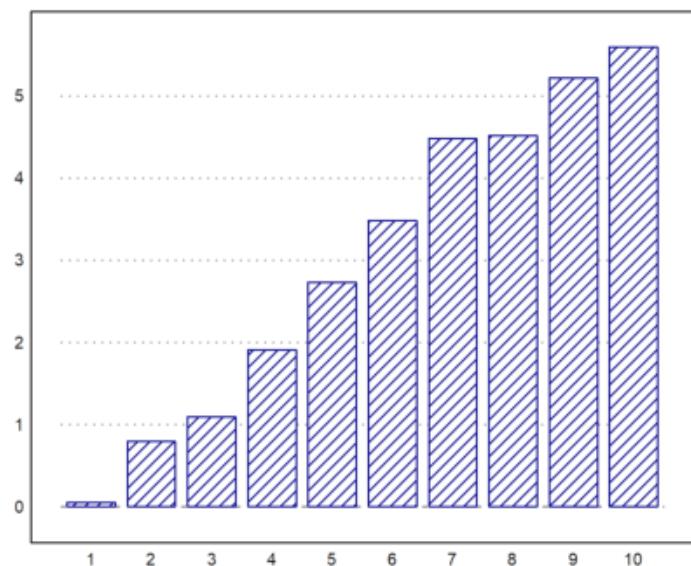


Menggunakan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

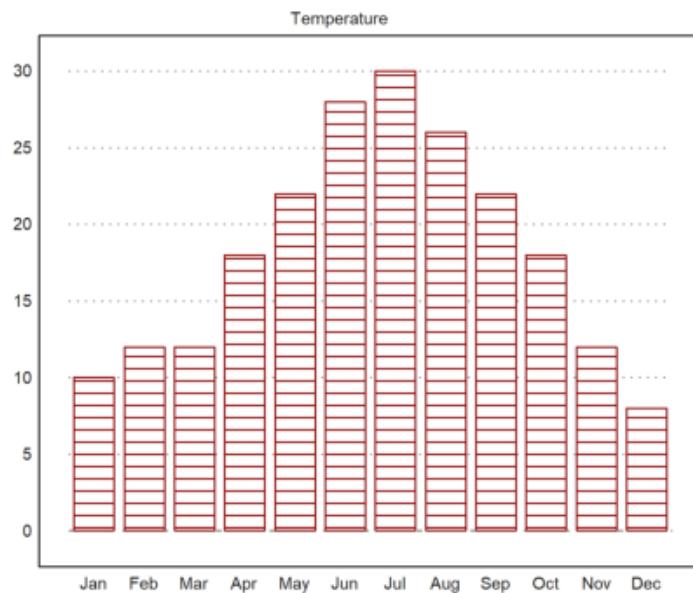


```
>columnsplot(cumsum(random(10)), style="/", color=blue):
```

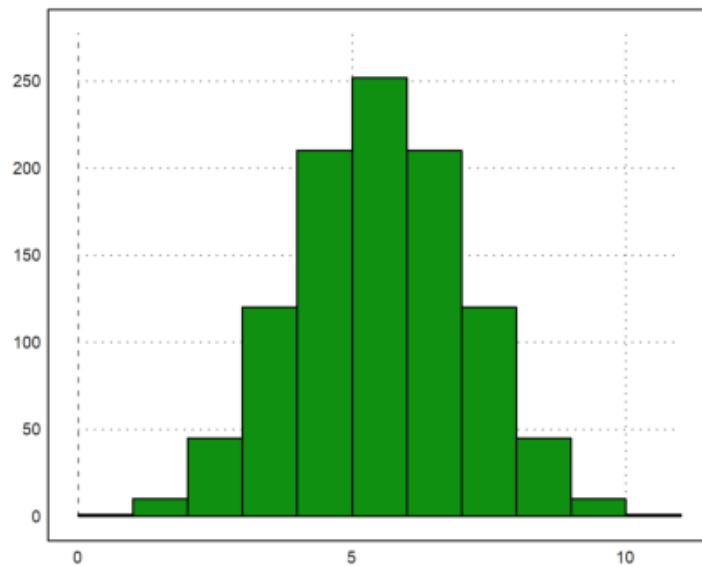


Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

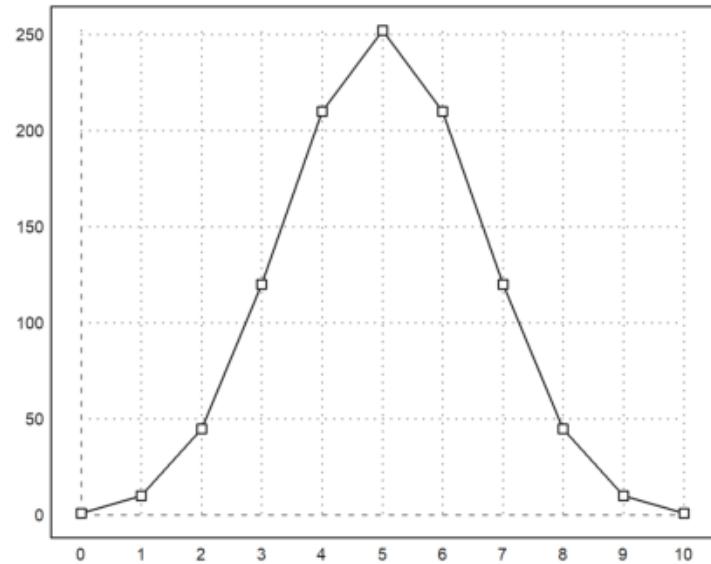
```
>months=["Jan", "Feb", "Mar", "Apr", "May", "Jun", ...
> "Jul", "Aug", "Sep", "Oct", "Nov", "Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values, lab=months, color=red, style="-");
>title("Temperature"):
```



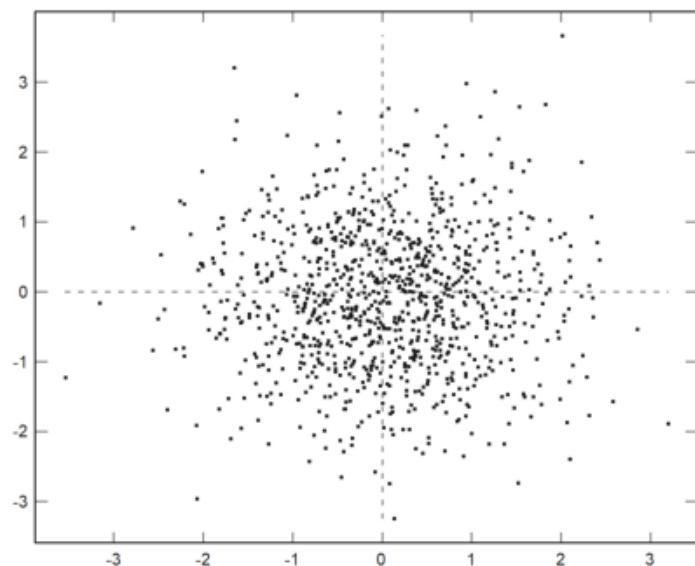
```
>k=0:10;  
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



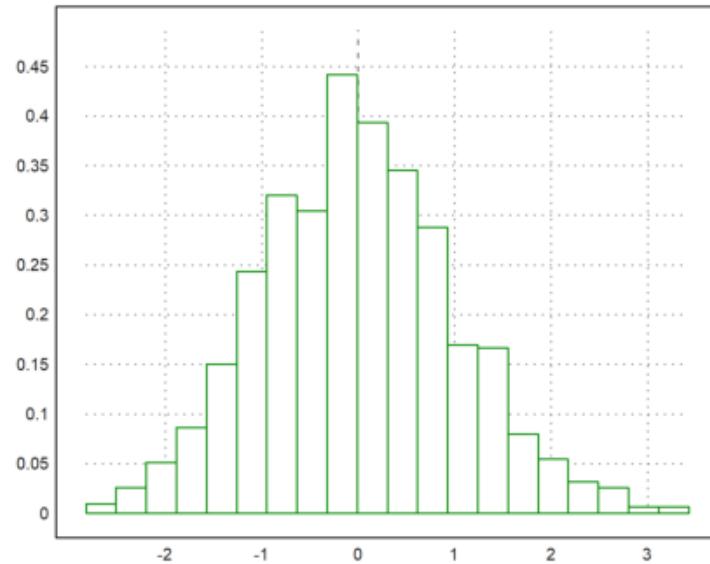
```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



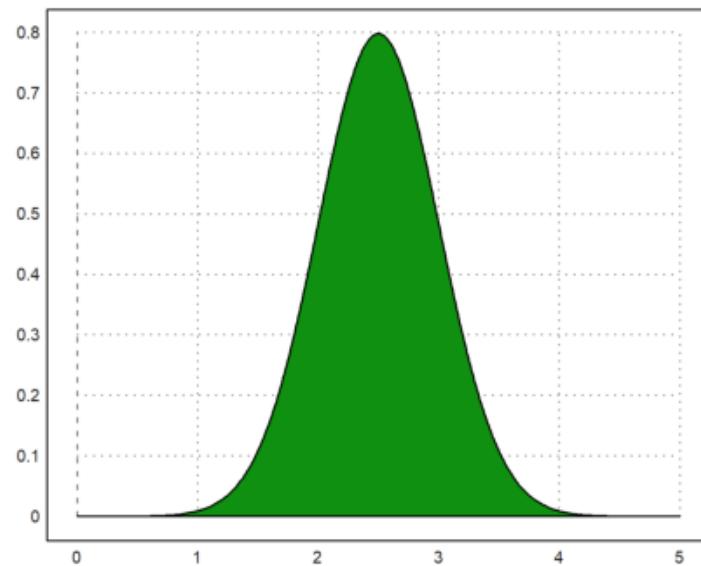
```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style="."):
```



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

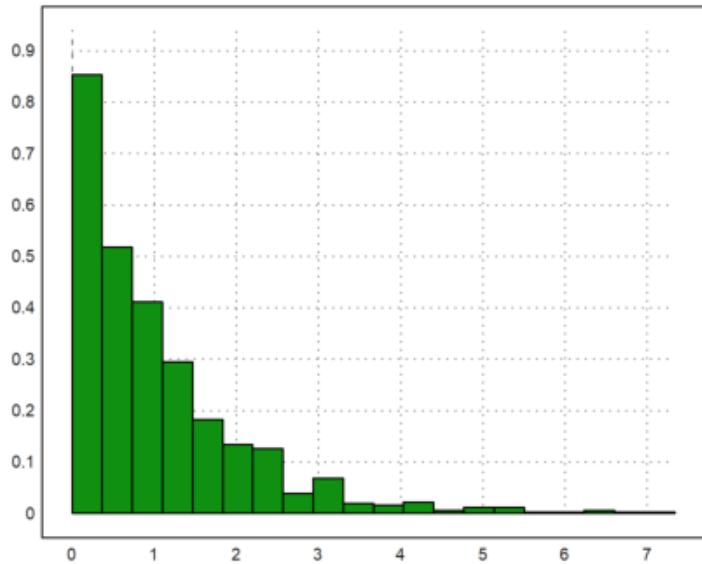


```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```



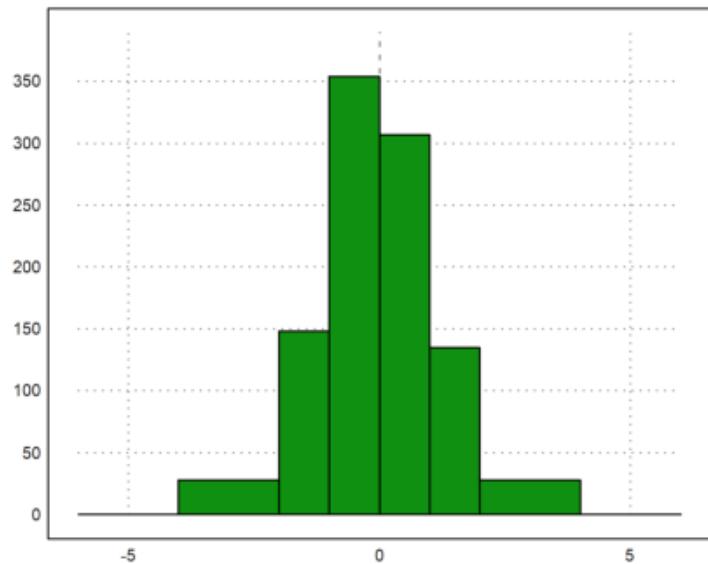
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```



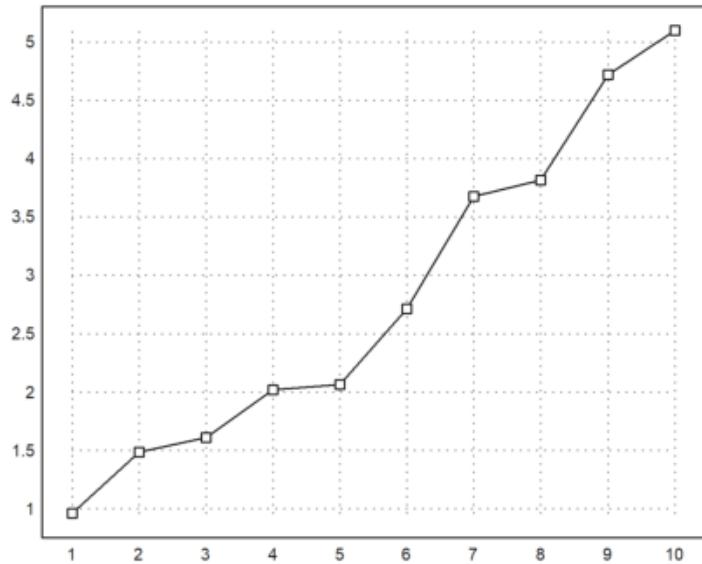
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

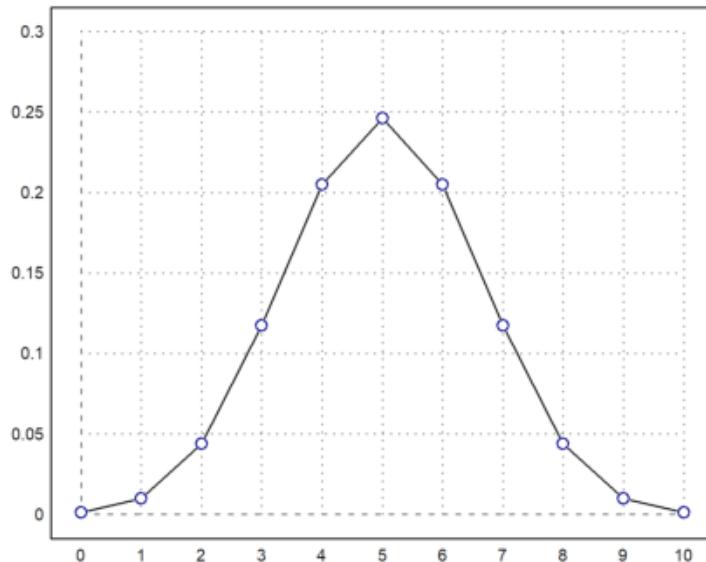


Fungsi statplot() menyetel gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)), "b"):
```

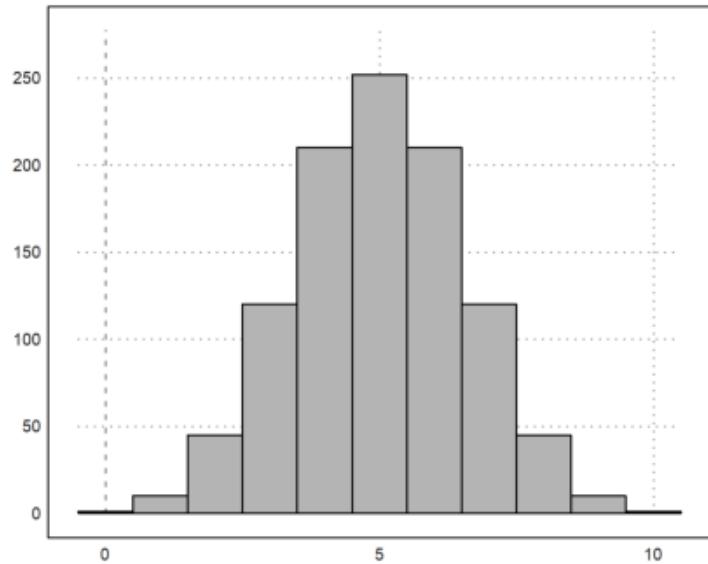


```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



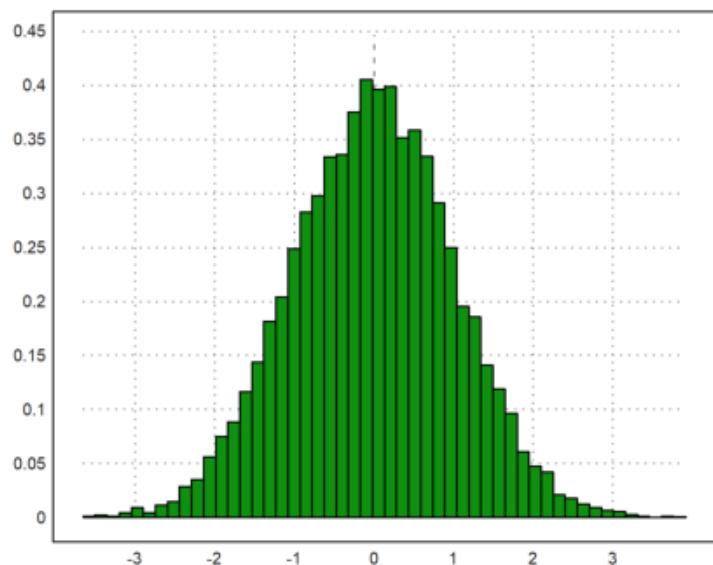
Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Bilah akan memanjang dari $x[i]$ ke $x[i+1]$ dengan nilai $y[i]$. Jika x memiliki ukuran yang sama dengan y, maka akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.
Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

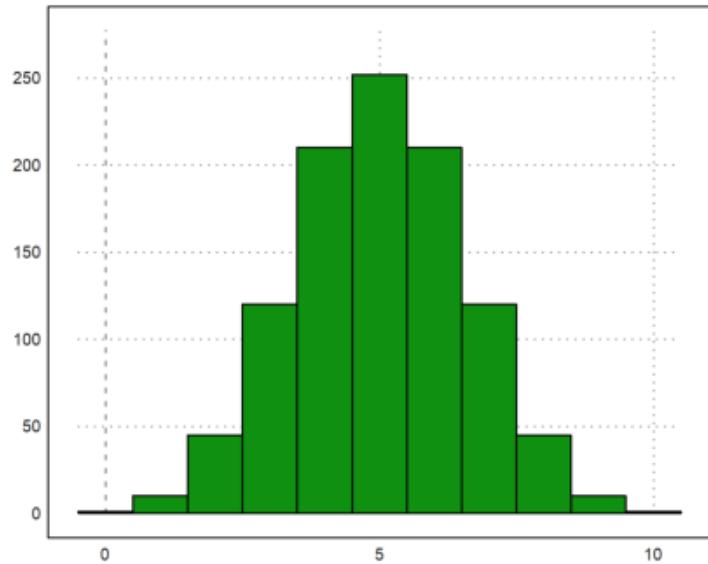


Data untuk plot batang (bar=1) dan histogram (histogram=1) dapat dinyatakan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >genap ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

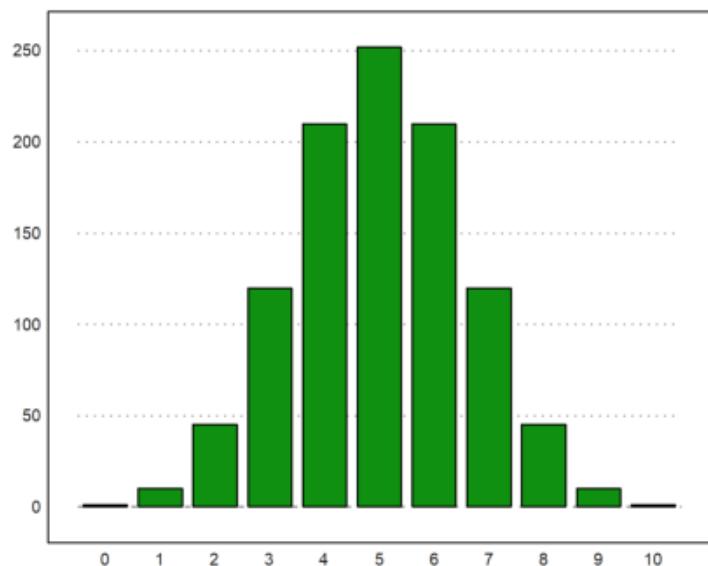
```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



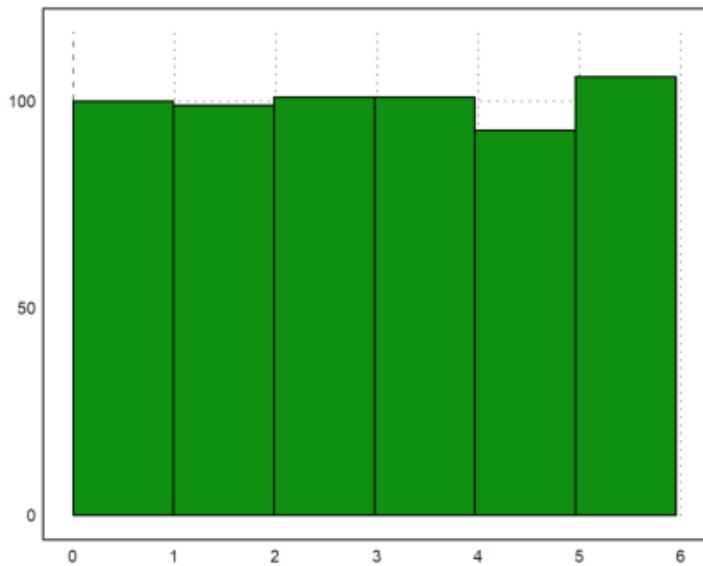
```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```



```
>columnsplot(m, k) :
```

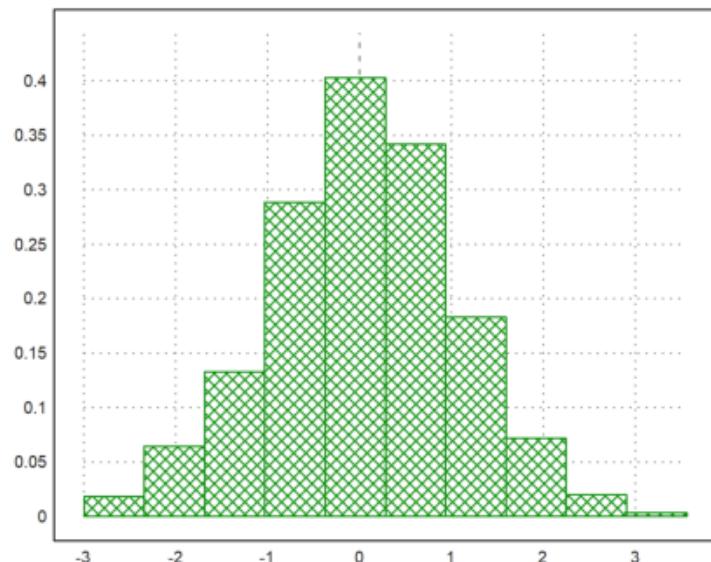


```
>plot2d(random(600)*6, histogram=6) :
```



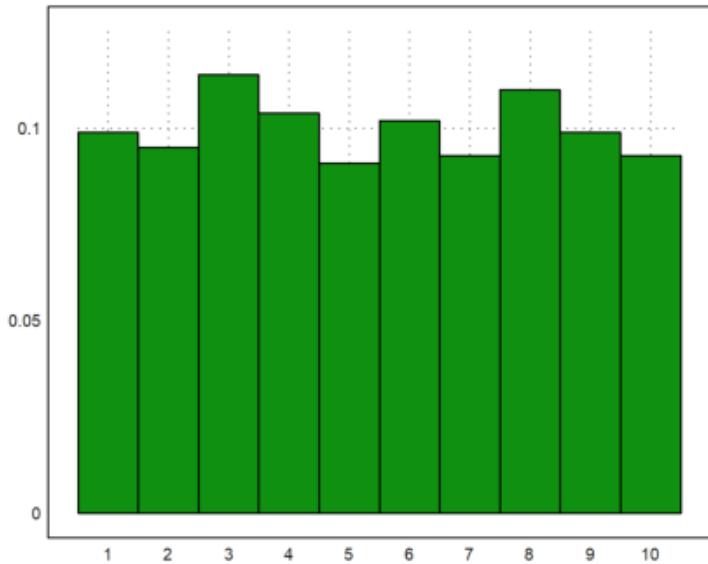
Untuk distribusi, ada parameter `distribusi=n`, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="/"):
```



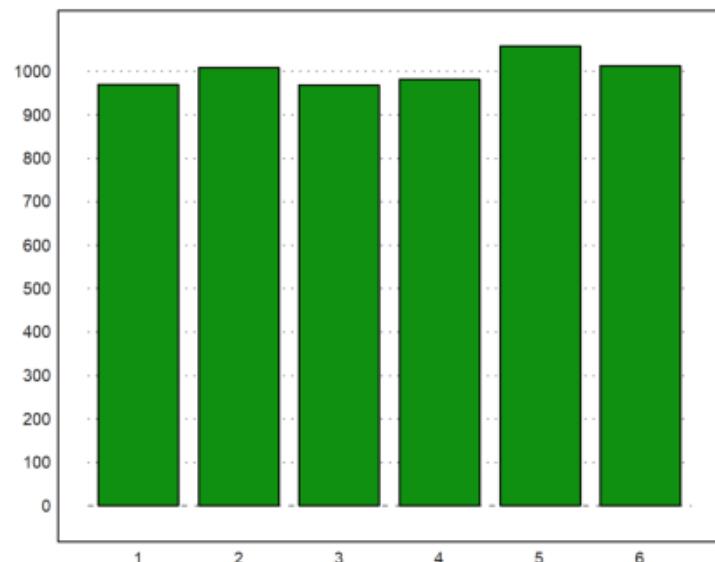
Dengan parameter `even=true`, ini akan menggunakan interval integer.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

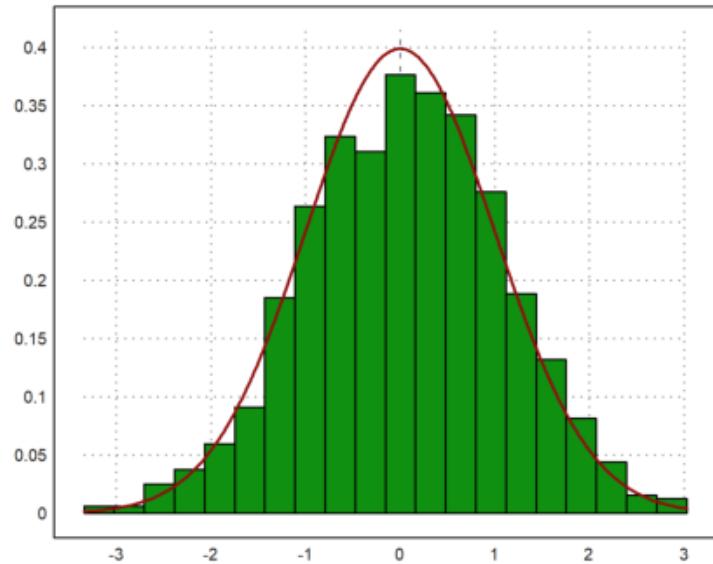


Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik, yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot (getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

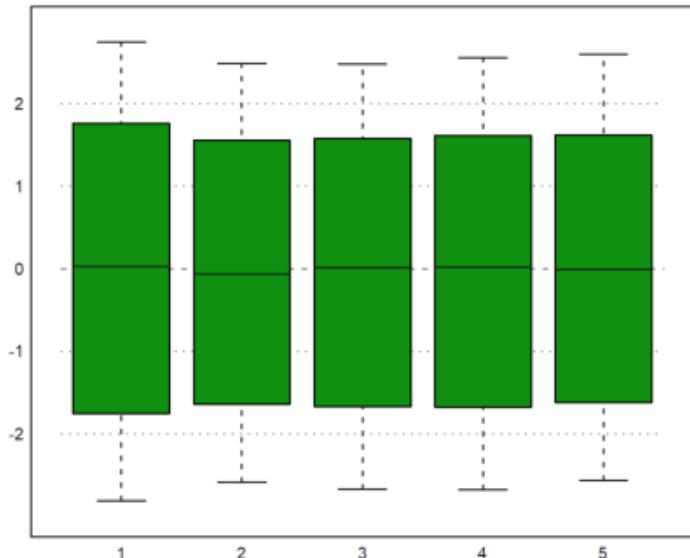


```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
> plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Boxplot menunjukkan kuartil dari distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisi, outlier dalam boxplot adalah data yang melebihi 1,5 kali kisaran 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```



Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan garis level yang menyelesaikan $f(x,y)=\text{level}$, di mana "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika $\text{level}=\text{"auto"}$, akan ada garis level nc, yang akan menyebarkan antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi dari parameter x dan y, atau, sebagai alternatif, xv dapat berupa matriks nilai.

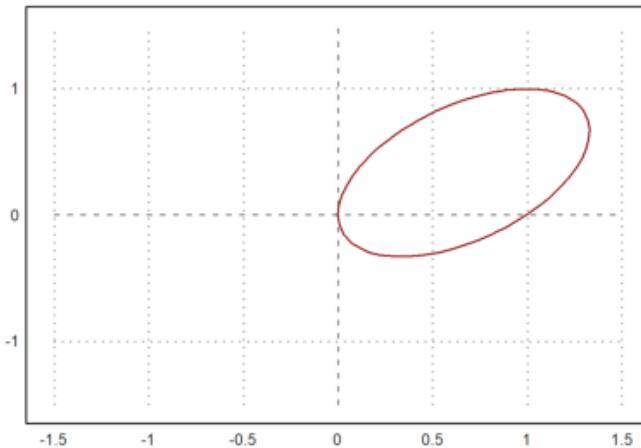
Euler dapat menandai garis level

lateks: $f(x,y) = c$

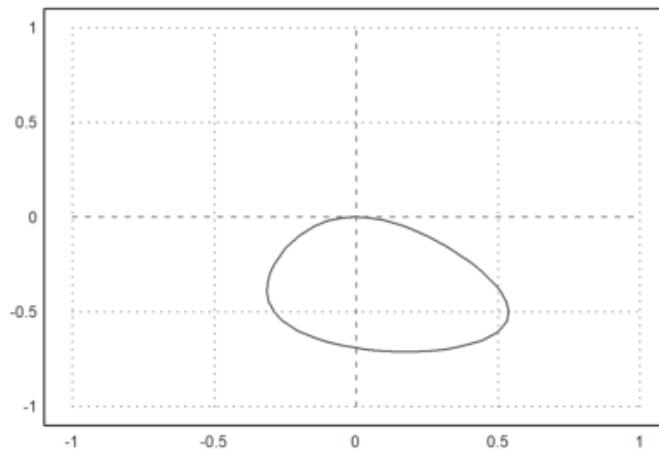
dari fungsi apapun.

Untuk menggambar himpunan $f(x,y)=c$ untuk satu atau lebih konstanta c , Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya di dalam bidang. Parameter untuk c adalah level=c, di mana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi untuk setiap titik dalam plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

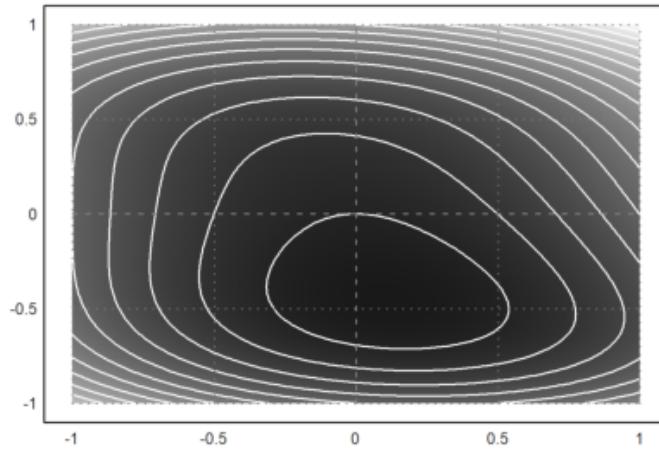
```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x", r=1.5, level=0, contourcolor=red):
```



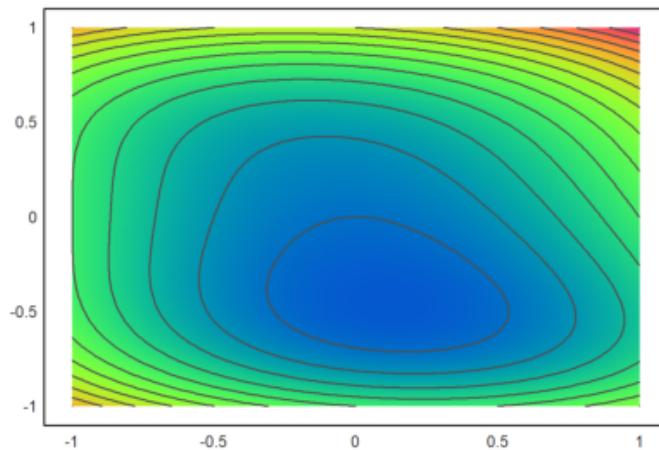
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0); // Solutions of f(x,y)=0
```



```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200); // nice
```

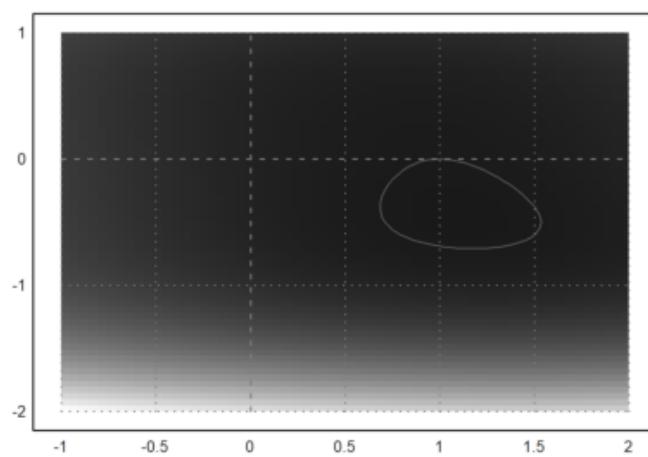


```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

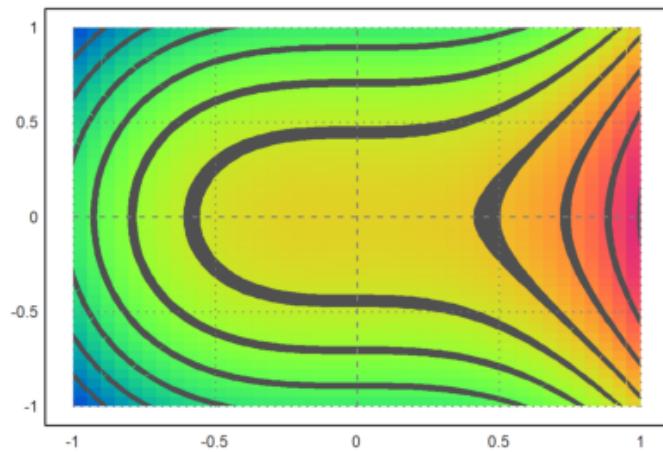


Ini berfungsi untuk plot data juga. Tetapi Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

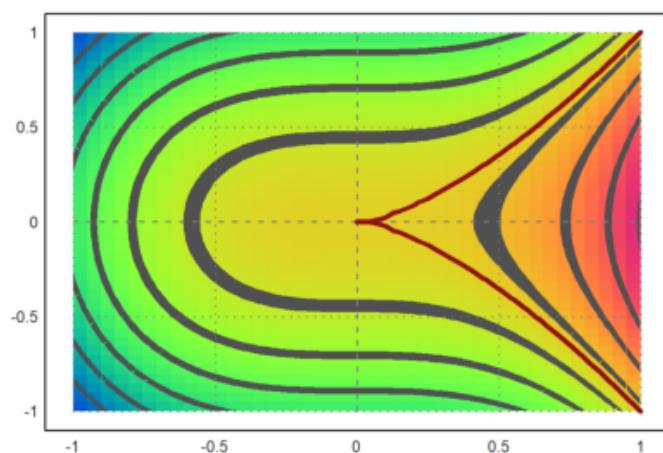
```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



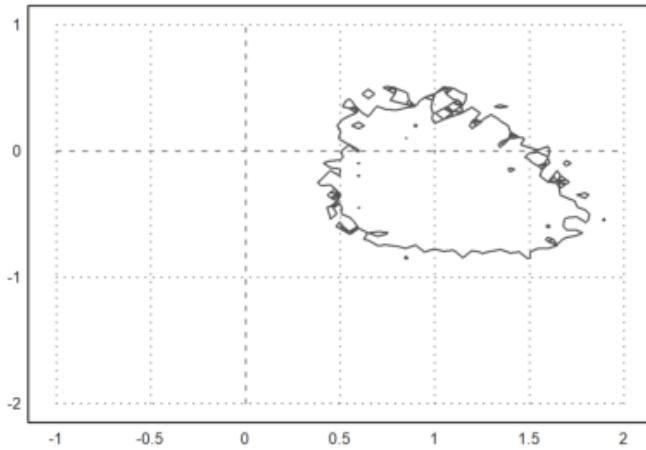
```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```



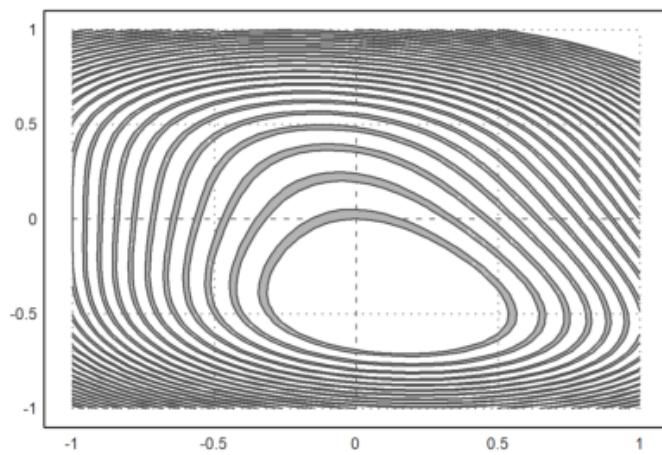
```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```



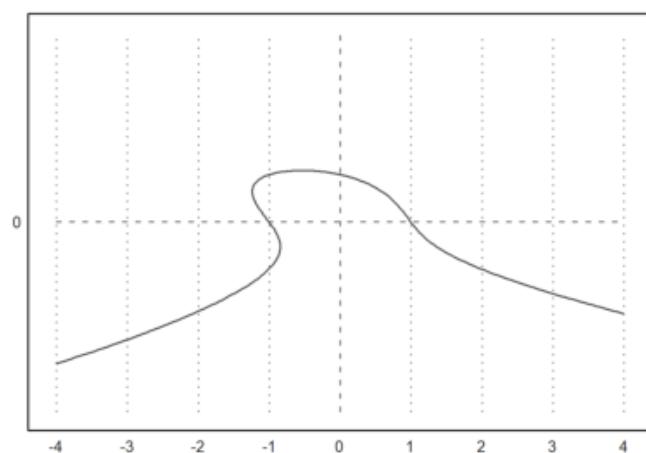
```
>z=z+normal(size(z))*0.2;  
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```



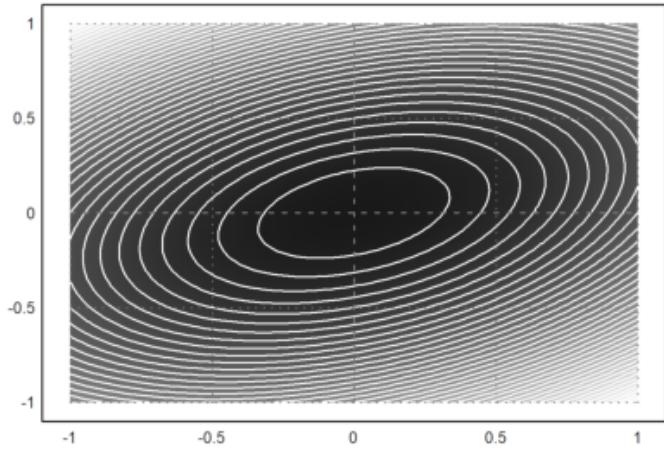
```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```



```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```



```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```



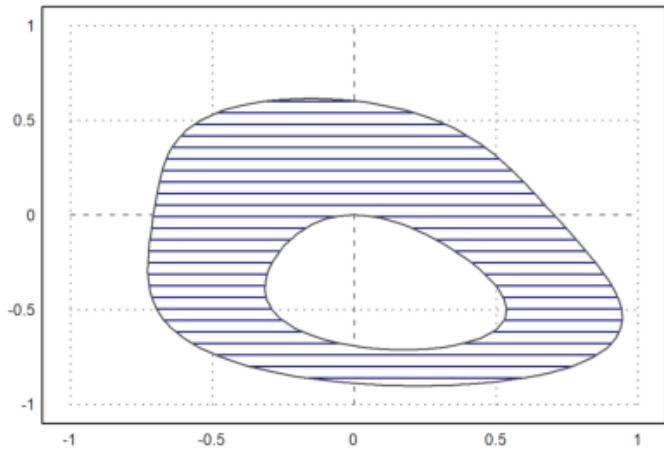
Juga dimungkinkan untuk mengisi set

lateks: $a \leq f(x,y) \leq b$

dengan rentang tingkat.

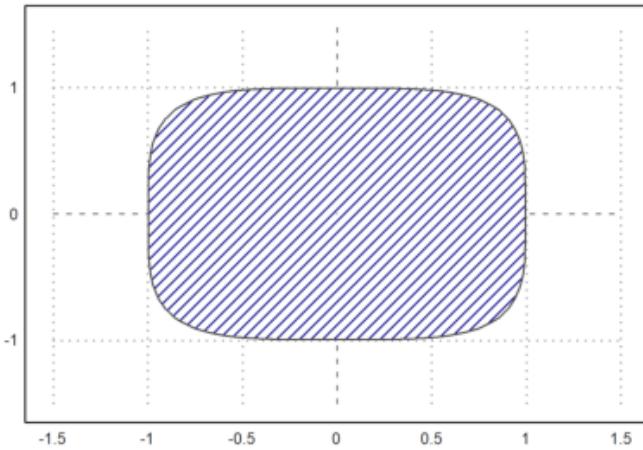
Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

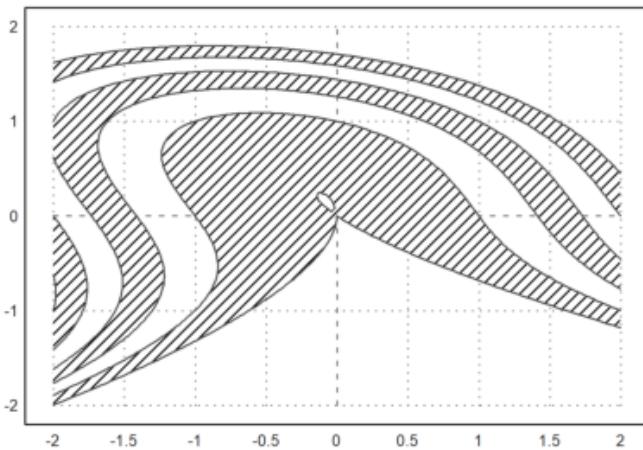


Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Kemudian level harus berupa matriks 2xn dari interval level, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua adalah akhir dari setiap interval. Atau, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

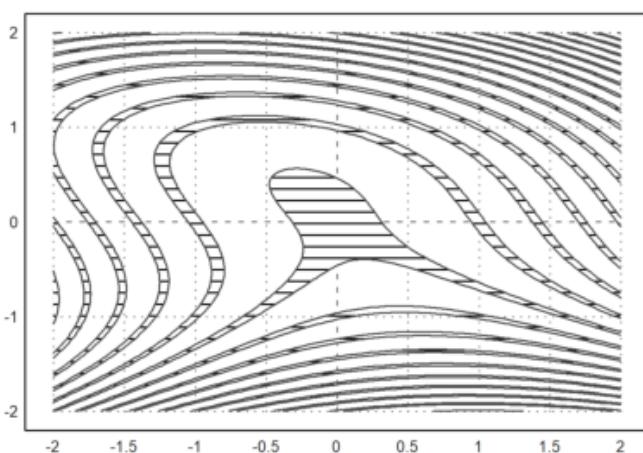
```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```



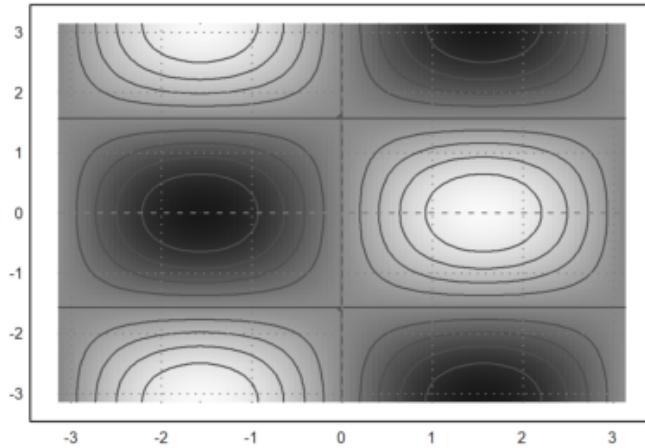
```
>plot2d("x^2+y^3+x*y", level=[0,2,4;1,3,5], style="/", r=2, n=100):
```



```
>plot2d("x^2+y^3+x*y", level=-10:20, r=2, style="-", dl=0.1, n=100):
```

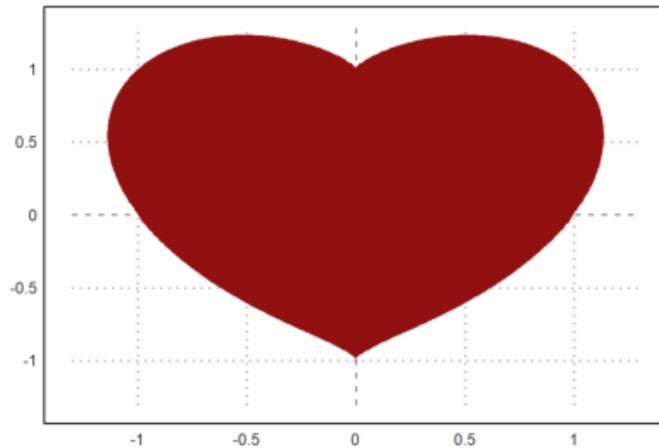


```
>plot2d("sin(x)*cos(y)", r=pi, >hue, >levels, n=100) :
```



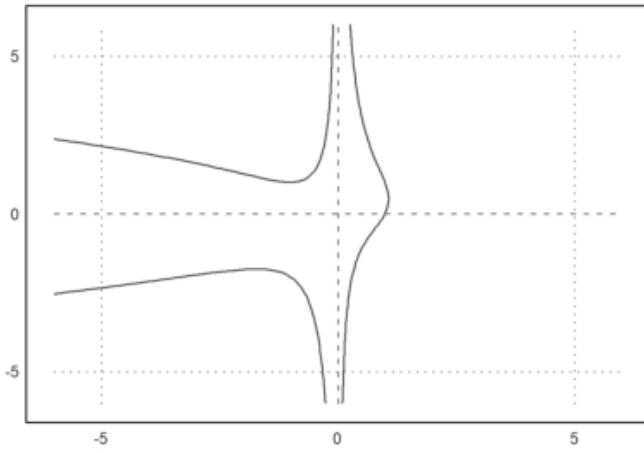
Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah
lateks: $a \leq f(x,y) \leq b$.
Ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3", r=1.3, ...
> style="#", color=red, <outline, ...
> level=[-2;0], n=100) :
```



Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti
lateks: $x^3-xy+x^2y^2=6$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2", r=6, level=1, n=100) :
```



```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

```

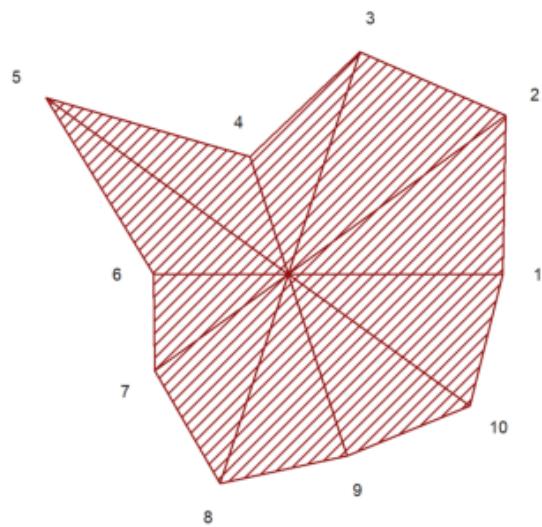
if !holding() then clg; endif;
w=window(); window(0,0,1024,1024);
h=holding(1);
r=max(abs(v))*1.2;
setplot(-r,r,-r,r);
n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
loop 1 to n
  polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
  if lab!=none then
    rlab=v[#]+r*0.1;
    {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
    ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
  endif;
end;
barcolor(cl); barstyle(st);
holding(h);
window(w);
endfunction

```

Tidak ada kotak atau sumbu kutu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plot.

Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu, jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



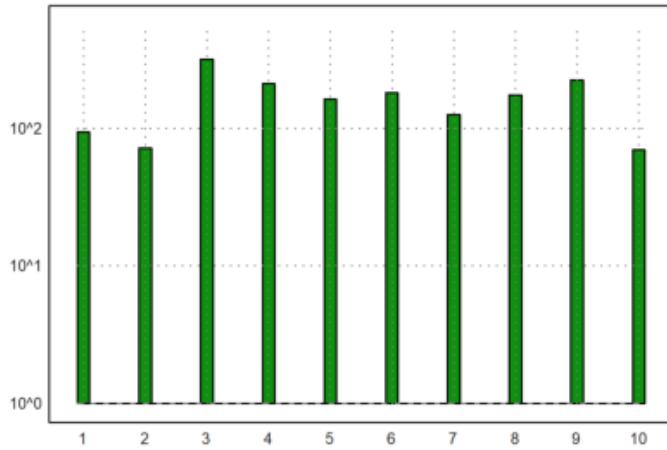
Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang tidak dapat dilakukan plot2d, tetapi hampir. Dalam fungsi berikut, kami melakukan plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
{x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
h=holding(1);
frame();
xgrid(ticks(x));
p=plot();
for i=-10 to 10;
  if i<=p[4] and i>=p[3] then
    ygrid(i,yt="10^"+i);
  endif;
end;
holding(h);
endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```



Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke jendela plot. setplot(a,b,c,d) mengatur jendela ini.

Fungsi wait(0) memaksa plot untuk muncul di jendela grafik. Jika tidak, menggambar ulang terjadi dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
t=linspace(0,2pi,500);
f=0;
c=framecolor(0);
l=linewidth(2);
setplot(-1,1,-1,1);
repeat
  clg;
  plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
  wait(0);
  if testkey() then break; endif;
  f=f+0.02;
end;
framecolor(c);
linewidth(l);
endfunction
```

Tekan sembarang tombol untuk menghentikan animasi ini.

```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

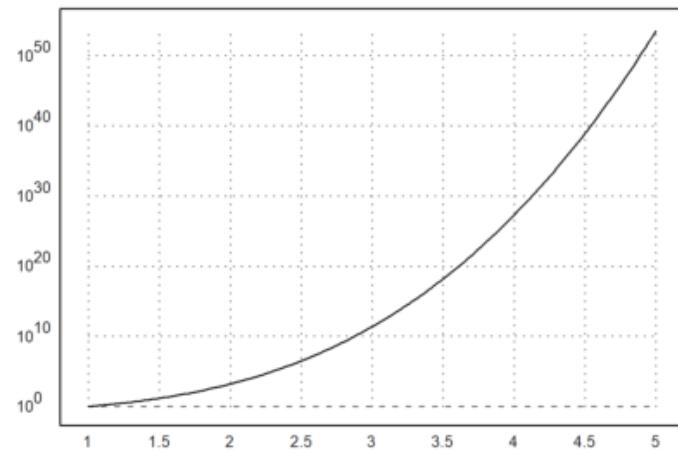
Plot Logaritmik

EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.

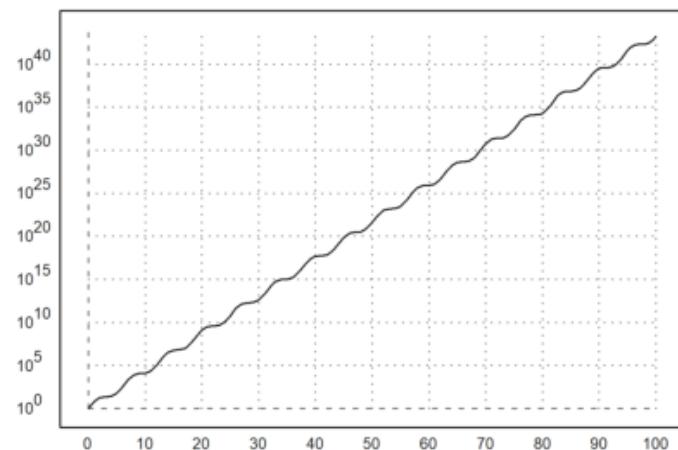
Plot logaritma dapat diplot baik menggunakan skala logaritma dalam y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma dalam x dan y dengan logplot=2, atau dalam x dengan logplot=3.

- logplot=1: y-logaritma
- logplot=2: x-y-logaritma
- logplot=3: x-logaritma

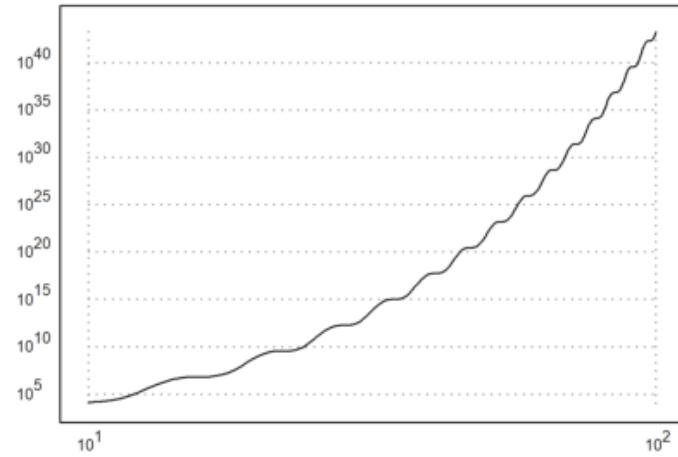
```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```



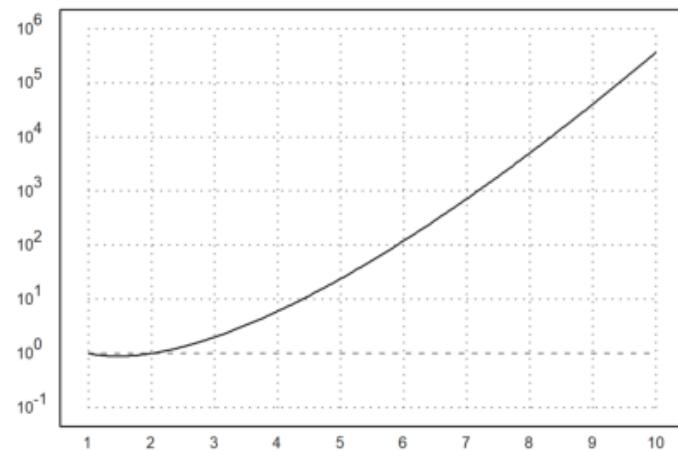
```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```



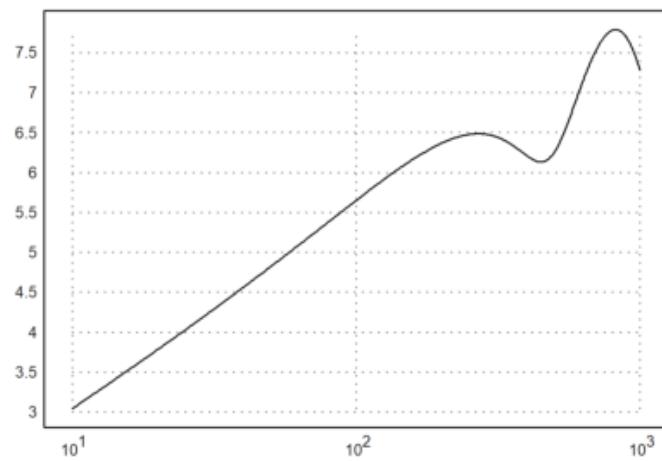
```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```



```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

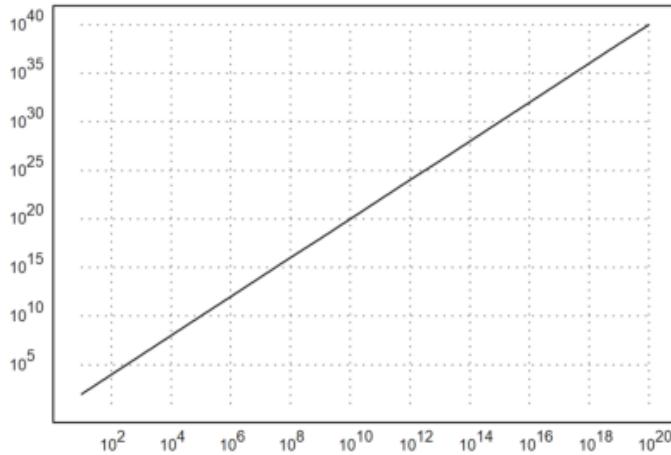


```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```



Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;  
>plot2d(x,y,logplot=2):
```



```
>
```

Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

```
function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n, ..  
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..  
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram, ..  
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour, ..  
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..  
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral, ..  
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)
```

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.

Parameters

x,y : equations, functions or data vectors
a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)
r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].

xmin,xmax : range of the parameter for curves
auto : Determine y-range automatically (default)
square : if true, try to keep square x-y-ranges
n : number of intervals (default is adaptive)
grid : 0 = no grid and labels,

```

1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks

```

frame : 0 = no frame

framecolor: color of the frame and the grid

margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot

color : Color of curves. If this is a vector of colors,

it will be used for each row of a matrix of plots. In the case of point plots, it should be a column vector. If a row vector or a full matrix of colors is used for point plots, it will be used for each data point.

thickness : line thickness for curves

This value can be smaller than 1 for very thin lines.

style : Plot style for lines, markers, and fills.

For points use

```

"[ ]", "<>", ". . .", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)

```

For lines use

```
"-", "--", "-.", ". . .", "-.-", "->"
```

For filled polygons or bar plots use

```
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/", "+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments

addpoints : if true, plots line segments and points

add : add the plot to the existing plot

user : enable user interaction for functions

delta : step size for user interaction

bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)

histogram : plots the frequencies of x in n subintervals

distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals

even : use inter values for automatic histograms.

steps : plots the function as a step function (steps=1,2)

adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)

level : plot level lines of an implicit function of two variables

outline : draws boundary of level ranges.

If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn in the color using the given fill style. If outline is true, it will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of f(x,y) between limits can be marked.

hue : add hue color to the level plot to indicate the function

value

contour : Use level plot with automatic levels

nc : number of automatic level lines

title : plot title (default "")

xl, yl : labels for the x- and y-axis

smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.

vertical :

Turns vertical labels on or off. This changes the global variable `verticallabels` locally for one plot. The value 1 sets only vertical text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.

filled : fill the plot of a curve

fillcolor : fill color for bar and filled curves

outline : boundary for filled polygons

logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,  
2 = logplot in xy,  
3 = logplot in x
```

own :

A string, which points to an own plot routine. With `>user`, you get the same user interaction as in `plot2d`. The range will be set before each call to your function.

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.

contourcolor : color of contour lines

contourwidth : width of contour lines

clipping : toggles the clipping (default is true)

title :

This can be used to describe the plot. The title will appear above the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with `xl="string"` or `yl="string"`. Other labels can be added with the functions `label()` or `labelbox()`. The title can be a unicode string or an image of a Latex formula.

cgrid :

Determines the number of grid lines for plots of complex grids. Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of subintervals). `cgrid` can be a vector `[cx, cy]`.

Overview

The function can plot

- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,

- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range

r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.

Note that adaptive plots are always computed element for element. If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x.

BAB 4

MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 3 DIMENSI (3D)

Menggambar Plot 3D dengan EMT

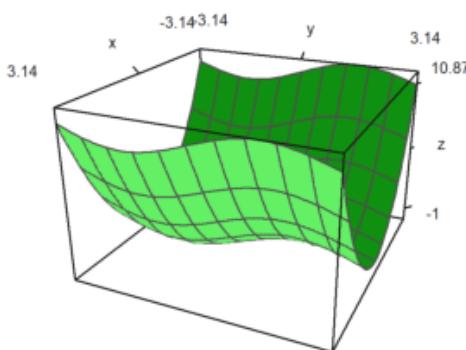
Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Standarnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal $x=y=z=0$, tetapi sudut= 0° terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan tinggi dapat diubah. Euler dapat merencanakan

- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- awan poin,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot di sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```



Fungsi Dua Variabel

Untuk grafik fungsi, gunakan

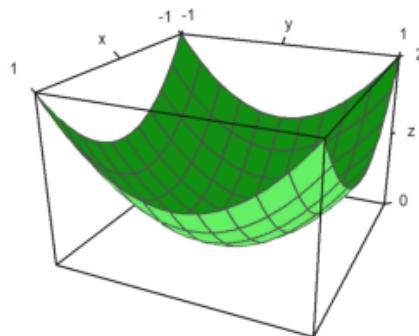
- ekspresi sederhana dalam x dan y ,
- nama fungsi dari dua variabel
- atau matriks data.

Standarnya adalah kotak kawat yang diisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah default interval grid adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default 40x40 persegi panjang untuk membangun permukaan. Ini bisa diubah.

- $n=40, n=[40,40]$: jumlah garis grid di setiap arah
- $grid=10, grid=[10,10]$: jumlah garis grid di setiap arah.

Kami menggunakan default $n=40$ dan $grid=10$.

```
>plot3d("x^2+y^2") :
```

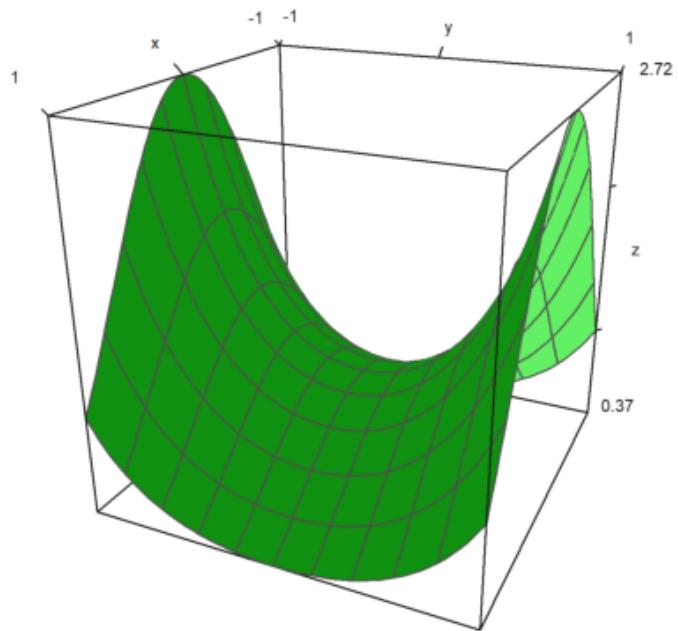


Interaksi pengguna dimungkinkan dengan >parameter pengguna. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: putar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l: beralih memutar sumber cahaya (lihat di bawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
> title="Turn with the vector keys (press return to finish)");
>insimg;
```

Turn with the vector keys (press return to finish)



Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan

- a,b: rentang-x
- c,d: rentang-y
- r: persegi simetris di sekitar (0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.

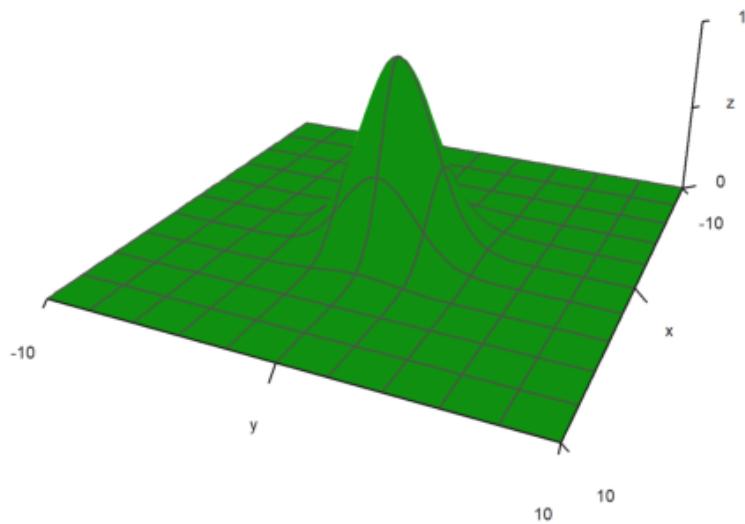
Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: skala ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale>).

skala: angka atau vektor 1x2 untuk skala ke arah x dan y.

bingkai: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
```



Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- jarak: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- sudut: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- tinggi: ketinggian tampilan dalam radian.

Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

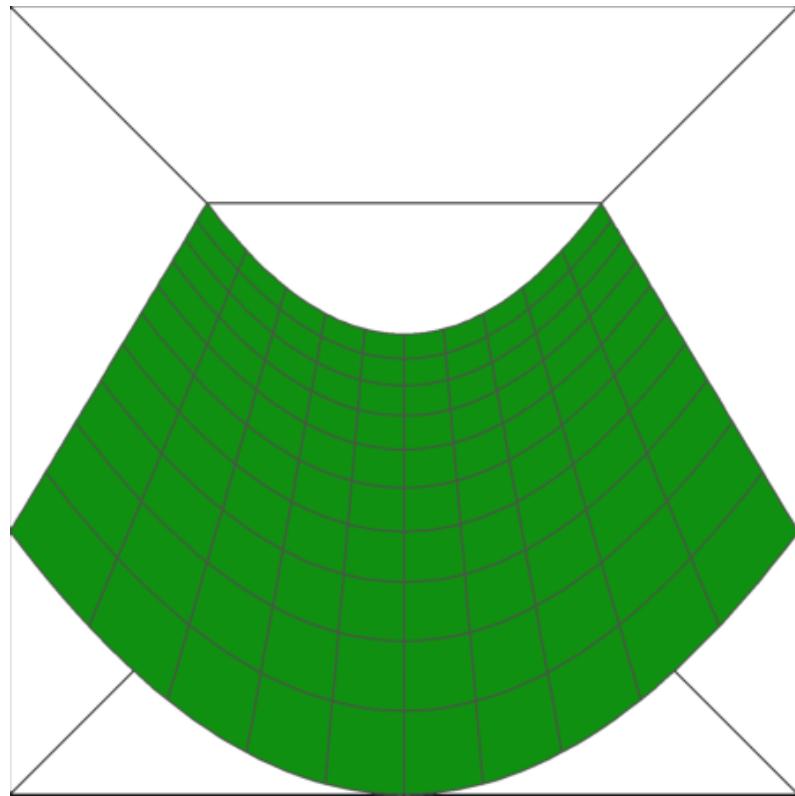
```
>view
```

```
[5, 2.6, 2, 0.4]
```

Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.

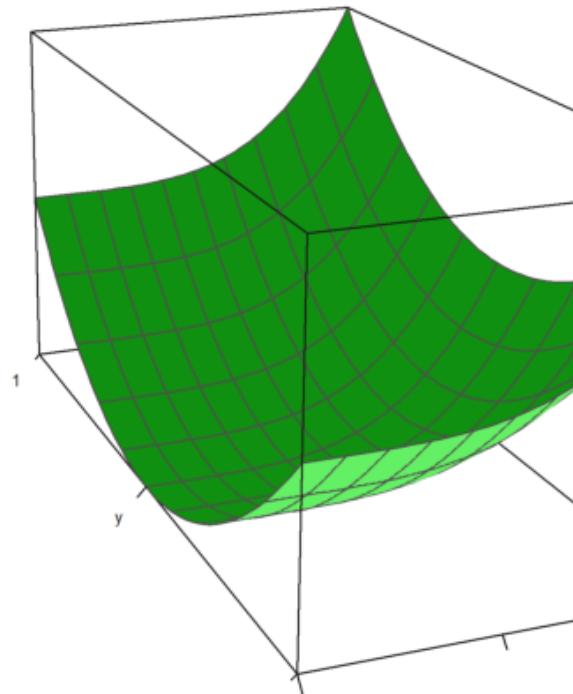
Dalam contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 terlihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y", distance=3, zoom=2, angle=0, height=0):
```



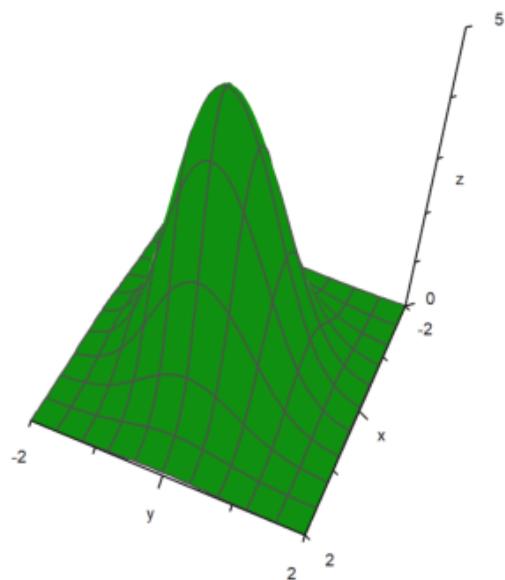
Plot terlihat selalu ke pusat kubus plot. Anda dapat memindahkan pusat dengan parameter tengah.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>  center=[0.4,0,0],zoom=5):
```



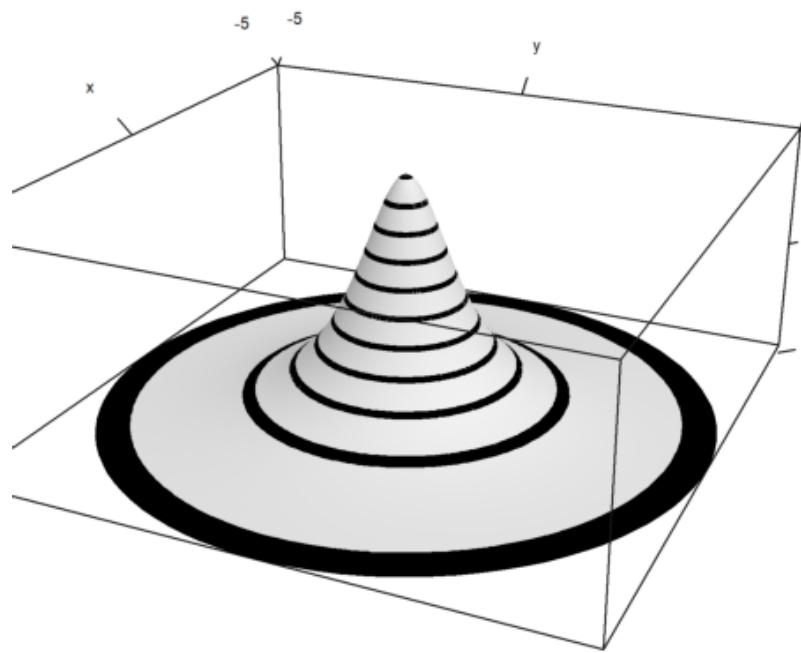
Plot diskalakan agar sesuai dengan kubus satuan untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung pada ukuran plot. Namun, label mengacu pada ukuran sebenarnya. Jika Anda mematikannya dengan `scale=false`, Anda perlu berhati-hati, bahwa plot masih cocok dengan jendela plot, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan pusat.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
> center=[0,0,-2],frame=3):
```

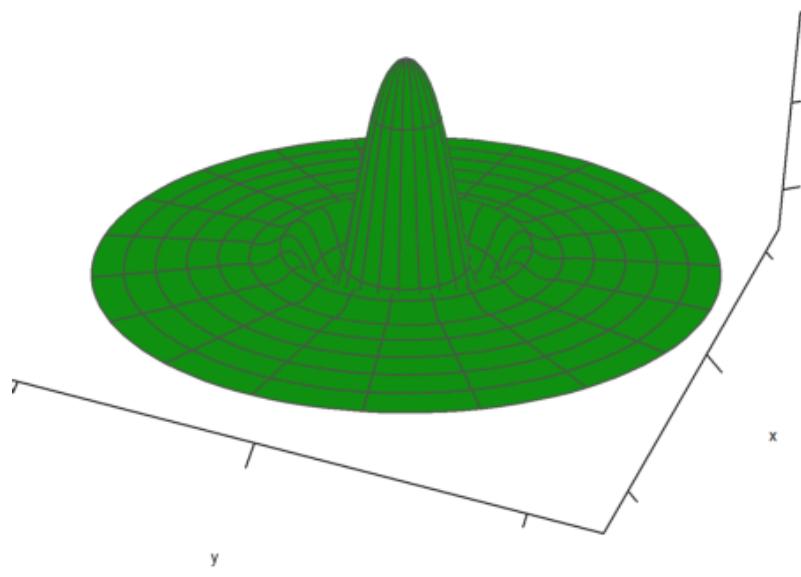


Sebuah plot kutub juga tersedia. Parameter `polar=true` menggambar plot polar. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skala sendiri. Jika tidak, fungsi diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):
```



```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=2pi,frame=3,zoom=4):
```

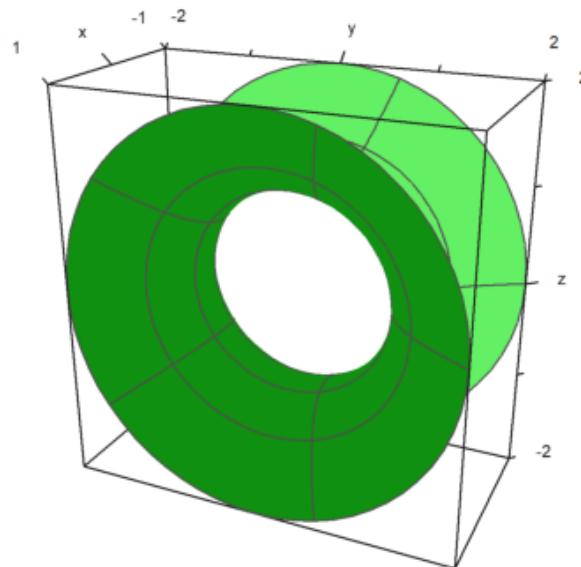


Rotasi parameter memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.

- rotate=1: Menggunakan sumbu x

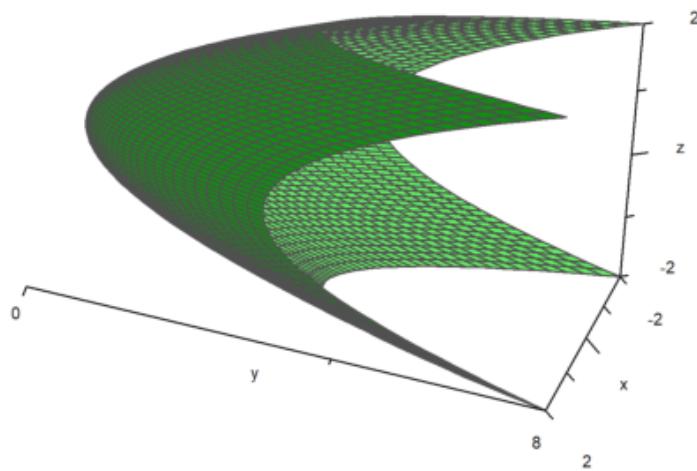
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```



Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x", "x^2+y^2", "y", r=2, zoom=3.5, frame=3):
```



Plot Kontur

Untuk plot, Euler menambahkan garis grid. Sebagai gantinya dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona berwarna spektral. Euler dapat menggambar tinggi fungsi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/sian.

->hue: Menyalakan bayangan cahaya alih-alih kabel.

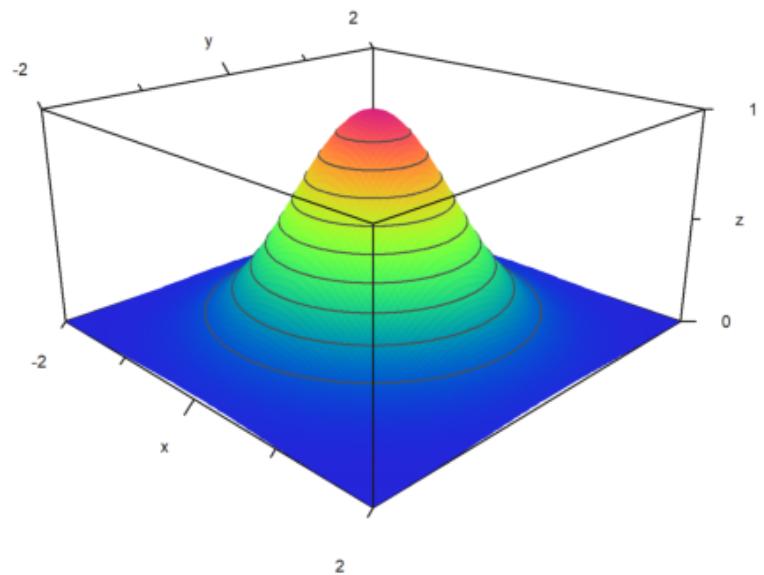
->kontur: Memplot garis kontur otomatis pada plot.

- level=... (atau level): Sebuah vektor nilai untuk garis kontur.

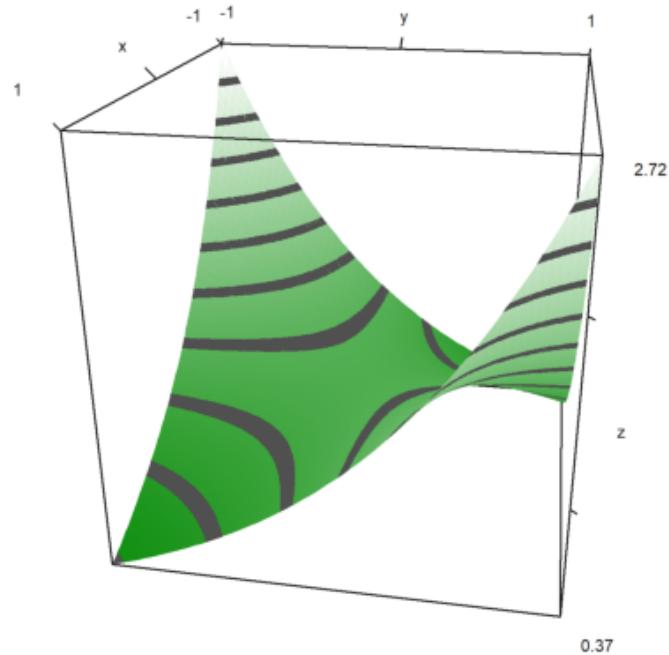
Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus untuk 100x100 poin, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°) :
```



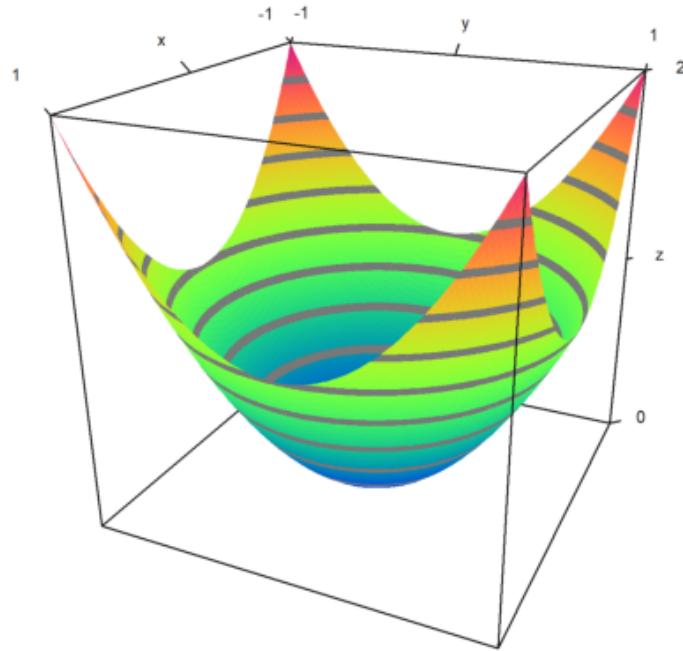
```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```



Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi rentang warna spektral juga tersedia.
 - >spektral: Menggunakan skema spektral default
 - color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

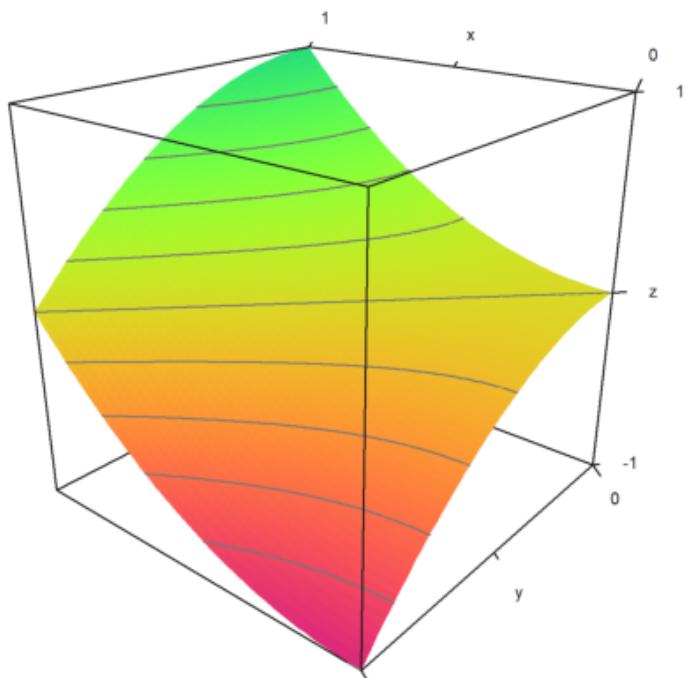
Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```



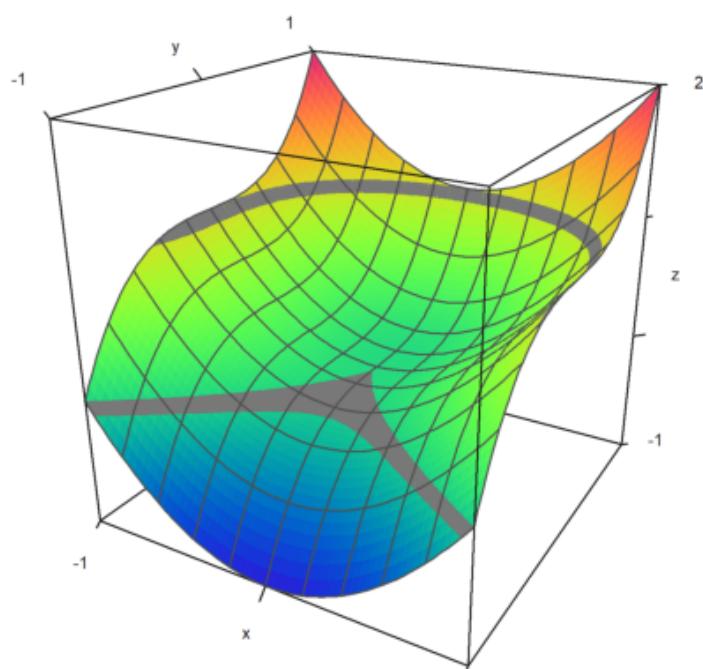
Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

```
>plot3d("x^2-y^2",0,1,0,1,angle=220°,level=-1:0.2:1,color=redgreen):
```



Dalam plot berikut, kami menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.
Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
> >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

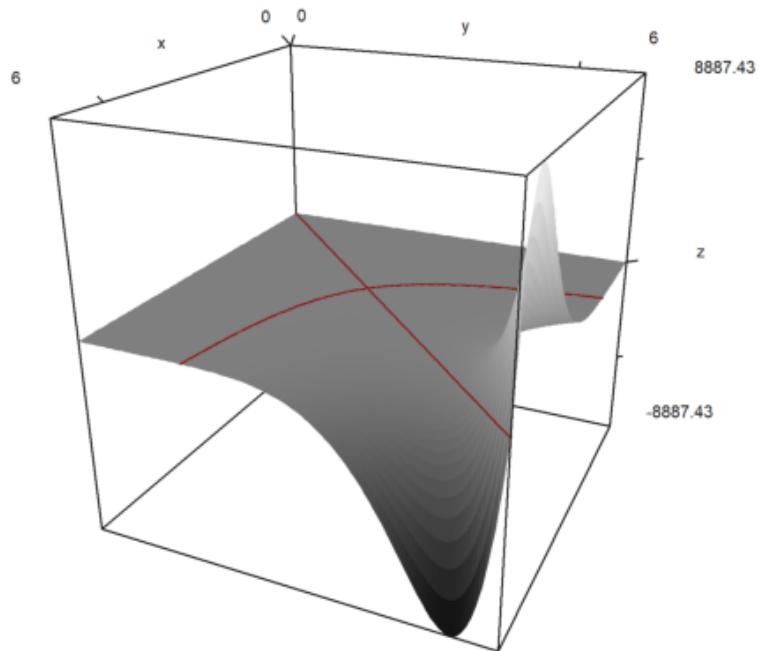


Dalam contoh berikut, kami memplot himpunan, di mana

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

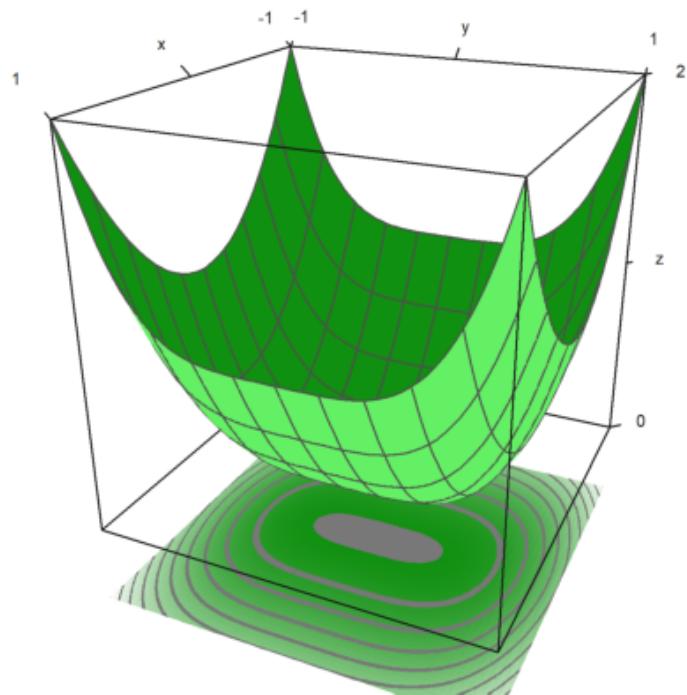
Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x", level=0, a=0, b=6, c=0, d=6, contourcolor=red, n=100):
```



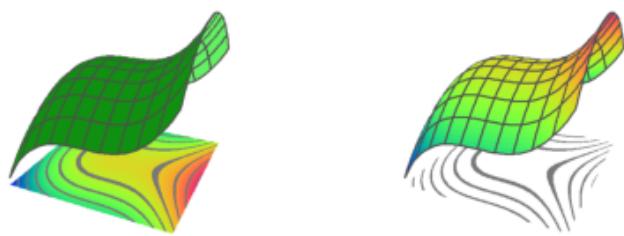
Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4", >cp, cpcolor=green, cpdelta=0.2):
```



Berikut adalah beberapa gaya lagi. Kami selalu mematikan frame, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan grid.

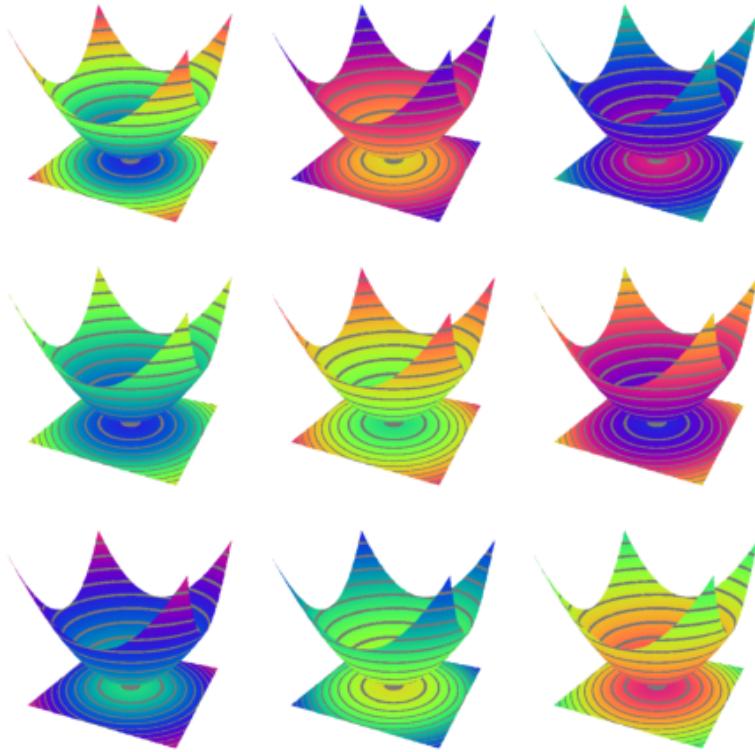
```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1); ...
> plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2); ...
> plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3); ...
> plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4); ...
> plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```



Ada beberapa skema spektral lainnya, bernomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai

- spektral: untuk rentang dari biru ke merah
- putih: untuk rentang yang lebih redup
- kuningbiru, ungu hijau, birukuning, hijaumerah
- biru kuning, hijau ungu, kuning biru, merah hijau

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9; ...
> figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4); ...
>end; ...
>figure(0);
```

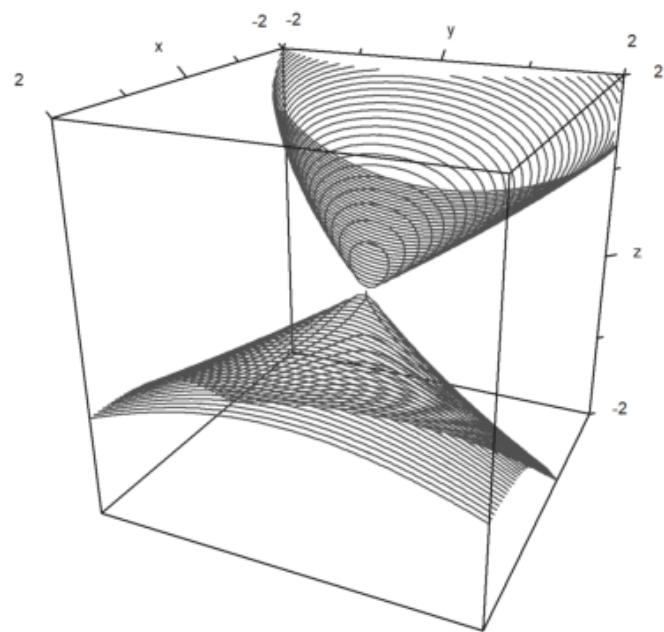


Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol cursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- cahaya: arah untuk cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda perlu Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true, light=[0,1,1], amb=0, user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)");
>insimg;
```



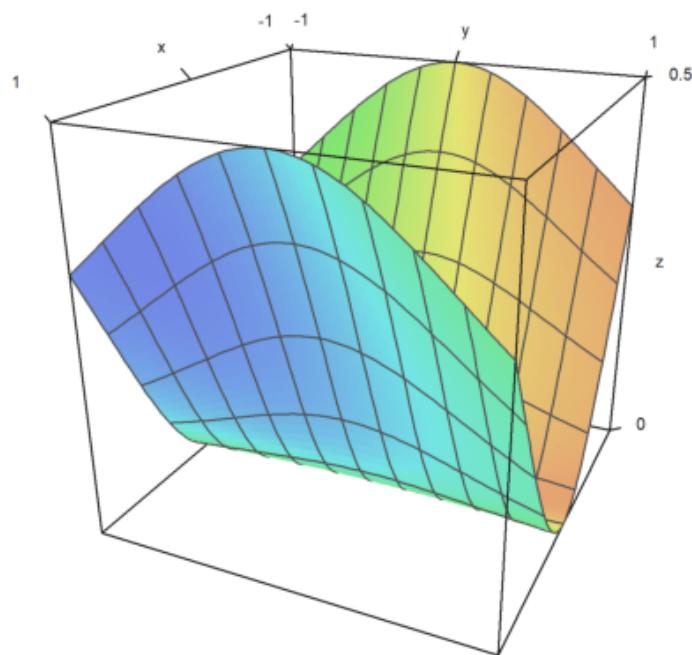
Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
> zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```



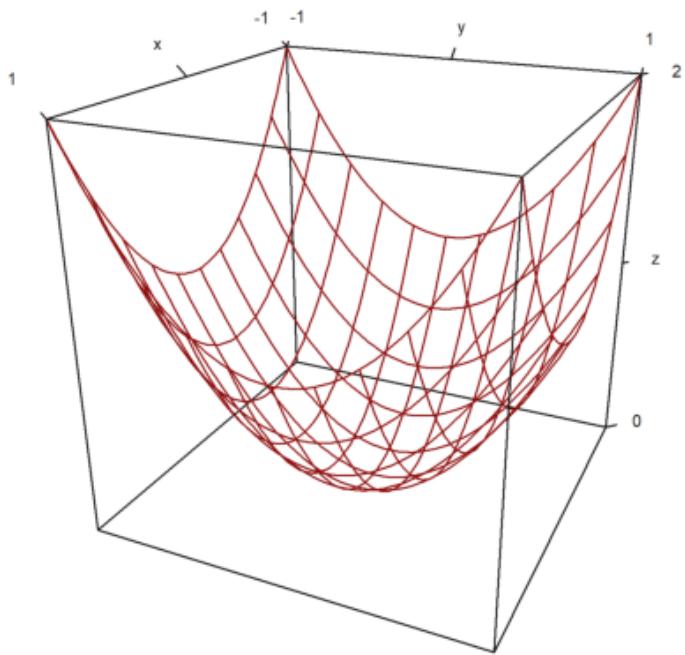
Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```



Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```



Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d termasuk plot implisit. Plot-plot ini menunjukkan himpunan nol dari suatu fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

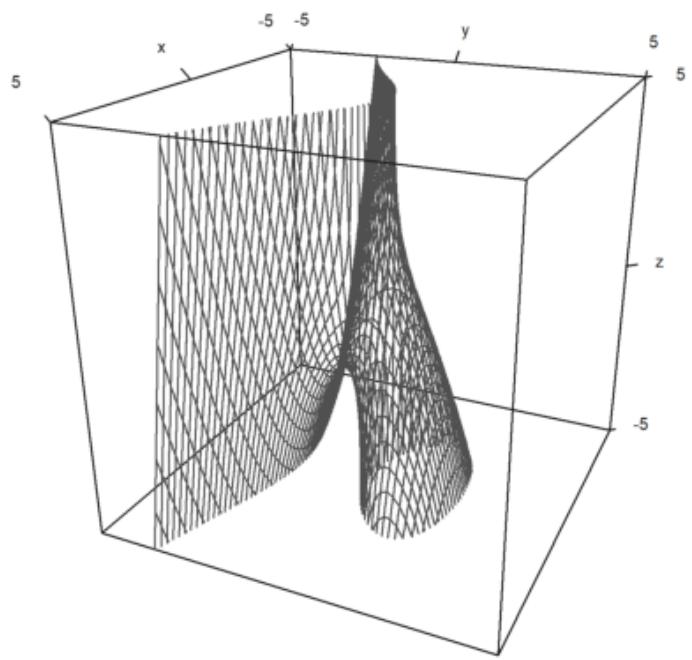
dapat divisualisasikan dalam potongan sejajar dengan bidang x-y-, x-z- dan y-z.

- implicit=1: potong sejajar dengan bidang y-z
- implicit=2: potong sejajar dengan bidang x-z
- implicit=4: potong sejajar dengan bidang x-y

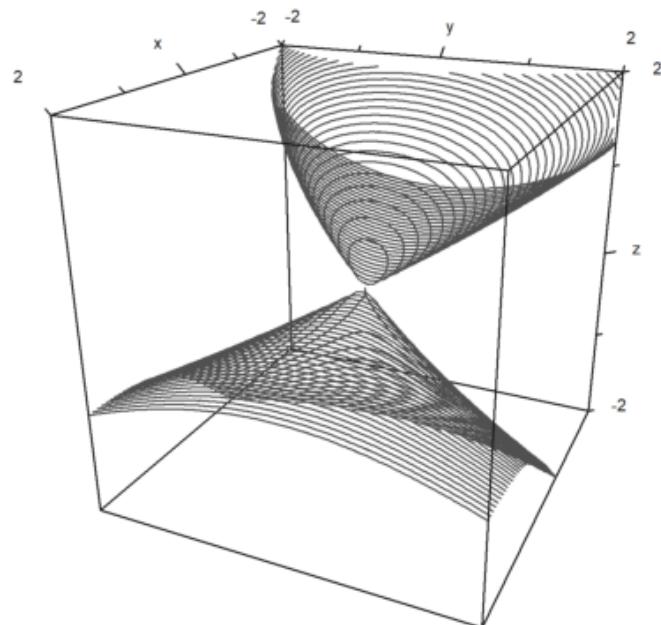
Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda suka. Dalam contoh kita plot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1", r=5, implicit=3):
```



```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```



Merencanakan Data 3D

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_z(x,y)$.

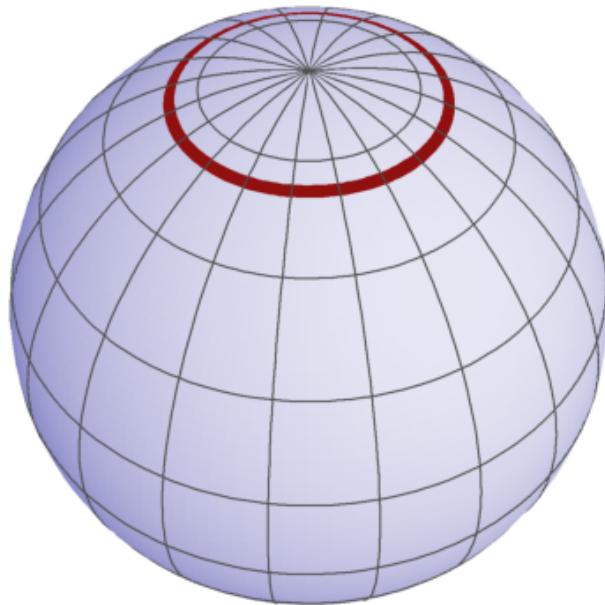
$$\gamma(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) melalui sebuah kotak persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

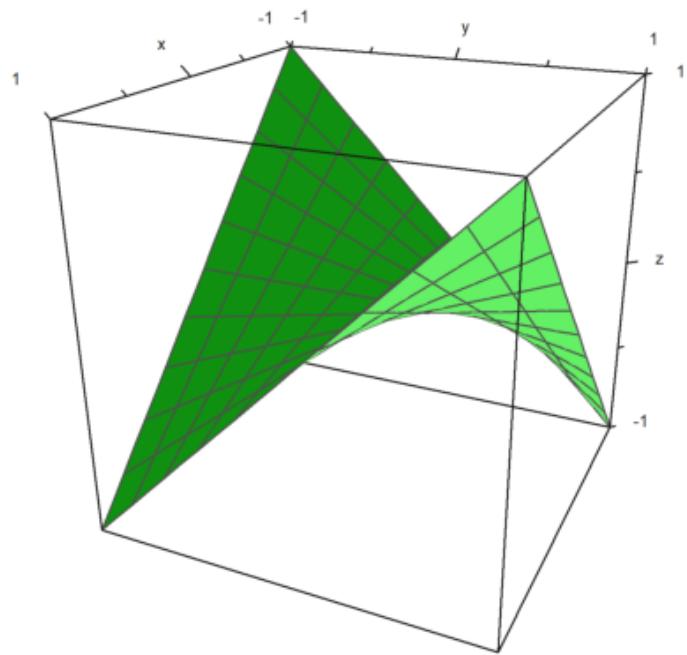
Dalam contoh berikut, kami menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```



Berikut adalah contoh, yang merupakan grafik fungsi.

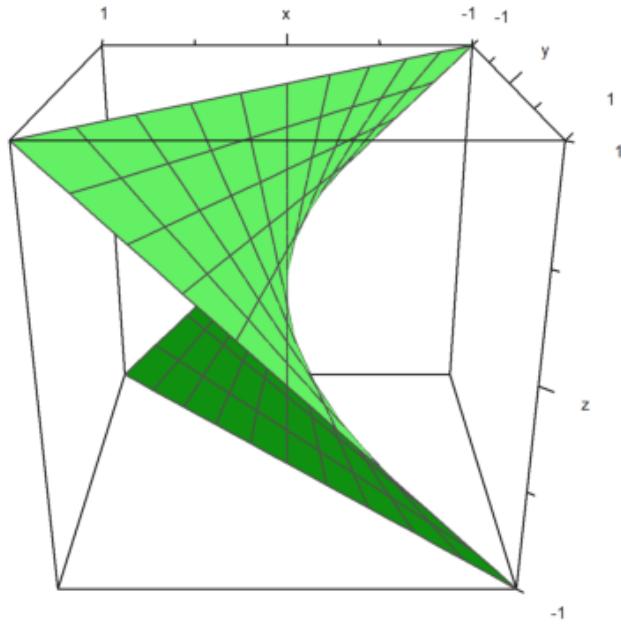
```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Namun, kita bisa membuat segala macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama dengan fungsi

$$x = yz$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```



Dengan lebih banyak usaha, kami dapat menghasilkan banyak permukaan.

Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t, s) = (\cos(t) \cos(s), \sin(t) \sin(s), \cos(s))$$

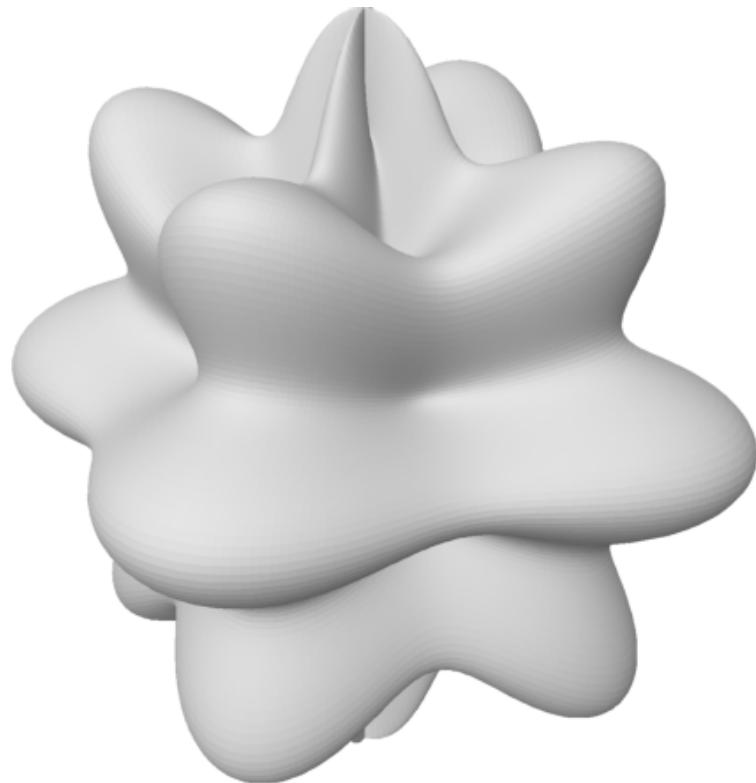
dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kami mendistorsi ini dengan sebuah faktor

$$d(t, s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$

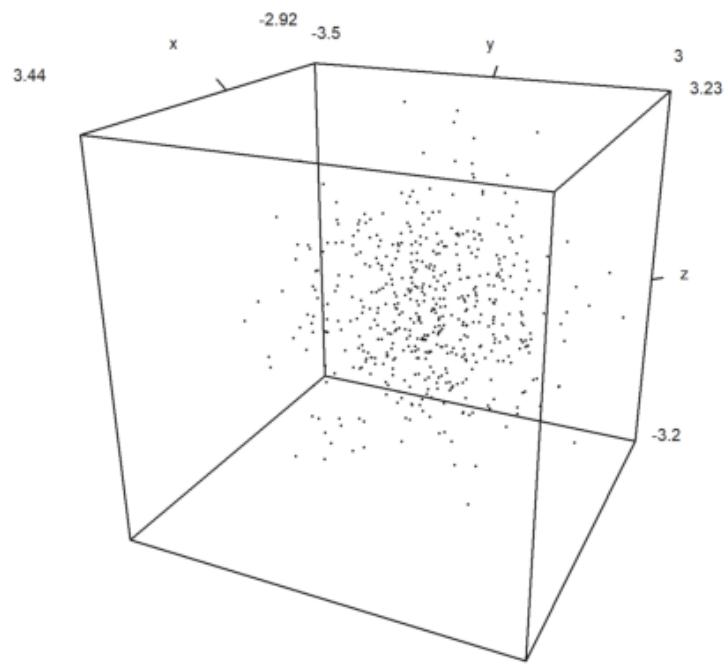
```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
> light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```



Tentu saja, titik cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.

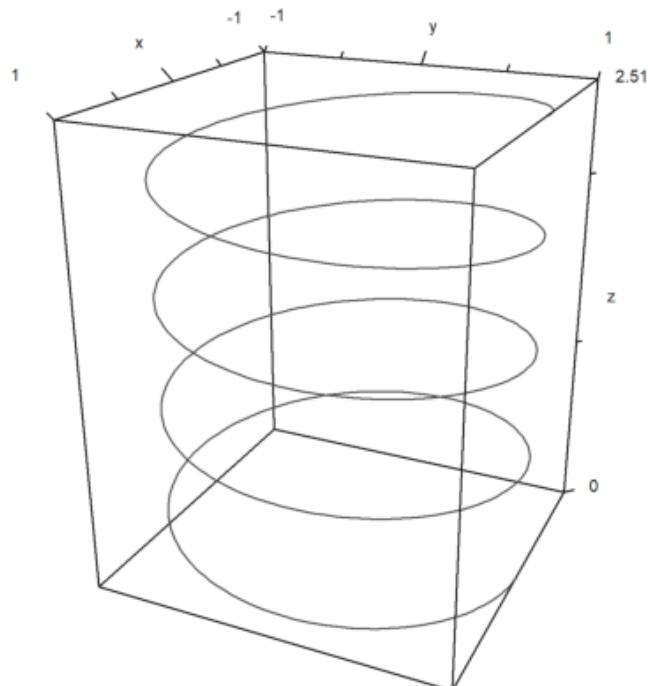
Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500; ...
> plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

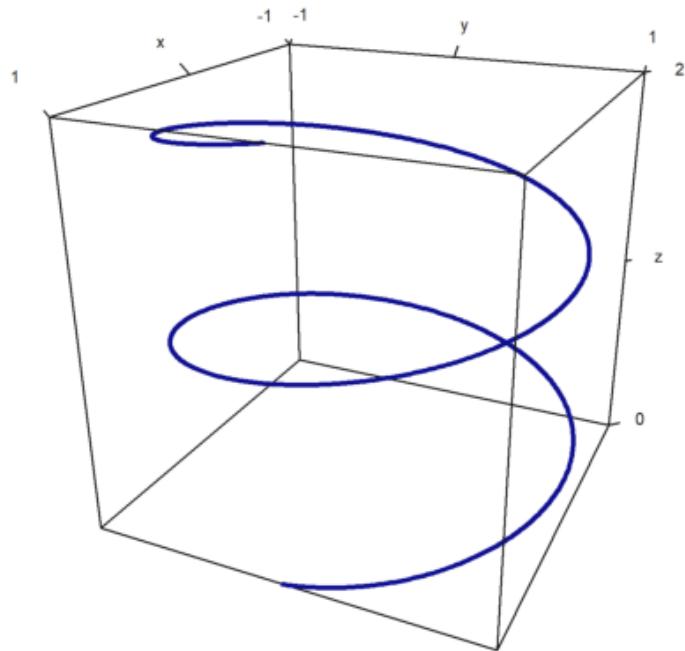


Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung titik-titik kurva. Untuk kurva di pesawat kami menggunakan urutan koordinat dan parameter wire=true

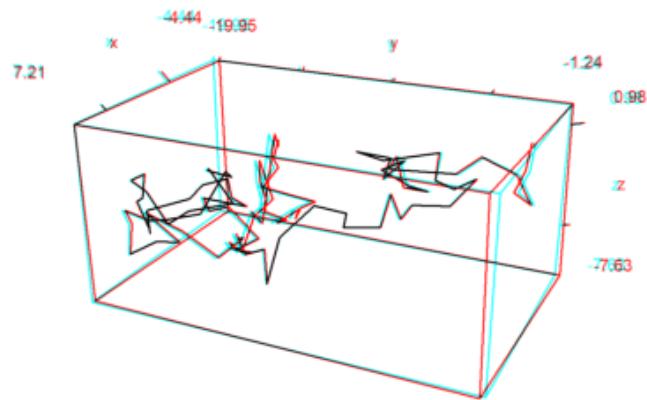
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```



```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>lineWidth=3, wirecolor=blue):
```

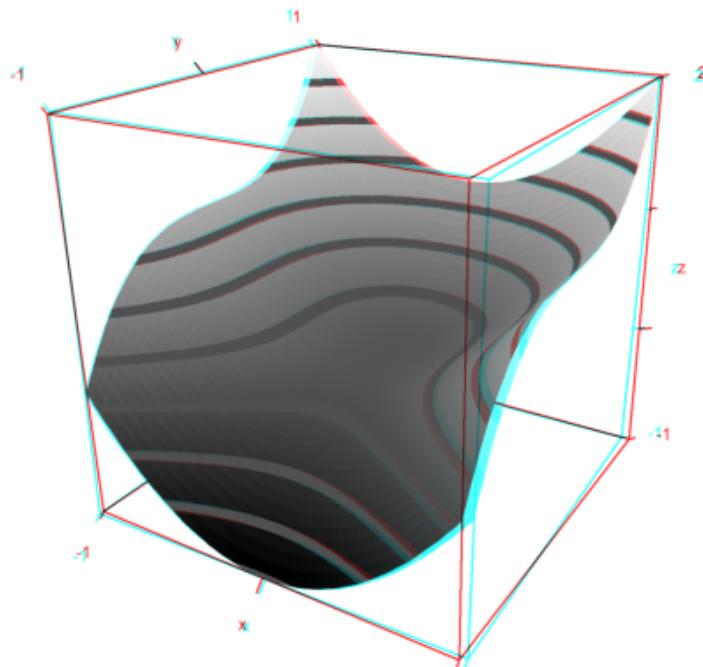


```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```



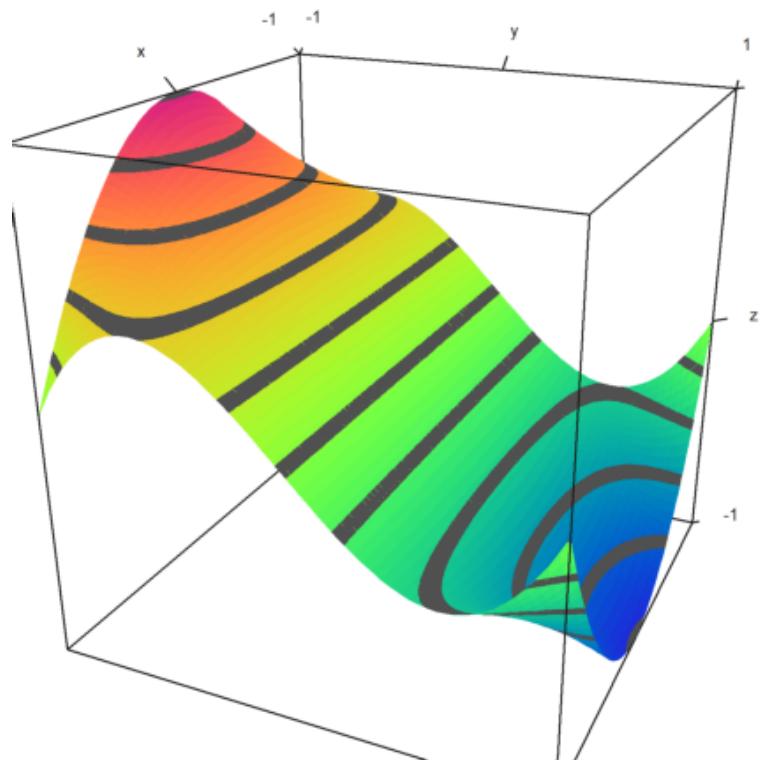
EMT juga dapat memplot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata merah/sian.

```
> plot3d("x^2+y^3", >anaglyph, >contour, angle=30°) :
```



Seringkali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsi.

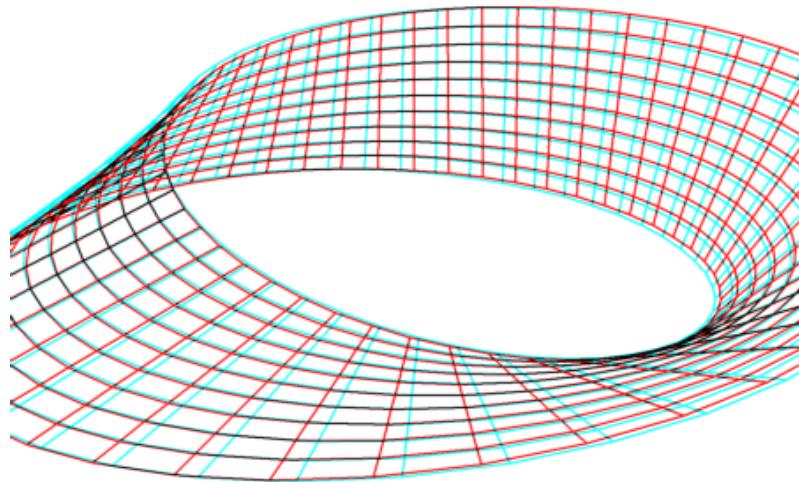
```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2) :
```



Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, ketika parameternya adalah nilai x-, y-, dan z dari gambar kotak persegi panjang dalam ruang.

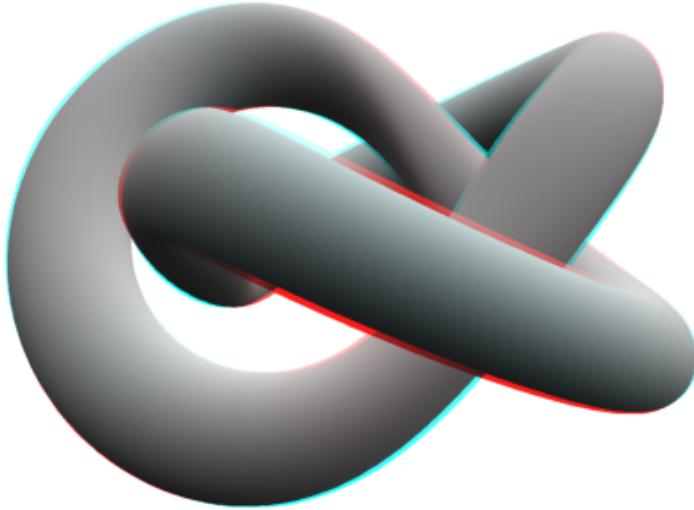
Untuk demo berikut, kami mengatur parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari ini.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3) :
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/sian.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)'; ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```



Plot Statistik

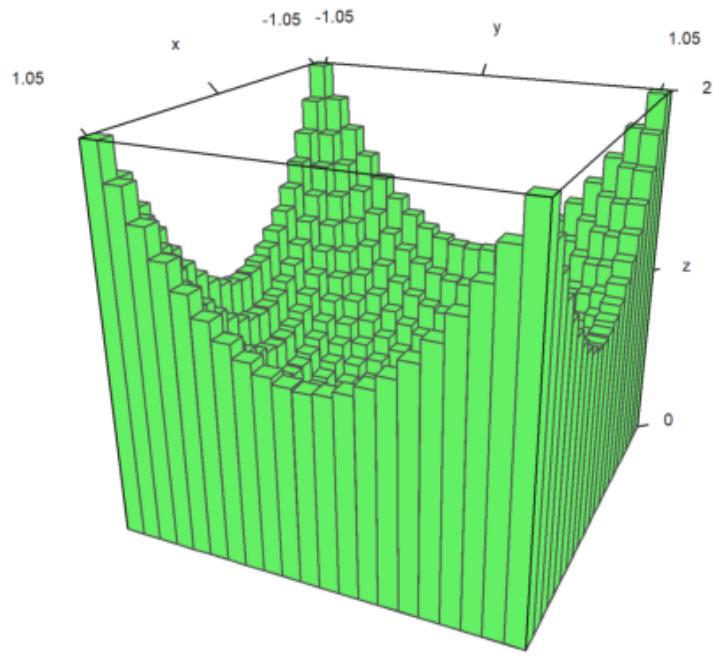
Plot bar juga dimungkinkan. Untuk ini, kita harus menyediakan

- x: vektor baris dengan $n+1$ elemen
- y: vektor kolom dengan $n+1$ elemen
- z: matriks nilai nxn .

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

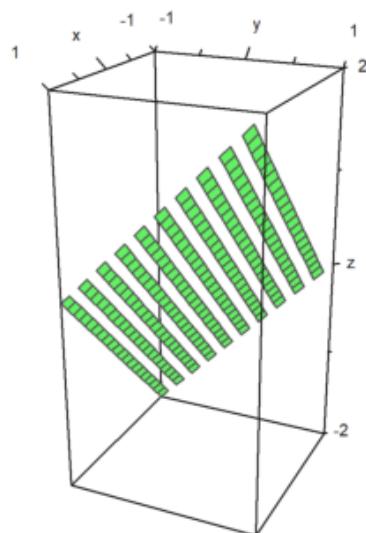
Dalam contoh, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true) :
```



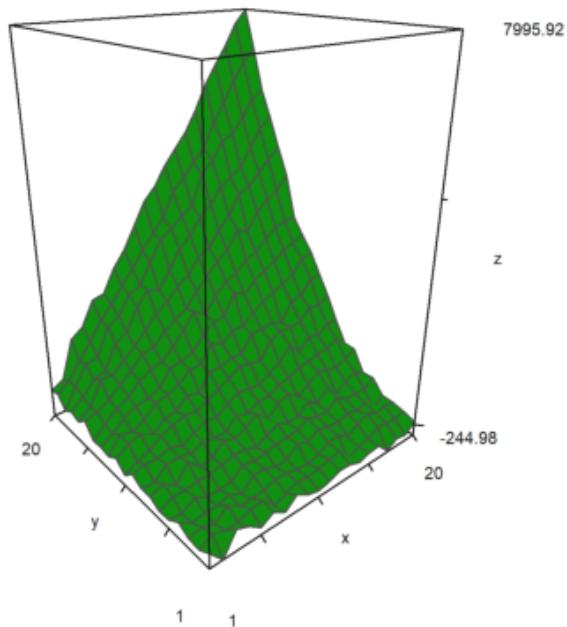
Dimungkinkan untuk membagi plot permukaan menjadi dua atau lebih bagian.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20);
```

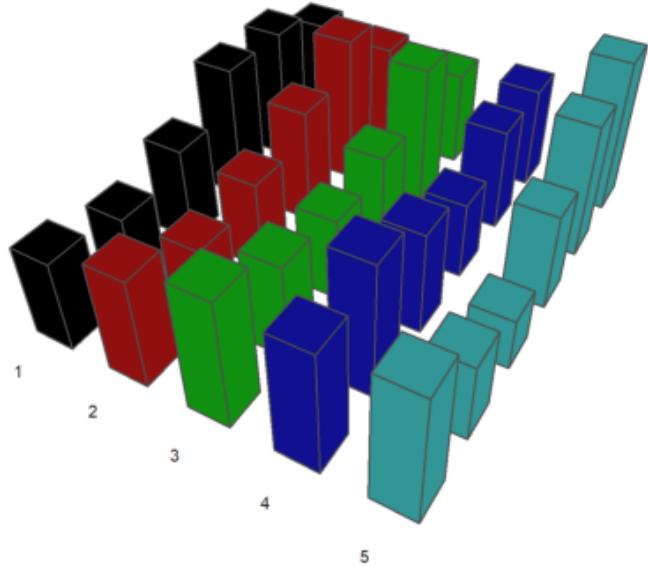


Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan scale(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individu yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
```

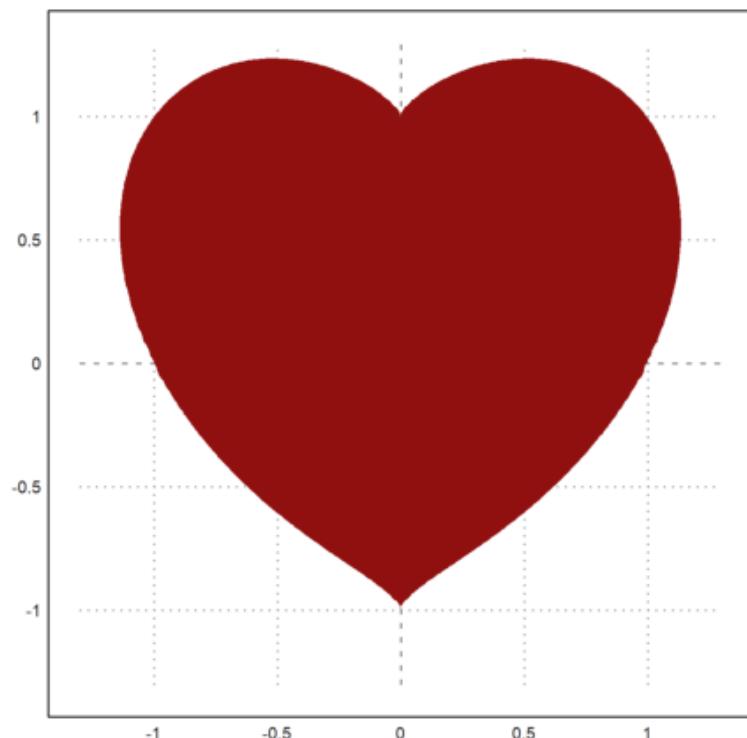


```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```



Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```



```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$(y^2 + x^2 - 1)^3 - x^2 y^3$$

Kami ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Berikut adalah ungkapan, yang mendefinisikan hati:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 \cdot y^3.$$

Selanjutnya kita atur

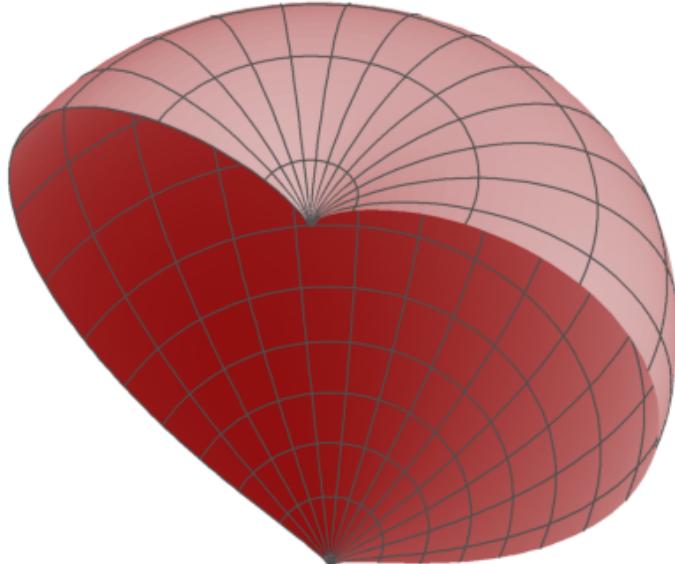
$$x = r \cos(a), \quad y = r \sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$(r^2 - 1)^3 + \frac{(\sin(5a) - \sin(3a) - 2 \sin a) r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

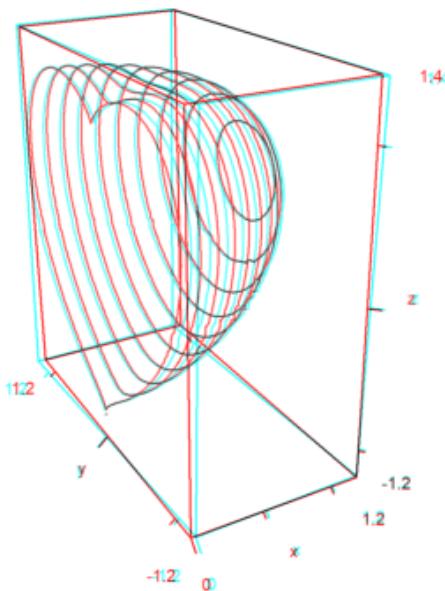
```
>function map f(a) := bisect("fr", 0, 2; a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t); ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0.7,grid=12,height=50°):
```



Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
r=x^2+y^2;
return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):
```



Plot 3D Khusus

Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda suka. Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan paraboloid dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
y=0:0.01:1; x=(0.1:0.01:1)';
plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ...
hues=0.5,>contour,color=orange);
h=holding(1);
```

```

plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,>frame,>contour,>hue);
holding(h);
endfunction

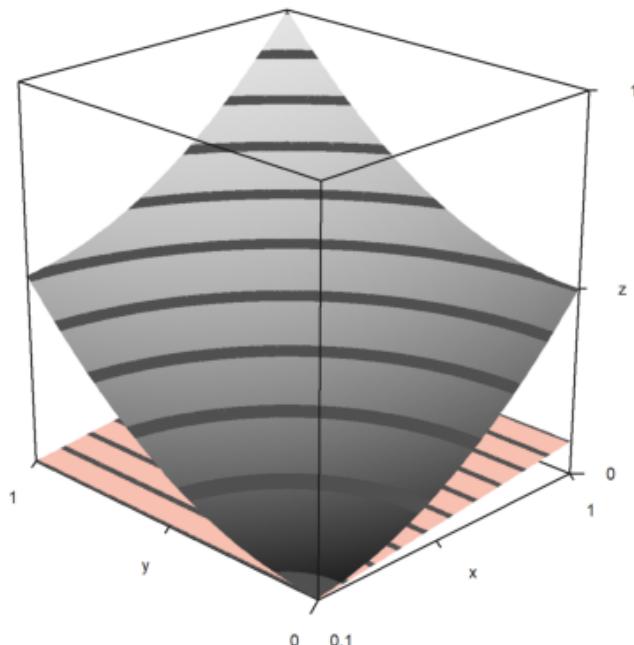
```

Sekarang framedplot() menyediakan frame, dan mengatur tampilan.

```

>framedplot("myplot", [0.1,1,0,1,0,1], angle=-45°, ...
> center=[0,0,-0.7], zoom=6):

```



Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() menyetel jendela ke fullwindow() secara default, tetapi plotcontourplane() mengasumsikan itu.

```

>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...

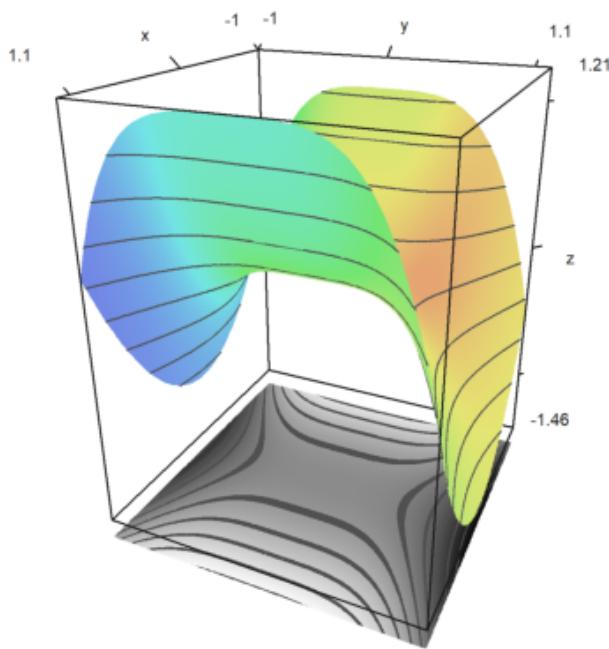
```

```

zoom(2);
wi=fullwindow();
plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale>);
plot3d(x,y,z,>hue,<scale>,>add,color=white,level="thin");
window(wi);
reset();
endfunction

```

```
>myplot(x,y,z):
```



Animasi

Euler dapat menggunakan frame untuk menghitung animasi terlebih dahulu.

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah `rotate`. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi memanggil `addpage()` untuk setiap plot baru. Akhirnya itu menjawai plot. Silakan pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot();
```

Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler `povray.e`, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari <http://www.povray.org/>, dan meletakkan sub-direktori "bin" dari Povray ke jalur lingkungan, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan path lengkap yang menunjuk ke "pvengine.exe".

Antarmuka Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah `current.pov`, dan direktori default adalah `eulerhome()`, biasanya `c:\Users\Username\Euler`. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan `povclear()`.

Fungsi `pov3d` memiliki semangat yang sama dengan `plot3d`. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi $f(x,y)$, atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.

Selain `pov3d()`, ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan `povstart()`. Kemudian gunakan `writeln(...)` untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan `povend()`. Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan x,y,z sumbu dalam arti tangan kanan.

Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori bin Povray ada di jalur. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

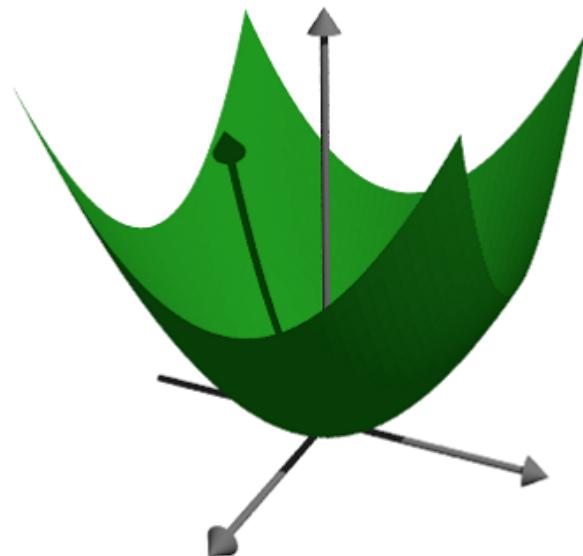
```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe

Untuk kesan pertama, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.

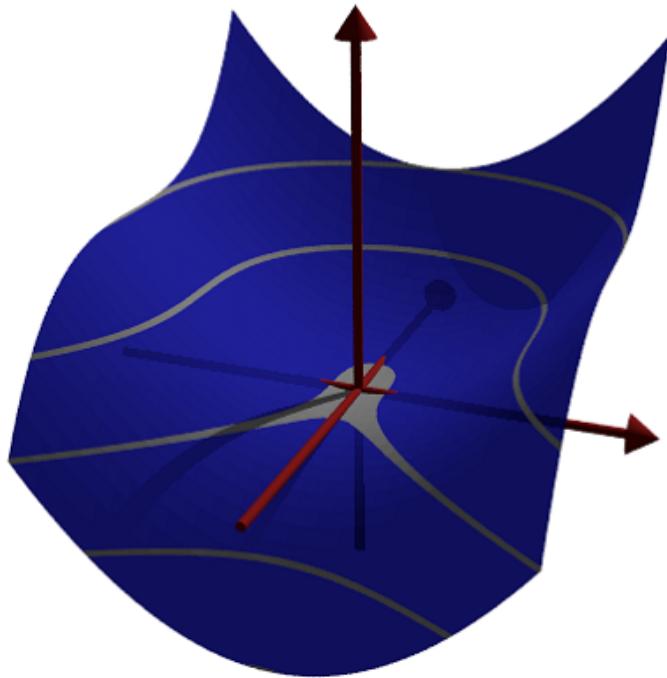
Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe untuk dijalankan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengakui dialog awal Povray.

```
>pov3d ("x^2+y^2", zoom=3);
```



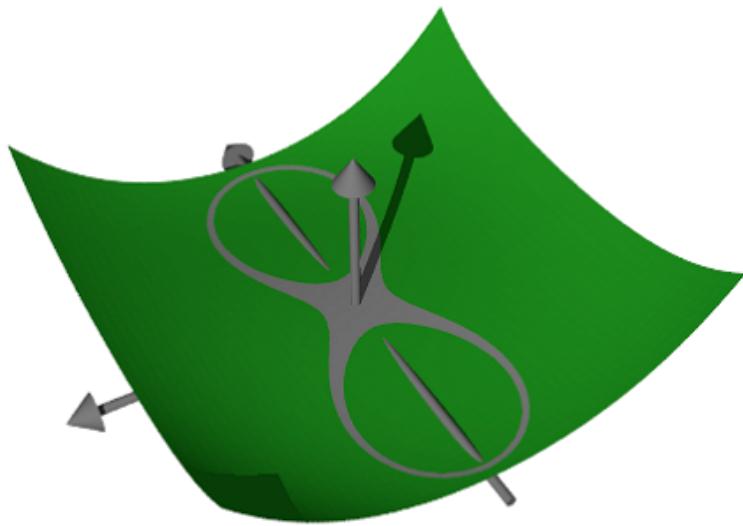
Kita dapat membuat fungsi menjadi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya. Kami juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=20°, ...
> look=povlook(blue,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```



Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi dengan tangan. Kami memplot himpunan titik di bidang kompleks, di mana produk dari jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=1.5, ...
> angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, ...
> <fscale,zoom=3.8);
```



Merencanakan dengan Koordinat

Alih-alih fungsi, kita dapat memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

Dalam contoh kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

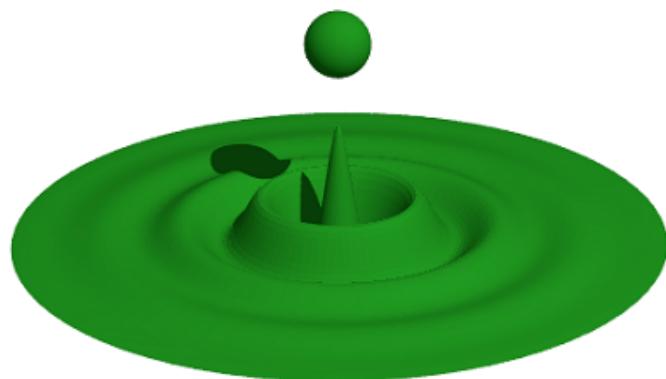
```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);
```



Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3; ...
>pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(green)), ...
> w=500,h=300);
```



Dengan metode bayangan canggih dari Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayang-bayang triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ x & y \end{matrix}$$

Persamaan permukaannya adalah $[x,y,Z]$. Kami menghitung dua turunan ke x dan y ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

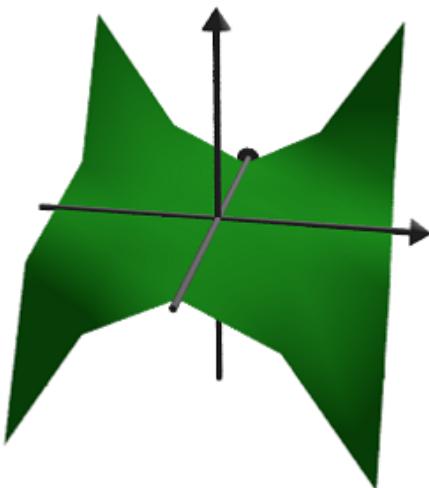
Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

$$[-2x^3y, -3x^2y^2, 1]$$

Kami hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';  
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...  
> xv=Nx(x,y), yv=Ny(x,y), zv=Nz(x,y), <shadow>;
```



Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang ditingkatkan dari ini dalam contoh.

See: Examples\Trefoil Knot | Trefoil Knot

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, ketiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.

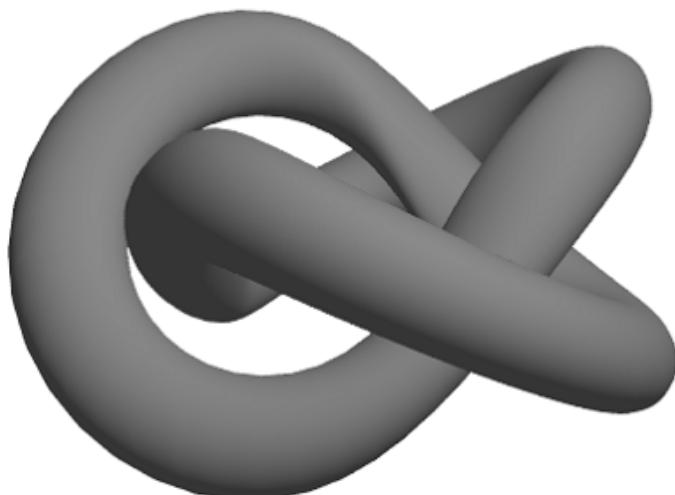
```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

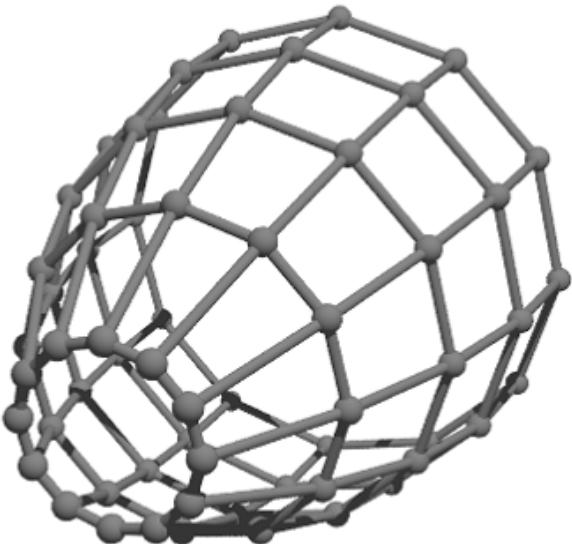
Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expression"(parameters). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
> <shadow,look=povlook(gray), ...
> xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```



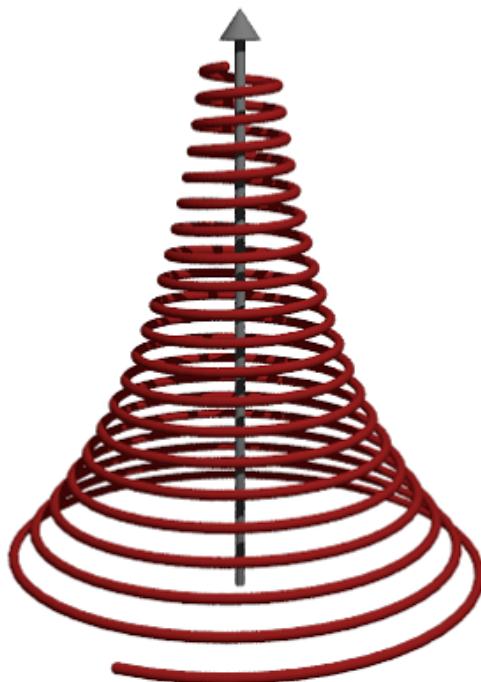
Kami juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```



Dengan povgrid(), kurva dimungkinkan.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```



Objek Povray

Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray. Kami memulai output dengan povstart().

```
>povstart (zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler. Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(green)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c1
```

```
cylinder { <-1,0,0>, <1,0,0>, 1
    texture { pigment { color rgb <0.564706,0.0627451,0.0627451> } }
    finish { ambient 0.2 }
}
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda. Itu dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna Euler default, atau menentukan warna kita sendiri. Kami juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

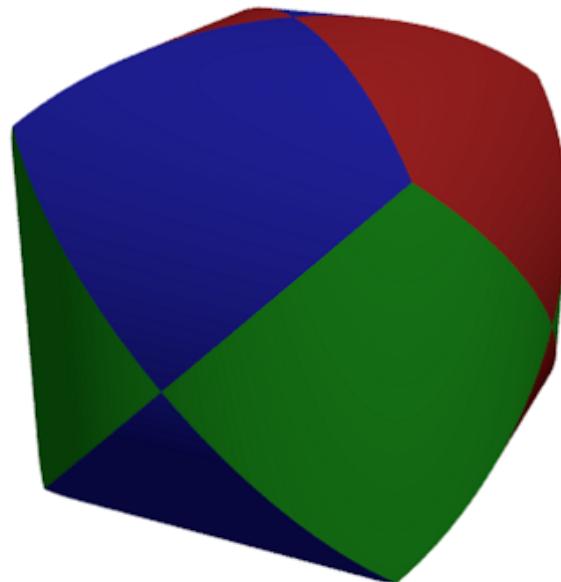
```
texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> } }
finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan, jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```



Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan, bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, yang berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```

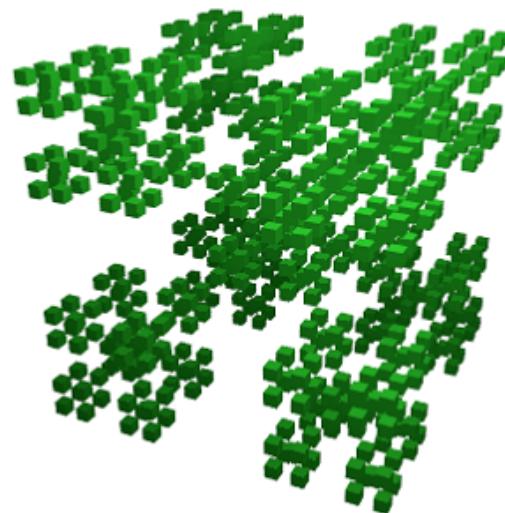
if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
else
  h=h/3;
  fractal(x,y,z,h,n-1);
  fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
  fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
  fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
  fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
  fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
  fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
  fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
  fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
endif;
endfunction

```

```

>povstart(fade=10,<shadow>;
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();

```



Perbedaan memungkinkan memotong satu objek dari yang lain. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kami mendefinisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi ditulis ke file segera.

Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube", povbox(-1,1));
```

Kita dapat menggunakan objek ini di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject ("mycube", povlook(red));
```

Kami menghasilkan kubus kedua, dan memutar dan menskalakannya sedikit.

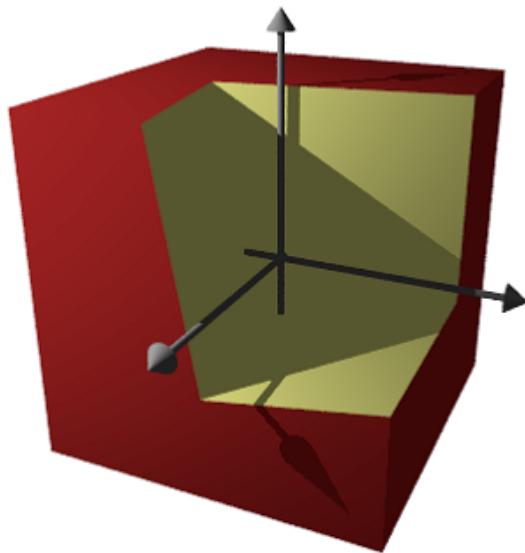
```
>c2=povobject ("mycube", povlook(yellow), translate=[1,1,1], ...
>    rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Kemudian kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```



Fungsi Implisit

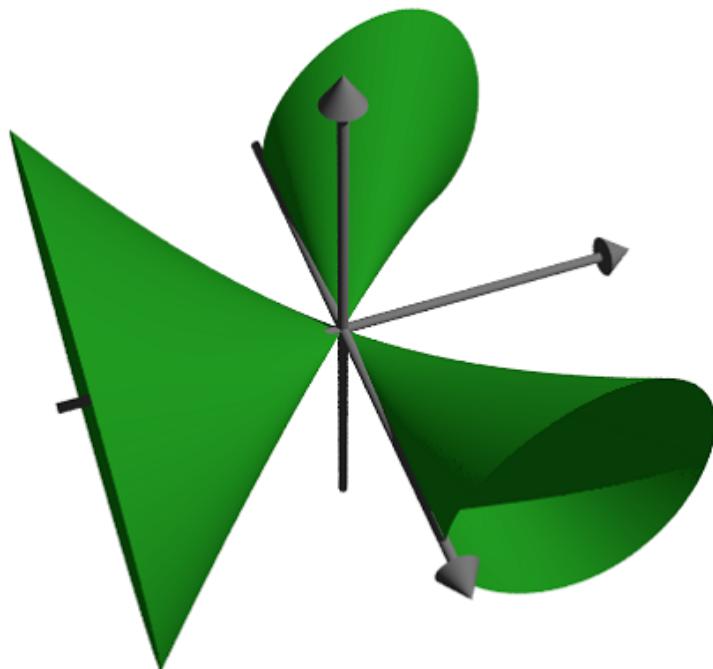
Povray dapat memplot himpunan di mana $f(x,y,z)=0$, seperti parameter implisit di plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan output dari ekspresi Maxima atau Euler.

```
>povstart (angle=70°, height=50°, zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaks yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface ("pow (x, 2) *y-pow (y, 3)-pow (z, 2)", povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```



Objek Jala

Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.

Kami ingin memaksimalkan xy di bawah kondisi $x+y=1$ dan menunjukkan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart (angle=-10°, center=[0.5, 0.5, 0.5], zoom=7);
```

Kami tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Itu dapat menerima vektor normal seperti pov3d().

Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menulisnya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;  
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...  
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaan dikurangi dua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tulis dua persimpangan.

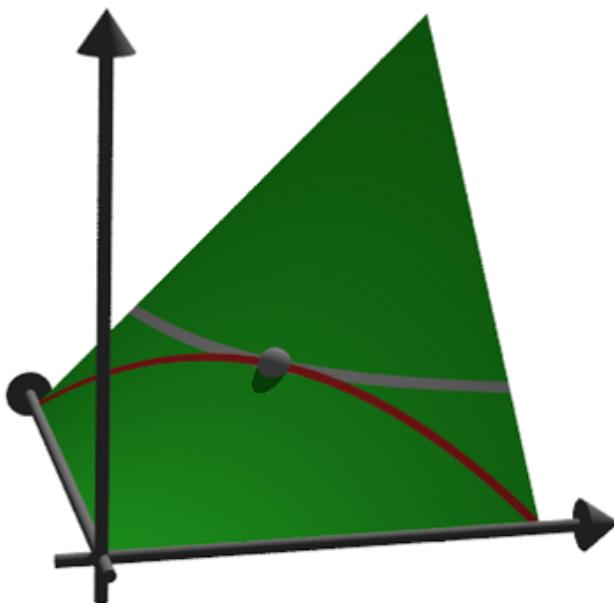
```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...  
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis titik maksimum.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesaikan.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...  
>povend();
```

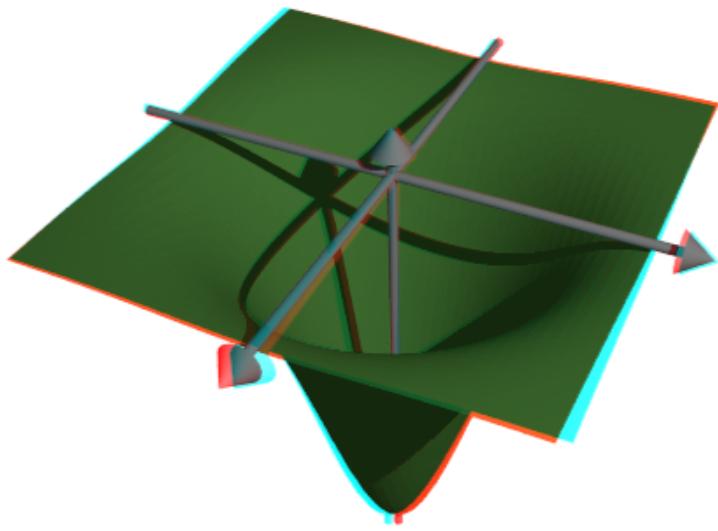


Anaglyph di Povray

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/sian, Povray harus berjalan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyp(). Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki sakelar sederhana untuk menghasilkan anaglyphs.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
> center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```

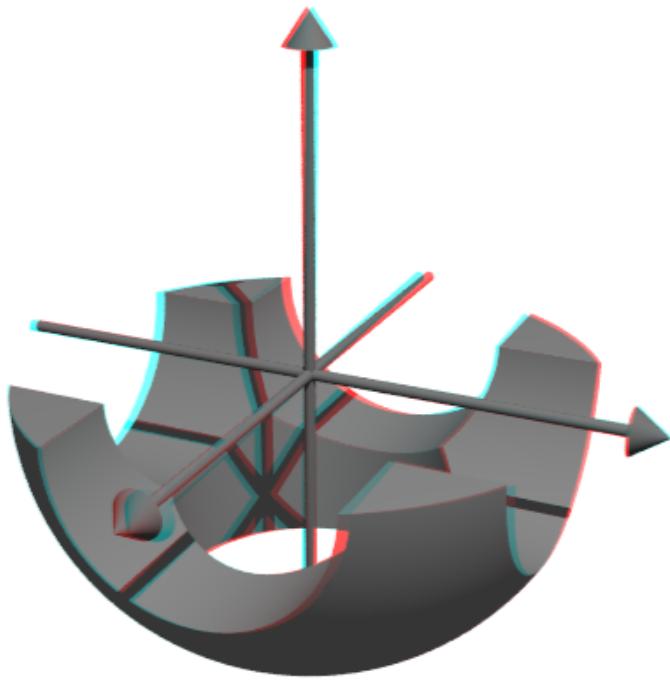


Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu menempatkan generasi adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...  
  
    s=povsphere(povc,1);  
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);  
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));  
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));  
    c=povbox([-1,-1,0],1);  
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);  
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));  
    writeln(obj);  
    writeAxes();  
endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart() dan povend() digabungkan.

```
>povanaglyph ("myscene", zoom=4.5);
```



Mendefinisikan Objek sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Tapi Anda tidak terbatas pada ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau objek yang sama sekali baru.

Kami mendemonstrasikan sebuah torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kami mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat di titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look "") ...
```

```
    return "torus {" + r1 + "," + r2 + look + " }";  
endfunction
```

Inilah torus pertama kami.

```
>t1=povdonat (0.8,0.2)
```

```
torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject (t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
object { torus {0.8,0.2}  
rotate 90 *x  
translate <0.8,0,0>  
}
```

Sekarang kita menempatkan objek-objek ini ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilan, kami menggunakan Phong Shading.

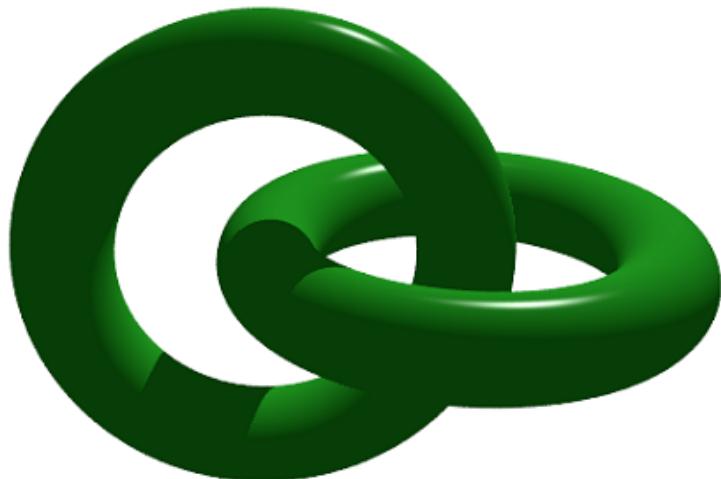
```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
>povend();
```

calls the Povray program. However, in case of errors, it does not display the error. You should therefore use

```
>povend(<exit);
```

if anything did not work. This will leave the Povray window open.

```
>povend(h=320,w=480);
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kami memecahkan

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \rightarrow \text{Max.}$$

dan menunjukkan titik layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini memiliki solusi sama sekali.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0,    1,    0.5]
```

Ya, sudah.

Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah pesawat

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane(a,b,look)
endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan persimpangan dari semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
endfunction
```

Kita sekarang dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

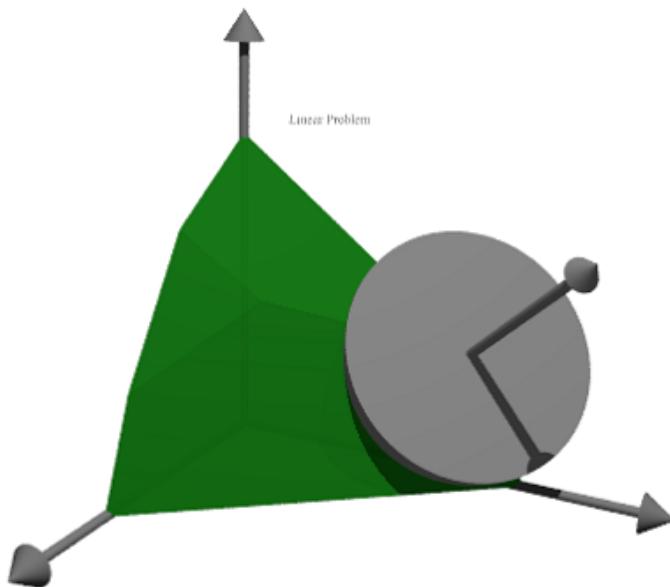
```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>    povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah yang optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarinya menuarut pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem", [0,0.2,1.3], size=0.05, rotate=125°)); ...
>povend();
```



Lebih Banyak Contoh

Anda dapat menemukan beberapa contoh lagi untuk Povray di Euler di file berikut.

See: Examples/Dandelin Spheres

See: Examples/Donut Math

See: Examples/Trefoil Knot

See: Examples/Optimization by Affine Scaling

Dandelin Spheres

```
>load geometry;  
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

[- a, 1, 0]

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[1,1])
```

[- 1, 1, 0]

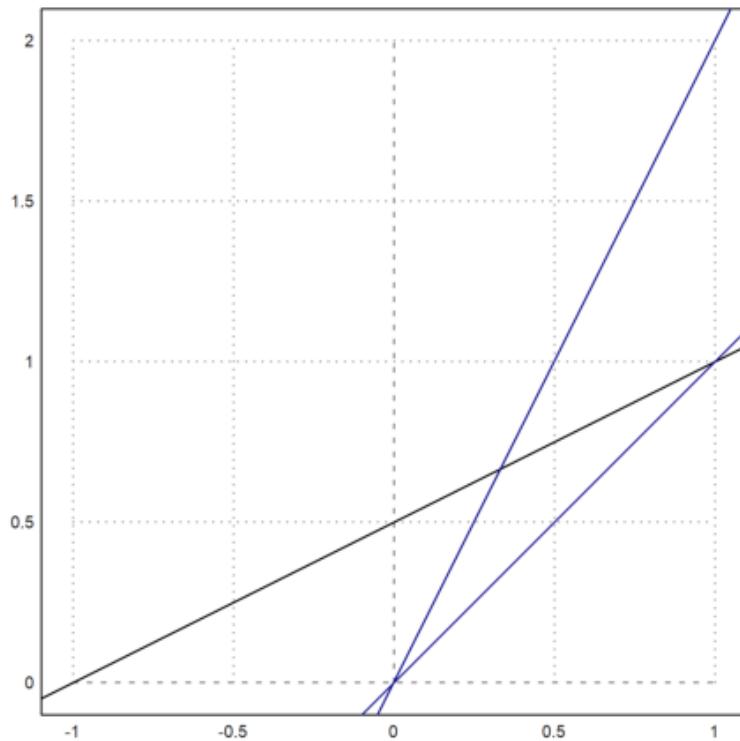
```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

```
>setPlotRange(-1,1,0,2)
```

```
[-1, 1, 0, 2]
```

```
>color(black); plotLine(g(), "")  
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(), ""), plotLine(g2(), ""):
```



```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1))
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 - u^2}{a^2 + 1} + \frac{a^2 - u^2}{(a^2 + 1)^2}\right)}$$

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g))
```

$$\sqrt{\left(\frac{u^2 + 2u^2 - (2u - 1)}{5} + \frac{(2u - 1)^2}{25}\right)}$$

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u)
```

$$u = \frac{-\sqrt{5} \sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1}, \quad u = \frac{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1}$$

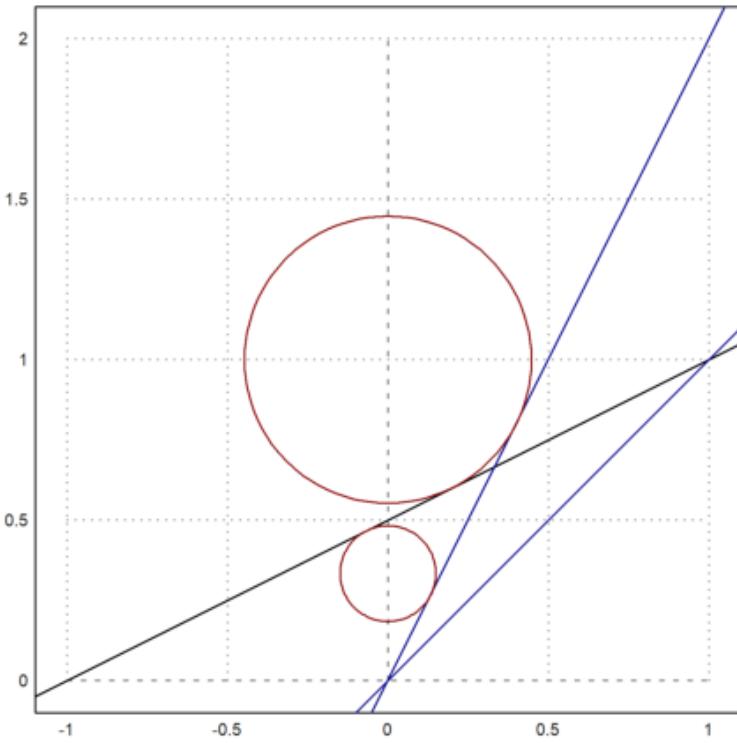
```
>u := sol()
```

[0.333333, 1]

```
>dd := d()
```

[0.149071, 0.447214]

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimsg;
```



Donat Math

```
>load povray;
>povstart(angle=0,height=40);
>function povdonat (r1,r2,look "") := "torus {" + r1 + "," + r2 + look + "}";
>writeln(povobject(povdonat(1,0.5),povlook(yellow,>phong),xrotate(90)));
>delafutpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe

```
>povend();
```

```
>function phi(x,t,z) &= [x*cos(t),x*sin(t),z]
```

[cos(t) x, sin(t) x, z]

```
>function phix(x,t,z) &= phi(x,t,z)[1];
>function phiy(x,t,z) &= phi(x,t,z)[2];
>function phiz(x,t,z) &= phi(x,t,z)[3];
```

```
>s=linspace(0,2pi,40); t=s';
>R=1; r=0.5;
>x=R+r*cos(s); y=t; z=r*sin(s);
>pov3d(x,y,z,zoom=4);
```

Function pov3d not found.
 Try list ... to find functions!
 Error in:
 pov3d(x,y,z,zoom=4); ...
 ^

```
>X=phix(x,y,z); Y=phiy(x,y,z); Z=phiz(x,y,z);
>pov3d(X,Y,Z,zoom=3.8);
```

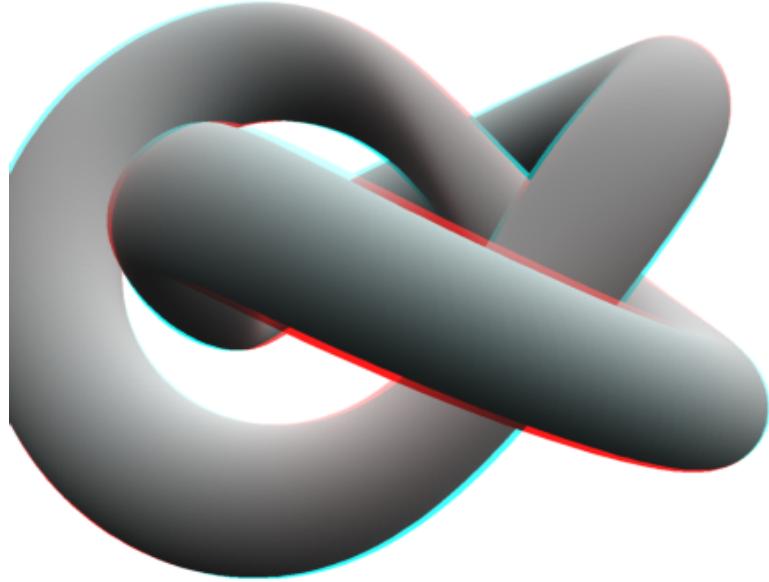
Function pov3d not found.
 Try list ... to find functions!
 Error in:
 pov3d(X,Y,Z,zoom=3.8); ...
 ^

Trefoil Knot

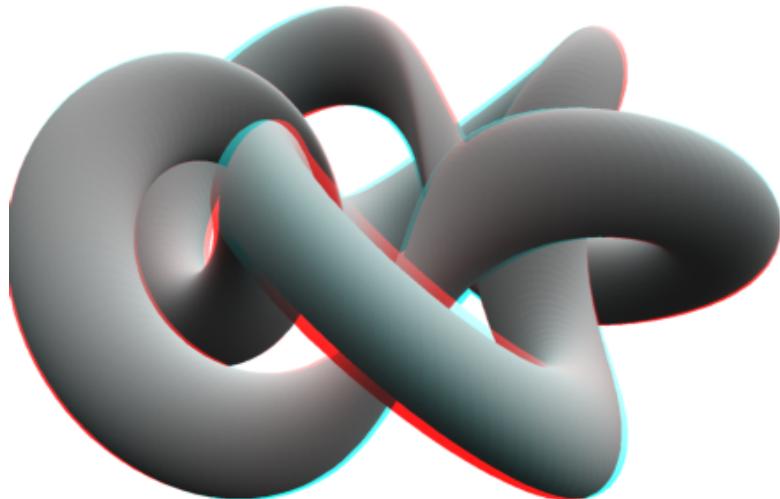
```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)'; ...
> x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
> y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
> plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=3.2);
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],anaglyph=1,zoom=3.2):
```



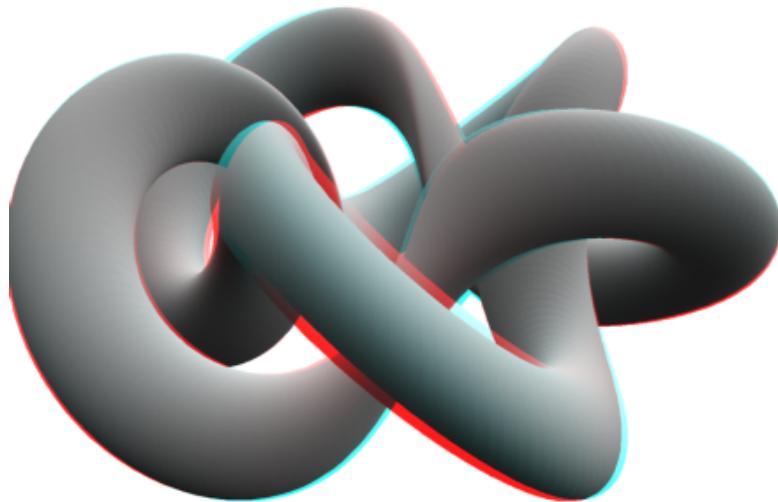
```
>x:=(4*(1+.4*sin(5*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.4*sin(5*v))+cos(u))*sin(2*v); z=sin(u)+2*cos(5*v); ...
> plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1], ...
> zoom=3,anaglyph=1):
```



```

>x:=(4*(1+.4*sin(5*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.4*sin(5*v))+cos(u))*sin(2*v); z=sin(u)+2*cos(5*v); ...
> plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1], ...
> zoom=3,anaglyph=1):

```



```
>function fx (t) &= 4*(1+sin(3*t)/3)*sin(2*t)
```

$$4 \sin(2 t) \left(\frac{\sin(3 t)}{3} + 1\right)$$

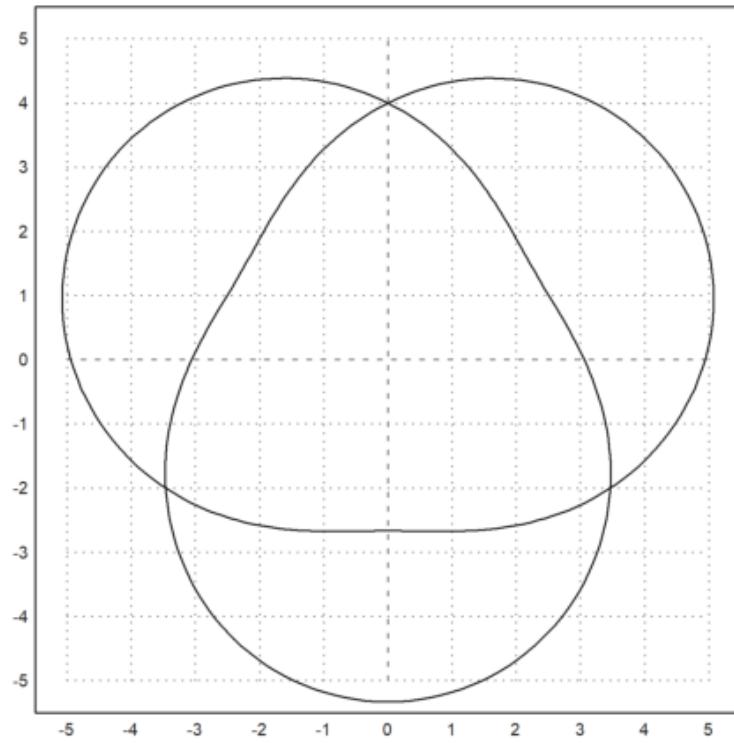
```
>function fy (t) &= 4*(1+sin(3*t)/3)*cos(2*t)
```

$$4 \cos(2 t) \left(\frac{\sin(3 t)}{3} + 1\right)$$

```

>t=linspace(-pi,pi,400); ...
>plot2d(fx(t),fy(t),r=5):

```

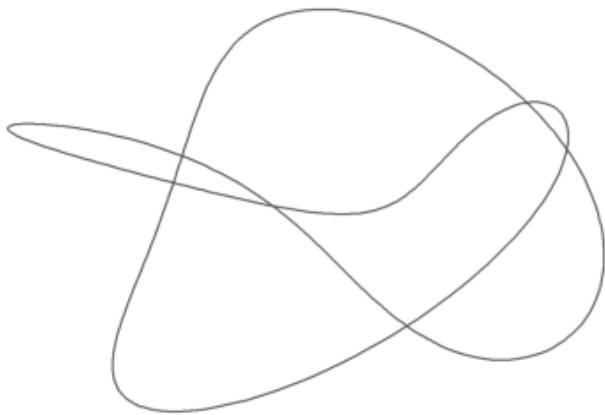


```
>function fz(t) &= 2*cos(3*t)
```

$$2 \cos(3 t)$$

```
>plot3d(fx(t),fy(t),fz(t),wire=1,>user,zoom=4,<frame, ...
> title=" Press cursor keys, a, space, or return."):
```

Press cursor keys, a, space, or return.



```
>function f(t) &= [fx(t),fy(t),fz(t)]
```

$$\begin{aligned} & \sin(3t) & \sin(3t) \\ & [4 \sin(2t) \left(\frac{\sin(3t)}{3} + 1\right), 4 \cos(2t) \left(\frac{\sin(3t)}{3} + 1\right), \\ & \quad 2 \cos(3t)] \end{aligned}$$

```
>function df(t) &= diff(f(t),t)
```

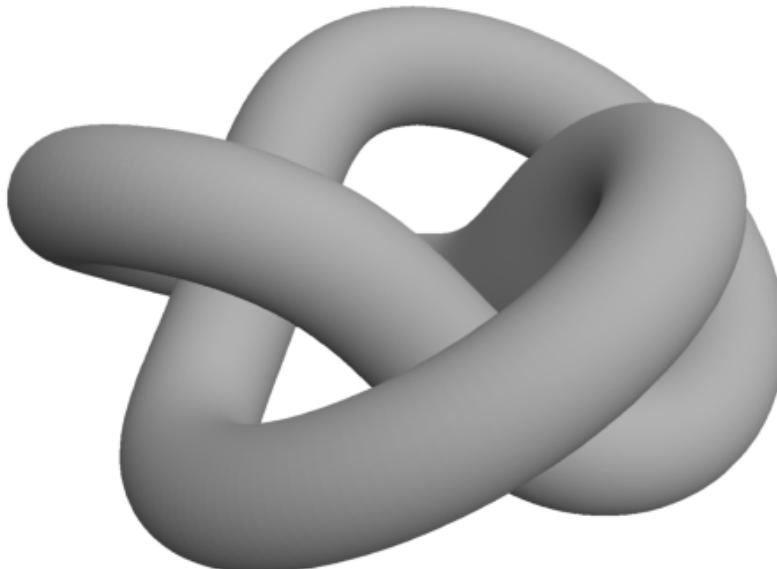
$$\begin{aligned} & \sin(3t) & \sin(3t) \\ & [8 \cos(2t) \left(\frac{\sin(3t)}{3} + 1\right) + 4 \sin(2t) \cos(3t), \\ & \quad 4 \cos(2t) \cos(3t) - 8 \sin(2t) \left(\frac{\sin(3t)}{3} + 1\right), -6 \sin(3t)] \end{aligned}$$

```
>function w1(t) &= [df(t)[2],-df(t)[1],0]
```

$$\begin{aligned} & \sin(3t) \\ & [4 \cos(2t) \cos(3t) - 8 \sin(2t) \left(\frac{\sin(3t)}{3} + 1\right), \\ & \quad \sin(3t)] \end{aligned}$$

$$- 8 \cos(2t) \left(\frac{----- + 1}{3}\right) - 4 \sin(2t) \cos(3t), 0]$$

```
>function w2(t) &= crossproduct(df(t),w1(t));
>function g(s,t,r) &= f(t)+r*(cos(s)*w1(t)/norm(w1(t))+sin(s)*w2(t)/norm(w2(t)));
>function gx(s,t) &= g(s,t,r)[1];
>function gy(s,t) &= g(s,t,r)[2];
>function gz(s,t) &= g(s,t,r)[3];
>s=linspace(pi,-pi,160)';
>r=1;
>fullwindow; plot3d(gx(s,t),gy(s,t),gz(s,t),>hue, ...
><frame,zoom=5,max=0.7,amb=0):
```

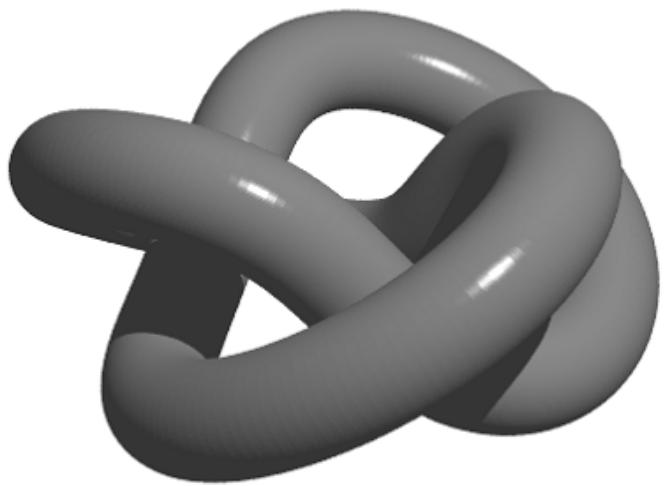


PAVRAY

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe

```
>pov3d(gx(s,t),gy(s,t),gz(s,t),zoom=5,axis=0, ...
>look=povlook(gray,>phong));
```



```
>povclear();
```

BAB 5

MENGGUNAKAN EMT UNTUK KALKULUS

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format `nama_fungsi := rumus fungsi` (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &&= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah `function` (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik  
>f(0), f(1), f(pi)
```

1
4.31977682472
20.7392088022

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x) / (x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
  useglobal; return sqrt(x^2-3*x) / (x+1)
Error in:
g(1) ...
^
```

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format `:=`, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
endfunction
```

```
>f(1)
```

1

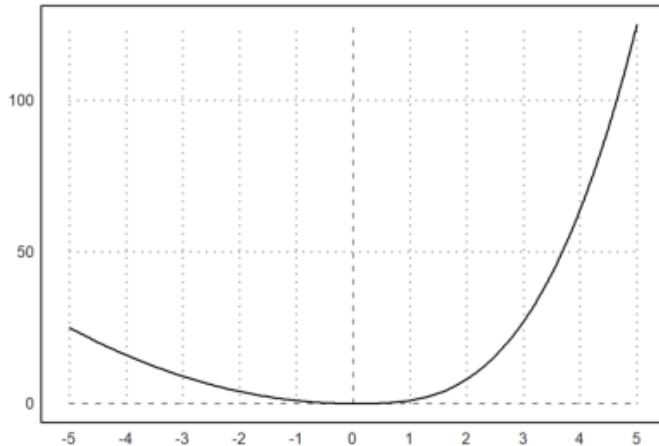
```
>f(-2)
```

4

```
>f(-5:5)
```

[25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 8, 27, 64, 125]

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)", -5, 5):
```



```
>function f(x) &= 2*x^2 // fungsi simbolik
```

$$2 \frac{x^2}{E}$$

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$$3 \ x + 1$$

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$$\begin{matrix} 3 & x & + & 1 \\ 2 & E \end{matrix}$$

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik tersebut.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

A). FUNGSI 1 VARIABEL

1. Fungsi 1

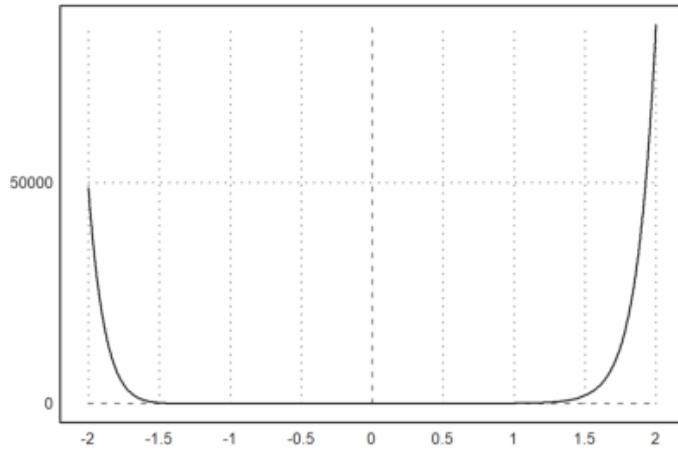
```
>function k(x) := x*(x^5+3)^3  
>k(3), k(5), k(7)
```

```
44660808  
153027765760  
3.3250729687e+13
```

```
>kmap(-3:3)
```

```
[4.1472e+07, 48778, -8, 0, 64, 85750, 4.46608e+07]
```

```
>plot2d("k(x)":
```



2. Fungsi 2

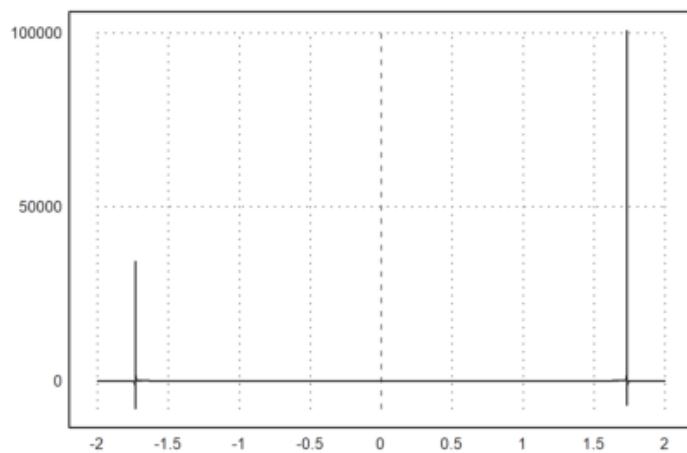
```
>function m(x) := (x)^4 / (3-x^2)
>m(2), m(-2), m(1)
```

-16
-16
0.5

```
>mmap(-5:-5)
```

-28.4090909091

```
>plot2d("m(x)":
```



3. Fungsi 3

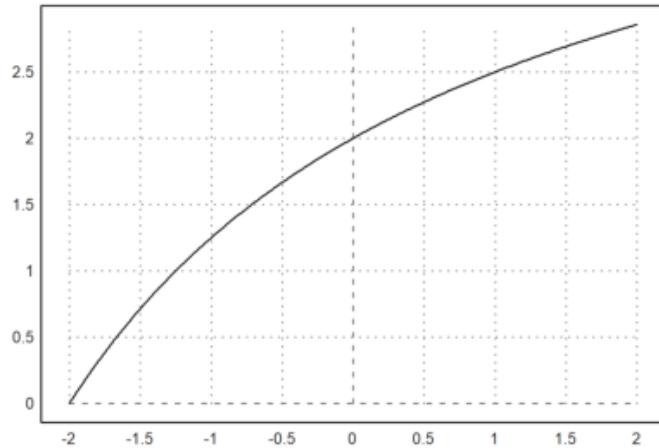
```
>function n(x) := 3*x/(x+5)+2  
>n(2), n(-1), n(-3), n(4)
```

2.85714285714
1.25
-2.5
3.33333333333

```
>nmap(2:5)
```

[2.85714, 3.125, 3.33333, 3.5]

```
>plot2d("n(x)":
```



4. Fungsi 4

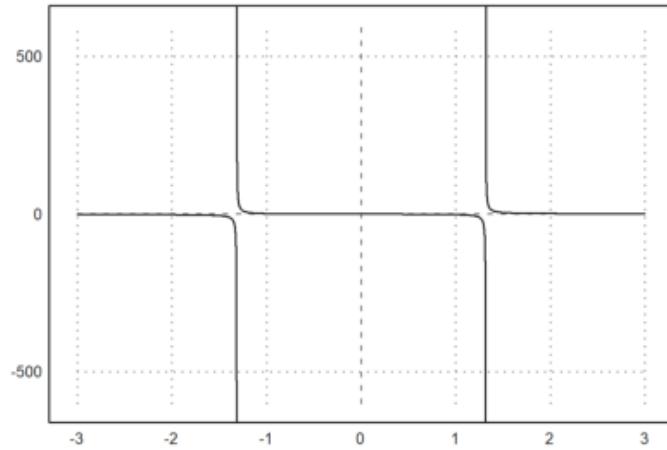
```
>function l(x) := 3*x^3/(x^4-3)  
>l(5), l(4), l(3)
```

0.602893890675
0.758893280632
1.03846153846

```
>lmap(5:8)
```

[0.602894, 0.50116, 0.429108, 0.375275]

```
>plot2d("l(x)", -3, 3, -600, 600):
```



5. Fungsi 5

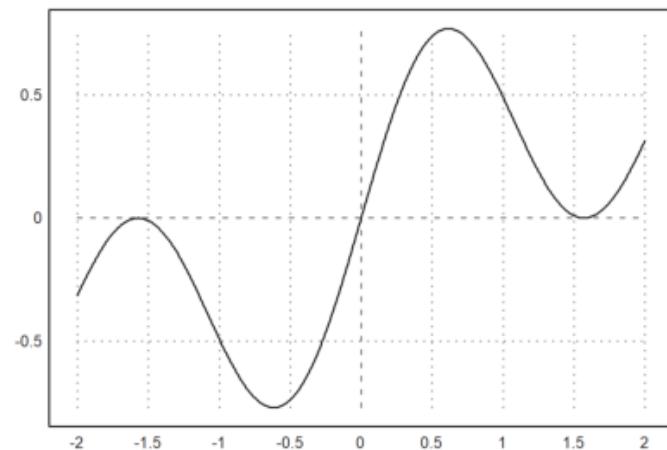
```
>function j(x) := (cos(x))*sin(2*x)
>j(pi), j(0), j(pi/3)
```

```
0
0
0.433012701892
```

```
>jmap(0:3pi)
```

```
[0, 0.491295, 0.314941, 0.276619, -0.646688, -0.154318,
-0.515201, 0.746821, 0.0418899, 0.684247]
```

```
>plot2d("j(x)":
```



6. Fungsi 6

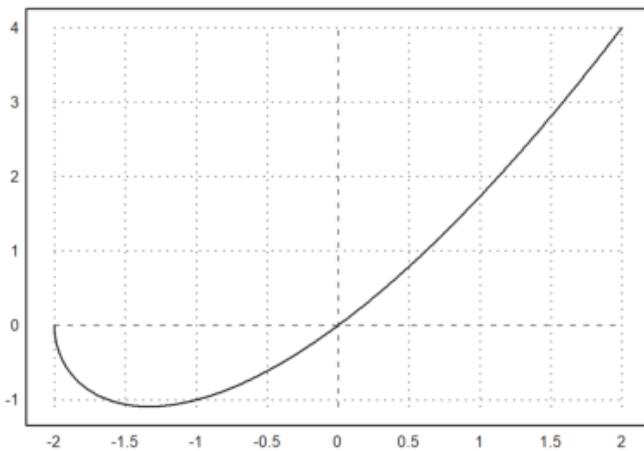
```
>function o(x) := x*sqrt(x+2)
>o(3), o(5), o(7)
```

6.7082039325
13.2287565553
21

```
>omap(3:12)
```

[6.7082, 9.79796, 13.2288, 16.9706, 21, 25.2982, 29.8496,
34.641, 39.6611, 44.8999]

```
>plot2d("o(x)":
```



B). FUNGSI 2 VARIABEL

1. Fungsi 1

```
>function a(x,y) ...
```

```
return x^2+y^2-24
endfunction
```

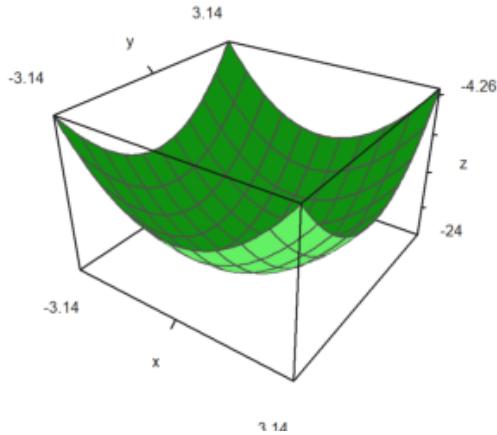
```
>a(2,1), a(5,4), a(2,4)
```

-19
17
-4

```
>amap (-2:2,3:3)
```

```
[-11, -14, -15, -14, -11]
```

```
>aspect=1.5; plot3d("a(x,y)",a=-100,b=100,c=-80,d=80,angle=35°,height=30°,r=pi,n=100):
```



2. Fungsi 2

```
>function q(x,y) ...
```

```
return y^2/(x^2/3)
endfunction
```

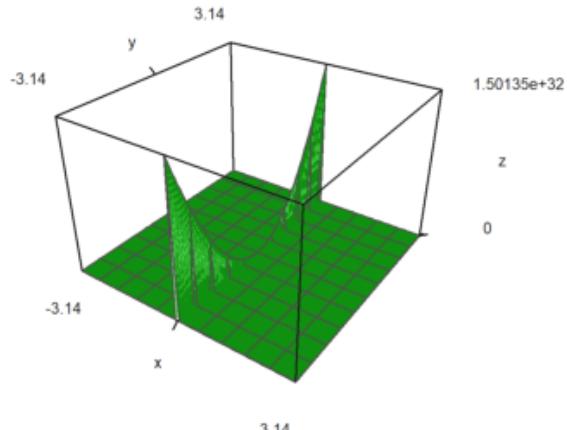
```
>q(4,2), q(2,3), q(4,3)
```

```
0.75
6.75
1.6875
```

```
>qmap(2:2,-2:2)
```

```
[3, 0.75, 0, 0.75, 3]
```

```
>aspect=1.5; plot3d("q(x,y)",a=-100,b=100,c=-80,d=80,angle=35°,height=30°,r=pi,n=100):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga). Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x-1} = -1$$

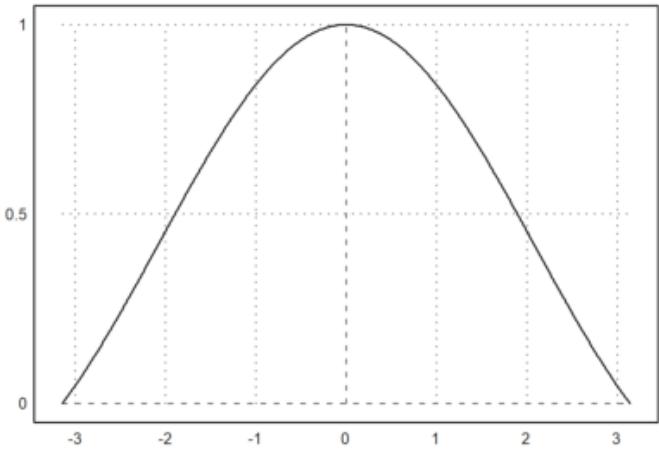
```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = 7$$

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi):
```



```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0$$

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x = \text{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x = \text{infinity}$$

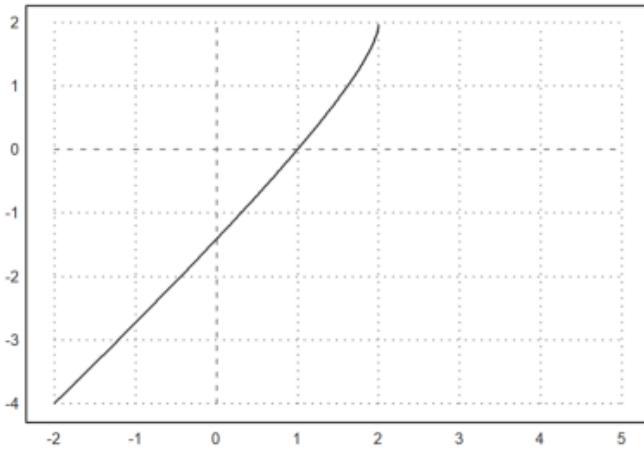
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t \downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3} i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",-2,5):
```



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{6}{7}$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x = e$$

```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x} + 1 \right)^x = e^k$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{1}{x}} = e$$

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+k} \right)^x = e^{-k}$$

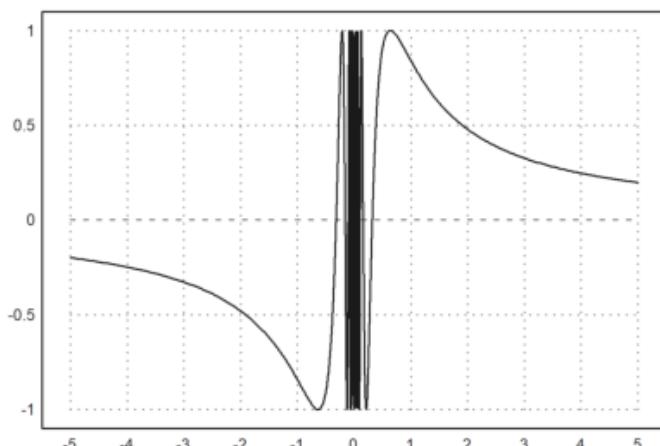
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{ind}$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-5,5):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

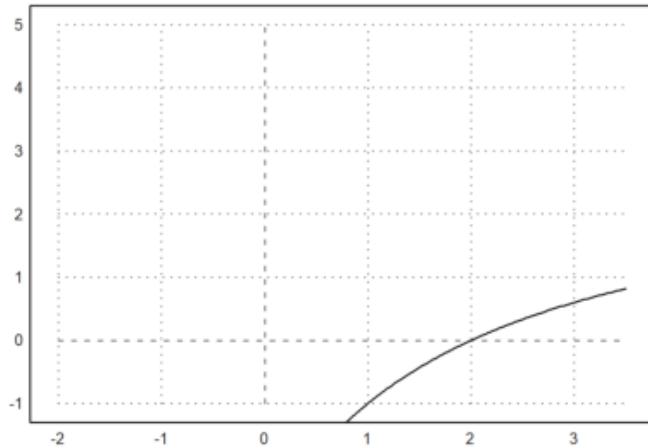
1. Fungsi 1

$$f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$$

```
>$showev('limit((3*x-6)/(x+2),x,2))
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x + 2} = 0$$

```
>plot2d("(3*x-6)/(x+2)", -2, 3.5, -1, 5):
```



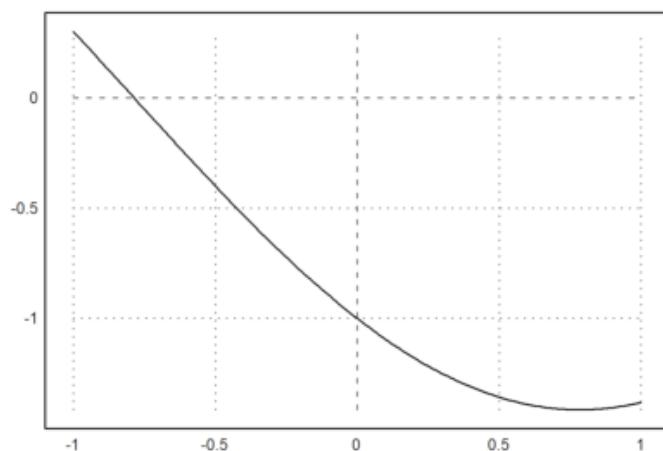
2. Fungsi 2

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

```
>showev('limit(cos(2*x)/(sin(x) - cos(x)), x, 0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{\sin x - \cos x} = -1$$

```
>plot2d("cos(2*x)/(sin(x) - cos(x))", -1, 1):
```



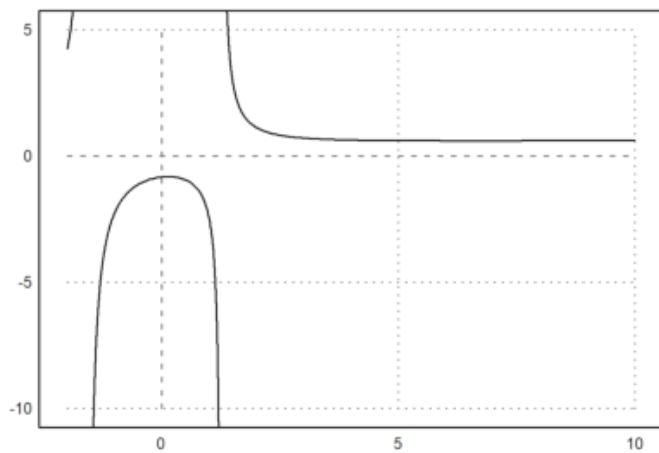
3. Fungsi 3

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{3x^2 + x - 6}$$

```
>$showev('limit(((2*x^2-2*x+5)/(3*x^2+x-6)),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 2x + 5}{3x^2 + x - 6} = \frac{17}{24}$$

```
>plot2d("(2*x^2-2*x+5)/(3*x^2+x-6)",-2,10,-10,5):
```



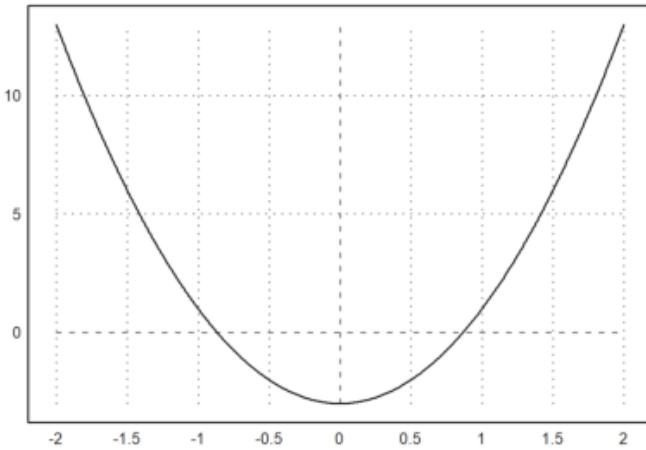
4. Fungsi 4

$$f(x) = 4x^2 - 3$$

```
>$showev('limit((4*x^2-3),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4x^2 - 3 = -3$$

```
>plot2d("(4*x^2-3)":
```



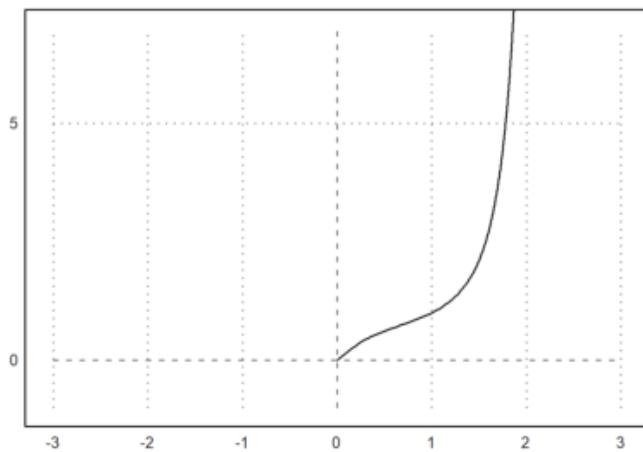
5. Fungsi 5

$$f(x) = x^{x^x}$$

```
>showev('limit((x^(x^x)), x, 0, plus))
```

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{x^x} = 0$$

```
>plot2d(" (x^(x^x)) ", -3, 3, -1, 7);
```



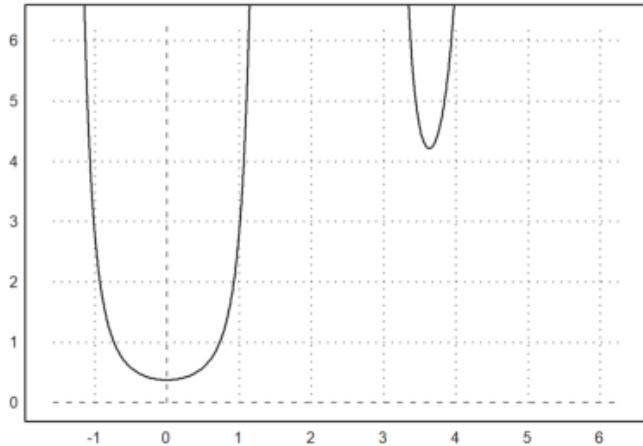
6. Fungsi 6

$$f(x) = \frac{3xtanx}{1 - \cos 4x}$$

```
>showev('limit((3*x*tan(x)) / (1 - cos(4*x)), x, 0))
```

$$3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos(4x)} \right) = \frac{3}{8}$$

```
>plot2d("(3*x*tan(x)) / (1-cos(4*x))", -pi/2, 2pi, 0, 2pi):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $(x+h)^n$ dengan menggunakan teorema binomial.

Jawab:

$$\text{Akan ditunjukkan bahwa } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$$

Pertama, ekspansikan $(x+h)^n$, yakni:

$$\begin{aligned} (x+h)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\ \Leftrightarrow (x+h)^n &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n \\ \Leftrightarrow (x+h)^n &= x^n + n x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} h^3 + \dots + h^n \end{aligned}$$

Sehingga, $f'(x)$ menjadi: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \dots + h^n - x^n}{h}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \dots + h^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = nx^{n-1}. \text{ Terbukti.}$$

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, ekspansikan $\sin(x+h)$ dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.
Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$

Diketahui bahwa:

$$1). \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$$2). \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$$

$$3). \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right] \\ &= (-\sin x) \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} + (\cos x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right] \\ &= (-\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x. \text{ Terbukti.} \end{aligned}$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

Jawab:

Bukti:

Ambil $f(x) =^a \log x$.

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(x+h) - ^a \log x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log \frac{(x+h)}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(1 + \frac{h}{x})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x} x} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{h} \cdot ^a \log(1 + \frac{h}{x})}{x} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{^a \log(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}}{x} \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} ^a \log(1 + \frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\
&= \frac{1}{x \cdot {}^e \log a} \\
&= \frac{1}{x \cdot \ln a}
\end{aligned}$$

Menggunakan hasil di atas, maka:

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{d {}^e \log x}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}. \text{Terbukti.}$$

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```

Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk

```

Is x an integer?

Use assume!

Error in:

```
$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...  
^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

```
>$factor(E^(x+h)-E^x)
```

$$(e^h - 1) e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

$$\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}$$

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^{x+h} - x^x}{h} = infinity$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^{x+h} - x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = x^x (\log x + 1)$$

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

[x > 0]

```
>&forget(x<0)
```

[x < 0]

```
>&facts()
```

[]

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

sinh(x)

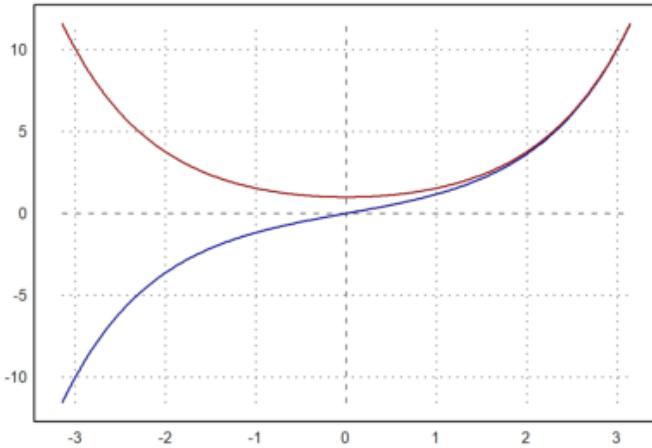
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x} (e^{2x} + 1)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), seperti contoh-contoh tersebut. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

Jawab:

1. Fungsi 1

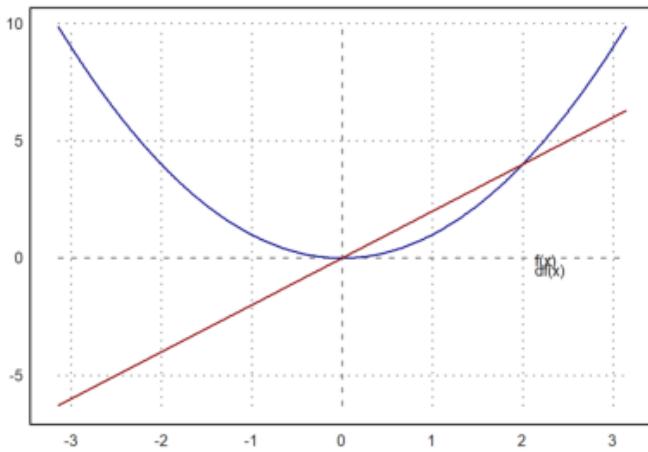
```
>function f(x) := x^2
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h),h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

```
>function df(x) &= limit(((x+h)^2-x^2)/h),h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$2x$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]), label("f(x)", 2, 0.6), label("df(x)", 2, 0.6)
```



2. Fungsi 2

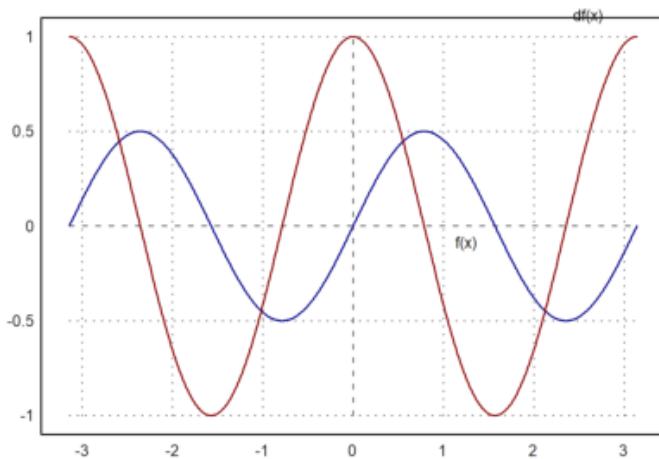
```
>function f(x) := sin(x)*cos(x)
>$showev('limit(((sin(x+h)*cos(x+h))-sin(x)*cos(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)*cos(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h)\sin(x+h) - \cos x \sin x}{h} = \cos^2 x - \sin^2 x$$

```
>function df(x) &= limit(((sin(x+h)*cos(x+h))-sin(x)*cos(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]), label("f(x)", 1, 0), label("df(x)", 2.3, 1.1)
```



3. Fungsi 3

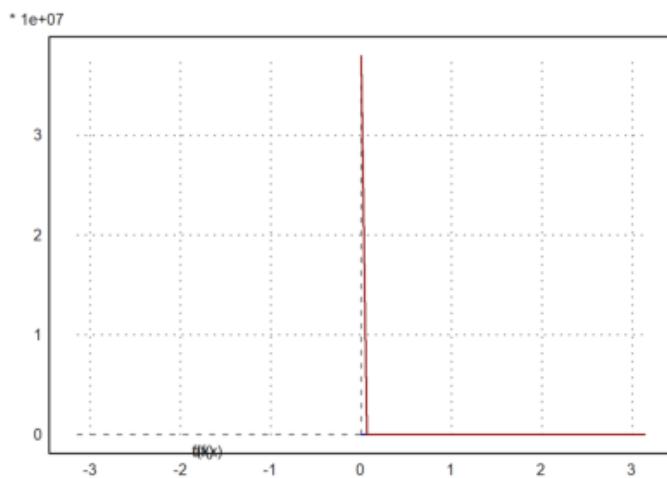
```
>function f(x) := sqrt(x)*4
>$showev('limit((sqrt(x+h)*4-sqrt(x)*4)/h,h,0)) // turunan sqrt(x)*4
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{x+h} - 4\sqrt{x}}{h} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

```
>function df(x) &= limit((sqrt(x+h)*4-sqrt(x)*4)/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{2}{\sqrt{x}}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]), label("f(x)", -2, 11), label("df(x)", -2, -1)
```



4. Fungsi 4

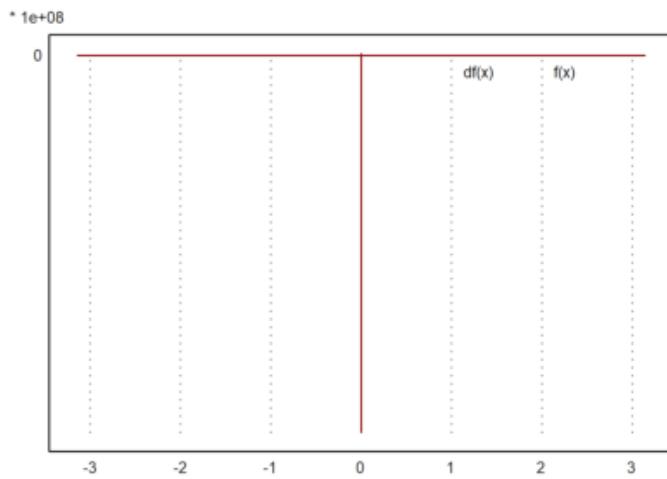
```
>function f(x) := cos(1/x)
>$showev('limit((cos(1/(x+h))-cos(1/x))/h,h,0)) // turunan cos(1/x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{1}{x+h}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{h} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

```
>function df(x) &= limit((cos(1/(x+h))-cos(1/x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]), label("f(x)", 2, 0.4), label("df(x)", 1, -0.4)
```



5. Fungsi 5

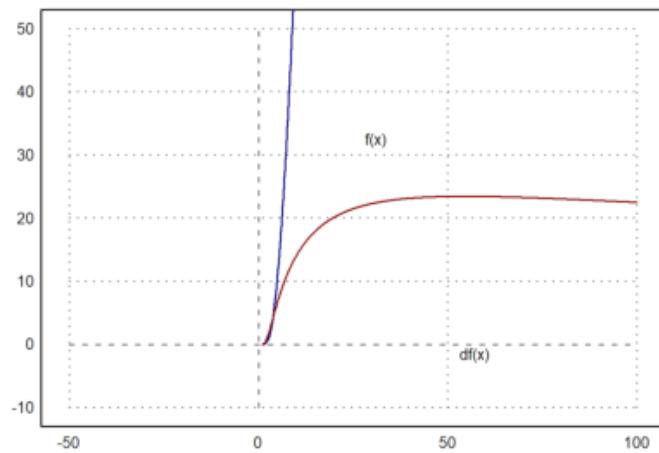
```
>function f(x) := (log(x))^5
>$showev('limit(((log(x+h))^5-(log(x))^5)/h,h,0)) // turunan (log(x))^5
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log^5(x+h) - \log^5 x}{h} = \frac{5 \log^4 x}{x}$$

```
>function df(x) &= limit(((log(x+h))^5-(log(x))^5)/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{5 \log^4 x}{x}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -50, 100, -10, 50, color=[blue, red]), label("f(x)", 25, 35), label("df(x)", 75, -5)
```



Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah `integrate`. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi `integrate` menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

Answering "Is n equal to -1?" with "no"

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{25^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{25^{\frac{7}{2}} - 2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x} + a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^\pi - 1) \sin a + (e^\pi + 1) \cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x} + a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^\pi - 1) (\sin a - \cos a)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2); $f(x)
```

$$e^{-x^2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

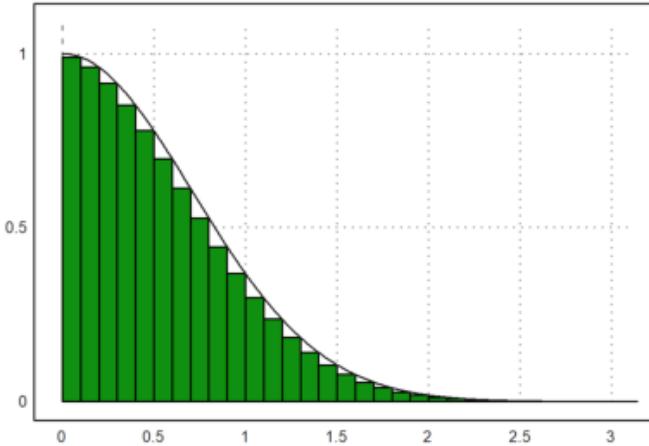
$$\operatorname{erf}(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^\pi e^{-x^2} dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

$$\int_0^\pi e^{-x^2} dx$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva $y=f(x)$ tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x  
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)  
// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_0^\pi e^{-x^2} dx = 0.8362196102528469$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai $f(x)$ untuk $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

0.836219610253

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

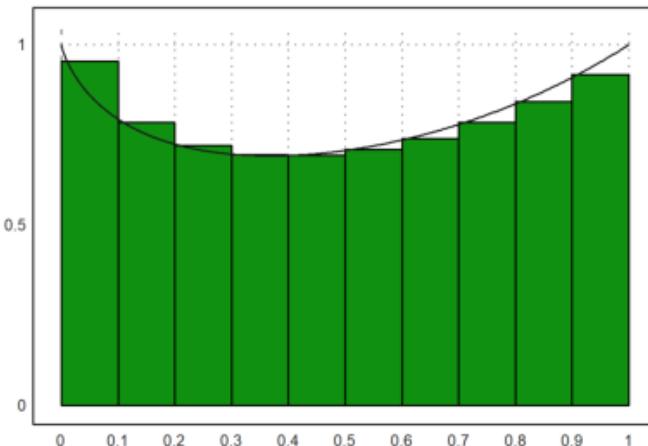
```
>function f(x) &= x^x; $f(x)
```

$$x^x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 x^x dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva $y = f(x)$ yang diputar mengelilingi sumbu x dari $x=a$ sampai $x=b$, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)

- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva $y=f(x)$ dari $x=a$ sampai $x=b$ dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)

Jawab:

1. Fungsi 1

```
>function f(x) &= 5*x^2; $f(x)
```

$$5 x^2$$

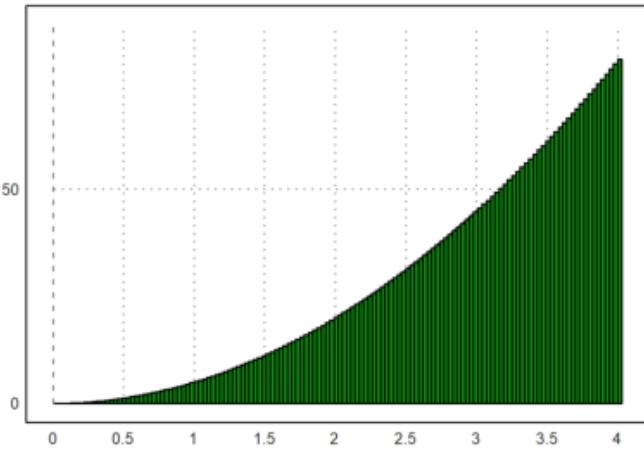
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$5 \int x^2 dx = \frac{5 x^3}{3}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,2,3))
```

$$5 \int_2^3 x^2 dx = \frac{95}{3}$$

```
>x=0.01:0.03:4; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",2,3,>add):
```



2. Fungsi 2

```
>function f(x) &= cos(2*x+5); $f(x)
```

$$\cos(2x + 5)$$

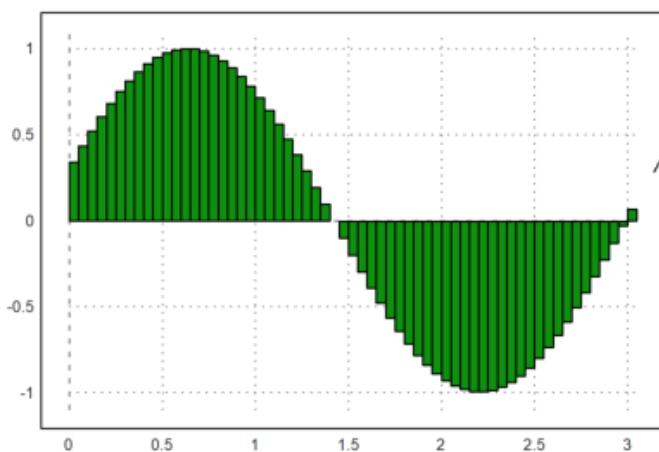
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \cos(2x + 5) dx = \frac{\sin(2x + 5)}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,pi,2*pi))
```

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2x + 5) dx = 0$$

```
>x=0:0.05:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.03),>bar); plot2d("f(x)",pi,2*pi,>add):
```



3. Fungsi 3

```
>function f(x) &= (sin(x))*(cos((x)))^2; $f(x)
```

$$\cos^2 x \sin x$$

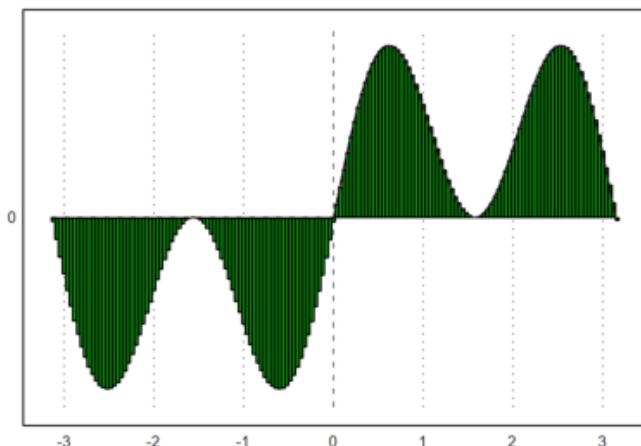
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^\pi \cos^2 x \sin x \, dx = \frac{2}{3}$$

```
>x=-pi:0.04:pi; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



4. Fungsi 4

```
>function f(x) &= (x^2*(2-x^3)^(1/2)); $f(x)
```

$$x^2 \sqrt{2 - x^3}$$

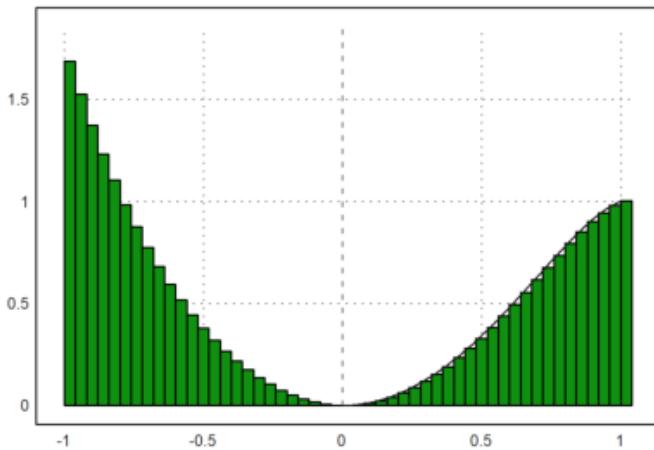
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int x^2 \sqrt{2 - x^3} \, dx = -\frac{2 (2 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{9}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^3} dx = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{9} - \frac{2}{9}$$

```
>x=-1:0.04:1; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



5. Fungsi 5

```
>function f(x) &= sqrt(24-x^2); $f(x)
```

$$\sqrt{24-x^2}$$

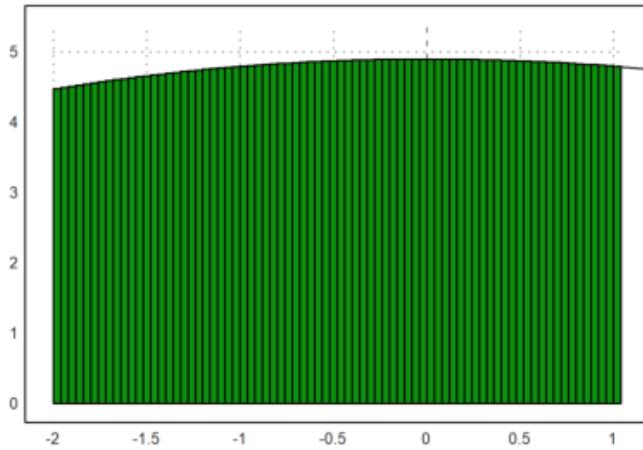
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \sqrt{24-x^2} dx = 12 \arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{6}}\right) + \frac{x\sqrt{24-x^2}}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,1,2))
```

$$\int_1^2 \sqrt{24-x^2} dx = 12 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{24 \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right) + \sqrt{23}}{2} + 2\sqrt{5}$$

```
>x=-2:0.04:1; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",1,2,>add):
```

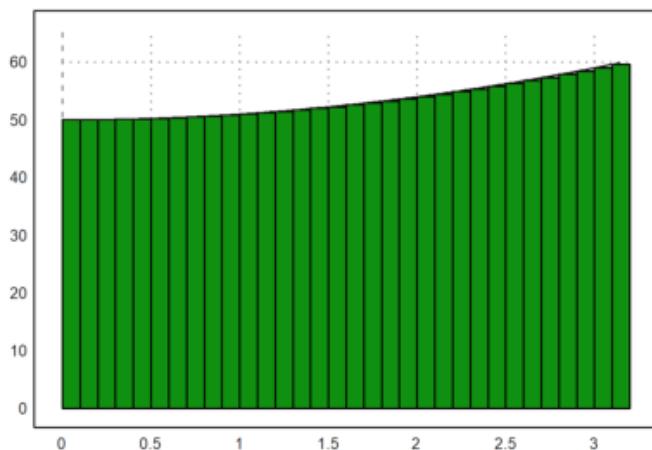


6. Fungsi 6

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>function f(x) &= x^2+50; $f(x)
```

$$x^2 + 50$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



```
>0.01*sum(f(x+0.01))
```

17.051552

>

Luas daerah dibatasi 2 kurva

1). Fungsi 1

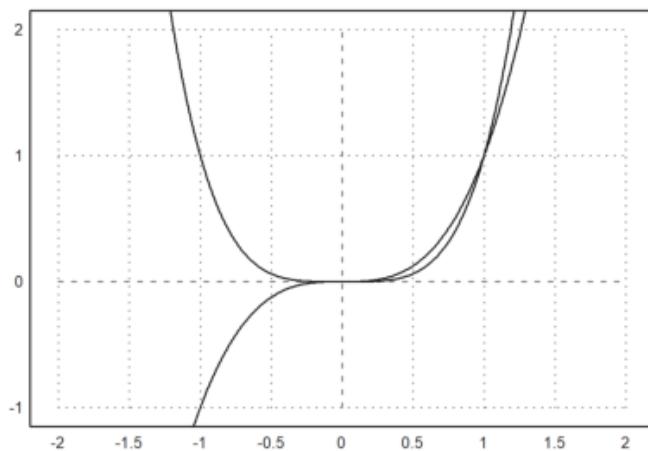
```
>function f(x) &= x^3; $f(x)
```

$$x^3$$

```
>function g(x) &= x; $g(x)
```

$$x$$

```
>plot2d(["x^4", "x^3"], -2, 2, -1, 2);
```



```
>function h(x) &= f(x)-g(x); $h(x)
```

$$x^3 - x$$

```
>$showev('integrate(h(x),x))
```

$$\int x^3 - x \, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

```
>$&solve(f(x)=g(x))
```

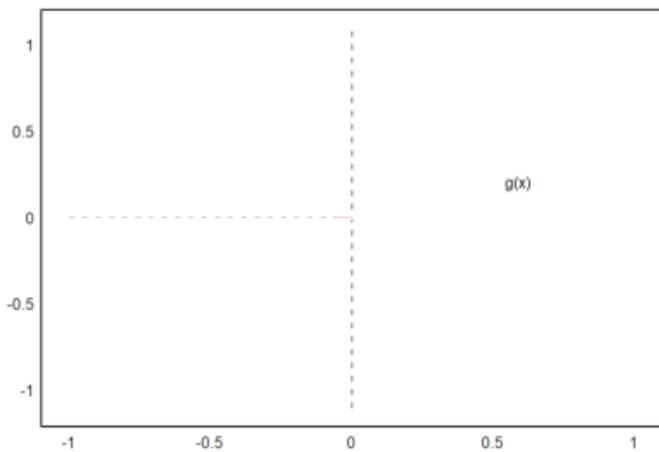
$$[x = -1, x = 1, x = 0]$$

```
>$showev('integrate(h(x),x,0,1)) // menghitung luas daerah yang dibatasi 2 kurva
```

$$\int_0^1 x^3 - x \, dx = -\frac{1}{4}$$

Arsiran daerah yang dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai berikut:

```
>x=-1:0.01:1; plot2d(x,f(x),>bar,>filled,style="-",fillcolor=orange,>grid); plot2d(x,g(x),
```



2). Fungsi 2

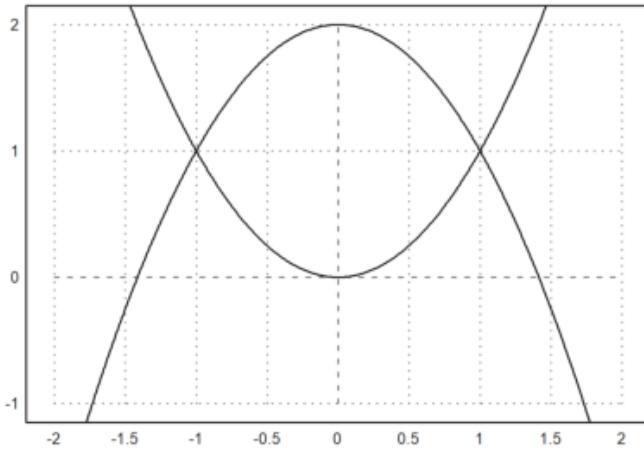
```
>function f(x) &= x^3+1; $f(x)
```

$$x^3 + 1$$

```
>function g(x) &= x^2; $g(x)
```

$$x^2$$

```
>plot2d([-x^2+2,x^2],-2,2,-1,2):
```



```
>function h(x) &= f(x)-g(x); $h(x)
```

$$x^3 - x^2 + 1$$

```
>$&solve(f(x)=g(x))
```

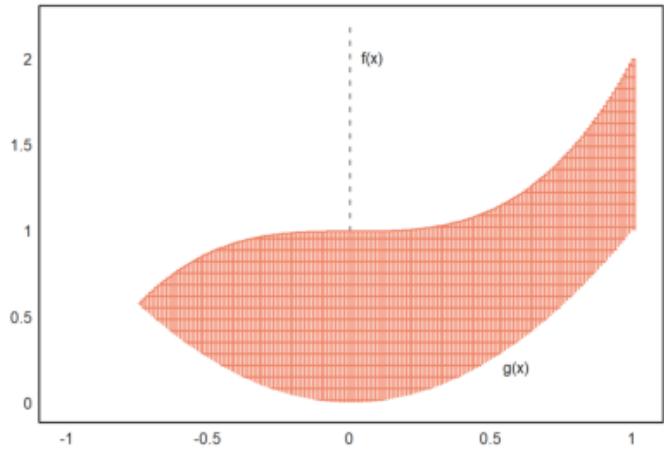
$$\left[x = \frac{\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}}{9\left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} + \left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}, x = \left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{-\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}}{9\left(\frac{\sqrt{23}}{23^{\frac{3}{2}}} - \frac{25}{54}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{3}, x = \right]$$

```
>$showev('integrate(h(x),x,-1,1)) // menghitung luas daerah yang dibatasi 2 kurva
```

$$\int_{-1}^1 x^3 - x^2 + 1 \, dx = \frac{4}{3}$$

Arsiran daerah yang dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai berikut:

```
>x=-1:0.01:1; plot2d(x,f(x),>bar,>filled,style="--",fillcolor=orange,>grid); plot2d(x,g(x),
```



Volume benda putar

Menghitung volume hasil perputaran kurva

$$m(x) = x^3 + 1$$

dari $x=-1$ sampai $x=0$. Diputar terhadap sumbu-x.

Jawab:

```
>function m(x) &= x^4+3; $m(x)
```

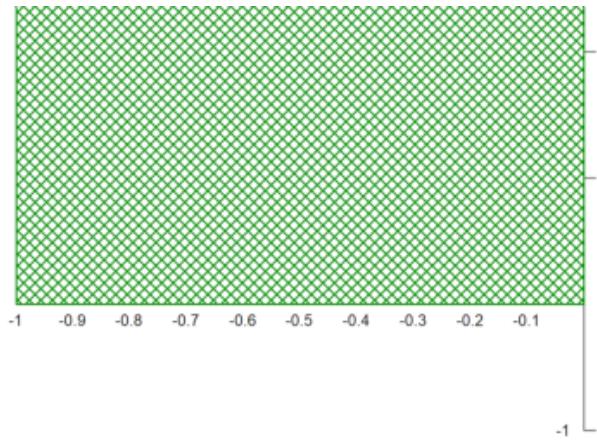
$$x^4 + 3$$

```
>$showev('integrate(pi*(m(x))^2,x,-1,0)) // Menghitung volume hasil perputaran m(x)
```

$$\pi \int_{-1}^0 (x^4 + 3)^2 dx = \frac{464\pi}{45}$$

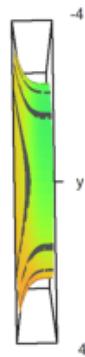
Daerah di bawah kurva yang akan dirotasi terhadap sumbu x sebagai berikut:

```
>plot2d("m(x)",-1,0,-1,2,grid=7,>filled, style="/\"):
```



Hasil perputaran $m(x)$ terhadap sumbu x sebagai berikut:

```
>plot3d("m(x)",-1,0,-1,1,>rotate,angle=6.3,>hue,>contour,color=redgreen,height=11):
```



Menghitung panjang kurva

Menghitung panjang kurva

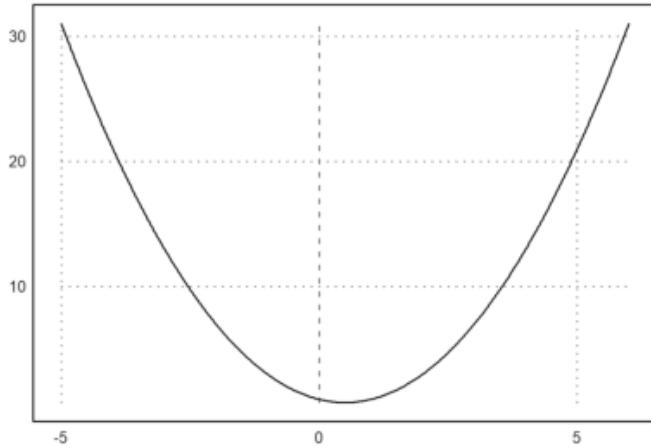
$$y = x^2 - x + 1$$

dari $x=1$ sampai $x=3$.

```
>function d(x) &= x^2-x+1; $d(x)
```

$$x^2 - x + 1$$

```
>plot2d("d(x)", -5, 6); // gambar kurva d(x)
```



```
>$showev('limit((d(x+h)-d(x))/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2 - h}{h} = 2x - 1$$

```
>function dd(x) &= limit((d(x+h)-d(x))/h,h,0); $dd(x)
```

$$2x - 1$$

```
>function q(x) &= ((dd(x))^2); $q(x)
```

$$(2x - 1)^2$$

```
>$showev('integrate(sqrt(1+q(x)),x,1,3)) // menghitung panjang kurva
```

$$\int_1^3 \sqrt{(2x-1)^2 + 1} dx = \frac{\operatorname{asinh} 5 + 5\sqrt{26}}{4} - \frac{\operatorname{asinh} 1 + \sqrt{2}}{4}$$

Jadi, panjang kurva

$$y = x^2 - x + 1$$

dari x=0 sampai x=4 adalah

$$S = \frac{\operatorname{asinh} 5 + 5\sqrt{26}}{4} - \frac{\operatorname{asinh} 1 + \sqrt{2}}{4}.$$

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh penggunaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29]
```

```
>sum(1:2:30), sum(1/(1:2:30))
```

```
225
```

```
2.33587263431
```

```
>$' sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n), simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

```
>$' sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf), simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k + k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>${' sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai e}
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

```
>${' sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))}
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = - \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>${' sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true))}
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}$$

```
>${' ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)}
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); ${' sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget}
```

$$a \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1. **Deret Taylor**

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar $x=a$ adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>${' e^x=taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11}
```

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

```
>${' log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1}
```

$$\log x = x - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

BAB 6

MENGGUNAKAN EMT UNTUK GEOMETRI

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d  
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang  
koordinat
```

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas  
sumbu-x dan y adalah -r sd r
```

```
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"  
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label  
"AB" sejauh d
```

```

plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P

```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```

turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektor v dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.

```

$ax+by=c.$

```

lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g): titik pada garis g
perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B): jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C): besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c): pusat lingkaran c
getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkaran c
circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan

```

c2

```
planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```

getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atasi) garis

quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni
sin(alpha)^2 dengan alpha sudut yang menghadap sisi a.

```

```
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga
```

dengan panjang sisi a, b, c.

```
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk  
suatu segitiga
```

```
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan  
sa=sin(phi)^2 spread a.
```

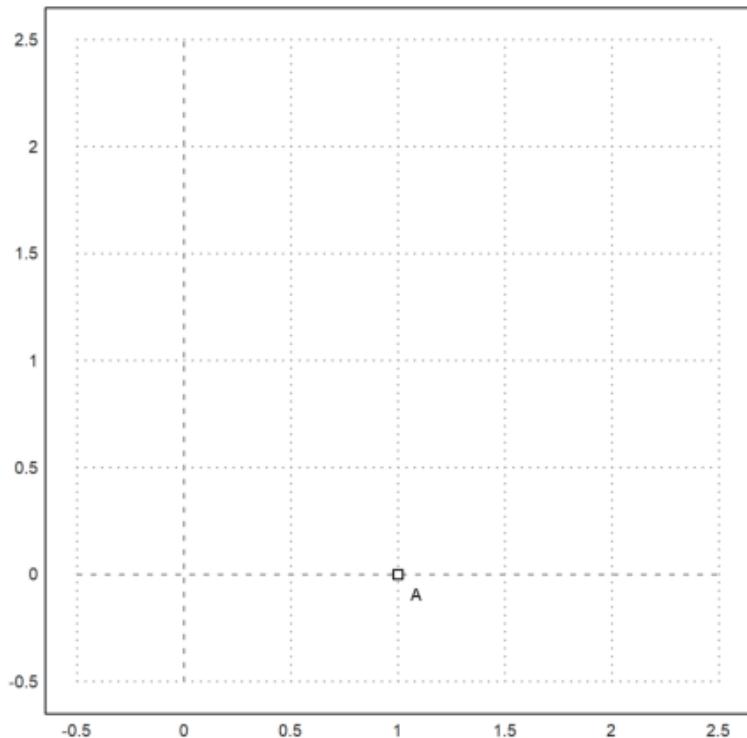
Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

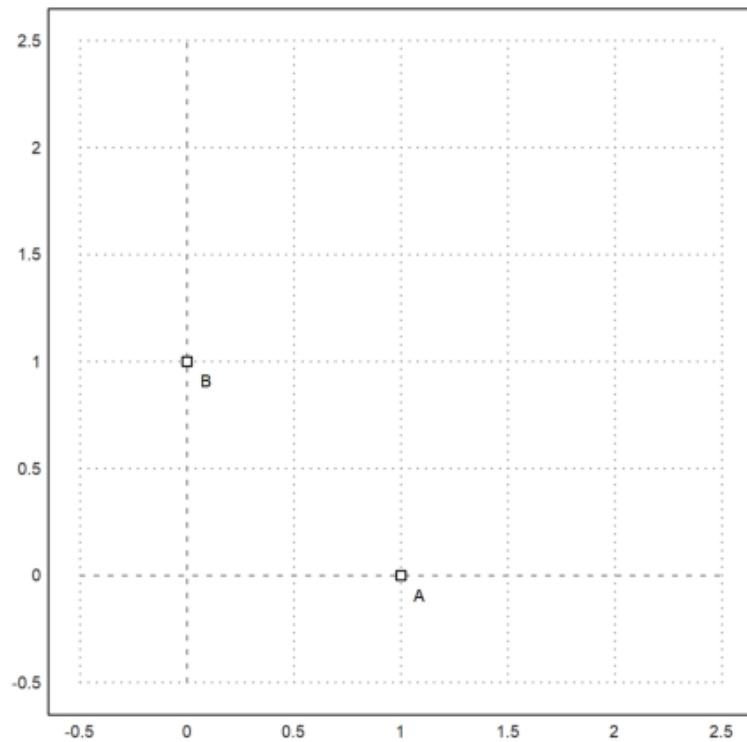
```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang atur tiga titik dan plot mereka.

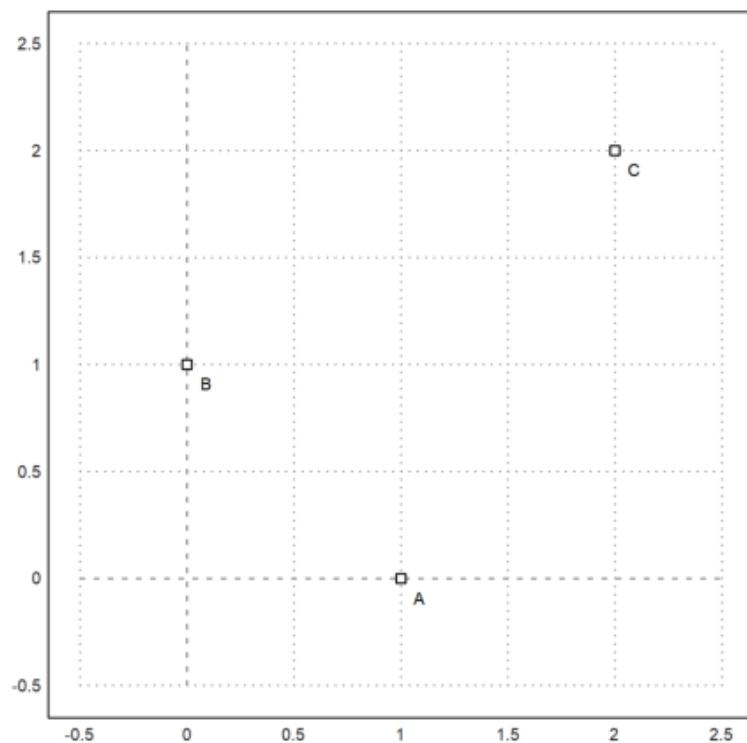
```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
```



```
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B"):
```

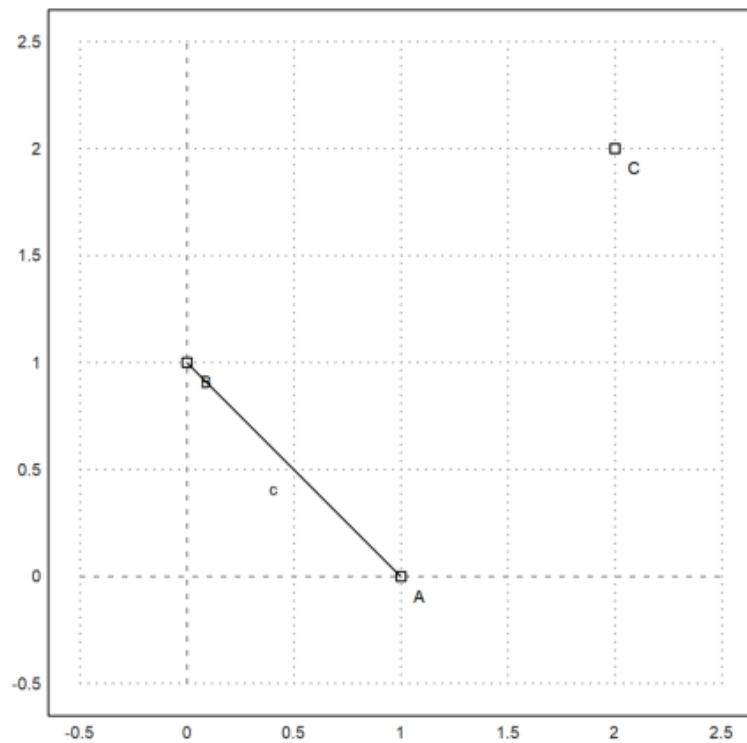


```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C"):
```

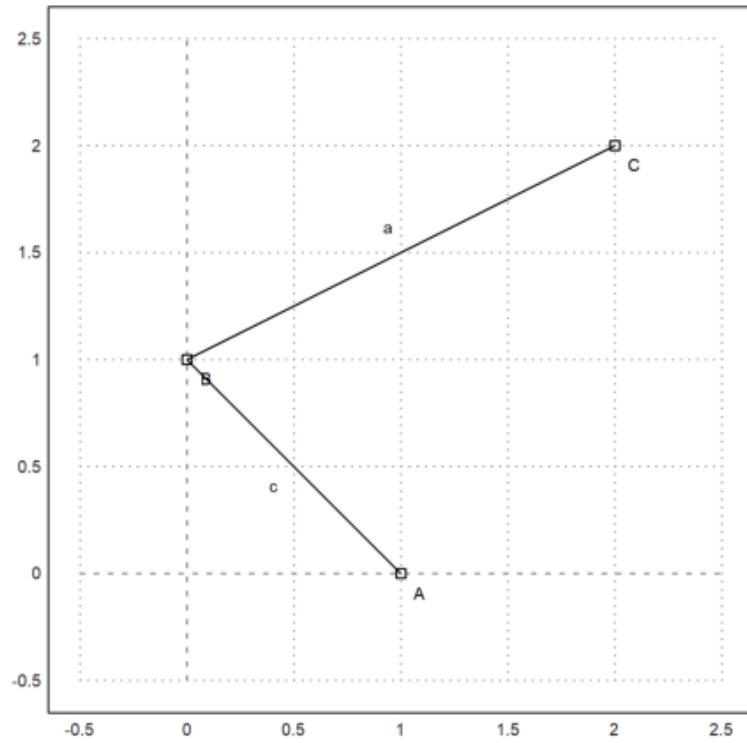


Lalu tiga segmen.

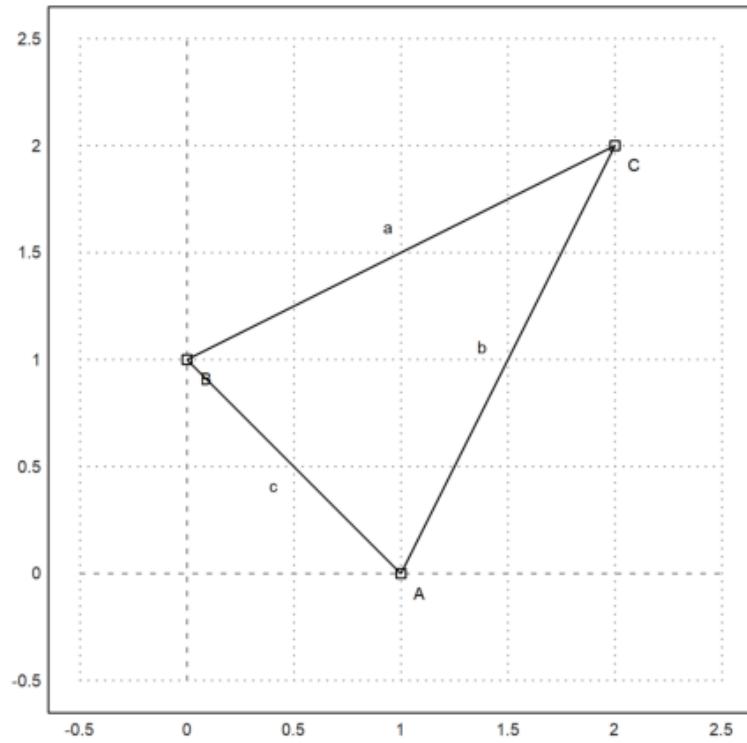
```
>plotSegment (A,B,"c") : // c=AB
```



```
>plotSegment (B,C,"a") : // a=BC
```



```
>plotSegment (A,C,"b") : // b=AC
```



Fungsi geometri meliputi fungsi membuat garis dan lingkaran. Format barisnya adalah [a,b,c], yang mewakili garis dengan persamaan $ax+by=c$.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

[-1, 2, 2]

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

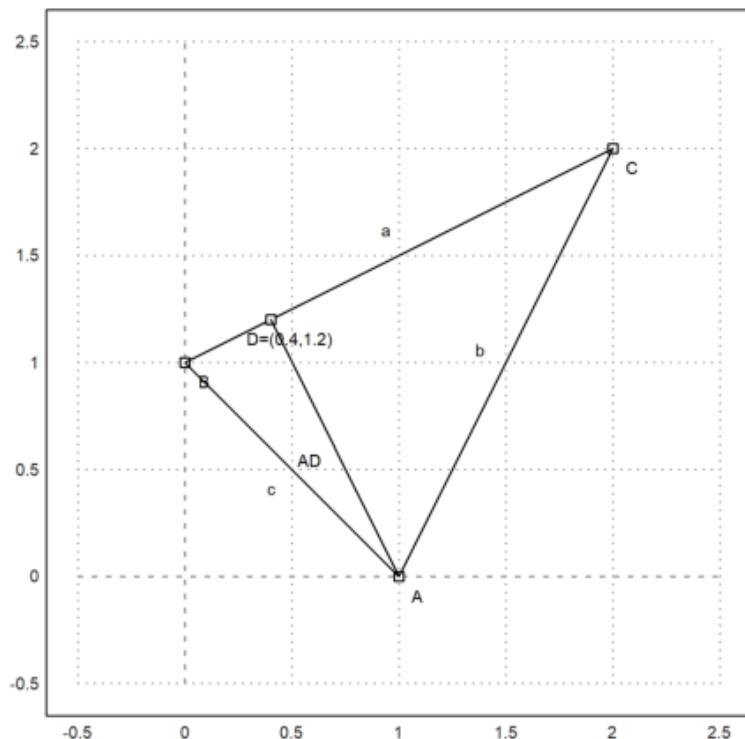
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan perpotongannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan  
>aspect(1); plotSegment(A,D); // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

1.5

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

1.5

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

1.5

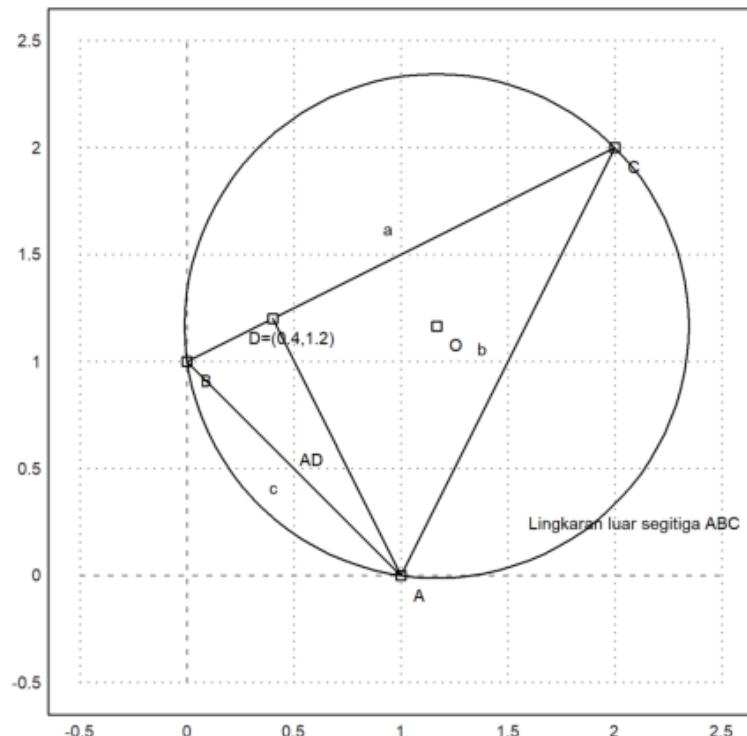
Sudut di C.

```
>degsprint(computeAngle(B,C,A))
```

$36^\circ 52' 11.63''$

Sekarang lingkaran luar segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC");
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667, 1.16667]  
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB  
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB  
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

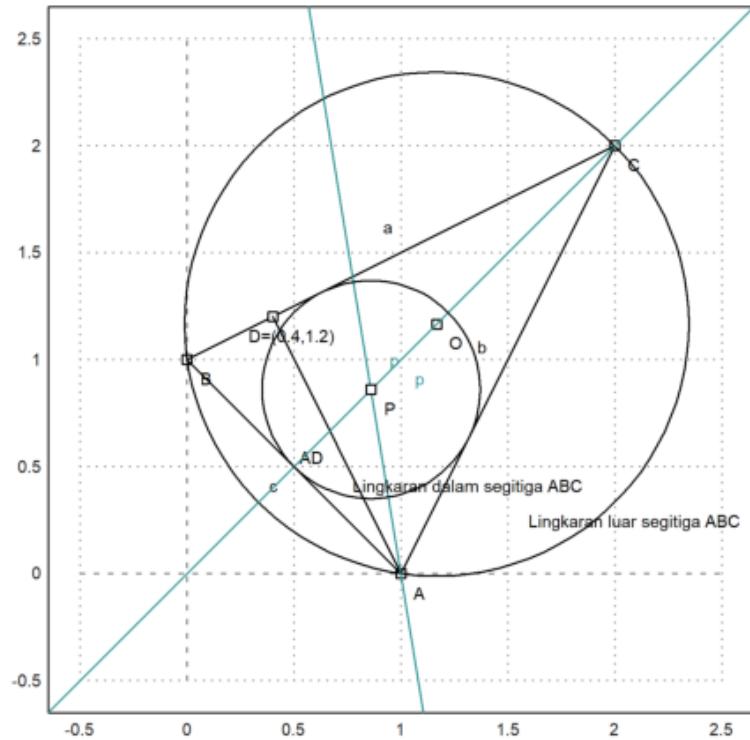
```
[0.86038, 0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut  
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya  
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"); // gambar lingkaran dal
```



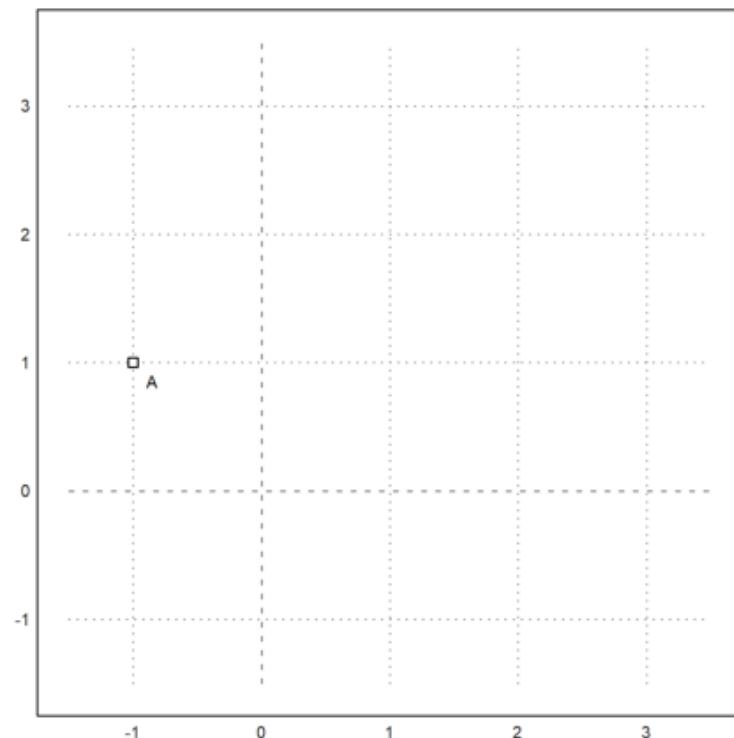
Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.
3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

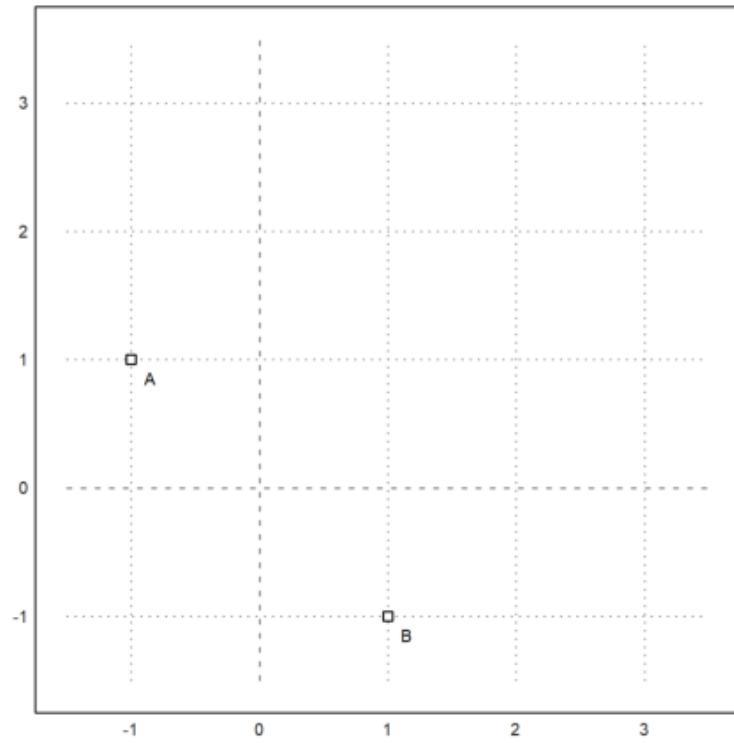
Penyelesaian :

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

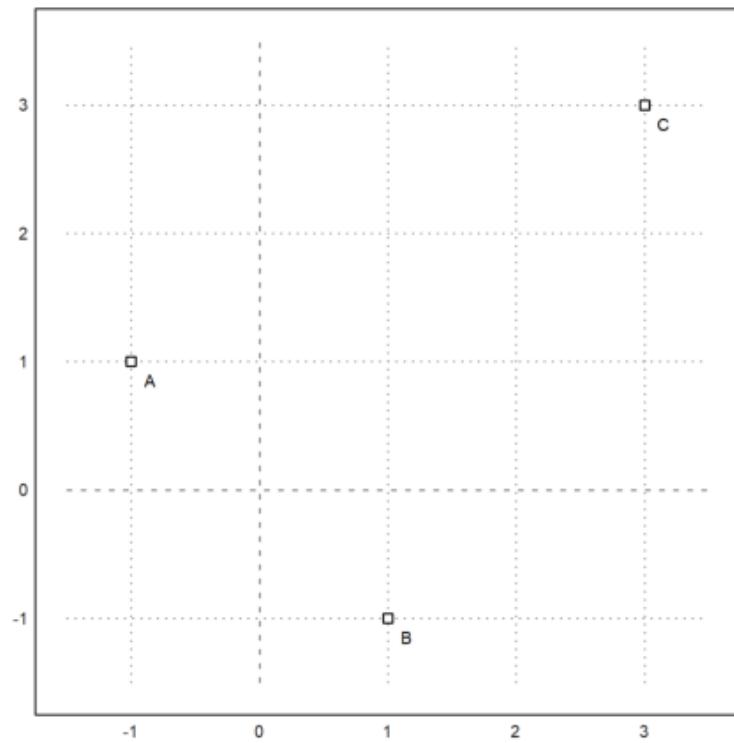
```
>setPlotRange (-1.5,3.5,-1.5,3.5);  
>A=[-1,1]; plotPoint (A, "A"):
```



```
>B=[1,-1]; plotPoint (B, "B"):
```

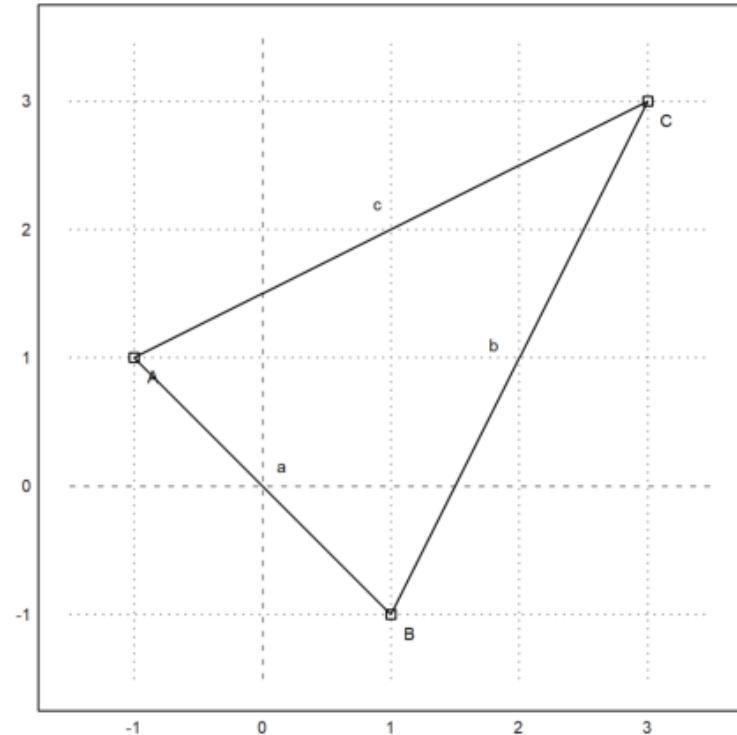


```
>C=[3,3]; plotPoint(C,"C"):
```



2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotSegment (A, B, "a")
>plotSegment (B, C, "b")
>plotSegment (A, C, "c")
>aspect (1):
```

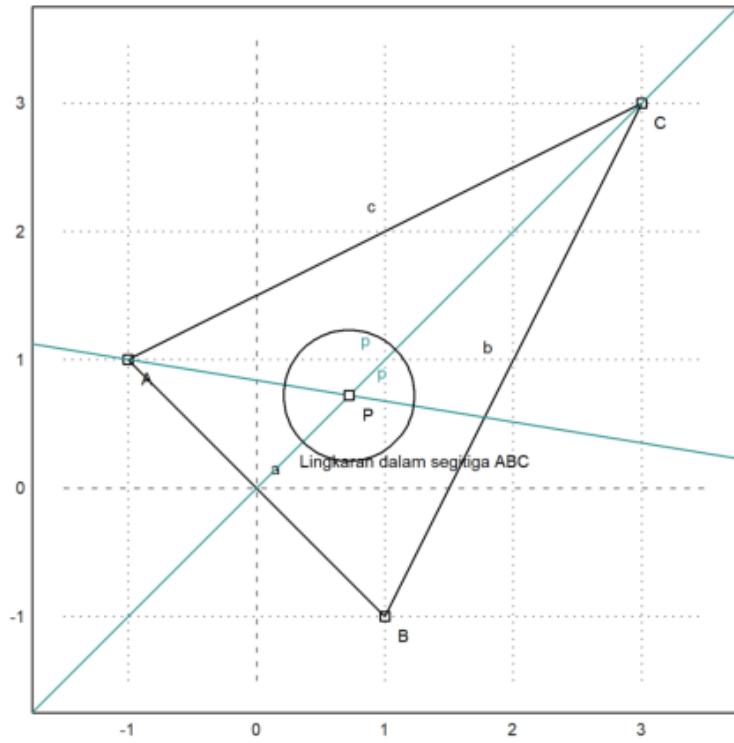


3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>l=angleBisector (A, C, B);
>g=angleBisector (C, A, B);
>P=lineIntersection (l, g)
```

[0.720759, 0.720759]

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P, "P");
>plotCircle(circleWithCenter(P, r), "Lingkaran dalam segitiga ABC");
```

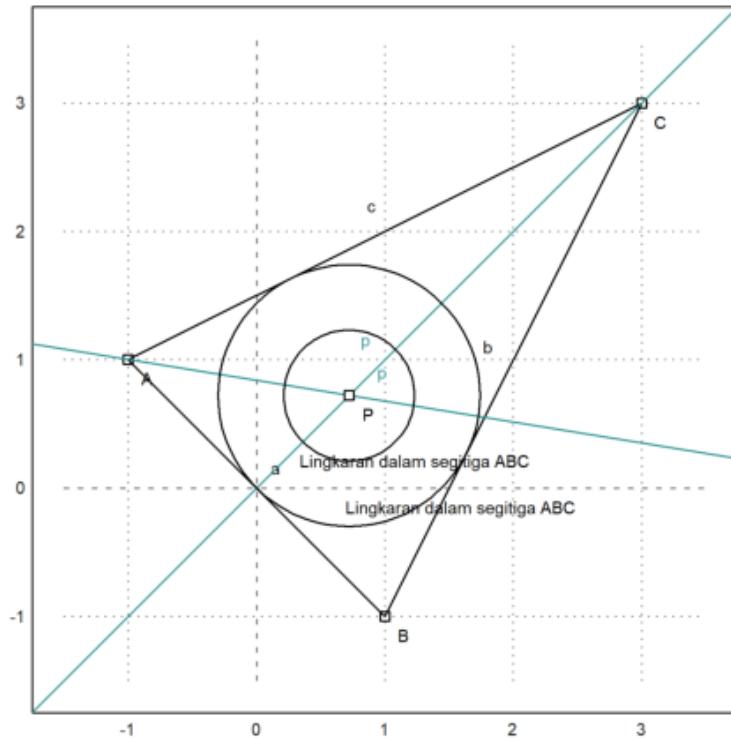


4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.01930746421
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```



Contoh 2: Geometri Simbolik

Kita dapat menghitung geometri secara numerik dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometry.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan perhitungan simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan penghitungan simbolik.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

$$\left[y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A, [x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$(x_1 - 1) y - x y_1 = -y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

$$[2, 1, 2]$$

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ - & - \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5} \right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y) [1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5} + 2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5} + 2}{6} \right]$$

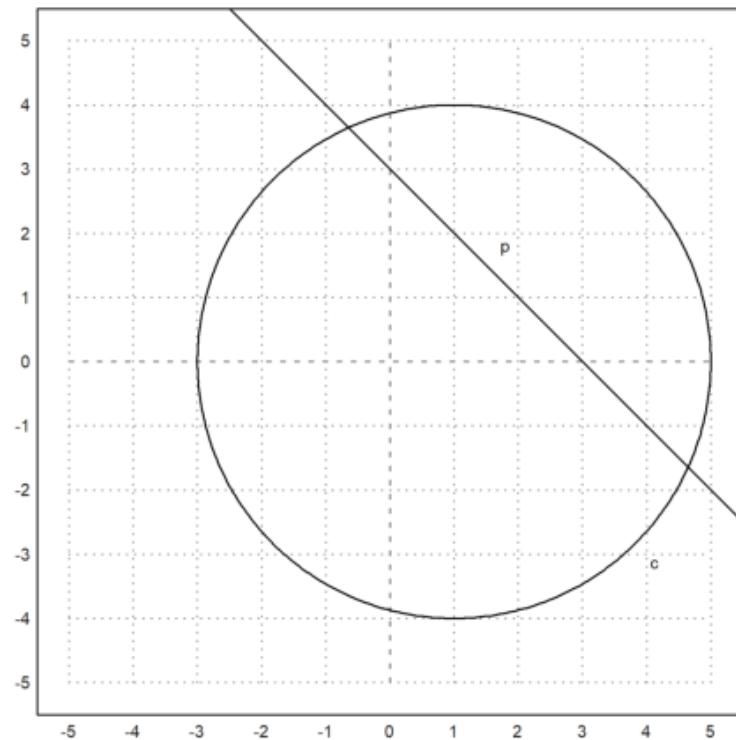
```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

$$[0.86038, 0.86038]$$

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l):
```

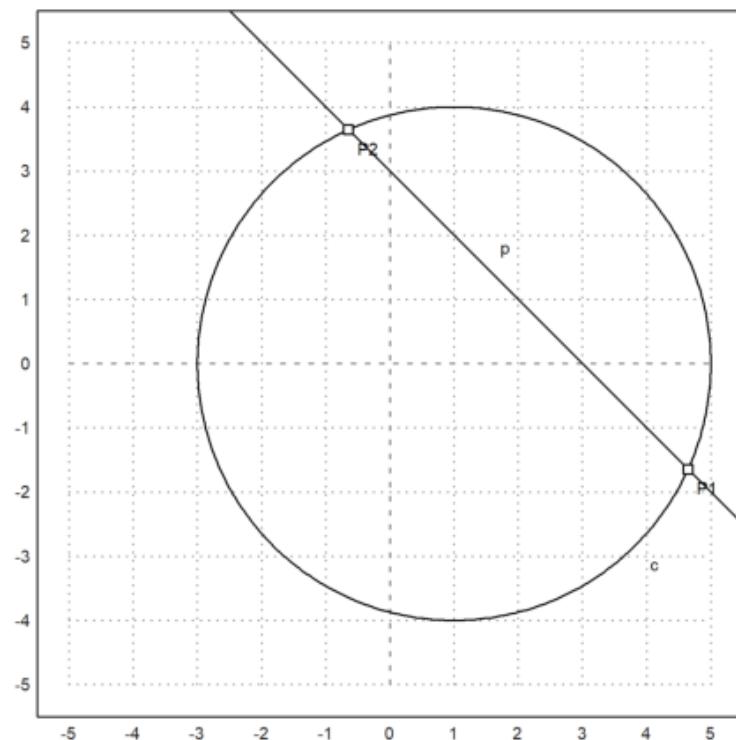


Perpotongan garis dengan lingkaran mengembalikan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);  
>P1, P2,
```

```
[4.64575, -1.64575]  
[-0.645751, 3.64575]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2);
```



Hal yang sama di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7} + 2, 1 - \sqrt{7} \right], \left[2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1 \right] \right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsumbr yang sama adalah sama besar.

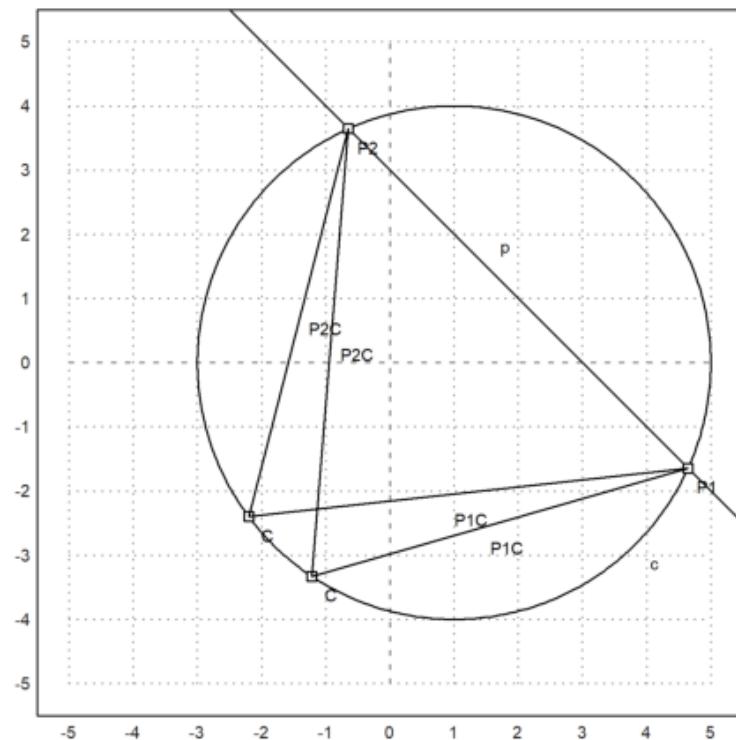
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degsprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

69°17' 42.68''

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degsprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

69°17' 42.68''

```
>insimg;
```

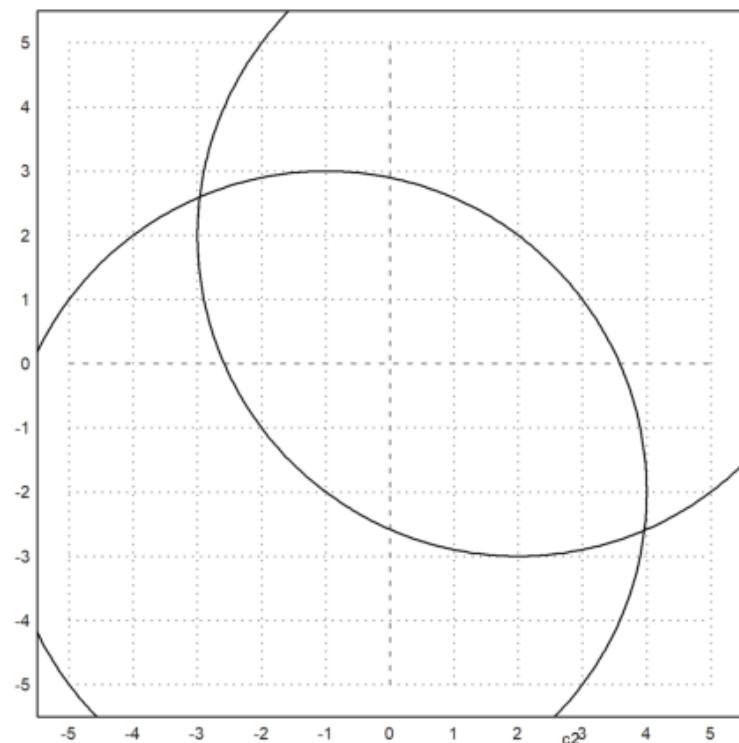


Garis Sumbu

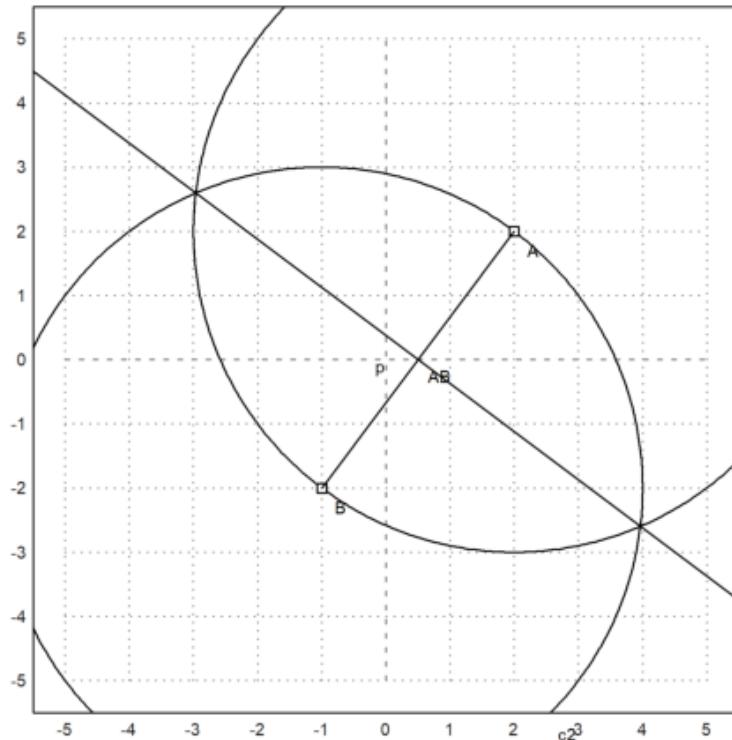
Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
```



```
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);
```



Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk titik potongnya cukup rumit. Tapi kita bisa menyederhanakan, jika kita menyelesaikan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

Ini memang sama dengan tengah tegak lurus, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y = \frac{-(2b_1 - 2a_1)x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2b_2 - 2a_2} \right]$$

```
>h &= getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y = \frac{(b_2 - a_2)x - a_1b_2 + a_2b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2.$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2, (x-a)^2+y^2=c^2], [x, y])
```

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} x &= \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, \quad y = \\ & \frac{\sqrt{(-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - 2a^4 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4)}}{2a}, \\ x &= \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, \quad y = \\ & \frac{\sqrt{(-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - 2a^4 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4)}}{2a} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Substitusi solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $ysol
```

Maxima said:

```
at: improper argument: sol[2][2]
#0: with(expr=y, eq=sol[2][2])
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $ysol ...
^
```

Kami mendapatkan formula Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H(a, b, [1, 0, 4]) = \frac{|a| |ysol|}{2}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
useglobal; return abs(a)*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
^
```

Dan jelas juga, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
s=%ploteval(g$,t,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
dw/n,dw/n^2,dw/n,auto,args());
```

Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana $b+c=d$ untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah ellips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

sol₂

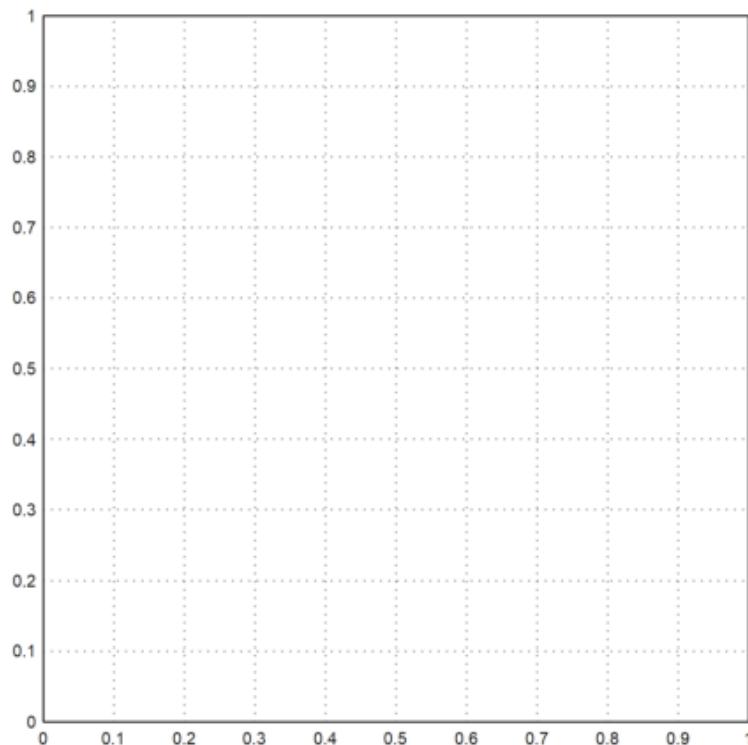
Dan buat fungsi dengan ini.

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

0

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum elips ini, yaitu

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1,$$

di mana (x_m, y_m) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk $x=0$. Jadi luas segitiga dengan $a+b+c=d$ adalah maksimal, jika sama sisi. Kami ingin mendapatkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0, diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{a y sol^2}{2} = 0, 0 = 0 \right]$$

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi $a=b=c=d/3$.

```
> $& solve(eqns, [a,b])
```

$$[[a = 0, b = \%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan $H(a,b,c)^2$ terhadap $a+b+d=d$.

```
>& solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la, diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>     diff(H(a,b,c)^2,c)=la, a+b+c=d], [a,b,c,la])
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... la,      diff(H(a,b,c)^2,c)=la, a+b+c=d], [a,b,c,la]) ...
^
```

Pertama, atur titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

Maxima said:

```
at: improper argument: sol[2]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a, 0]$$

Kemudian atur rentang plot, dan plot titiknya.

```

>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A");

```

Variable a1 not found!
 Use global variables or parameters for string evaluation.
 Error in Evaluate, superfluous characters found.
 Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
 mxmeval:
 return evaluate(mxm(s));
 Error in:
 ... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"): ...
 ^

Plot segmennya.

```

>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):

```

Variable a1 not found!
 Use global variables or parameters for string evaluation.
 Error in Evaluate, superfluous characters found.
 Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
 mxmeval:
 return evaluate(mxm(s));
 Error in:
 plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B") ...
 ^

Hitung bagian tengah tegak lurus di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah dari keliling.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kami mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{a_2^2 + a_1^2} \sqrt{a_2^2 + a_1^2 - 2 a a_1 + a^2}}{2 |a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

Variable a2 not found!
 Use global variables or parameters for string evaluation.
 Error in ^
 Error in expression: [a/2, (a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
 Error in:
 plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
 ^

Menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk jari-jari. Kami dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2 | factor
```

$$\left[\frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2}, 0, \frac{16 (a_2^2 + a_1^2)}{a_2^2} \right]$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk pusat ortosentrum, circumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

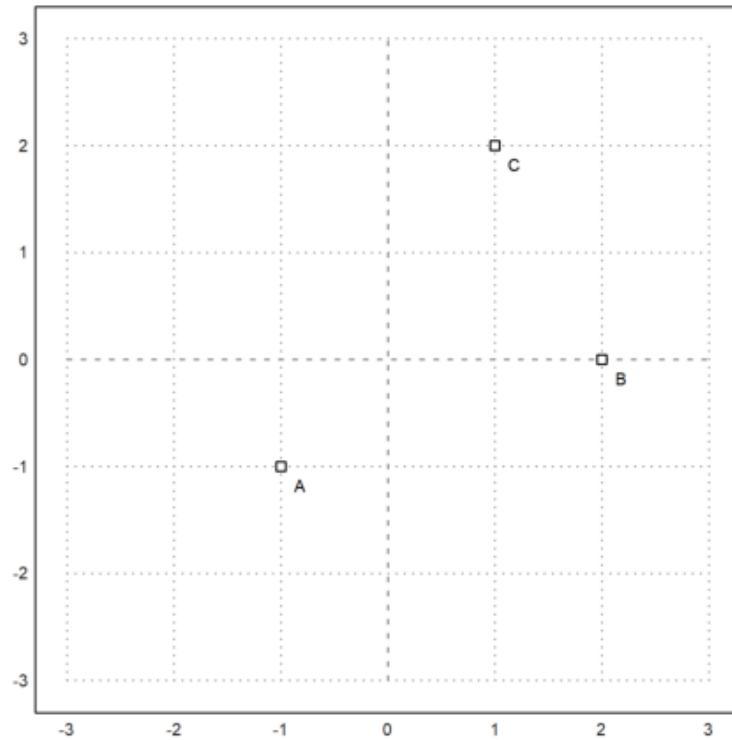
Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam segitiga.

Pertama, kami menentukan sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat secara ekspresi simbolis.

```
>A:=[-1,-1]; B:=[2,0]; C:=[1,2];
```

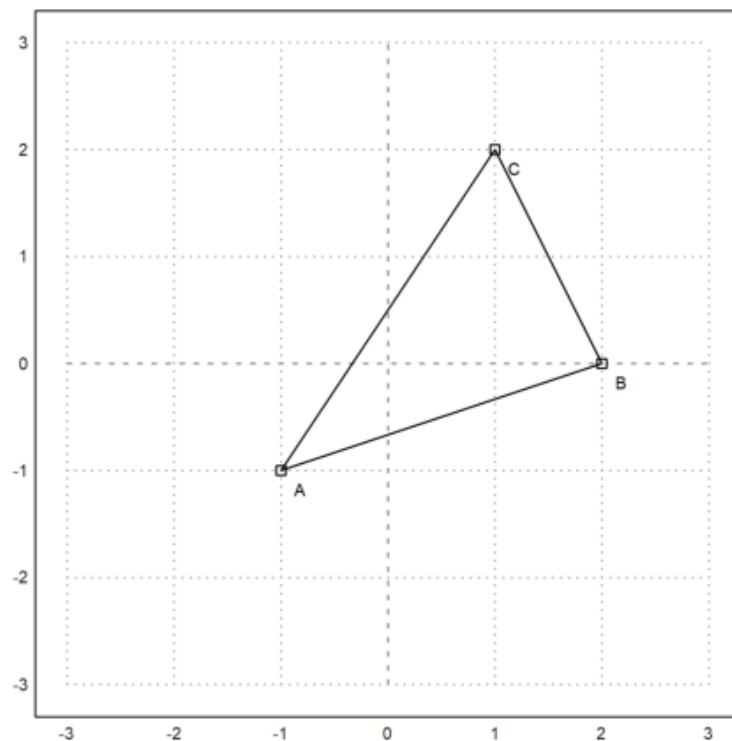
Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```



Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,"");
```



Berikut adalah luas segitiga menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi C.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

$$[-1, 3, -2]$$

Dan juga mendapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kami menghitung lingkaran dari ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

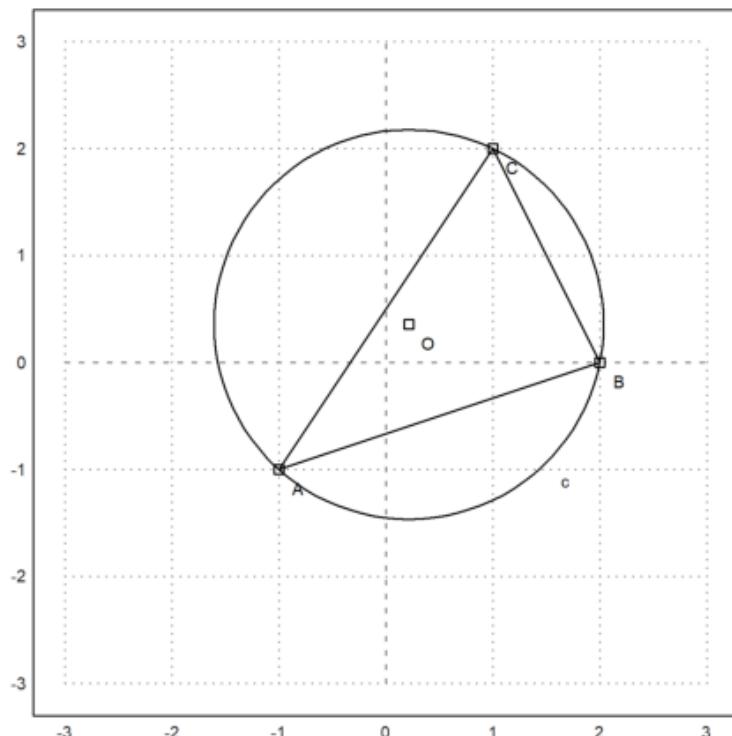
$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(), "O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A, lineThrough(C, B)), ...  
> perpendicular(B, lineThrough(A, C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

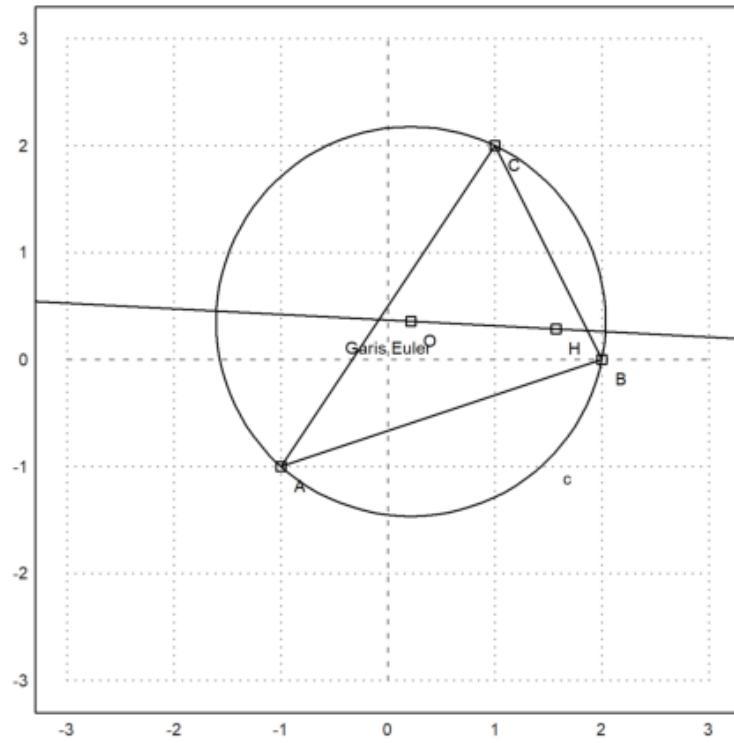
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H, O); $getLineEquation(el, x, y)
```

$$-\frac{19y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(), "H"); plotLine(el(), "Garis Euler"):
```

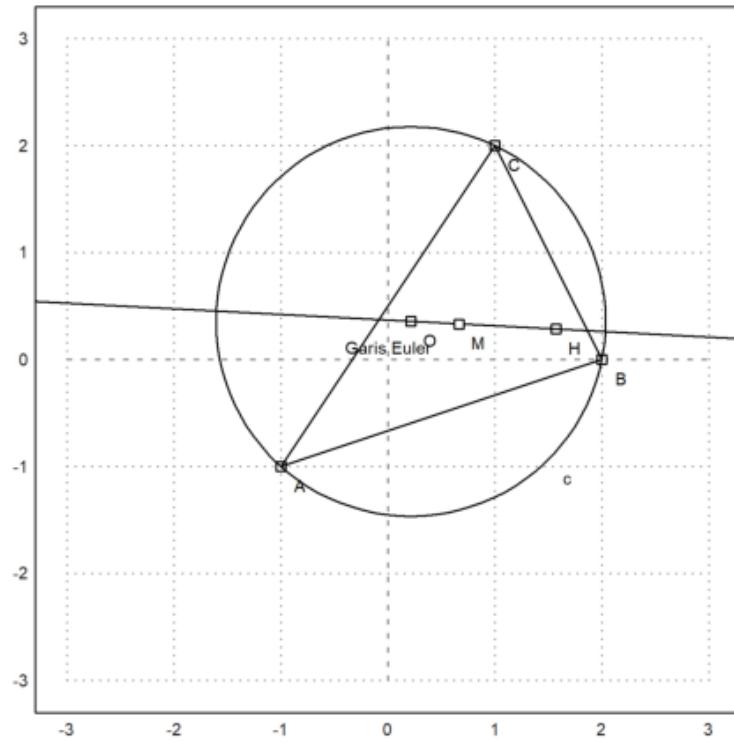


Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(), "M"); // titik berat
```



Teorinya mengatakan bahwa $MH = 2 \cdot MO$. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
> $distance(M, H) / $distance(M, O) | radcan
```

$$2$$

Fungsinya termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
> $computeAngle(A, C, B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

$60^\circ 15' 18.43''$

Persamaan untuk pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
> Q &= lineIntersection(angleBisector(A, C, B), angleBisector(C, B, A)) | radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right)\sqrt{5}\sqrt{13} - 15\sqrt{2} + 3}{14}, \frac{(\sqrt{2} - 3)\sqrt{5}\sqrt{13} + 52^{\frac{3}{2}} + 5}{14} \right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

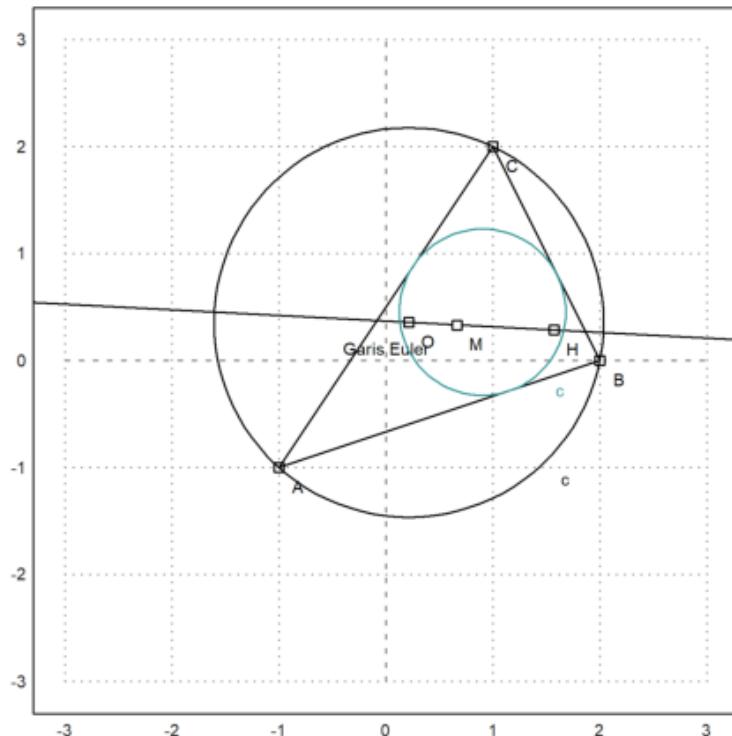
```
> r &= distance(Q, projectToLine(Q, lineThrough(A, B))) | ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{(-41\sqrt{2} - 31) \sqrt{5}\sqrt{13} + 115\sqrt{2} + 614}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

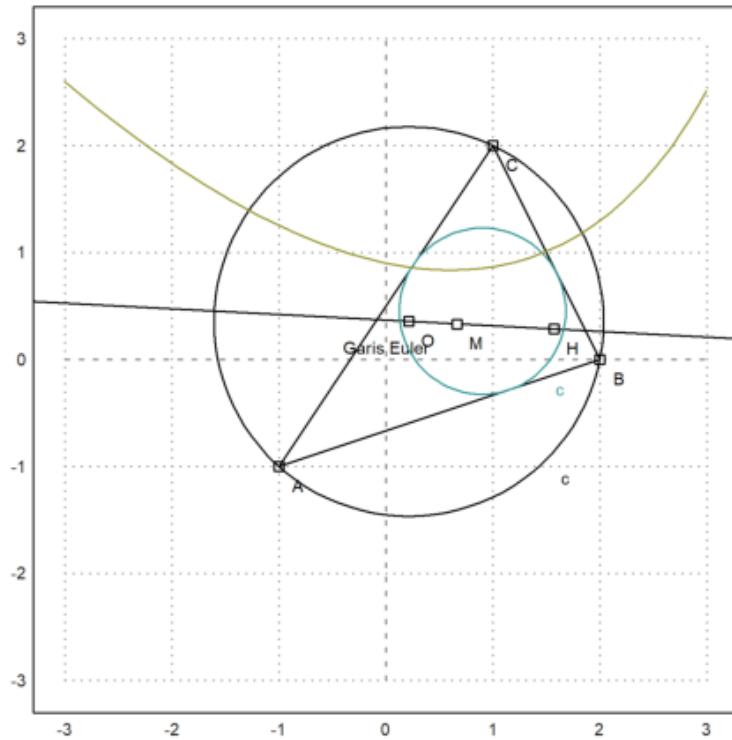
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2-y)^2 + (1-x)^2} = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima dapat menemukan solusi, jika kita mengkuadratkan persamaan. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

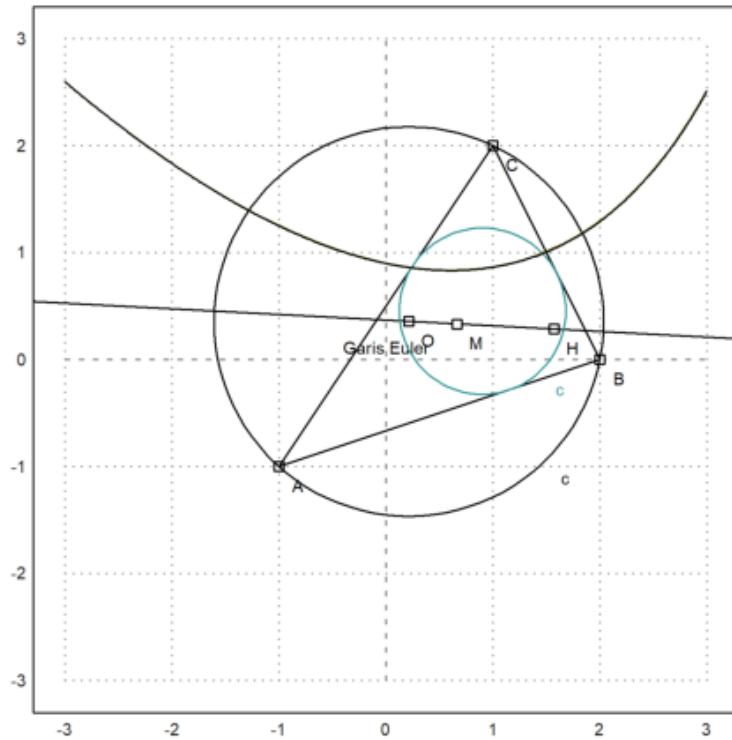
$$\begin{aligned}y &= -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26, \\y &= -3x + \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26\end{aligned}$$

Solusi pertama adalah

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama ke pertunjukan plot, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teori memberi tahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```



```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%); // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T, lineThrough(A, B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T, U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%); // jarak T ke AB
```

$$2.135605779339061$$

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi oleh ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Agung", Wildberger mengusulkan untuk menggantikan pengertian klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadran dan sebaran. Menggunakan ini, memang mungkin untuk dihindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

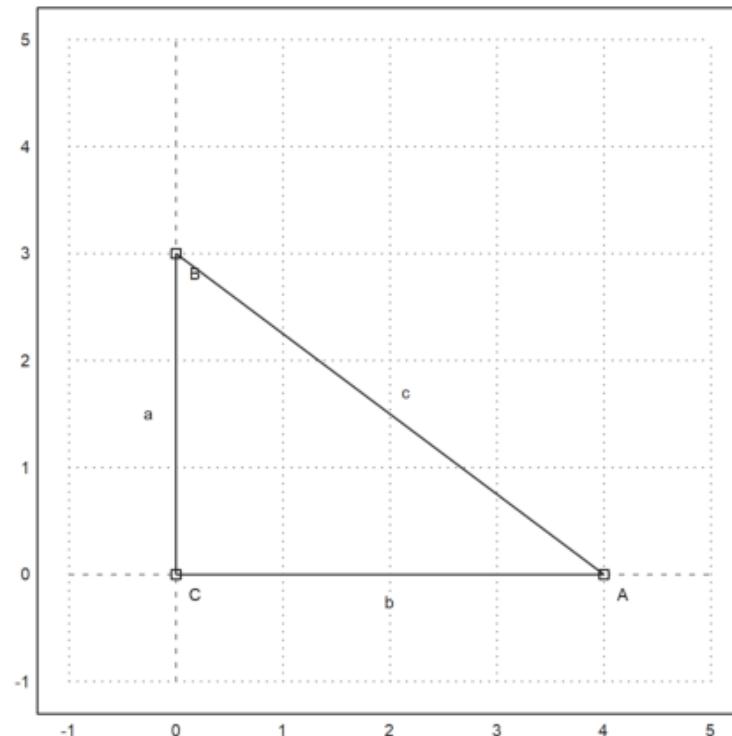
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolis Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional bahwa perhitungan dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda diundang untuk memeriksa hasil tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik.

```
>load geometry;
```

Untuk pendahuluan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c}$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan melakukan invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara perkiraan.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

$36^\circ 52' 11.63''$

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Pengertian pertama dari trigonometri rasional adalah sebuah kuadran, yang menggantikan jarak. Faktanya, itu hanya jarak kuadrat. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.

Lalu Teorema Pythagoras menjadi $a + b = c$.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebarannya. Mengukur persebaran bukaan antar baris. Ini 0, jika garisnya sejajar, dan 1, jika garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadrat dari segitiga persegi panjang mana pun dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti yang sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengubah nilai perkiraan sudut wa menjadi menyebar, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

$9/25$

Hukum kosinus dari trigonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah sebaran di sudut A. Sisi a seperti biasa, berlawanan dengan sudut A. Hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left(bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left(bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \left[\frac{14bb(1-saa)}{3}, \frac{14bb(1-saa)}{3}, \frac{52\frac{3}{2}bb(1-saa)}{3} \right]$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukan ini, kita menghasilkan crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan menyelesaikannya untuk penyebaran yang tidak diketahui sa.

Anda dapat melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x = \frac{9}{25} \right]$$

$$\left[x = \frac{9}{25} \right]$$

Kami sudah tahu ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari hukum silang.

Kita juga bisa menyelesaikan ini untuk umum a, b, c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung sebaran sudut sebuah segitiga diberi kuadran dari tiga sisi.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\left[\frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36}, \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36}, \frac{168 bb x + 36 bb^2 + (-72 aa - 84) bb + 36 aa^2 - 84 aa + 49}{36} \right] \right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah ditentukan dalam file geometry.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita bisa menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga bersisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

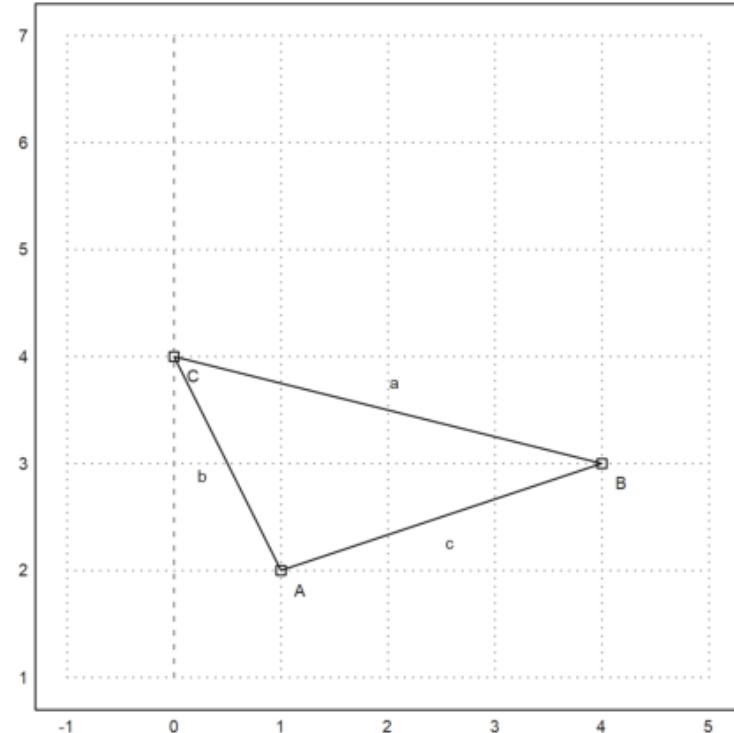
```
>degrint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

$67^\circ 47' 32.44''$

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih canggih.
Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi dari File Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi kuadran antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena $c+b$ bukan a , segitiga tidak persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

17

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi `computeAngle` menggunakan metode biasa berdasarkan titik produk dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{17}}\right)$$

32.4711922908

Menggunakan pensil dan kertas, kita bisa melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a , b , dan c ke dalam lintas hukum dan pecahan untuk x .

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(% ,x),
```

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Artinya, fungsi penyebaran yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Itu menyelesaikan $\sin(\arccos(...))$ istilah untuk hasil pecahan. Kebanyakan siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita mendapatkan sebaran di B , kita bisa menghitung tinggi ha di sisi a . Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut telah diproduksi dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan menyebar.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt (ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt (ha) *sqrt (a) /2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle (B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Formula Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue (a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung seberan di B untuk segitiga dengan sisi a , b , dan c . Kemudian kami menghitung luas area yang dikuadratkan ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita mendapatkan formula Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c + b + a) (c - b + a) (c + b - a) (c + b + a)}{16}$$

$$\frac{(-c + b + a) (c - b + a) (c + b - a) (c + b + a)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari penyebaran adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut serupa. Namun, tiga sebaran segitiga memenuhi aturan "penyebaran rangkap tiga" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc + sb + sa)^2 = 2 (sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4 sa sb sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang bertambah menjadi 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Sejak penyebaran

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Misalnya, kita dapat menghitung sebaran sudut 60° . Ini $3/4$. Persamaan memiliki solusi kedua, Namun, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

Sebaran 90° jelaslah 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90° , penyebarannya menyelesaikan persamaan penyebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan $a+b=1$.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran 180° -t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau perbedaan dari dua sudut lainnya.

Jadi kita bisa menemukan sebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami menjelaskan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x, function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

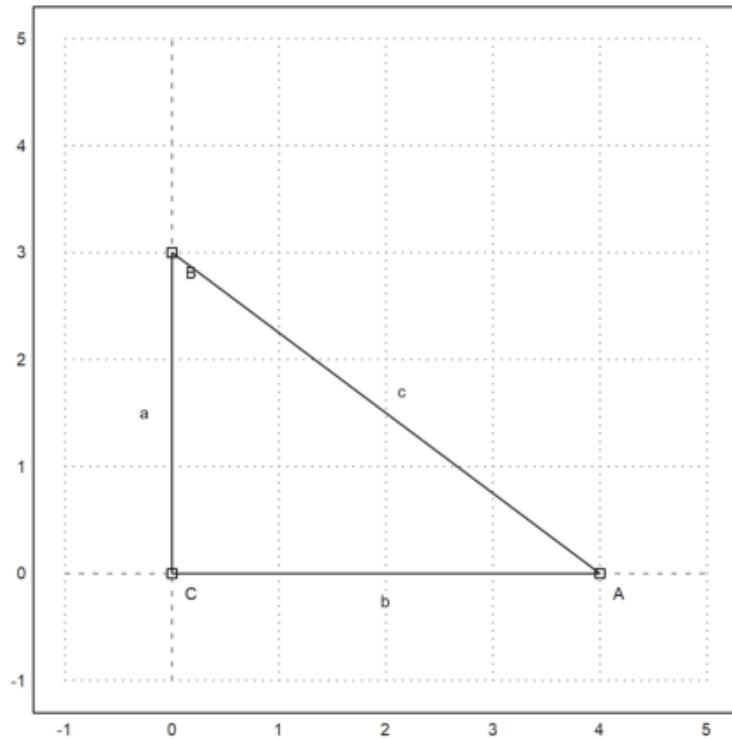
$$[x = 4a - 4a^2, x = 0]$$

$$- 4 (a - 1) a$$

Garis Bagi Sudut

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C:=[0,0]; A:=[4,0]; B:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut pada A. Tapi kita ingin menyelesaiakannya untuk umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita menghitung sebaran sudut terbagi di A, menggunakan rumus sebaran rangkap tiga. Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kami harus memilih yang benar. Solusi yang lain mengacu pada sudut terbagi 180° -wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(% ,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\begin{aligned} & \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a} \\ & \left[x = \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}, x = \frac{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a} \right] \\ & \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a} \end{aligned}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut di Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arccsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

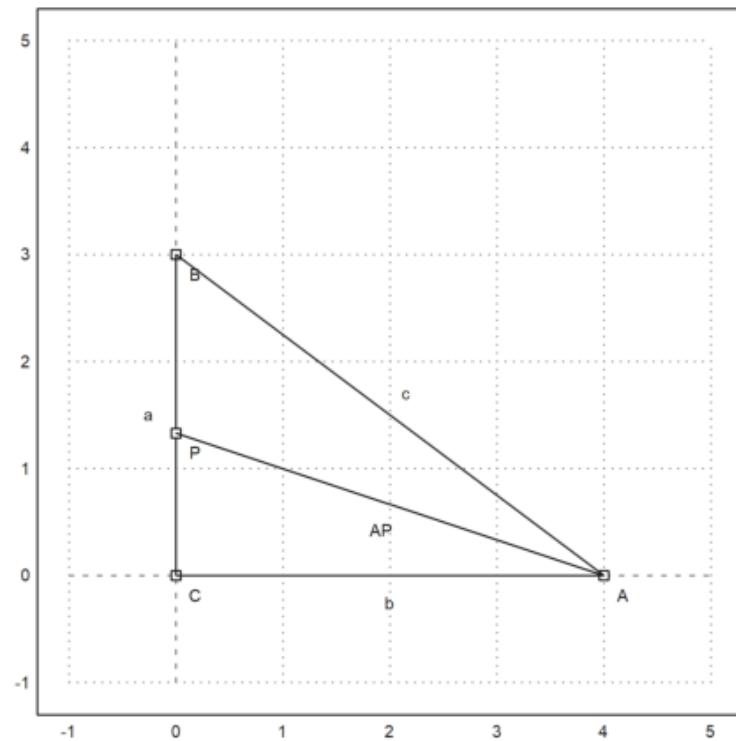
$$18^\circ 26' 5.82''$$

Titik P adalah perpotongan dari garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

$$[0, 1.33333]$$

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

$$0.321750554397$$

$$0.321750554397$$

Sekarang kita menghitung panjang bisektor AP.

Kami menggunakan teorema sinus di segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

memegang di segitiga apa pun. Persegi itu, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

dimana a,b,c menunjukkan kuadran.

Karena BPA sebaran adalah $1-sa^2$, kami dapatkan darinya bisa/ $1-b/(1-sa^2)$ dan dapat menghitung bisa (kuadran garis bagi sudut)

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356  
4.21637021356
```

Kami juga dapat menghitung P menggunakan rumus penyebaran.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b(\sqrt{b}\sqrt{b+a}-b-a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

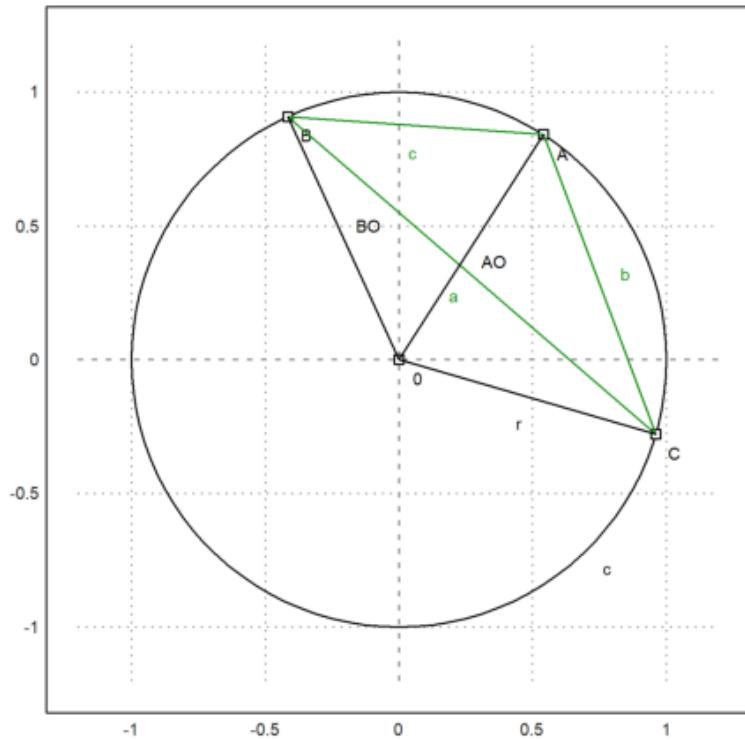
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...  
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...  
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
>color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...  
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...  
>insimg;
```



Kita bisa menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus sebaran rangkap tiga untuk sudut di pusat O untuk r . Dengan demikian kami mendapatkan formula untuk jari-jari kuadrat dari keliling dalam hal kuadrat sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{abc}{c^2 - 2bc + a(-2c - 2b) + b^2 + a^2}$$

Kita bisa menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk titik A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

Faktanya, penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akord.

```
> $spread(b, a, c) * rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya sebarannya adalah $b/(4r)$, dan kita melihat bahwa sudut akord b adalah setengah dari sudut tengah.

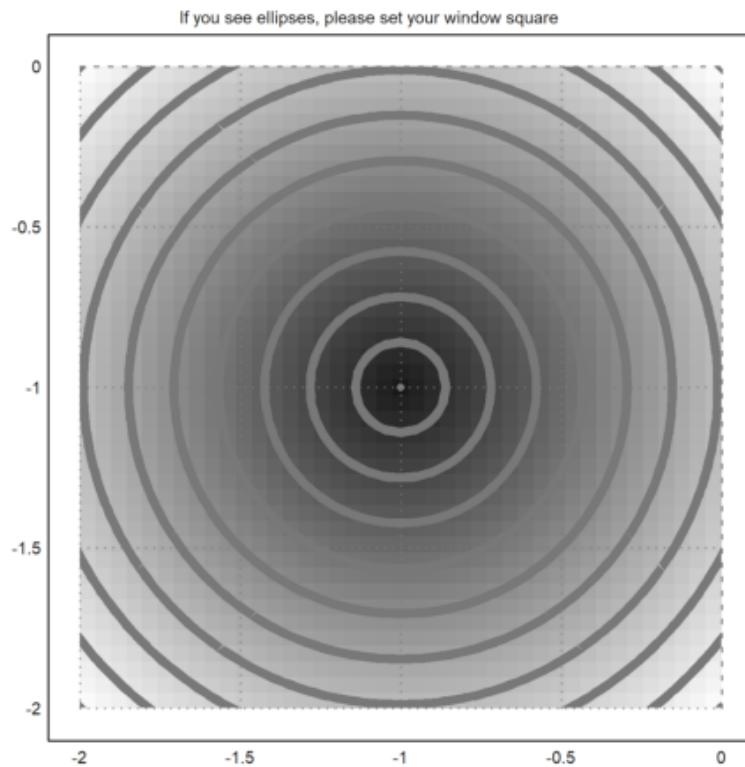
```
> $doublespread(b / (4 * r)) - spread(b, r, r) | ratsimp
```

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang⁰

Catatan awal

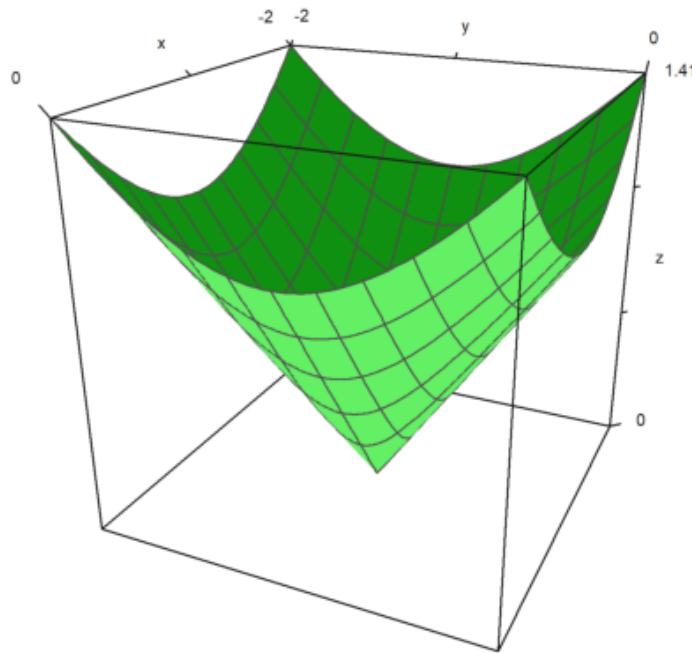
Fungsi yang mana, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki lebih garis tingkat sederhana: lingkaran yang berpusat di A.

```
>&remvalue();  
>A=[-1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)  
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...  
>title="If you see ellipses, please set your window square":
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

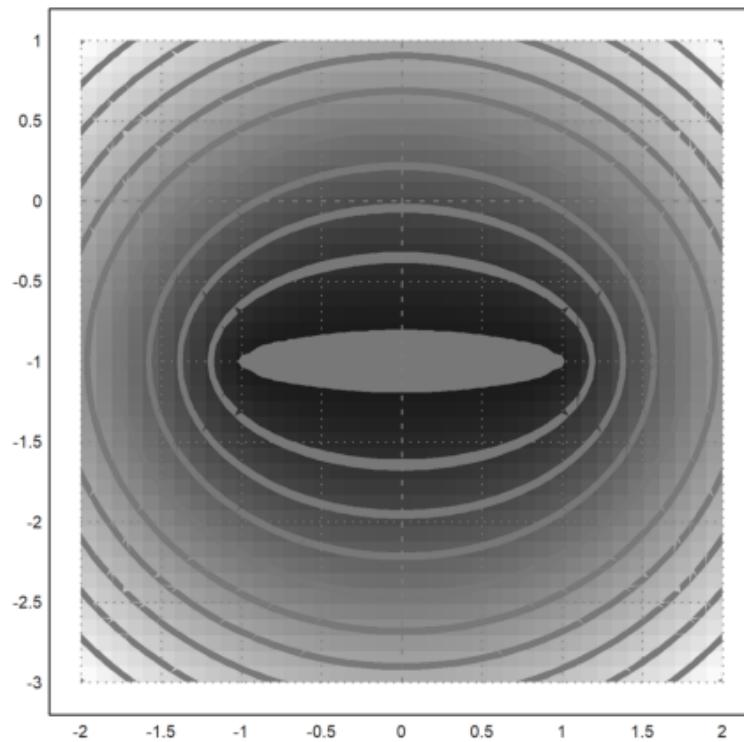


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua titik

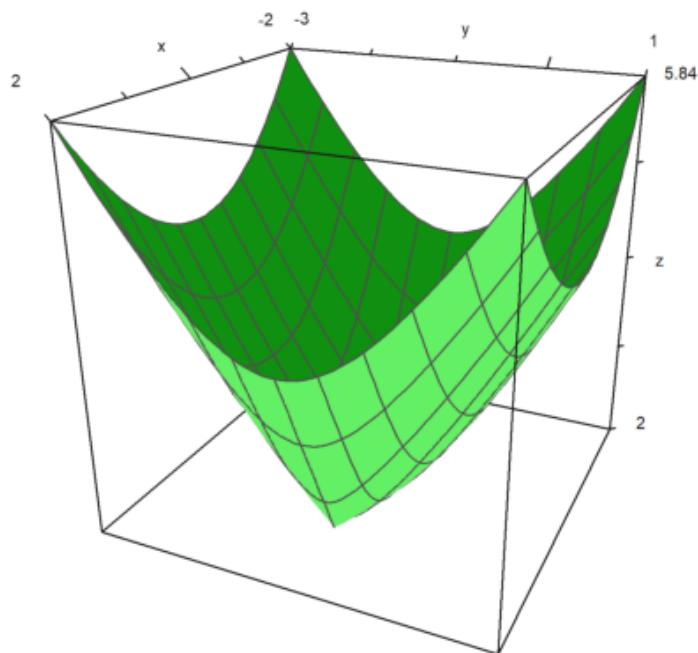
Sekarang kita melihat fungsi $MA+MB$ dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta terkenal" bahwa level itu kurva adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk minimum AB yang konstan pada segmen tersebut[AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



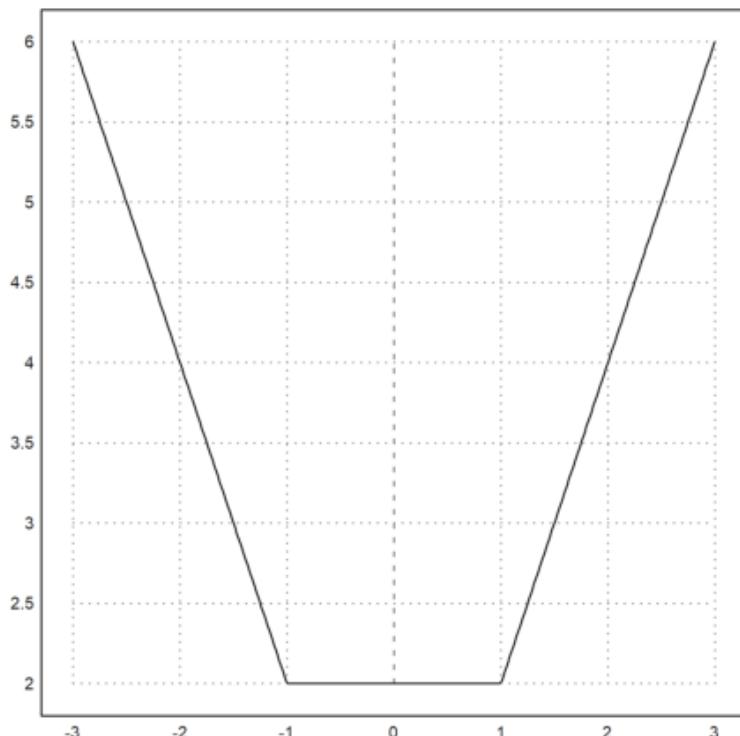
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1):
```



Batasan ke baris (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



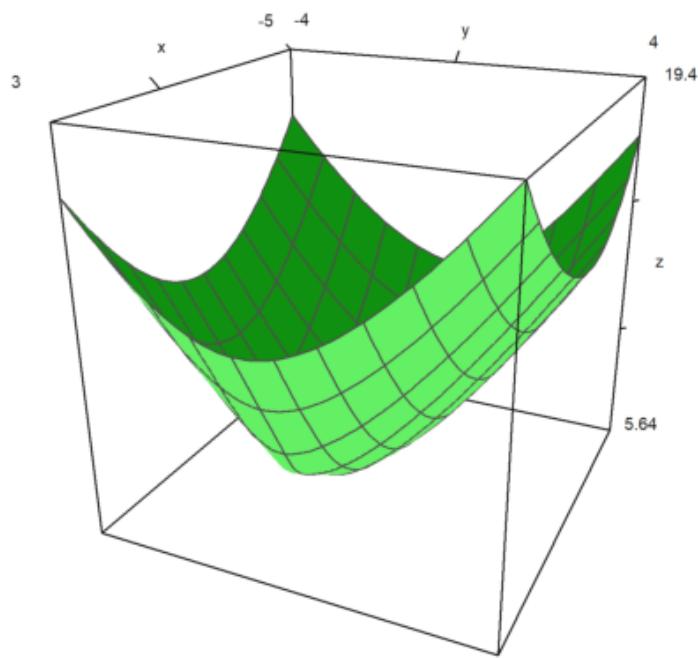
Tiga titik

Sekarang segalanya menjadi lebih sederhana: Sedikit kurang diketahui bahwa $MA+MB+MC$ mencapai minimumnya pada satu titik bidang tetapi untuk menentukannya kurang sederhana:

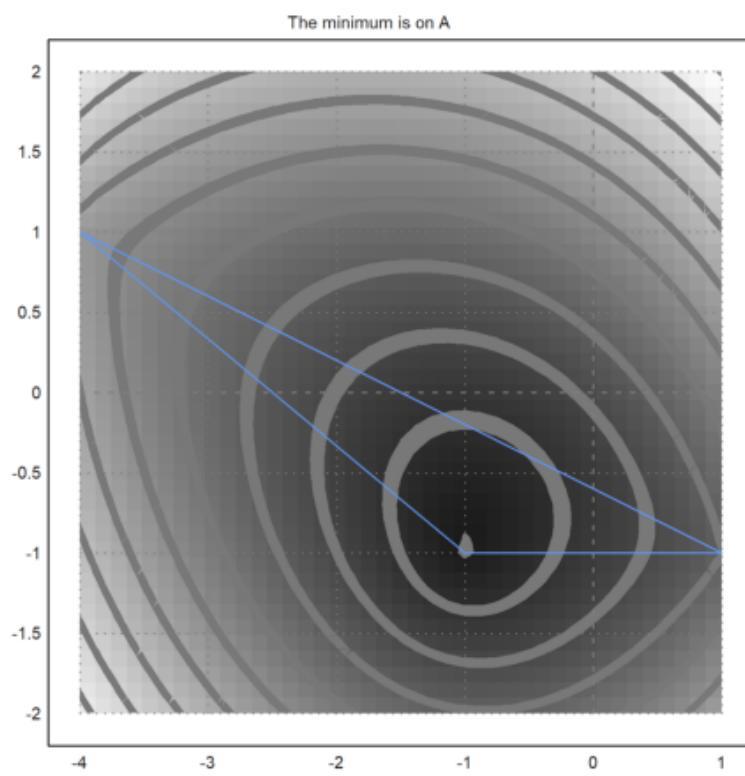
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah dalam A), maka minimumnya tercapai pada ini sangat penting (katakanlah $AB+AC$.

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

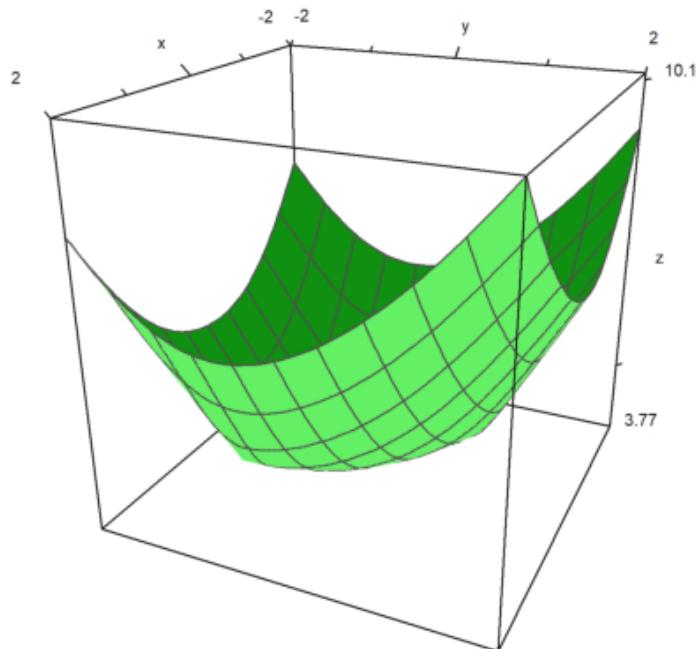


```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

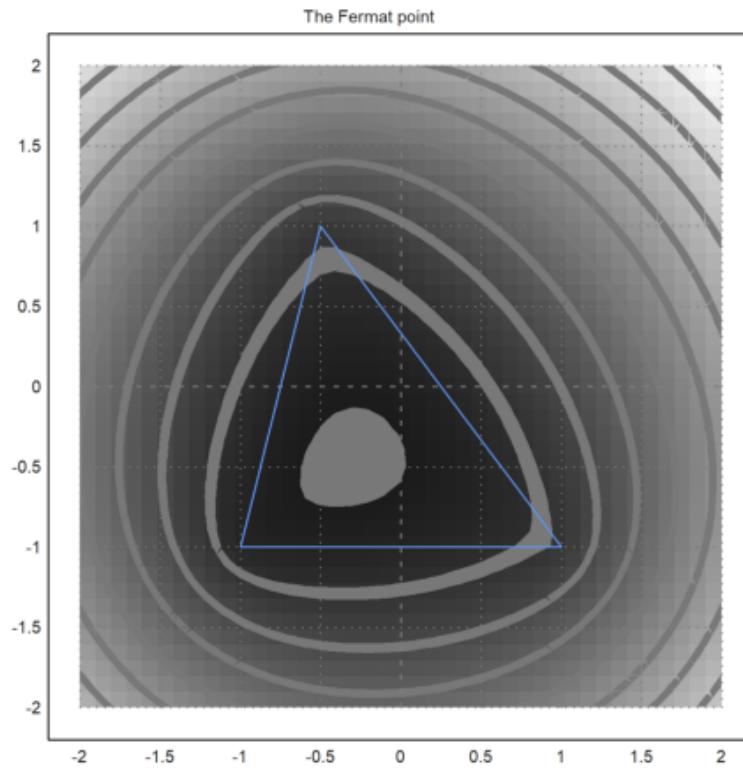


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120° , minimum berada pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi ABC dengan sudut yang sama (lalu masing-masing 120°):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```



```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)';
>plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



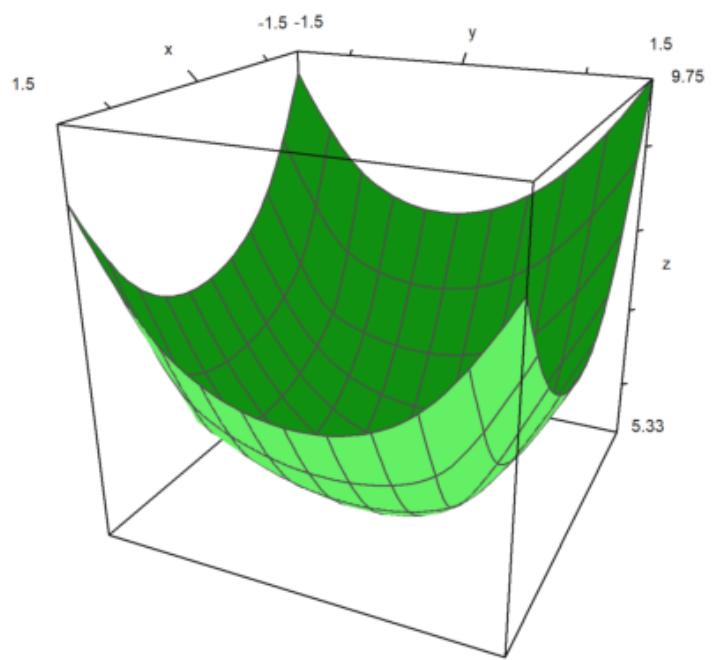
Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu yang halus ditulis di Java yang memiliki instruksi "garis kontur" ...

Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Prancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada orang lain penggila seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi poin uniknya F sedemikian sehingga $FA+FB+FC$ minimal, disebut titik Fermat segitiga. Tapi sepertinya beberapa tahun sebelumnya, Torricelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Pokoknya tradisinya adalah mencatat titik F ini ...

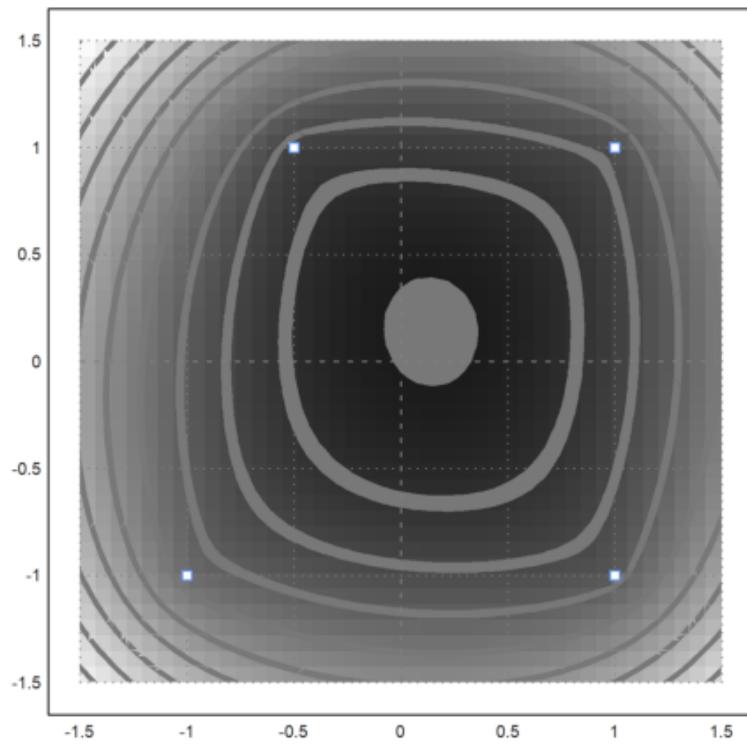
Empat titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik D ke-4 dan mencoba meminimalkan $MA+MB+MC+MD$; Katakanlah bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antena Anda sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan kabel kecil sepanjang mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);  
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);  
>insimg;
```



Masih ada minimum dan tidak ada yang dicapai pada simpul A,B,C atau D:

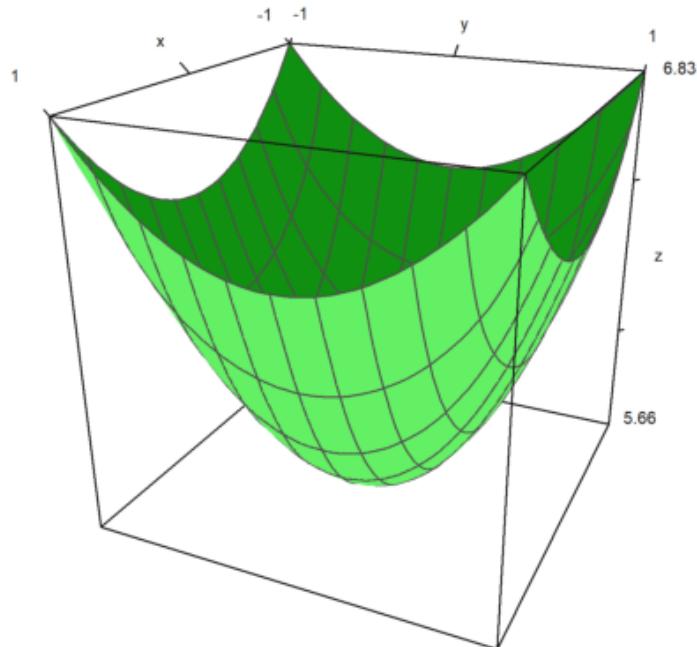
```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f", [0.2,0.2])
```

```
[0.142858, 0.142857]
```

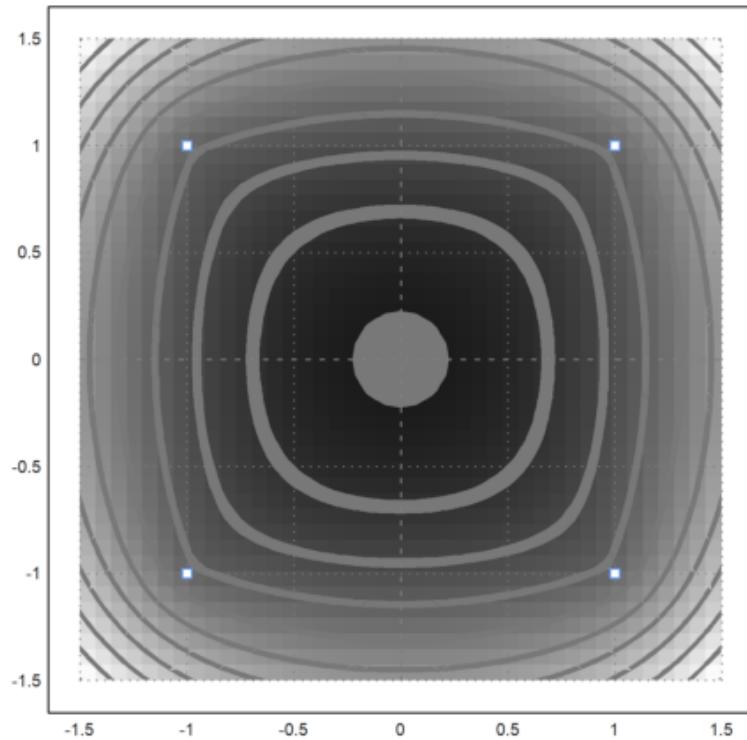
Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal rasional atau mendekati rasional ...

Sekarang ABCD adalah bujur sangkar, kami andaikan bahwa titik optimal adalah pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda memiliki Povray diinstal, dan pvcgine.exe di jalur program.

Pertama kami menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometry.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0], [1,a])
```

```
[ - a, 1, 0 ]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0], [-1,a])
```

```
[ - a, - 1, 0 ]
```

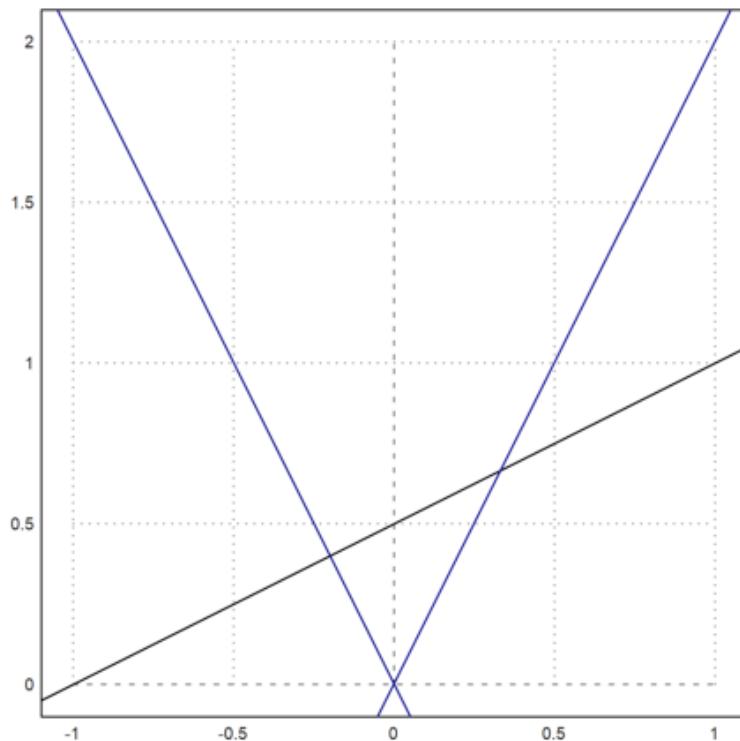
Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami plot semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);  
>color(black); plotLine(g(), "")  
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(), ""), plotLine(g2(), ""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u-1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, di mana jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u = \frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2+1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1}, u = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2+1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1} \right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

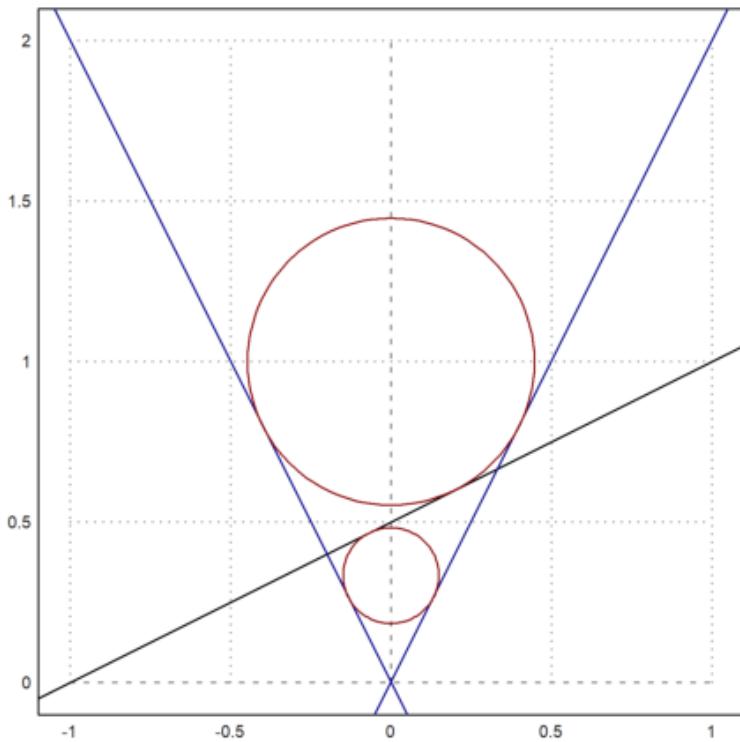
```
[0.333333, 1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071, 0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]), "");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]), "");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return. Pertama kita memuat fungsi povray

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kami menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();  
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");  
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];  
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kami menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]  
>P1=projectToLine([0,u[1]],g()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);  
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));  
>P2=projectToLine([0,u[2]],g()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);  
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];  
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));  
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];  
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);  
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik dengan segmen garis.

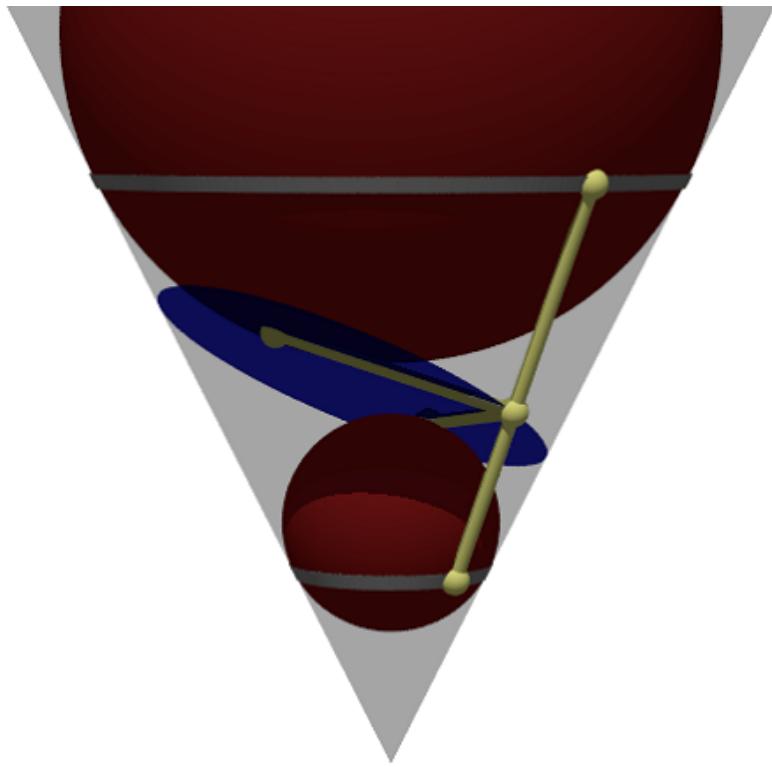
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));  
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));  
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kami membuat pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);  
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsiz/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsiz/2],1);  
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));  
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsiz/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsiz/2],1);  
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



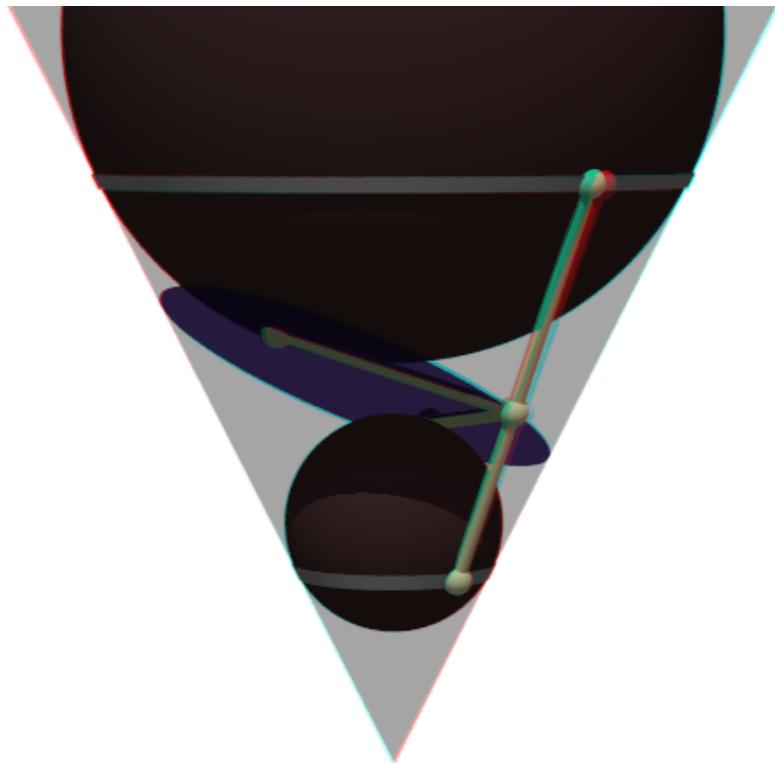
Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
```

```
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah / cyan untuk mengapresiasi efek berikut.

```
>povanaglyph("scene", zoom=11, center=[0, 0, 0.5], height=10°, angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Di notebook ini, kami ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat di dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu dulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569, 1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];  
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu bola ke bola lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, distance] dalam radian.Untuk menghitung jarak di bumi, kita mengalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7° .

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''  
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu dekat hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA, Semarang)->"km"; // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk bumi yang elips. Sekali lagi, kami mencetak dalam format cara maju.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2"; // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan mengambil perawatan kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kami juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];  
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->"km"; // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

The heading is the same as the one computed in Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kami tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kami menambahkan heading dan jarak ke posisi aslinya. Begitulah, karena kita tidak menghitung fungsi invers dengan tepat, tetapi mengambil pendekatan dari jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jarak yang paling pendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Bagus lingkaran tidak mengikuti tajuk konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan judul yang sama selama perjalanan kita.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh jaraknya, menggunakan heading ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya masih jauh.

```
>sposprint(p), skmpprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'  
1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada ketinggian yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran garis lintang 30° , tetapi jalur yang lebih pendek mulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan heading kita di sepanjang cara. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...  
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°  
81.67°  
83.71°  
85.78°  
87.89°  
90.00°  
92.12°  
94.22°  
96.29°  
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti tajuk yang sama terlalu lama.

```
>skmpprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan heading setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmpprint(esdist(p,Monas))
```

0.000km

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

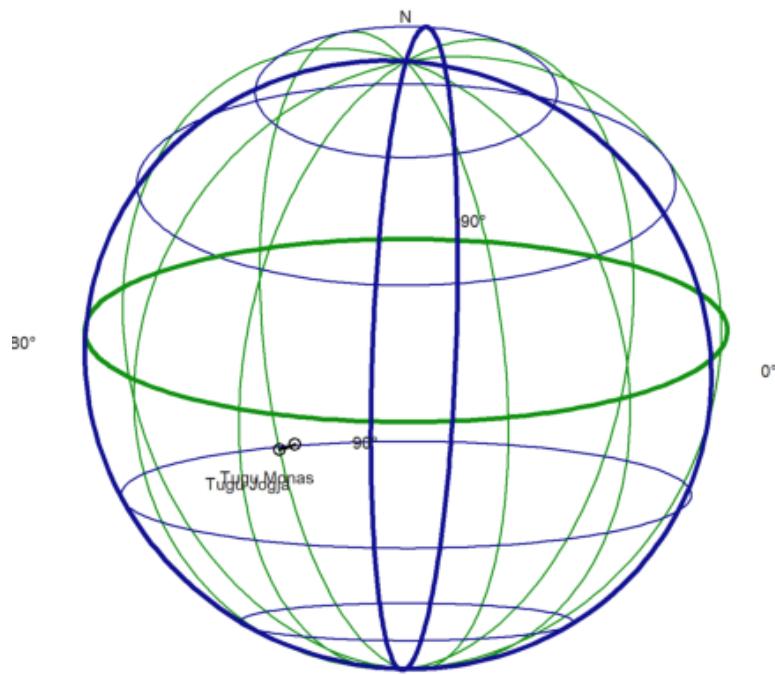
```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kami menulis sebuah fungsi, yang menggambarkan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu, "Tugu Jogja"); plotpos(Monas, "Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

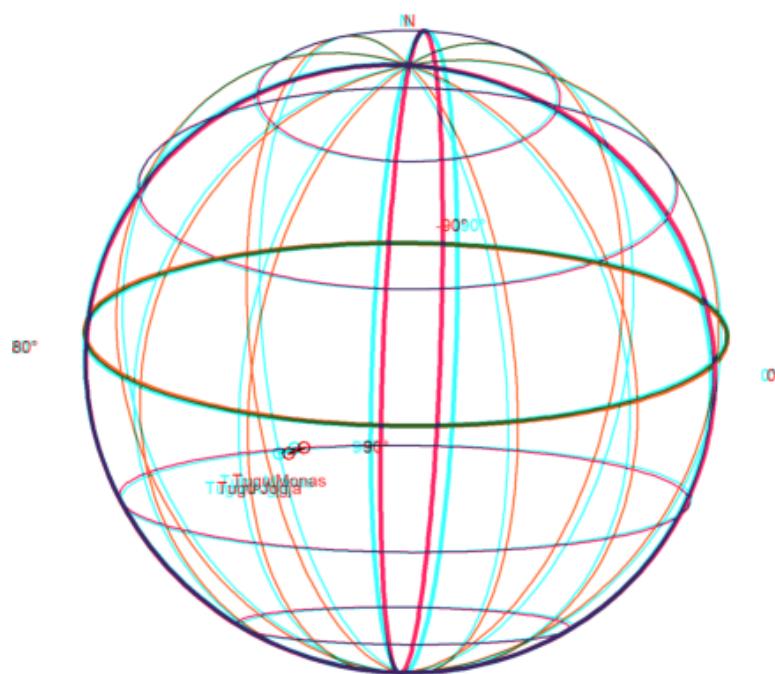
Sekarang plot semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan `plot3d` untuk mendapatkan tampilan anaglyphnya. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah / cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4) :
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah $(360/n)$.
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan $(360/n)$.
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya $y = ax^2 + bx + c$.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

– Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung

(sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

– Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

– Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar

lingkaran dalamnya.

– Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

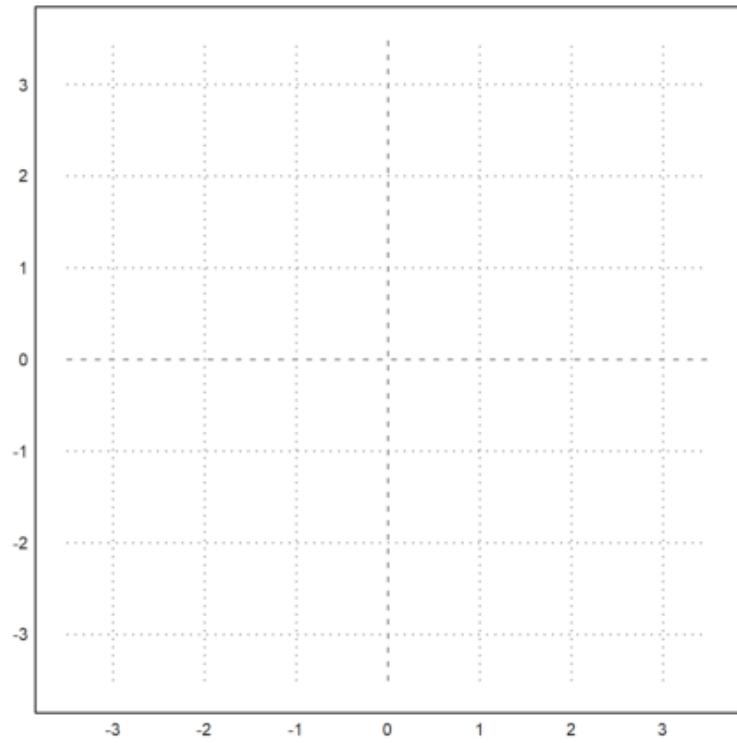
Penyelesaian :

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

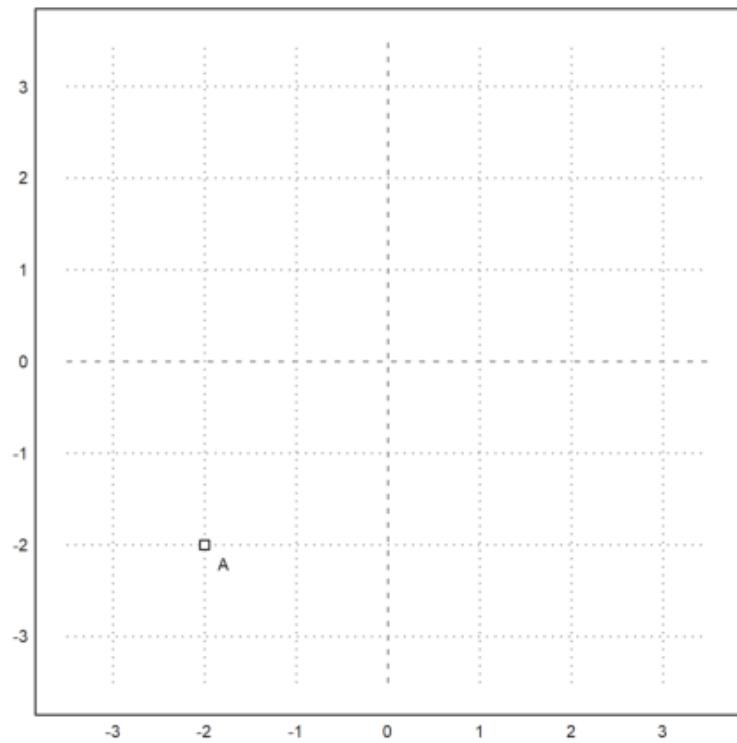
```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

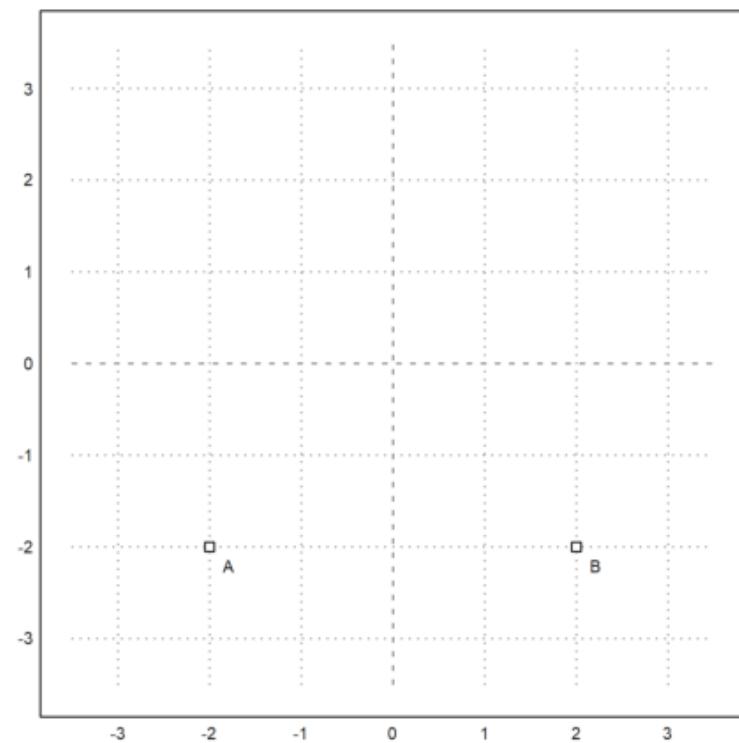
```
>setPlotRange (-3.5,3.5,-3.5,3.5):
```



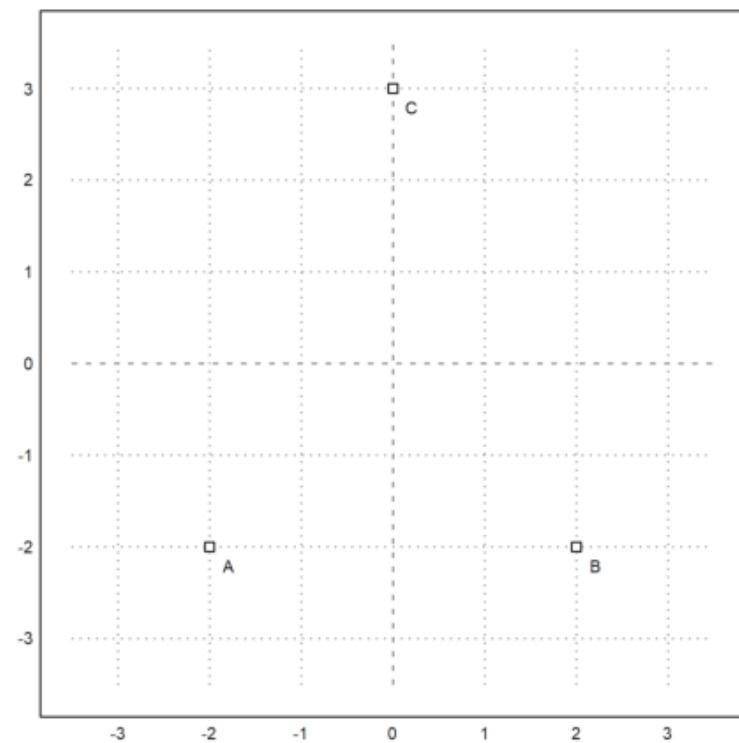
```
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");
```



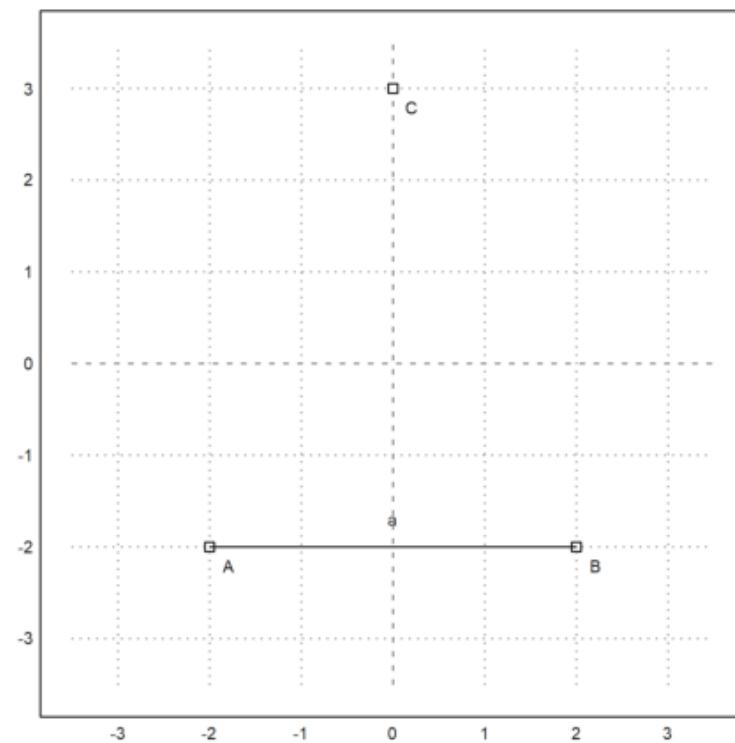
```
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B"):
```



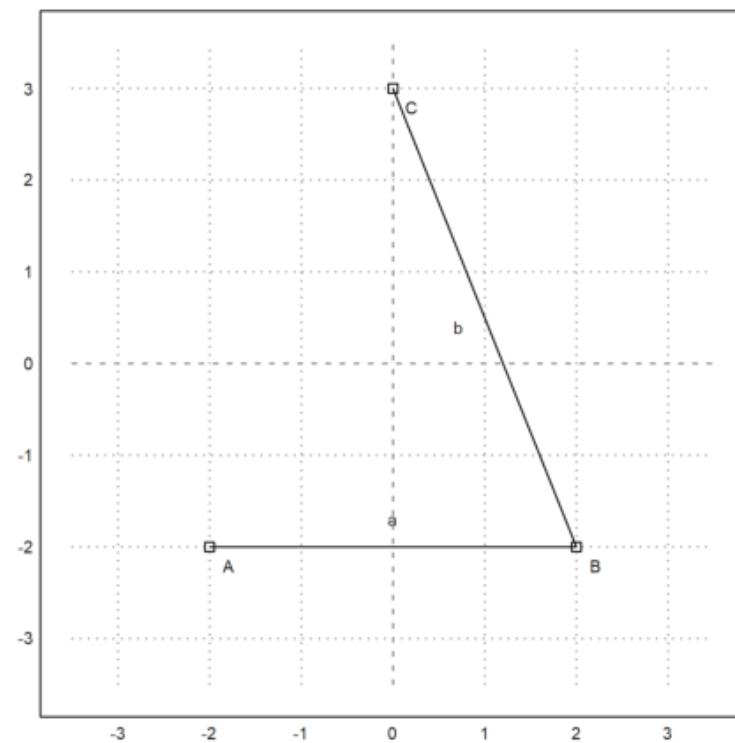
```
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C"):
```



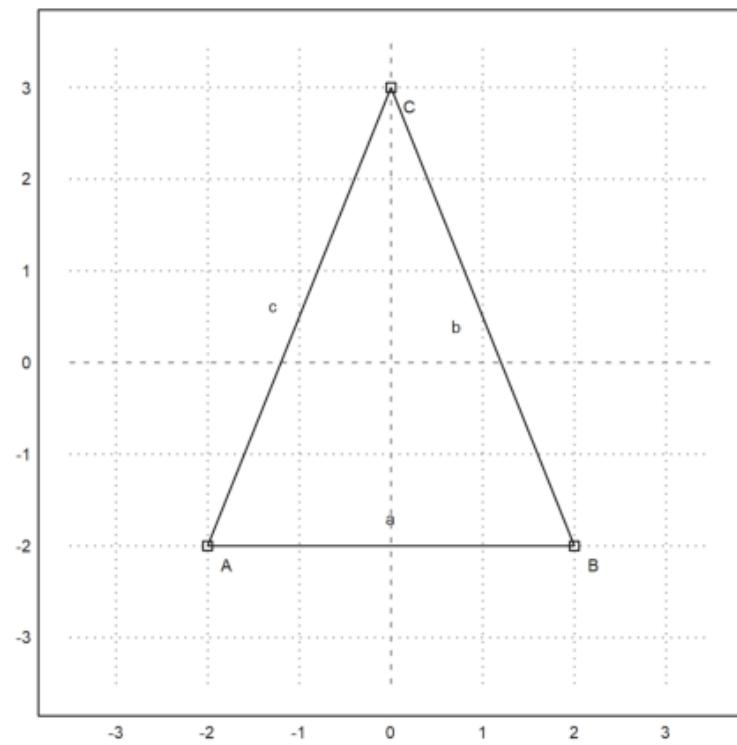
```
>plotSegment (A, B, "a") :
```



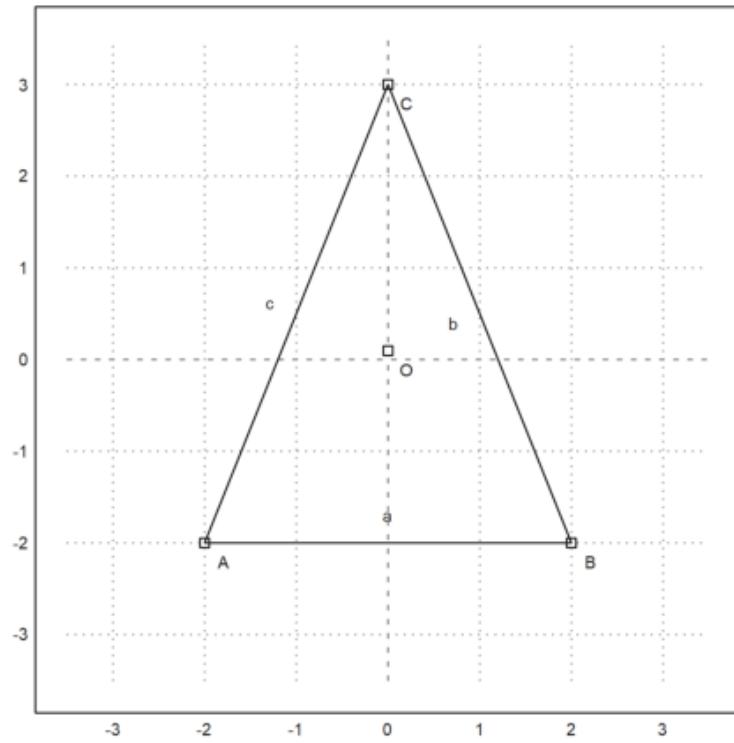
```
>plotSegment (B, C, "b") :
```



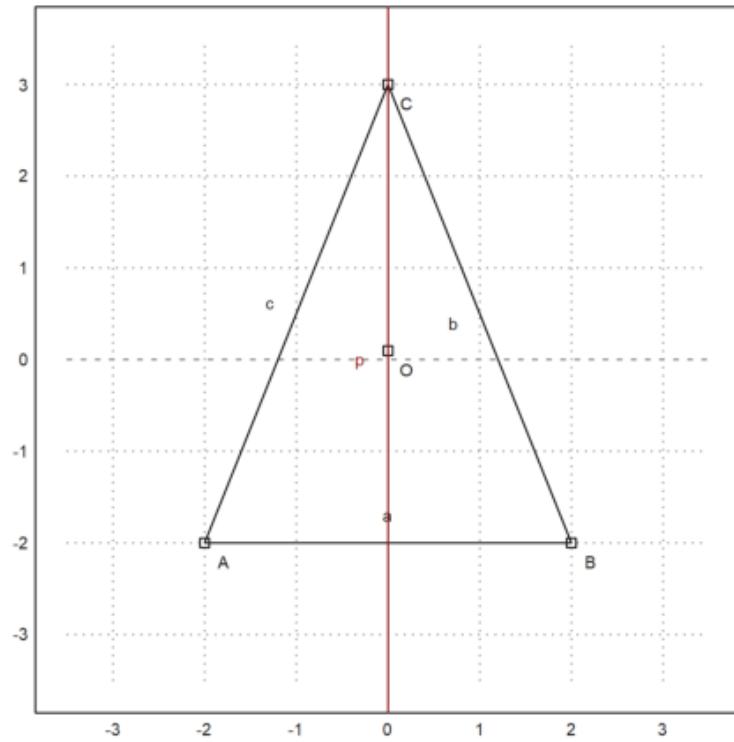
```
>plotSegment(A, C, "c") :
```



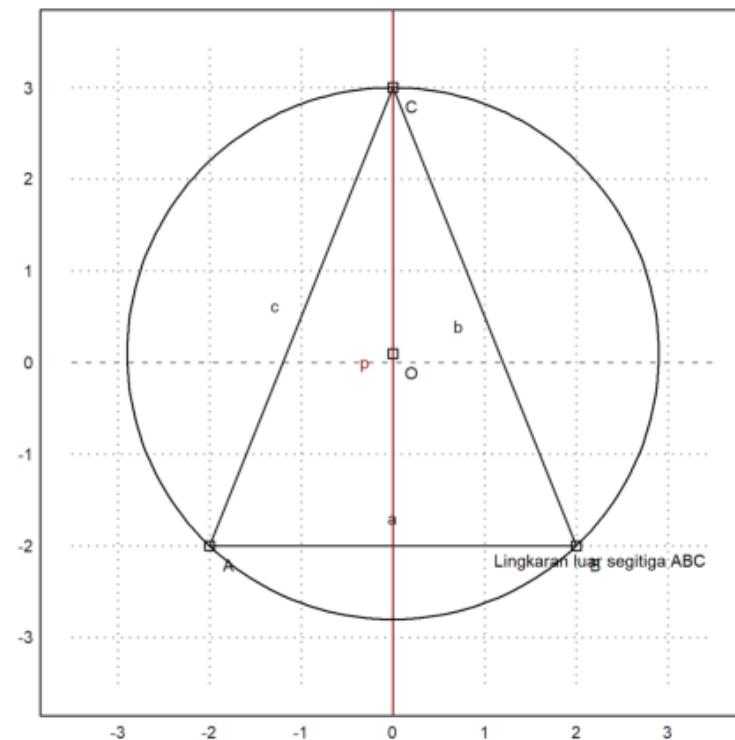
```
>c=circleThrough(A, B, C) ;  
>R=getCircleRadius(c) ;  
>O=getCircleCenter(c) ;  
>plotPoint(O, "O") :
```



```
>l=angleBisector(A,C,B);
>color(2); plotLine(l); color(1):
```

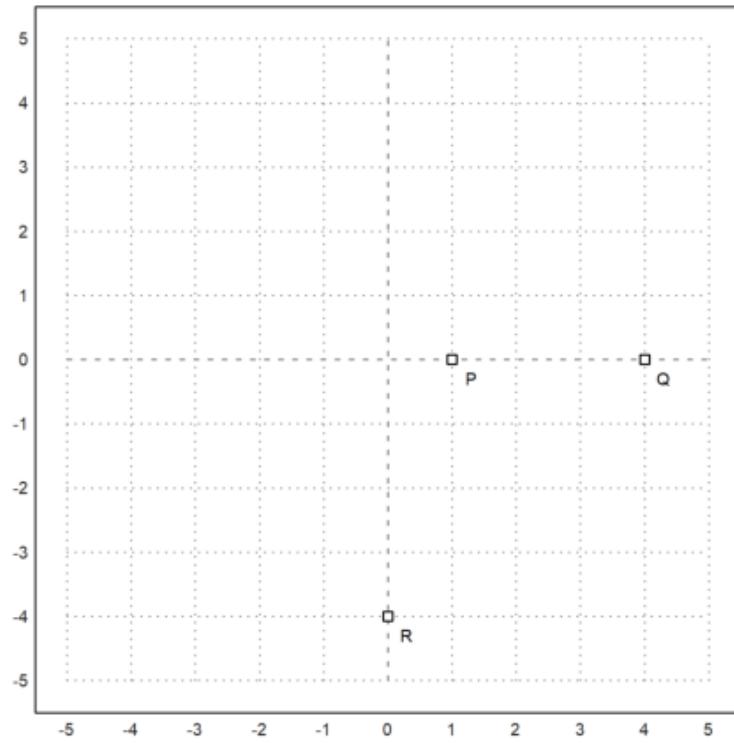


```
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

```
>load geometry;
>setPlotRange(5); P=[1,0]; Q=[4,0]; R=[0,-4];
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R"):
```



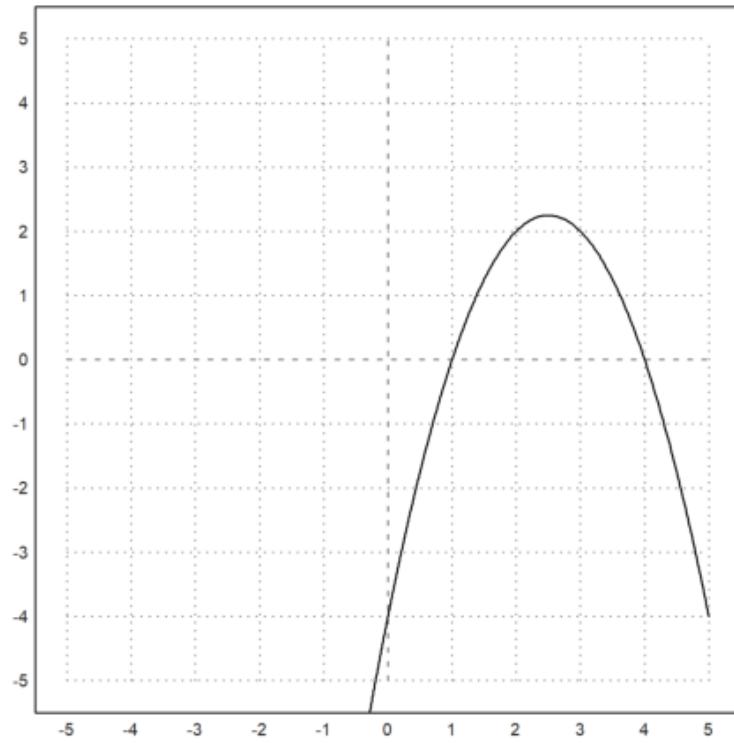
```
>sol &= solve([a+b=-c, 16*a+4*b=-c, c=-4], [a, b, c])
```

```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

$$-\frac{2}{x} + 5x - 4$$

```
>plot2d("-x^2+5*x-4", -5, 5, -5, 5):
```



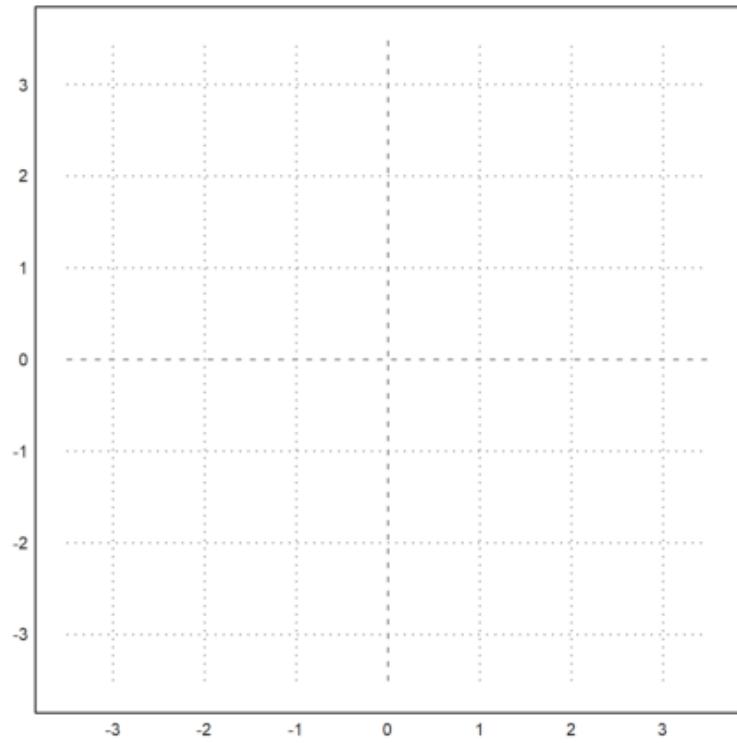
3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

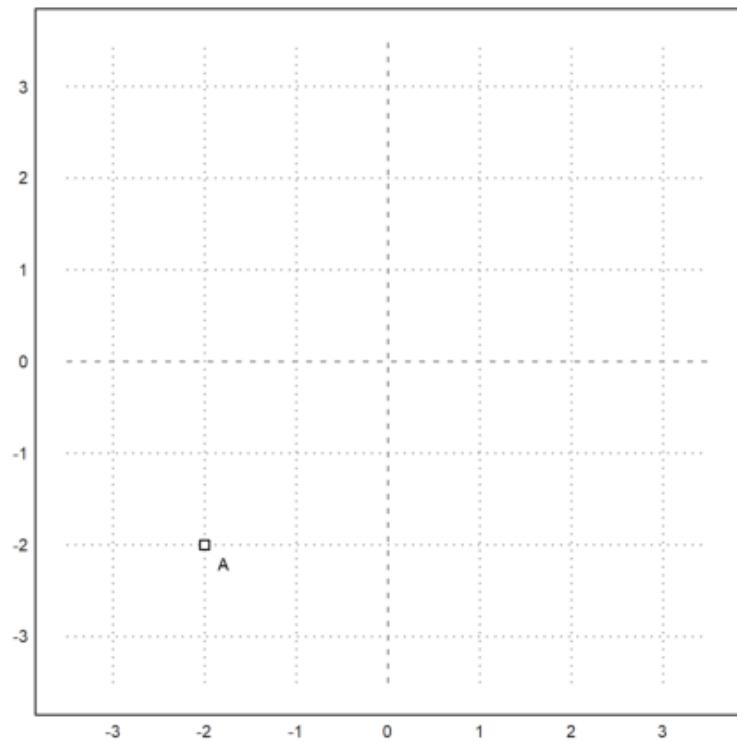
```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

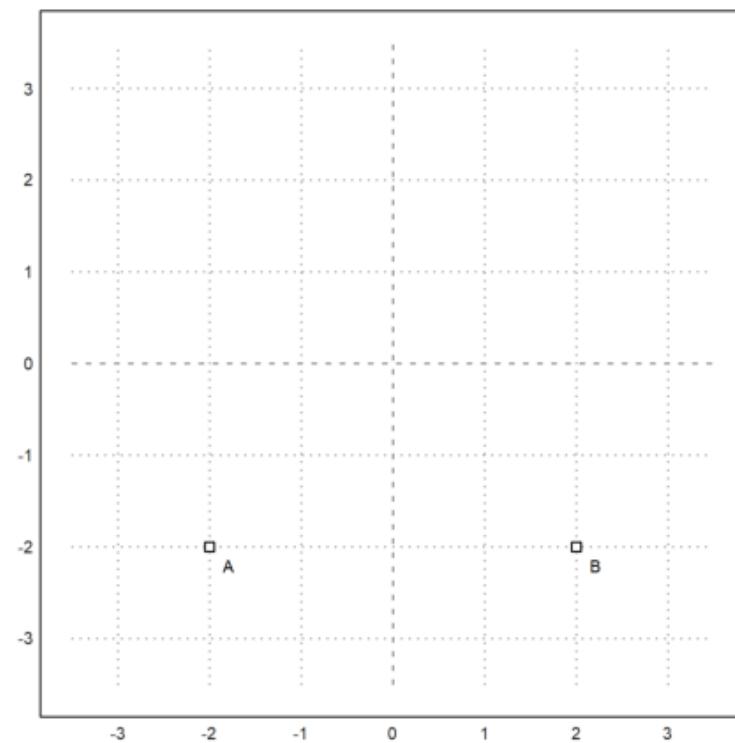
```
>setPlotRange (-3.5,3.5,-3.5,3.5) :
```



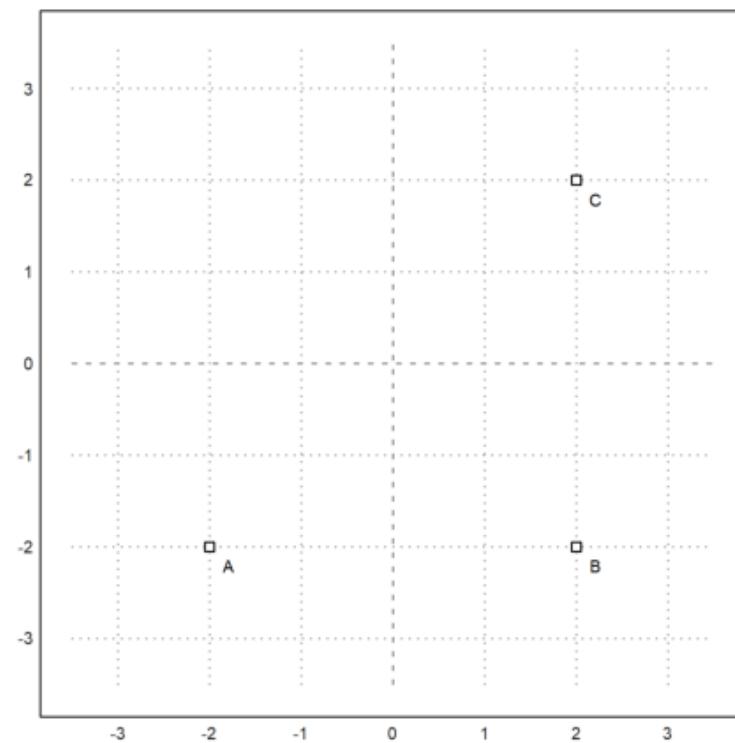
```
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");
```



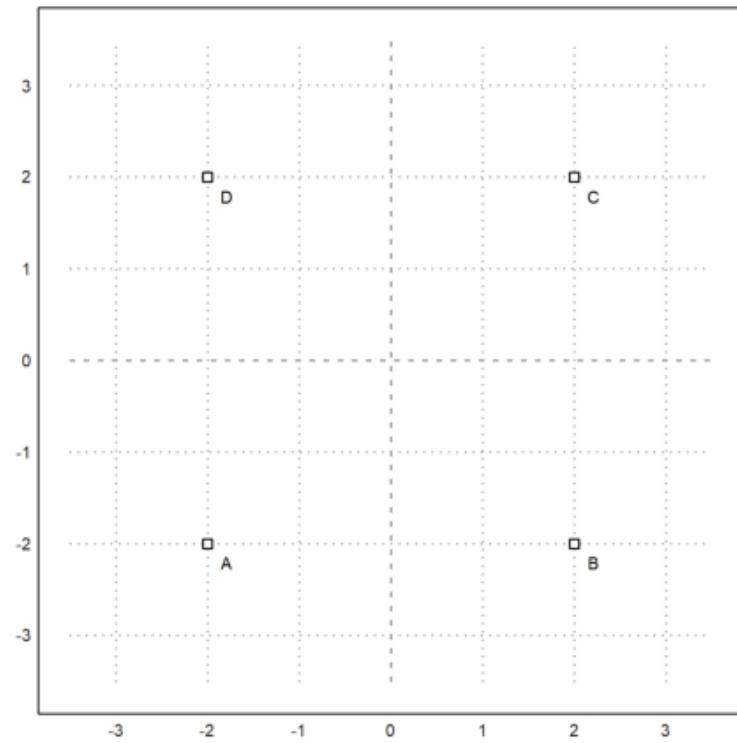
```
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B"):
```



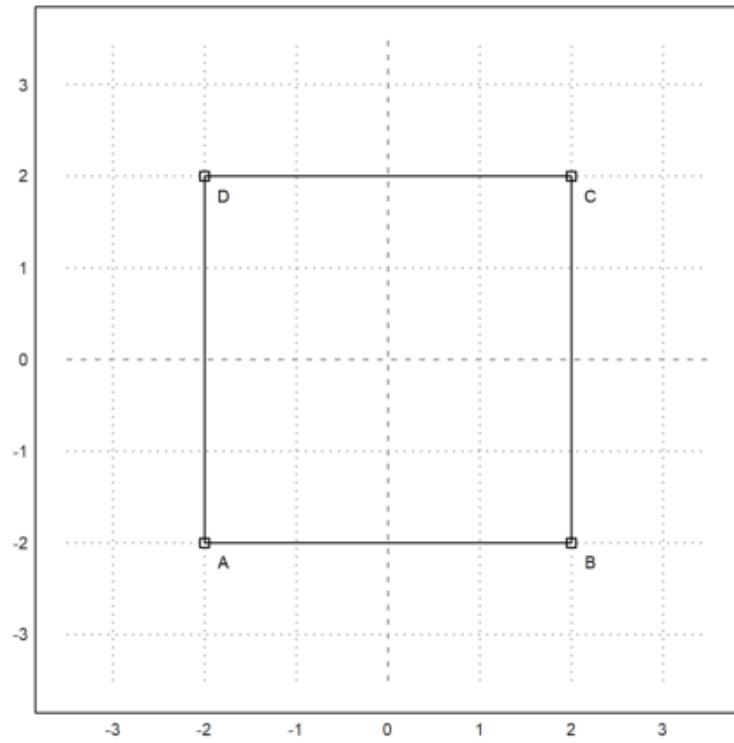
```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C"):
```



```
>D=[-2,2]; plotPoint(D,"D"):
```



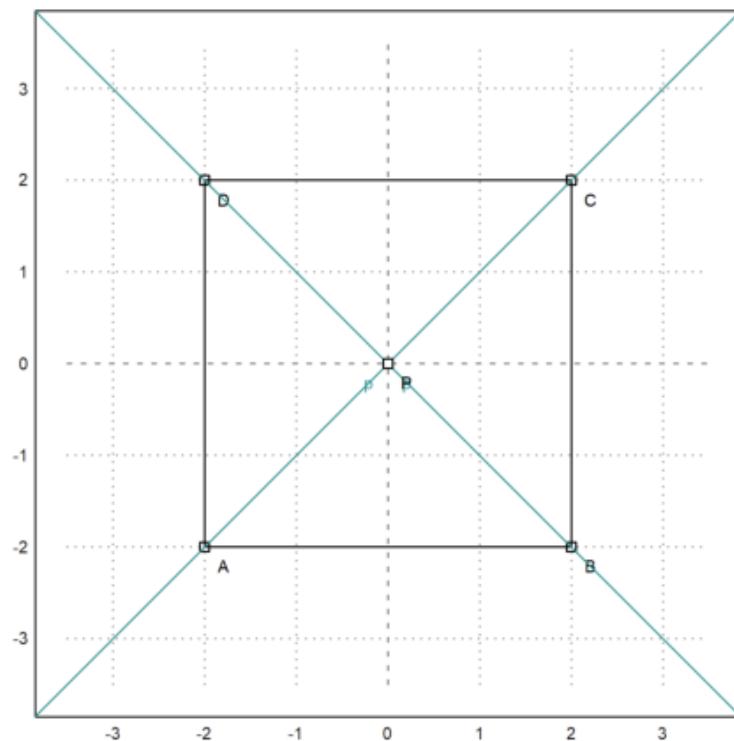
```
>plotSegment(A,B,"");
>plotSegment(B,C,"");
>plotSegment(C,D,"");
>plotSegment(A,D,"");
>aspect(1):
```



```

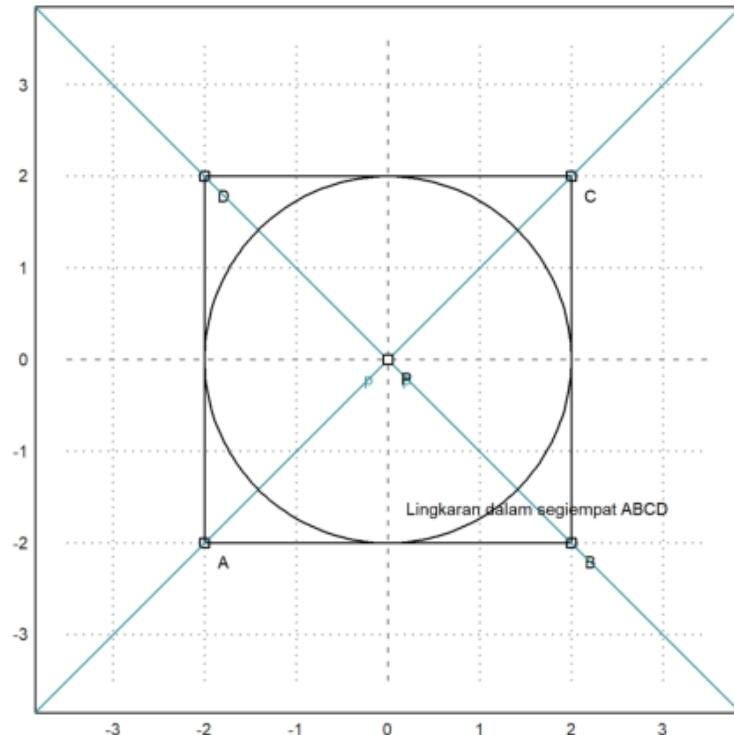
>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(5); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P,"P");

```



Dari gambar di atas, terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu di titik P.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));  
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABCD"):
```



Dari gambar di atas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB
```

4

```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

4

```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```

4

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

>AB . CD

16

>AD . BC

16

Terlihat bahwa,

$$AB \times CD = 16, AD \times BC = 16$$

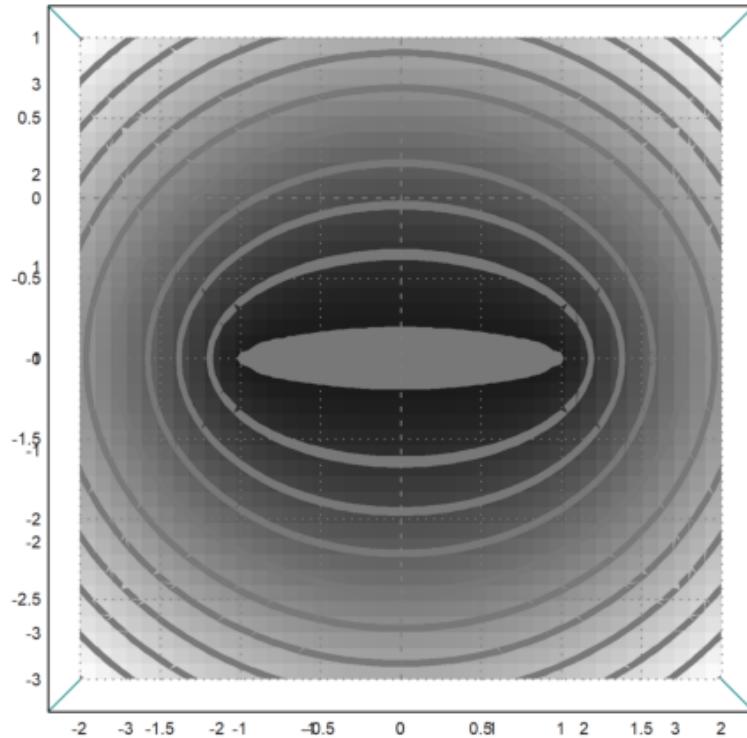
Sehingga terbukti bahwa

$$AB \times CD, AD \times BC$$

Karena semua syarat telah terpenuhi, maka dapat dipastikan bahwa segiempat tersebut merupakan segiempat garis singgung.

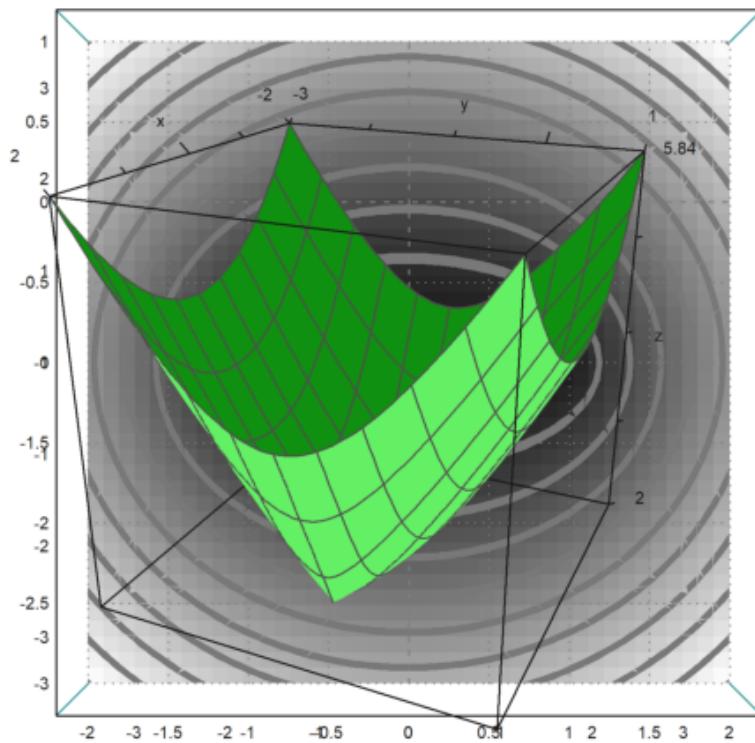
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



Grafik yang lebih menarik

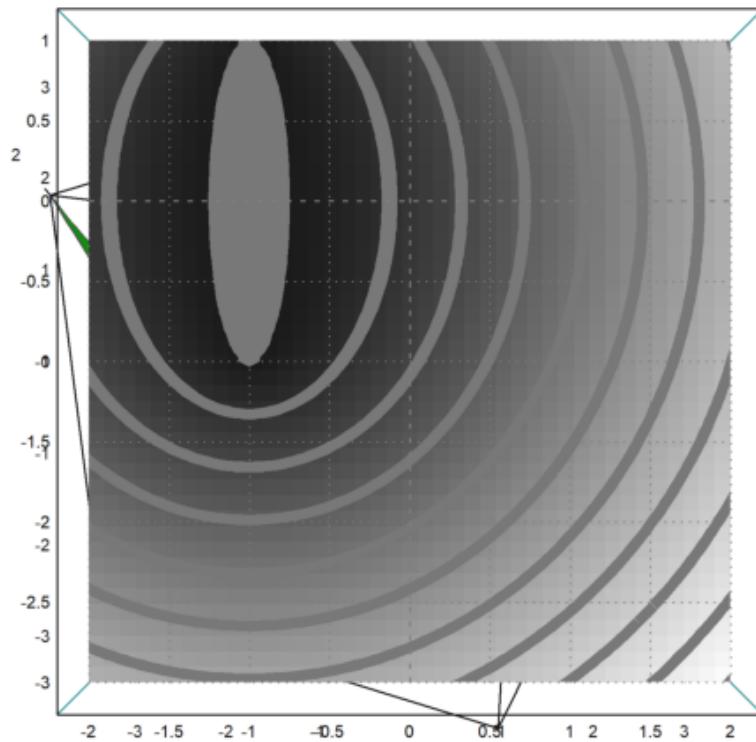
```
>plot3d("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1) :
```



Batasan ke garis PQ

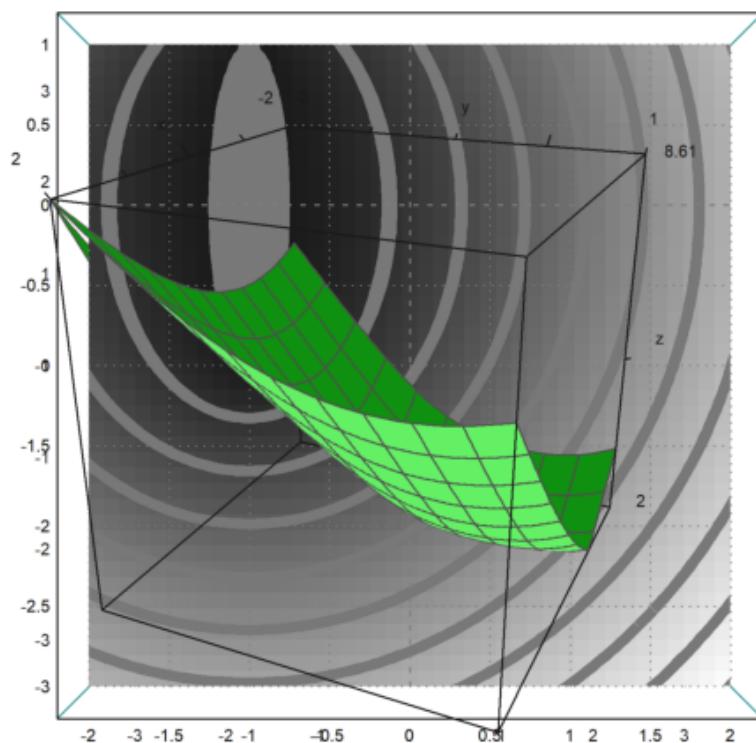
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1, hue=1) :
```

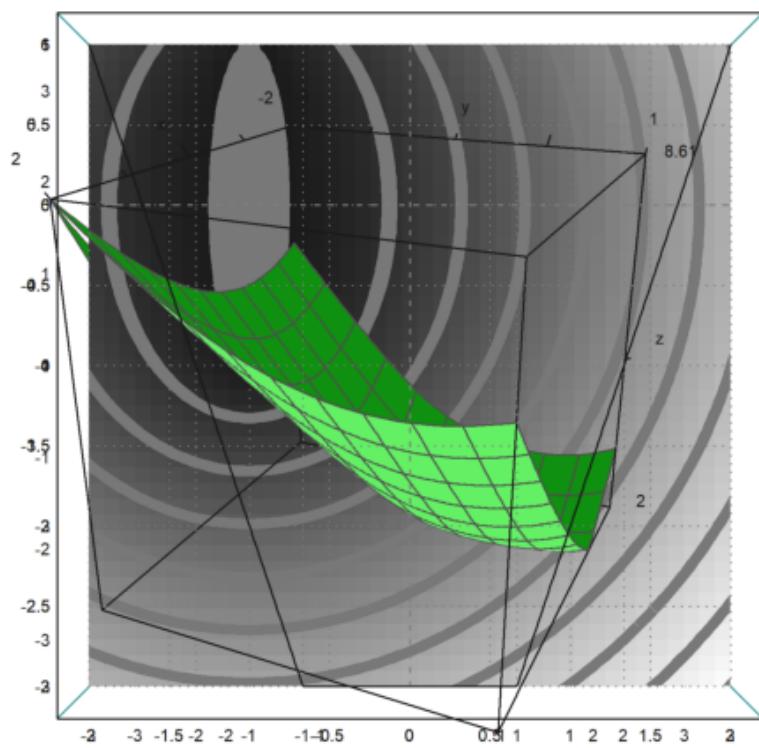


Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2", xmin=-2, xmax=2, ymin=-3, ymax=1):
```



```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



BAB 7

MENGGUNAKAN EMT UNTUK STATISTIKA

EMT untuk Statistika

Dalam buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler. Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan beberapa latar belakang untuk memahami detailnya.

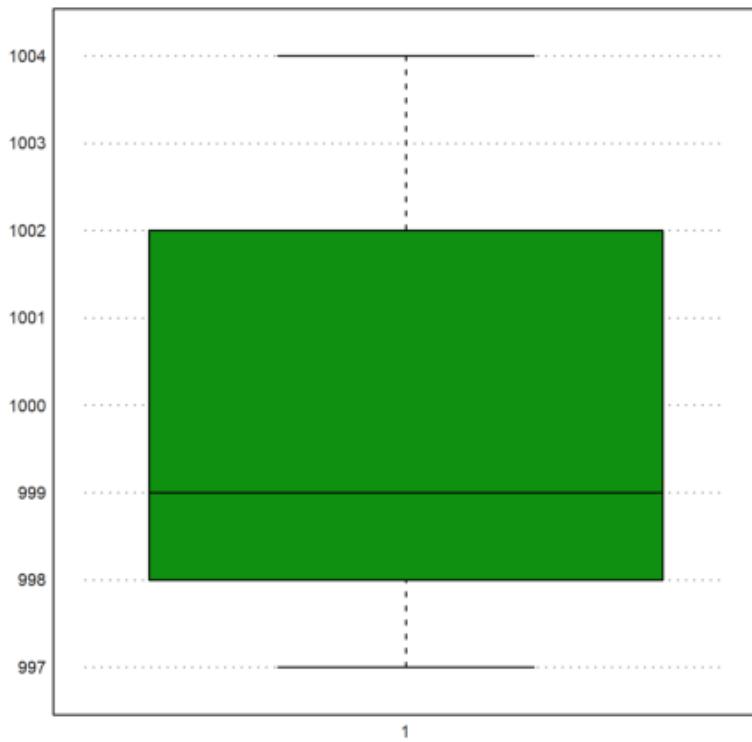
Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan standar deviasi yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
>mean(M), dev(M),
```

```
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk data. Dalam kasus kami tidak ada outlier.

```
>boxplot(M):
```



Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur dan distribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi di Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis}(x, m, d) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

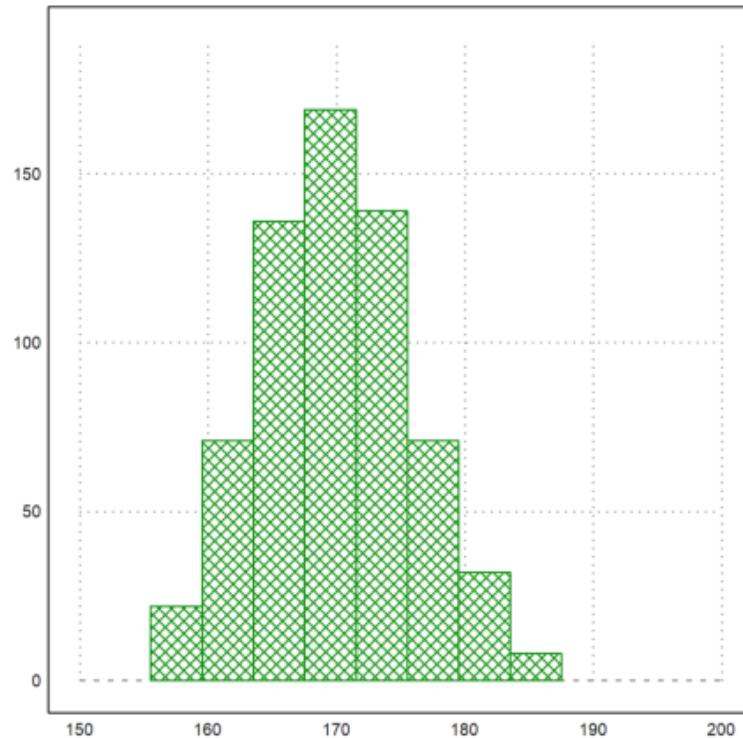
3.07 %

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran yang diberikan.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="/");
```



Kita bisa memasukkan data mentah tersebut ke dalam sebuah tabel.

Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal jangkauan, akhir jangkauan, jumlah orang dalam jangkauan.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["from","to","count"])
```

from	to	count
155.5	159.5	22
159.5	163.5	71
163.5	167.5	136
167.5	171.5	169
171.5	175.5	139
175.5	179.5	71
179.5	183.5	32
183.5	187.5	8

Jika kita membutuhkan nilai rata-rata dan statistik lain dari ukuran, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama dari tabel kita untuk ini.

Sumbul "`|`" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" adalah untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
157.5
161.5
165.5
169.5
173.5
```

177.5
181.5
185.5

Tetapi lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2.1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

[157.5, 161.5, 165.5, 169.5, 173.5, 177.5, 181.5, 185.5]

Sekarang kita dapat menghitung mean dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

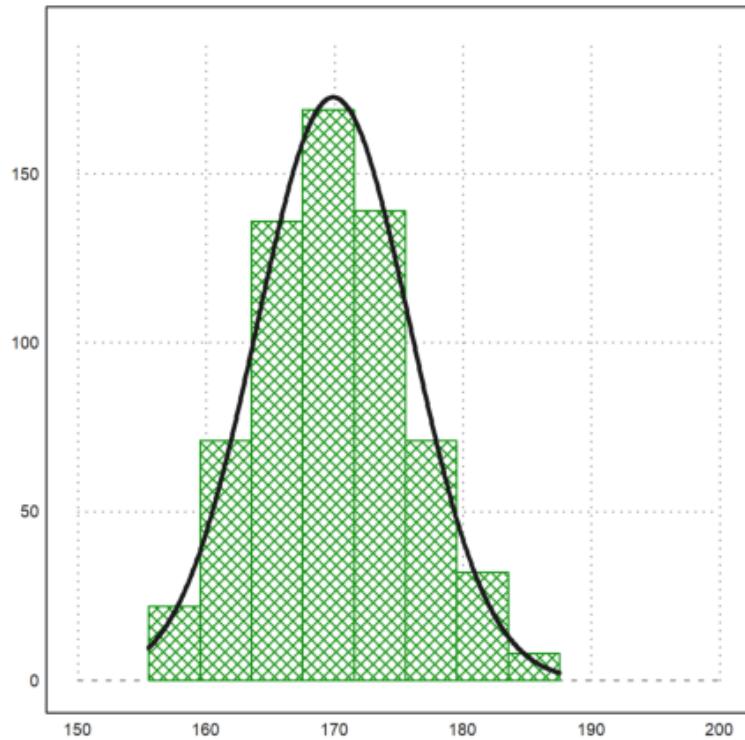
169.901234568
5.98912964449

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai ke plot batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan mean m dan standar deviasi d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada bar plot harus dikalikan dengan 4 kali jumlah total data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...  
> xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```



Tabel

Di direktori notebook ini Anda menemukan file dengan tabel. Data tersebut mewakili hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama dari file tersebut. Data berasal dari buku online Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat", 4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kami ingin membaca tabel dari file. Pertama, kami menggunakan terjemahan kami sendiri untuk token.

Untuk ini, kami mendefinisikan set token. Fungsi `strtokens()` mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf:=[ "m", "f" ]; yn:=[ "y", "n" ]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen `tok2`, `tok4` dll. adalah terjemahan dari kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter `readtable()`, jadi Anda harus menyediakannya dengan `:=`.

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:4],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
1	m	30	n	.	1.8	n
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
4	m	33	n	.	2.8	n

Titik `"."` mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token untuk terjemahan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

Fungsi `readtable()` sekarang mengembalikan satu set token.

```
>tok
```

```
m
n
f
y
g
vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke angka.

String khusus NA="." ditafsirkan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT [1]
```

```
[1, 1, 30, 2, NAN, 1.8, 2]
```

Berikut isi tabel dengan angka yang belum diterjemahkan.

```
>writetable(MT, wc=5)
```

1	1	30	2	.	1.8	2
2	3	23	4	5	1.8	2
3	3	26	4	5	1.8	4
4	1	33	2	.	2.8	2
5	1	37	2	.	1.8	2
6	1	28	4	5	2.8	4
7	3	31	4	6	2.8	2
8	1	23	2	.	0.8	2
9	3	24	4	6	1.8	4
10	1	26	2	.	1.8	2
11	3	23	4	6	1.8	4
12	1	32	4	5	1.8	2
13	1	29	4	6	1.8	4
14	3	25	4	5	1.8	4
15	3	31	4	5	0.8	2
16	1	26	4	5	2.8	2
17	1	37	2	.	3.8	2
18	1	38	4	5	.	2
19	3	29	2	.	3.8	2
20	3	28	4	6	1.8	2
21	3	28	4	1	2.8	4
22	3	28	4	6	1.8	4
23	3	38	4	5	2.8	2
24	3	27	4	1	1.8	4
25	1	27	2	.	2.8	4

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan output readtable() ke dalam daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat", ctok=ctok)};}
```

Menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. Atau menggunakan daftar Tabel.

```
>writetable(Table, ctok=ctok, wc=5);
```

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
1	m	30	n	.	1.8	n
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
4	m	33	n	.	2.8	n

5	m	37	n	.	1.8	n
6	m	28	y	g	2.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
8	m	23	n	.	0.8	n
9	f	24	y	vg	1.8	y
10	m	26	n	.	1.8	n
11	f	23	y	vg	1.8	y
12	m	32	y	g	1.8	n
13	m	29	y	vg	1.8	y
14	f	25	y	g	1.8	y
15	f	31	y	g	0.8	n
16	m	26	y	g	2.8	n
17	m	37	n	.	3.8	n
18	m	38	y	g	.	n
19	f	29	n	.	3.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
21	f	28	y	m	2.8	y
22	f	28	y	vg	1.8	y
23	f	38	y	g	2.8	n
24	f	27	y	m	1.8	y
25	m	27	n	.	2.8	y

Fungsi `tablecol()` mengembalikan nilai kolom tabel, melewatkkan setiap baris dengan nilai NAN("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

Person	Evaluation	Tip
2	g	1.8
3	g	1.8
6	g	2.8
7	vg	2.8
9	vg	1.8
11	vg	1.8
12	g	1.8
13	vg	1.8
14	g	1.8
15	g	0.8
16	g	2.8
20	vg	1.8
21	m	2.8
22	vg	1.8
23	g	2.8
24	m	1.8

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakan untuk menentukan nilai rata-rata kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT, 6))
```

2.175

Fungsi `getstatistics()` mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai "m" dan "f" di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu, count}=getstatistics(tablecol(MT, 2)); xu, count,
```

```
[1, 3]
[12, 13]
```

Kami dapat mencetak hasilnya dalam tabel baru.

```
>writetable(count', labr=tok[xu])
```

m	12
f	13

Fungsi `selectable()` mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok, ["g", "vg"])
```

```
[5, 6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT, 5, v)]; i:=sortedrows(MT1, 5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstrak dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i], labc=hd, ctok=ctok, tok=tok, wc=7);
```

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
6	m	28	y	g	2.8	y
18	m	38	y	g	.	n
16	m	26	y	g	2.8	n
15	f	31	y	g	0.8	n
12	m	32	y	g	1.8	n
23	f	38	y	g	2.8	n
14	f	25	y	g	1.8	y
9	f	24	y	vg	1.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
22	f	28	y	vg	1.8	y
13	m	29	y	vg	1.8	y
11	f	23	y	vg	1.8	y

Untuk statistik berikutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kami mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]); ...
> writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	y
m	Y
m	Y
m	Y
m	Y
f	n
f	y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y
f	Y

Dengan getstatistics(), kita juga dapat menghubungkan hitungan dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

	n	y
m	7	5
f	1	12

Sebuah tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

Kemudian kita bisa membaca tabel dari file.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

	n	y
m	7	5
f	1	12

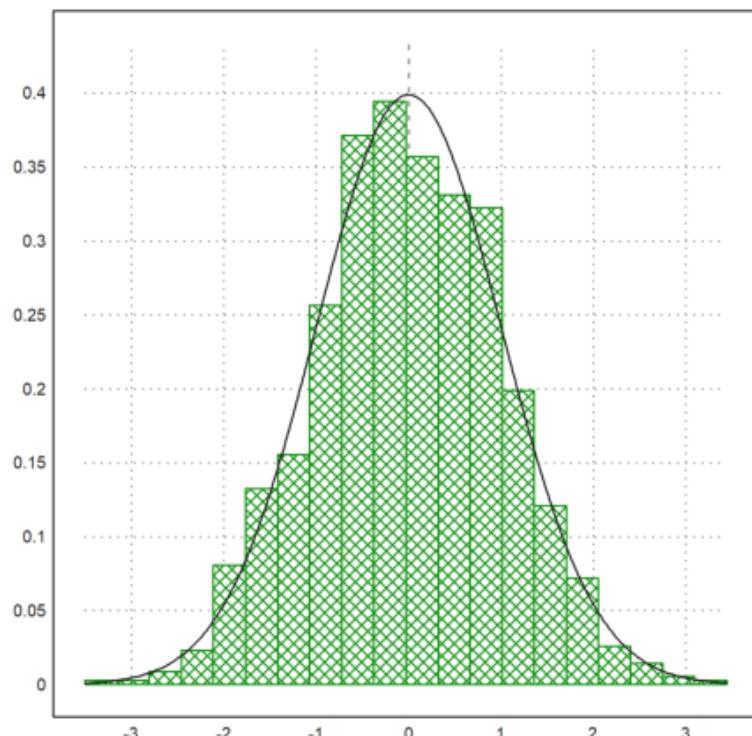
Dan hapus filenya.

```
>fileremove(filename);
```

Distribusi

Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot distribusi data eksperimen.

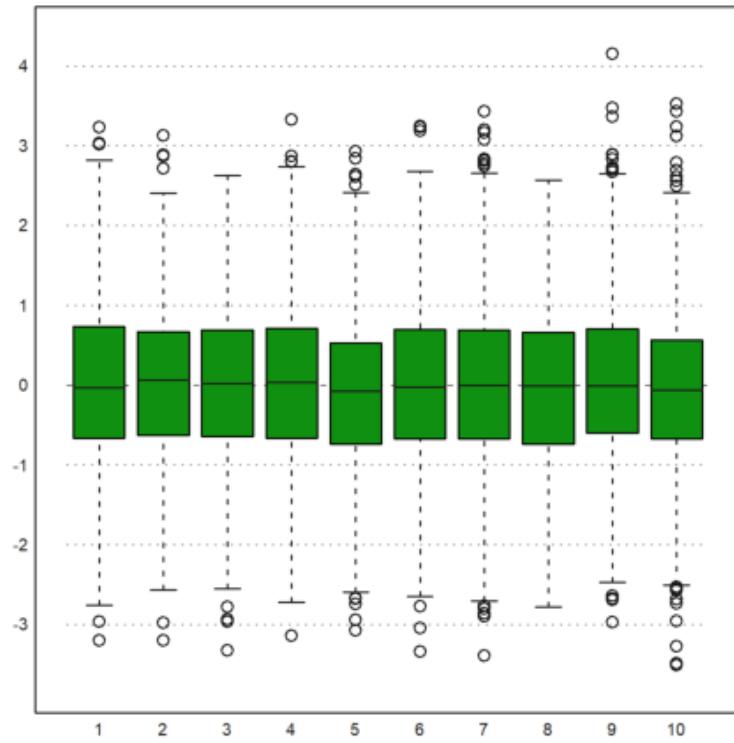
```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="/"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1); // add the standard normal distribution plot
```



Harap dicatat perbedaan antara plot batang (sampel) dan kurva normal (distribusi nyata). Masukkan kembali tiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

Berikut adalah perbandingan 10 simulasi 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, dan outlier.

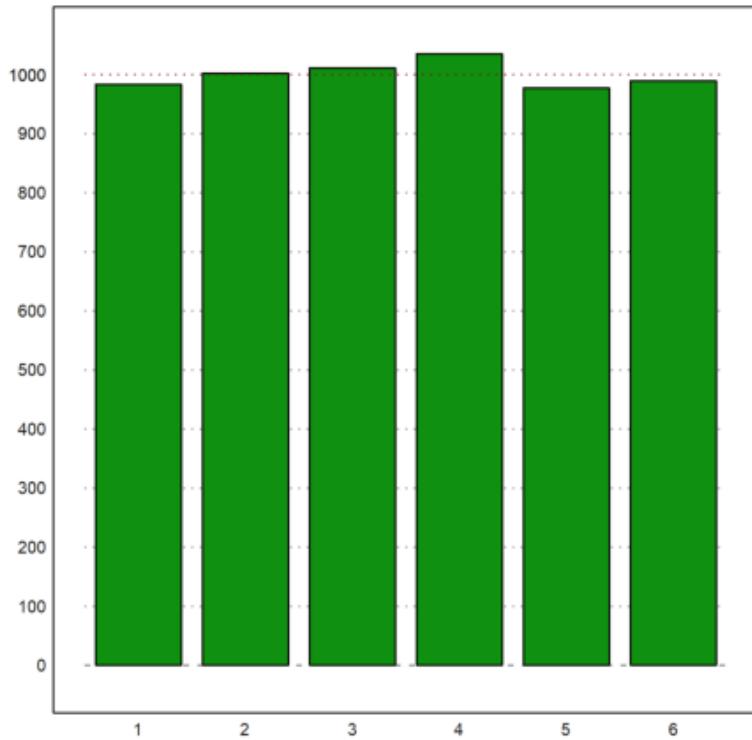
```
>p=normal(10,1000); boxplot(p);
```



Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki `inrandom`. Mari kita simulasi lemparan dadu dan plot distribusinya.

Kami menggunakan fungsi `getmultiplicities(v,x)`, yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan `columnplot()`.

```
>k=inrandom(1,6000,6); ...
>columnplot(getmultiplicities(1:6,k)); ...
>ygrid(1000,color=red):
```



Sementara intrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat terdistribusi seragam dari 1 ke k, dimungkinkan untuk menggunakan distribusi bilangan bulat lainnya dengan randpint().

Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 berturut-turut adalah 0,4,0,1,0,5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
[378, 102, 520]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Coba lihat referensinya.

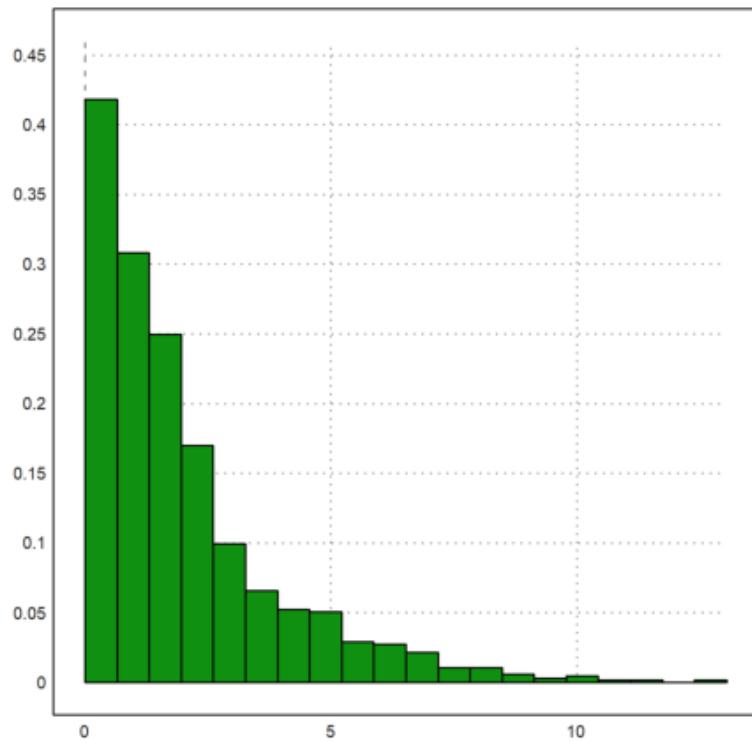
Misalnya, kami mencoba distribusi eksponensial. Sebuah variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

dengan parameter

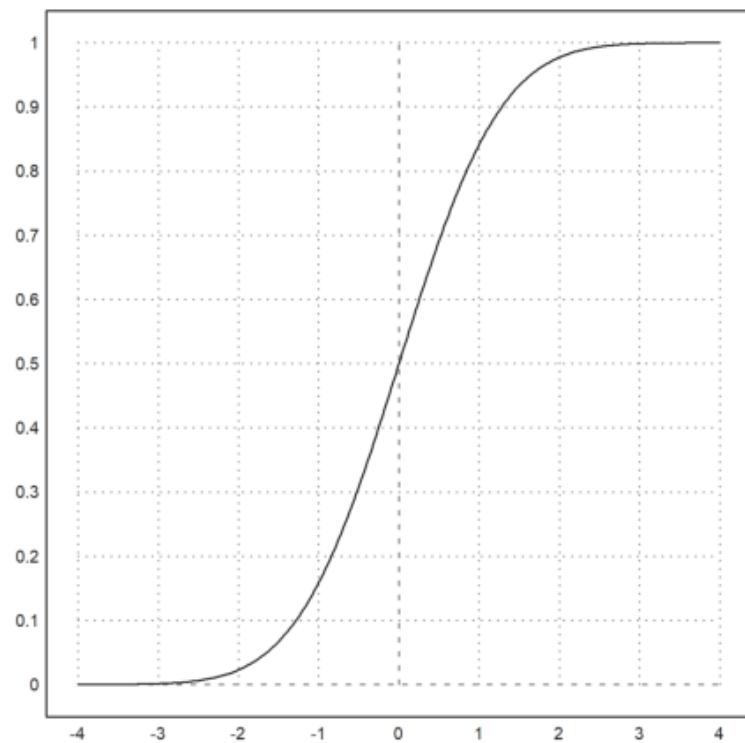
$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```



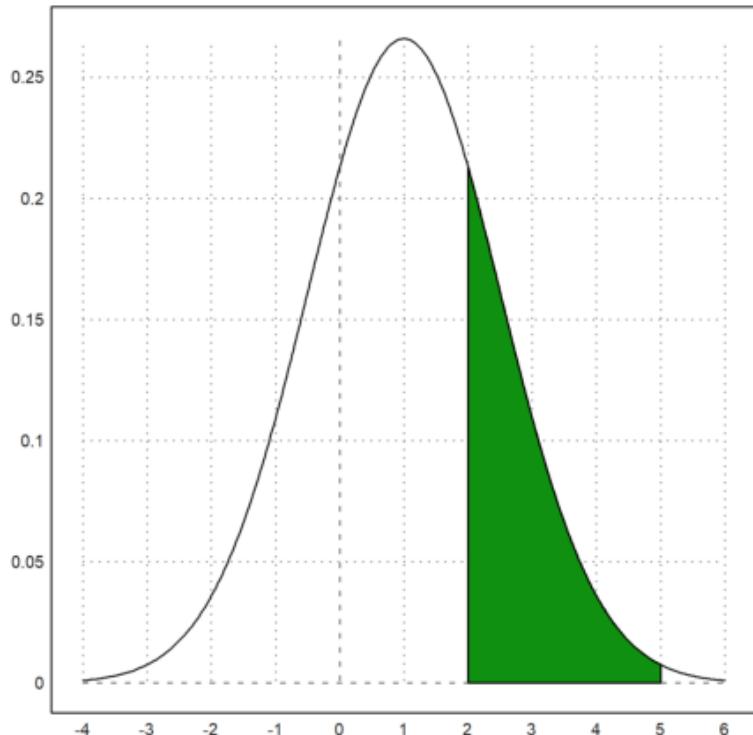
Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan kebalikannya.

```
>plot2d("normaldis", -4, 4) :
```



Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6); ...  
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```



$$\text{normaldis}(x,m,d) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} dt.$$

Peluang berada di area hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

0.248662156979

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2} dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

0.248662156979

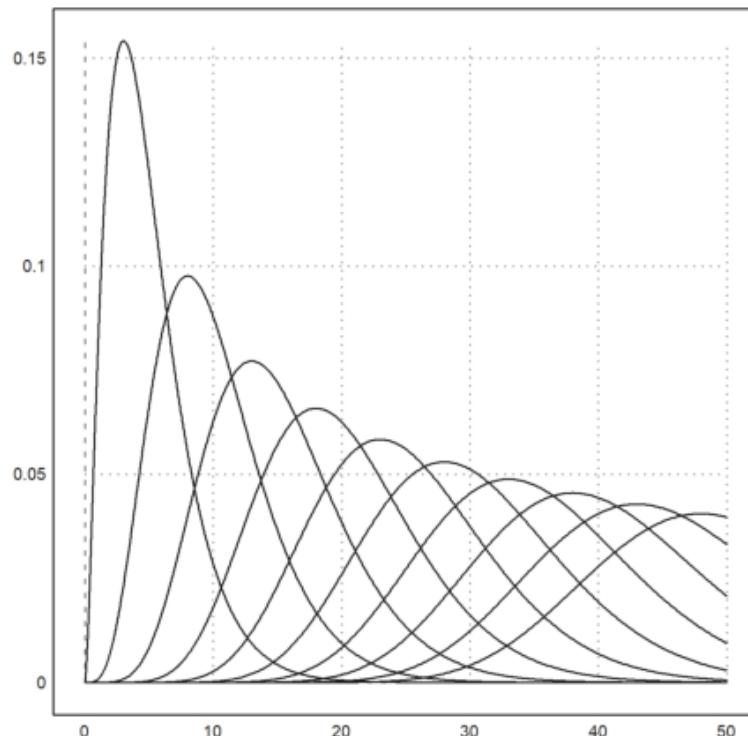
Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal mean dan deviasi yang sama. Fungsi invbindis() memecahkan interpolasi linier antara nilai integer.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219  
526.007419394
```

Fungsi qdis() adalah densitas dari distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):
```



Euler memiliki fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral. Penamaan mencoba untuk konsisten. Misalnya.,

- distribusi chi-kuadrat adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- kepadatannya adalah qchidis().

Komplemen dari distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259  
0.527633447259
```

Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut. Pertama kita atur fungsi distribusinya.

```
>wd = 0 | ((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0, 0.165, 0.335, 0.5, 0.666667, 0.833333, 1]
```

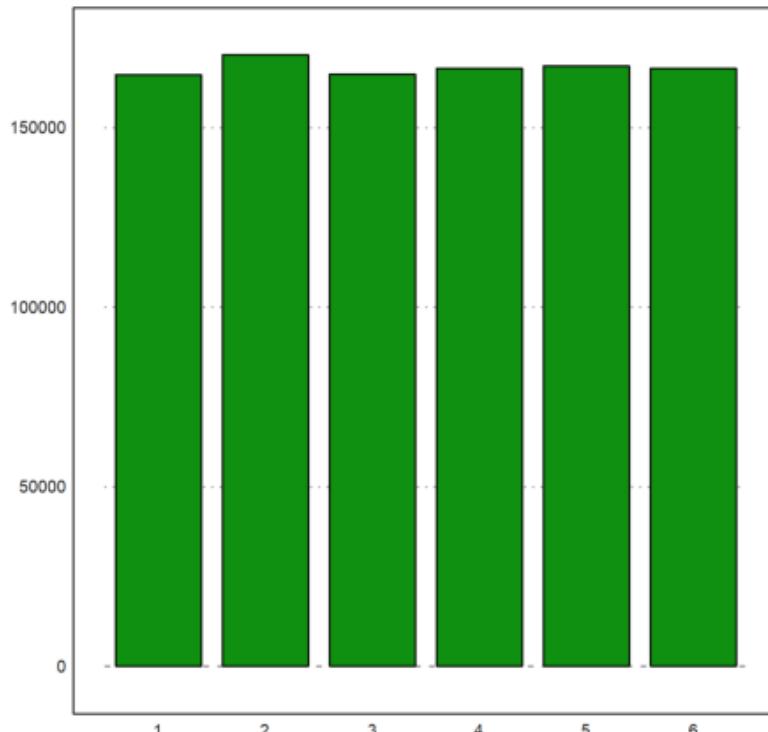
Artinya dengan probabilitas $wd[i+1]-wd[i]$ kita menghasilkan nilai acak i.

Ini adalah distribusi yang hampir seragam. Mari kita mendefinisikan generator nomor acak untuk ini. Fungsi `find(v,x)` menemukan nilai x dalam vektor v. Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahannya sangat halus sehingga kita hanya melihatnya dengan sangat banyak iterasi.

```
>columnsplot (getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```



Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam dari nilai 1...K dalam v. Kami menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsi menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

0

Dan ia menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

1

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomials() , yang mengembalikan probabilitas i atau kurang hit dari n percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

0.751401349654

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat default adalah alfa.

Arti interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

[0.37932, 0.441212]

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Tetapi untuk n besar, penjumlahan langsung tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

0.751401349655

Omong-omong, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomials().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

409.932733047

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu yang beredar (dari 52) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1 atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

0.321739130435

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

381	100	519
376	91	533
417	80	503
440	94	466
406	112	482
408	94	498
395	107	498
399	96	505
428	87	485
400	99	501

Merencanakan Data

Untuk plot data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak tahun 1990, diukur dalam kursi.

```
>BW := [ ...
>1990,662,319,239,79,8,17; ...
>1994,672,294,252,47,49,30; ...
>1998,669,245,298,43,47,36; ...
>2002,603,248,251,47,55,2; ...
>2005,614,226,222,61,51,54; ...
>2009,622,239,146,93,68,76; ...
>2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk pesta, kami menggunakan serangkaian nama.

```
>P:=[ "CDU/CSU", "SPD", "FDP", "Gr", "Li" ];
```

Mari kita mencetak persentase dengan baik.

Pertama kita ekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi. kolom adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]';
```

Kemudian kami mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai tajuk kolom, dan tahun sebagai tajuk untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih memilih output yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

	CDU/CSU	SPD	FDP	Gr	Li
1990	48	36	12	1	3
1994	44	38	7	7	4
1998	37	45	6	7	5
2002	41	42	8	9	0
2005	37	36	10	8	9
2009	38	23	15	11	12
2013	49	31	0	10	10

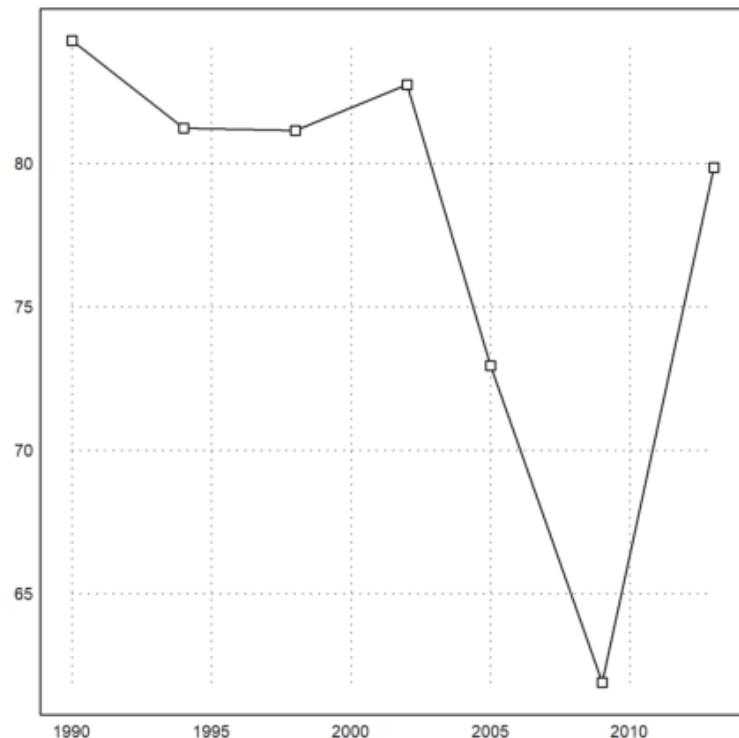
Perkalian matriks berikut mengekstrak jumlah persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah memperoleh rekaman di parlemen hingga 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29, 81.25, 81.1659, 82.7529, 72.9642, 61.8971, 79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakan untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```

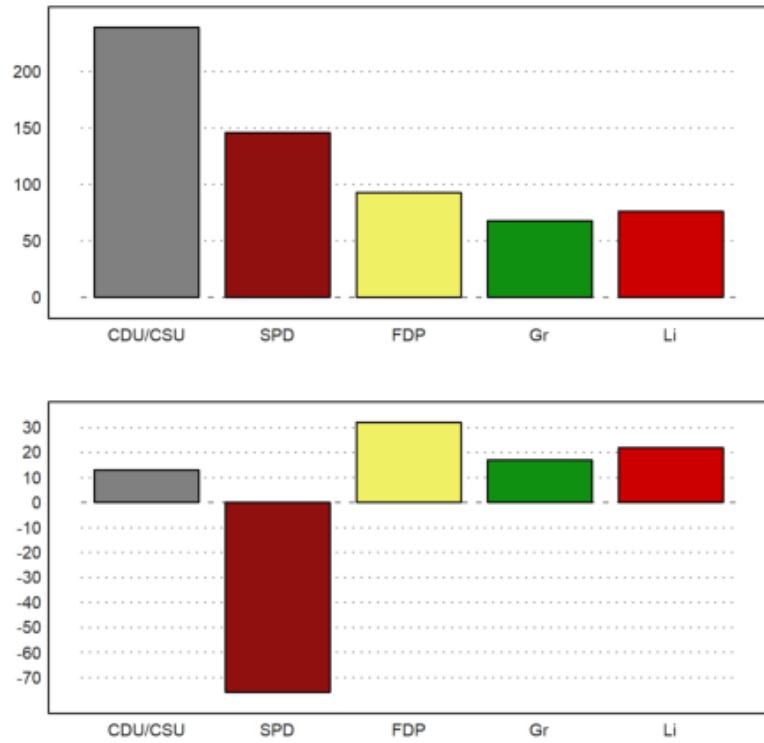


Tentukan beberapa warna untuk setiap pesta.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

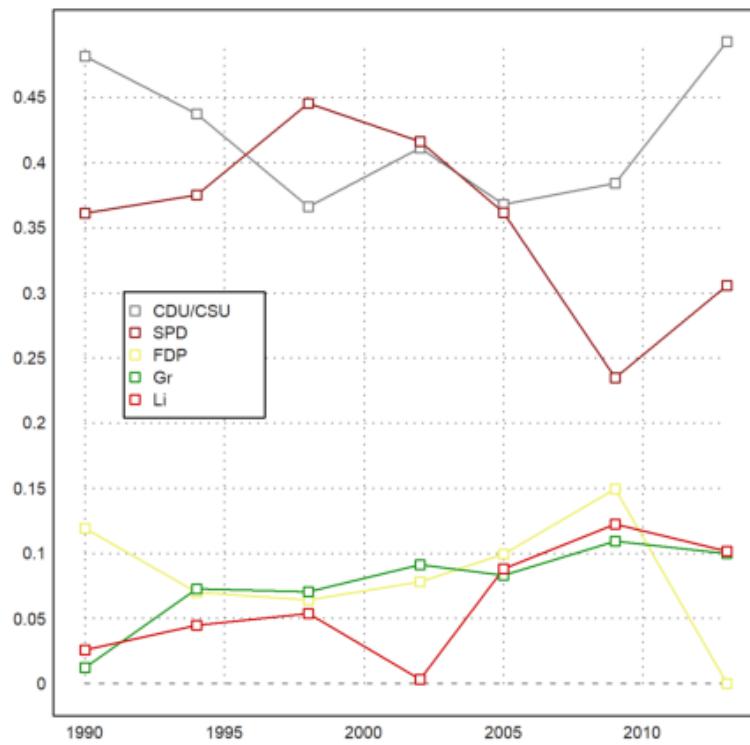
Sekarang kita dapat memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya menjadi satu plot menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP); ...
>figure(0):
```



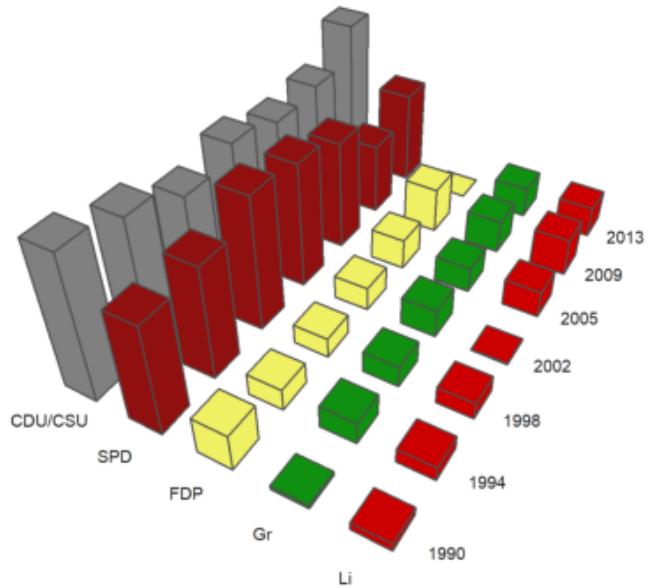
Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP); ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4) :
```



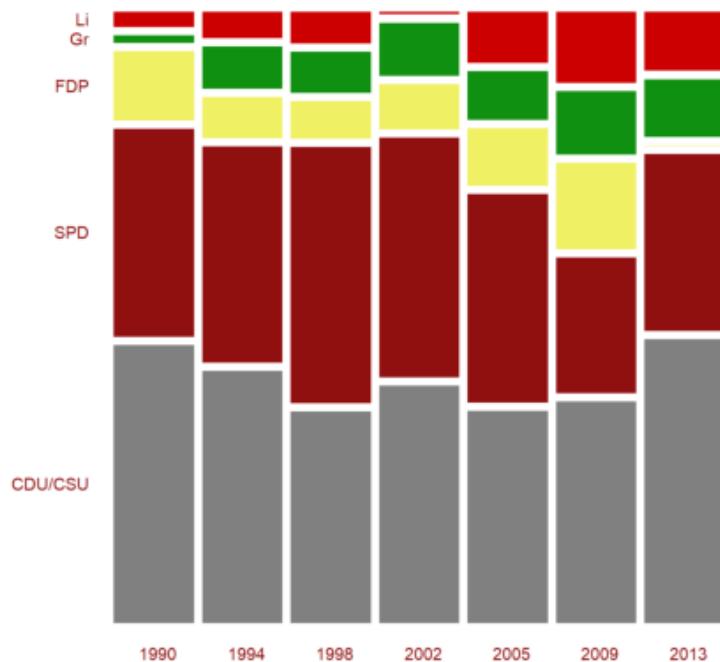
Plot kolom 3D menunjukkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami menyediakan label untuk baris dan kolom. sudut adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
>  angle=30°,ccols=CP):
```



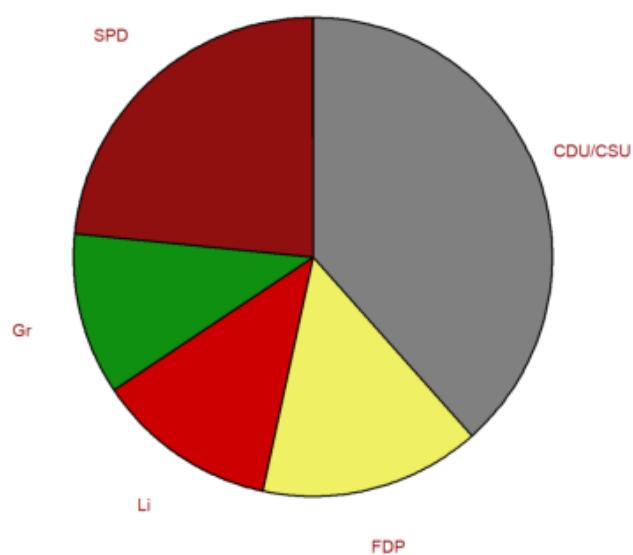
Representasi lain adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjangnya label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller); ...
>mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#" ); ...
>shrinkwindow():
```



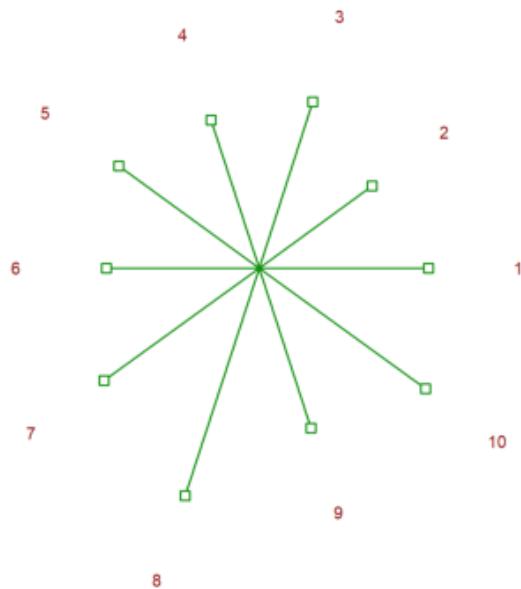
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```



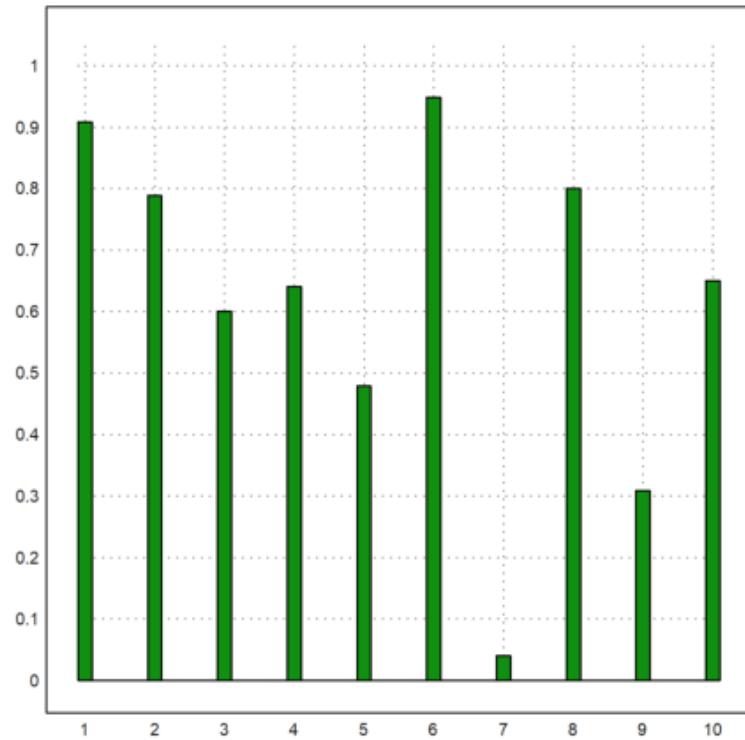
Berikut adalah jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays) :
```



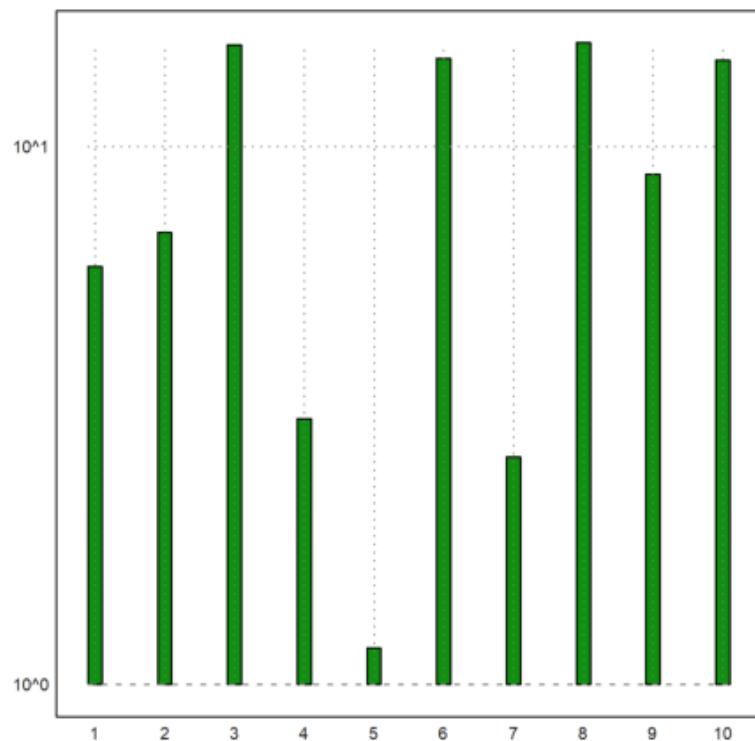
Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara merata di [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar) :
```



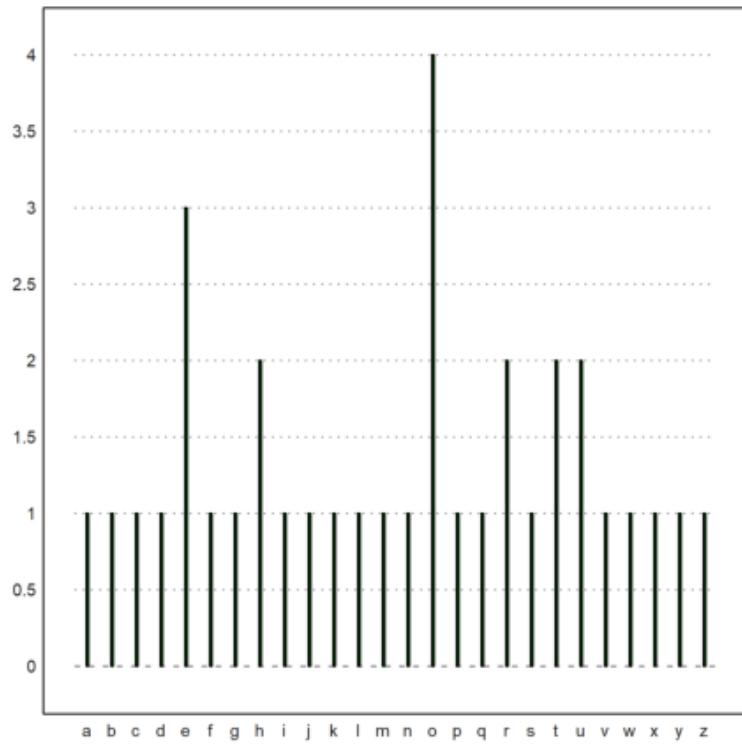
Tetapi untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```



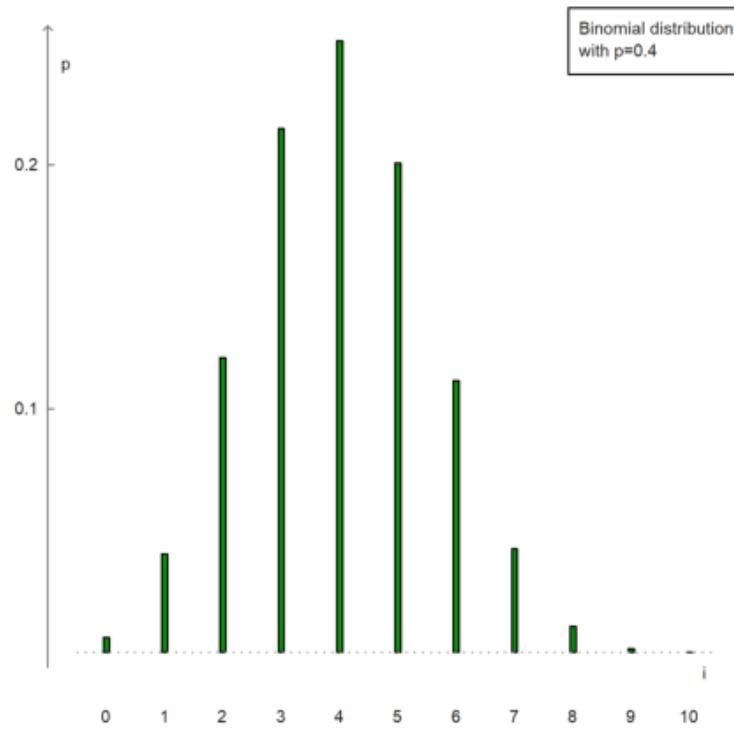
Fungsi `columnplot()` lebih mudah digunakan, karena hanya membutuhkan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kita sudah mendemonstrasikannya dalam tutorial ini. Ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan menyusun statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnplot(x,lab=cw,width=0.05):
```



Dimungkinkan juga untuk mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```



Berikut ini adalah cara untuk memplot frekuensi bilangan dalam sebuah vektor. Kami membuat vektor bilangan bulat bilangan acak 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[8, 5, 8, 8, 6, 8, 8, 3, 5, 5]
```

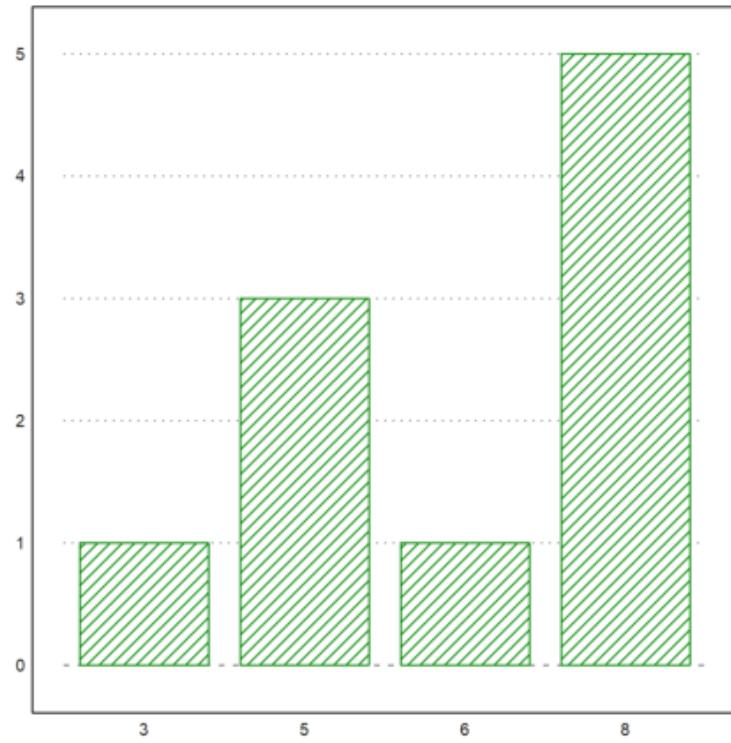
Kemudian ekstrak nomor unik di v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[3, 5, 6, 8]
```

Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```



Kami ingin menunjukkan fungsi untuk distribusi nilai empiris.

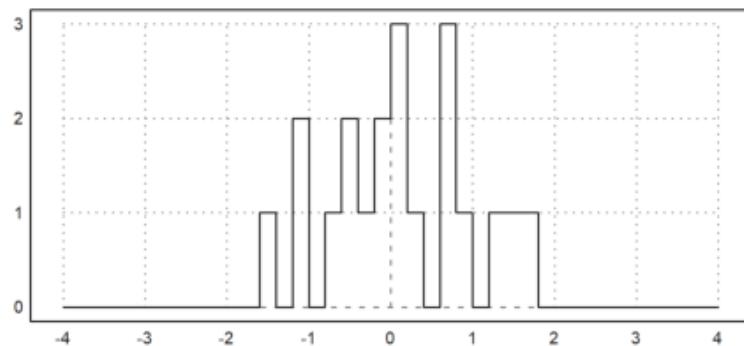
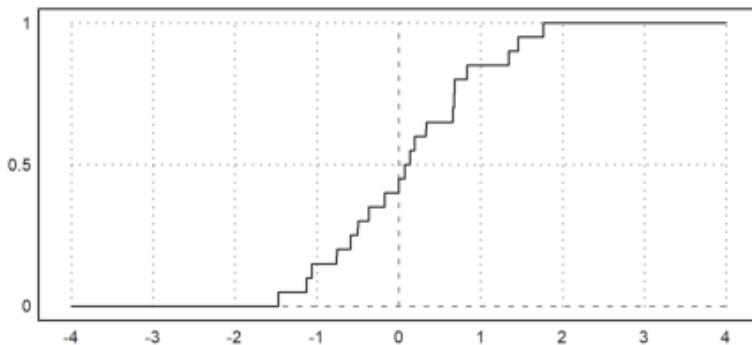
```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) membutuhkan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum kita dapat menggunakannya.

```
>xs=sort (x);
```

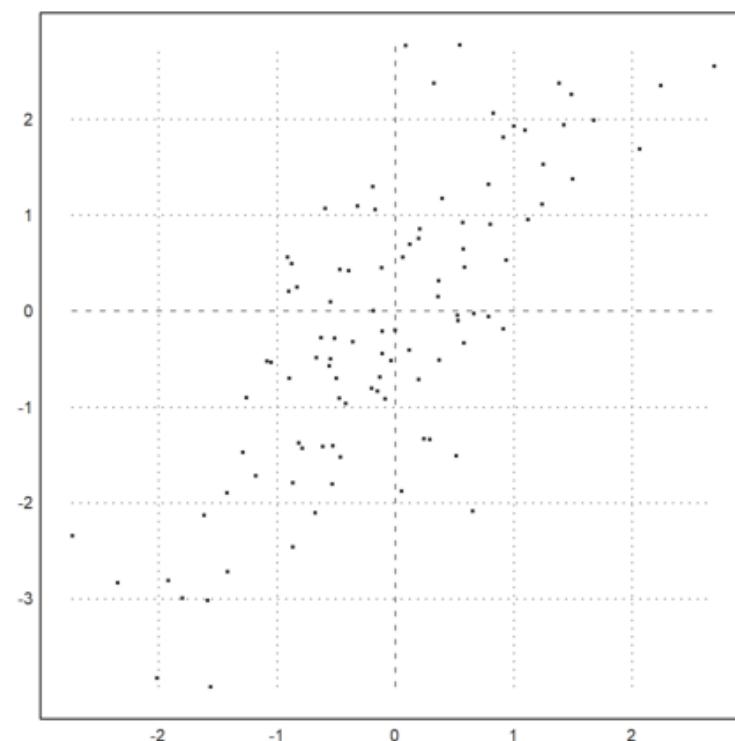
Kemudian kami memplot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan menjadi satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi, kami menggunakan plot gigi gergaji kali ini.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar>)); ...
>figure(0):
```



Plot pencar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan $X+Y$ jelas berkorelasi positif.

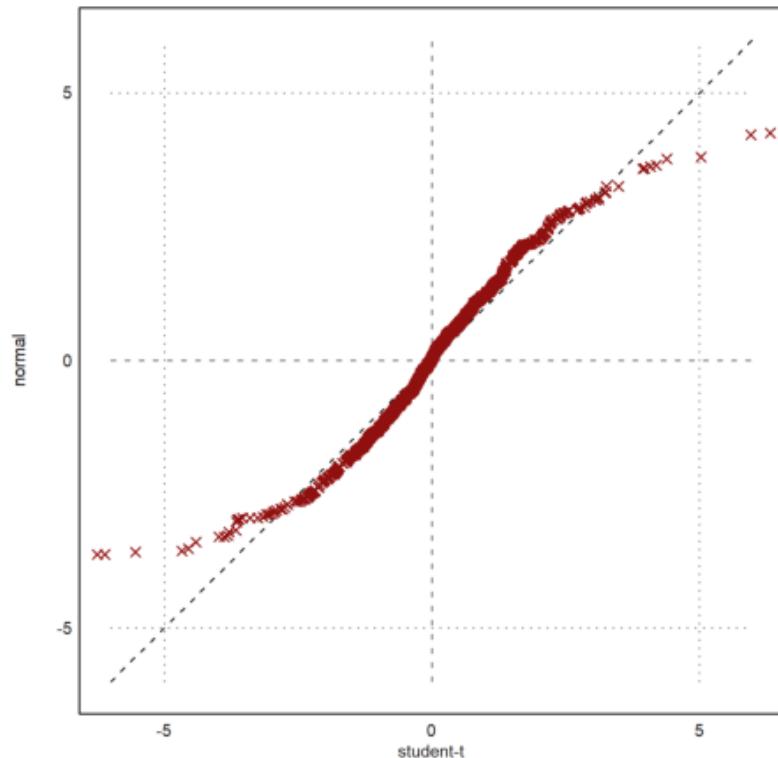
```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style="."):
```



Seringkali, kita ingin membandingkan dua sampel dari distribusi yang berbeda. Ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujian, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



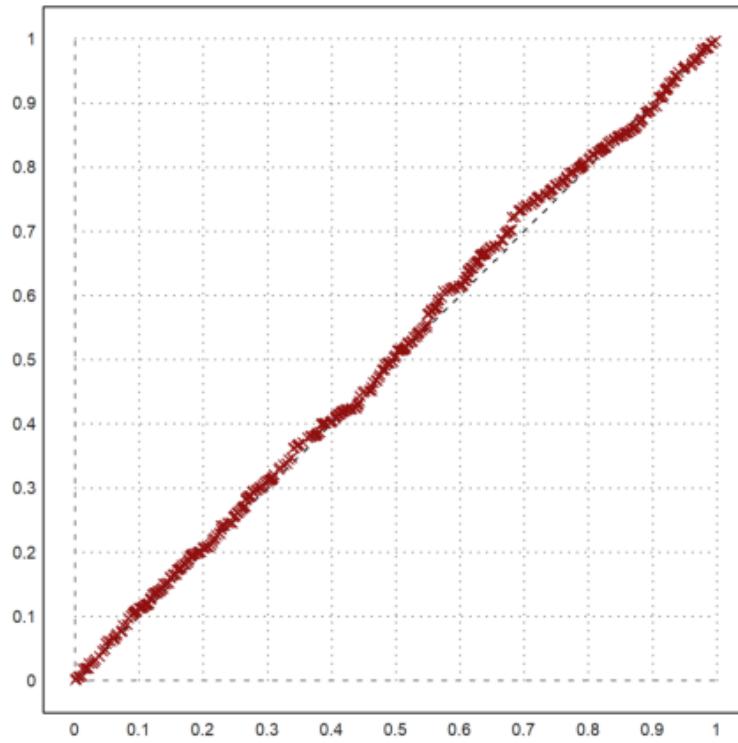
Plot dengan jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.

Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran yang berbeda, kita dapat memperluas yang lebih kecil atau mengecilkan yang lebih besar. Fungsi berikut baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```



Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.

Sebagai permulaan, kami menemukan garis regresi untuk data univariat dengan polifit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x' | y', labc=["x", "y"])
```

x	y
1	2
2	3
3	1
4	5
5	6
6	3
7	7
8	8
9	9
10	8

Kami ingin membandingkan non-weighted dan weighted fit. Pertama, koefisien kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[ 0.733333,  0.812121]
```

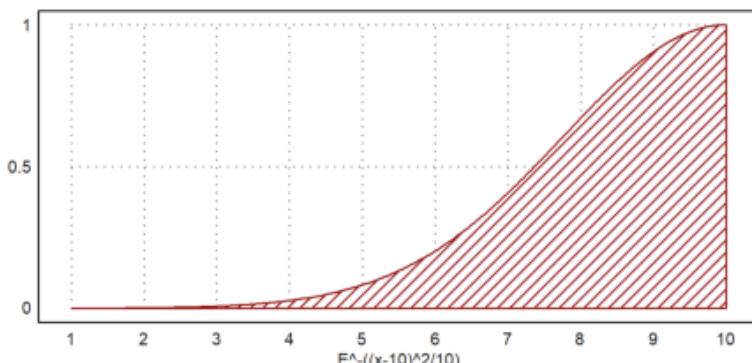
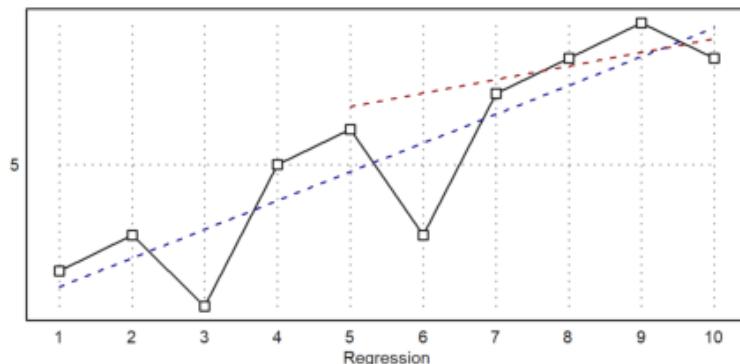
Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

[4.71566, 0.38319]

Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
> plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
> plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```



Sebagai contoh lain kita membaca survei siswa, usia mereka, usia orang tua mereka dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.

Tabel ini berisi "m" dan "f" di kolom kedua. Kami menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat daripada membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

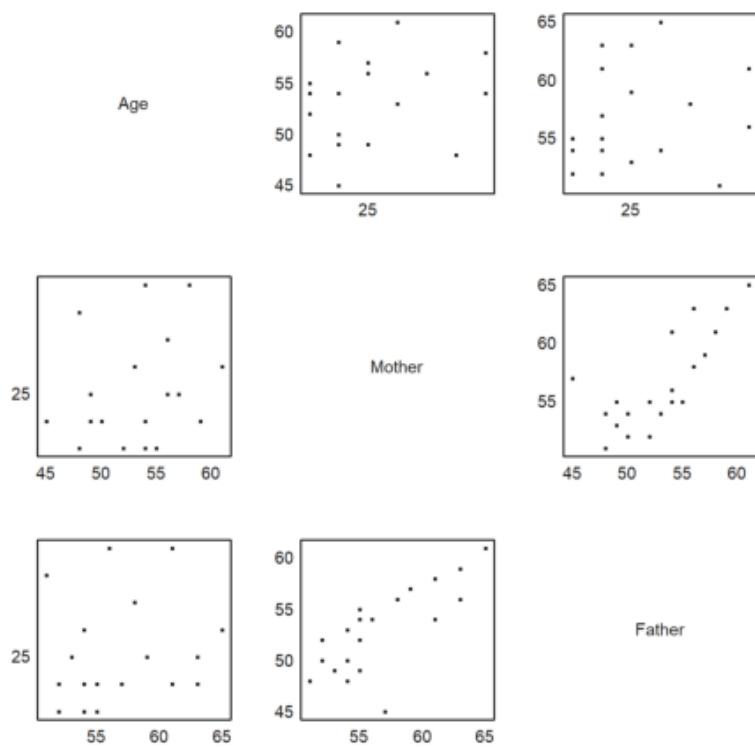
```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=[ "m", "f" ]); ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=[ "m", "f" ]);
```

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3

5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia bergantung satu sama lain? Kesan pertama datang dari scatterplot berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS, 3:5), hd[3:5]):
```



Jelas bahwa usia ayah dan ibu bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
>cs:=MS[, 4:5]'; ps:=polyfit(cs[1], cs[2], 1)
```

```
[17.3789, 0.740964]
```

Ini jelas model yang salah. Garis regresinya adalah $s=17+0,74t$, di mana t adalah usia ibu dan s usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak.

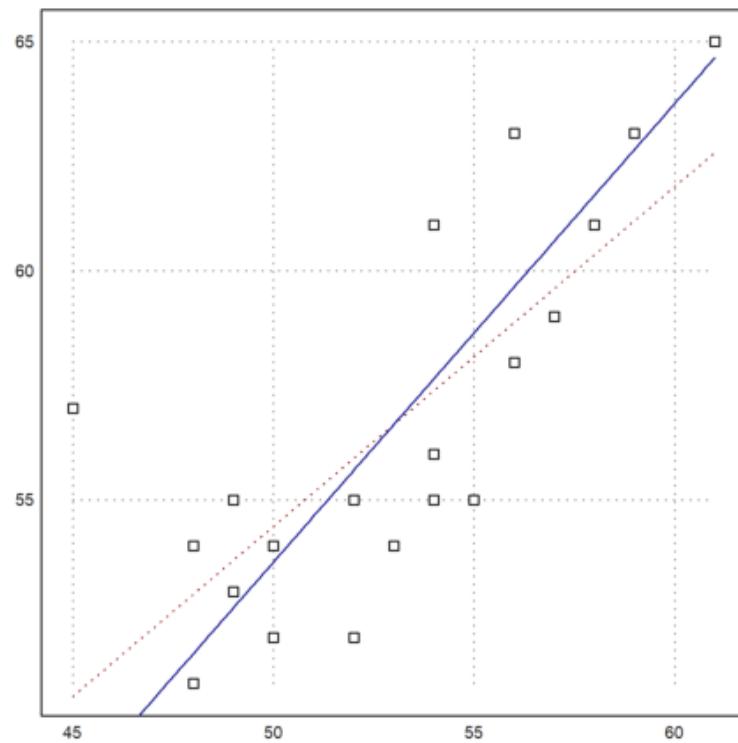
Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti $s=a+t$. Maka a adalah mean dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

3.65

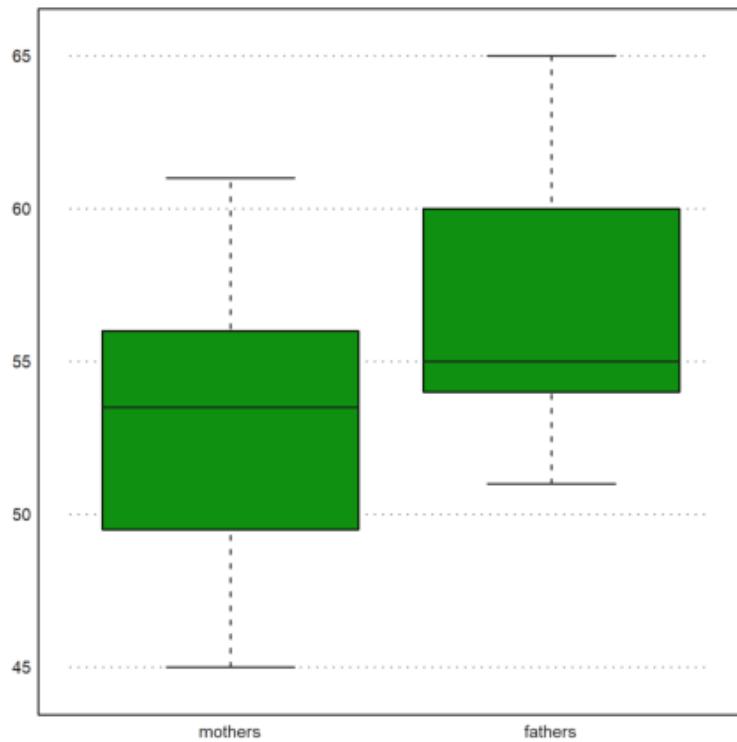
Mari kita plot ini menjadi satu plot pencar.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points); ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add); ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```



Berikut adalah plot kotak dari dua zaman. Ini hanya menunjukkan, bahwa usianya berbeda.

```
>boxplot(cs, ["mothers", "fathers"]):
```



Sangat menarik bahwa perbedaan median tidak sebesar perbedaan rata-rata.

```
>median(cs[2]) - median(cs[1])
```

1.5

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1], cs[2])
```

0.7588307236

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama di kedua vektor. Ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1], cs[2])
```

0.758925292358

Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi-fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi skewness.

$$sk(x) = \frac{\sqrt{n} \sum_i (x_i - m)^3}{(\sum_i (x_i - m)^2)^{3/2}}$$

dimana m adalah mean dari x.

```
>function skew (x:vector) ...
m=mean(x);
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

-0.198710316203

Berikut adalah fungsi lain, yang disebut koefisien skewness Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
>skew1(data)
```

-0.0801873249135

Simulasi Monte Carlo

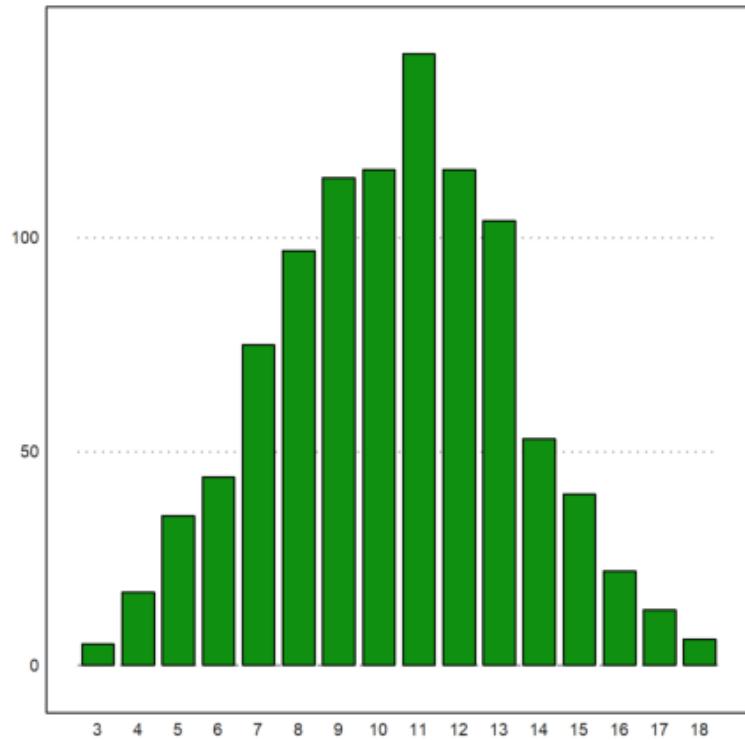
Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Ini adalah satu lagi, yang mensimulasikan 1000 kali 3 lemparan dadu, dan meminta distribusi jumlah.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
[5, 17, 35, 44, 75, 97, 114, 116, 143, 116, 104, 53, 40,
22, 13, 6]
```

Kita bisa merencanakan ini sekarang.

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```



Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidak begitu mudah. Kami menggunakan rekursi lanjutan untuk ini.

Fungsi berikut menghitung banyaknya cara bilangan k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n bilangan dalam rentang 1 sampai m . Ia bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
  if n==1 then return k>=1 && k<=m
  else
    sum=0;
    loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
    return sum;
  end;
endfunction
```

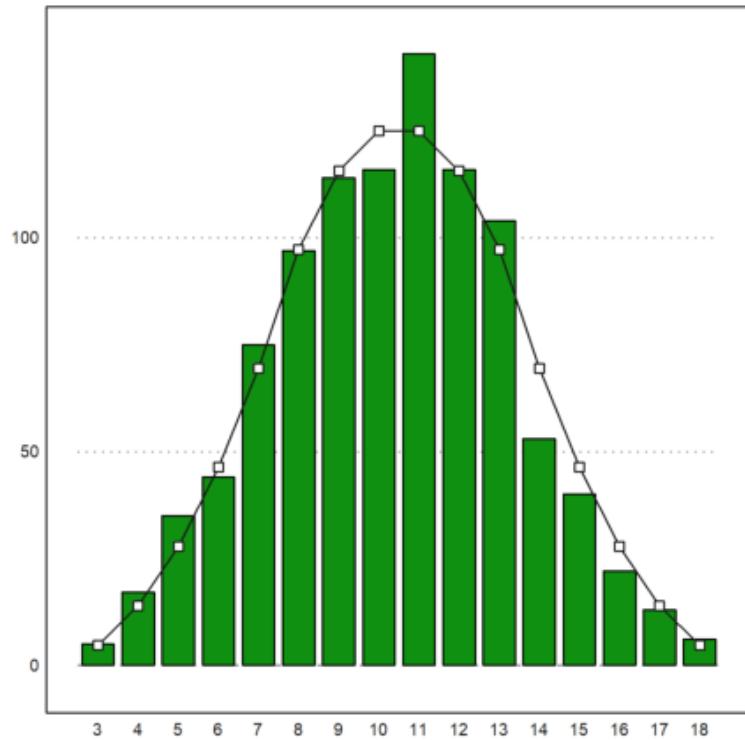
Berikut adalah hasil untuk tiga lemparan dadu.

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3,
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```



Untuk simulasi lain, simpangan nilai rata-rata dari n 0-1-variabel acak terdistribusi normal adalah $1/\sqrt{n}$.

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

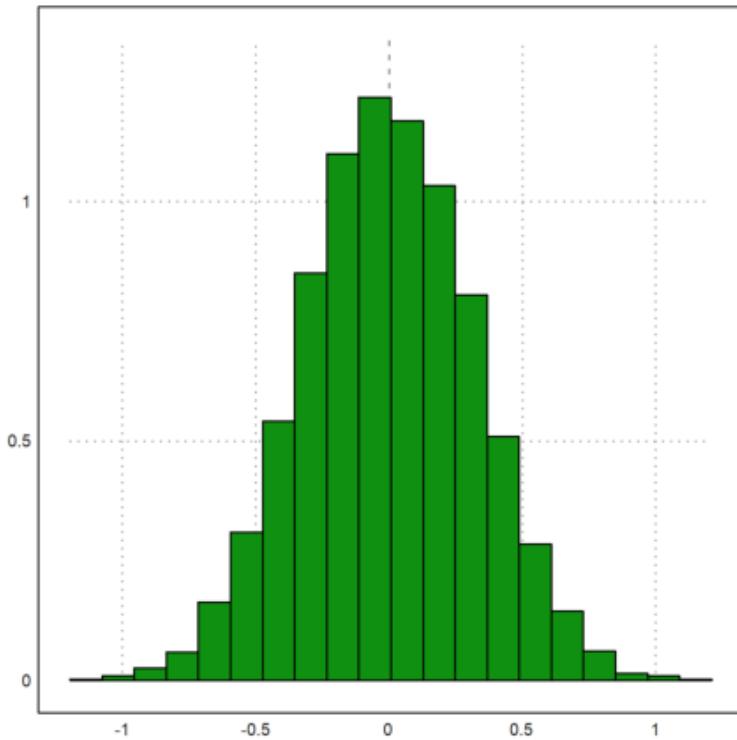
0.316227766017

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kami memproduksi 10.000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M))
```

0.319493614817

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```



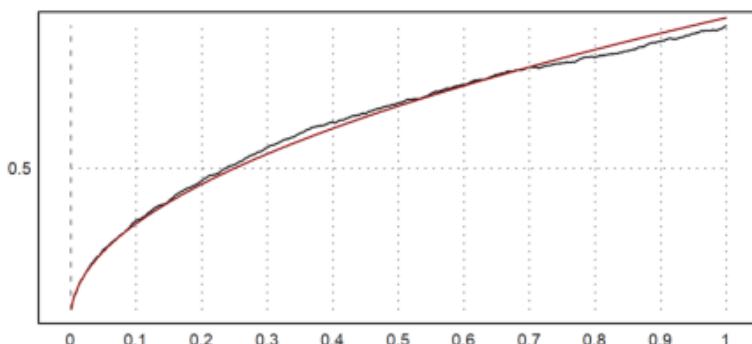
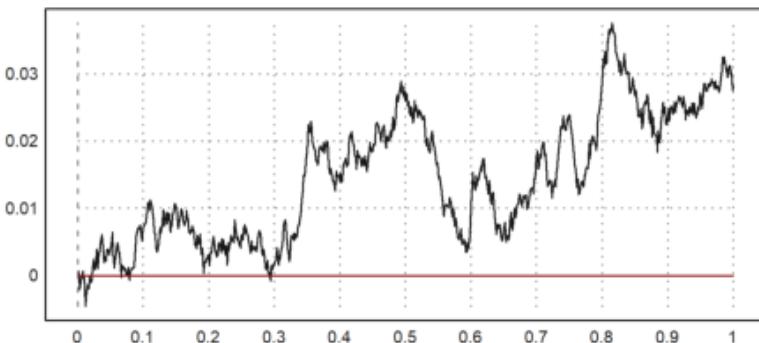
Median 10 0-1-bilangan acak terdistribusi normal memiliki simpangan yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

0.374460271535

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata dari langkah ke-n dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M)'), plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M)'), plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```



Tes

Tes adalah alat penting dalam statistik. Di Euler, banyak tes diimplementasikan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kami terima jika kami menolak hipotesis nol.

Sebagai contoh, kami menguji lemparan dadu untuk distribusi seragam. Pada 600 lemparan, kami mendapatkan nilai berikut, yang kami masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

0.498830517952

Tes chi-kuadrat juga memiliki mode, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya harus hampir sama. Parameter `>p` menginterpretasikan vektor `y` sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

0.526

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kami adil. Tapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.

Selanjutnya kita menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan tes yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

0.528028118442

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s), dev(s), 100, 200)
```

0.0218365848476

Fungsi `ttest()` membutuhkan nilai rata-rata, simpangan, jumlah data, dan nilai rata-rata yang akan diuji. Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kami menolak hipotesis bahwa mereka memiliki rata-rata yang sama, jika hasilnya $<0,05$.

```
>tcomparedata(normal(1,10), normal(1,10))
```

0.38722000942

Jika kita menambahkan bias ke satu distribusi, kita mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10), normal(1,10)+2)
```

5.60009101758e-07

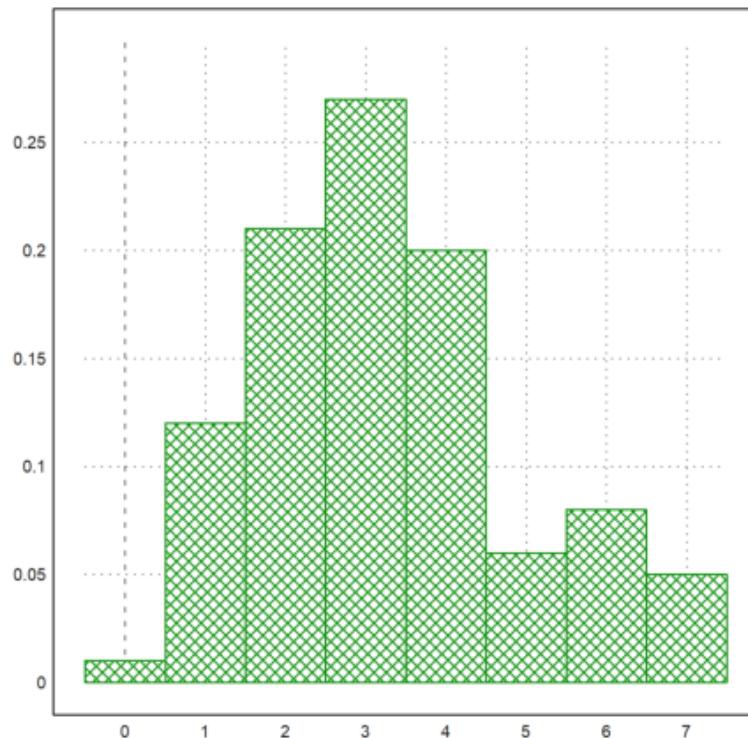
Pada contoh berikutnya, kita menghasilkan 20 lemparan dadu acak sebanyak 100 kali dan menghitung yang ada di dalamnya. Harus ada $20/6=3,3$ yang rata-rata.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1); mean(R)
```

3.28

Kami sekarang membandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama kita plot distribusinya.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\\\"/\\"):
```



```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-kuadrat menolak hipotesis bahwa distribusi kami adalah distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

0.53921579764

Contoh berikut berisi hasil dua kelompok orang (laki-laki dan perempuan, katakanlah) memberikan suara untuk satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76]; ...
> writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

	1	2	3	4	5	6
m	23	37	43	52	64	74
f	27	39	41	49	63	76

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Tes tabel chi² melakukan ini. Akibatnya terlalu besar untuk menolak kemerdekaan. Jadi kita tidak bisa mengatakan, jika voting tergantung pada jenis kelamin dari data ini.

```
>tablettest (A)
```

0.990701632326

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

	1	2	3	4	5	6
m	24.9	37.9	41.9	50.3	63.3	74.7
f	25.1	38.1	42.1	50.7	63.7	75.3

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat dekat dengan 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak tergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency (A)
```

0.0427225484717

Beberapa Tes Lagi

Selanjutnya kami menggunakan analisis varians (Uji-F) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi normal untuk nilai rata-rata yang sama. Metode tersebut disebut ANOVA (analisis varians). Di Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

106.545454545

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

119.111111111

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

116.3

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

0.0138048221371

Ini berarti, kami menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan 1,3%.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata berbeda menguji median sampel bersatu.

```
>a=[56, 66, 68, 49, 61, 53, 45, 58, 54];  
>b=[72, 81, 51, 73, 69, 78, 59, 67, 65, 71, 68, 71];  
>mediantest(a,b)
```

0.0241724220052

Tes lain tentang kesetaraan adalah tes peringkat. Ini jauh lebih tajam daripada tes median.

```
>ranktest(a,b)
```

0.00199969612469

Dalam contoh berikut, kedua distribusi memiliki mean yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

0.129608141484

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perlakuan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0, 7.4, 5.9, 9.4, 8.6, 8.2, 7.6, 8.1, 6.2, 8.9];  
>b=[6.8, 7.1, 6.8, 8.3, 7.9, 7.2, 7.4, 6.8, 6.8, 8.1];
```

Tes signum memutuskan, jika a lebih baik dari b.

```
>signtest(a,b)
```

0.0546875

Ini terlalu banyak kesalahan. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.

Tes Wilcoxon lebih tajam dari tes ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif perbedaan.

```
>>wilcoxon(a,b)
```

0.0296680599405

Mari kita coba dua tes lagi menggunakan seri yang dihasilkan.

```
>>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

0.0068706451766

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

0.275145971064

Nomor Acak

Berikut ini adalah pengujian untuk pembangkit bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan masalah.

Pertama kita menghasilkan sepuluh juta angka acak di $[0,1]$.

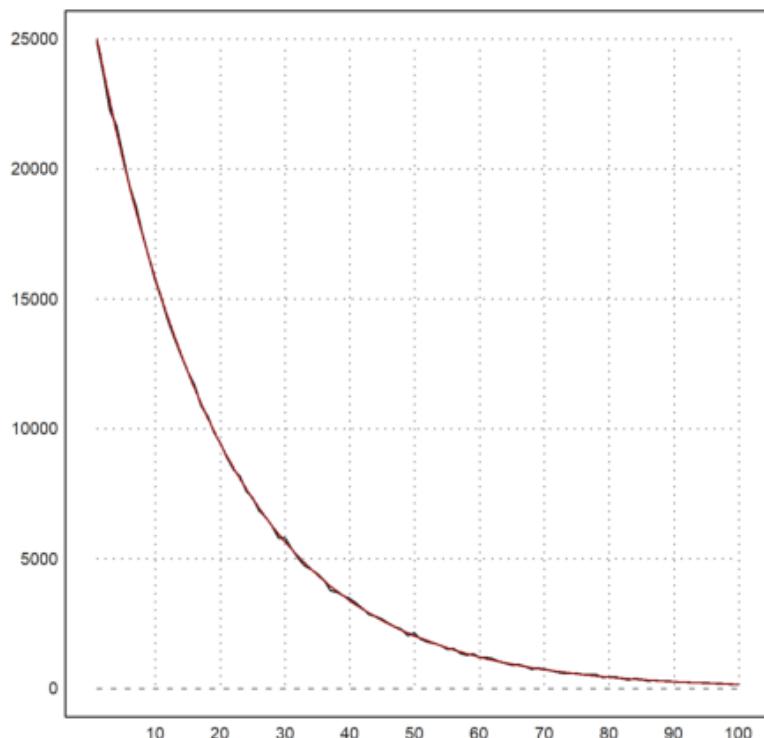
```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya kita hitung jarak antara dua bilangan kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Akhirnya, kami memplot berapa kali, setiap jarak terjadi, dan membandingkan dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
> plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```



Hapus datanya.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Notebook ini cocok untuk Anda yang terbiasa dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran tentang hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami mencari cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Perhatikan bahwa ini adalah pekerjaan yang sedang berjalan. **Sintaks Dasar**

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Di EMT, perbedaan utama adalah bahwa : operator dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, ia memiliki daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5,  
7, 7.5, 8, 8.5, 9]
```

Fungsi c() tidak ada. Dimungkinkan untuk menggunakan vektor untuk menggabungkan sesuatu.

Contoh berikut, seperti banyak contoh lainnya, dari "Interoduction to R" yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti jalannya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 0, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT diganti dengan fungsi seq() di R. Kita bisa menulis fungsi ini di EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...  
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada di EMT. Untuk input vektor, dapat ditulis sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...  
>rep(x,2)
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":" digunakan untuk tugas. Operator "->" digunakan untuk unit di EMT.

```
>125km -> " miles"
```

77.6713990297 miles

Operator "<" untuk penugasan tetap menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 di EMT.

```
>a=2; a<-4
```

0

Di R, "a<-4<3" berfungsi, tetapi "a<-4<-3" tidak. Saya juga memiliki ambiguitas serupa di EMT, tetapi mencoba menghilangkannya perlahan-lahan.

EMT dan R memiliki vektor bertipe boolean. Namun di EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili salah dan benar. Di R, nilai true dan false dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti di EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0, 0, 1, 0, 0]  
[0, 0, 3.1, 0, 0]
```

EMT melempar kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada tanda "kesalahan".

```
>errors off; 0/0, isNaN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN  
1
```

String sama di R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"     ; René Grothmann"
```

© René Grothmann

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar di sistem Anda sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Itu tergantung pada font yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan "+" atau "|". Ini dapat mencakup angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>"pi = "+pi
```

pi = 3.14159265359

Pengindeksan

Sebagian besar waktu, ini akan berfungsi seperti pada R.

Tetapi EMT akan menginterpretasikan indeks negatif dari belakang vektor, sedangkan R menginterpretasikan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]  
[10.4, 5.6, 3.1]  
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x, 2)
```

```
[10.4, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Vektor logis tidak diperlakukan secara berbeda sebagai indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda perlu meng-ekstrak elemen bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]  
[1, 1, 0, 1, 1]  
[10.4, 5.6, 6.4, 21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4, 5.6, 5.6, 10.4]
```

Tetapi nama untuk indeks tidak dimungkinkan di EMT. Untuk paket statistik, ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...  
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,[ "first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!  
Error in:  
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...  
^
```

```
Trying to overwrite protected function sel!  
Error in:  
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...  
^  
[10.4, 3.1]
```

Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelas, di R ada vektor yang tumbuh. Anda dapat mengatur vektor numerik kosong v dan menetapkan nilai ke elemen $v[17]$. Ini tidak mungkin di EMT. Berikut ini agak tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor itu kembali ke variabel global v .

Semakin efisien pra-mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti `complex()`.

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i ,  2+0i ,  3+0i ,  4+0i ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk rangkaian string sederhana. Tetapi ada fungsi seperti `print()` atau `frac()`.

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";  
loop 1 to length(v);  
    s=s+print(v[#],2,0);  
    if #<length(v) then s=s+","; endif;  
end;  
return s+"]";  
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi `convertmxm()`, yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertm xm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex perintah `tex` dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Faktor dan Tabel

Dalam pengantar R ada contoh dengan apa yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kami ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Menjadi program statistik, R memiliki factor() dan tappy() untuk ini.

EMT dapat melakukannya dengan menemukan indeks wilayah dalam daftar wilayah yang unik.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

Pada titik itu, kita dapat menulis fungsi loop kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor. Atau kita bisa meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map_tappi (i; f$call, cat, x) ...
```

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini agak tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berhasil.

```
>tappi(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5, 57.3333333333, 55.5, 53.6, 55, 60.5, 56, 52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappi(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5, 57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Jadi kita bisa mencetak rata-rata pendapatan negara di wilayah dengan cara yang bersahabat.

```
>writetable(tapply(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

	act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
	44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus dengan jelas disimpan dalam kumpulan dengan jenis dan kategori (negara bagian dan teritori dalam contoh kami). Untuk EMT, kami menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...
```

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

Sekarang kita bisa meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
    ind=nonzeros(f==i);
    if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
    else x[i]=f$(t[ind]);
    endif;
end;
return {{x,uf}};
endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak jenis pengecekan di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) tanpa data. Tetapi orang harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf. Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25

Array

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe datanya disebut matriks. Akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R array adalah vektor dengan bidang dimensi.

Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Itu dapat dibuat menjadi matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sangat mirip dengan R.

```
>X[,2:3]
```

2	3
7	8
12	13
17	18

Namun, dalam R dimungkinkan untuk menetapkan daftar indeks spesifik dari vektor ke suatu nilai. Hal yang sama dimungkinkan di EMT hanya dengan loop.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))  
  M[i#{},j#{}] = v#;  
end;  
endfunction
```

Kami mendemonstrasikan ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi di EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalininya ke dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

1	2	0	4	5
6	0	8	9	10
0	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Perkalian luar dalam EMT hanya dapat dilakukan antar vektor. Ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus menjadi vektor kolom dan yang lainnya vektor baris.

```
> (1:5) * (1:5) '
```

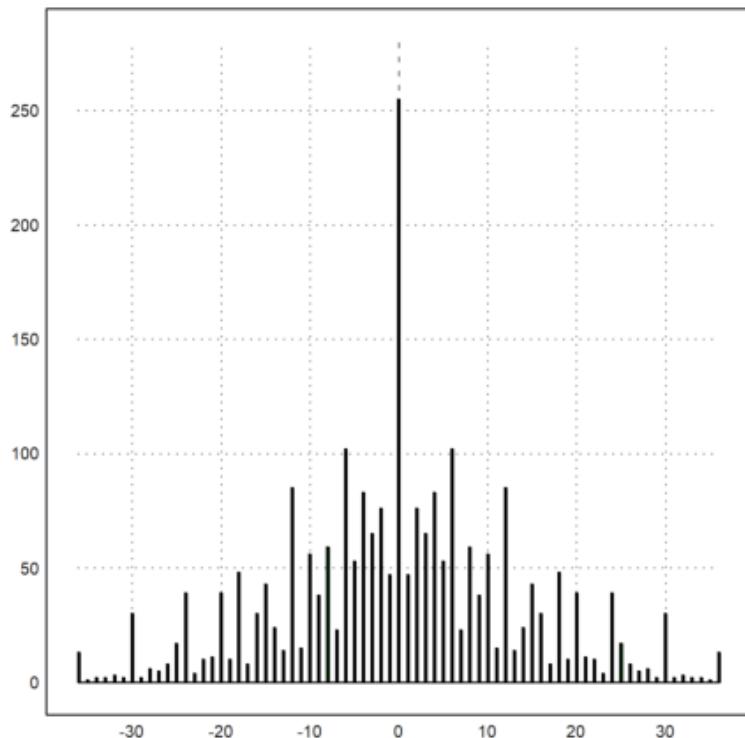
1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Dalam pengantar PDF untuk R ada sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d yang dipilih dari 0 hingga n secara acak. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, ini dapat dicapai dengan loop. Tapi loop tidak efektif di EMT atau R. Di EMT, kita bisa menulis loop di C dan itu akan menjadi solusi tercepat.

Tapi kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```



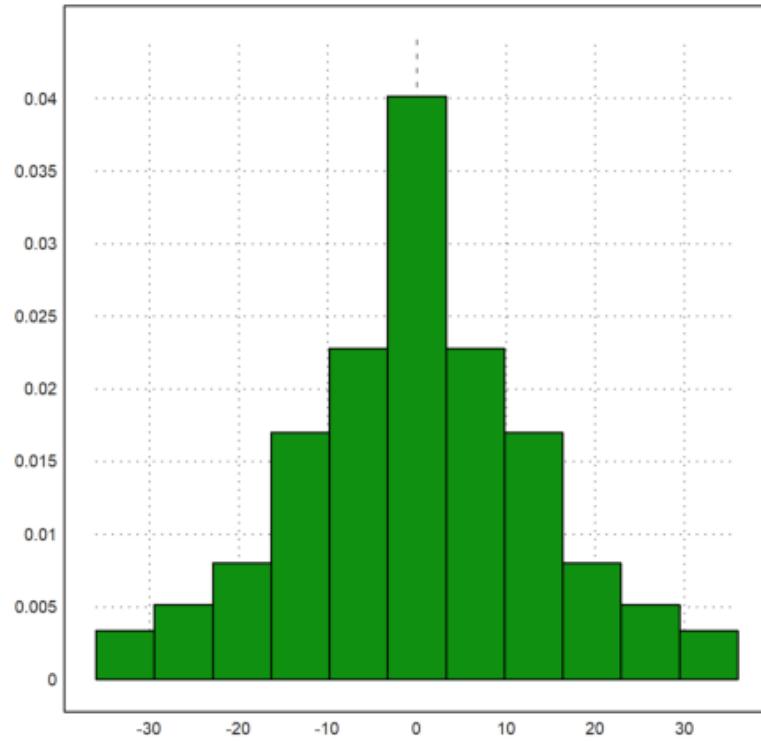
Selain multiplisitas yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
[0, 23, 132, 316, 602, 801, 333, 141, 53, 0]
```

Cara paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

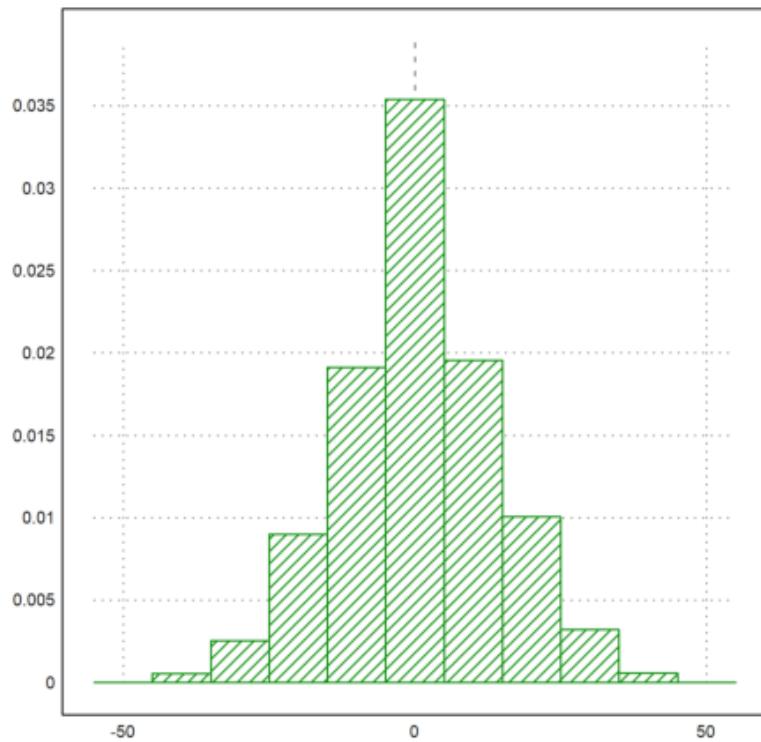
```
>plot2d(q,distribution=11):
```



Tetapi juga memungkinkan untuk menghitung sebelumnya hitungan dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```



Daftar

EMT memiliki dua macam daftar. Salah satunya adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang lainnya adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini. Jenis daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi di EMT. Itu berperilaku seperti struktur di C, tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={ {"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]} }
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990, 1992]
```

Saat ini elemen tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Mereka diakses dengan angka.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

File Input dan Output (Membaca dan Menulis Data)

Anda akan sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberi tahu Anda tentang banyak cara untuk mencapai ini. Fungsi sederhana adalah writematrix() dan readmatrix(). Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor real ke file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.49815  
0.28037
```

Untuk menulis data ke file, kita menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengenalan ini kemungkinan besar berada di direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk notebook sendiri, ini tidak perlu, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita menulis vektor kolom a' ke file. Ini menghasilkan satu nomor di setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kami menggunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

Dan hapus filenya.

```
>fileremove(filename);  
>mean(a), dev(a),
```

```
0.49815  
0.28037
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Misalnya, jika Anda memiliki sistem Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan koma). File "test.csv" berikut akan muncul di folder current Anda.

```
>filename="test.csv"; ...  
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f"; ...  
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk tokenize ini, kami mendefinisikan vektor token.

```
>tok := [ "f", "m" ]
```

f

m

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...  
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan header token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

	f	m
1	6	7
2	5	2

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...  
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...  
>close();
```

Filenya terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

A,B,C
0.7003664386138074,0.1875530821001213,0.3262339279660414
0.5926249243193858,0.1522927283984059,0.368140583062521
0.8065535209872989,0.7265910840408142,0.7332619844597152

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke notebook, atau ke file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

A	B	C
0.70037	0.18755	0.32623
0.59262	0.15229	0.36814
0.80655	0.72659	0.73326

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai rata-rata dari baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.40472  
0.37102  
0.75547
```

File CSV

Pertama, mari kita menulis matriks ke dalam file. Untuk output, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv"; ...  
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut adalah isi dari file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.8221197733097619,0.821531098722547,0.7771240608094004  
0.8482947121863489,0.3237767724883862,0.6501422353377985  
0.1482301827518109,0.3297459716109594,0.6261901074210923
```

CSV ini dapat dibuka pada sistem bahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu di sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal. Tetapi titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
0.82212 0.82153 0.77712  
0.84829 0.32378 0.65014  
0.14823 0.32975 0.62619
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk ditulis dengan parameter "w". Standarnya adalah "r" untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks dipisahkan oleh garis kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
1 0 0  
0 1 0  
0 0 1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan "simpan sebagai" dan "format lain", lalu pilih "CSV". Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Berikut adalah contoh.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
0;1000;1000
1;1051,271096;1072,508181
2;1105,170918;1150,273799
3;1161,834243;1233,67806
4;1221,402758;1323,129812
5;1284,025417;1419,067549
6;1349,858808;1521,961556
7;1419,067549;1632,31622
8;1491,824698;1750,6725
9;1568,312185;1877,610579
10;1648,721271;2013,752707
```

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubah ini di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu membaca matriks ke dalam EMT.

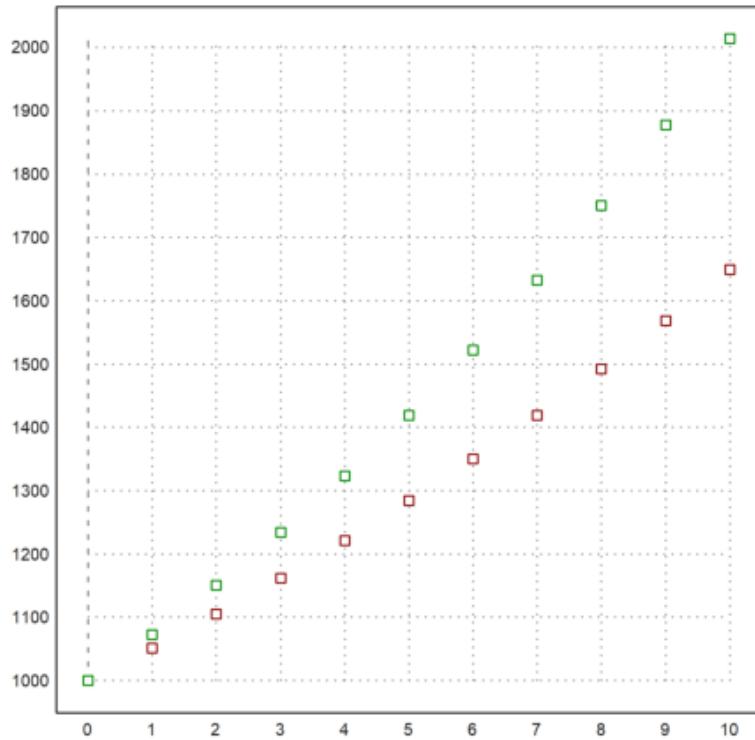
Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma diganti dengan titik dengan parameter >comma. Untuk CSV bahasa Inggris, cukup abaikan parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

0	1000	1000
1	1051.3	1072.5
2	1105.2	1150.3
3	1161.8	1233.7
4	1221.4	1323.1
5	1284	1419.1
6	1349.9	1522
7	1419.1	1632.3
8	1491.8	1750.7
9	1568.3	1877.6
10	1648.7	2013.8

Mari kita plot ini.

```
>plot2d(M' [1],M' [2:3],>points,color=[red,green]'):
```



Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi `getvectorline()` akan membaca angka dari baris data. Secara default, ia mengharapkan titik desimal. Tapi itu juga bisa menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil `setdecimaldot(",")` sebelum Anda menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut adalah contoh untuk ini. Ini akan berhenti di akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
open(file);
M=[];
repeat
    until eof();
    v=getvectorline(3);
    if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
0.82212  0.82153  0.77712
0.84829  0.32378  0.65014
0.14823  0.32975  0.62619
```

Dimungkinkan juga untuk membaca semua angka dalam file itu dengan `getvector()`.

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
0.82212 0.82153 0.77712  
0.84829 0.32378 0.65014  
0.14823 0.32975 0.62619
```

Jadi sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
0.50303
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
0.50303
```

Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kami menulis tabel dengan header baris dan kolom ke file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3); ...  
>open(file,"w"); ...  
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]); ...  
>close(); ...  
>printfile(file)
```

```
one,two,three  
0.09, 0.39, 0.86  
0.39, 0.86, 0.71  
0.2, 0.02, 0.83
```

Ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file dalam EMT, kami menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...  
>writetable(M,labc=headings)
```

```
one two three  
0.09 0.39 0.86  
0.39 0.86 0.71  
0.2 0.02 0.83
```

Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki garis dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1'114.05"
```

2020-11-03, Tue, 1'114.05

Pertama kita dapat menandai garis.

```
>vt=strtoks(line)
```

2020-11-03

Tue

1'114.05

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]), ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])), ...
>strrepl(vt[3], "'", "")()
```

7.3816e+05

2

1114

Menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstrak hampir semua informasi dari baris data. Asumsikan kita memiliki baris berikut dokumen HTML.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstrak ini, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

- kurung tutup >,
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan

sub-pertandingan "(...)";

- braket pembuka dan penutup menggunakan solusi terpendek,
- lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan kurung buka <.

Ekspresi reguler agak sulit dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,>([ ^<>]+)<.+?>([ ^<>]+)<" );
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-pertandingan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

1145.5
5.6

Berikut adalah fungsi, yang membaca semua item numerik antara `<td>` dan `</td>`.

```
>function readtd (line) ...
v=[]; cp=0;
repeat
{pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
until pos==0;
if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kami membaca versi saat ini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Versi ..." dalam sebuah judul.

```
>function readversion () ...

```

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
until urleof();
s=urlgetline();
k=strfind(s,"Version ",1);
if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

```
>readversion
```

```
Version 2022-05-18
```

Input dan Output Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi, "mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2), "M", file); ...
>printfile(file, 3)
```

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
```

Kita sekarang dapat memuat file. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =
0.59918   0.79603
0.51672   0.29967
```

Omong-omong, jika writevar() digunakan pada variabel, itu akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel ini.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga bisa membuka file baru atau menambahkan file yang sudah ada. Dalam contoh kami menambahkan file yang dihasilkan sebelumnya.

```
>open(file, "a"); ...
>writevar(random(2,2), "M1"); ...
>writevar(random(3,1), "M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
0.30287   0.15372
0.7504    0.75401
M2 =
0.27213
0.053211
0.70249
```

Untuk menghapus file apa pun, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Vektor baris dalam file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada di baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("]"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.344851384551
0.0807510017715
0.876519562911
0.754157709472
0.688392638934
];
```

```
>load(file); M
```

```
[0.34485, 0.080751, 0.87652, 0.75416, 0.68839]
```

Contoh Soal

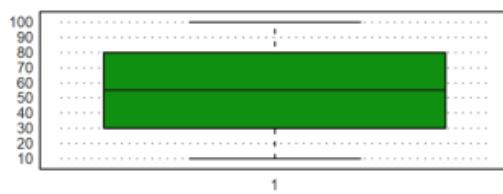
1

Menghitung rata-rata dan deviasi dengan data sebagai berikut

```
>A=[10,20,30,40,50,60,70,80,90,100];...
>mean(A), dev(A)
```

```
55
30.277
```

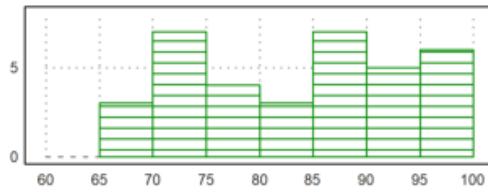
```
>aspect(3); boxplot(A):
```



2

Menghitung nilai ulangan kelas 4

```
>r=65:5:100; v=[3,7,4,3,7,5,6];  
>plot2d(r,v,a=60,b=100,c=0,d=8,bar=1,style="-"):
```



```
>T:=r[1:7]' | r[2:8]' | v'; writetable(T,labc=["BB","BA","Frekuensi"])
```

BB	BA	Frekuensi
65	70	3
70	75	7
75	80	4
80	85	3
85	90	7
90	95	5
95	100	6

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

67.5
72.5
77.5
82.5
87.5
92.5
97.5

```
>x=fold(r,[0.5,0.5]);  
>{m,d}=meandev(x,v); m, d
```

83.643
10.08

regresi dan korelasi

```
>x=[5,7,10,12,15,20,25,30]; y=[40,50,60,65,70,80,92,100]; writetable(x' | y',labc=["x","y"])
```

x	y
5	40
7	50
10	60

```

12      65
15      70
20      80
25      92
30      100

```

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[34.239, 2.283]
```

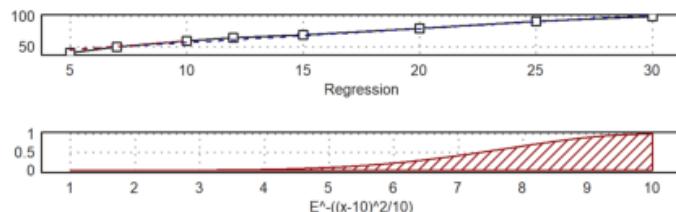
```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[30.262, 2.9336]
```

```

>figure(2,1); ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
> plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
> plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):

```



3

Hitung deviasi sampel standar dari data. Dari 10 siswa, sampel 8 orang diambil untuk mengukur tinggi badan mereka. Dengan data: 155,165,160,155,168,170,173,158.

```
>V=[155,165,160,155,168,170,173,158]
```

```
[155, 165, 160, 155, 168, 170, 173, 158]
```

```
>dev(V)
```

6.9693

```
>mean(V)
```

163