

Exercice 4.21:

$$(E1) \quad 544x - 944y = 160$$

Tout d'abord, déterminons le pgcd de 544 et de 944, en utilisant l'algorithme d'Euclide.

$$944 = 544 \times 1 + 400$$

$$544 = 400 \times 1 + 144$$

$$400 = 144 \times 2 + 112$$

$$144 = 112 \times 1 + 32$$

$$112 = 32 \times 3 + 16$$

$$32 = 16 \times 2 + 0$$

$$\text{donc } 544 \wedge 944 = 16$$

or $16 \mid 160$ donc il existe bien des solutions

$$16 = 112 - 32 \times 3 \quad \text{or} \quad 32 = 144 - 112 \times 1$$

$$16 = 112 - (144 - 112 \times 1) \times 3$$

$$16 = 112 \times 4 - 144 \times 3 \quad \text{or} \quad 112 = 400 - 144 \times 2$$

$$16 = (400 - 144 \times 2) \times 4 - 144 \times 3$$

$$16 = 400 \times 4 - 144 \times 11 \quad \text{or} \quad 144 = 544 - 400 \times 1$$

$$16 = 400 \times 4 - (544 - 400 \times 1) \times 11$$

$$16 = 400 \times 15 - 544 \times 11 \quad \text{or} \quad 400 = 944 - 544 \times 1$$

$$16 = (944 - 544 \times 1) \times 15 - 544 \times 11$$

$$160 = 944 \times (-150) + 544 \times (-260)$$

Une solution particulière est $(-260; -150)$

Comme $(-260; -150)$ est une solution particulière, on a,

$$544x - 944y = 544x(-260) + 944x(-150)$$

$$544(x + 260) = 944(-150 - y) \quad \text{on divise par } 544 \wedge 944$$

$$(1) \quad 34(x + 260) = 59(-150 - y)$$

$$\begin{cases} 59 \mid 34(x + 260) \\ 34 \wedge 59 = 1 \end{cases}$$

donc d'après le lemme de Gauss $59 \mid x + 260$

$$\exists q \in \mathbb{Z}, x + 260 = 59 \times q \Leftrightarrow x = 59q - 260$$

$$\text{Dans (1), } 34(59q - 260 + 260) = 59(150 - y)$$

$$34 \times 59q = 59(150 - y)$$

$$34q = 150 - y$$

$$y = 150 - 34q$$

$$S = \{(59q - 260; 150 - 34q), q \in \mathbb{Z}\}$$

$$(E2) \quad 134x - 56y = 24$$

Tout d'abord déterminons le pgcd de 134 et 56.

$$134 = 56 \times 2 + 22$$

$$56 = 22 \times 2 + 12$$

$$22 = 12 \times 1 + 10$$

$$12 = 10 \times 1 + 2$$

$$10 = 2 \times 5 + 0$$

$$\text{donc } 134 \wedge 56 = 2$$

$$\text{or } 2 \mid 24 \text{ donc il}$$

existe bien des solutions

$$2 = 12 - 10 \times 1 \quad \text{or} \quad 10 = 22 - 12 \times 1$$

$$2 = 12 - (22 - 12 \times 1) \times 1$$

$$2 = 12 \times 2 - 22 \times 1 \quad \text{or} \quad 12 = 56 - 22 \times 2$$

$$2 = (56 - 22 \times 2) \times 1 - 22 \times 1$$

$$2 = 56 \times 1 - 22 \times 5 \quad \text{or} \quad 22 = 134 - 56 \times 2$$

$$2 = 56 \times 1 - (134 - 56 \times 2) \times 5$$

$$2 = 56 \times 12 + 134 \times (-5)$$

$$24 = -56 \times (-144) + 134 \times (-60)$$

Une solution particulière est $(-60; -144)$

Comme $(-60; -144)$ est une solution particulière, on a,

$$134x - 56y = 134 \times (-60) - 56 \times (-144)$$

$$134(x - 60) = 56(-144 - y)$$

$$(1) \quad 67(x - 60) = 28(-144 - y)$$

$$\begin{cases} 28 \mid (x - 60)67 \\ 67 \wedge 28 = 1 \end{cases}$$

donc d'après le lemme de Gauss $28 \mid x - 60$

$$\exists q \in \mathbb{Z}, \quad x - 60 = 28 \times q \Leftrightarrow x = 28q + 60$$

Dans (1),

$$67(28q + 60 - 60) = 28(-14h - y)$$

$$67 \times 28q = 28(-14h - y)$$

$$67q = -14h - y$$

$$y = -14h - 67q$$

$$S = \{ (28q + 60; -14h - 67q), q \in \mathbb{Z} \}$$