SUITES

Table des matières

Contextualisation

La notion de suite permet d'étendre le concept de liste à des listes de longueur infinie, tout en gardant la propriété d'énumérabilité ; ainsi, pour tout élément appartenant à la suite on est capable de donner son rang, et d'énumérer tous les éléments jusqu'à ce rang.

Si en informatique on parlera aussi de suites finies, notamment pour étudier la convergence en un nombre fini d'étapes d'algorithmes, en mathématiques on se concentrera sur les suites vues comme des applications définies (indicées) sur $\mathbb{N}$.

Elles peuvent être à valeurs dans n'importe quel ensemble, mais ce cours étudiera les ***suites de réels***, c'est-à-dire à valeurs dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Certains résultats pourront être étendus aux suites à valeurs complexes ; attention néanmoins, tous ceux utilisant des inégalités ne pourront être prolongés dans $\mathbb{C}$ où il n'existe pas d'ordre total compatible avec les opérations algébriques (ainsi, pas de notion de monotonie, d'encadrement, d'intervalle...)

On se concentrera sur deux approches principales des suites : l'approche globale (suites vues comme des éléments, formules explicites, propriétés générales), et l'approche locale (formules de récurrence, étude de termes particuliers, convergence), tout en gardant en mémoire que ces deux angles sont complémentaires et très souvent imbriqués, mais offrent deux points de vue utiles et de natures différentes sur les suites.

Les suites apparaissent naturellement dans tout problème impliquant une itération dont *a priori* on ne connaît pas le nombre d'étapes, ou dans ceux nécessitant une énumération possiblement infinie. Prenons l'exemple d'algorithmes définis par récurrence : pour étudier les résultats mais aussi la convergence éventuelle, on utilise une modélisation par des suites, finies ou infinies, par exemple :

— l'algorithme d'Euclide, bien que fini, se modélise sous forme de suite ;
— l'écriture décimale d'un nombre s'apparente à unesuite d'entiers ;
— la recherche par dichotomie approche un résultat par les termes d'une suite (par exemple, la recherche d'un zéro d'une fonction) ;
— les calculs numériques de valeurs (non entières) sont très souvent des suites d'approximations, sous forme de couple (valeur approchée, incertitude) ;
— la complexité d'un algorithme (c'est-à-dire le nombre d'étapes coûteuses lors de l'exécution) ayant en entrée une donnée déterminée par sa taille est décrite par une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Ce TD sera coupé en plusieurs bloc interdépendants, centrés à chaque fois sur une notion particulière. Une section Attendus vous permettra de tester si vous avez acquis les connaissances nécessaires en mettant en relief les parties dans lesquelles elles sont étudiées.

Attendus

Cette section présente une liste des compétences que vous devez maîtriser et sur lesquelles vous serez évalués.

Ainsi vous devez être en mesure de :

— comprendre l'objet suite et les différentes manières de le décrire, ainsi que ce qu'il peut représenter ;
— comprendre la modélisation d'un problème via un calcul de suites (calcul récursif/dichotomie) ;
— savoir formaliser tout le vocabulaire et les concepts liés aux suites en syntaxe mathématique ;
— pouvoir identifier rapidement si une suite vérifie telle ou telle propriété, et donner des exemples et contre-exemples ;
— être capable d'utiliser les formules explicites et de récurrence, de passer de l'une à l'autre ;
— comprendre les notions asymptotiques (convergence, comparaisons) et les études de problème à l'infini.

Voici pour chaque section les points particuliers sur lesquels vous devez porter votre attention :

Suites arithmético-géométriques :
— reconnaître ce genre de suites et identifier les problèmes qu'elles modélisent ;

— manipuler les formules explicites et de récurrence ;
— savoir calculer les sommes de termes de manière efficace.

études de convergence :
— comprendre la formalisation avec les quantificateurs ;
— connaître et utiliser les outils (raisonnements) permettant de déterminer si une suite est convergente ou non ;
— savoir trier entre convergence, divergence avec limite infinie, divergence sans limite ;
— manipuler les limites, les opérations sur les limites.

Suites extraites :
— comprendre le concept et les notations, manipuler et extraire des sous-suites ;
— savoir quelles propriétés sont conservées ; comprendre notamment l'intérêt du cas monotone.

Comparaisons asymptotiques :
— connaître le comportement des suites usuelles, les comparaisons ;
— comprendre et savoir reconnaître les différentes notions : O, o, $\sim$.

Suites récurrentes :
— comprendre quelles sont les quantités importantes lors d'une étude de suite récurrente (point fixe) ;
— analyser le comportement autour d'un point fixe, et savoir quelles opérations permettent de s'y ramener ;
— manipuler la dualité formule explicite/formule récurrente et connaître les intérêts et inconvénients de chacune ;
— Assimiler les premières idées de complexité, de vitesse de convergence.

1 Définitions et suites usuelles

1.1 Résumé

Cette partie donne un éventail des propriétés associées aux suites permettant des caractérisations efficaces et la résolution de problèmes généralement modélisés par ces suites. Le but est de se familiariser avec lesdites propriétés : savoir les énoncer, les utiliser, donner des exemples et des contre-exemples.

Ainsi, on introduira notamment les concepts suivants :

— monotonie (variations : croissance, décroissance, stricte ou non) ;
— bornes (minoration, majoration) ;
— périodicité ;
— convergence, divergence.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Donner la définition des propriétés citées avec des quantificateurs puis donner des exemples de suites vérifiant ces propriétés.

1. constante
2. stationnaire
3. majorée, minorée
4. bornée
5. périodique
6. alternée
7. croissante, décroissante ; puis strictement
8. convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, puis convergente

9. tendant vers $+\infty$, $-\infty$
10. n'ayant pas de limite
11. bornée et non convergente
12. strictement croissante et bornée

Exercice 1.2

Contre-exemples classiques

1. Donner un exemple de suite tendant vers $+\infty$ mais pas croissante.
2. Même question en ajoutant l'hypothèse supplémentaire : pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite n'est pas croissante sur $[\![n_0, +\infty[\![$.
3. Expliquer pourquoi les suites $\big(\sin(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\cos(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas périodiques.
4. Donner des exemples de suites non majorées mais qui ne tendent pas vers $+\infty$.
5. Donner un exemple de suite ni majorée ni minorée, et expliquer pourquoi une telle suite ne peut pas avoir de limite.

2 Suites arithmétiques et géométriques

2.1 Résumé

Les suites arithmétiques et géométriques sont les premières suites pour lesquelles on fait le lien entre une formule explicite et une formule de récurrence.

Les suites géométriques serviront souvent de suites de référence dans les calculs : pour déterminer des vitesses de convergence/divergence, des majorations asymptotiques ... Ce seront également les premières suites convergentes dont on sait calculer efficacement la limite de la somme des termes et donc l'une des premières références dans les cours sur les séries numériques étudiés en S3. Une grande partie de la notion de séries entières (étudiées également en S3) utilise la proximité desdites séries avec des séries géométriques.

Les suites arithmétiques, de comportement plus simple, sont presque toujours divergentes (c'est-à-dire toujours si l'on excepte les suites constantes), leur utilisation est donc plus rare. Il peut arriver que l'on se serve de telles suites pour obtenir des majorants asymptotiques des complexités divergentes (et en général, plus les données d'un problème sont grandes, plus il faut de temps pour le résoudre, donc les complexités en temps, en fonction de la taille des arguments donnent très souvent des suites divergentes).

2.2 Exercices

Exercice 2.3

à sa sortie de l'EPITA, Arthur se fait recruter par une entreprise qui lui propose deux types de contrat :

— contrat "A" : 50.000 euros annuels avec une augmentation de 2.000 euros par an ;
— contrat "B" : 45.000 euros annuels avec une augmentation de 8 % par an.

On note A_n le salaire perçu lors de la n^{e} année du contrat "A", B_n celui de la n^{e} année du contrat "B". On prendra $A_0 = 50.000$ et $B_0 = 45.000$.

1. Exprimer A_n et B_n en fonction de n.
2. Arthur pense quitter l'entreprise au bout de 4 ans. Quel est le contrat le plus avantageux ? Même question au bout de 7 ans.

Exercice 2.4

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 une telle suite est-elle constante ?
2. On note ℓ la valeur trouvée à la question précédente. Montrer que la suite $(v_n) = (u_n - \ell)$ est géométrique et préciser sa raison.
3. On prend $u_0 = 5$. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 2.5

Une rumeur sur le programme de révisions de maths se propage dans la classe de S1, mais pas de manière parfaite compte tenu des capacités d'attention fluctuantes des élèves de cette classe : à chaque fois qu'un élève transmet l'information à son voisin, il a une probabilité $p \in]0;1[$ de transmettre ce qu'il a entendu, et $1-p$ de transmettre exactement l'opposé.

On note π_n la probabilité qu'un élève ait la bonne information après qu'elle a été colportée n fois (bien sûr, l'information originelle venant d'un respectable professeur, on a $\pi_0 = 1$).

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la relation entre π_{n+1} et π_n.
2. En déduire une formule explicite pour π_n.
3. Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ? En déduire une remarque utile quant à la pertinence du bavardage en cours.

3 Études de convergence

3.1 Résumé

Les études de convergence sont ce qui commence à vraiment distinguer les suites de simples listes : peut-on analyser le comportement de la suite quand l'indice tend vers $+\infty$? Peut-on assigner une valeur limite, finie ou infinie, à la suite ? Ce problème se pose uniquement [1] au voisinage de $+\infty$: en effet, une suite étant discrète (une liste de termes déconnectés), on n'a jamais de problème pour un terme donné qui est défini et possède une valeur finie. Cette constatation est capitale : les suites ne posent de problème d'analyse qu'en $+\infty$; et les résultats asymptotiques sur les suites restent vrais si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

Les résultats sur les limites finies ou infinies font intervenir des premières notions de topologie ; les écritures en syntaxe mathématique doivent être vues comme une façon de formaliser une manière intuitive de s'approcher d'une valeur donnée.

Les études de limites permettent de répondre à des questions importantes : un algorithme va-t-il donner une réponse en un temps fini/raisonnable ? Y a-t-il une valeur optimale pour un problème donné ? Un système donné va-t-il atteindre un état de stabilité après un certain nombre d'itérations ? Le lien avec la monotonie et les résultats qui en découlent permet notamment de bien quantifier le comportement de grandeurs importantes liées à un problème donné. Les suites adjacentes permettent quant à elles d'obtenir une suite d'encadrements de valeurs limites difficiles à calculer, que l'on peut raffiner à souhait.

3.2 Exercices

Exercice 3.6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.

1. Montrer que (u_n) converge, et donner sa limite.

1. au contraire des fonctions. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas définie en 0, mais en aucun cas divergente, au contraire de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2. Montrer que $(n.u_n)$ converge, et donner sa limite.

Exercice 3.7

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Montrer que (S_n) est convergente.

Exercice 3.8

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Exercice 3.9

Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$.

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Comment peut-on faire pour obtenir une valeur approchée de la limite commune de ces deux suites à ε près ? Calculer la valeur limite à $0,01$ près.

Exercice 3.10

Comparaison logarithmique

On considère une suite strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel positif k vérifiant la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_0.k^n$.
2. Que peut-on déduire sur la convergence de (u_n) dans le cas où $k < 1$?
3. De manière identique, conclure sur la divergence d'une suite strictement positive vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k \text{ avec } k > 1.$$
4. Peut-on élargir les résultats précédents au cas $k = 1$? Expliquer comment ou donner un contre-exemple.
5. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

   Que peut-on dire sur la nature (convergence ou divergence) de (u_n) ?

4 Suites extraites

4.1 Résumé

On n'a pas forcément besoin de tous les termes d'une suite pour bien comprendre son comportement. Quand on analyse par exemple la complexité d'un algorithme, on va chercher les cas les plus favorables et les cas les plus défavorables : le reste est quelque part au milieu, et ne sera utile que si l'on veut avoir la complexité en moyenne.

Il arrive également que le comportement des suites étudiées ne soit pas caractérisé de manière optimale par l'évolution terme à terme : on peut par exemple [2] avoir des suites qui vont osciller autour de certains points, d'autres qui vont visiter plusieurs points alternativement... Les limites possibles pour une suite extraite sont ce que l'on appelle les valeurs d'adhérence d'une suite, elles représentent les points autour desquels la suite va envoyer un nombre infini de termes.

Dans le cas des suites monotones, une sous-suite va aussi permettre de caractériser le comportement asymptotique aussi bien que la suite elle-même, ce qui permet de se réduire aux termes facilement calculables.

2. voir les exercices sur les suites récurrentes à la fin de ce document.

4.2 Exercices

Exercice 4.11

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} u_{2n} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ u_{2n+1} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases}$$

Exercice 4.12

Soit (u_n) une suite dont les trois sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.
Montrer que (u_n) converge. (indication : il faut utiliser le résultat de l'exercice 4-11).

Exercice 4.13

On note $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Exprimer la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ de l'exercice 3-7 en fonction de termes de la suite (h_n).
2. En utilisant le résultat obtenu à l'exercice 3-7, montrer que (h_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4.14

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

5 Comparaisons asymptotiques

5.1 Résumé

Les comparaisons asymptotiques servent entre autres à exprimer la complexité des algorithmes : quand on augmente la taille des données (par exemple le nombre de variables dans une équation, la taille d'une matrice, la longueur d'une liste), comment l'algorithme étudié qui utilise ces variables réagit-il ? Il est souvent assez malaisé de donner une valeur exacte pour le nombre d'opérations étant donné qu'il va pouvoir fluctuer assez sensiblement pour des données proches, on va donc plutôt essayer de l'encadrer (pire cas/meilleur des cas). Ainsi, devant le choix de plusieurs algorithmes répondant au même problème, on peut être amené à choisir l'un plutôt que l'autre car on sait qu'il va réaliser moins d'opérations et donc donner la réponse plus rapidement, ou qu'il va utiliser moins d'espace mémoire. Il faut donc savoir classer les différentes complexités (qui s'apparentent à des suites dont l'indice serait la “taille” du problème) pour déterminer lesquelles sont les meilleures, quels algorithmes proposent une réponse en un temps acceptable, savoir faire des compromis entre la précision et le temps de calcul.

5.2 Exercices

Exercice 5.15

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

On dit que (u_n) est ***négligeable*** devant (v_n) et on écrit [3] $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \ll v_n$ s'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = \varepsilon_n v_n$.

3. En toute rigueur, on devrait écrire $(u_n) \in o(v_n)$ où $o(v_n)$ est l'ensemble des suites négligeables devant (v_n).

En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang[4],

$$u_n = o(v_n) \Longleftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On dit que (u_n) est ***dominée*** par (v_n) et on écrit[5] $u_n = O(v_n)$ s'il existe une suite (b_n) bornée telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = b_n v_n$.

En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang,

$$u_n = O(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

On dit que (u_n) est ***équivalente*** à (v_n) et on écrit $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (k_n) de limite 1 telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = k_n v_n$.

En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang,

$$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

1. Que signifient $u_n = o(1)$ et $u_n = O(1)$?
2. Parmi ces trois relations, lesquelles sont des relations d'ordre ou des relations d'équivalence ?
3. Compléter les points de suspension par $= o$, $= O$ ou $\sim$ sachant qu'il peut y avoir plusieurs possibilités :
   - $\dfrac{n(n+1)}{2} \ \dots \ n^2$
   - $n \ \dots \ n^2$
   - $n\sin(n) \ \dots \ n$
   - $n+1 \ \dots \ n$
   - $\ln(n+1) \ \dots \ \ln(n)$
   - $e^{n+1} \ \dots \ e^n$
4. Donner les relations d'inclusion entre les ensembles suivants : $O\big(n\ln(n)\big)$; $O(2^n)$; $O\big(\ln(n)\big)$; $O(1)$; $O(n^2)$; $O(n^3)$ et $O(n)$.
5. En utilisant la notation[6] $\ll$, classer les termes généraux suivants : n ; n^2 ; $\ln(n)$; e^n ; $n\ln(n)$ et $\dfrac{n^2}{\ln(n)}$.
6. En utilisant la notation $\ll$, classer les termes généraux suivants : $\dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{n^2}$; $\dfrac{1}{\ln(n)}$; $\dfrac{\ln(n)}{n}$; $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n\ln(n)}$.
7. Montrer que $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.

   A-t-on $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$? Justifier votre réponse.
8. Déterminer un équivalent simple des termes suivants : $\ln(n)+2n-3$; $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$ et $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$.

4. En tout rigueur, on devrait écrire $(u_n) = o\big((v_n)\big)$ ou $(u_n) \ll (v_n)$.
5. En toute rigueur, on devrait écrire $(u_n) \in O(v_n)$ où $O(v_n)$ est l'ensemble des suites dominées par (v_n).
6. Par exemple $\ln(n) \ll n \ll e^n$.

Exercice 5.16

Croissance comparée

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^\alpha}$. Calculer la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; à l'aide de l'exercice 3-10, en déduire un résultat de comparaison entre e^n et n^α.
2. En utilisant la même technique pour $v_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n!}$, déduire un résultat de comparaison entre e^n et $n!$.

6 Suites récurrentes

6.1 Résumé

La description par récurrence est celle qui correspond le plus à l'approche d'un problème par son évolution : on décrit une suite comme une manière de passer d'un terme au suivant, selon une relation de propagation. D'une description locale on cherche alors à obtenir quelque chose de plus global : le système décrit va-t-il converger ? diverger ? Comment va-t-il se comporter au voisinage de ses valeurs d'adhérence ?

Cette approche répond tout d'abord à un côté pratique : en effet, on sait souvent comment un système donné va se comporter localement, comment il va évoluer d'une étape à l'autre, quelles sont les équations de propagation qui le gouvernent ; l'enjeu est de réussir à extirper une idée plus globale de son comportement.

Mais on peut également attaquer le problème dans l'autre sens : étant donné un système convergeant vers une solution que l'on cherche à calculer, ne peut-on pas le remplacer par un système allant vers la même solution mais de manière plus efficace (convergence plus rapide) ? Ne peut-on pas jouer sur les paramètres pour accélérer les calculs ?

Il importe donc de bien savoir comment utiliser cette modélisation pour d'une part réussir à caractériser les situations qu'elle représente, et d'autre part tirer profit des quantités associées (vitesses de convergence), à la base de nombreux problèmes d'optimisation.

6.2 Exercices

Exercice 6.17

On rappelle qu'une suite arithmético-géométrique est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = a.u_n + b$.

1. Quelles suites obtient-on pour $a = 0$? pour $a = 1$? pour $b = 0$?
2. Représenter graphiquement l'évolution d'une telle suite pour les cas
$$a > 1;\ 0 < a < 1;\ -1 < a < 0;\ a < -1;\ a = -1 \text{ et } a = 1$$
Pour cela, on tracera les droites d'équation $y = ax + b$ et $y = x$ puis on reportera les valeurs de la suite sur l'axe des abscisses.
Quel est le point d'intersection de ces deux droites ? (dans le cas où $a \neq 1$)
3. Qu'observe-t-on quand on place l'origine du repère au point d'intersection des deux droites ?
En déduire une méthode pour trouver une formule explicite pour une suite arithmético-géométrique.

Exercice 6.18

Méthode de Héron pour approcher une racine carrée

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, et telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Vérifier qu'une telle suite est bien définie.

2. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle constante ? (ces valeurs sont les points fixes de f.)
3. Établir le tableau de variation de f et en déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer qu'à partir du rang 1, la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire qu'elle est convergente, et déduire sa limite.

Exercice 6.19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2+3}{4}$.

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > 0$.
2. Trouver les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est constante.
3. Établir le tableau de variation de f.
4. Montrer que les intervalles $[0;1[$, $]1;3[$ et $]3;+\infty[$ sont stables : si u_n appartient à l'un de ces intervalles alors u_{n+1} aussi. Ainsi, si u_0 appartient à un de ces intervalles, la suite ne prendra que des valeurs de cet intervalle.
5. En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, déterminer la monotonie des suites considérées.
6. En conclure quant à leur convergence et donner leurs limites.

Exercice 6.20

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x \in [0,+\infty[\,,\ f(x) = \sqrt{1+x}$.

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \geqslant 0$.
On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

1. Quels sont les points fixes (les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est constante) ?
2. Établir le tableau de variation de f.
3. Montrer que si $u_n < \varphi$ alors $u_{n+1} < \varphi$; et, de même, que si si $u_n > \varphi$ alors $u_{n+1} > \varphi$.
4. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ (on différenciera les deux cas précédents) ; conclure quant à la monotonie de la suite (u_n).
5. En conclure que la suite (u_n) converge et donner sa limite.