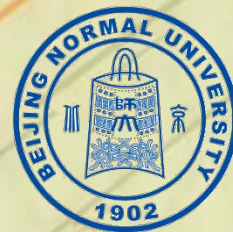


双缝干涉与Logistic模型

北京师范大学物理系 彭芳麟



双缝干涉实验

波长为 λ 振幅为 A_0 的单色光通过间距为 d 的两个狭缝，在屏幕上形成干涉条纹。

两束光在屏幕上的光程差为

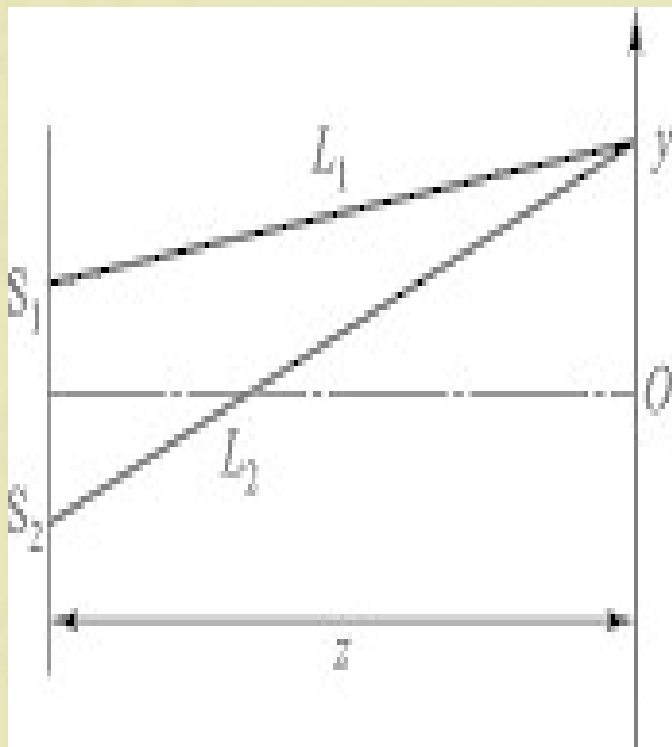
$$\begin{aligned}\Delta L &= L_1 - L_2 \\ &= \sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2} - \sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}\end{aligned}$$

形成的相位差为

$$\theta = \Delta L \frac{2\pi}{\lambda}$$

在屏幕上干涉光强度为

$$4A_0^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$



```
ym=1.25;  
y=linspace(-ym,ym,101);  
z=1000;  
lambda=5e-4;  
for d=0.2:0.2:3;  
    L1=sqrt((y-d/2).^2+z^2);  
    L2=sqrt((y+d/2).^2+z^2);  
    phi=2*pi*(L2-L1)/lambda;  
    I=4*(cos(phi/2)).^2;  
    subplot(2,1,1)  
    plot(y,I)  
    axis([-1.25 1.25 0 4])  
    subplot(2,1,2)  
    B=I*255/5;  
    image(B);  
    colormap(gray(255));  
    pause(1)  
end
```

%屏上观测点离中心的最大距离
%屏上取n个观测点
%屏到缝的距离
%设置光的波长
%两个光源距离
%屏上一点到两个光源的距离

%计算相位差
%利用相位差计算光强

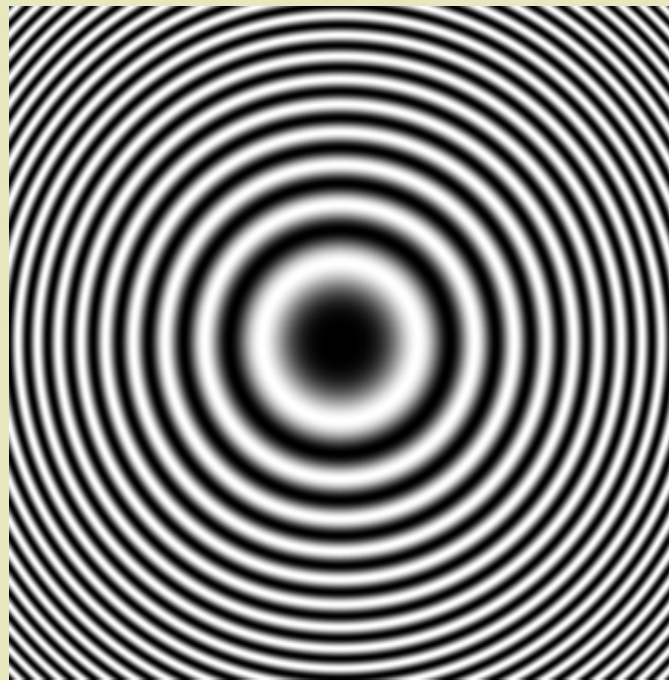
%用曲线表示干涉条纹

%定标取255个级别,使I/5对应最亮
%以图案表示干涉条纹
%用灰度级别显示图案



牛顿环干涉图样

$$I = \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x^2 + y^2}{R} + \frac{\lambda}{2} \right) \right)$$



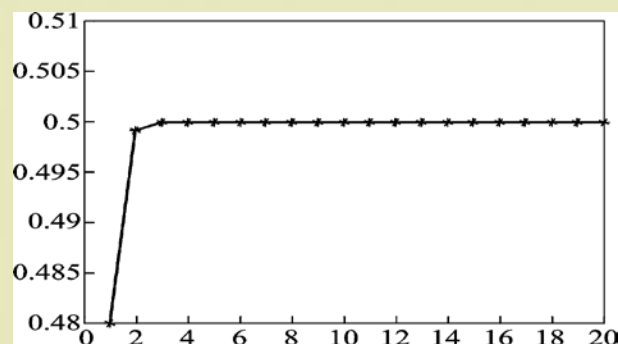
- ◆ lamda=0.0006328;
- ◆ %曲率半径R, 光波波长lamda
- ◆ [X Y]=meshgrid(-2:0.01:2);
- ◆ for R=3200:-500:200
- ◆ I=(cos(pi*(X.^2+Y.^2)/(R*lamda)+pi/2)).^2; %干涉光强
- ◆ imshow(I); %将光强显示为灰度值
- ◆ pause(0.8)
- ◆ end

Logistic模型

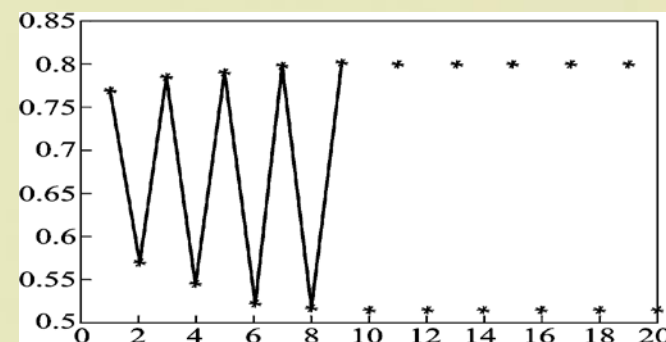
$$x_{n+1} = \mu (x_n - x_n^2) \quad (0 < \mu < 4, 0 < x < 1)$$

数值迭代的不同结果

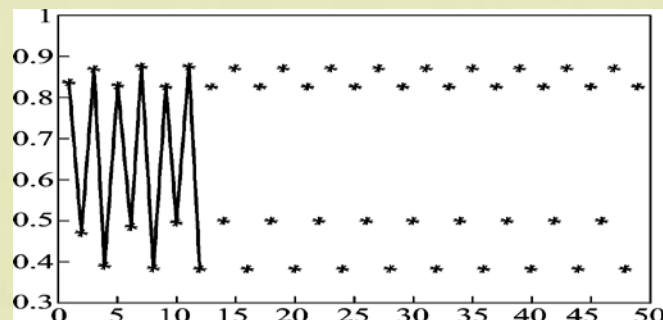
$\mu=2$



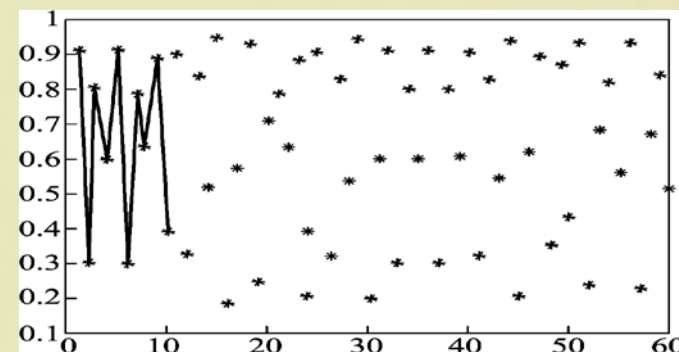
$\mu=3.2$



$\mu=3.45$

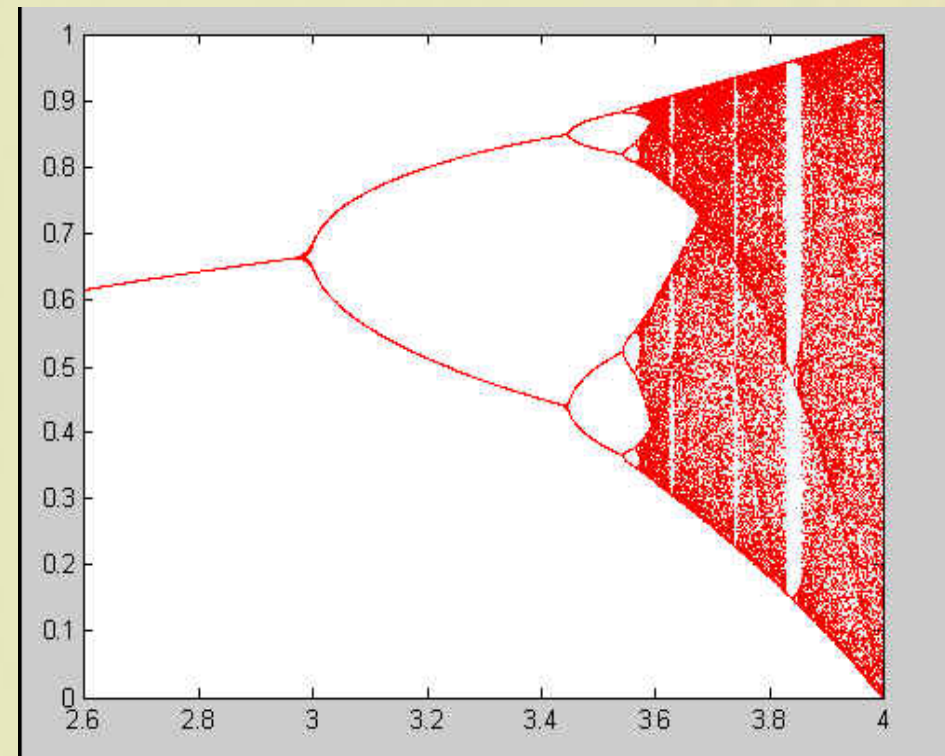


$\mu=3.6$



费根鲍姆图

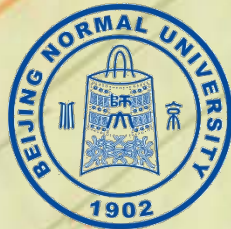
```
u=2.6:0.001:4;  
X=zeros(250,1401);  
X(1,:)=0.6;  
for j=2:250  
    X(j,:)=u.*(X(j-1,:)-X(j-1,:).^2);  
end  
plot(u,X(120:250,:),'r.','markersize',1)
```



费根鲍姆常数

$$F_{\delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.669201661 \dots$$

分岔情况		分岔值 μ	间距比值
1	2	3	
2	4	3.449487743	4.751466
4	8	3.544090359	4.656251
8	16	3.564407266	4.668242
16	32	3.568759420	4.66874
32	64	3.569691610	4.6691
64	128	3.569891259	4.669
128	256	3.569934019	4.669
⋮		⋮	⋮
周期解		3.569945672	4.669201661



李雅普诺夫指数

迭代映射 $x_{n+1} = f(x_n)$

起点: x_0, y_0

初始距离 $\propto |x_0 - y_0|$

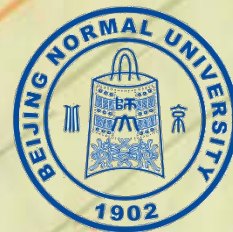
第一次迭代后距离: $|x_1 - y_1| \approx \left| \frac{df}{dx} \right| |x_0 - y_0|$

N 次迭代后距离: $|x_N - y_N| \approx \prod_{n=0}^{N-1} \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_n} |x_0 - y_0|$

每次迭代平均分离值: $\left(\prod_{n=0}^{N-1} \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_n} \right)^{\frac{1}{N}}$

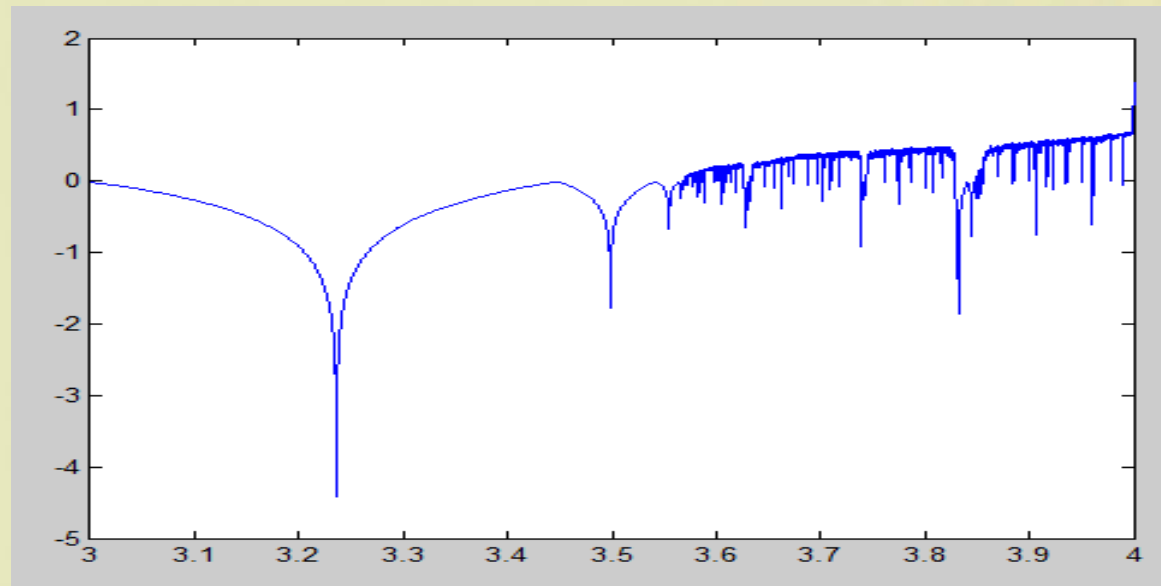
李雅普诺夫指数

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_n}$$



程序和图形

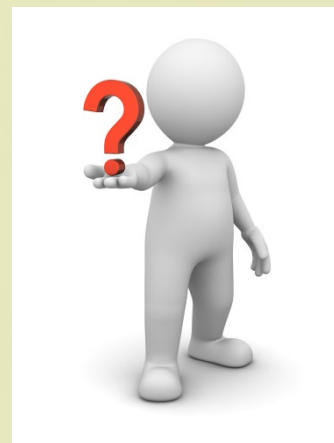
```
x=0.5; u=3:0.0001:4;  
y=0; N=300;  
for j=1:N  
    x=u.*(x-x.^2);  
    df=log(abs(u-2*u.*x));  
    y=y+df;  
end  
plot(u,y/N)
```



当 $\lambda < 0$, 有稳定周期
当 $\lambda = 0$, 有倍周期分岔点
当 $\lambda > 0$, 转入混沌

思考题

李雅普诺夫指数
有什么作用？



谢谢!

