**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по практической работе №10**

**по дисциплине «Вычислительная математика»**

Тема: **Интерполяция по узлам Чебышёва**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 3342 |  | Мохамед М.Х. |
| Преподаватель |  | Пуеров Г.Ю. |

Санкт-Петербург

2025

**Цель работы.**

Получение практических навыков построения интерполяционного многочлена через узлы Чебышёва.

**Основные теоретические положения.**

Пусть величина является функцией аргумента . Это означает, что любому значению из области определения поставлено в соответствие значение . Однако на практике часто неизвестна связь между и , т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости . В других случаях при известной зависимости ее использование в практических задачах затруднительно (например, она содержит сложные, трудно вычисляемые выражения). Наиболее распространенным и важным для практического использования случаем, когда вид связи между параметрами и неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы , в которой дискретному множеству значений аргумента поставлено в соответствие множество значений функции . Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике могут понадобиться значения величины и в других точках, отличных от узлов . Таким образом, приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра , поскольку точная связь неизвестна. Этой цели служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию требуется аппроксимировать (приближенно заменить) некоторой функцией так, чтобы отклонение (в некотором смысле) от в заданной области было наименьшим. Функция при этом называется аппроксимирующей. Для практики важен случай аппроксимации функции многочленом

Этот случай, т.е. приближение многочленами, является одной из задач классического численного анализа.

Рассмотрим аппроксимацию этого рода и методы ее реализации в вычислительных процедурах на ЭВМ. Коэффициенты в процедурах подбираются так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции. Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек , то аппроксимация называется точечной. Одним из основных типов точечной аппроксимации является интерполирование, которое заключается в следующем: для данной функции строится многочлен , принимающий в заданных точках те же значения , что и функция , т.е. , . При данной постановке задачи предполагается, что среди значений нет одинаковых: при Точки называются узлами интерполяции, а многочлен – интерполяционным многочленом. Близость интерполяционного многочлена к заданной функции состоит, таким образом, в том, что их значения совпадают на заданной системе точек (узлов). Максимальная степень интерполяционного многочлена . В этом случае говорят о глобальной интерполяции, так как один многочлен используется для интерполяции функции на всем рассматриваемом интервале изменения аргумента . Коэффициенты многочлена находят из системы уравнений . Можно показать, что при эта система имеет единственное решение.

Возможны два случая задания функции y=f(x):

* точки располагаются на оси абсцисс неравномерно на различных расстояниях одна от другой – случай неравноотстоящих узлов;
* точки располагаются на оси абсцисс равномерно с фиксированным шагом – случай равноотстоящих узлов.

В каждом из указанных случаев для интерполирования функций применяются различные интерполяционные формулы.

Интерполяционные формулы для неравноотстоящих узлов.

Пусть известны значения некоторой функции в различных точках , которые обозначим следующим образом: . Указанные значения могут быть получены путем экспериментальных измерений или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. В задаче интерполяции функции , как было сказано ранее, решается проблема приближенного восстановления значения функции в произвольной точке . Для этого строится алгебраический многочлен степени , который в точках принимает заданные значения, т.е.

Следует заметить, что если точка расположена вне минимального отрезка, содержащего все узлы интерполяции , то замену функции на также называют экстраполяцией. В общем случае доказано, что существует единственный интерполяционный многочлен -й степени, удовлетворяющий условиям выше:

где

Данный интерполяционный многочлен, называется интерполяционным многочленом Лагранжа, а функции – лагранжевыми коэффициентами или базисными полиномами. Для оценки погрешности интерполяции (в частности, и экстраполяции) в текущей точке ( – отрезок, содержащий все узлы интерполяции и точку ) можно использовать соотношение

где – наибольшее абсолютное значение -ой производной интерполируемой функции в некоторой точке .

Оценить максимальную погрешность интерполяции на всем отрезке можно с помощью соотношения

Использование оценок погрешностей предполагает ограниченность -ой производной интерполируемой функции на отрезке , т.е. . На практике вместо общей формы записи часто используются другие формы записи интерполяционного многочлена, более удобные для применения в конкретных ситуациях.

Интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции имеет вид:

где – разделённая разность -го порядка.

Вычисление разделённых разностей производится по соотношениям:

При использовании интерполяционного многочлена Ньютона изменение степени требует только добавить или отбросить соответствующее число стандартных слагаемых, что удобно на практике. В то же время, непосредственное использование интерполяционного многочлена Лагранжа требует строить его заново при изменении . В том случае, если требуется найти лишь численное значение интерполяционного многочлена , а не его представление, может быть использована итерационно-интерполяционная схема Эйткена.

Пусть – интерполяционный многочлен, определяемый парами , так, что . Интерполяционные многочлены возрастающих степеней получают последовательно следующим образом:

Этот процесс можно закончить, когда у значений двух интерполяционных многочленов последовательных степеней совпадает требуемое количество знаков.

**Постановка задачи**  
Требуется разработать программу на любом языке программирования, сравнивающую точность интерполяции функции двумя методами:

1. По **равноотстоящим узлам**
2. По **оптимальным узлам Чебышёва**

Используя интерполяционный многочлен Ньютона, необходимо:

* Вычислить значения функции в промежуточных точках для обоих наборов узлов.
* Визуализировать результаты, оценив погрешность интерполяции.

**Выполнение работы.**

Проанализируем функцию :

Найдем область определения f(x). Функция  определена на всей числовой прямой, а  определен при , то есть при . Таким образом, f(x) определена на [0, 1]. Значит, интерполировать её имеет смысл строго внутри этого промежутка.

Программа выполняет комплексное сравнение двух стратегий аппроксимации нелинейной функции f(x) = на пользовательском интервале [a,b], реализуя следующий workflow:

1. **Инициализация данных:**
   * Формирует узловые точки двух типов:
     + Равномерное распределение (через np.linspace)
     + Специальные точки Чебышёва (специальная функция-генератор)
   * Рассчитывает эталонные значения целевой функции в полученных узлах
2. **Процедура аппроксимации:**
   * Для каждого типа узловых наборов:
     + Вычисляет коэффициенты методом конечных разностей
     + Конструирует интерполяционный полином Ньютона
     + Выполняет верификацию на плотном множестве контрольных точек
   * Проводит сравнительный анализ точности обоих подходов
3. **Графическая интерпретация:**
   * Генерирует интерактивную визуализацию, содержащую:
     + Эталонный график исходной функции
     + Кривые обоих аппроксимирующих полиномов
     + Маркировку используемых узловых точек
   * Реализует динамическое масштабирование через обработчик событий
4. **Интерактивный интерфейс:**
   * Осуществляет диалог с пользователем:
     + Валидация границ интервала (проверка |a|,|b|<1)
     + Запрос количества опорных точек
   * Автоматически визуализирует сравнительные результаты

Ключевые особенности реализации:

* Использование матричных операций для вычисления разделенных разностей
* Оптимизированный алгоритм построения полинома Ньютона
* Адаптивная система визуализации с поддержкой интерактивности
* Комплексная обработка граничных условий

Программа демонстрирует эффективное сочетание математических методов численного анализа с современными подходами к интерактивной визуализации результатов. Пример результата работы программы представлен на рис. 1

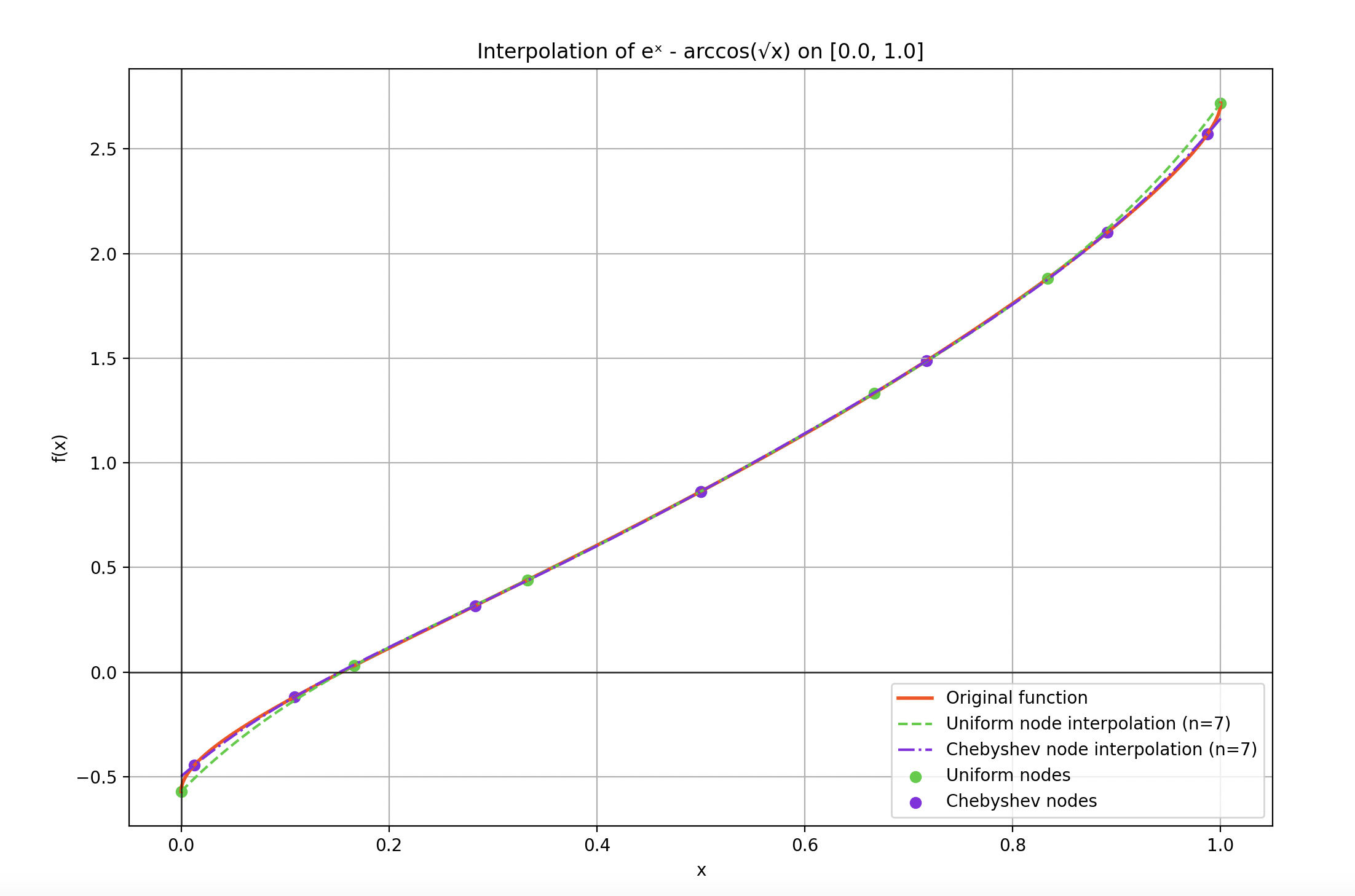


Рисунок 1 – Результат работы программы для n = 7

При приближении графика (рис. 2) видно, что:

* **Многочлен по равноотстоящим узлам** сильно отклоняется от истинной функции у концов интервала (эффект Рунге).
* **Многочлен по узлам Чебышёва** сохраняет высокую точность даже на краях, благодаря оптимальному распределению узлов (их сгущению к границам).

Это подтверждает, что интерполяция с узлами Чебышёва даёт более равномерное приближение на всём интервале.

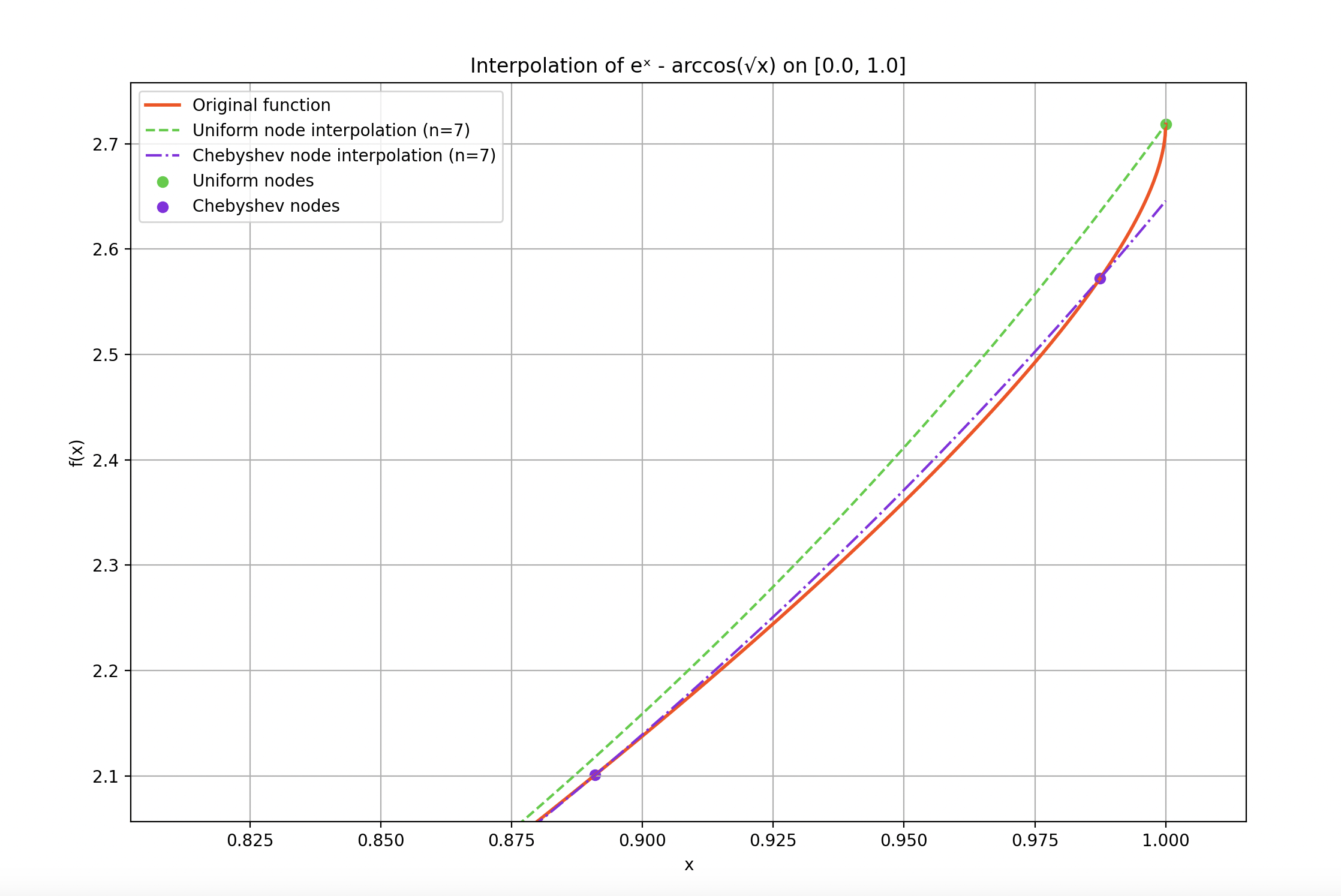
****

Рисунок 2 – Приближение рис.1 на конце заданного интервала

**Выводы.**

В ходе исследования была проведена сравнительная оценка эффективности интерполяции многочленами Ньютона при различных способах выбора узлов. На основании проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

1. Особенности точности интерполяции:

* Чебышёвское распределение узлов обеспечивает существенно более высокую точность аппроксимации, особенно на краях интервала
* Равномерное распределение узлов приводит к выраженным колебаниям (проявление феномена Рунге) в пограничных областях

1. Преимущества метода:

* Применение разделенных разностей позволяет гибко добавлять новые узлы без полного пересчета коэффициентов
* Метод демонстрирует высокую эффективность даже при небольшом количестве узлов при условии их оптимального расположения

1. Визуализация результатов:

* Графики наглядно подтверждают равномерную точность чебышёвской интерполяции на всем интервале
* Классический подход с равномерными узлами требует значительного увеличения их количества для достижения сопоставимой точности

Основные практические выводы:

* Чебышёвское распределение узлов минимизирует погрешность на границах интервала
* Метод демонстрирует высокую адаптивность и вычислительную эффективность
* Оптимальный выбор узлов позволяет достичь лучших результатов при меньших вычислительных затратах

Результаты исследования убедительно доказывают, что стратегия выбора узлов оказывает решающее влияние на качество интерполяции, при этом чебышёвский подход обеспечивает наиболее сбалансированное распределение погрешности.