**mМИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по практической работе №5**

**по дисциплине «Вычислительная математика»**

Тема: **Метод Ньютона**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 3342 |  | Мохамед М.Х. |
| Преподаватель |  | Пуеров Г.Ю. |

Санкт-Петербург

2025

**Цель работы.**

Формирование практических навыков нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом Ньютона.

**Основные теоретические положения.**

В случае, когда известно хорошее начальное приближение решения уравнения , эффективным методом повышения точности является метод Ньютона (касательных). Он состоит в построении итерационной последовательности , сходящейся к корню уравнения . Достаточные условия сходимости метода формулируются теоремой.

Теорема.

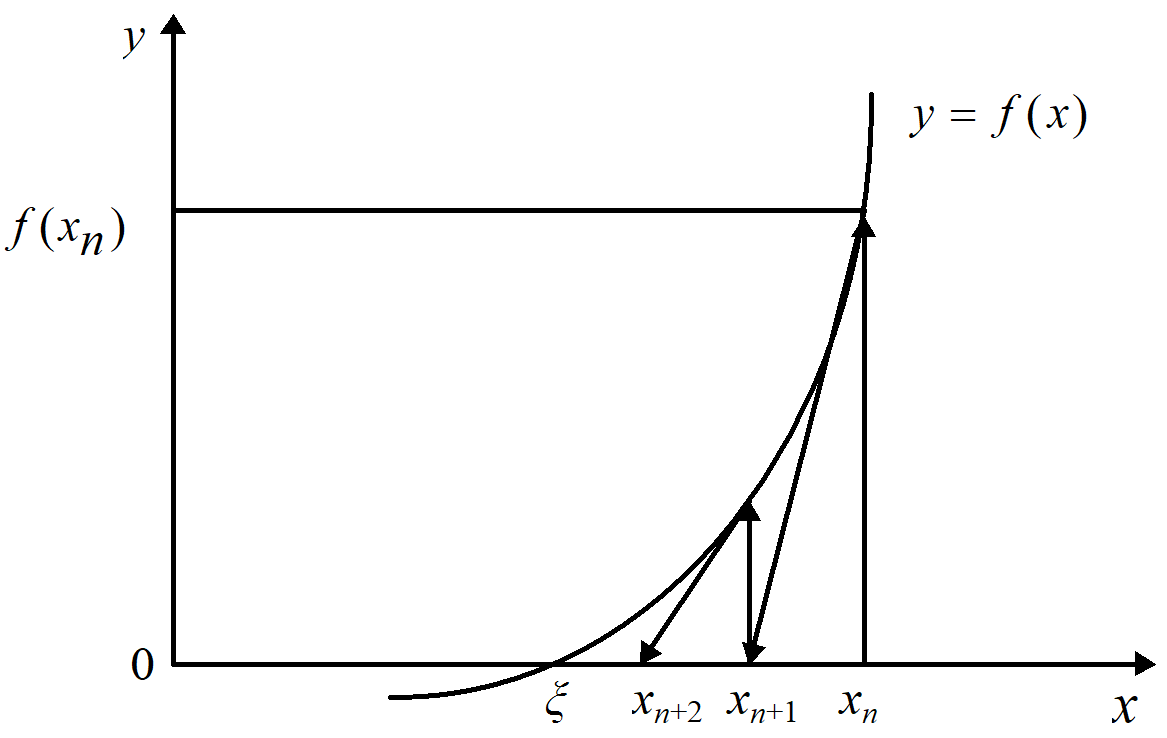
Пусть определена и дважды дифференцируема на причём , а производные сохраняют знак на отрезке . Тогда, исходя из начального приближения , удовлетворяющего неравенству , можно построить последовательность

сходящуюся к единственному на решению уравнения .

Метод Ньютона допускает простую геометрическую интерпретацию, представленную на рис. 1. Если через точку с координатами провести касательную, то абсцисса точки пересечения этой касательной с осью OX будет очередным приближением корня уравнения .

Для оценки погрешности -го приближения корня предлагается пользоваться неравенством:

где – наибольшее значение модуля второй производной на отрезке – наименьшее значение модуля первой производной на отрезке .

Рисунок 1 − Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Таким образом, если

то

Это означает, что при хорошем начальном приближении корня после каждой итерации число верных десятичных знаков в очередном приближении удваивается, т.е. процесс сходится очень быстро (имеет место квадратическая сходимость). Из указанного следует, что при необходимости нахождения корня с точностью ε итерационный процесс можно прекращать, когда

Рассмотрим один шаг итераций. Если на -м шаге очередное приближение не удовлетворяет условию окончания процесса, то вычисляются величины и следующие приближение корня . При выполнении условия остановки, описанного выше, величина принимается за приближенное значение корня , вычисленное с точностью .

**Постановка задачи.**

Используя подпрограммы-функции NEWTON и Round из файла methods.cpp (файл заголовков methods.h), найти корень уравнения с заданной точностью методом Ньютона, исследовать скорость сходимости и обусловленность метода. Порядок выполнения работы следующий:

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения . Убедиться, что на найденном отрезке функция удовлетворяет условиям сходимости метода Ньютона.
2. Выбрать начальное приближение корня так, чтобы .
3. Составить подпрограммы-функции вычисления , предусмотрев округление их значений с заданной точностью .
4. Составить головную программу, вычисляющую корень уравнения и содержащую обращение к подпрограммам F, F1, Round, NEWTON и индикацию результатов.
5. Провести вычисления по программе. Исследовать скорость сходимости метода и его чувствительность к ошибкам в исходных данных.

**Выполнение работы.**

Проанализируем функцию :

Используем теорему Коши (теорему о промежуточных значениях) для нахождения отрезков, на которых функция меняет знак.

**Условия теоремы Коши:**

1. Функция f(x) должна быть непрерывной на отрезке [a,b].
2. На концах отрезка значения функции должны иметь разные знаки: f(a)⋅f(b)<0.

Проверим непрерывность f(x):

* – экспонента, непрерывна на всей числовой прямой.
* – арккосинус, определенный при , то есть при

Таким образом, функция f(x) непрерывна на [0, 1].

Возьмем отрезок [0.1, 0.25]

На концах отрезка f(x) имеет разные знаки: f(0.1) \* f(0.25) < 0:

* При x = 0.1:
* При x = 0.25:
* Следовательно, f(0.1) \* f(0.25) < 0

Таким образом, на отрезке [0.1, 0.25] функция непрерывна, и на концах этого отрезка она принимает значения разных знаков меняет знак с отрицательного на положительный. Следовательно, по теореме Коши (теореме о промежуточных значениях), на отрезке [0.1, 0.25] существует хотя бы один корень уравнения f(x) = 0. На графике на рис.1 можно удостовериться, что корень действительно принадлежит отрезку [0.1, 0.25].

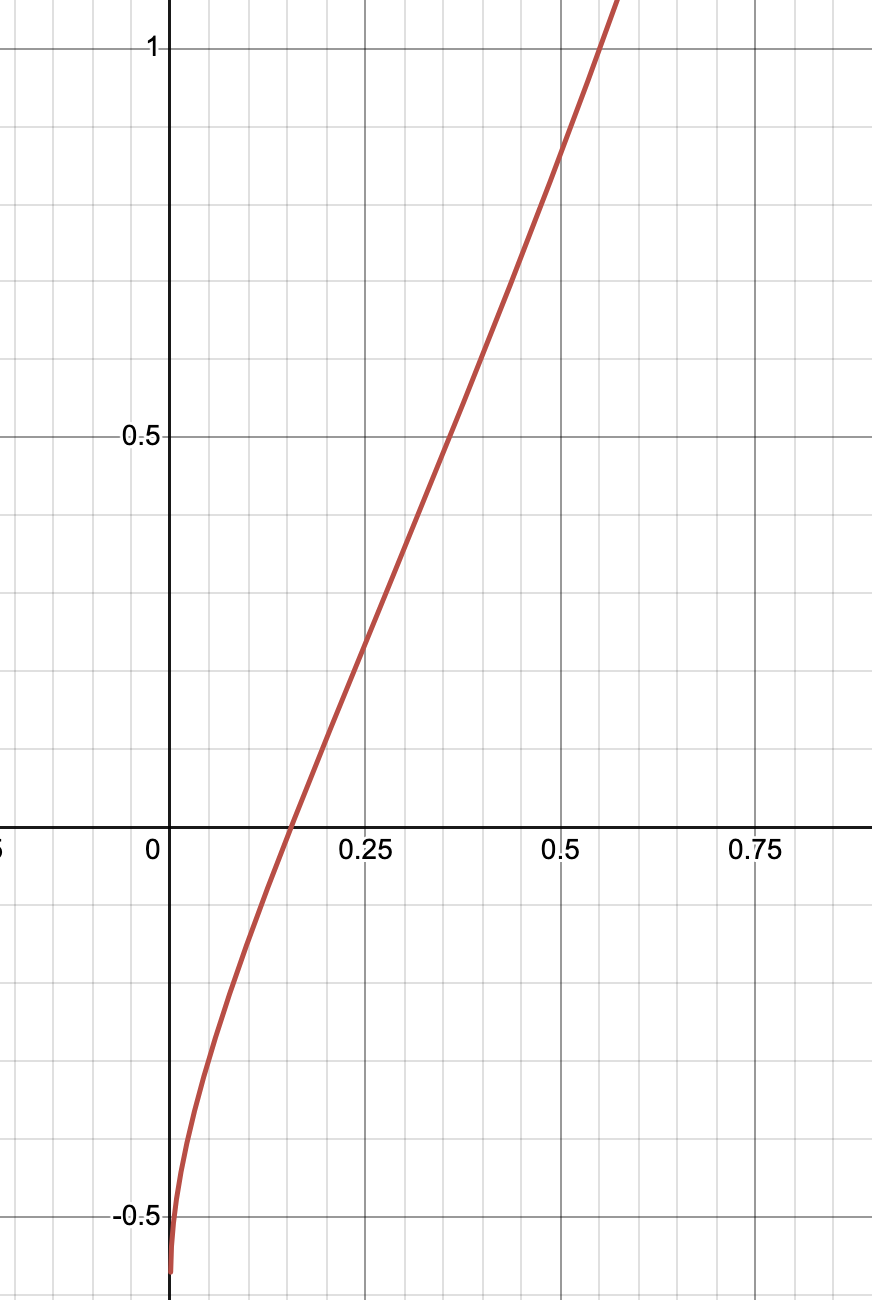


Рисунок 1 – Локализация корня функции

Чтобы убедиться, что корень единственный, исследуем монотонность функции f(x). Для этого вычислим её производную.

для всех x, так как экспонента всегда положительна

для всех , так как на этом интервале.

Таким образом, f '(x) > 0 на всем интервале (0, 1). Значит, функция f(x) строго возрастает на интервале (0, 1), а значит, функция строго возрастает и на отрезке [0.1, 0.25]. Следовательно, корень уравнения на этом отрезке единственный.

Проверим, что на выбранном отрезке функция удовлетворяет условиям сходимости метода Ньютона:

1. Функция дважды непрерывно дифференцируема на
2. На концах отрезка f(x) имеет разные знаки: f(0.1) \* f(0.25) < 0
3. Первая производная f '(x) не обращается в ноль на отрезке
4. Вторая производная f ''(x) сохраняет знак на отрезке ]
5. Функция дважды непрерывно дифференцируема на

* – экспонента, которая бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой.
* – арккосинус, определенный при , то есть при , и его производные также существуют на этом интервале.
* Следовательно, f(x) дважды непрерывно дифференцируема на [0.1, 0.25].

1. На концах отрезка f(x) имеет разные знаки: f(0.1) \* f(0.25) < 0:

* При x = 0.1:
* При x = 0.25:
* Следовательно, f(0) \* f(0.25) < 0

1. Первая производная f '(x) не обращается в ноль на отрезке :   
   f '(x) > 0 на всем интервале (0, 1), что было доказано выше, при локализации корня.
2. Вторая производная f ''(x) сохраняет знак на отрезке ]

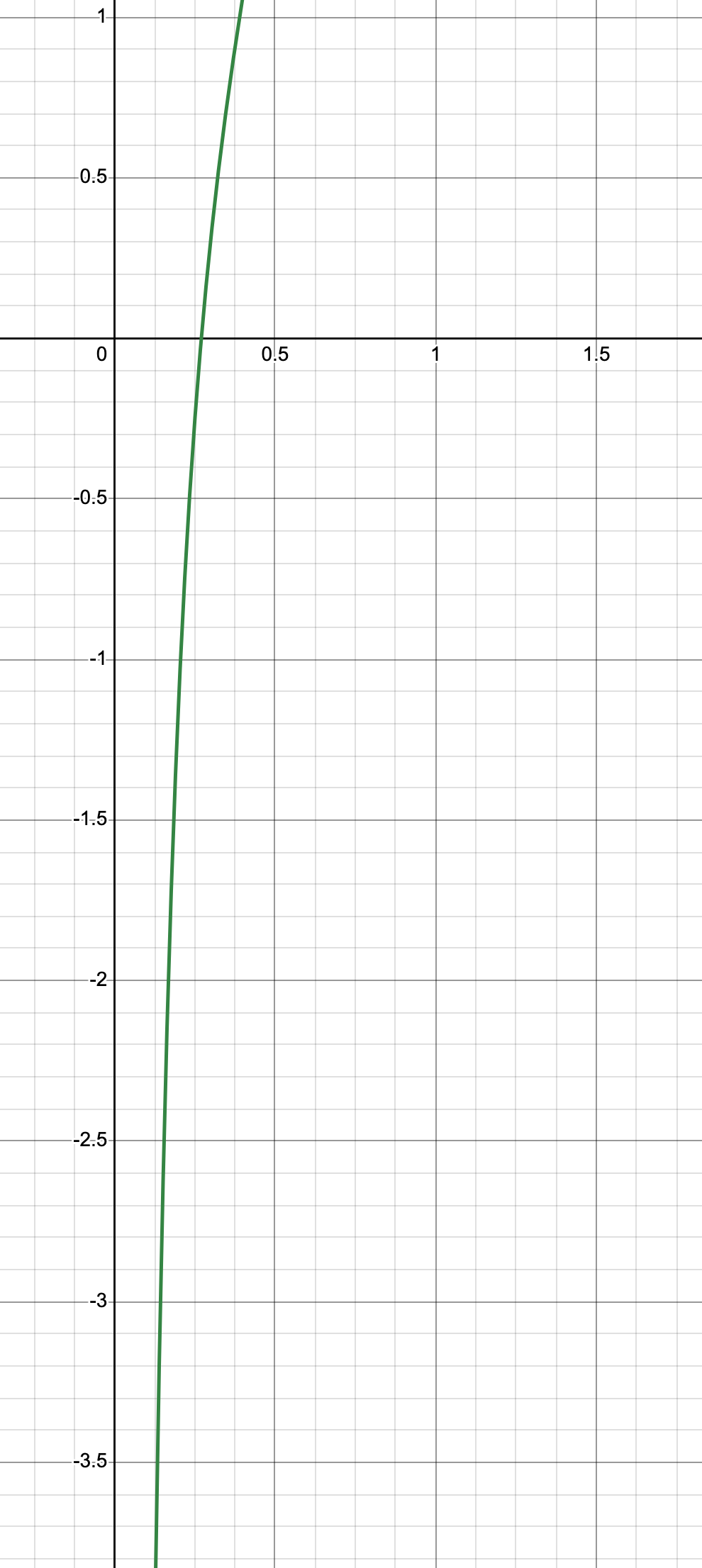
**

Рисунок 2 – график

* Следовательно, на [0.1,0.25], и знак второй производной сохраняется.

Возьмем начальное приближение .

0.143875

-6.30224

. Данное приближение соответствует условию теоремы.

Вычислим значения и M2:

– наименьшее значение модуля 1-ой производной. Так как на [0.1,0.25] (что было рассмотрено выше), следовательно, график монотонно убывает на [0.1,0.25]. Тогда минимальное значения модуля 1-ой производной достигается в точке 0.25:

M2 – наибольшее значение модуля 2-ой производной. На [0.1,0.25] вторая производная отрицательно и монотонно возрастает. Ее максимальное значение по модулю достигается в точке 0.1:

Проведем вычисление корня функции при помощи программы. Программа вычисляет корень уравнения методом Ньютона. На вход ей подаются следующие параметры: x – начальное приближение корня, eps – требуемая точность вычисления корня, delta – погрешность вычисления значений функции, a,b – отрезок , локализующий корень. В таблице 1 приведены расчеты корня при различных значениях eps. На рис.3 представлен график зависимости числа итераций от eps.

Таблица 1 – расчет корня методом Ньютона с варьированием значения eps

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значение eps | Значение delta | Значение a | Значение b | Значение | Значение |
| 0.1 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.151906 | 1 |
| 0.01 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.151906 | 1 |
| 0.001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.154403 | 2 |
| 0.0001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.154403 | 2 |
| 0.00001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.154403 | 2 |
| 0.000001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.154406 | 3 |

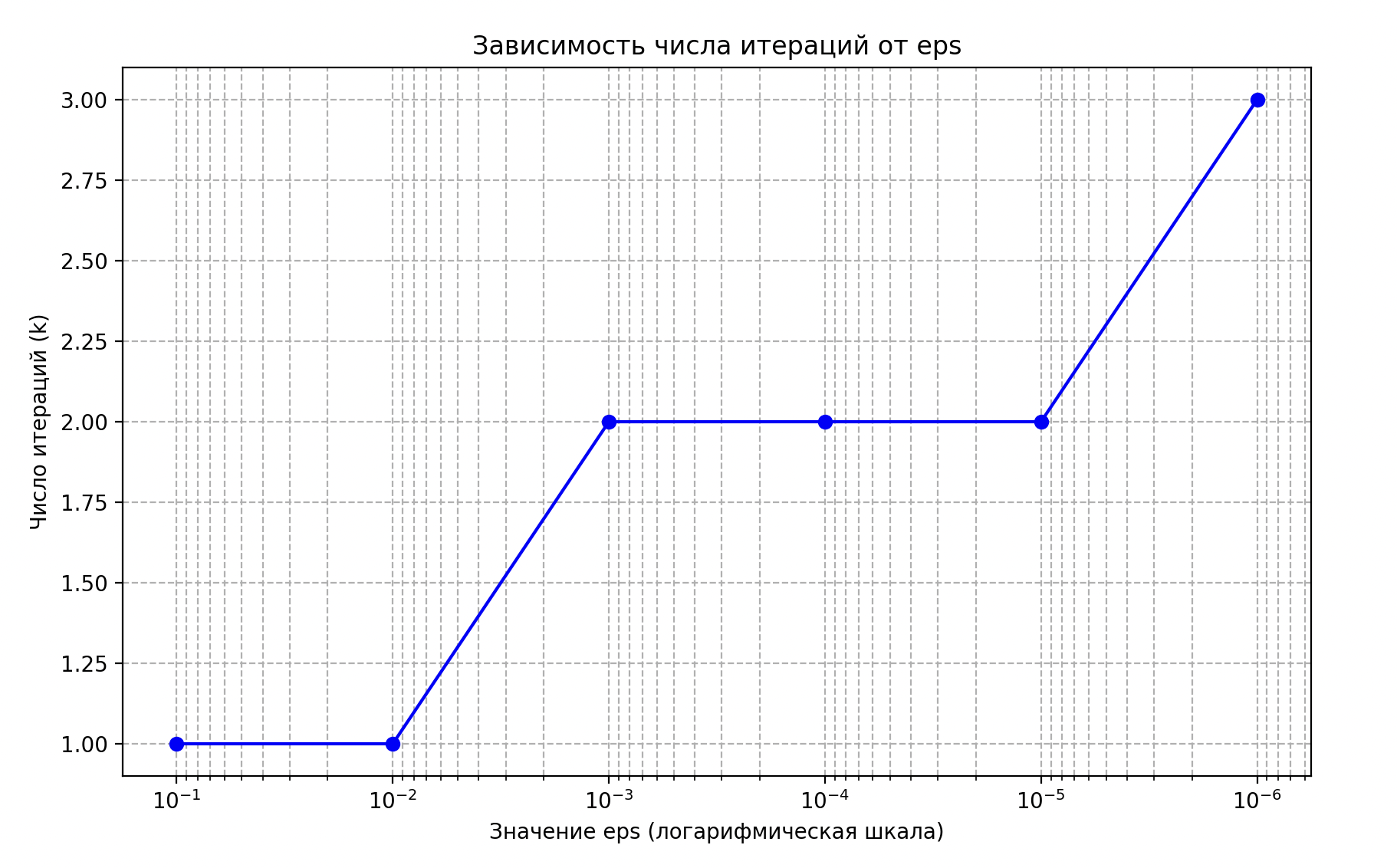


Рисунок 3 – зависимость числа итераций от eps

Теперь, имея приближение корня, примем . С помощью данного приближения вычислим , и оценим с его помощью чувствительность метода к ошибкам в исходных данных. При будем считать, что задача хорошо обусловлена – 1, иначе 0 – плохо.

Таблица 2 – Обусловленность задачи при различных и

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значение eps | Значение delta | Значение | Значение  *k* | Значение | Значение |
| 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0 | 0.054406 | 1 |
| 0.01 | 0.1 | 0.136077 | 1 | 0.018329 | 0 |
| 0.001 | 0.1 | 0.136077 | 1 | 0.018329 | 0 |
| 0.0001 | 0.1 | 0.136077 | 1 | 0.018329 | 0 |
| 0.00001 | 0.1 | 0.136077 | 1 | 0.018329 | 0 |
| 0.000001 | 0.1 | 0.136077 | 1 | 0.018329 | 0 |
| 0.1 | 0.01 | 0.150508 | 1 | 0.003898 | 1 |
| 0.01 | 0.01 | 0.150508 | 1 | 0.003898 | 1 |
| 0.001 | 0.01 | 0.154413 | 2 | 0.000007 | 1 |
| 0.0001 | 0.01 | 0.154413 | 2 | 0.000007 | 1 |
| 0.00001 | 0.01 | 0.154413 | 2 | 0.000007 | 1 |
| 0.000001 | 0.01 | 0.154413 | 2 | 0.000007 | 0 |
| 0.1 | 0.001 | 0.151951 | 1 | 0.002455 | 1 |
| 0.01 | 0.001 | 0.151951 | 1 | 0.002455 | 1 |
| 0.001 | 0.001 | 0.154298 | 2 | 0.000108 | 1 |
| 0.0001 | 0.001 | 0.154298 | 2 | 0.000108 | 0 |
| 0.00001 | 0.001 | 0.154298 | 2 | 0.000108 | 0 |
| 0.000001 | 0.001 | 0.154298 | 2 | 0.000108 | 0 |
| 0.1 | 0.0001 | 0.151915 | 1 | 0.002491 | 1 |
| 0.01 | 0.0001 | 0.151915 | 1 | 0.002491 | 1 |
| 0.001 | 0.0001 | 0.154418 | 2 | 0.000012 | 1 |
| 0.0001 | 0.0001 | 0.154418 | 2 | 0.000012 | 1 |
| 0.00001 | 0.0001 | 0.154418 | 2 | 0.000012 | 0 |
| 0.000001 | 0.0001 | 0.154418 | 2 | 0.000012 | 0 |
| 0.1 | 0.00001 | 0.151904 | 1 | 0.002502 | 1 |
| 0.01 | 0.00001 | 0.151904 | 1 | 0.002502 | 1 |
| 0.001 | 0.00001 | 0.154403 | 2 | 0.000003 | 1 |
| 0.0001 | 0.00001 | 0.154403 | 2 | 0.000003 | 1 |
| 0.00001 | 0.00001 | 0.154403 | 2 | 0.000003 | 1 |
| 0.000001 | 0.00001 | 0.154407 | 3 | 0.000001 | 0 |
| 0.1 | 0.000001 | 0.151906 | 1 | 0.0025 | 1 |
| 0.01 | 0.000001 | 0.151906 | 1 | 0.0025 | 1 |
| 0.001 | 0.000001 | 0.154403 | 2 | 0.000003 | 1 |
| 0.0001 | 0.000001 | 0.154403 | 2 | 0.000003 | 1 |
| 0.00001 | 0.000001 | 0.154403 | 2 | 0.000003 | 1 |
| 0.000001 | 0.000001 | 0.154406 | 3 | 0 | 1 |

**Выводы.**

Анализ результатов применения метода Ньютона показывает, что данный метод демонстрирует высокую эффективность при решении рассматриваемой задачи. Он обеспечивает сходимость к корню за минимальное количество итераций по сравнению с другими изученными методами.

Экспериментальное исследование обусловленности метода Ньютона позволяет заключить, что данный метод обладает высокой устойчивостью к погрешностям, что подтверждает его надежность в численных расчетах.