**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ**

отчет

**по практической работе №6**

**по дисциплине «Вычислительная математика»**

Тема: **Метод простых итераций**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 3342 |  | Мохамед М.Х. |
| Преподаватель |  | Пуеров Г.Ю. |

Санкт-Петербург

2025

**Цель работы.**

Формирование практических навыков нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом простых итераций.

**Основные теоретические положения.**

Метод простых итераций (метод последовательных приближений) решения уравнения состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением и построении последовательности , сходящейся при к точному решению. Достаточные условия сходимости метода простых итераций формулируются следующей теоремой.

Теорема. Пусть функция определена и дифференцируема на , причём все её значения . Тогда, если существует число , такое, что на отрезке , то последовательность , сходится к единственному на решению уравнения при любом начальном значении , т.е.

При этом если на отрезке производная положительна, то

если φ′(x) отрицательна, то

Рассмотрим один шаг итерационного процесса. Исходя из найденного на предыдущем шаге значения , вычисляется . Если , то полагается и выполняется очередная итерация. Если же , то вычисления заканчиваются и за приближенное значение корня принимается величина . Погрешность результата вычислений зависит от знака производной при погрешность определения корня составляет , а при погрешность не превышает . Существование числа является условием сходимости метода в соответствии с отмеченной выше теоремой. Для применения метода простых итераций определяющее значение имеет выбор функции в уравнении , эквивалентном исходному. Функцию необходимо подбирать так, чтобы . Это обусловливается тем, что если на отрезке , то последовательные приближения будут колебаться около корня , если же , то последовательные приближения будут сходиться к корню монотонно. Следует также помнить, что скорость сходимости последовательности к корню функции тем выше, чем меньше число .

**Постановка задачи.**

Используя программы-функции ITER и Round из файла methods.cpp (файл заголовков metods.h), найти корень уравнения с заданной точностью Eps методом простых итераций, исследовать скорость сходимости и обусловленности метода. Порядок выполнения работы следующий:

1. Графически или аналитически отделить корень уравнения .
2. Преобразовать уравнение .
3. к виду так, чтобы в некоторой окрестности корня производная удовлетворяла условию . При этом следует иметь в виду, что чем меньше величина , тем быстрее последовательные приближения сходятся к корню.
4. Выбрать начальное приближение, лежащее на отрезке .
5. Составить подпрограмму для вычисления значений , предусмотрев округление вычисленных значений с точностью Delta.
6. Составить головную программу, вычисляющую корень уравнения и содержащую обращение к программам PHI и ITER и индикацию результатов.
7. Провести вычисления по программе. Исследовать скорость сходимости и обусловленность метода.

**Выполнение работы.**

Проанализируем функцию :

Используем теорему Коши (теорему о промежуточных значениях) для нахождения отрезков, на которых функция меняет знак.

**Условия теоремы Коши:**

1. Функция f(x) должна быть непрерывной на отрезке [a,b].
2. На концах отрезка значения функции должны иметь разные знаки: f(a)⋅f(b)<0.

Проверим непрерывность f(x):

* – экспонента, непрерывна на всей числовой прямой.
* – арккосинус, определенный при , то есть при

Таким образом, функция f(x) непрерывна на [0, 1].

Возьмем отрезок [0.1, 0.25]

На концах отрезка f(x) имеет разные знаки: f(0.1) \* f(0.25) < 0:

* При x = 0.1:
* При x = 0.25:
* Следовательно, f(0) \* f(0.25) < 0

Таким образом, на отрезке [0.1, 0.25] функция непрерывна, и на концах этого отрезка она принимает значения разных знаков меняет знак с отрицательного на положительный. Следовательно, по теореме Коши (теореме о промежуточных значениях), на отрезке [0.1, 0.25] существует хотя бы один корень уравнения f(x) = 0. На графике на рис.1 можно удостовериться, что корень действительно принадлежит отрезку [0.1, 0.25].

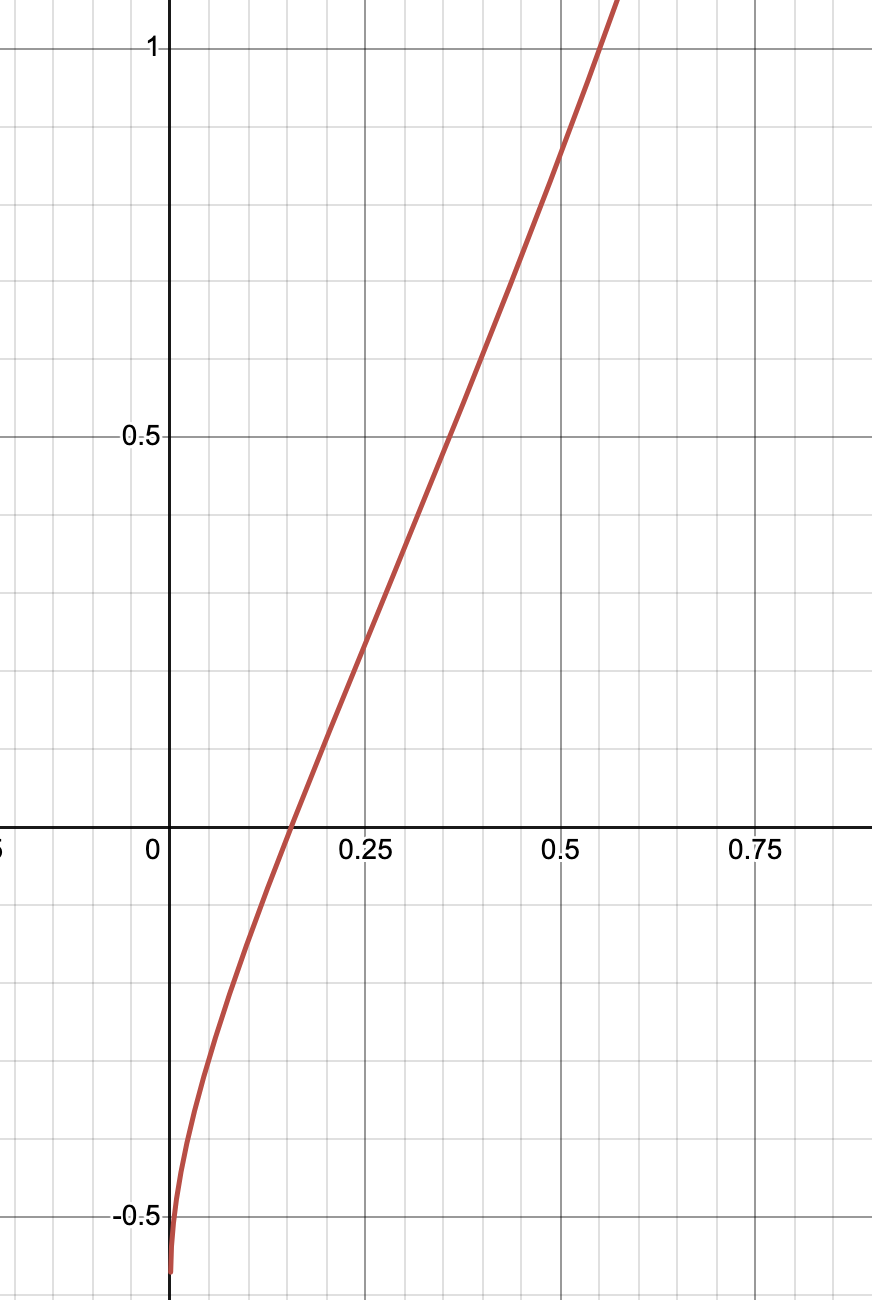


Рисунок 1 – Локализация корня функции

Чтобы убедиться, что корень единственный, исследуем монотонность функции f(x). Для этого вычислим её производную.

для всех x, так как экспонента всегда положительна

для всех , так как на этом интервале.

Таким образом, f '(x) > 0 на всем интервале (0, 1). Значит, функция f(x) строго возрастает на интервале (0, 1), а значит, функция строго возрастает и на отрезке [0.1, 0.25]. Следовательно, корень уравнения на этом отрезке единственный.

Метод простых итераций состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением .

Метод простых итераций сходится, если выполняется условие:

в окрестности решения. Рассмотрим график производной (рис.2)

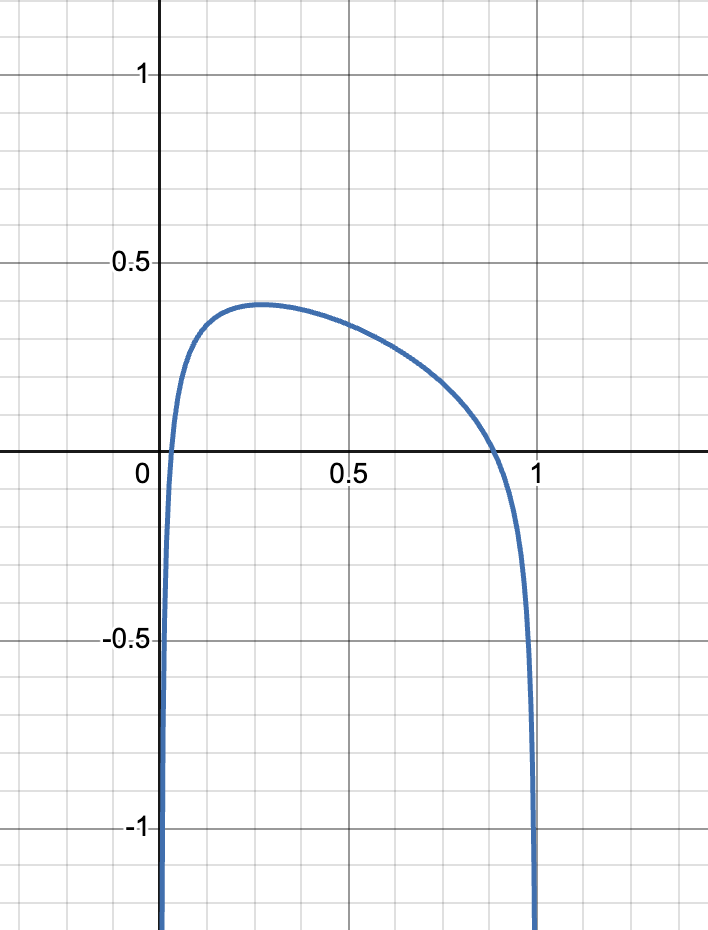


Рисунок 2 –

Из графика видно, что можно взять q=0.5. Тогда на отрезке [0.1, 0.25] будет выполняться условие

За произвольное приближение возьмем

Проведем вычисление корня функции при помощи программы. Программа вычисляет корень уравнения методом простых итераций. На вход ей подаются следующие параметры: x – начальное приближение корня, eps – требуемая точность вычисления корня, delta – погрешность вычисления значений функции. В таблице 1 приведены расчеты корня при различных значениях eps и представлены значения количества итераций. На рис.3 представлен график зависимости числа итераций от eps.

Таблица 1 – расчет корня методом простых итераций с варьированием значения eps

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значение eps | Значение delta | Значение a | Значение b | Значение | Значение |
| 0.1 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.190793 | 1 |
| 0.01 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.159359 | 3 |
| 0.001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.154643 | 6 |
| 0.0001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.154437 | 8 |
| 0.00001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.15441 | 10 |
| 0.000001 | 0.000001 | 0.1 | 0.25 | 0.154406 | 13 |

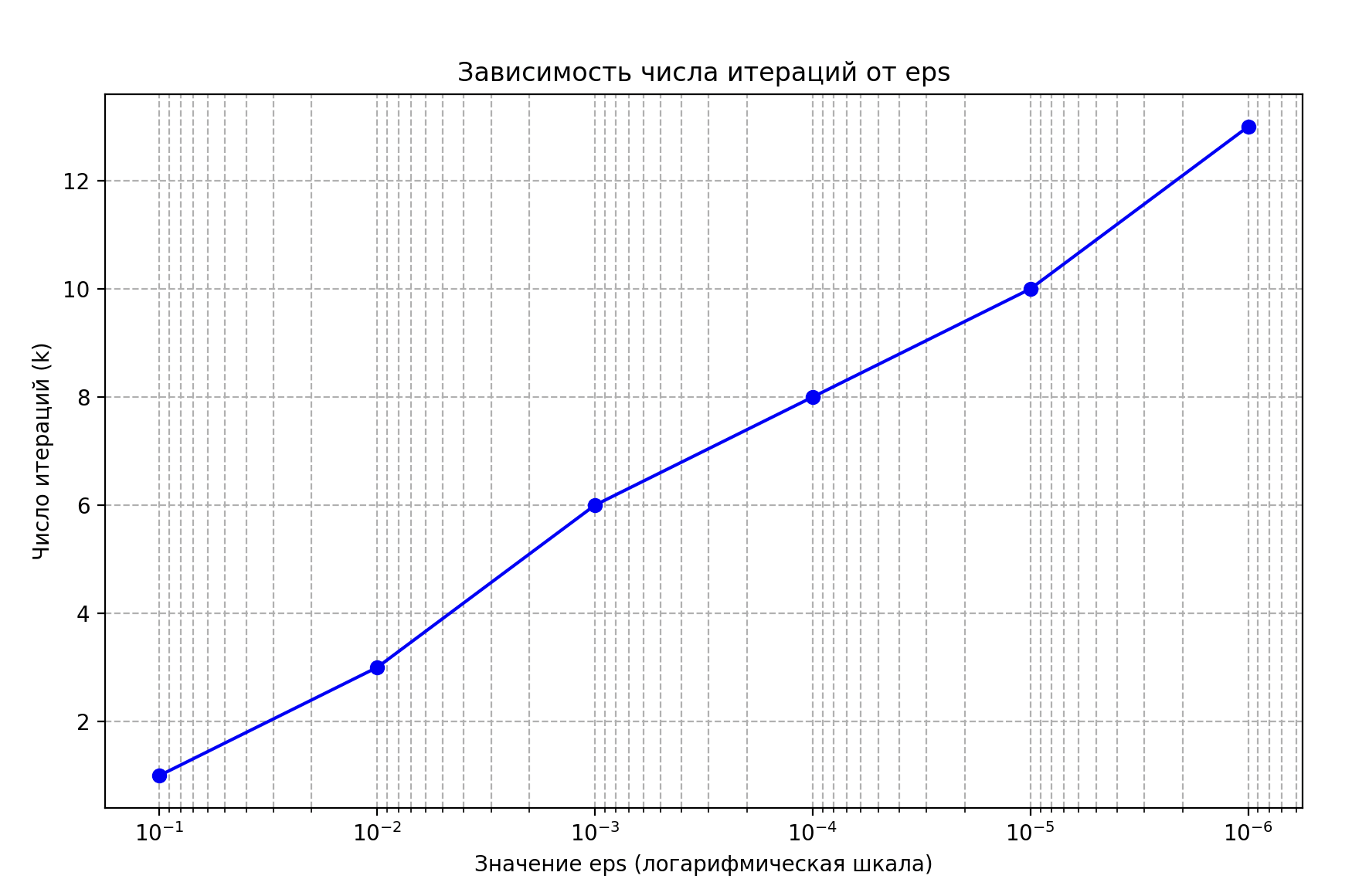


Рисунок 3 – зависимость числа итераций от eps

Теперь, имея приближение корня, примем . С помощью данного приближения вычислим , и оценим с его помощью чувствительность метода к ошибкам в исходных данных. При будем считать, что задача хорошо обусловлена – 1, иначе 0 – плохо.

Таблица 2 – Обусловленность задачи при различных и

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значение eps | Значение delta | Значение | Значение  *k* | Значение | Значение |
| 0.1 | 0.1 | 0.2 | 1 | 0.045594 | 1 |
| 0.01 | 0.1 | 0.2 | 2 | 0.045594 | 0 |
| 0.001 | 0.1 | 0.2 | 2 | 0.045594 | 0 |
| 0.0001 | 0.1 | 0.2 | 2 | 0.045594 | 0 |
| 0.00001 | 0.1 | 0.2 | 2 | 0.045594 | 0 |
| 0.000001 | 0.1 | 0.2 | 2 | 0.045594 | 0 |
| 0.1 | 0.01 | 0.19 | 1 | 0.035594 | 1 |
| 0.01 | 0.01 | 0.16 | 4 | 0.005594 | 1 |
| 0.001 | 0.01 | 0.16 | 4 | 0.005594 | 0 |
| 0.0001 | 0.01 | 0.16 | 4 | 0.005594 | 0 |
| 0.00001 | 0.01 | 0.16 | 4 | 0.005594 | 0 |
| 0.000001 | 0.01 | 0.16 | 4 | 0.005594 | 0 |
| 0.1 | 0.001 | 0.191 | 1 | 0.036594 | 1 |
| 0.01 | 0.001 | 0.16 | 3 | 0.005594 | 1 |
| 0.001 | 0.001 | 0.155 | 6 | 0.000594 | 1 |
| 0.0001 | 0.001 | 0.155 | 6 | 0.000594 | 0 |
| 0.00001 | 0.001 | 0.155 | 6 | 0.000594 | 0 |
| 0.000001 | 0.001 | 0.155 | 6 | 0.000594 | 0 |
| 0.1 | 0.0001 | 0.1908 | 1 | 0.036394 | 1 |
| 0.01 | 0.0001 | 0.1594 | 3 | 0.004994 | 1 |
| 0.001 | 0.0001 | 0.1546 | 6 | 0.000194 | 1 |
| 0.0001 | 0.0001 | 0.1545 | 8 | 0.000094 | 1 |
| 0.00001 | 0.0001 | 0.1545 | 8 | 0.000094 | 0 |
| 0.000001 | 0.0001 | 0.1545 | 8 | 0.000094 | 0 |
| 0.1 | 0.00001 | 0.19079 | 1 | 0.036384 | 1 |
| 0.01 | 0.00001 | 0.15936 | 3 | 0.004954 | 1 |
| 0.001 | 0.00001 | 0.15464 | 6 | 0.000234 | 1 |
| 0.0001 | 0.00001 | 0.15444 | 8 | 0.000034 | 1 |
| 0.00001 | 0.00001 | 0.15441 | 10 | 0.000004 | 1 |
| 0.000001 | 0.00001 | 0.15441 | 11 | 0.000004 | 0 |
| 0.1 | 0.000001 | 0.190793 | 1 | 0.036387 | 1 |
| 0.01 | 0.000001 | 0.159359 | 3 | 0.004953 | 1 |
| 0.001 | 0.000001 | 0.154643 | 6 | 0.000237 | 1 |
| 0.0001 | 0.000001 | 0.154437 | 8 | 0.000031 | 1 |
| 0.00001 | 0.000001 | 0.15441 | 10 | 0.000004 | 1 |
| 0.000001 | 0.000001 | 0.154406 | 13 | 0 | 1 |

**Выводы.**

Проанализировав результаты применения метода простых итераций, можно сказать, что при расчете данной функции он дает хорошие результаты, и сходится за приемлемое число итераций.

По результатам эксперимента по определению обусловленности метода простых итераций можно сделать вывод, что метод простых итераций имеет хорошую обусловленность.