**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский государственный**

**электротехнический университет**

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

**Кафедра МО ЭВМ**

отчет

**по лабораторной работе №5**

**по дисциплине «Вычислительная математика»**

Тема: Метод Гаусса

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент гр. 3342 |  | Мохамед М.Х. |
| Преподаватель |  | Пуеров Г. Ю. |

Санкт-Петербург

2025

## Задание

В ходе выполнения работы студенты должны найти решение системы линейных уравнений с n неизвестными, заданной матрицей коэффициентов и вектором свободных членов, методом Гаусса. Выполнение работы состоит из следующих этапов:

1) с помощью преподавателя определить систему уравнений, которую нужно решить;

2) для решения системы уравнений разработать программу на языке C++, использующую подпрограмму-функцию. Данная функция имеет следующие параметры:

- a - матрица коэффициентов системы уравнений размера , тип ;

- - вектор свободных членов размера , тип ;

- - выходной вектор результата решения размера , тип ;

- - размер системы (матрицы a и вектора свободных членов ), тип.

В разрабатываемой программе должна быть описана константа nmax, равная максимальным размерам используемых матриц и векторов. Функция GAUSS в качестве значения типа возвращает:

а) 0 - в случае нормального завершения процесса вычисления;

б) 1 - в случае вырожденности матрицы а;

в) 2 - если n < 2;

г) 3 - если n > n\_max.

Провести вычисления с использованием разработанной программы и исследовать обусловленность задачи с использованием пакета Matlab, при этом для определения числа обусловленности матрицы A рекомендуется использовать функцию cond(A) [14]. Кроме того, для проверки получаемых результатов можно провести вычисления с помощью пакетов Matlab и Derive

**Теоретическая часть**

Рассматривается система линейных уравнений *n*-го порядка

(2.1)

. . . . .

,

что в векторном виде записывается как .

Суть метода исключения по главным элементам (метод Гаусса) заключается в следующем. Находится наибольший по абсолютной величине коэффициент . Для исключения из *i*-го уравнения необходимо умножить *k*-е уравнение на и вычесть его из *i*-го уравнения, после чего процесс повторяется для исключения другого неизвестного из оставшихся *-*1 уравнений и т. д. В результате система (2.1) приводится к треугольному виду

(2.2)

. . . . . .

,

из которого легко находятся неизвестные . Процесс приведения системы к виду (2.2) называется прямым ходом, а нахождение неизвестных - обратным ходом метода Гаусса.

Следует отметить, что если матрица заданной системы вырожденная, то перед исключением некоторой неизвестной главный элемент окажется равным нулю, что и будет свидетельствовать о равенстве нулю определителя системы.

Мерой обусловленности матрицы называют величину , где - норма матрицы . Мера обусловленности равна максимально возможному коэффициенту усиления относительной погрешности от правой части к решению системы (2.1). Если матрица симметричная и выбрана вторая норма, то мера обусловленности может быть найдена как

,

где - *i*-е собственное число матрицы . Если большая, то матрица (система (2.1)) называется плохо обусловленной, в противном случае - хорошо обусловленной.

**Использование библиотеки Eigen для анализа результатов**

Число обусловленности — это ключевая численная характеристика матрицы, отражающая степень чувствительности решения системы линейных уравнений к незначительным изменениям входных параметров (матрицы коэффициентов и вектора правой части).

**Его основные свойства:**

1. **Чувствительность решения:**
   * Высокое значение числа обусловленности указывает на то, что даже незначительные изменения во входных данных могут вызвать существенные отклонения в решении (система считается плохо обусловленной).
   * Низкое значение (близкое к 1) свидетельствует о хорошей обусловленности системы, означая её устойчивость к малым возмущениям.
2. **Точность вычислений:**
   * При работе с ограниченной точностью (например, в арифметике с плавающей запятой) большие числа обусловленности могут приводить к значительной потере точности.
3. **Обратимость матрицы:**
   * Если число обусловленности стремится к бесконечности, это означает, что матрица вырождена и не имеет обратной.

Число обусловленности играет важную роль в численных методах, помогая оценивать устойчивость и надежность решений линейных систем.

Спектральное число обусловленности (в 2-норме) определяется как:

где:

* — наибольшее сингулярное число матрицы A,
* ​ — наименьшее сингулярное число матрицы A.

**Анализ значений числа обусловленности:**

* — система идеально обусловлена (максимальная устойчивость).
* — приводит к потере примерно n значащих цифр в решении из-за вычислительной погрешности.
* — матрица вырождена (не имеет обратной).

Этот показатель позволяет оценить устойчивость решения системы линейных уравнений к погрешностям входных данных.

Число обусловленности в коде вычисляется с помощью функции computeConditionNumber.

**Реализация метода Гаусса с частичным выбором ведущего элемент для решения СЛАУ**

Функция gaussMethod предназначена для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с применением стратегии частичного выбора ведущего элемента. Алгоритм включает следующие этапы:

1. **Проверка корректности входных данных**
   * Размер матрицы n должен находиться в допустимом диапазоне: 2 ≤ n ≤ MAX\_SIZE. В противном случае возвращается код ошибки (2 или 3).
2. **Частичный выбор ведущего элемента**
   * На каждом шаге прямого хода в текущем столбце находится максимальный по модулю элемент.
   * Соответствующая строка переставляется с текущей для минимизации ошибок вычислений и повышения устойчивости алгоритма.
3. **Прямой ход метода Гаусса**
   * Матрица приводится к верхнетреугольному виду путём последовательного исключения переменных.
   * Если в процессе обнаруживается вырожденность матрицы (нулевой ведущий элемент), возвращается код ошибки 1.
4. **Обратный ход**
   * Начиная с последней переменной, вычисляются значения неизвестных.

**Коды возврата:**

* 0 – успешное решение системы,
* 1 – система вырождена (нет единственного решения),
* 2 или 3 – некорректный размер матрицы.

Тестирование программы приведено в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты тестирования

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Входные данные | Выходные данные |
|  | 5 | Input matrix size: 5  Generating matrix...  Generation complete!  Gauss method is running...  Gauss method finished working  Total execution time: 0 ms  Eigen solver is running...  Eigen solver finished working  Result comparison (Gauss\_method | Eigen):  x[0]: -0.653226 | -0.653226  x[1]: -0.211095 | -0.211095  x[2]: -0.997556 | -0.997556  x[3]: 0.879856 | 0.879856  x[4]: 1.60856 | 1.60856  Norm of difference: 4.04258e-07  Computing condition number...  Condition number: 14.0751 |
|  | 10 | Input matrix size: 10  Generating matrix...  Generation complete!  Gauss method is running...  Gauss method finished working  Total execution time: 0 ms  Eigen solver is running...  Eigen solver finished working  Result comparison (Gauss\_method | Eigen):  x[0]: 0.05746 | 0.0574594  x[1]: 0.399584 | 0.399585  x[2]: 0.667976 | 0.667977  x[3]: 0.0141768 | 0.014177  x[4]: 0.437668 | 0.437668  x[5]: -0.315117 | -0.315117  x[6]: 0.495113 | 0.495114  x[7]: 0.94003 | 0.94003  x[8]: 0.308286 | 0.308286  x[9]: 0.426207 | 0.426207  Norm of difference: 1.2359e-06  Computing condition number...  Condition number: 33.9256 |
|  | 1000 | Input matrix size: 1000  Generating matrix...  Generation complete!  Gauss method is running...  Gauss method finished working  Total execution time: 1.434 seconds  Eigen solver is running...  Eigen solver finished working  Result comparison (Gauss\_method | Eigen):  x[0]: -0.90509 | -0.905244  x[1]: 1.16052 | 1.16045  x[2]: 1.55096 | 1.55102  x[3]: 1.79703 | 1.79704  x[4]: -2.41674 | -2.41661  x[5]: 1.07793 | 1.07787  x[6]: -0.66432 | -0.664326  x[7]: 0.630169 | 0.630062  x[8]: 0.608713 | 0.608755  x[9]: 3.79763 | 3.79763  ... (showing first 10 of 1000 elements), results were written in file  Norm of difference: 0.000925856  Computing condition number...  Condition number: 4892.9 |

## Вывод

В ходе выполнения работы была успешно реализована программа для решения систем линейных уравнений методом Гаусса с частичным выбором ведущего элемента и проведен анализ обусловленности матриц с использованием библиотеки Eigen. Разработанный алгоритм корректно решает системы уравнений для матриц различной размерности. Частичный выбор ведущего элемента обеспечивает устойчивость решения, что подтверждается малыми расхождениями с результатами библиотеки Eigen. Алгоритм правильно обрабатывает граничные случаи (вырожденные матрицы, ограничения на размер). К недостаткам метода Гаусса можно отнести высокую сложность по времени O(n3).