1 Определения, свойства, способы задания бинарных отношений

1.1 Определения

Непустое множество M — дискретное множество, если у каждого его элемента существует окрестность, не содержащая других элементов множества M.

$$M \neq \varnothing - \text{дискретное множество, если } \forall m \in M \ \exists \theta_\epsilon(m) : \forall n \in M, n \notin \theta_\epsilon(m)$$

Бинарным отношением f на множестве M называется отображение, которое действует из декартова квадрата M в булево множество $\mathbb{B}$.

$$f : M^2 \to \mathbb{B} := \{0, 1\}$$

Декартов квадрат множества M - множество упорядоченных пар элементов из M.

$$M^2 = M \times M := \{(m_1, m_2) | m_1, m_2 \in M\}$$

Примеры:

1. $M = \{\text{фамилии}\}$

$\begin{cases} f(m,n) = 1, m, n \text{ начинаются на одну букву} \\ f(m,n) = 0, \text{ иначе} \end{cases}$

2. $M = \mathbb{N}$

$\begin{cases} f(m,n) = 1, m \,\vdots\, n \\ f(m,n) = 0, \text{ иначе} \end{cases}$

1.2 Способы задания бинарных отношений:

Аналитический (по определению).

Матрица смежности $M = \{m_1, ..., m_n\}$ – таблица размерности $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом: $a_{ij} = 1$ если $f(m_i, m_j) = 1$

	m_1	m_2	$\dots$	m_n
m_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
m_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m_n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nn}

1.3 Свойства бинарных отношений

$$M \neq \varnothing, f : M^2 \to \mathbb{B}$$

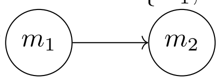
1. Рефлексивность. $\forall m \in M \ f(m,m) = 1$
2. (А-)Антирефлексивность. $\forall m \in M \ f(m,m) = 0$
3. Симметричность. $\forall m, n \in M \ f(m,n) = 1 \Rightarrow f(n,m) = 1$
4. Антисимметричность. $\forall m, n \in M \begin{cases} f(m,n) = 1 \\ f(n,m) = 1 \end{cases} \Rightarrow m = n$
5. Асимметричность. $\forall m, n \in M \ f(m,n) = 1 \Rightarrow f(n,m) = 0$

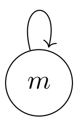
6. Транзитивность. $\forall m,n,p \in M \left\{ \begin{array}{l} f(m,p)=1 \\ f(p,n)=1 \end{array} \right. \Rightarrow f(m,n)=1$

Определение свойства бинарного отношения по матрице

1. *Рефлексивность.* На главной диагонали все элементы являются единицами.
2. *(А-)Антирефлексивность.* На главной диагонали все элементы являются нулями.
3. *Симметричность.* Матрица равна транспонированной матрице. $A = A^T$
4. *Антисимметричность.* При транспонировании матрицы все единицы заменятся на нули. Возможны единицы на главной диагонали.
5. *Асимметричность.* При транспонировании матрицы все единицы заменятся на нули. Главная диагональ содержит только нули.
6. *Транзитивность.* При возведении матрицы в квадрат не появляется новых ненулевых элементов.

Граф, вершинами которого будут элементы множества $M = \{m_1, ..., m_n\}$.

$f(m_1,m_2)=1 \Leftrightarrow$ 

$f(m,m)=1 \Leftrightarrow$ 

Определение свойства бинарного отношения по графу

1. *Рефлексивность.* У каждой вершины графа есть петля.
2. *(А-)Антирефлексивность.* Ни одна вершина графа не имеет петли.
3. *Симметричность.* Все ребра графа двунаправленные.
4. *Антисимметричность.* Нет двунаправленных ребер. Допускаются петли.
5. *Асимметричность.* Нет двунаправленных ребер и петель.
6. *Транзитивность.* Если между двумя вершинами существует путь через третью, то существует и ребро.

1.4 Типы бинарных отношений

1. Отношение эквивалентности — рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Классом эквивалентности $[m] \subset M$ элемента $m \in M$ называется подмножество элементов, эквивалентных m. Множество классов эквивалентности по заданному отношению является разбиением множества. Два класса эквивалентности либо равны, либо не пересекаются. Объединение всех классов эквивалентности дает исходное множество.

Пример:
$M = \{$крот, обезьяна, заяц, корова, зебра, мышь, змея, крокодил, осел$\}$
$\left\{ \begin{array}{l} f(m,n)=1, m,n \text{ начинаются на одну букву} \\ f(m,n)=0, \text{ иначе} \end{array} \right.$

Классы эквивалентности:
$[\textit{крот}] = \{$крот, крокодил, корова$\}$
$[\textit{корова}] = \{$крот, крокодил, корова$\}$

[*крокодил*] = {крот, крокодил, корова}
[*заяц*] = {заяц, зебра, змея}
[*зебра*] = {заяц, зебра, змея}
[*змея*] = {заяц, зебра, змея}
[*обезьяна*] = {обезьяна, осел}
[*осел*] = {обезьяна, осел}
[*мышь*] = {мышь}

2. Отношение порядка:

- Отношение строгого порядка — асимметрично и транзитивно;
- Отношение частичного (нестрогого) порядка — рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Отношение линейного порядка — отношение частичного порядка с условием, что $\forall m, n \in M$ выполнено $f(m, n) = 1$ и(или) $f(n, m) = 1$.

Пояснение для отношения линейного порядка

Для того, чтобы отношение можно было считать отношением линейного порядка необходимо, чтобы между всеми элементами множества существовала связь (либо в одну, либо в другую сторону).

2 Топологическая сортировка

Связность графа — существование пути между любыми двумя вершинами графа. Ориентированный граф называется **сильно-связным**, если в нём существует (ориентированный) путь из любой вершины в любую другую, или, что эквивалентно, граф содержит ровно одну сильно связную компоненту.

Ориентированный граф называется **слабо-связным**, если является связным неориентированным графом, полученным из него заменой ориентированных рёбер неориентированными.

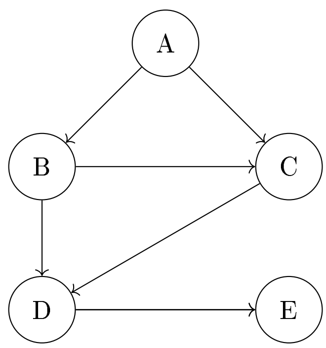
Алгоритм topsort

Вход: ориентированный ациклический невзвешенный граф $\rightarrow$ *Выход:* линейный порядок на вершинах.

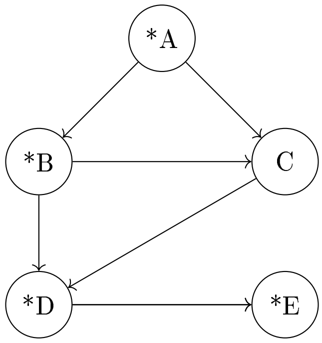
Нумерация вершин — каждое ребро ведет из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

1. Начиная с произвольной вершины запускаем поиск в глубину.
2. Вершины, для которых поиск завершен помещаются в стек.
3. После того, как в стеке окажутся все вершины они нумеруются в порядке извлечения из стека.

Пусть дан следующий граф:



Запускаем поиск в глубину с вершины **A**.

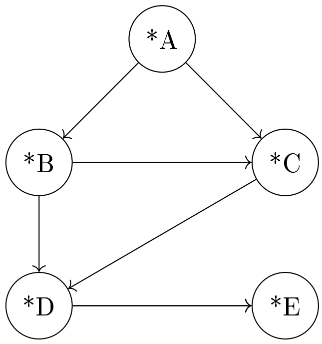


Вершина **E** помещается в стек, мы возвращаемся в вершину **D**.

Так как из **D** больше некуда идти, добавляем вершину в стек. Возвращаемся в вершину **B** и продолжаем поиск в глубину – помечаем вершину **C**.
Вид графа и стека после выполнения шага:

стек:

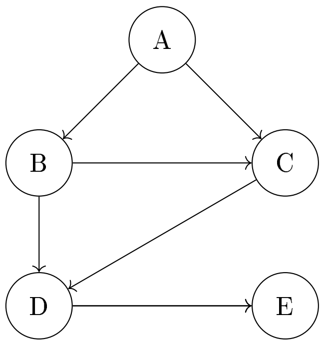
D
E



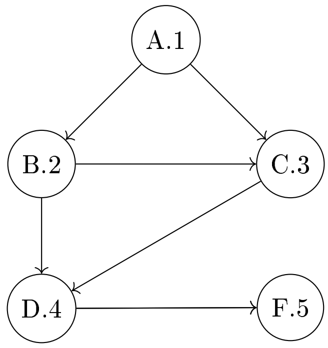
Вид графа и стека после того, как все вершины были просмотрены:

стек:

A
B
C
D
E



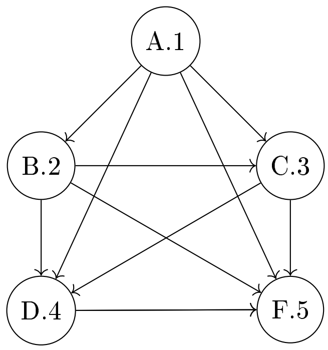
Вершины нумеруются в порядке извлечения из стека (начиная с верхней вершины):



стек:

$A.1$
$B.2$
$C.3$
$D.4$
$E.5$

Для того, чтобы определить линейный порядок на вершинах, достраиваем недостающие ребра из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером:



3 Замыкание бинарных отношений относительно свойства $\star$

$M \neq \varnothing, f : M^2 \to \mathbb{B}$,

$f^\star$ — замыкание бинарного отношения относительно свойства $\star$, если:

1. $\forall m, n \in M \ f(m,n) = 1 \Rightarrow f^\star(m,n) = 1$;
2. $f^\star$ обладает свойством $\star$;
3. $f^\star$ минимальное из бинарных отношений, обладающих свойством $\star$.

3.1 Рефлексивное замыкание:

- Добавление недостающих единиц на главную диагональ.
- Добавление петель тем вершинам, у которых петля отсутсвует.

3.2 Симметричное замыкание:

- Добавление единиц по принципу: $a_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ji} = 1$.
- Превращение всех неориентированных ребер в ориентированные.

3.3 Транзитивное замыкание:

Пусть $|M| = n$, A – матрица смежности для бинарного отношения f.
Чтобы построить транзитивное замыкание, матрицу A необходимо возводить в степень от 2 до n, пока в матрице не перестанут появлятся новые ненулевые элементы.

Сложность возведения матрицы $n \times n$ в степень $n = O(n^4)$.

Алгоритм Уоршелла для построения транзитивного замыкания:

Сложность алгоритма для матрицы $n \times n = O(n^3)$.

Шаг 1. Выбираем первый диагональный элемент и ассоциированные с ним строку и столбец, достраивая проекции на элементы матрицы. Нулевые элементы, проекции столбца и строки на которые являются единицами, заменяются единицами.

Шаг 2. Переходим к следующему диагональному элементу и повторяем шаг 1.

Алгоритм заканчивает работу, когда мы дошли до последнего диагонального элемента (или все элементы матрицы на каком-то шаге стали единицами).

Пример: Пусть дана матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выделяем строку и столбец, ассоциированные с первым диагональным элементом и проверяем, для каких элементов проекции на строку и столбец являются единицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На следующем шаге выбираем второй диагональный элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично для остальных элементов матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица транзитивного замыкания:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$