Universidad Técnologica Latinoameriacana en Línea

Modalidad de ingeniería

Cálculo diferencial e integral

Realizado por

J. R. HERRERA CURIEL Y EL ÁREA DE EVALUACIÓN ACÁDEMICA

Notas

UTEL, 2018

ÍNDICE GENERAL

Página

1. Tasa de cambio, límites y continuidad **3**

2. Derivadas **30**
2.1. Aplicaciones de la derivada 46

3. Máximos, mínimos y problemas de optmización **52**

4. La Integral **70**

5. Métodos de integración **86**

UNIDAD 1

TASA DE CAMBIO, LÍMITES Y CONTINUIDAD

Las funciones están presentes en la vida cotidiana, a saber: el espacio que recorre un móvil en función del tiempo, el costo de cierto papel en función de la cantidad, el aumento o disminución de la temperatura del agua en función del tiempo.

Antes de comenzar, recordaremos algunos conceptos relacionados con funciones y ofreceremos algunas nociones básicas sobre las funciones, luego daremos paso al estudio de tasa de cambio, posteriormente en otro apartado al cálculo de límites de funciones y finalmente revisaremos el concepto de continuidad de funciones.

La temperatura a la que hierve el agua depende de la altura sobre el nivel del mar (el punto de ebullición disminuye conforme se asciende). La tasa de interés que se paga por una inversión monetaria depende de cuánto tiempo dure invertido el dinero. El área del círculo depende de su radio. La distancia que viaja un objeto desde un punto inicial a lo largo de una trayectoria recta depende de su velocidad. En cada uno de estos casos, el valor de una cantidad variable, que podemos llamar y, depende del valor de otra variable, que podemos llamar x. Debido a que el valor de y está totalmente determinado por el valor de x, decimos que y es una función de x. Frecuentemente el valor de y está dado por una regla o fórmula que nos indica cómo calcularlo a partir de la variable x. Por ejemplo, la ecuación $A = \pi r^2$ es una regla para calcular el área A de un círculo a partir de su radio r. En cálculo, es posible que en algún momento queramos referirnos a una función no específica sin contar con una fórmula determinada. Una manera simbólica de decir "y es una función de x", consiste en escribir

$$y = f(x)$$

Definición 1. *Dados dos conjunto D e Y, se dice que $f(x)$ es una función definida, en el conjunto D y tomando valores en el conjunto Y, cuando a cada elemento "x" del conjunto D se le asigna uno y sólo un elemento de $f(x)$ del conjunto Y. Se representa por $f : D \hookrightarrow Y$*

El conjunto D recibe indistintamente los nombres de conjunto origen, conjunto inicial, dominio de la función o campo de existencia de la función, y se representa por $\mathrm{Dom}(f)$. Un elemento cualquiera del conjunto D se representa por la letra x, que llamamos variable independiente.

Cada elemento x de D tiene por imagen, mediante la función f, un elemento de Y que se representa por y, es llamada variable dependiente. Esto se expresa escribiendo $y = f(x)$. El conjunto Y es el contradominio o conjunto final y los elementos que son imagen de algún elemento de D forman el conjunto imagen ($\mathrm{Im}(f)$), rango de la función o recorrido de la función ($f(D)$):

$$f(D) = \{f(x) : x \in D\}$$

ver figura 1.1

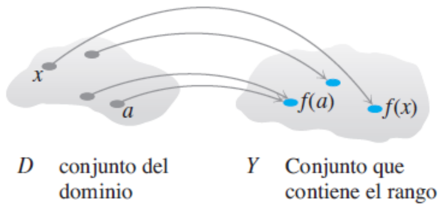


Figura 1.1: Una función del conjunto D al conjunto Y

El dominio de una función puede restringirse según el contexto. Por ejemplo, el dominio de la función de área dado por $A = \pi r^2$ solamente permite que los radios r sean positivos (ya que es una distancia). Cuando definimos una función $y = f(x)$, con una fórmula y el dominio no se da explícitamente o está restringido por el contexto, entonces el dominio es el máximo conjunto de valores reales para los que la fórmula da valores reales de y; este dominio se llama dominio natural. Si queremos restringir el dominio de alguna manera, debemos especificarlo. El dominio de $y = x^2$ es todo el conjunto completo de números reales. Para restringir el dominio de una función, digamos, a los valores positivos de x, debemos escribir $y = x^2, x > 0$. Si cambiamos el dominio donde aplicamos una fórmula, por lo general también cambia el rango. Por ejemplo el rango de $y = x^2, x > 2$ es el conjunto de números obtenidos al elevar al cuadrado los números mayores que o iguales a 2. En notación de conjuntos, el rango es $\{x^2 : x > 2\}$ o $\{y : y \geq 4\}$ o $[4, \infty]$

En el ejemplo de arriba el dominio y la imágen resultarón ser conjuntos a los que llamaremos intervalos, existen diferentes tipos de intervalos; intervalos abiertos: son de la forma (a, b) donde a y b son números reales, este conjunto se refiere a todos los elementos comprendidos en la recta real que van desde a hasta b, excepto los extremos a y b, por ejemplo el intervalo $(5, 10)$ contiene a todos los elementos que son números reales comprendidos entre 5 y 10 como los son 7, el 5,14658, el 9,9999, etc... intervalos cerrados: son de la siguiente forma $[a, b]$, a diferencia de los intervalos abiertos estos intervalos si contienen a los extremos a y b, intervalos abiertos-cerrados o cerrados-abiertos: son aquellos de la siguiente forma $(a, b]$ y $[a, b)$, cualquiera de los casos ambos tienen un extremo, a o b. La recta real o todos los números reales se representan simbolicamente por $\mathbb{R}$, sin embargo $\mathbb{R}$ se puede escribir como $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 1. *Dominio de funciones*

Obtener el dominio de la siguientes funciones

$$1. - \quad f(x) = 5x \qquad 2. - \quad g(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

1.- La función $f(x) = 5x$ está definida para todos los valores reales, es decir cada vez que se evalúa la función en un valor real, esta regresa un valor real como resultado, por tanto en dominio de la función es $(-\infty, \infty)$

2.- Este tipo de funciones son llamadas racionales, como veremos más adelante, el problema de esta función es que al evaluarla podríamos tener indeterminaciones, por ejemplo al evaualar en un valor podríamos tener como resultado $\frac{\alpha}{0}$ " α es un número real" lo cual no tenemos permitido, ya que dividir cualquier número entre cero no es número real, en este caso debemos de buscar todos los elementos del denominador de la función que puedan hacerse cero, esto es cuando $1 - x^2 = 0$, lo cual ocurre si y solo sí $x = 1$ o $x = -1$, en efecto $g(-1) = \frac{-1}{1-(-1)^2} = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0}$, de la misma forma $g(1) = \frac{1}{1-(1)^2} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$, sabiendo cuales son los puntos para los que la función no esta definida, en este caso $x = 1$ y $x = -1$ podemos escribir el dominio como $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, note que el dominio D es equivalente a todos los números reales excepto los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

Representación de una función

La representación gráfica de una función nos permite visualizar de un modo claro y preciso su comportamiento. Una función f asigna a cada número x del conjunto origen o dominio D " que puede ser un intervalo abierto, cerrado o un conjunto más general" un número $y = f(x)$ del conjunto imagen Y. Cada par de números $(x, f(x))$ corresponde a un punto del plano, que al ser ubicado en un sistema cartesiano da como resultado la gráfica de la función ver la figura 1.2

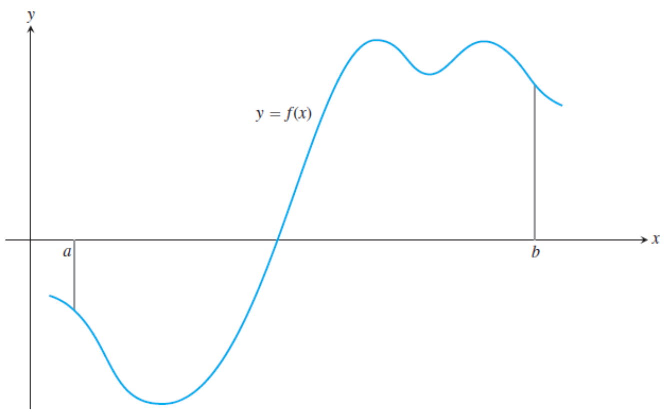


Figura 1.2: Representación de una función

Operaciones con funciones

De ahora en adelante todas las funciones que consideremos tendrán como dominio e imagen a un subconjunto de los numeros reales. Por lo cual diremos que son funciones reales de variable real.

Suma de funciones. Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas en un mismo dominio, se llama suma de ambas funciones y se representa por $f+g$ a la función definida por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Resta de funciones. Del mismo modo que se ha definido la suma de funciones, la resta de dos funciones reales de variable real f y g definidas en un mismo dominio, se define como la función:

$$(f-g)(x) = f(x)g(x).$$

Producto de funciones. Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas en un mismo dominio, se llama función producto de f y g a la función definida por:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Cociente de funciones. Dadas dos funciones reales de variable real f y g definidas en un mismo dominio, se llama función cociente de f y g a la función definida por:

$$(\tfrac{f}{g})(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)}$$

La función f/g está definida en todos los puntos en que la función g no se anula.

Producto de un número por una función. Dado un número real a y una función f, el producto del número por la función es la función definida por:

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x).$$

Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 2. *Suma y multiplicación de funciones*

Sean $f(x) = x^3 + 1$ *y* $g(x) = x^2 - 5$, *hallar la suma y la multiplicación de estas funciones*

1.- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^3+1) + (x^2-5) = x^3 + x^2 - 4$

2.- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^3+1) \cdot (x^2-5) = x^5 - 5x^3 + x^2 - 5$

Ejemplo 3. *Monto de Interés Simple.*

Aqui aplicaremos la propiedad $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$.

En matemáticas financieras, cuando se suma el capital y el interés siemple, da como resultado el monto, que es también conocido como valor futuro, el monto está dado por la ecuación $M = C(1+it)$, *donde* M*=Monto,* C*=Capital,* i*= tasa de interés (expresada en decimales),* t*=tiempo de la operación (expresado en la misma unidad de tiempo que la tasa de interés), supongamos que una persona debe pagar un decimo del monto que ha producido* $90,000$ *a una tasa de 9 % de interés simple anual durante 3 años 6 meses, ¿Cuanto debe pagar?*

Notemos que este caso el monto lo podemos ver como una función que depende del tiempo t*, donde* t *está en años, entonces el monto se puede escribir como* $M(t) = C(1+it)$*, por otro lado la persona debe pagar un decima parte del monto que producen: \$90,000. A a una tasa de 9 % (.09) de interés simple durante 3 años 6 meses, por esto mismo llamemos* $t_0 = 3{,}5$, *ya que 6 meses es la mitad de un año, por lo cual transcurren 3.5 años. y así el problema se resolvera al calcular* $\frac{1}{10}M(t_0) = \frac{1}{10}C(1+it_0)$, *esto es* $\frac{1}{10}M(3{,}5) = \frac{1}{10}[90,000(1+0{,}09(3{,}5))] = \frac{1}{10}[118,350] = 11,835$

Composición de funciones

Esta operación será de gran utilidad en las siguientes unidades, por lo cual se le dará más importancia.

Definición 2. *Dadas dos funciones* f *y* g*, se llama composición de las funciones* g *con* f*, y se escribe* $f \circ g$ *(*g *seguida de* f*), a la función definida por* $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ *ver la figura 1.3*

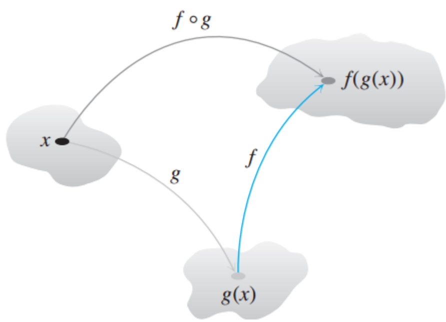


Figura 1.3: composición de funciones

Tengamos en mente lo siguiente, si D es el dominio de la función g e I es su imagen, entonces el dominio de la función f será I, es decir el conjunto imagen de la función g.

Ejemplo 4. *Sea* $g(x) = 2x$ *y* $f(x) = 3x + 1$ *encontraremos* $f \circ g$ *y* $g \circ f$

Tenemos que $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[2x] = 3(2x) + 1 = 6x + 1$. *por otro lado* $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[3x+1] = 2(3x+1) = 6x+2$, *notemos que en general* $f \circ g$ *y* $g \circ f$ *son diferentes.*

Funciones simétricas

- Funciones pares. Una función f es par cuando cumple $f(x) = f(-x)$. Es decir, las imágenes de valores de signo contrario coinciden. Por lo que la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje y.
- Funciones impares. Una función f es impar si cumple $f(-x) = -f(x)$. A valores opuestos de x corresponden imágenes de signo contrario. Por lo que la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.
- Funciones inversas. Dada una función $f(x)$, si tiene inversa ésta es otra función designada por $f^{-1}(x)$ de forma que se verifica: $f(a) = b$, si y sólo si $f^{-1}(b) = a$ para toda a en el dominio de f. Las gráficas de la función y de su inversa son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 5. *La función* $f(x) = x^2$*, es una función par, y la función* $f(x) = x^3$*, es una función impar* *la función $f(x) = x^2$ satisface que $f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x)$, por tanto es una funcón par*

la función $f(x) = x^3$ satisface que $f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -(x^3) = -f(x)$, por tanto es una función impar.

Tasa de cambio

Una manera de medir la relación entre los cambios de dos variables relacionadas es a través de la tasa o razón de cambio promedio.

Definición 3. *Sea f definida en un intervalo $[a, b]$, conteniendo los puntos x_1 y x_2, se define la tasa de cambio promedio de la función $y = f(x)$ desde x_1 a x_2 como*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{1.1}$$

en el intervalo $[a, b]$.

Donde $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ y $\Delta x = x_2 - x_1$ Observe que la tasa de cambio promedio no es otra cosa que la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, llamada la recta secante de la gráfica de f que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, como lo muestra la figura 1.4.

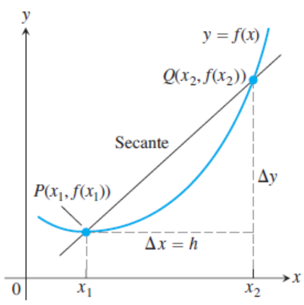


Figura 1.4: Tasa de cambio promedio de la función f

Muchas veces, los biólogos experimentales quieren saber la razón a la que crecen las poblaciones bajo condiciones controladas en el laboratorio.

Ejemplo 6. *En la figura 1.5 se muestra el crecimiento poblacional de la mosca de la fruta (Drosophila) durante un experimento de 50 días. El número de moscas (variable p) se contó en intervalos regulares de tiempo (variable t), y los valores se gráficaron en relación con el tiempo; los puntos resultantes fueron unidos mediante una curva suave (de color azul en la figura). Encontrar la razón promedio de crecimiento entre los días 23 y 45.*

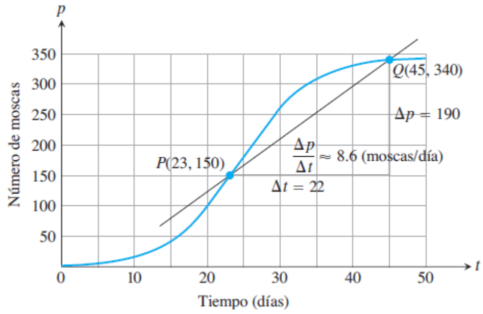


Figura 1.5: Crecimiento de la población de la mosca de la fruta en un experimento controlado. La razón de cambio promedio en 22 días es la pendiente $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ de la recta secante.

El día 23 *había* 150 *moscas, y el día* 45 *había* 350*. Por lo tanto, el número de moscas se incrementó* $340 - 150 = 190$ *en* $45 - 23 = 22$ *días. La razón de cambio promedío de la población entre los días* 23 *y* 45 *fue*

Razón de cambio promedio $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{340-150}{45-23} = \frac{190}{22}$.

Velocidad Promedio

La velocidad promedio que tiene un cuerpo en movimiento durante un intervalo de tiempo, se encuentra al dividir la distancia recorrida entre el lapso de tiempo. La unidad de medida es longitud por unidad de tiempo: kiómetros por hora, pies por segundo o cualquiera otra que sea adecuada para el problema en cuestión.

Ejemplo 7. *Determinación de la velocidad promedio:*

Una piedra cae de un acantilado desde el reposo. ¿Cuál es su velocidad promedio

- *durante los primeros dos segundos de la caída?*
- *durante el intervalo de un segundo entre el segundo* 1 *y el segundo* 2*?*

Para resolver este problema usamos el hecho, descubierto por Galileo a finales del siglo ***XVI****, de que un objeto sólido que se deja caer desde el reposo (sin moverse), de manera que descienda libremente cerca de la superficie de la tierra, recorrerá una distancia proporcional al cuadrado del tiempo que dura la caída. (Esto supone despreciar la resistencia que ejerce el aire y frena el objeto, y descartar la influencia de fuerzas distintas a la gravedad sobre el objeto en caída. A este tipo de movimiento se le denomina caída libre).*

Si y *denota la distancia recorrida en pies después de* t *segundos, de acuerdo con la ley de Galileo*

$$y = 16t^2 \tag{1.2}$$

donde 16 *es la constante de proporcionalídad. La velocidad promedio de la piedra durante un intervalo de tiempo dado, es igual al cambio en la distancia,* Δy*, dividio entre el intervalo de tiempo,* Δt*.*

- *Para los primeros 2 segundos:* $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2-16(0)^2}{2-0} = 32\frac{pies}{seg}$
- *Del segundo 1 al segundo 2:* $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(2)^2-16(1)^2}{2-1} = 48\frac{pies}{seg}$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 8. *Encontrar el dominio de la función*

$$1. - f(x) = x^4 \qquad 2. - g(x) = x^3 - 8x^2 - 1$$

1.- El dominio de la función está dado por el conjunto de los números reales, ya que cualquier valor real que se evalúe en la función da como resultado un número real, así el dominio es $D = (-\infty, \infty)$

2.- El dominio de la función al igual que el ejemplo 1 *es todos los números reales, ya que de la misma forma al evaluar cualquier número real, esta nos devuelve valores reales, en este caso el dominio es* $D = (-\infty, \infty)$

Ejemplo 9. *Composición de funciones*

Sea $f(x) = x^3$ *y* $g(x) = 2x^2$ *calcular* $f \circ g$ *y* $g \circ f$

tenemos que $(f \circ g)(x) = f[2x^2] = (2x^2)^3 = 8x^6$*, por otro lado tenemos* $(g \circ f)(x) = g[x^3] = 2(x^3)^2 = 2x^6$

LÍMITES DE UNA FUNCIÓN

La idea y el método de los límites de funciones surgió en el siglo **XIX** como una herreamienta para acceder al entendimiento del cálculo y análisis matemático desde entonces es considerado un elemento escencial de la matemática. En esta parte de la unidad se presentará el desarrollo de los límites de funciones de la siguiente manera: definición de límite, interpretación geométrica, procedimiento para calcular límites, así como los teoremas involucrados.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto, posiblemente, en el mismo punto x_0. Imaginemos que tomamos valores x, que se acercan cada vez más a x_0. Nos fijamos en los valores que toma la función $f(x)$ en estos puntos. Si estos valores, $f(x)$, se acercan a un punto L cuando x es suficientemente próximo a x_0, decimos que f se aproxima al límite L cuando x se acerca a x_0, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

el cual se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L". En esencia, la definición afirma que los valores de $f(x)$ están cerca del número L siempre que x está cerca de x_0 (por cualesquiera de los lados de x_0). Esta definición es "informal" pues no damos una regla específica para determinar qué tanto es estar "suficientemente próximo" o "estar cerca" a x_0 su significado depende del contexto. Para un mecánico que fabrica un pistón, muy cercano significa milésimas de pulgada. Para un astrónomo que estudia las galaxias distantes, cerca significa algunos miles de años luz.

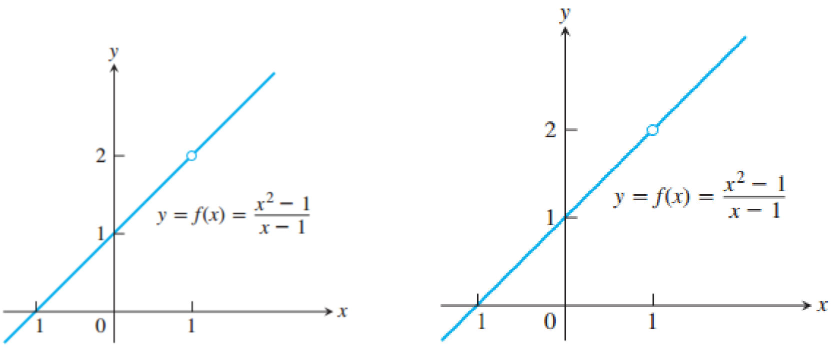
A pesar de ello, la definición es lo bastante clara para permitirnos reconocer y evaluar límites de funciones específicas; no obstante, cuando probemos teoremas relacionados con límites, necesitaremos una definición más precisa.

Ejemplo 10. *¿ Cómo se comporta la función*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

cerca de $x = 1$?

La fórmula dada define a f para todos los números reales x, excepto $x \neq 1$ (no es posible dividir entre cero). Podemos simplificar la fórmula factorizando el numerador y eliminando



(a) $f(x)$ (b) $x + 1$

Figura 1.6: La gráfica de f es identica a la recta $x + 1$ excepto en el punto $x = 1$, donde f no está definida

los factores comunes:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \quad \textit{para } x \neq 1$$

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad x \neq 1$
9	1.9
1.1	2.1
.99	1.99
1.01	2.01
.999	1.999
1.001	2.001
.999999	1.999999
1.000001	2.0000001

Cuadro 1.1: Valores que toma $f(x)$ cerca de $x = 1$

Por lo tanto, la gráfica de f es la recta $y = x + 1$ sin el punto $(1, 2)$, ver figura 1,6. se indica dicho punto eliminado mediante un círculo vacio o "hueco". Aun cuando $f(1)$ no está definida, es claro que podemos determinar el valor de $f(x)$ tan cerca como queramos de 2, eligiendo un valor de x lo suficientemente cercano a 1, en este caso decimos que $f(x)$ se aproxima a 2 a medida que x se aproxima a 1, en otras palabras que el límite de $f(x)$ es 2 cuando x tiende a 1. ver Cuadro 1.1.

Ejemplo 11. *El valor del límite no depende de cómo se define la función en el punto x_0.*

En la figura 1.7, la función $f(x)$ tiene límite igual a 2 cuando $x \longrightarrow 1$ a apesar de que $f(x)$ no está definida en $x = 1$. La función $g(x)$ tiene límite igual 2 a medida que $x \longrightarrow 1$ aún cuando $2 \neq g(1)$. La función $h(x)$ es la única cuyo límite es $x \longrightarrow 1$ igual a su valor en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} h(x) = h(1) = 2$$

ver la figura 1.7 , que muestra el comportamiento de las distintas funciones y la existencia del límite en todas.

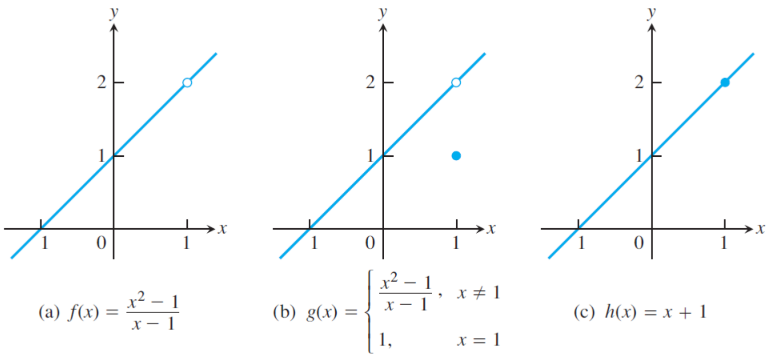


Figura 1.7: Los límites de $f(x), g(x)$ y $h(x)$ son iguales a 2 conforme x se acerca a 1. Sin embargo, solamente $h(x)$ tiene el mismo valor de la función que su límite en el punto $x = 1$.

Ahora que hemos revisado ejemplos y entendemos un poco mejor el concepto de límite habiendo trabajado intuitivamente a partir de su definición informal, concentraremos nuestra atención en su definición precisa. Para ello, reemplazaremos las frases vagas como "es suficientemente próximo a" que utilizamos en la definición informal, con condiciones específicas que pueden aplicarse a cualquier ejemplo particular.

Definición 4. *Se dice que una función $f(x)$ tiene como límite a L en el punto x_0 o que su límite en x_0 es L y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

cuando para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

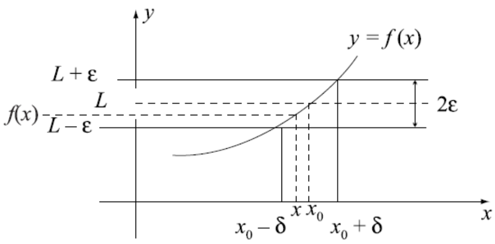


Figura 1.8: Relación entre ϵ y δ

La definición nos dice es que el limite de una función existe cerca del punto x_0 si para cada número ϵ positivo que de, existe otro número positivo δ "que depende de ϵ" tal que al aplicarle f a cada elemento contenido dentro del intervalo con centro en x_0 y de radio δ "diametro 2δ" este caerá siempre en intervalo de centro L y radio ϵ "diametro 2ϵ"

Ejemplo 12. *Uso de la definición formal*

Probar que el límite de la función $f(x) = x$ cuando x tiene a x_0 es x_0, en otras palabras probar que:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

Sea $\epsilon > 0$ dado. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{implique} \quad |x - x_0| < \epsilon$$

La implicación será válida si δ es igual a ϵ o a cualquier número positivo menor, esto prueba que $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, ver figura 1.9.

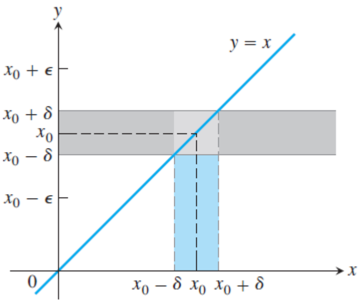


Figura 1.9: Para la funcón $f(x) = x$ encontramos que $0 < |x - x_0| < \delta$ garantiza que $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \epsilon$ siempre y cuando $\delta \leq \epsilon$

Con el resultado que acabamos de mostrar y con el siguiente teorema, podremos realizar el cálculo de límites de manera más sencilla.

Leyes de los límites

El teorema siguiente nos indica cómo calcular límites de funciones que son combinaciones aritméticas de otras cuyos límites ya se conocen.
Teorema 1.1. *Si L, M, c y k son números reales y*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \lim_{x \to c} g(x) = M \quad \textit{entonces}$$

- *Regla de la suma*
$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$$
- *Regla de la diferencia*
$$\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$$
- *Regla del producto*
$$\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$
- *Regla del multiplo constante*
$$\lim_{x \to c} (k \cdot g(x)) = L \cdot M$$
- *Regla del cociente, si $M \neq 0$*
$$\lim_{x \to c} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$$
- *Regla de la potencia, si r y s son dos enteros sin factores comunes y si $s \neq 0$*
$$\lim_{x \to c} (f(x)^{\frac{r}{s}}) = L^{\frac{r}{s}}$$

Ejemplo 13. *Uso de las leyes de los límites.*

$$1.-\lim_{x\to 1}(x^3+4x^2-3) \qquad 2.-\lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^2-1}{x^2+5} \qquad 3.-\lim_{x\to 2}\sqrt{4x^2-3} \qquad 4.-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

Para 1.– *tenemos que* $\lim_{x\to 1}(x^3+4x^2-3)=\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}4x^2-\lim_{x\to 1}3=(1)^3+4(1)-3=1+4-3=2$

Para 2.– *tenemos que* $\lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^2-1}{x^2+5}=\frac{\lim_{x\to 2}x^4+\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}5}=\frac{(2)^4+(2)^2-1}{(2)^2+5}=\frac{16+4-1}{4+5}=\frac{19}{9}$

Para 3.– *tenemos que* $\lim_{x\to 2}\sqrt{\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}3}=\sqrt{4(2)^2-3}=\sqrt{16-3}=\sqrt{13}$

Para 4.– *tratariamos de usar la regla del cociente con* $f(x)=1$ *y* $g(x)=x$, *el problema es que* $\lim_{x\to 0}x=0$, *por lo cual no podemos usar está regla, como veremos más adelante. Cuando se hace la aproximación a 0 la función* $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ *toma valores negativos muy grandes y valores positivos muy grandes "no acotados" que dependen por donde se haga la aproximación, por lo tanto el límite no existe.*

Dos consecuencias de los teoremas aneteriores simplifican aún más la tarea de calcular límites de funciones polinomiales y funciones racionales. **Para evaluar el límite de una función polinomial cuando x se aproxima a c, todo lo que tenemos que hacer es sustituir x por c en la fórmula de la función** esto se debe a que estas funciones son continuas, propiedad que se discutirá más adelante. **Para evaluar el límite de una función racional cuando x se aproxima a un punto c cuyo denominador es distinto de cero, sustituimos x por c en la fórmula de la función**.

Teorema 1.2. *Los límites de las funciones polinomiales pueden econtrarse por sustitución, esto es, si*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$$

entonces

$$\lim_{x\to c}P(x)=P(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+...+a_0$$

Teorema 1.3. *Los límites de las funciones racionales pueden encontrarse por sustitución si el límite del denominador es distinto de cero, esto es, si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales y $Q(x)\neq 0$ entonces*

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(c)}{Q(c)}$$

El teorema anterior para funciones racionales es aplicable únicamente si el denominador de la función racional es distinto de cero en el punto límite c. Si el denominador es igual a cero, eliminar los factores comunes en el numerador y el denominador puede reducir la fracción de manera que ésta ya no sea igual a cero en c. Si esto ocurre, es posible encontrar el límite por sustitución en la fracción simplificada.

Ejemplo 14. *Eliminación del factor común*
calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$$

Si sustituyeramos el valor de 1 en el límite obtendriamos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(1)^2+1-2}{(1)^2-1}=\frac{1+1-2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

recordemos que no podemos divir entre cero, por lo tanto busquemos la manera de factorizar el denominador y el numerador, para ver si se puede cancelar terminos comunes y así poder evaluar el límite, así

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\frac{(x+2)}{x}$$

entonces

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

Nota Si al sustituir los límites en un cociente de polinomios nos da $0/0$ (es indispensable que tanto en el numerador como en el denominador dé 0) es posible factorizar y reducir la ecuación para calcular el límite.

Límites laterales

Ahora veremos una condición para que el límite de una función exista, con base en los límites laterales de la función.

Definición 5. *El límite por la derecha de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a c, es el valor al que tiende la función para puntos próximos mayores que c, digamos L, para expresar el límite por la izquierda se escribe de la siguiente forma*

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=L$$

El límite por la izquierda de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a c, es el valor al que tiende la función para puntos próximos menores que c, digamos M, para expresar el límite por la izquierda se escribe de la siguiente forma

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=M$$

En la figura 1.10 podemos ver la representación gráfica de los límites laterales.

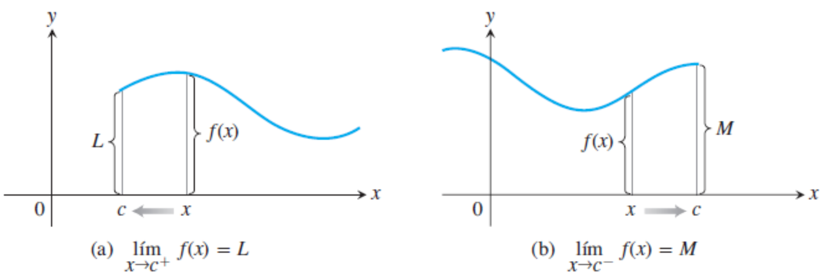


Figura 1.10: Límite lateral derecho e izquierdo de la función f

La relación entre el límite y los límites laterelas de una función f es:

Teorema 1.4. *El límite de una función $y = f(x)$ existe en un punto x_0 si y sólo si existen los límites laterales, izquierdo y derecho y además estos son iguales. esto es:*

$$\lim_{x \to c} f(x) = A \quad \textit{si y solo si} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = A$$

Ejemplo 15. *Calcule los límites laterales de la siguiente función*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Para calcular el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, hay que estudiar los valores que toman las imágenes de puntos próximos a 0. De lo anterior se deduce que: para valores próximos y menores que 0, la función toma valores cada vez menores, por lo tanto

$$\lim_{x \to o^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Asi mismo, para valores próximos mayores que 0, la función toma valores cada vez mayores, por lo tanto

$$\lim_{x \to o^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Lo que podemos decir acerca del límite de la función es que no existe en 0.

veamos un ejemplo más

Ejemplo 16. *Calcule los límites laterales de la siguiente función cuando $x \to 2$*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

Si x toma valores menores que 2, los valores que la función toma son $f(x) = x^2$, por lo que el límite lateral izquierdo es

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

si x toma valores mayores que 2, los valores que la función toma son $f(x) = 2$, por lo que el límite laterla derecho es

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

Nota importante *En el ejemplo que acabamos de ver, es de hacerse notar que como se definió la funcón podríamos cometer el error de decir que el límite es 3, sin embargo recordemos que el límite de una función en un punto x_0 no toma en cuenta como se define la función en este punto, es decir, en este caso no importa si el punto x_0 está en el dominio o no, ni tampoco importa que valor tome en ese punto, lo que el límite de una función tiene realmente en consideración es que pasa cerca de ese punto, es decir, como es que se comporta la función alrededor de x_0.*

En este caso, los límites laterales son diferentes por lo cual podemos afirmar que la función no tiene límite o que el límite no existe.

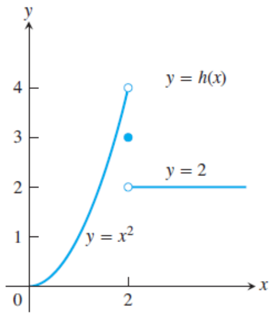


Figura 1.11: Función del ejemplo anterior

Límites finitos cuando la variable dependiente tiende a infinito

El símbolo que desina infinito ∞ no representa un número real. Lo que usamos para describir el comportamiento de una función cuando los valores sobrepasan, en su dominio o rango, cualesquiera cotas finitas. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ está definida para toda $x \neq 0$. Cundo x es positiva y se vuelve muy grande, el valor de la función $\frac{1}{x}$ se hace cada vez más pequeño. Cuando x es negativo y su magnitud se vuelve cada vez más grande , nuevamente el valor de $\frac{1}{x}$ se hace paqueño. Para resumir estas observaciones, diremos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene límite 0 cuando $x \to \pm\infty$. A continuación se da la definición exacta.

Definición 6. *Límite cuando x se aproxima a ∞*

Decimos que $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende a infinito , y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un número M correspondiente tal que para toda x

$$x > M \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Análogamente decimos que $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende a menos infinito , y escribimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un número N correspondiente tal que para toda x

$$x < N \quad \textit{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Intuitivamente, $\lim_{x\to\infty} = L$ si cuando x se aleja cada vez más del origen en dirección positiva, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L. De manera similar $\lim_{x\to-\infty} = L$ si cuando x se aleja cada vez más del origen en dirección negativa, $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L. Al igual que los límites usales tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Si L, M, c y k son números reales y*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \qquad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M \quad \textit{entonces}$$

- *Regla de la suma*
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+g(x)) = L+M$$
- *Regla de la diferencia*
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x)) = L-M$$
- *Regla del producto*
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$$
- *Regla del multiplo constante*
$$\lim_{x\to\pm\infty}(k\cdot g(x)) = L\cdot M$$
- *Regla del cociente, si $M \neq 0$*
$$\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$$
- *Regla de la potencia, si r y s son dos enteros sin factores comunes y si $s \neq 0$*
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)^{\frac{r}{s}}) = L^{\frac{r}{s}}$$

Ejemplo 17. *Calcular los siguientes límites*

$$1.-\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) \qquad 2.-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

$1.-\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 5+0 = 5$

$2.-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{x^2}\right) = \pi\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \pi\cdot 0\cdot 0 = 0$

Límites al infinito de funciones racionales

Para determinar el límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$, podemos dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x en el denominador. Lo que pase después dependerá de los grados de los polinomios involucrados. En general se tiene lo siguiente.

Proposición 1. *Límite de una función racional*

El límite de una función cuando $x \to \infty$ es igual al límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, si:

$$P(x = a_o + a_1x + ... + a_nx^n \quad y \quad Q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$$

Entonces
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_o + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

El valor del límite depende del valor que tenga n y m

- *Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, esto es $n > m$, el límite es, $+\infty$ si $\frac{a_n}{b_m} > 0$ o $-\infty$ si, $\frac{a_n}{b_m} < 0$*
- *Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador, esto es $n = m$, el limite es $\frac{a_n}{b_m}$*
- *$n < m$ el límite es 0*

Ejemplo 18. *Veamos la aplicación de la proposición de arriba*

- *El numerador y el denominador tienen el mismo grado*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

- *El grado del denominador es mayor que el grado del numerador*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{11x}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{11}{2x^2}=0$$

- *El grado del numerador es mayor que el grado del denominaor*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-52}{-x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1}=-\infty$$

Ejercicios resueltos

En cada uno de los siguientes ejercicios determina el límite correspondiente, cuando la variable tiende al valor que se índica

$1.-\lim_{x\to 3}(2x^2+1)$ $\quad 2.-\lim_{x\to 2}\frac{3x-5}{x^2+1}$ $\quad 3.-\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ $\quad 4.-\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{x}$ $\quad 5.-\lim_{\theta\to 0}\frac{sen(\theta)}{tan(\theta)}$

$6.-\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}$ $\quad 7.-\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-7}{x^2-x+1}$ $\quad 8.-\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}$

Solución

1.- sustituyendo el valor de la variable en la funcíon directamente se tiene

$$\lim_{x\to 3}(2x+1)=2(3)^2+1=2(9)+1=19$$

2.- sustituyendo el valor de la variable en la funcíon directamente se tiene

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-5}{x^2+1}=\frac{3(2)-5}{(2)^2+1}=\frac{6-5}{4+1}=\frac{1}{5}$$

3.- observe que el punto $x_0=1$ no pertenece al dominio de la función, ya que cuando $x=1$ el denominador de la función se vuelve 0 y no tenemos permitido dividir por 0, no obstante a esa observación, podemos preguntarnos como se comporta la función cerca de $x_0=1$, ahora bien, considerando la identidad algebraica $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$, podemos escribir

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=(1)^2+1+1=3$$

4.- observe que el punto $x_0 = 0$ no pertenece al dominio de la función, ya que cuando $x = 0$ el denominador de la función se vuelve 0 y no tenemos permitido dividir por 0, no obstante a esa observación, podemos preguntarnos como se comporta la función cerca de $x_0 = 0$, si factorizamos el numerador tenemos $x(3x - 1)$; luego, sustituyendo tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(3x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(3x - 1) = 3(0) - 1 = 0 - 1 = -1$$

5.- sustituyendo el valor al que tiende θ en la función se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(0)}{tan(0)} = \frac{0}{0}$$

como se observa, al sustituir directamente al valor que tiende el ángulo la función se indefine al quedar un cociente de cero entre cero, por lo que mediante identidades trigonométricas se intentará encontrar el límite de la funcíon, si es que tiene, de trigonometría elemnetal se tiene que $tan(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$, entonces sustituyendo en la expresión original tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(\theta)}{tan(\theta)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(\theta)}{\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen(\theta)}{1}}{\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(\theta)\cdot \cos(\theta)}{sen(\theta)} = \lim_{x\to 0} cos(\theta) = cos(0) = 1$$

Que es el valor de límite de la función

6.- observe que el punto $x_0 = 0$ no pertenece al dominio de la función, ya que cuando $x = 0$ el denominador de la función se vuelve 0 y no tenemos permitido dividir por 0, no obstante a esa observación, podemos preguntarnos como se comporta la función cerca de $x_0 = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

este resultado es debido a que cada vez que nos acercamos a 0 por la izquierda, es decir por números negativos, el cociente siempre será 1; el signo negativo, tiene que ver con el denominador, ya que el denominador siempre será positivo.

7.- recordemos que el li'mite de una función racional cuando $x \to \infty$ es igual al límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador, así

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 7}{x^2 - x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

esto es debido a que el grado del númerado es mayor

8.- la función $\frac{7}{x}$ es racional, por lo tanto le podemos aplicar el teorema de límites de funciones racionales, haciendo $P(x) = 1$ y $Q(x) = 7x$, notemos que el grado del denominador es mayor que el del númerador, por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7}{x} = 0$$

CONTINUIDAD

Cuando se dibujan los valores de una función, ya sea generados en un laboratorio o recopilados en el campo, es frecuente que los puntos se unan mediante una curva continua para mostrar los valores de la función en los tiempos que no se midieron. Al hacerlo, suponemos que estamos trabajando con una función continua, de manera que los resultados varían de forma continua de acuerdo con los datos, en lugar de saltar de un valor a otro sin tomar en cuenta los valores intermedios. El límite de una función continua cuando x se aproxima a c puede encontrarse con sólo calcular el valor de la función en c.

Cualquier función $y = f(x)$ cuya gráfica pueda trazarse sobre su dominio con un movimiento ininterrumpido, es decir, sin levantar el lápiz de la hoja de papel, es un ejemplo de función continua. En esta sección investigaremos con más precisión qué significa que una función sea continua. También estudiaremos las propiedades de las funciones continuas y veremos que muchas de las funciones presentadas en la sección anterior son continuas.

Ejemplo 19. *Continuidad en un punto*

Encontrar los puntos en los que la función f de la figura 1.12 es continua, y los puntos en los que es discontinua.

La función f es continua en todos los puntos de su dominio $[0, 4]$, excepto en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$. En estos puntos de la gráfica se dan rupturas. Observe la relación entre el límite de f y el valor de f en cada punto del dominio de la función.

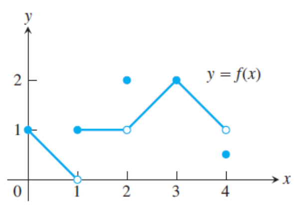


Figura 1.12: Función del ejemplo anterior

Ahora presentamos una definición matemática formal de los requerimientos para que la trayectoria de una función sea continua en un punto y en un intervalo. Asimismo, conoceremos operaciones que se pueden realizar con funciones continuas.

Definición 7. ***Continuidad:*** *Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si cumple las siguientes condiciones.*

- *La función debe estar definida en x_0, es decir debe existir $f(x_0)$*
- *Debe existir el límite de la función cuando $x \to x_0$*
- *Los valores de las condiciones anteriores deben coincidir, esto es*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Por lo tanto lo que se puede deducir de lo anterior es que una función $f(x)$ es continua si y solo si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, si alguna de las tres condiciones anteriores no se cumple entonces la función no es continua en x_0.

Ejemplo 20. *Determina si la función $f(x) = x^3 + 3$ es continua en $x_0 = 0$*

- *Al evaluar la función en $f(x_0 = 0)$ tenemos $f(0) = (0)^3 + 3 = 3$, por tanto está definida.*
- *al calcular el límite cuando x tiende a 0 tenemos:* $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 + 3 = (0)^3 + 3 = 3$.
- *por lo tanto tenemos que* $\lim_{x \to 0} f(x) = f(x_0) = 3$.

  De esto podemos concluir que la función es continua en $x_0 = 0$

Ejemplo 21. *Determina si la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es continua en $x_0 = 0$*

evaluemos la función en 0, esto es $f(x_0) = f(0) = \sqrt{(0)^2 - 1} = \sqrt{0 - 1} = \sqrt{-1}$

por lo tanto está función no es continua en $x_0 = 0$, ya que no esta definida en este punto, por otro lado esto lo podríamos haber visto desde un principio, es decir el hecho de que no sea continua en este punto es debido a que este punto $x_0 = 0$ no está en el dominio de la función $f(x)$

.

Definición 8. *Cuando una función es continua en todos los puntos de un intervalo (a, b) se dice que una función es continua en el intervalo (a, b).*

.

Acontinuación mostraremos ejemplos importantes, ya que apartir de ellos podremos decidir si funciones con expresiones más complicadas son continuas
Ejemplo 22. *La función constante $f(x) = k$ es continua en todos los puntos, ya que*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k = f(c)$$

Ejemplo 23. *Continuidad de la función identidad*

La función $f(x) = x$ *es continua en todo valor de* x *es decir en todos los números reales, por que es un polinomio de grado 1, por tanto es continua en cada intervalo.*

Ejemplo 24. *Continuidad de la función valor absoluto*

La función $f(x) = |x|$ *es continua en todo valor de* x*, si* $x > 0$*, tenemos que* $f(x) = x$*, que es un polinomio de grado 1. Si* $x < 0$*, tenemos que* $f(x) = -x$*, otro polinomio de grado 1, finalmente en el origen se tiene que* $\lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0$*, por tanto es continua en cada intervalo figura 1.13.*

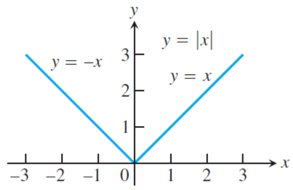


Figura 1.13: Función valor absoluto

NOTA Una función continua es aquella que es continua en todos los puntos de su dominio, aunque no es necesario que lo sea en todos los intervalos. Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$ no es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, ya que en el intervalo $[-1, 1]$ está contenido el 0 y la función no está definida ahí; pero sí lo es en su dominio, es decir, es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, ver figura 1.14

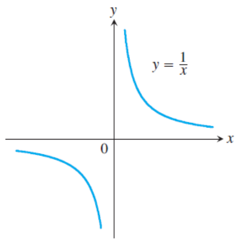


Figura 1.14: función $f(x) = \frac{1}{x}$, que es continua en todo su dominio

Teorema 1.6. *Propiedades de las funciones continuas:*

Si las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$ *son ambas continuas en el dominio* D *y si* $c \in D$ *entonces las siguientes combinaciones son continuas en* $x = c$*:*

- *la suma:* $f(c) + g(c)$
- *la resta:* $f(c) - g(c)$
- *el producto:* $f(c) \cdot g(c)$
- *multiplos constantes:* $k \cdot f(c)$
- *cocientes:* $\frac{f(c)}{f(c)}$ *siempre que* $g(c) \neq 0$

- *potencias:* $f(c)^{\frac{r}{s}}$ *siempre y cuando esté definida en un intervalo abierto que contenga a c, donde r y s son enteros*

Ejemplo 25. *Las funciones polinomiales y racionales son continuas*

Cualquier función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ *es continua por que* $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$*, de acuerdo al un teorema de la sección anterior.*

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, entonces la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *es continua siempre que esté definida* $Q(c) \neq 0$*, según un teorema de la sección anterior.*

Todas las composiciones de funciones continuas son continuas. La idea es que si $f(x)$ es continua en $x = c$ y $g(x)$ es continua en $x = f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en $x = c$. En este caso, el límite cuando $x \to c$ es $g(f(c))$.

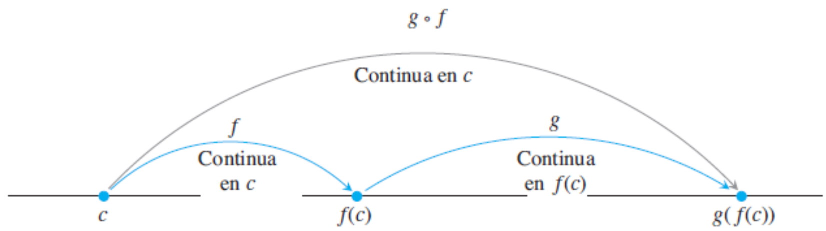


Figura 1.15: Diagrama de composición de funciones

Teorema 1.7. *Composición de funciones*

Si f es continua en c y g es continua en $f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en c

Ejemplo 26. *Probar que las siguientes funciones son continuas en su dominio*

$$1. - y = \sqrt{x^2 - 2x - 5} \qquad 2. - y = \left|\frac{x+1}{x}\right|$$

1.- La función raíz cuadrada es continua en $[0, \infty]$ *ya que es una potencia racional de la función identidad "x" que es continua por ser un polinomio de grado 1. En consecuencia, la función dada es la composicón de la función polinomial* $f(x) = x^2 - 2x - 5$ *con la función raíz cuadrada* $g(t) = \sqrt{t}$ *y por tanto continua.*

2.- La función $\frac{x+1}{x}$ *es continua en todos los números reales excepto en* $x = 0$*, en consecuencia la función dada es la composición de la función racional ya mencionada y la función valor absoluto que es continua, por tanto la composición es continua.*

Ejemplo 27. *Dadas las funciones* $f(x) = x^2 - 1$ *y la función* $g(x) = \frac{1}{x}$*, muestrra en que puntos es discontinua la composión de funciones* $(g \circ f)(x)$

Observemos que para la función $f(x) = x^2 - 1$ *no existe discontinuidad, ya que es un polinomio que es continuo en todos los números reales, por otro lado la funcíon* $g(x) = \frac{1}{x}$ *en el punto* $x = 0$ *no está definida, por tanto la función* $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2-1}$ *es discontinua en los puntos donde el denominador se hace cero, ya que ahí la función no estÃ¡ definida, esto sucede en los puntos* $x_0 = 1$ *y* $x_1 = -1$.

Función continua definida por partes
Una función continua definida por partes satisface que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Ejemplo 28. *Decidir si la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

es continua en 0

por un lado el $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$*, por otro lado* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$*, es decir* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$*, por tanto la función no es continua en 0.*

Existen diferentes tipos de discontinuidades, las estudiamos enseguida

Definición 9. *Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto* x_0 *cuando extendiendo el límite de la función en esté, no coincide con el valor que toma la función en el punto o cuqando no existe, diremos que* x_0 *es un punto de discontinuidad evitable si y sólo si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \quad o \quad no \quad existe \quad f(x_0)$$

Nota Si detectamos una discontinuidad evitable x_0 en una función $f(x)$, podemos redifinir la función en x_0 como el límite de la función cerca de x_0, con ello podremos hacer la función continua.

Ejemplo 29. *Realizar un estudio de la función*

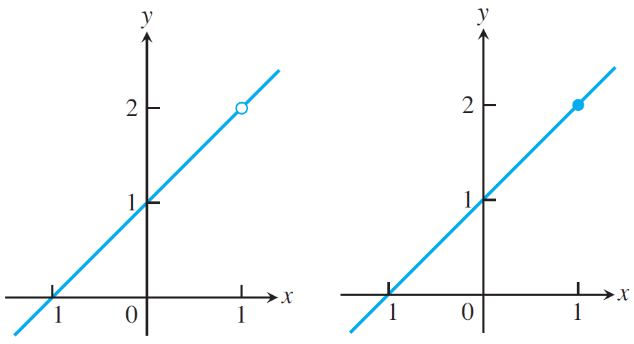
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Empezemos calculando el dominio de la función, vemos que esta función está definida en todos los valores reales excepto en el punto $x = 1$*, es decir en este punto el valor de la función no existe, notemos también que el límite alrededor del punto* $x = 1$ *existe y es igual a 2, por tanto estamos ante una discontinuidad evitable, ahora notemos que la función la podemos reescribir como*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad si \quad x \neq 1$$

(ver figura en la parte superior) por tanto, podemos redifinir la función para que esta sea continua en todos los reales, esto es

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$



(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \quad si \quad x \neq 1$ (b) $g(x)$

Figura 1.16: La gráfica de f es identica a la recta $x+1$ excepto en el punto $x=1$, donde f no está definida

Definición 10. *Una función presenta una discontinuidad inevitable en un punto x_0, cuando o bien no existe algún punto límite lateral, o bien los límites laterales existen pero son distintos de c, en cuyo caso no existe el límite, entonces diremos que x_0 es un punto de discontinuidad enevitable si y sólo si*

$$\left\{ \begin{array}{c} 1.-\textit{No existe } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \textit{ o no existe } \lim_{x\to x_0^+} f(x) \\ o \\ 2.- \textit{ Existe } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \textit{ y existe } \lim_{x\to x_0^+} f(x) \textit{ pero} \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 30. *Discontinuidad inevitable*

La función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right.$$

posee una discontinuidad inevitable ya que por un lado el $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$ *y* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$, *es decir* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

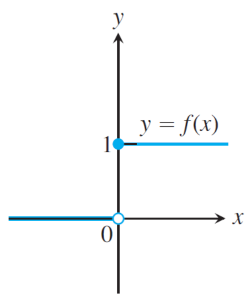


Figura 1.17: Discontinuidad inevitable de $f(x)$ en $x=0$

El siguiente resultado intuitivamente, afirma que, si una función es continua en un intervalo, entonces toma todos los valores intermedios comprendidos entre los extremos del intervalo.

Teorema 1.8. ***(Del valor intermedio)*** *si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y y_0 es un número real cualquiera que este dentro los valores de $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un valor c que pertenece al intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = y_0$*

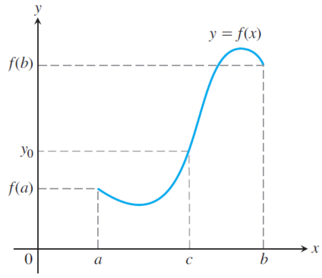


Figura 1.18: Geométricamente, el teorema del valor intermedio dice que cualquier recta horizontal $y = y_0$ que cruza el eje y entre los números $f(a)$ y $f(b)$ cruzará la curva $y = f(x)$ al menos una vez sobre el intervalo $[a, b]$

Ejemplo 31. *Dada la función definida por*

$$f(x) = x^2 - x - 8 \quad en \quad [-5, 5]$$

verificar el teorema del valor intermedio para $c = 1$

Notemos que es un polinomio, por tanto esta definido para cada valor real, y por tanto para cada intervalo, por tanto la función existe en los extremos del intervalo, esto es

en $x_0 = -5$: $f(x_0) = (-5)^2 - (-5) - 8 = 22$ en $x_0 = 5$: $f(x_0) = (5)^2 - (5) - 8 = 12$, ahora evaluemos la función en c para el cual la función obtiene un valor de 1. por lo que tenemos lo siguiente

$$f(c) = c^2 - c - 8 = 1$$

que es equivalente a

$$c^2 - c - 9 = 0$$

que al resolverlo obtenemos

$$c_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Los dos valores son vÃ¡lidos porque se encuentran dentro del intervalo $[-5, 5]$. Este ejemplo nos muestra que el valor de $f(x_0)$ no necesariamente es único.

Ejercicios resueltos

Resuelve lo siguiente:

1.- Verificar si la siguiente función definida por partes es continua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

2.- Verifica si la función $f(x) = \frac{x-8}{|x+8|}$ es continua

3.- Verifica si la función $f(x) = |2x+4|$ es continua en 0

Solución

1.- Tenemos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$, además $f(0) = 0$, por tanto la funcIón es continua en todos lo valores.

2.- Tenemos que $f(-8)$ no existe, por lo tanto es discontinua.

3.- Tenemos que $f(0) = |0+4| = |4| = 4$, ahora bien $\lim_{x\to 0} |2x+4| = |2(0)+4| = |4| = 4$, en consecuencia $f(x)$ es continua en 0.

UNIDAD 2

DERIVADAS

Tangentes

La determinación de una tangente a una curva fue el problema matemático dominante a principios del siglo $XVII$. En óptica, la tangente determina el ángulo por el que un rayo de luz atraviesa una lente curva. En mecánica, la tangente determina la dirección del movimiento de un cuerpo a lo largo de todos los puntos de una trayectoria. En geometrá, las tangentes a dos curvas en un punto de intersección determinan los ángulos en los que éstas se cortan. Para encontrar una tangente a la gráfica de una función arbitraria $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, f(x_0))$, usamos el mismo proceso dinámico. Calculamos la pendiente de la secante a través de P y un punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Después investigamos el límite de la pendiente cuando $h \to 0$. Si el límite existe, lo llamamos la pendiente de la curva en P, y definimos la tangente en P como la recta que pasa por P y tiene esta pendiente.

Para definir la tangencia para gráficas de funciones generales, necesitamos una aproximación dinámica que tome en cuenta el comportamiento de las secantes que pasan por P y los puntos cercanos Q, moviendose hacia P a lo largo de la curva (ver la figura 2,1). Tal aproximación consistiría en lo siguiente

- Empezamos con lo que podemos calcular, a saber, la pendiente de la secante PQ.
- Investigamos el límite de la pendiente de la secante cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva.
- Si el límite existe, lo tomamos como la pendiente de la curva en P, y definimos la tangente a la curva en P como la recta que pasa por P con esta pendiente.

Ahora que entendemos gráficamente lo que es la pendiente a una curva, veamos la definición precisa

Definición 11. *La pendiente de la curva $y = f(x)$, en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es el número*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

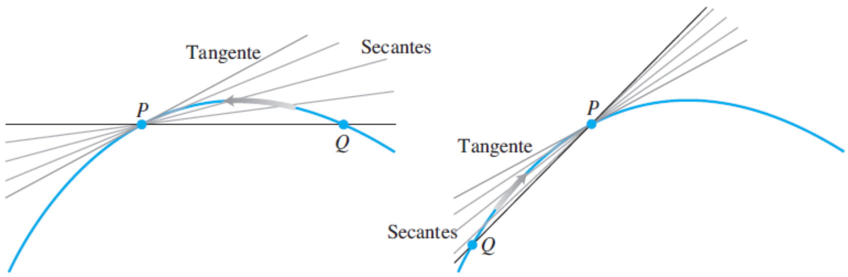


Figura 2.1: Aproximación dinámica de la tangente. La tangente a la curva en P es la recta que pasa por P cuya pendiente es el límite de las pendientes de las secantes cuando $Q \to P$ por ambos lados.

(siempre y cuando el límite exista) La recta tangente en P es la recta que posa por P con esta pendiente, es decir ***la recta tangente es*** $\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \mathbf{f}(\mathbf{x_0})$

Ejemplo 32. *Calcular la pendiente de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x = a$ y su recta tangente en el mismo punt a*

Aqui $f(x) = \frac{1}{x}$. La pendiente en $(a, \frac{1}{a})$ es por definición

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{ha(a+h)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

Ahora la recta tangente en el punto $(a, f(a)) = (a, \frac{1}{a})$ es

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$$

A la expresión

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

se le llama cociente de diferencias de f en x_0 con incremento h. , a dicho límite se le llama la **derivada** de f en x_0. Si interpretamos el cociente de diferencias como la pendiente de la secante, **la derivada da la pendiente de la curva y de la recta tangente en el punto** $x = x_0$. Si interpretamos el cociente de diferencias como una razón de cambio promedio, como hicimos en la unidad anterior, la derivada da la razón de cambio de la función respecto de x en el punto $x = x_0$. Desde el punto de vista del cálculo, la derivada es uno de los dos objetos matemáticos más importantes.

Derivada

Las derivadas se usan para calcular la velocidad, la aceleración, estimar la razón de propagación de una enfermedad, fijar niveles de producción de manera que pueda maximizarse la eficiencia, encontrar las mejores dimensiones para una lata cilíndrica, averiguar la antigÃ$\frac{1}{4}$edad de un objeto prehistórico, y para muchas otras aplicaciones. Desarrollaremos técnicas para calcular derivadas fácilmente, y aprenderemos cómo usarlas para aproximar funciones complicadas.

Recordemos el cociente de diferencias $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, si escribimos $z = x + h$, entonces $h = z - x$ y h se aproxima a 0 si y sólo si z se aproxima a x. Por lo tanto, una definición de la derivada de una función es la siguiente:

Definición 12. *Derivada de una función*
La derivada de la función $f(x)$ con respecto a la variable x, es la función f', cuyo valor en x es

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

siempre y cuando el límite exista

El dominio de f' es el conjunto de puntos del dominio de f para los que existe el límite, y puede ser igual o menor que el dominio de f. Si f' existe en un punto x particular, decimos que f es diferenciable (o que tiene derivada) en x. Si f' existe en todos los puntos del dominio de f, decimos que f es diferenciable.

Ejemplo 33. *Demostrar que la derivada de la recta $y = mx + b$ es su pendiente*

Hagamos $f(x) = mx + b$, entonces

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{(mz+b)-(mx+b)}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{mz-mx}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{m(z-x)}{z-x} =$$

$$\lim_{z\to x} m = m$$

Un último ejemplo
Ejemplo 34. *Encontrar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y su recta tangente en el punto $x = 4$*

Tenemos que

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x})} = \lim_{z\to x} \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

la pendiente de la curva en $x = 4$ es $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, la recta tangente que pasa por el punto $(x_0, f(x_0) = (4, 2)$ es

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2$$

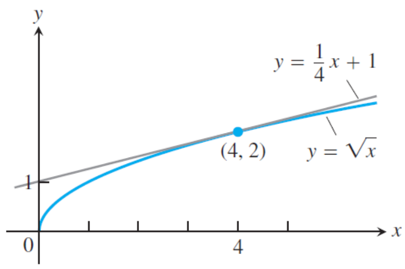


Figura 2.2: La curva $f(x) = \sqrt{x}$ y su recta tangente en el punto $(4, 2)$

Notaciones

Hay muchas maneras de denotar la derivada de una función $y = f(x)$, donde la variable independiente es x y la variable dependiente es y. Algunas de las notaciones alternativas de uso común para la derivada son

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = Df(x) = D_x f(x)$$

Derivadas laterales

Aquí se definirán los criterios para que una función sea o no derivable en un intervalo abierto (finito o infinito), una función $y = f(x)$ es diferenciable si tiene derivada en cada punto del intervalo. Es diferenciable en un intervalo cerrado $[a, b]$ si es diferenciable en el interior de (a, b) y si los límites siguientes existen (conocidos como derivadas por la izquierda y por la derecha)

$$\lim_{z \to a^+} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

$$\lim_{z \to b^-} \frac{f(z) - f(b)}{z - b}$$

Las derivadas por la derecha y por la izquierda pueden definirse en cualquier punto del dominio de la función. La relación usual entre el límite y los límites laterales se cumple para estas derivadas. De acuerdo con el teorema de la unidad anterior una función tiene derivada en un punto, si y sólo sí, tiene derivadas por la derecha y por la izquierda en ese punto, y si estas derivadas laterales son iguales.

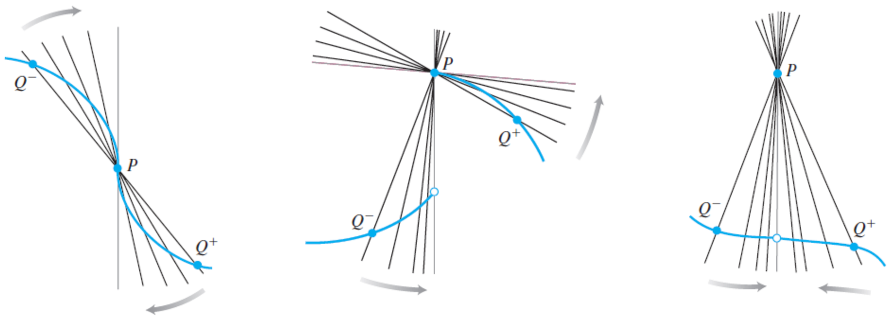
Ejemplo 35. *La función $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$*

No puede haber derivada en el origen, ya que las derivadas laterales difieren en ese punto: Derivada por la derecha de $|x|$ en el punto $x = 0$

$$\lim_{z \to 0^+} \frac{|z| - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0^+} \frac{|z|}{z} = \lim_{z \to 0^+} \frac{z}{z} = \lim_{z \to 0^+} 1 = 1$$

Derivada por la izquierda de $|x|$ en el punto $x = 0$

$$\lim_{z \to 0^-} \frac{|z| - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0^+} \frac{|z|}{z} = \lim_{z \to 0^+} \frac{-z}{z} = \lim_{z \to 0^+} -1 = -1$$



(a) (b)

Figura 2.3

Por tanto, como los límites son diferentes se puede decir que la derivada no existe en el punto $x = 0$

Una función tiene derivada en un punto x_0 si las pendientes de las rectas secantes que pasan por $P(x_0, f(x_0))$ y un punto cercano Q en la gráfica se aproximan al límite conforme Q se acerca a P. Sí las secantes no tienden a una posición límite o se vuelven verticales conforme Q se aproxima a P, la derivada no existe. En consecuencia, la diferenciabilidad se caracteriza por la "suavidad" de la gráfica de f. Una función cuya gráfica no cumpla con esta característica no tendrá derivada en un punto; esto puede deberse a varias razones:

- a) Que la gráfica tenga una tangente vertical en P, dando lugar a que la pendiente de PQ tienda a ∞ por ambos lados, o a $-\infty$, ver a)

- b) Que la gráfica presente una discontinuidad, ver b)

- c) Que la gráfica describa en el punto P una esquina, provocando que las derivadas laterales difieran entre sí, ver c)

- d) Que la gráfica describa en el punto P una cúspide, ocasionando que la pendiente de PQ tienda a ∞ por un lado y a $-\infty$ por el otro, ver d)

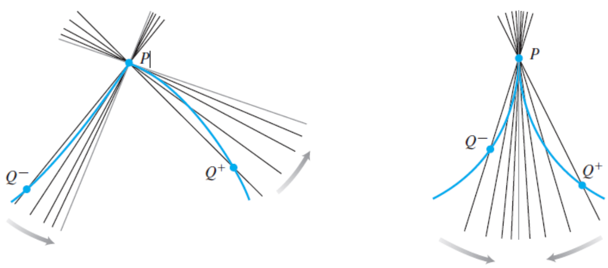


Figura 2.4: Figura de c) a la izquierda y figura de d) a la derecha

Reglas de derivación

En esta sección se abordará el estudio de las reglas para derivar funciones algebraicas; para tal efecto estableceremos fórmulas fundamentales de derivadas, como son la derivada de: funciones constantes, lineales, potencia, constantes por funciones, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Antes de meternos de lleno en esta sección necesitamos definir y ver propiedades de dos funciones muy importantes para el cálculo
Definición 13. *Función e^x*

La función e^x se define como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

La función exponencial tiene como dominio a todos lo números reales, su gráfica siempre es positiva, y satisface que $e^0 = 1$, además si x e y son números reales entonces $e^{x+y} = e^x e^y$.

A partir de la función exponencial podemos definir la función logaritmo natural, la función logaritmo la podemos ver como la función inversa de la funcíon exponencial.
Definición 14. *Función logaritmo natural*

Sí $f(x) = e^x$, la función logaritmo natural se define como

$$f^{-1}(x) = ln(x) \quad es \quad decir \quad e^{ln(x)} = x \quad y \quad ln(e^x) = x$$

la función $ln(x)$ tiene como dominio al intervalo $(0, \infty)$, y tiene las siguientes propiedades $ln(1) = 0$ además si x, r e y son números reales $ln(x + y) = ln(x) + ln(y)$, $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$, $ln(x^r) = rln(x)$.

Tanto la función $ln(x)$ y e^x son elementos de un conjunto de cierto tipo de funciones a las que llaman trascendentes, estas son llamadas así ya que no se pueden expresar como una suma finita de funciones algebraicas. Por otro lado podríamos haber definido a la función logaritmo primero y enseguida definir la exponencial, el único problema es que para definir al logaritmo de la forma que mencionamos necesitamos del cálculo integral , el cual no hemos visto aún, sin embargo ambas definiciones son equivalentes.

Una vez definidas las funciones $ln(x)$ y e^x podemos comenzar con las reglas de derivación

Regla 1. *Derivada de una función constante*

Si f tiene el valor constante $f(x) = c$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}c = 0$$

Regla 2. *Derivada de potencias para enteros positivos*
Si f tiene el valor constante $f(x) = x^n$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Regla 3. *Multiplos constantes*

Si $f(x)$ es una funcíon diferenciable y a es un número real entonces

$$\frac{d}{dx}af(x) = a\frac{d}{dx}f(x) =$$

es decir bajo la derivación si se múltiplica una función por una constante la derivada las respeta

Regla 4. *Derivada de logaritmo natural*

Si $f(x) = ln(x)$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x}$$

Regla 5. *Derivada de la función exponencial*

Si $f(x) = e^x$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Regla 6. *Derivada de a^x*

Si a es un número real fijo, sea $f(x) = a^x$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}a^x = ln(a) \cdot a^x$$

Regla 7. *Derivada de la función $sen(x)$*

Si $f(x) = sen(x)$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}sen(x) = cos(x)$$

Regla 8. *Derivada de la función $cos(x)$*

Si $f(x) = cos(x)$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x)$$

Regla 9. *Derivada de la función $sec(x)(x)$*

Si $f(x) = sec(x)$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}sec(x) = sec(x) \cdot tan(x)$$

Regla 10. *Derivada de la función $csc(x)$*

Si $f(x) = csc(x)$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}csc(x) = csc(x) \cdot cot(x)$$

Regla 11. *Derivada de la función $cot(x)$*

Si $f(x) = cot(x)$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}cot(x) = -csc^2(x)$$

Regla 12. *Derivada de la función $tan(x)$*

Si $f(x) = tan(x)$ entonces

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}tan(x) = sec^2(x)$$

Ejemplo 36. *Hallar las derivadas de las siguientes funciones*

$$1. - f(x) = 6x^2 \qquad 2. - g(x) = 2e^x$$

1.- $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}6x^2 = 6\frac{d}{dx}x^2 = 6 \cdot 2x = 12x$

2.- $\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}2e^x = 2\frac{d}{dx}e^x = 2e^x$

Derivadas de operaciones con funciones

El siguiente teorema no explica como se comportan las operaciones de funciones ante la derivada.
Teorema 2.1. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en el mismo dominio entonces*

- *Derivada de una suma de funciones*

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

- *Derivada de una resta de funciones*

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

- *Derivada de un producto de funciones*

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + \frac{d}{dx}g(x)\cdot f(x)$$

- *Derivada de un cociente de funciones, si $g(x) \neq 0$*

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\cdot \frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

Ejemplo 37. *Uso de las reglas para derivar operaciones de funciones, Si*

$$f(x) = x^2+2, \quad g(x) = 3x^3, \quad l(x) = tan(x), \quad k(x) = e^x$$

calcular

- *1.-* $(f+g)'(x)$
- *2.-* $l'(x)$
- *3.-* $(f-l)'(x)$
- *4.-* $\left(\frac{f}{k}\right)'(x)$
- *5.-* $(l\cdot g)'(x)$
- *6.-* $(l-k)'(x)$

solución

$$1.- \quad (f+g)'(x) = \frac{d}{dx}(x^2+2) + \frac{d}{dx}(3x^3) = (2x) + (9x^2) = 9x^2+2x \qquad .$$

$$2.- \quad (l)'(x) = \frac{d}{dx}tan(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right) = \frac{cos(x)\cdot\frac{d}{dx}sen(x) - sen(x)\cdot\frac{d}{dx}cos(x)}{cos^2(x)} \qquad .$$

$$= \frac{cos(x)cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x)+sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x).$$

$$3.- \quad (f-l)'(x) = \frac{d}{dx}(x^2+2) - \frac{d}{dx}(tan(x)) = (2x) - (sec^2(x)) = 2x - sec^2(x) \qquad .$$

$$4.- \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+2}{e^x}\right) = \frac{e^x\cdot\frac{d}{dx}(x^2+2) - (x^2+2)\cdot\frac{d}{dx}e^x}{(e^x)^2} \qquad .$$

$$= \frac{e^x\cdot 2x - (x^2+2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x\cdot 2x - x^2\cdot e^x + 2e^x}{(e^x)^2} \qquad .$$

$$5.- \quad (l\cdot g)'(x) = \frac{d}{dx}tan(x)\cdot 3x^2 + \frac{d}{dx}3x^3\cdot tan(x) = sec^2(x)\cdot 3x^3 + 9x^2\cdot tan(x) \quad .$$

$$6.- \quad (l\cdot k)'(x) = \frac{d}{dx}tan(x) - \frac{d}{dx}e^x = sec^2(x) - e^x \quad .$$

En el ejercicio 3 usamos las siguientes identidades trigonométricas: $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$, $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ *y finalmente* $\frac{1}{cos(x)} = sec(x)$, *al final de la sección presentamos una tabla de las derivadas más importantes junto con algunas identidades trigonométricas.*

Regla de la cadena

A pesar de contar ya con un número estimable de propiedades para el cálculo de derivadas, hay funciones elementales de las que no se conoce ningún procedimiento para la obtención de su derivada. Para seguir avanzando por este camino es imprescindible conocer una de las propiedades fundamentales y más útiles de la derivación, aunque no se hará su demostración. Se le conoce como derivada de una función compuesta o regla de la cadena.

Teorema 2.2. *Si* $y = f(x)$ *donde* $f(x)$ *es una función derivable en un cierto intervalo; y* $z = g(y)$ *es otra función derivable definida en otro intervalo que contiene a todos los valores (imágenes) de la función* f, *entonces la función compuesta definida por* $(g\circ f)(x) = g[f(x)]$, *es derivable en todo punto* x *del intervalo y se obtiene así:*

$$(g\circ f)'(x) = g'[f(x)]f'(x) \quad es \quad decir \quad \frac{d}{dx}(g\circ f(x)) = \frac{dg(f(x))}{dx}\cdot\frac{df(x)}{dx}$$

Ejemplo 38. *Calcular la derivada de la función* $h(x) = sen^2(x)$

La función $h(x) = sen^2(x)$, *es la composición de las siguientes dos funciones* $f(x) = sen(x)$ *y la función* $g(x) = x^2$, *en efecto:*

$$(g\circ f)(x) = g(sen(x)) = (sen(x))^2 = sen^2(x)$$

Ahora derivemos las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$,

$$f'(x) = cos(x) \quad y \quad g'(x) = 2x$$

procedemos a usar la fórmula

$$\frac{d}{dx}(f\circ g(x)) = \frac{dg(f(x))}{dx}\cdot\frac{df(x)}{dx} = 2(f(x))\cdot cos(x) = 2sen(x)\cdot cos(x)$$

Ejemplo 39. *Calcular la derivada de la función* $h(x) = e^{-x^3}$

La función $h(x) = e^{-x^3}$, *es la composición de las siguientes dos funciones* $f(x) = -x^3$ *y la función* $g(x) = e^x$, *en efecto:*

$$(g\circ f)(x) = g(-x^3) = e^{-x^3}$$

Ahora derivemos las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$,

$$f'(x) = -3x^2 \quad y \quad g'(x) = e^x$$

procedemos a usar la fórmula

$$\frac{d}{dx}(f \circ g(x)) = \frac{dg(f(x))}{dx} \cdot \frac{df(x)}{dx} = e^{(f(x))} \cdot (-3x^2) = -e^{-x^3} \cdot 3x^2$$

Ejemplo 40. *Calcular la derivada de la función* $h(x) = ln(cos(x))$

La función $h(x) = ln(cos(x))$, *es la composición de las siguientes dos funciones* $f(x) = cos(x)$ *y la función* $g(x) = ln(x)$, *en efecto:*

$$(g \circ f)(x) = g(cos(x)) = ln(cos(x))$$

Ahora derivemos las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$,

$$f'(x) = -sen(x) \quad y \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

procedemos a usar la fórmula

$$\frac{d}{dx}(f \circ g(x)) = \frac{dg(f(x))}{dx} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot (-sen(x)) = -\frac{1}{cos(x)} \cdot sen(x)$$

Ejemplo 41. *Calcular la derivada de la función* $h(x) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3$

La función $h(x) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3$, *es la composición de las siguientes dos funciones* $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ *y la función* $g(x) = x^3$, *en efecto:*

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3$$

Ahora derivemos las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$,

$$f'(x) = \frac{x \cdot (2x) - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \quad y \quad g'(x) = 3x^2$$

procedemos a usar la fórmula

$$\frac{d}{dx}(f \circ g(x)) = \frac{dg(f(x))}{dx} \cdot \frac{df(x)}{dx} = 3(f(x))^2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

A continuación daremos algunas reglas para poder calcular algunas derivadas más directamente, suponiendo que intercambiamos la variable original x por una función general $u(x)$
Regla 13. *Sabemos que la derivada de una función* $f(x) = x^m$ *es* $f'(x) = mx^{m-1}$. *Si en lugar de la variable* x *se tuviese una función* $u(x)$, *la derivada de* $u(x)^m$, *aplicando la regla de la cadena, será:*

$$[u(x)^m] = mu(x)^{m-1}u'(x)$$

Para simplificar la notación a partir de ahora se escribirá simplemnte u en lugar de $\mathbf{u(x)}$. *Así, si* $f(x) = u^m$, *su derivada es*

$$f'(x) = (u^m)' = mu^{m-1} \cdot u' = mu^{m-1} \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

Ejemplo 42. *Calcular la derivada de* $f(x) = (x^3 - 5)^4$

hagamos $u(x) = x^3 - 5$, *su derivada es* $u' = 3x^2$ *y en este caso* $m = 4$. *entonces* $f(x)$ *la podemos escribir como* $f(x) = u^4$ *asi*

$$f'(x) = 4u^3u' = 4(x^3 - 5)^3 \cdot 3x^2$$

Ejemplo 43. *Calcular la derivada de* $f(x) = (ln(x))^8$

hagamos $u(x) = ln(x)$, *su derivada es* $u' = \frac{1}{x}$ *y en este caso* $m = 8$. *entonces* $f(x)$ *la podemos escribir como* $f(x) = u^8$ *asi*

$$f'(x) = 8u^7 \cdot u' = 8(ln(x))^7 \cdot \frac{1}{x}$$

Regla 14. *Regla de la cadena para las funciones exponenciales. Si en lugar de* x *se tuviese una función* $u(x)$ *de tal forma que para una función* $f(x) = a^u$ *se tendrá por la regla de la cadena:*

$$f'(x) = (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot ln(a) = ln(a) \cdot a^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

y para y para $g(x) = e^u$ *tenemos*

$$g'(x) = (e^u)' = u' \cdot e^u = e^u \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

Ejemplo 44. *Calcular la derivada de la función*

$$f(x) = 4^{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3}$$

hacemos $u = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3$ *entonces su derivada es* $u' = 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$, *entonces* $f(x)$ *se puede escirbir como* $f(x) = 4^u$ *entonces*

$$f'(x) = (4^u)' = 4^u \cdot ln(4) \cdot u' = 4^{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3} \cdot ln(4) \cdot 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

Ejemplo 45. *Calcular la derivada de la función*

$$f(x) = e^{2x^3}$$

hacemos $u = 2x^3$ *entonces su derivada es* $u' = 6x^2$, *asi* $f(x)$ *se puede escirbir como* $f(x) = e^u$ *entonces*

$$f'(x) = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{2x^3} \cdot 6x^2$$

Regla 15. *Regla de la cadena para el logaritmo natural, Si en la derivada de logaritmo neperiano se sustituye* x *por una función* $u(x)$, *en virtud de la regla de la cadena se tiene que:*

$$f'(x) = (ln(|u|))' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{u}\frac{d(u)}{dx}$$

Ejemplo 46. *Calcular la derivada de la funciíon*

$$f(x) = ln(|tan(x)|)$$

$u = tan(x)$ *entonces su derivada es* $u' = sec^2(x)$, *asi* $f(x)$ *se puede escirbir como* $f(x) = ln(u)$ *entonces*

$$f'(x) = (ln(|u|))' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{tan(x)} \cdot sec^2(x)$$

Regla de la cadena para las funciones trigonométricas.

Si en lugar de x se tuviese una función $u(x)$ en el argumento de las funciones trigonométricas, se tendrá por la regla de la cadena lo siguiente:

Regla 16. *Regla de la cadena para la función $f(x) = sen(u)$*

$$f'(x) = (sen(u))' = u' \cdot cos(u) = cos(u)\frac{d(u)}{dx}$$

Regla 17. *Regla de la cadena para la función $f(x) = cos(u)$*

$$f'(x) = (cos(u))' = u' \cdot sen(u) = -sen(u)\frac{d(u)}{dx}$$

Regla 18. *Regla de la cadena para la función $f(x) = tan(u)$*

$$f'(x) = (tan(u))' = u' \cdot sec^2(u) = sec^2(u)\frac{d(u)}{dx}$$

Regla 19. *Regla de la cadena para la función $f(x) = cot(u)$*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (cot(u))' = -u' \cdot csc^2(u) \\ &= -csc^2(u)\frac{d(u)}{dx} \end{aligned}$$

Regla 20. *Regla de la cadena para la función $f(x) = sec(u)$*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (sec(u))' = u' \cdot sec(u) \cdot tan(x) \\ &= sec(u) \cdot tan(x)\frac{d(u)}{dx} \end{aligned}$$

Regla 21. *Regla de la cadena para la función $f(x) = csc(u)$*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (csc(u))' = -u' \cdot csc(u) \cdot cot(x) \\ &= -csc(u) \cdot cot(x)\frac{d(u)}{dx} \end{aligned}$$

Ejemplo 47. *Calcular la derivada de la función*

$$f(x) = cos(sec(x))$$

hacemos $u = sec(x)$ entonces su derivada es $u' = sec(x) \cdot tan(x)$, asi $f(x)$ se puede escirbir como $f(x) = cos(u)$ entonces

$$f'(x) = (cos(u))' = -sen(u) \cdot u' = -sen(sec(x)) \cdot sec(x) \cdot tan(x)$$

Ejemplo 48. *Calcular la derivada de la función*

$$f(x) = cot(e^x)$$

hacemos $u = e^{x^2}$ entonces su derivada es $u' = 2x \cdot e^{x^2}$, asi $f(x)$ se puede escirbir como $f(x) = cot(u)$ entonces

$$f'(x) = (cot(u))' = -csc^2(u) \cdot u' = -csc^2(e^{x^2}) \cdot 2x \cdot e^{x^2}$$

Aqui usamos la regla de la cadena para derivar la función $u(x) = e^{x^2}$

Derivada de fuciones inversas

Recordemos que una función $g(x)$ es inversa de una función $f(x)$ si $g \circ f(x) = x$ y $f \circ g(y) = y$; a g se le denota f^{-1}.

Para encontrar la derivada de la función inversa usaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Sea $f(x)$ una función derivable en x_0 tal que $f'(x_0) \neq 0$, entonces, si f^{-1} existe, su derivada en $y_0 = f(x_0)$ es*

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \textit{de aqui se tiene que} \quad (f')(x_0) = \frac{1}{f^{-1})(y_0)}$$

Ejemplo 49. *Derivar la función* $f(x) = \sqrt{x}$

tenemos que $y = f(x) = \sqrt{x}$ *es la función inversa de* $g(y) = y^2$*, por tanto la derivada de* $y = f(x) = \sqrt{x}$ *es*

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(y^2)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas son continuas y monótonas en su dominio definido por cioertos rangos como por ejmplo :la función $sen(x)$ definida en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ toma todos los valores del intervalo $[-1, 1]$ una sola vez, es decír, dos números distintos de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a lcanzan valores distintos en $[-1, 1]$. En estas condiciones se puede definir la aplicación inversa de $f(x) = sen(x)$, llamada "arco-seno" que se simbolíza por $arc\,sen(x)$.

Así, dado que $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ entonces $arc\,sen(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

Por tanto, sí $f(x) = sen(x)$: ocurre que $f^{-1}(x)[f(x)] = f^{-1}(sen(x)) = arc\,sen(sen(x)) = x$
Regla 22. *Derivada de la función* $arc\,sen(x)$
Sea $f(x) = y = sen(x)$ *entonces su derivada está dada por*

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

es decir

$$(arc\,sen)'(sen(x)) = \frac{1}{sen'(x)} = \frac{1}{cos(x)}$$

de la identidad $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$ *tenemos que* $cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)} = \sqrt{1 - y^2}$*, por lo tanto*

$$(arc\,sen)'(sen(x)) = (arc\,sen)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

O bien

$$\frac{d(arc\,sen(x))}{dx} = (arc\,sen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

A continuación ponemos todas las derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Regla 23. *Derivada para la función* $arc\,cos(x)$

$$\frac{d(arc\,cos(x))}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Regla 24. *Derivada para la función* $arc\,sen(x)$

$$\frac{d(arc\,sen(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Regla 25. *Derivada para la función* $arc\,tan(x)$

$$\frac{d(arc\,tan(x))}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Regla 26. *Derivada para la función* $arc\,cot(x)$

$$\frac{d(arc\,cot(x))}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

Regla 27. *Derivada para la función* $arc\,sec(x)$

$$\frac{d(arc\,sec(x))}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Regla 28. *Derivada para la función* $arc\,csc(x)$

$$\frac{d(arc\,csc(x))}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Regla de la cadena para funciones trigonométricas inversas. Si en cada una de las derivadas anteriores se tuviese una función de x, $u(x)$, en lugar de x, las derivadas de las nuevas funciones compuestas se convierten, por la regla de la cadena en:

Regla 29. *Derivada para la función* $arc\,cos(u)$

$$\frac{d(arc\,cos(u))}{dx} = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Regla 30. *Derivada para la función* $arc\,sen(u)$

$$\frac{d(arc\,cos(u))}{dx} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Regla 31. *Derivada para la función* $arc\,tan(u)$

$$\frac{d(arc\,tan(u))}{dx} = \frac{u'}{1+u^2}$$

Regla 32. *Derivada para la función* $arc\,cot(u)$

$$\frac{d(arc\,cot(u))}{dx} = \frac{-u'}{1+u^2}$$

Regla 33. *Derivada para la función* $arc\,sec(u)$

$$\frac{d(arc\,sec(u))}{dx} = \frac{u'}{u\sqrt{1+u^2}}$$

Regla 34. *Derivada para la función* $arc\,csc(u)$

$$\frac{d(arc\,csc(u))}{dx} = \frac{-u'}{u\sqrt{1+u^2}}$$

Ejemplo 50. *Calcular la derivada de la función*

$$f(x) = arc\,tan(ln(x^2))$$

hacemos $u = ln(x^2)$ *entonces su derivada es* $u' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ *asi* $f(x)$ *se puede escribir como* $f(x) = arc\,tan(u)$*, entonces*

$$f'(x) = (arc\,tan(u))' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{\frac{2}{x}}{1+(ln(x^2))^2} = \frac{2}{x(1+(ln(x^2))^2)}$$

Ejemplo 51. *Calcular la derivada de la función*

$$f(x) = arc\,cos(sec(x))$$

hacemos $u = sec(x)$ *entonces su derivada es* $u' = sec(x) \cdot tan(x)$ *asi* $f(x)$ *se puede escribir como* $f(x) = arc\,cos(u)$, *entonces*

$$f'(x) = (arc\,cos(u))' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{-(sec(x) \cdot tan(x))}{\sqrt{1-(sec(x))^2}}$$

Derivadas de Orden Superior

En este apartado sólo se mostrarán ejemplos, dado que ya se trató todo lo referente a derivadas en las secciones anteriores y las derivadas de orden superior se consideran aplicaciones sucesivas que se verán en la siguiente semana.

Las derivadas de orden superior hacen referencia al número de veces que se va a derivar la misma función consecutivamente:
Ejemplo 52. *Encontrar la derivada de segundo orden (o de orden 2) de la siguiente función*

$$f(x) = tan(x)$$

calculemos la primera derivada

$$f'(x) = (tan'(x)) = sec^2(x)$$

calculemos la segunda derivada

$$f''(x) = (tan(x))'' = (sec^2(x))' = 2sec(x) \cdot sec(x) \cdot tan(x) = 2sec^2(x) \cdot tan(x)$$

para calcular la derivada de $sec^2(x)$, *hicimos* $u = sec(x)$ *entonces* $u' = sec(x) \cdot tan(x)$, *y utilizamos la regla*

$$f'(x) = mu^{m-1} \cdot \frac{d(u)}{dx}$$

con m=2
Ejemplo 53. *Encontrar la derivada de tercer orden (o de orden 3) de la siguiente función*

$$f(x) = x^3 - x^2$$

calculemos la primera derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

calculemos la segunda derivada

$$f''(x) = (x^3 - x^2)'' = (3x^2 - 2x)' = 6x - 2$$

calculemos la tercera derivada

$$f'''(x) = (x^3 - x^2)''' = (3x^2 - 2x)'' = (6x - 2)' = 6$$

Ejemplo 54. *Encontrar la derivada de segundo orden (o de orden 2) de la siguiente función*

$$f(x) = ln(|5x|)$$

y evaluarla en $x = 1$

calculemos la primera derivada, sea $u = 5x$ entonces $u' = 5$ y usemos la regla de logaritmo

$$f'(x) = (ln(|u|))' = \frac{1}{u}\frac{d(u)}{dx}$$

entonces

$$f'(x) = (ln(|u|)) = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$$

para calcular la segunda derivada observemos que la función $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, entonces la podemos derivar como si fuera una función de la forma $g(x) = x^n$ con $n = -1$, así:

$$f''(x) = (ln(|5x|))'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Nota En el ejercicio anterior no debemos confundir la notación x^{-1} con la función inversa de la función $f(x) = x$, en este caso x^{-1} es el polinomio de grado menos 1.

Ejercicios resueltos

Encontrar las derivadas de siguientes funciones

$1.-f(x) = \dfrac{5x+2}{x^3}$ $\quad 2.-f(x) = 4x{\cdot}tan(x)$ $\quad 3.-f(x) = e^{4x^3}$ $\quad 4.-f(x) = sec(x^2{+}3x)$

$$5. - f(x) = ln^2(sen(x))$$

1.- Aplicaremos la regla del cociente para derivar esta función

$$f'(x) = \frac{x^3 \cdot \frac{d}{dx}(5x+2) - (5x+2)\cdot \frac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2} = \frac{x^3\cdot 5 - (5x+2)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{5x^3 - 15x^3 - 6x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-10x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{-10x - 6}{x^4}$$

2.- Aplicaremos la regla del producto

$$f'(x) = \frac{d}{dx}4x \cdot tan(x) + \frac{d}{dx}tan(x)\cdot 4x = 4tan(x) + sec^2(x)\cdot 4x$$

3.- Aplicaremos la regla de la cadena para funciones exponenciales, sea $u = 4x^3$ entonces $u' = 12x^2$, asi

$$f'(x) = (e^u)' = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{4x^3}\cdot 12x^2 = 12x^2 \cdot e^{4x^3}$$

4.- Aplicaremos la regla de la cadena para funciones trigonométricas, sea $u = x^2{+}3x$ entonces $u' = 2x + 3$ asi

$$f'(x) = (sec(u))' = (sec(u)\cdot tan(u))\cdot \frac{d(u)}{dx} = (sec(x^2+3x)\cdot tan(x^2+3x))\cdot(2x+3)$$

5.- Este tipo de funciones es de alguna manera de las más dificiles de derivar ya que deberemos usar dos veces la regla de la cadena, observemos que si $w = u^2$, $u = ln(v)$ y $v = sen(x)$ con derivadas $w' = 2u$, $u' = \frac{1}{v}$, $v' = cos(x)$ respectivamente, entonces

$$(w \circ u \circ v) = (w \circ (u \circ v)) = w[ln(sen(x))] = ln^2(sen(x))$$

por tanto

$$f'(x) = (w \circ u \circ v) = \frac{dw(u \circ v)}{dx} \cdot \frac{d(u \circ v)}{dx} = \frac{dw(u \circ v)}{dx} \cdot \frac{du(v)}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$$
$$= 2 \cdot ln^2(sen(x)) \cdot cot(x)$$

$$f(x)$$

2.1. Aplicaciones de la derivada

En está unidad revisaremos diferentes usos de la derivada. La derivada tiene una gran variedad de aplicaciones además de darnos la pendiente de la tangente a una curva en un punto. Se puede usar la derivada para estudiar polinomios de Taylor y Maclaurin, valores máximos y mínimos de una función, concavidad y convexidad, etc.

Polinomios de Taylor y de Maclaurin

El objetivo de esta sección es enseñar a usar las funciones polinómicas como aproximaciones de otras funciones elementales. Para hallar una función polinómica $P(x)$ que aproxime a otra función $f(x)$, empezamos eligiendo un número c en el dominio de $f(x)$ en el que $P(x)$ tomará el mismo valor, es decir, $P(c) = f(c)$ (las gráficas de f y P pasan por $(c, f(c))$. Se dirá que la aproximación polinómica está centrada en c. Geométricamente, exigir $P(c) = f(c)$ significa obligar a la gráfica de $P(x)$ que pase por $(c, f(c))$. Hay muchos polínomios que satisfacen esa condición. Nuestro objetivo consiste en encontrar uno cuya gráfica sea parecida a la de $f(x)$ en las proxímidades de c.

Una forma de lograrlo consiste en imponer que el valor de $f(x)$ y de sus n primeras derivadas deben coincidir con las de $P(x)$ y sus derivadas en $x = c$, esto es:

$$f(c) = a_0 \qquad f'(c) = a_1 \qquad \frac{f''(c)}{2!} = a_2 \quad ... \quad \frac{f^n(c)}{n!} = a_n$$

donde el polinomio $P(x)$ es

$$P(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + ... + a_n(x - c)^n$$

Con estos coeficientes llegamos a la definición de los polinomios de Taylor, así llamados en honor al matemático inglés Brook Taylor, y de los polinomios de Maclaurin, que llevan el nombre de otro matemático inglés, Colin Maclaurin.
Definición 15. *Si $f(x)$ tienen n derivadas en el punto $x = c$, el polinomio*

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)(x - c)^2}{2!} + ... + \frac{f^n(c)(x - c)^n}{n!}$$

se llama polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ en el punto $x = c$, en el caso particular en que $x = 0$ lo llamaremos polinomio de Maclaurin de grado n de $f(x)$ y su expresión es

$$P_n(x) = f(0) + f'(c)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + ... + \frac{f^n(0)x^n}{n!}$$

Ejemplo 55. *Obtener el polinomio de Taylor de grado cuatro para la función $f(x) = e^{2x}$ en el punto $x = 1$*

Como el polinomio que nos piden es de grado 4 entonces debemos calcular las primeas 4 *derivadas consecutivas, esto es $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f'''(x) = 8e^{2x}$, $f''''(x) = 16e^{2x}$, que al evaluarlas en $x = 1$ da $f'(1) = 2e^{2(1)} = 2e^2$, $f''(x) = 4e^{2(1)} = 4e^2$, $f'''(1) = 8e^{2(1)} = 8e^2$, $f''''(1) = 16e^{2(1)} = 16e^2$ por otro lado $f(1) = e^{2(1)} = e^2$ entonces el polinomio de Taylor de grado cuatro queda representado por:*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} + \frac{f''''(1)(x-1)^4}{4!} \\ &= e^2 + 2e^{2x}(x-1) + \frac{4e^2(x-1)^2}{2!} + \frac{8e^2(x-1)^3}{3!} + \frac{16e^2(x-1)^4}{4!} \end{aligned}$$

Ejemplo 56. *Obtener el polinomio de Maclaurin de grado 3 para la función $f(x) = sen(3x)$ en el punto $x = 0$*

Como el polinomio que nos piden es de grado 3 entonces debemos calcular las primeras 3 *derivadas consecutivas, esto es $f'(x) = 3cos(3x)$, $f''(x) = -9sen3x$, $f'''(x) = -27cos(3x)$, que al evaluarlas en $x = 0$ da $f'(0) = 3cos(3(0)) = 3cos(0) = 3 \cdot 1 = 3$, $f''(0) = -9sen3(0) = -9sen0 = -9 \cdot 0 = 0$, $f'''(0) = -27cos(3(0)) = -27cos(0) = -27 \cdot 1 = -27$, por otro lado $f(0) = sen(0) = 0$ entonces el polinomio de Maclaurin de grado tres queda representado por:*

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x)^3}{3!} = 0 + 3x + \frac{0 \cdot x^2}{2!} + \frac{-27x^3}{3!} \\ &= 3x + \frac{-27x^3}{3!} \end{aligned}$$

En el cálculo diferencial e integral existen resultados de vital importancia, que sirven para múltiples aplicaciones, en este caso dos teoremas muy importantes para el cálculo diferencial, los cuales se enunciarán a continuación.

Teorema del valor medio

Teorema 2.4. ***Teorema de Rolle***. *Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores de éste, siendo cero en los extremos $x = a$ y $x = b$, $[f(a) = f(b) = 0]$, entonces, dentro del intervalo $[a, b]$ existe por lo menos un punto $x = c$, $a < c < b$, en el que la derivada $f'(x)$ se hace cero, es decir, $f'(c) = 0$.*

Geométricamente el teorema de Rolle lo que nos dice es que si se satisfacen las condiciones o hipotesis de éste, entonces habrá un punto c dentro del intervalo $[a, b]$ en el que si trazamos la recta tangente en $(c, f(c))$, esta será horizontal, es decir paralela al eje x, la figura 2.5 muestra geométricamente el hecho que acabamos de explicar.

Ejemplo 57. *Tangentes horizontales de un polinomio*

La función polinomial siguiente

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x \qquad [-3, 3]$$

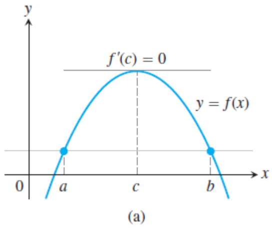


Figura 2.5: Representación gráfica del teorema de Rolle

satisface las hipotesis del teorema de Rolle, ya que es continua en todo el intervalo $[-3,3]$ *por ser un polinomio, además es diferenciable en el abierto* $(-3,3)$*, y por último tenemos que* $f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 3(-3) = -9 + 9 = 0$ *y* $f(3) = \frac{(3)^3}{3} - 3(3) = 9 - 9 = 0$*, por lo cual debe existir un punto en el intervalo* $[-3,3]$ *tal que* $f'(c) = 0$*, de hecho* $f'(x) = x^2 - 3$ *es cero en dos puntos, estos son* $c_1 = \sqrt{3}$ *y* $c_2 = -\sqrt{3}$*, es decir estos puntos donde la derivada* f' *vale cero y además están contenidos en el intervalo* $[-3,3]$*, ver la figura 2.6*

Nota: *Para encontrar los puntos donde la derivada se hace cero, usamos la fórmula para calcular raíces cuadradas.*

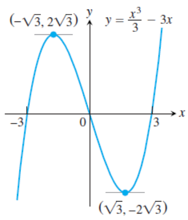


Figura 2.6: Como predice el teorema de Rolle, esta curva tiene tangentes horizontales entre los puntos donde cruza el eje x

El teorema del valor medio, que fue enunciado por primera vez por Joseph-Louis Lagrange, es una versión general del teorema de Rolle. Afirma que bajo ciertas condiciones existe un punto donde la tangente es paralela a la cuerda AB.

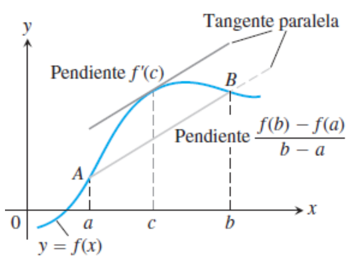


Figura 2.7: Geométricamente, el teorema del valor medio dice que en algún sitio entre A y B la curva tiene al menos una tangente paralela a la cuerda AB.

Teorema 2.5. ***Teorema del valor medio*** *Supongamos que* $f(x)$ *es continua en un intervalo cerrado* $[a,b]$ *y diferenciable en el interior del intervalo* (a,b)*. Entonces existe por lo* *menos un punto c en (a, b) en donde*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ejemplo 58. *La función $f(x) = x^2$ es continua para $0 \leq x \leq 2$ y diferenciable en el intervalo $0 < x < 2$. Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, el teorema del valor medio dice que en algún punto c contenido en el intervalo, la derivada $f'(x) = 2x$ debe tener el valor $\frac{(4-0)}{(2-0)} = 2$. En este caso (excepcional), podemos identificar c resolviendo la ecuación $2c = 2$ para obtener $c = 1$*

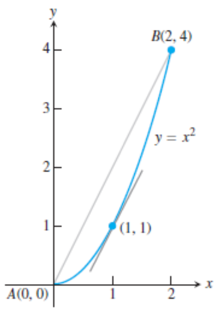


Figura 2.8: Como vimos en el ejemplo anterior, es el punto $c = 1$ donde la tangente es paralela a la cuerda.

Una aplicación directa del teorema de valor medio es la siguiente
Proposición 2. *Si $f'(x) = 0$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces $f(x) = c$ para todo x en (a, b) donde c es una constante.*

Gracias a la proposición anterior tenemos lo siguiente
Proposición 3. *Si $f'(x) = g'(x)$ en cada punto x de un intervalo abierto (a, b), entonces esxiste una constante c tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo x en (a, b) esto es, $f - g$ es una constante en (a, b)*

Ambas proposiciones son también ciertas si el intervalo abierto (a, b) no es finito. Esto es, siguen siendo válidos si el intervalo es (a, ∞), $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$.

La última proposición que acabamos de enunciar nos dice que por ejemplo, que como la derivada de $f(x) = x^2$ en $(-\infty, \infty)$ es $2x$, cualquier otra función con derivada $2x$ en $(-\infty, \infty)$ debe ser de la forma $x^2 + c$ para algún valor de c.

Regla de L´Hopital

En este apartado se presenta la forma para calcular límites que producen formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$. Este resultado es conocido como la regla de L´Hopital y es una herramienta relevante como se verá a continuación.
Teorema 2.6. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas y derivables en el intervalo $[a, b]$. Supóngase que $g'(x) \neq 0$ en (a, b) y que además*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$o$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite existe, También es válido el teorema si $f'(a) = g'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones puestas sobre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, según la hipótesis del teorema, entonces, aplicando la regla de L´Hopital para la razón $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ se obtienen la fórmula

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo 59. *Calcular los siguientes límites cuando $x \to 0$*

$$1. - \frac{sen(5x)}{3x} \qquad 2. - \frac{ln(1+x)}{x} \qquad 3. - \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)}$$

Observemos que al evaluar de manera directa el límite de cada función siempre da $\frac{0}{0}$

1.- tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(5x)}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(sen(5x))}{\frac{d}{dx}(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{5cos(5x)}{3} = \frac{5}{3}$$

2.- tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(ln(1+x))}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

3.- tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x} - 2x)}{\frac{d}{dx}(x - sen(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x} - 2)}{\frac{d}{dx}(1 - cos(x))} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{\frac{d}{dx}(sen(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

En el último ejemplo usamos tres veces la ragla de L´Hopital para poder evaluar el límite ya que teníamos indeterminaciones de $\frac{0}{0}$ al tratar de evaluar el límite.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 60. *Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = ln(5x)$ alrededor del punto $x = 1$*

Como el polinomio que nos piden es de grado 2 entonces debemos calcular las primeras 2 derivadas consecutivas, esto es $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, *que al evaluarlas en* $x = 1$ *da* $f'(1) = \frac{1}{(1)} = 1$, $f''(x) = -\frac{1}{(1)^2} = -\frac{1}{1} = -1$, *por otro lado* $f(1) = ln(5)$ *entonces el polinomio de Taylor de grado dos queda representado por:*

$$P_n(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!}$$

$$= ln(5) + 1\cdot(x-1) + (-1)\cdot\frac{(x-1)^2}{2!} = ln(5) + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$$

Ejemplo 61. *Calcular los siguientes límites*

$$1.-\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-x}{2x} \qquad 2.-\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x}$$

Al evaluarlos directamente tenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$

$$1.-\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{2x} = \frac{\frac{d}{dx}(cos(x)-1)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{2} = \frac{-sen(0)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$2.-\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x} = \frac{\frac{d}{dx}(sen(2x))}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2cos(2x)}{1} = \frac{2cos(2\cdot 0)}{1} = \frac{2cos(0)}{1} = \frac{2\cdot 1}{1} = 2$$

UNIDAD 3

MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PROBLEMAS DE OPTMIZACIÓN

El análisis del comportamiento de las funciones que a continuación se estudiará puede aplicarse en numerosas situaciones de la vida cotidiana para conocer en qué condiciones se obtienen los resultados óptimos, máximos o mínimos, o cómo se debe actuar para influir en las variables en la forma deseada, o en qué intervalo de variación de una de ellas la otra aumenta o disminuye más rápidamente. Como se verá, para ello bastará con escribir la relación entre las variables como una función, fijar el objetivo deseado y hacer el análisis correspondiente.

Recordemos que en la unidad anterior definimos que es un punto crítico de una función, que a resumidas palabras son aquellos puntos en los que la derivada no esta definida o vale cero, también vimos como usar la primera derivada para determinar en que intervalos de su dominio una función es creciente o decreciente, con esto a la mano podemos encontrar los puntos en que la función alcanza su máximo valor y tambien donde la función alcanza su mínimo valor.

Enseguida definimos que es que un punto del dominio de una función $f(x)$ sea un máximo o un mínimo.

Definición 16. *Sea f una función con dominio D.*

- *Decimos que f tiene un valor máximo absoluto en un punto c si* $f(x) \leq f(c)$

- *Decimos que f tiene un valor mñimo absoluto en un punto c si* $f(x) \geq f(c)$

Ejemplo 62. *Hagamos* $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *y sea* $f(x) = cos(x)$ *alcanza un valor máximo absoluto igual a 1 (una vez) y un valor mínimo absoluto igual a 0 (dos veces). En el mismo intervalo, la función* $g(x) = sen(x)$ *alcanza un valor máximo igual a 1 y un valor mínimo igual a -1, ver la figura 3.1.*

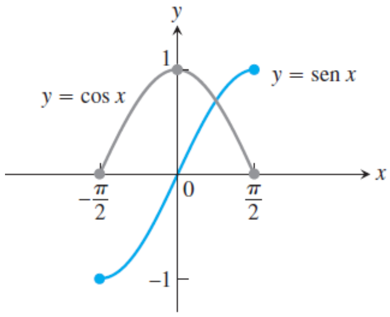


Figura 3.1: Máximos y mínimos de las funciones $sen(x)$ y $cos(x)$ en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

A continuación mostramos algunos ejemplos de como se pueden dar los máximos y los mínimos de una función, donde M es el máximo y m es el mínimo ver las figuras 3.2 y 3.3

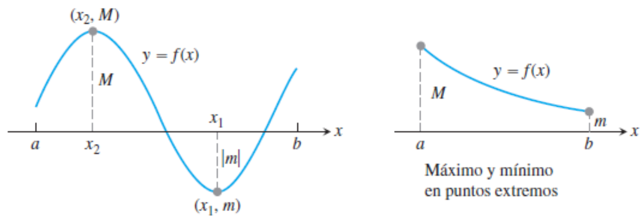


Figura 3.2: Algunas posibilidades de máximo y mínimo para una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

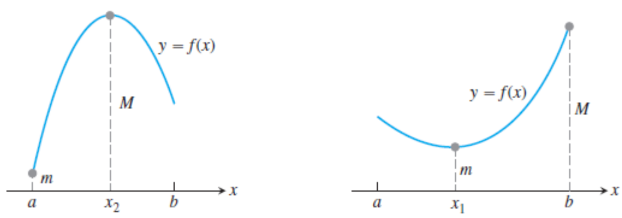


Figura 3.3: Algunas posibilidades de máximo y mínimo para una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

El teorema siguiente afirma que una función que es continua en todo punto de un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene un valor máximo absoluto y uno mínimo absoluto en el intervalo. Siempre buscamos estos valores cuando graficamos una función.

Teorema 3.1. *Teorema del valor extremo*

Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza tanto un valor máximo absoluto M y mínimo absoluto m en $[a, b]$. Esto es, existen números x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $f(x_1) = M$ y $f(x_2) = m$ con $m \leq f(x) \leq M$ para cualquier otra x en $[a, b]$

El teorema que acabamos de enunciar es de las partes fundamentales del cálculo y también de la ciencias exactas ya que la interpretación que se le da siempre es conveniente en las aplicaciones reales.

Hasta el momento hemos hablado acerca de máximos y mínimos globales (absolutos), sin embargo también existen los máximos y mínimos relativos (locales)
Definición 17. *Máximos y mínimos locales*

- *Una función f tiene un valor máximo local en un punto interior c de su dominio si:*

$$f(x) \leq f(c) \text{ para toda } x \text{ en un intervalo abierto que contenga a } c$$

- *Una función f tiene un valor máximo local en un punto interior c de su dominio si:*

$$f(x) \geq f(c) \text{ para toda } x \text{ en un intervalo abierto que contenga a } c$$

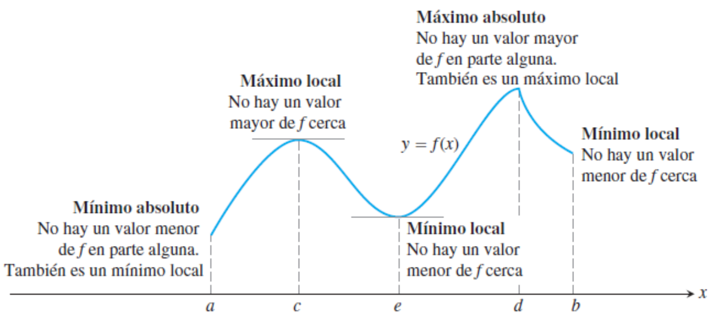


Figura 3.4: Clasificación de máximos y mínimos

Determinación de extremos

El teorema siguiente explica por qué usualmente es necesario investigar solamente algunos valores para encontrar los extremos de una función.
Teorema 3.2. ***El teorema de la primera derivada para valores extremos locales***

Si f tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior c de su dominio, y si f está definida en c, entonces

$$f'(c) = 0$$

El teorema anterior dice que la primera derivada de una función siempre es cero en un punto interior donde la función tiene un valor extremo local y la derivada está definida. Por lo tanto, los únicos lugares donde una función f puede tener un valor extremo (local o global) son

- puntos interiores donde $f' = 0$
- puntos interiores donde f no esté definida
- puntos extremos del dominio de f

De la unidad anterior recordemos que un punto crítico es aquel punto del dominio de la función f donde la derivada se hace cero o no esta definida. En consecuencia, los únicos puntos del dominio donde una función puede tener valores extremos, son los puntos críticos o los puntos extremos. Hay que tener cuidado de no malinterpretar el teorema anterior, porque su recíproco es falso. Una función diferenciable puede tener un punto crítico en $x = c$ sin tener ahí un valor extremo local. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ tiene un punto crítico en el origen y vale ahí cero , pero es positiva a la derecha del origen y negativa a la izquierda. De manera que no puede tener un valor extremo local en el origen. En cambio, tiene ahí un punto de inflexión. Esta idea se definirá y discutirá con detalle más adelante. Casi todos los problemas que involucran valores extremos, exigen encontrar valores extremos de funciones continuas en intervalos cerrados y finitos.

Con esto a la mano daremos los pasos para encontrar los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado finito
Pasos

- Evaluar f en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo.

- Tomar el mayor y el menor de estos valores.

Ejemplo 63. *Determinación de extremos absolutos*

Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^2$ *en* $[-2, 1]$

La función es diferenciable sobre todo su dominio, de manera que el único punto crítico es donde $f'(x) = 2x = 0$ *que en este caso es el punto* $x = 0$*, ahora, según los pasos listados debemos conocer el valor de la función en los extremos del intervalo esto es en* $x = -2$*,* $x = 1$ *y el valor que toma la función en el punto crítico* $x = 0$*, asi* $f(-2) = (-2)^2 = 4$*,* $f(1) = 1$ *y* $f(0) = 0$*, por lo tanto la función tiene un máximo absoluto en* $x = -2$ *y un mínimo absoluto en* $x = 0$

Ejemplo 64. *Extremos absolutos en un intervalo cerrado*

Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ *en el intervalo* $[-2, 3]$

Evaluamos la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, y tomamos el máximo y el mínimo de los valores resultantes. La derivada de f *es*

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

el punto crítico es 0*, ya que en este valor la derivada de la función no está definida, ahora evaluemos la función en los valores extremos del intervalo, esto es* $f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ *y* $f(3) = (3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$ *. De acuerdo con esta lista, podemos ver que el valor máximo absoluto de la función* $\sqrt[3]{9} \cong 2{,}08$ *y se alcanza en el extremo derecho del intervalo, es decir en* $x = 3$*. El valor mínimo absoluto es* 0*, y se alcanza en el punto interior* $x = 0$*, ver figura 3.5*

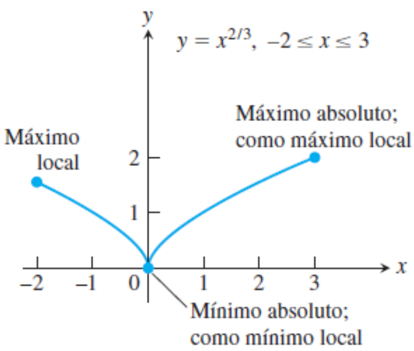


Figura 3.5

Funciones crecientes y decrecientes

Para graficar una función diferenciable es útil conocer en dónde crece (es decir, en dónde se eleva de izquierda a derecha), y en dónde decrece (es decir, en dónde cae de izquierda a derecha) en un intervalo. En esta sección se define precisamente qué significa que una función sea creciente o decreciente en un intervalo, y se da un criterio para determinar en dónde crece y en dónde decrece. También se muestra cómo verificar que los puntos críticos de una función resultan ser valores extremos locales.

¿Qué clase de funciones tiene derivadas positivas o derivadas negativas? la tercera proposición ligada al teorema del valor medio nos da la respuesta: las únicas funciones con derivadas positivas son las funciones crecientes; las únicas funciones con derivadas negativas son las funciones decrecientes.

Definición 18. *Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$, y sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en $[a, b]$.*

- *Si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que $f(x)$ es creciente*
- *Si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_1 < x_2$ entonces se dice que $f(x)$ es decreciente*

A las funciones crecientes o decrecientes se les llama monótonas.

Es importante tener en cuenta que las definiciones de funciones crecientes decrecientes se deben satisfacer en todo par de puntos x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. Debido a la desigualdad al comparar los valores de la función es $<$ y no $\le$, algunos libros dicen que f es estrictamente creciente o decreciente en $[a, b]$. El intervalo $[a, b]$ puede ser finito o infinito.

Ejemplo 65. *La función $f(x) = x^2$ decrece en $(-\infty, 0]$ y crece en $[0, \infty)$ como se puede ver en la figura 3.6. Observe que en el intervalo $(-\infty, 0]$ las tangentes tienen pendientes negativas, de manera que la primera derivada es siempre negativa ahí; para el intervalo $[0, \infty)$, las tangentes tienen pendientes positivas y la primera derivada es positiva, el resultado siguiente confirma las observaciones hechas.*

Proposición 4. *Supongamos que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo (a, b) entonces*

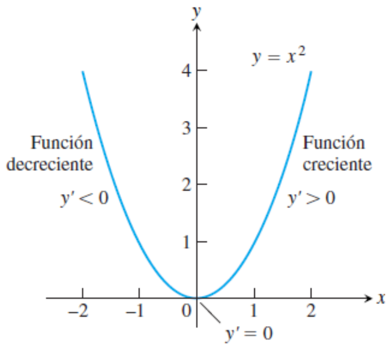


Figura 3.6: Intervalos donde la función es creciente y decreciente

- *Si $f'(x) > 0$ en cada punto x de $[a, b]$, entonces f es creciente en $[a, b]$*
- *Si $f'(x) < 0$ en cada punto x de $[a, b]$, entonces f es decreciente en $[a, b]$*

A continuación veremos cómo se aplica el criterio de la primera derivada para encontrar en qué puntos una función es creciente y en cuáles es decreciente. Para ello definamos lo que es un punto crítico.

Definición 19. *Un punto crítico de una función $f(x)$, es un valor x_0 dentro del dominio de f donde la función no es diferenciable, o bien, su derivada es 0, esto es $f'(x_0) = 0$.*

Si $a < b$ son dos puntos críticos para una función f, y si f' existe pero no es cero en el intervalo (a, b), entonces f' tiene que ser positiva en (a, b) o negativa ahí. Una manera para determinar el signo de f' consiste simplemente en evaluar f' en algún punto x en (a, b)
.

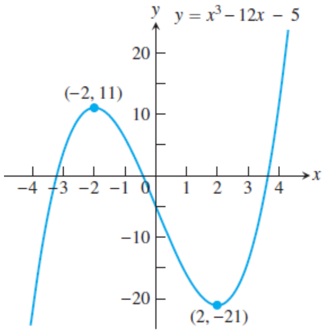
Ejemplo 66. *Uso del criterio de la primera derivada para funciones monótonas*

Encontrar los puntos críticos de la función $f(x) = x^3 - 12x - 5$ e identificar los intervalos en que f es creciente y en los que f es decreciente

La función f es continua y diferenciable en todas partes, la derivada esta dada por

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2)$$

entonces los puntos críticos de f son donde la derivada f' se hace cero, esto es, en los puntos $x = 2$ y $x = -2$. Estos puntos críticos subdividen el dominio de f en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, \infty)$, en los que f' es positiva o negativa, Ahora determinaremos el signo de f' evaluando en un punto adecuado de cada subintervalo. Aplicando la proposición anterior a cada subintervalo podemos determinar el comportamiento de f.



(a) $f(x) = x^3 - 12x - 5$

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < \infty$
f' evaluada	$f'(-3) = 15$	$f'(0) = -12$	$f'(3) = 15$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	creciente	decreciente	creciente

(b) valores de la derivada

Figura 3.7

La información contenida en la tabla de arriba se interpreta así, primero se evaluó la derivada en puntos que están dentro de cada subintervalo, enseguida se observó el signo del resultado de dichas evaluaciones, después se concluye que para cada punto de ese intervalo la función es creciente o decreciente según los valores del signo.

Por tanto se puede concluir que en el subintervalo $(-\infty, -2)$, la función es creciente, en el subintervalo $(-2, 2)$ la función es decreciente y finalmente en $(2, \infty)$ vuelve a ser creciente.

Prueba de la primera derivada para extremos locales

En la sección anterior vimos los criterios de la primera derivada para determinar en que intervalos una función f es creciente o decreciente, saber este hecho también nos da herramientas para probar la naturaleza de los valores extremos locales.

Como puede ver en la figura 3.8, en los puntos donde f tiene un valor mínimo, $f' < 0$ inmediatamente a la izquierda y $f' > 0$ inmediatamente a la derecha. (Si el punto es un extremo del intervalo, solamente hay que considerar un lado). Así, la función es decreciente a la izquierda del valor mínimo, y es creciente a su derecha. De manera similar, en los puntos donde f tiene un valor máximo, $f' > 0$ inmediatamente a la izquierda y $f' > 0$ inmediatamente a la derecha. Así, la función es creciente a la izquierda del valor máximo y decreciente a su derecha. En resumen, en un punto extremo local, el signo de $f(x)$ cambia.

En general tenemos

Prueba de la primera derivada para extremos locales

Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f, y que f es diferenciable en todo punto de algún intervalo que contiene a c, excepto posiblemente en el mismo c. Moviéndonos a lo largo de c de izquierda a derecha

- si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c

- si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c
- si f no cambia de signo en c (esto es, si f'' es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lado de c, entonces f no tiene un extremo local en c)

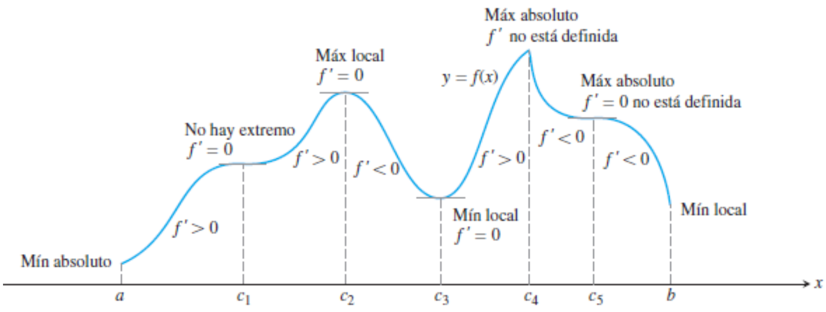


Figura 3.8: La primera derivada de una función dice como sube y baja la gráfica

Ejemplo 67. *Uso de la prueba de la primera derivada para extremos locales*

Encontrar los puntos críticos de

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-4) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$$

e dentificar los intervalos en los que f es creciente y decreciente. Encontrar los valores extremos locales y absolutos de la función.

La función f es continua para toda x en los números reales por ser producto de dos funciones continuas $x^{\frac{1}{3}}$ y $(x-4)$. La primera derivada es

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

es cero en $x = 1$ y no está definida en $x = 0$, no hay puntos extremos en el dominio, de manera que los puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$ son los únicos lugares donde f podría tener un valor extremo. Los puntos críticos dividen al eje x en intervalos en los que la derivada es positiva o negativa. El patrón de los signos de f' revela el comportamiento de f entre y en los puntos críticos. Podemos listar la información en una tabla como la siguiente:

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	crecimiento	decrecimiento	crecimiento

Figura 3.9

entonces como vimos en la unidad anterior como el signo de la derivada en los intervalos $(\infty, 0)$ y $(0, 1)$ es negativo, entonces la función $f(x)$ decrece en estos intervalos y es creciente en $(1, \infty)$ dado que la derivada de f es positiva. La prueba de la primera derivada para extremos locales, nos dice que f no tiene extremos en $x = 0$ (f' no cambia de signo) y que tiene un mínimo local en $x = 1$ (f' cambia de negativa a positiva).

El valor del mínimo local es $f(1) = 1^{\frac{1}{3}}(1 - 4) = 1(-3) = -3$, éste también es un mínimo absoluto, por que los valores de la función decrecen al acercase a él desde la izquierda, y crece al alejarse de él hacia la derecha. La figura 3.10 muestra este valor en la gráfica de la función.

Observe que $\lim_{x \to 0} f'(x) = \infty$, de manera que la gráfica tiene una tangente vertical en el origen

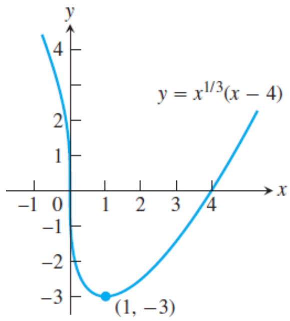


Figura 3.10

Prueba de la segunda derivada

En esta sección veremos cómo la segunda derivada nos da información acerca de la manera en que la gráfica de una función diferenciable abre hacia arriba o hacia abajo. Esta información adicional nos permite capturar aspectos clave del comportamiento de una función y su gráfica, para después poderlos plasmar en un esquema de la gráfica.

Prueba de la segunda derivada

Sea $f(x)$ una función definida en (a, b) y c un punto del intervalo tal que $f'(c) = 0$, entonces

- Si $f''(c) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en c
- Si $f''(c) < 0$, la función tiene un máximo relativo en c
- Si $f''(c) = 0$, no se puede determinar si la función tiene un extremo relativo en c

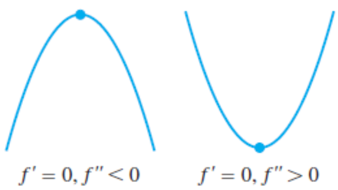


Figura 3.11

Ejemplo 68. *Encontrar los máximos y los mínimos de la función* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

Observemos primero que nada que la función es un polinomio, por lo tanto es continuo y diferenciable en todo valor real x.

Ahora calculamos la primera derivada de la función, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ *enseguida igualamos a cero para calcular los puntos críticos, esto es* $6x^2 - 6x - 12 = 0$ *al utlizar la fórmula para obtener las raíces tenemos que la derivada se hace cero cuando* $x = 2$, $x = -1$, *calculamos la segunda derivada* $f''(x) = 12x - 6$, *evaluemos* $f''(x)$ *en los puntos críticos de* f *para saber si se trata de un máximo o un mínimo,* $f''(2) = 12(2) - 6 = 24 - 6 = 18 > 0$ *por lo tanto en el punto* $x = 2$ *hay un mínimo, ahora para* $x = -1$, *tenemos* $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$, *por lo tanto en este punto hay una máximo*

Concavidad

Como puede verse en la figura 3.12, la curva $y = x^3$ se eleva cuando x crece, pero las porciones definidas en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ abren de distintas maneras. Cuando nos acercamos al origen desde la izquierda a lo largo de la curva, ésta abre hacia abajo y se ubica debajo de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes decrecen en el intervalo $(-\infty, 0)$. Cuando nos alejamos del origen hacia la derecha a lo largo de la curva, ésta abre hacia arriba y se ubica por encima de sus tangentes. Las pendientes de las tangentes crecen en el intervalo $(0, \infty)$. Este comportamiento de apertura hacia arriba o hacia abajo define la concavidad de la curva.

Definición 20. *Cóncava hacia arriba y cóncava a hacia abajo*

La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ *es*

- *cóncava hacia arriba en un intervalos* I *si* f' *es creciente en* I
- *cóncava hacia abajo en un intervalos* I *si* f' *es decreciente en* I

Notemos que en este caso la que debe ser creciente en la derivada f', no f

Si $y = f(x)$ tiene segunda derivada, podemos aplicar el criterio de la derivada para funciones monótonas, esto es

Criterio de la segunda derivada para concavidad

Sea $y = f(x)$ dos veces diferenciable en un intervalo I

- Si $f'' > 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia arriba.
- Si $f'' < 0$ en I, la gráfica de f en I es cóncava hacia arriba.

Ejemplo 69. *Aplicación de la prueba de concavidad*

Determinar la concavidad de la función $y = x^3$

La curva $y = x^3$ *es cóncava hacia abajo en* $(-\infty, 0)$ *donde* $y'' = 6x < 0$ *y cóncava hacia arriba en* $(0, \infty)$, *donde* $y'' = 6x > 0$

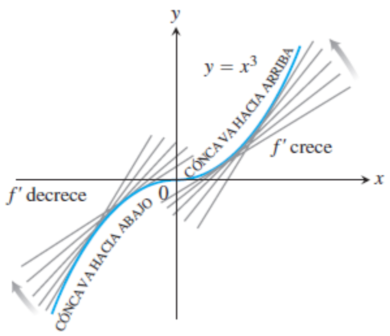


Figura 3.12: La gráfica $y = x^3$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, \infty)$

Ejemplo 70. *Aplicación de la prueba de concavidad*

Determinar la concavidad de la función $y = x^2$

La curva $y = x^2$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$ ya que su segunda derivada $y'' = 2$ es siempre positiva

Definición 21. *Punto de inflexión*

Un punto donde la gráfica de una función tiene recta tangente y la concavidad cambia es llamado punto de inflexión.

Nota El punto de una curva donde y'' es positiva en un lado y negativa en el otro, es un punto de inflexión. En tal punto, y'' es cero (porque las derivadas tienen la propiedad del valor intermedio), o no está definida. Si y es una función dos veces diferenciable, $y'' = 0$ en un punto de inflexión, entonces y tiene un máximo o mínimo local

Ejemplo 71. *Puede no haber punto de inflexión donde $y'' = 0$*

La curva $y = x^4$ no tiene punto de inflexión en $x = 0$. A pesar de que $y'' = 12x^2$ es cero en $x = 0$, está no cambia de signo por que $y''(x) = 12x^2 > 0$ en $(-\infty, \infty)$

Lo que nos muestra el ejemplo anterior es lo siguiente: no es suficiente con que la segunda derivada de una función valga cero en un punto $x = c$ para que esta tenga un punto de inflexión ahí, hay que hacer uso del criterio de la segunda derivada, para poder localizar realemente un punto de inflexión.

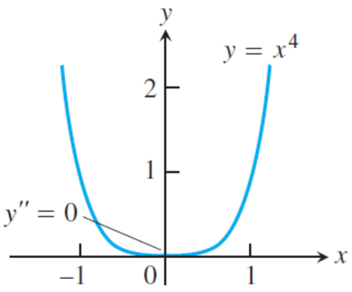


Figura 3.13: La gráfica $y = x^4$ no tiene punto de inflexión en el origen, a pesar de que $y'' = 0$ ahí.

Ejemplo 72. *Un punto de inflexión donde y'' no existe*

La gráfica de la curva $y = x^{\frac{1}{3}}$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$ ya que

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

e $y'' < 0$ en $(-\infty, 0)$, e $y'' > 0$ en $(0, \infty)$ por lo tanto hay un cambio de concavidad y por tanto un punto de inflexión, sin embargo la segunda derivada no está definida en $x = 0$

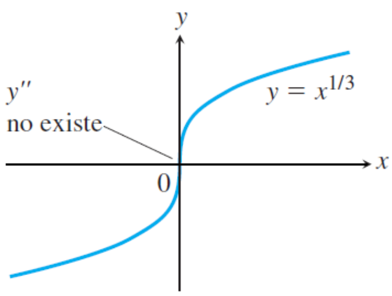


Figura 3.14: La gráfica $y = x^{\frac{1}{3}}$ tiene punto de inflexión en el origen, sin embargo y'' no existe ahí.

Problemas de optimización

Completamos esta sección con ejemplos que ilustran cómo se utilizan los conceptos que hemos estudiado para resolver un problema de optimización en el mundo real.

Un problema de optimización consiste en minimizar o maximizar el valor de una variable, en otras palabras se trata de calcular o determinar el valor mínimo o el valor máximo de una función de una variable. Se debe tener presente que la variable que se desea minimizar o maximizar debe ser expresada como función de otra de las variables relacionadas en el problema.

En ocasiones es preciso considerar las restricciones que se tengan en el problema, ya que éstas generan igualdades entre las variables que permiten la obtención de la función de una variable que se quiere minimizar o maximizar. En este tipo de problemas se debe contestar correctamente las siguientes preguntas:

- ¿Qué se solicita en el problema?
- ¿Qué restricciones aparecen en el problema?

La respuesta correcta a la primera pregunta nos lleva a definir la función que deberá ser minimizada o maximizada. La respuesta correcta a la segunda pregunta dará origen a una ecuación (al menos) que será auxiliar para lograr expresar a la función deseada precisamente como una función de una variable.

Ejemplo 73. *Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 50cm*^{3}*. Encuentre las dimensiones de la caja que maximicen la cantidad de material, que va a ser usado*

La siguiente figura representa la caja

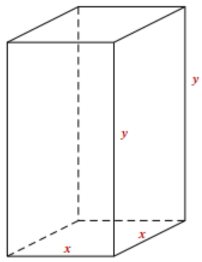


Figura 3.15

El volumen de la caja segun la figura es (Área de la base por altura)

$$V = x^2 \cdot y = 50$$

por otro lado el área de la caja es (Área de la base más áreas de las paredes de la caja)

$$A = x^2 + 4xy$$

ésta es la cantidad de material que deseamos que sea mínima; vemos que es una función de dos variables. Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen:

$$y = \frac{50}{x^2}$$

La cual sustituimos en la fórmula del área y obtenemos una función de una sola variable:

$$A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) = x^2 + \frac{200}{x} = x^2 + 200x^{-1}$$

derivando tenemos

$$A'(x) = 2x - 200x^{-2} = 2x - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^3 - 200}{x^2}$$

Igualando a cero, para encontrar los puntos críticos tenemos

$$\frac{2x^3-200}{x^2}=0 \quad si \quad 2x^3-200=0 \quad si \quad x^3=100 \quad esto \quad ocurre \quad si \quad x=\sqrt[3]{100}\,cm$$

observemos que la derivada $A'(x)=\frac{2x^3-200}{x^2}$ *no está definida en cero, por lo cual también* $x=0$ *es un punto crítico, sin embargo este punto es descartado, ya que fisicamente diríamos que nuestra caja tiene volumen igual a* 0*, una vez conocido el valor de* x*, podemos conocer la altura* y *de la caja, sustituimos este valor de* x *en* $y=\frac{50}{x^2}$ *entonces*

$$y=\frac{50}{100^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\frac{100}{100^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}100^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{100}=\frac{1}{2}x\,cm$$

Ejemplo 74. *Un ranchero tiene* $300\,m$ *de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.*

La siguiente figura representa los corrales contiguos:

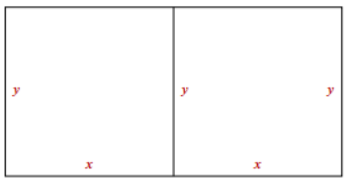


Figura 3.16

Tenemos que el perímetro y el área de los corrales son, respectivamente:

$$P=4x+3y=300 \qquad A=2xy$$

Despejamos y *de la restricción dada, esto es, de la fórmula del perímetro*

$$y=\frac{300-4x}{3}$$

La cual sustituimos en la fórmula del área y obtenemos una función de una sola variable:

$$A(x)=\frac{2x(300-4x)}{3}=200x-\frac{8}{3}x^2$$

Derivando y obteniendo los puntos críticos:

$$A'(x)=200-\frac{16}{3}x=0 \quad si \quad \frac{16}{3}x=200 \quad esto \quad ocurre \quad si \quad x=\frac{3\cdot 200}{16}=\frac{75}{2}$$

es el punto crítico, ahora si lo sustituimos en $y=\frac{300-4x}{3}$ *tenemos*

$$y=\frac{300-150}{3}=50$$

Por lo tanto el área máxima ocurre para $x=\frac{75}{2}\,m$ *e* $y=50\,m$

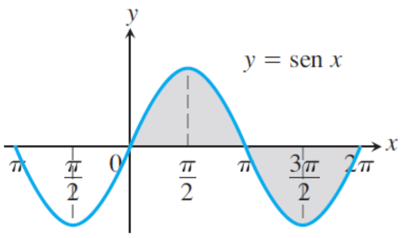
Ejercicios resueltos

Ejemplo 75. *Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones*

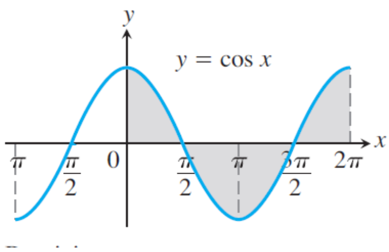
$$1. - f(x) = sen(x) \qquad 2. - f(x) = x^3 + 2$$

en los intervalos $[0{,}2\pi]$ *y todos lo números reales respectivamente*

1.- Notemos que en el intervalo $[0, 2\pi]$ *la función está bien definida, es continua y diferenciable, calculemos la derivada de* f*, esto es* $f'(x) = cos(x)$*, ahora como podemos ver en la figura 3.17 la función* $cos(x)$ *toma el valor cero en* $x = \frac{\pi}{2}$ *y* $x = \frac{3\pi}{2}$



(a) Gráfica de la función f(x)=sen(x)



(b) Gráfica de la función f'(x)=cos(x)

Figura 3.17

Por lo tanto el intervalo $[0, 2\pi]$ *se subdividirá en los subintervalos* $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}.\frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$*, evaluemos la derivada en puntos que estan contenidos en estos intervalos para observar el sigo de la derivada.*

Para el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ *tomemos el valor* $\frac{\pi}{4}$*, entonces* $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$*, con signo positivo*

Para el intervalo $(\frac{\pi}{2}.\frac{3\pi}{2})$ *tomemos el valor* π*, entonces* $f'(\pi) = -1$*, con signo negativo*

Para el intervalo $(\frac{\pi}{2}{,}2\pi)$ *tomemos el valor* $\frac{7\pi}{4}$*, entonces* $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$*, con signo positivo*

Por lo tanto podemos concluir que para el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$*, la función es creciente, en el intervalo* $(\frac{\pi}{2}.\frac{3\pi}{2})$ *la función es decreciente y finalmente en* $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ *es creciente, ver la figura 3.17.*

2.- Notemos que la función está bien definida, es continua y diferenciable en todos los reales, su derivada es $f'(x) = 3x^2$ *que se hace cero en* $x = 0$*. Por lo tanto dividiremos a los números reales en dos subintervalos que son* $(-\infty{,}0)$, $(0, \infty)$

Para el intevalo $(-\infty{,}0)$ *tomaremos el valor* -1*, entonces f'(-1)=3, con signo positivo*

Para el intevalo $(-\infty,0)$ *tomaremos el valor* 1*, entonces f'(1)=3, con signo positivo*

Por lo tanto podemos decir que la función $f(x) = x^3 + 2$ *es creciente en* $(-\infty,0)$ *y creciente también en* $(0,\infty)$.

Ejemplo 76. *Calcular los valores extremos de la siguiente función* $f(x) = x^2 - 4x$

Observemos que la función es un polinomio por tanto es continua y diferenciable en todos los números reales, es decir los únicos puntos críticos de la función son aquellos donde la derivada se hace cero, esto es $f'(x) = 2x - 4 = 0$*, que ocurre cuando* $x = 2$*, ahora usemos la prueba de la segunda derivada para ver si se trata de un mínimo o un máximo,* $f''(x) = 2$ *para todo número real, que es positiva, por tanto como* $x = 2$ *es un punto crítico y además* $f''(2) > 0$ *entonces en* $x = 2$ *es un mínimo.*

Ejemplo 77. *Calcular los intervalos donde la función dada a continucación es creciente y decreciente.*

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Igual que en el ejemplo anterior notamos que la función es un polinómio, por lo tanto la función es continua y diferenciable en todos los números reales, por lo tanto los únicos puntos críticos que posee la función son aquellos en que la derivada se hace cero, la primera derivada viene dada por $f'(x) = 3x^2 - 6x$ *que es igual a cero cuando* $x = 0$ *y* $x = 2$*, con estos puntos el dominio de la función que son todos los números reales se divide en los subintervalos* $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ *y* $(2,\infty)$*, en los que deberemos observar el signo que toma la derivada en cada uno de ellos, tomemos* $x = -1$ *en* $(-\infty, 0)$*, entonces* $f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9 > 0$*; tomemos* $x = 1$ *en* $(0, 2)$ *entonces* $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3 < 0$ *y finalmente tomemos a* $x = 3$ *en* $(2,\infty)$ *entonces* $f'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 9 > 0$*, por lo que podemos concluir que la función es creciente en* $(-\infty, 0)$ *y en* $(2,\infty)$ *y decreciente en* $(0, 2)$.

Nota *Este ejemplo debería pertenecer a la unidad anterior, sin embargo lo incluímos aqui por el siguiente ejercicio.*

Ejemplo 78. *Identificar los siguientes elementos de la función* $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

- *Extremos de f*
- *intervalos en los que f es creciente y decreciente*
- *encontrar los intervalos en que f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo*
- *Determinar si f tiene puntos de inflexión*

Notemos que f es un polinomio por lo cual es continua y diferenciable en $(-\infty,\infty)$*, su derivada* $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ *que también es continua y diferenciable en todo punto, por lo tanto los puntos críticos de f son únicamente donde la derivada se hace cero, esto es* $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$*, que ocurre cuando* $x = 3$ *y cuando* $x = 0$

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
Signo de f'	$-$	$-$	$+$
Comportamiento de f	crecimiento	decrecimiento	crecimiento

Figura 3.18

Usando la prueba de la primera derivada para extremos locales y la tabla anterior, vemos que no existe un extremo en $x = 0$ ya que la derivada no cambia de signo es decir es decreciente antes y depués de $x = 0$, pero si hay un mínimo en $x = 3$, en cuyo caso también podriamos haberlo visto con la prueba de la segunda derivada, ya sabemos que en $x = 0$ y $x = 3$ $f'(x) = 0$, si calculamos la segunda derivada obtenemos $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$, evaluando en $x = 0$ tenemos $f''(0) = 0$ que no da información acerca de si hay un máximo o un mínimo, por otro lado $f''(3) > 0$ y aqui la prueba de la segunda derivada nos dice que en efecto hay un mínimo. Por tanto vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, 3)$ y creciente en $(3, \infty)$, y tiene un extremo local en $x = 3$ que es un mínimo.

Ahora determinaremos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, la segunda derivada $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ es cero en $x = 0$ y $x = 2$

Intervalos	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
Signo de f''	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	cóncavo hacia arriba	cóncavo hacia abajo	cóncavo hacia arriba

Figura 3.19

Usando el criterio de la segunda derivada y la tabla anterior, vemos que $x = 0$ y $x = 2$ son puntos de inflexión, pues la concavidad de la función cambia. Por tanto f es concava hacia abajo en $(0, 2)$ y coñcava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$.

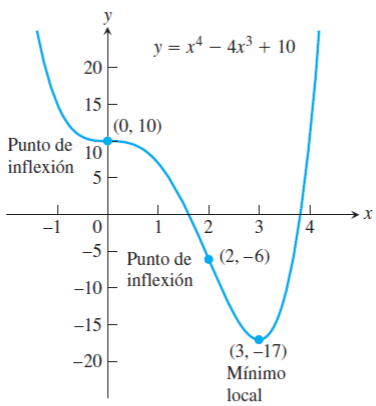


Figura 3.20: Gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

Ejemplo 79. *Encontrar dos números que sumados den como resultado 50 y su multiplicación sea máxima* *la suma de los dos número debe ser 50, esto es*

$$x + y = 50$$

y la multplicación de estos dos números debe ser máxima, la multplicación la denotamos por

$$P = x \cdot y$$

de la suma despejemos a y*, esto es* $y = 50 - x$ *y a continuación sustiyamosla en* P*, para obtener una función de* x

$$P(x) = x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$$

La función es un polinomio, continuo y diferenciable en todos los números reales, ahora, la derivada esta dada por

$$P'(x) = 50 - 2x$$

que es igual a cero si $x = 25$*, usando el criterio de la segunda derivada tenemos que* $f''(x) = -2 < 0$ *y evaluada en* $x = 25$ *tenemos* $f''(25) = -2 < 0$*, por lo tanto* $x = 25$ *es un máximo. Sustituyendo para encontrar el valor de* y *tenemos que* $y = 50 - 25 = 25$ *por tanto los número que suman* 50 *y que hacen máximo su producto (es decir hacen que el resultado de multiplicarse entre sí sea máximo) son* $x = 25$ *e* $y = 25$

UNIDAD 4

LA INTEGRAL

Una de las grandes hazañas de la geometría clásica, consistió en obtener fórmulas para determinar las áreas y volúmenes de triángulos, esferas y conos. En este capítulo estudiaremos un método para calcular las áreas y volúmenes de estas formas y de otras más generales. El método que desarrollaremos, llamado integración, es una herramienta para calcular mucho más que áreas y volúmenes. La integral tiene muchas aplicaciones en estadística, economía, ciencias e ingeniería. Nos permite calcular rangos de cantidades de probabilidad y promedios de consumo de energía, así como la fuerza del agua contra las compuertas de una presa.

El objetivo de la integración es permitirnos calcular efectivamente muchas cantidades, dividiéndolas en partes más pequeñas y sumando después la contribución de cada trozo. Desarrollaremos la teoría de la integral en el escenario del área, donde revela más claramente su naturaleza. Empezaremos con ejemplos que involucran sumas finitas. Éstos nos conducirán de forma natural a esta pregunta: ¿qué sucede cuando sumamos más y más términos?, pasando al límite, cuando el número de términos tiende a infinito, se obtiene la integral. Aunque la integración y la derivación están estrechamente relacionadas, hablaremos del papel que juegan la derivada y la antiderivada . La naturaleza de su conexión, contenida en el teorema fundamental del cálculo, que es una de las ideas más importantes del cálculo.

Antes de iniciar el estudio de la integral indefinida es conveniente mencionar y hacer del conocimiento del lector el concepto de función primitiva ya que tiene una importancia fundamental para entender la relación que guarda la función derivada con la función integral.

Definición 22. *Función primitiva*

La función primitiva de una función $f(x)$, es otra función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$; es decir

$$F'(x) = f(x)$$

Ejemplo 80. *Primitivas*

1.- Se sabe que la derivada de x^2 es $2x$, pues bien x^2 es una función primitiva de la función

$2x$, En notación $F(x) = x^2$ y $f(x) = 2x$

2.- la derivada de la función $sen(x)$ es $cos(x)$, es decir $sen(x)$ es función primitiva de $cos(x)$, en notación $F(x) = sen(x)$ y $f(x) = cos(x)$

Nota: Una función $f(x)$ tiene un número infinito de funciones primitivas, pero dos cualesquiera de ellas, $F_1(x)$ y $F_2(x)$ difieren en una constante, es decir, $F_2(x) = F_1(x) + C$. Una vez conocido el concepto de primitiva procederemos a definir el concepto de integral indefida

Definición 23. *Integral idefinida*

Al conjunto de todas las primitivas de una función $f(x)$ se les llama integral indefinida y se le denotará como

$$\int f(x)dx$$

En la definición anterior el término dx que se encuentra depués de la función hace referencia a la variable que se está integrando, esto para que no exista confusión alguna, ya que hasta el momento hemos revisado solo el cálculo de una variable, sin embargo existe el cálculo de varias variables donde no debe haber duda alguna sobre que variable se integrará o diferenciará. Con la notación de arriba y lo que hemos discutido hasta el momento notemos que si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ entonces por definición $\int f(x)dx = F(x)+C$, en esta expresión a la función $f(x)$ se le llama integrando y a la constante C constante de integración.

Ejemplo 81. *Demuestre que*

$$1.-\frac{d\int 3x^2}{dx} = 3x^2 \qquad 2.-\int \frac{dsen(x)}{dx} = sen(x) + C$$

1.- La integral indefinida de $3x^2$ es $x^3 + C$ y la derivada de $x^3 + C$ es $3x^2$ por lo que

$$\frac{d\int 3x^2dx}{dx} = \frac{d(x^3 + C)}{dx} = 3x^2$$

2.- La derivada de $sen(x)$ es $\frac{dsen(x)}{dx} = cos(x)$ y la integral indefinida de $cos(x)$ es $sen(x)+C$, por lo tanto tenemos que

$$\int \frac{dsen(x)}{dx} = \int cos(x)dx = sen(x) + C$$

Prueba de la integración indefinida

Para comprobar si una integral indefinida es correcta, se halla la derivada del resultado y éste debe ser el integrado.

Ejemplo 82. *Muestre que $\int 3x^2dx = x^3 + C$*

Derivando el resultado tenemos que

$$\frac{d(x^3 + C)}{dx} = 3x^2$$

que es el integrando

Propiedades de la integración indefinida

Aplicando la prueba de integración y recordando las propiedades de la derivada resulta.

Regla 35. *La integral de una suma de un número n de funciones es igual a la suma de las integrales, por ejemplo para $n = 2$ funciones, tenemos*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Regla 36. *La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Regla 37. *Integral de potencias de x*

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Aquí hicimos uso de la regla de derivación de potencias de x que vimos en la unidad 2.

Regla 38. *Integral para polinómios en x, si $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ con $n \neq 1$ entonces*

$$\int f(x)dx = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + ... + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + C$$

Aquí usamos las reglas de la suma y potencia

Ejemplo 83. *Aplicación de las reglas anteriores*
Calcular las siguientes integrales

$$1.-\int 4x^5 dx \qquad 2.-\int (x^4 + 3x + 1)dx$$

1.-Aquí haremos uso de la regla de la integral para el producto de una función por una constante, y la regla para la integral de potencias, entonces tenemos que

$$\int 4x^5 dx = 4\cdot\int x^5 = 4\cdot\frac{x^6}{6} + C = \frac{2}{3}x^6 + C$$

2.-Aquí usaremos la regla de la integral para potencias, la regla de la integral para la suma y la regla de la integral para el producto de una función por una constante, entonces tenemos que

$$\int (x^4 + 3x + 1)dx = \int x^4 dx + 3\int xdx + \int 1dx = \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

Fórmulas de integración e integrales inmediatas

De la definición de integral indefinida y de las fórmulas obtenidas para las derivadas, usando la regla de la cadena se deducen las siguientes fórmulas de integración que se recomienda tener siempre presente.

- $\int du = u + C$
- $\int kdu = ku + C$
- $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
- $\int \frac{du}{u} = ln(u) + C$
- $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$
- $\int cos(u)du = sen(u) + C$
- $\int sen(u)du = -cos(u) + C$
- $\int sec^2(u)du = tan(u) + C$
- $\int csc^2(u)du = -cot(u) + C$
- $\int sec(u)\cdot tan(u)du = sec(u) + C$
- $\int csc(u)\cdot cot(u)du = -csc(u) + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\,sen(u) + C$
- $\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\,cos(u) + C$
- $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = arc\,tan(u) + C$
- $\int \frac{-du}{\sqrt{1+u^2}} = arc\,cot(u) + C$
- $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = arc\,sec(u) + C$
- $\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} = arc\,csc(u) + C$

- $\int e^u du = e^u + C$
- $\int a^u du = \frac{a^u}{ln(a)}$

Integral definida

En la sección anterior hemos estudiado las primitivas de una función, descubriendo distintos procedimientos para realizar su cálculo; es decir, se han encontrado las integrales indefinidas de funciones sencillas. Sin embargo, no se ha especificado ni su significado ni su utilidad; los cuales se presentarán en esta sección para tal efecto se dará la interpretación que el matemático alemán Bernhard Riemann dio a conocer en el siglo XIX.

Notación sigma

La notación sigma nos permite escribir una suma con muchos términos en la forma compacta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

La letra griega $\sum$ (sigma mayúscula, corresponde a nuestra letra S), significa "suma". El índice de la sumatoria k nos dice en dónde empieza la suma (mediante el número que está debajo del símbolo $\sum$) y en dónde termina (usando el número que está arriba del símbolo $\sum$). Se puede usar cualquier letra para denotar el índice, pero las letras más usuales son i, j y k.

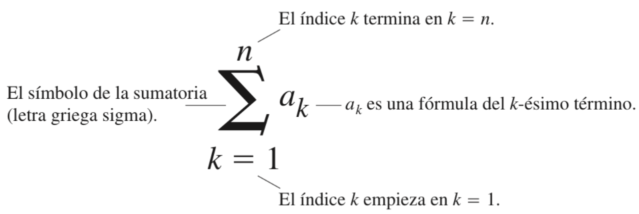


Figura 4.1: Elementos de una suma

Ejemplo 84. *Escribir en notación sigma las siguientes sumas*

$a)1 + 2 + 3 + 4 + ... + 30$ $\quad$ $b)1 + 4 + 9 + 16 + ..,100$ $\quad$ $c) - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7$

$a)$ $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 30 = \sum_{i=1}^{30} i$

$b)$ $1 + 4 + 9 + 16 + ... + 100 = \sum_{k=1}^{10} k^2$

$b)$ $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 = \sum_{k=1}^{7} (-1)^k \cdot k$

Ejemplo 85. *Uso de diferentes valores iniciales de índices*

Expresar la suma 1+3+5+7+9 en notación sigma

Empezando con $k = 0$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=0}^{4}(2k + 1)$

Empezando con $k = 1$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{4}(2k - 1)$

Empezando con $k = 2$ $\quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=2}^{4}(2k - 3)$

Regla 39. *Reglas algebraicas para sumas finitas*

- *Regla de la suma* $\quad \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
- *Regla de la diferencia* $\quad \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
- *Regla del múltiplo constante* $\quad \sum_{k=1}^{n}(sa_k) = s\sum_{k=1}^{n} a_k$
- *Regla del valor constante* $\quad \sum_{k=1}^{n} c = nc$

Ejemplo 86. *Uso de las reglas algebraicas de la sumas finitas*

a) $\sum_{k=1}^{n}(3k - k^2) = 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$
b) $\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1) \cdot a_k = -1 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n}$
c) $\sum_{k=1}^{n}(k + 4) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4 = \sum_{k=1}^{n} k + n \cdot 4$

Al cabo del tiempo, la gente ha descubierto una variedad de fórmulas para los valores de sumas finitas. La más famosa de éstas es la fórmula para la suma de los primeros n enteros (Posiblemente Gauss la descubrió a la edad de 8 años) y las fórmulas para las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros.

Teorema 4.1. *Sea* n *un número natural, entonces*

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

El teorema anterior será muy importante para el cálculo de integrales definidas y por tanto también para el cálculo de áreas debajo de curvas.

Cálculo de Áreas

El cálculo de área de figuras como el cuadrado, el rectángulo, el rombo, etc., además de sencillo tiene un claro significado: el área de una figura es un número que coincide con el número de cuadrados de lado uno que recubre exactamente la figura en cuestión. Para tal efecto se tiene un concepto intuitivo de área que consta de las tres propiedades siguientes:

- El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura.
- El área de una región que consta de rectángulos que no se traslapan pero que incluso pueden tener límites comunes, es la suma de las áreas de los rectángulos separados.
- Si una región 1 está contenida en la región 2, entonces el área de la región 1 no es mayor que el área de la región 2.

Se puede cuestionar entonces, si cualquier figura tiene área y cómo se calcula. La idea es aproximar la región uniendo un gran número de rectángulos delgados que no se traslapen. Entonces el área de la región que se desea queda aproximada por la suma de las áreas de los rectángulos. Si se emplean cada vez más y más rectángulos con bases más y más reducidas, se puede esperar que la suma de sus áreas se acerque más y más al área de la región dada. Los siguientes ejemplos muestran el procedimiento.

El área de la región con una frontera curva puede ser aproximada sumando las áreas de un conjunto de rectángulos. Al usar más rectángulos podemos aumentar la exactitud de la aproximación.
Ejemplo 87. *Aproximación de área por sumas finitas*

¿Cuál es el área de la región sombreada R que está arriba del eje x, debajo de la gráfica de $y = 1 - x^2$, y entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$? ver figura siguiente. Un arquitecto podría querer conocer esta área para calcular el peso de una ventana especial con una forma que podría describirse mediante R. Desafortunadamente, no existe una fórmula geométrica sencilla para calcular las áreas de formas que tengan una frontera curva como la región R.

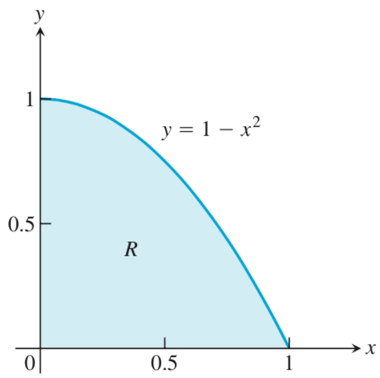


Figura 4.2: Elementos de una suma

Aún cuando no contamos con un método para determinar el área exacta de R, podemos aproximarla de una manera sencilla. La figura 4.3 (a) muestra dos rectángulos que, juntos, contienen la región R. Cada rectángulo tiene ancho de $\frac{1}{2}$ y, de izquierda a derecha, tienen altura 1 y $\frac{3}{4}$ respectivamente. La altura de cada rectángulo es el valor máximo de la función f, obtenido al evaluar f en el extremo izquierdo del subintervalo $[0,1]$ formando la base del rectángulo. El área total de los dos rectángulos aproxima el área A de la región R,

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = ,875$$

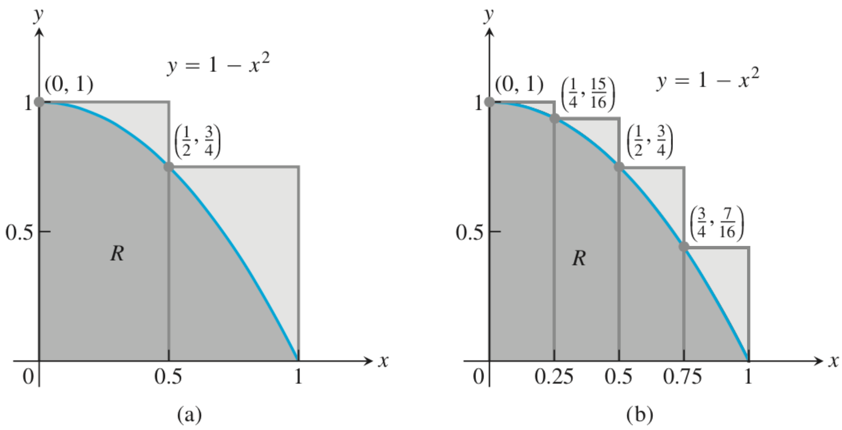


Figura 4.3: Áreas

Esta estimación es mayor que el área verdadera A, ya que los dos rectángulos contienen a R. Decimos que 0,875 *es una suma superior, porque se obtuvo tomando la altura de cada rectángulo como el valor máximo (el más alto) de $f(x)$ para x, un punto en el intervalo base del rectángulo. En la figura 4.3 (b) mejoramos nuestra estimación usando cuatro rectángulos más delgados, cada uno con ancho de $\frac{1}{4}$, que tomados en conjunto contienen la región R. Estos cuatro rectángulos dan la aproximación*

$$A \approx 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{25}{32} = ,78125$$

que sigue siendo mayor que A, ya que los cuatro rectángulos contienen a R.

Supongamos, en cambio, que para estimar el área usamos cuatro rectángulos contenidos dentro de la región R, como en la figura 4.4. Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$ como antes, pero son más chicos y están completamente por debajo de la gráfica de f. La función $f(x) = 1 - x^2$ decrece en $[0, 1]$, de manera que la altura de cada rectángulo está dada por el valor de f en el extremo derecho del subintervalo que forma la base. El cuarto rectángulo tiene altura cero y, por lo tanto, no contribuye al área. Sumando estos rectángulos con alturas iguales al valor mínimo de $f(x)$ para x un punto de cada subintervalo base, obtenemos una suma inferior de aproximación del área,

$$A \approx \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{32} = ,53125$$

Esta estimación es menor que el área A, ya que los todos rectángulos están dentro de la región R. El valor verdadero de A está entre las sumas inferior y superior:

$$,53125 < A < ,78125$$

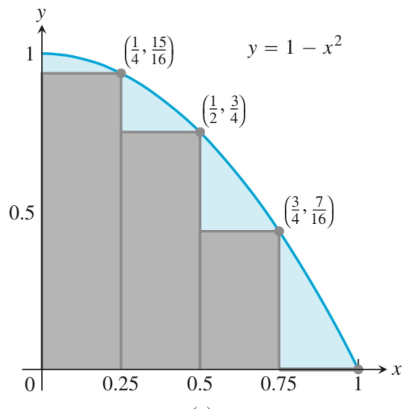


Figura 4.4: Áreas

En cada una de nuestras sumas, el intervalo $[a, b]$ *sobre el que la función* f *está definida, fue subdividido en* n *subintervalos de igual ancho (también llamado longitud)* $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ *y* f *se evaluó en un punto en cada subintervalo:* c_1 *del primer subintervalo ,* c_2 *del segundo subintervalo, y así sucesivamente. De esta manera, el área de una región cualquiera se puede aproximar por la suma finita*

$$A \approx f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \tag{4.1}$$

Tomando más y más rectángulos, cada vez más delgados que antes, parece que esta suma finita da cada vez mejores aproximaciones del área verdadera de la región R*, como veremos más adelante, el área de esta región es* $\frac{2}{3}$

Sumas de Riemann

La teoría de límites de aproximaciones finitas fue formalizada por el matemático alemán Bernhard Riemann. A continuación se hablará de la noción de suma de Riemann, base de la teoría de la integral definida que estudiaremos. Empezamos con una función arbitraria f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La función f puede tener valores tanto negativos como positivos. Subdividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, no necesariamente del mismo ancho (o longitud), y formamos sumas como lo hicimos para las aproximaciones finitas en la sección anterior. Para hacerlo, elegimos $n - 1$ puntos $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}\}$ entre a y b, que satisfagan

$$a < x_1 < x_2 < x_3, ..., x_{n-1} < b$$

Para lograr una notación consistente, denotamos a mediante x_0 y b mediante x_n , de manera que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3, ..., x_{n-1} < x_n = b$$

El conjunto

$$P = \{x_0, x_1, ...x_{n-1}, x_n\}$$

es llamado partición del intervalo $[a, b]$, notemos que la partición P divide a $[a, b]$ en n subintervalos cerrados ordenados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

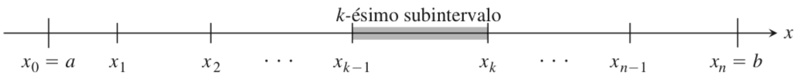


Figura 4.5: k-ésimo intervalo

El ancho del primer subintervalo $[x_0, x_1]$ se denota mediante Δx_1 , el ancho del segundo intervalo $[x_1, x_2]$ es Δx_2 , y el ancho del k-ésimo subintervalo es $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Si todos los n subintervalos tienen el mismo ancho, el ancho común, Δx es igual a $\frac{(b-a)}{n}$.

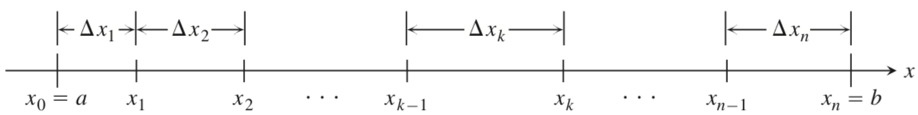


Figura 4.6: Tamaño del k-ésimo intervalo

En cada subintervalo elegimos algún punto. El punto elegido en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se llama c_k . Entonces, en cada subintervalo levantamos un rectángulo vertical a partir del eje x

hasta tocar la curva en $(c_k, f(c_k))$. Estos rectángulos pueden estar arriba o debajo del eje x, dependiendo de si $f(c_k)$ es positivo o negativo, o si $f(c_k) = 0$ ver la figura 4,7.

En cada subintervalo formamos el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$. Este producto es positivo, negativo o cero dependiendo del signo de $f(c_k)$. Cuando $f(c_k) > 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es el área del rectángulo con altura $f(c_k)$ y ancho Δx_k. Cuando $f(c_k) < 0$, el producto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$ es un número negativo, el negativo del área del rectángulo de ancho Δx_k que cae desde el eje x al número negativo $f(c_k)$. Finalmente sumamos todos estos productos para obtener

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

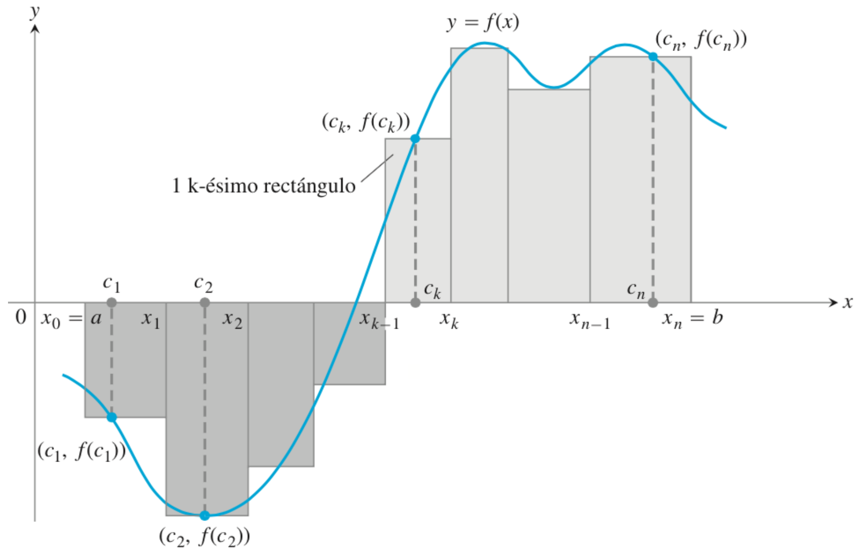


Figura 4.7: Aproximación del área bajo la curva por medio de sumas de Riemann

La suma S_P se conoce como suma de Riemann para f en el intervalo $[a, b]$. Hay una infinidad de estas sumas, dependiendo de la partición P que se elija y de la elección de los puntos c_k de los subintervalos.

Definimos la norma de una partición P, denotada por $||P||$ como el mayor de los anchos de todos los subintervalos, a una partición P se le conoce como uniforme cuando todos sus subintervalos miden lo mismo.

Ejemplo 88. *Calcular la suma de Riemann para la función $f(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ con partición P uniforme de tamaño $\frac{1}{n}$*

Calculemos la sumas de Riemann tomando a c_k como los puntos extremos derechos de cada subintervalo, es decir $c_k = \frac{k}{n}$ sabemos que $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ ya que la partición es uniforme, por otro lado estos subintervalos son

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right], \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

La suma de Riemman asociada a la partición $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ es

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot n - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}$$

que es la suma de Riemann que buscamos, notemos que la suma está en términos del número de divisiones que hicimos del intervalo $[0, 1]$, que pasa ahora si hacemos tender el número n

a infinito esto implicaría que el tamaño de la partición se acerca a 0, ya que la norma de P se haría cada vez más pequeña, por lo tanto si calculamos el límite cuado n tiende a infinito obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_p = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Que es justamente el área exacta debajo de la curva.

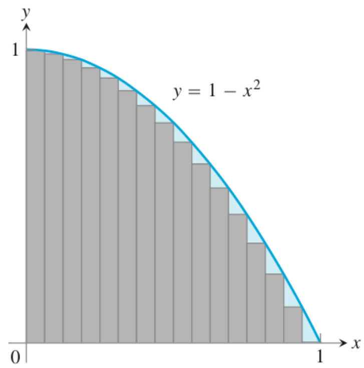


Figura 4.8: Aproximación del área bajo la curva por medio de sumas de Riemann

La integral definida

En la sección anterior investigamos el límite de una suma finita definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ usando n subintervalos del mismo ancho (o longitud), En esta sección consideraremos el límite de sumas de Riemann más generales cuando la norma de las particiones de $[a,b]$ tienden a cero. Para las sumas de Riemann más generales, los subintervalos de las particiones no necesitan tener el mismo ancho. El proceso de límite nos conduce a la definición de la integral definida de una función en un intervalo cerrado $[a,b]$.

La definición de la integral definida se basa en la idea de que, para ciertas funciones, cuando las normas de las particiones de $[a,b]$ tienden a cero, los valores de las sumas de Riemann correspondientes tienden a un valor límite I. Lo que queremos decir con esta idea de convergencia es que una suma de Riemann estará cerca del número I siempre que la norma de la partición sea suficientemente pequeña (de manera que todos sus subintervalos tengan ancho suficientemente pequeño). Introduciremos el símbolo como un número pequeño ϵ positivo que especifíca qué tan cerca debe estar la suma de Riemann de I, y el símbolo como un segundo número pequeño δ positivo que especifica qué tan pequeña debe ser la norma de una partición para que eso pase. He aquí la formulación precisa.
Definición 24. *La integral definida como un límite de sumas de Riemann.*

Sea $f(x)$ una función acotada definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Decimos que un número I es la integral definida de f en $[a,b]$, y que I es el límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ si se satisface la siguiente condición.

Dado cualquier número $\epsilon > 0$ existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda partición $P = \{x_0, x_1 ..., x_n\}$ de $[a,b]$ con $||P|| < \delta$ y cualquier elección de c_k en $[x_{k-1}, x_k]$, *tenemos que*

$$|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - I| < \epsilon$$

Notación y existencia de la integral definida

El símbolo para el número I en la definición de la integral definida es

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

que se lee como "la integral de a a b de f de x" o algunas veces como "la integral de a a b de f de x respecto de x", por otro lado las partes que componen la integral tienen sus nombres

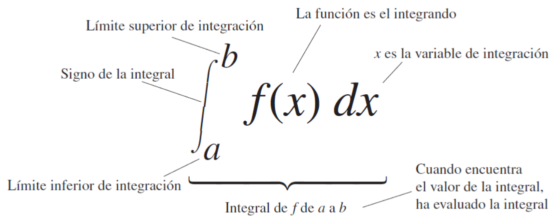


Figura 4.9: Aproximación del área bajo la curva por medio de sumas de Riemann

Cuando se satisface la definición, decimos que las sumas de Riemann de f en $[a, b]$ convergen a la integral definida $I = \int_a^b f(x)dx$ y decimos que f es integrable en $[a, b]$

Significado de la integral definida de una función

- Si una función positiva $f(x)$, definida en un intervalo $[a, b]$, es integrable, entonces existe la integral de $[a, b]$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ representa el área de la región determinada por la gráfica de la función, el eje de las abscisas x y las rectas $x = a$ y $x = b$
- Si la función $y = f(x)$ fuese negativa en el intervalo $[a, b]$, la gráfica de la función quedaría por debajo del eje de abscisas, entonces $f(x)$ es negativa y, ya que el área es siempre un número positivo, el área de la región que determina una función negativa, es entonces $A = -\int_a^b f(x)dx$
- Finalmente si la gráfica de la función queda parte por encima y parte por debajo del eje de abscisas, la integral se descompone en varios sumandos cuando se quiera calcular el área de la región que delimita con el eje de las abscisas en el intervalo $[a, b]$

La integral de Riemann poco ayuda a su cálculo, pues es imposible encontrar todas las sumas de Riemann posibles. No obstante, hay criterios que son mucho más útiles para decidir si una función acotada es integrable o no. Uno de ellos se obtiene con el siguiente teorema

Teorema 4.2. *Toda función continua en un intervalo es integrable en dicho intervalo. Si f(x) es una función definida en un intervalo* $[a, b]$*, entonces* $f(x)$ *es integrable, es decir, si existe* $\int_a^b f(x)dx$

Veamos un ejemplo

Ejemplo 89. *Calcular el área bajo la gráfica de la función f(x)=x en el intervalo* $[0, b]$ *donde* b *es un número real cualquiera.*

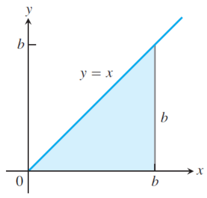


Figura 4.10: Área que deseamos calcular

Notemos primero que el área que debemos calcular corresponde a un triángulo de base b *y de altura* b*, por lo que sabemos de matemática elemental, el área de un triángulo está dada por* $A = \frac{base \cdot altura}{2}$*, por lo tanto el área que deberiamos de obtener es* $A = \frac{b^2}{2}$*. Para encontrar la integral definida como suma de Riemann, calculamos* $\lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ *para normas cuyas particiones tienden a* 0*, El teorema anterior nos dice que no importa como elijamos las partciones o los puntos* c_k *siempre y cuando las normas de la partición* P *tiendan a* 0*. Todas las partciones dan exctamente el mismo límite. De manera que consideramos la partición* P *que subdivide el intervalo* $[0, b]$ *en* n *subintervalos del mismo ancho* $\Delta x = \frac{(b-0)}{n} = \frac{b}{n}$*, y elegimos* c_k *como el extremo derecho de cada subintervalo. La partición es* $P = \left\{0, \frac{2b}{n}, . \frac{3b}{n}, ..., \frac{nb}{n}\right\}$ *y* $c_k = \frac{kb}{n}$*, en consecuencia,*

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n} \cdot \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kb^2}{n^2} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

cuando $n \to \infty$ *y* $||P|| \to 0$*, esta última expresión de la derecha tiene como límite* $\frac{b^2}{2}$*. Por lo tanto*

$$\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$$

Por otro lado como el área en una función no negativa, es igual a su integral definida, entonces este es el valor del área bajo la curva $f(x) = x$ *de* 0 *a* b

A continuación enunciamos propiedadaes importantes que satisfacen las integrales definidas:
Teorema 4.3. *Cuando* f *y* g *son integrables, la integral definida satisface las reglas 1 a 7*

1.-Orden de integración $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2.-Intervalos de ancho cero $\int_a^a f(x)dx = 0$
3.-Múltiplo constante $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
4.-Suma y diferencia $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5.-Aditividad $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
6.-Desigualdad max-min, si f *tiene un valor máximo max y un valor mínimo min en* $[a, b]$*, entonces*
$min\, f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq max\, f \cdot (b-a)$
Dominación $f(x)$
Ejemplo 90. *Uso de las reglas para integrales definidas*

Supongamos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5 \qquad \int_{1}^{4} f(x)dx = -2 \qquad \int_{-1}^{1} h(x) = 7$$

Entonces
$\int_4^1 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx = -(-2) = 2$

$\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)]dx = 2\int_{-1}^1 f(x)dx + 3\int_{-1}^1 h(x)dx = 2(5) + 3(7) = 31$

$\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = 2 + (-2) = 3$

Teorema del valor medio para integrales definidas

El teorema del valor medio para integrales definidas afirma que la función f alcanza siempre, por lo menos una vez en el intervalo, el valor promedio. La gráfica de la figura de abajo muestra una función continua positiva $y = f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$. Geométricamente, el teorema del valor medio dice que existe un número c en $[a, b]$ tal que el rectángulo con altura igual al valor promedio $f(c)$ de la función y el ancho de la base $b-a$ tiene exactamente la misma área que la región que está debajo de la gráfica de f, de a a b.

Figura 4.11: Interpretación geometríca del teorema de valor medio

Teorema 4.4. *Teorema del valor medio para integrales*

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ entonces en elgún punto c en $[a, b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Teorema fundamental del cálculo

Si $f(t)$ es una función integrable en un intervalo finito I, la integral de cualquier número fijo $a \in I$ a otro número $x \in I$ define una nueva función F cuyo valor en x es

$$F(x) = \int_a^b f(t)dt \tag{4.2}$$

Por ejemplo, si f es no negativa y x está a la derecha de a, entonces $F(x)$ es el área debajo de la gráfica de a a x. La variable x es el límite superior de integración de una integral, pero F es como cualquier otra función real de variable real. Para cada valor de la entrada x existe un resultado bien definido numéricamente, en este caso la integral definida de f, de a a x.

La ecuación (1) da una manera de definir funciones nuevas, pero su importancia por el momento es la conexión que hace entre integrales y derivadas. Si f es cualquier función continua, entonces el teorema fundamental del cálculo afirma que F es una función diferenciable de x cuya derivada es la misma f. En todo valor de x, en otras palabras

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

En palabras concretas tenemos el siguiente teorema:
Teorema 4.5. *Teorema Fundamental del cálculo, parte 1*

Si f es continua en $[a,b]$, entonces $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), y su derivada es $f(x)$

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

Ejemplo 91. *Aplicación del teorema fundamental*

Encontrar

$$1.-\frac{d}{dx}\int_a^x cos(t)dt \qquad 2.-\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \qquad 3.-\frac{dy}{dx} \quad si \quad y=\int_1^{x^2} cos(t)dt$$

1.- $\frac{d}{dx}\int_a^x cos(t)dt=cos(x)$ *ecuación (2) con* $f(t)=cos(t)$

2.-$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{1+x^2}$ *ecuación (2) con f(t)=*

3.- El límite superior de la integración no es x, sino x^2. Esto hace que y sea una composición de dos funciones

$$y=\int_1^u cos(t)dt \quad y \quad u=x^2$$

Por lo tanto, debemos aplicar la regla de la cadena cuando encontramos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(\frac{d}{du}\int_1^u cos(t)dt\cdot\frac{du}{dx}\right)=cos(u)\cdot\frac{du}{dx}=cos(x^2)\cdot 2x$$

Veamos ahora la segunda parte del teorema fundamental del cálculo. En ella se describe cómo evaluar integrales definidas sin usar el cálculo de límites de sumas de Riemann. En lugar de ello, encontramos una antiderivada y la evaluamos en los límites de integración superior e inferior.
Teorema 4.6. *Teorema fundamental del cálculo, parte 2*
Si f es continua en todos los puntos de $[a,b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

El teorema anterior nos dice que para calcular la integral definida de f en $[a,b]$, todo lo que debemos de hacer es lo siguiente:

- Encontrar una antiderivada F de f, y
- Calcular el número $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

La notación usual para $F(b)-F(a)$ es $[F(x)]_a^b$, dependiendo si f tiene uno o más términos.

La demostración de estos dos hechos importantes que acabamos de revisar, se encuentran en textos un poco más refinados, aquí no lo incluímos por cuestiones de tiempo ya que demoraríamos en hacerlo, sin embargo, las versiones de este teorema que acabamos de enunciar son las versiones menos sofisticadas, ya que hay versiones más generales, donde se descarta la continuidad de las funciones y se piden condiciones más débiles.

Ahora mostraremos ejemplos del como se usa la segunda parte del teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo 92. *Evaluación de integrales*

1. – $$\int_0^{\pi} cos(x)dx = [sen(x)]_0^{\pi} = sen(\pi) - sen(0) = 0 - 0 = 0$$

2. – $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} sec(x) \cdot tan(x)dx = [sec(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{0} = sec(0) - sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

3. – $$\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{x}\right]_1^4 = \left[(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{1}\right] = [8+1] - [5] = 4$$

Notemos que en el ejemplo anterior fue mucho más fácil calcular el valor de la integral por medio del teorema fundamental (parte 2) que por sumas de Riemann.

La suma de Riemann contiene términos de la forma $f(c_k)\Delta_k$ que dan el área de un rectángulo cuando $f(c_k)$ es positiva. Cuando $f(c_k)$ es negativa, el producto $f(c_k)\Delta_k$ es el negativo del área del rectángulo. Cuando sumamos tales términos para una función negativa, obtenemos el negativo del área entre la curva y el eje x. Si tomamos entonces el valor absoluto. obtenemos el área positiva.

UNIDAD 5

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

En este capítulo se estudiarán las técnicas elementales para reducir a inmediatas las integrales que no lo sean, es decir, integración por sustitución, por partes, de funciones trigonométricas, integrales de cocientes de polinomios por descomposición en fracciones simples.

Los métodos de integración tienen por objetivo transformar una integral dada no inmediata, en otra o en la suma de varias, con la finalidad de que el cálculo sea sencillo. Por ejemplo: Integración por partes se refiere a descomponer una integral en una suma de un producto de funciones más una más sencilla que la inicial. La descomposición en fracciones simples de un cociente de polinomios resulta en una suma de fracciones, donde las integrales se hallan más facilmente.

Sustitución

Comencemos de lleno con la regla de sustitución.
Teorema 5.1. *Regla de sustitución*

Sea $u = g(x)$ cuyo rango es un intervalo digamos I y f una función continua en I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

La regla de sustitución proporciona el siguiente método para evaluar la integral

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

1.- Sustitur $u = g(x)$ y $du = g'(x)dx$ para obtener la integral

$$f(u)du$$

2.- Integrar respecto a u
3.- Remplazar u por $g(x)$ en el resultado

En general, la idea principal de este método es lograr ver al integrando como una función u junto con su derivada, los ejemplos siguientes ilustran de mejor manera lo que acabamos de mencionar.

Ejemplo 93. *Uso de la regla de sustitución: integrar*

$$\int cos(7\theta+5)d\theta$$

Hagamos $u=7\theta+5$, *entonces* $du=7d\theta$ *así* $\frac{1}{7}du=d\theta$, *por lo tanto tenemos que:*

$$\int cos(7\theta+5)d\theta=\int cos(u)\cdot\frac{1}{7}du=\frac{1}{7}\int cos(u)du=\frac{1}{7}sen(u)+C=\frac{1}{7}sen(7\theta+5)+C$$

Ejemplo 94. *Uso de la regla de sustitución: integrar*

$$\int x^2sen(x^3)dx$$

Hagamos $u=x^3$ *entonces* $du=3x^2dx$ *así* $\frac{1}{3}du=x^2dx$ *por lo tanto tenemos que*

$$\int x^2sen(x^3)dx=\int sen(x^3)x^2dx=\int sen(u)\cdot\frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int sen(u)du=\frac{1}{3}(-cos(u)+C)$$

$$=-\frac{1}{3}cos(x^3)+C$$

Ejemplo 95. *Uso de la regla de sustitución: integrar*

$$\int\frac{2zdz}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

Sea $u=\sqrt[3]{z^2+1}$ *entonces* $u^3=z^2+1$ *así* $3u^2du=2zdz$ *por lo que*

$$\int\frac{2zdz}{\sqrt[3]{z^2+1}}=\int\frac{3u^2du}{u}=3\int udu=3\cdot\frac{u^2}{2}+C=\frac{3}{2}(z^2+1)^{\frac{2}{3}}+C$$

Ejemplo 96. *Uso de la regla de sustitución: integrar*

$$\int x^5dx$$

Sea $u=x^3$ *entonces* $du=3x^2dx$ *así* $\frac{du}{3}=x^2dx$ *por lo que*

$$\int x^5dx=\int x^3\cdot x^2dx=\int\frac{1}{3}udu=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^2}{2}=\frac{1}{6}\cdot(x^3)^2=\frac{1}{6}\cdot x^6+C$$

Ejemplo 97. *Uso de la regla de sustitución: evaluar la siguiente integral*

$$\int_0^1 3x^2\cdot e^{x^3+1}dx$$

Calculemos primero la integral indefinida de la función y depués evaluemos en los límites de integración. Sea $u = x^3 + 1$ entonces $du = 3x^2dx$, por lo que

$$\int 3x^2 \cdot e^{x^3+1}dx = \int e^u du = e^u = e^{x^3+1}$$

que al evaluarla en los límites de integración resulta

$$[e^{x^3+1}]_0^1 = [e^{((1)^3+1)} - e^{((0)^3+1)}] = [e^2 - e^1]$$

Ejemplo 98. *Uso de la regla de sustitución: evaluar la siguiente integral*

$$\int \frac{4dx}{4+8x}dx$$

Sea $u = 4 + 8x$ entonces $du = 8dx$, asi $\frac{du}{8} = dx$ por lo que

$$\int \frac{4dx}{4+8x} = \int \frac{4 \cdot \frac{du}{8}}{u} = \frac{4}{8}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln(u) + C = \frac{1}{2}ln(4+8x) + C$$

Ejemplo 99. *Uso de la regla de sustitución: evaluar la siguiente integral*

$$\int x\sqrt{a-x}dx$$

Sea $u = \sqrt{a-x}$ entonces $u^2 = a - x$ por lo cual $2udu = -dx$, es decir $-2udu = dx$, por otro lado; podemos despejar x de la ecuación $u^2 = a - x$, esto es, $x = a - u^2$ ahora bien; tenemos que

$$\int x\sqrt{a-x}dx = \int (a-u^2)u(-2udu) = \int (-2au^2 + 2u^4)du = -2\int (au^2)du + 2\int u^4du$$

$$= -\frac{2au^3}{3} + \frac{2u^5}{5} + C$$

Integración por partes

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, tenemos que $\int f(x)dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$ y por otro lado $\int g(x)dx = \int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$, esta claro que en general $\int x \cdot xdx \neq \int xdx \cdot \int xdx$

En otras palabras, la integral de un producto en general no es el producto de las integrales, esto es

$$\int f(x) \cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

Basicamente la integración por partes es una técnica para simplificar integrales de la forma

$$\int f(x)g(x)dx$$

Esto es útil cuando f puede diferenciarse repetidamente y g puede integrarse repetidamente sin dificultad

Teorema 5.2. *Sean f y g funciones diferenciables respecto a la variable x entonces*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

si $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la fórmula anterior se transforma en

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

veamos como es que se usa la fórmula
Ejemplo 100. *Uso de la regla de integración por partes: integrar*

$$\int x \cdot sen(x)dx$$

en este caso debemos escoger quien será la función u y quien la función dv, en general la función u será escogida de tal manera que sea fácil de diferenciar y la función v en caso contrario a al función u, esta debe ser fácil de integrar, entonces hagamos $u = x$ y $dv = sen(x)$, ahora, los ingredientes que faltan para poder usar la fórmula son $du = dx$ e $v = \int sen(x)dx = -cos(x)$, por tanto

$$\int x \cdot sen(x)dx = -x \cdot cos(x) + \int cos(x)dx = -x \cdot cos(x) + sen(x)$$

Ejemplo 101. *Uso de la regla de integración por partes: integral del logaritmo natural*

$$\int ln(x)dx$$

observemos que la integral es igual a $\int ln(x) \cdot 1dx$, hagamos $u = ln(x)$ y $dv = dx$ entonces $du = \frac{1}{x}$ e $v = \int dx = x$, por lo tanto

$$\int ln(x)dx = x \cdot ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot ln(x) - \int 1 \cdot dx = x \cdot ln(x) - x + C$$

Ejemplo 102. *Uso de la regla de integración por partes: integrar*

$$\int sen^2(x)dx = \int sen(x) \cdot sen(x)dx$$

en este caso sea $u = sen(x)$ y $dv = sen(x)$, asi $du = cos(x)$ y $v = -cos(x)$ por tanto

$$\int sen^2(x)dx = -sen(x) \cdot cos(x) - \int (-cos(x)) \cdot cos(x)dx = -sen(x) \cdot cos(x) + \int cos^2(x)dx$$

en la última igualdad usemos la siguiente identidad $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ de donde tenemos que $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ y asi sutituyendo en la última igualdad nos da

$$\int sen^2(x)dx = -sen(x) \cdot cos(x) + \int (1 - sen^2(x))dx = -sen(x) \cdot cos(x) + \int 1dx - \int sen^2(x)dx$$

el último término de la última igualdad es precisamente la integral que queremos calcular, sumamos de ambos lados de la igualdad $\int sen^2(x)dx$, esto es

$$2\int sen^2(x) = -sen(x) \cdot cos(x) + \int 1dx = -sen(x) \cdot cos(x) + x + C$$

por tanto

$$\int sen^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(-sen(x) \cdot cos(x) + x + C\right)$$

Ejemplo 103. *Uso de la regla de integración por partes: integral*

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

en este caso, hagamos $u = x^2$, $dv = e^x$ *por lo cual* $du = 2xdx$ *y* $v = e^x$ *entonces*

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int e^x \cdot xdx$$

en la igualdad de lado derecho tenemos la integral $\int e^x \cdot xdx$ *que se resuelve también por integración por partes, sea* $u = x$ *y* $dv = e^x$ *asi* $du = dx$ *por otro lado* $v = e^x$, *entonces*

$$\int e^x \cdot xdx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Asi

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\left[x \cdot e^x - e^x\right] = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C$$

Integrales trigonométricas

Las integrales trigonométricas incluyen combinaciones algebraicas de las seis funciones trigonométricas básicas. En principio, siempre podemos expresar tales integrales en términos de senos y cosenos, pero con frecuencia es más sencillo hacerlo con otras funciones, como en la integral

$$\int sec^2(x)dx = tan(x) + C$$

Ejemplo 104. *Calcular la siguiente integral*

$$\int sen^m(x) \cdot cos^n(x)dx$$

donde m y n son enteros no negatvos, es decir 0 o positivos, en general para los valores de m y n tenemos tres posibles casos, que son los siguientes

- *Si m es impar, escribimos a m como* $2k + 1$ *y utilizamos la identidad* $sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$ *para obtener*

  $$sen^m(x) = sen^{2k+1}(x) = (sen^2(x))^k \cdot sen(x) = (1 - cos^2(x))^k \cdot sen(x)$$

  hacemos $u = cos(x)$ *y por tanto* $du = -sen(x)$, *entonces*

  $$\int sen^m(x) \cdot cos^n(x)dx = -\int (1 - u^2)^k \cdot u^n du$$

  que es una integral sencilla de calcular, la cual depende del valor de m

- *Si m es par y n es impar, escribimos a n como* $2k + 1$ *y usamos la siguiente identidad trigonométrica* $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$ *para obtener*

  $$cos^n(x) = cos^{2k+1}(x) = (cos^2(x))^k \cdot cos(x) = (1 - sen^2(x))^k \cdot cos(x)$$

  hacemos $u = sen(x)$ *y por tanto* $du = cos(x)$, *entonces*

  $$\int sen^m(x) \cdot cos^n(x)dx = \int u^m \cdot (1 - u^2)^k du$$

  que no es difícil de calcular, pero que depende del valor de n

- *Si m y n son pares hacemos uso de las siguientes identidades trigomométricas*

$$sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}, \qquad cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}$$

la integral entonces se convierte en

$$\int sen^m(x) \cdot cos^n(x)dx = \int \left(\frac{1 - cos(2x)}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{1 + cos(2x)}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$$

que es un poco más complicada de evaluar.

A continuación daremos algunos ejemplos de como aplicar estas reglas
Ejemplo 105. *m es par y n es impar, $n = 5$, $m = 0$; evaluar*

$$\int cos^5(x)dx$$

$$\int cos^5(x)dx = \int cos^4(x) \cdot cos(x)dx = \int (1 - sen^2(x))^2 \cdot cos(x)dx$$

haciendo $u = sen(x)$, entonces $du = cos(x)dx$

$$\int cos^5(x)dx = \int (1 - u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4)du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C$$

$$= sen(x) - \frac{2}{3}sen(x)^3 + \frac{1}{5}sen(x)^5 + C$$

Ejemplo 106. *m es impar, evaluar*

$$\int sen^3(x) \cdot cos^2(x)dx$$

tenemos que

$$\int sen^3(x) \cdot cos^2(x)dx = \int sen^2(x) \cdot cos^2(x) \cdot sen(x)dx = \int (1 - cos^2(x)) \cdot cos^2(x) \cdot sen(x)dx$$

sea $u = cos(x)$ entonces $du = -sen(x)dx$, asi

$$-\int (1 - u^2) \cdot u^2 du = \int (u^4 - u^2)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{5}cos^5(x) - \frac{1}{3}cos^3(x) + C$$

Sabemos cómo integrar laS Funciones tangente, la secante y los cuadrados de ambas. Para integrar potencias mayores, utilizamos las identidades $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$ y $sec^2(x) = tan^2(x) + 1$ e integramos por partes, cuando sea necesario, para reducir las potencias grandes a potencias menores.
Ejemplo 107. *Evaluar la integral*

$$\int tan^4(x)dx$$

Tenemos que

$$\int tan^4(x)dx = \int tan^2(x) \cdot tan^2(x)dx = \int (sec^2(x) - 1) \cdot tan^2(x)dx$$

$$= \int (sec^2(x) \cdot tan^2(x) - tan(x)^2)dx = \int (sec^2(x) \cdot tan^2(x) - (sec^2(x) - 1))dx$$

$$= \int sec^2(x) \cdot tan^2(x)dx - \int sec^2(x)dx + \int dx$$

en la integral de de lado izquierdo hagamos $u = tan(x)$ *entonces* $du = sec^2(x)$ *por tanto en la primera integral tenemos*

$$\int sec^2(x) \cdot tan^2(x)dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}tan(x)^3 + C$$

entonces

$$\int tan^4(x)dx = \frac{1}{3}tan(x)^3 - tan(x) + x + C$$

Ejemplo 108. *Calcular la siguiente integral*

$$\int sec^3(x)dx$$

Usemos integración por partes, sea $u = sec(x)$, $dv = sec^2(x)$, *por tanto* $v = tan(x)$ *y* $du = sec(x) \cdot tan(x)$, *entonces:*

$$\int sec^3(x)dx = sec(x) \cdot tan(x) - \int tan(x) \cdot sec(x) \cdot tan(x)dx$$

Recordemos que $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$, *por tanto sustituyendo tenemos que*

$$\int sec^3(x)dx = sec(x) \cdot tan(x) - \int (sec^2(x) - 1) \cdot sec(x)dx$$

$$= sec(x) \cdot tan(x) + \int sec(x)dx - \int sec^3(x)dx$$

El término de la derecha es el mismo que el de la integral que intentamos calcular, por tanto, la sumamos al lado izquierdo y obtenemos

$$\int sec^3(x)dx = \frac{sec(x) \cdot tan(x) + ln|sec(x) + tan(x)|}{2} + C$$

Ahora veremos las integrales de productos de senos y cosenos, las integrales

$$\int sen(mx) \cdot sen(nx)dx \qquad \int sen(mx) \cdot cos(nx)dx \qquad \int cos(mx) \cdot cos(nx)dx$$

surgen un muchos lugares en donde se aplican las funciones trigonométricas a problemas de matemáticas y ciencia. Podemos evaluar estas integrales mediante integración por partes, pero en cada caso se requieren dos integraciones por partes. Es más sencillo utilizar las identidades

$$sen(mx) \cdot sen(nx)dx = \frac{1}{2}[cos((m-n)x) - cos((m+n)x)]$$

$$sen(mx) \cdot cos(nx)dx = \frac{1}{2}[cos((m-n)x) + sen((m+n)x)]$$

$$cos(mx) \cdot cos(nx)dx = \frac{1}{2}[cos((m-n)x) + cos((m+n)x)]$$

Estas identidades provienen de las fórmulas de la suma de ángulos para las funciones seno y coseno

Ejemplo 109. *Calcular*

$$\int cos(6x)cos(4x)dx$$

usemos la última identidad

$$\int cos(6x)cos(4x)dx = \frac{1}{2}\int [cos(2x) + cos(10x)]dx = \frac{1}{2}\int cos(2x) + \frac{1}{2}\int cos(10x)dx$$

$$= \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{20}sen(10x) + C$$

Sustituciones trigonométricas

La sustituciones trigonométricas suelen ser de ayuda para calcular integrales de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ y $\sqrt{x^2 + a^2}$, para poder realizar este tipo de integrales necesitamos realizar tres tipos de sustituciones diferentes, las más comunes son $x = a\,tan(\theta)$, $x = a\,sen(\theta)$ y $x = a\,sec(\theta)$, las cuales provienen de los siguientes hechos mostrados en la figura 5.1

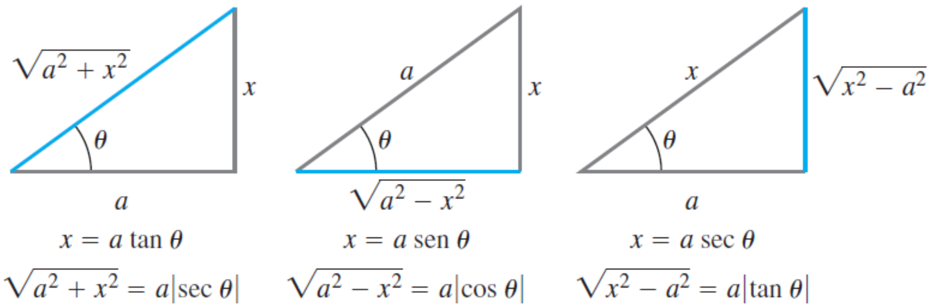


Figura 5.1: Triángulos de referencia para las tres sustituciones elementales, identificando los lados etiquetados con x y a para cada sustitución.

Calcular las siguientes integrales
Ejemplo 110.

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + 9}}dt$$

Primero que nada realizemos un cambio de variable, sea $y = e^t$ *entonces* $dy = e^t dt$, *asi la integral se convierte en*

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t} + 9}}dt = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 9}}$$

Ahora usemos el cambio $y = 3\,tan(\theta)$, *entonces* $y^2 = 9\,tan^2(\theta)$ *y* $dy = 3sec^2(\theta)$, *asi la integral es equivalente a*

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 9}} = \int \frac{3\,sec^2(x)d\theta}{\sqrt{9\,tan^2(\theta) + 9}} = \int \frac{3\,sec^2(x)d\theta}{\sqrt{9(\,tan^2(\theta) + 1)}} = \int \frac{3\,sec^2(x)d\theta}{\sqrt{9sec^2(\theta)}} = \int \frac{3\,sec^2(x)d\theta}{3\,sec(\theta)}$$

$$= \int sec(\theta)d\theta = ln|sec(\theta) + tan(\theta)|$$

donde $tan(\theta) = \frac{y}{3}$ *y* $sec(\theta) = \sqrt{\left(\frac{y}{3}\right)^2 + 1}$ *recordando que* $y = e^t$ *tenemos que*

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+9}}dt = ln\left|\sqrt{\left(\frac{e^t}{3}\right)^2 + 1} + \frac{e^t}{3}\right|$$

Ejemplo 111.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$$

Usemos el cambio $x = 2\,sec(\theta)$, *entonces* $x^2 = 4\,sec^2(\theta)$ *y* $dx = 2sec(\theta)\cdot tan(\theta)$ *entonces:*

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{4sec^2(\theta)-4}}{2sec(\theta)}2sec(\theta)\cdot tan(\theta)d\theta = \int \frac{\sqrt{4(sec^2(\theta)-1)}}{2sec(\theta)}2sec(\theta)\cdot tan(\theta)d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{4(sec^2(\theta)-1)}}{2sec(\theta)}2sec(\theta)\cdot tan(\theta)d\theta = \int \frac{\sqrt{4tan^2(\theta)}}{2sec(\theta)}2sec(\theta)\cdot tan(\theta)d\theta = \int 2tan^2(\theta)d\theta$$

$$2\int (sec^2(\theta)-1)d\theta = 2\int sec^2(\theta)d\theta - 2\int d\theta = 2tan(\theta) - 2\theta$$

donde $\theta = arc\,sec(\frac{x}{2})$ *y* $tan(\theta) = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$, *entonces tenemos que*

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = 2\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} - 2arc\,sec\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ejemplo 112. *Calcular la integral*

$$\int \sqrt{4-x^2}dx$$

Sea $x = 2sen(\theta)$, $x^2 = 4sen^2(\theta)$, $dx = 2cos(\theta)$, *entonces*

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int \sqrt{4-4sen^2(\theta)}2cos(\theta)d\theta = \int \sqrt{4(1-sen^2(\theta))}2cos(\theta)d\theta$$

$$= \int \sqrt{4(cos^2(\theta))}2cos(\theta)d\theta = \int 2cos(\theta)\cdot 2cos(\theta)d\theta = 4\int cos^2(\theta)d\theta = 4\int \frac{1+cos(2\theta)}{2}d\theta$$

$$= 4\int d\theta + 4\int cos(2\theta)d\theta = 2\theta + sen(2\theta) + C$$

Recordemos que $sen(2\theta) = 2sen(\theta)\cdot cos(\theta) = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$, *entonces*

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2arc\,sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

Fracciones parciales

Aquí ofreceremos elementos para calcular las primitivas de $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios con coeficientes reales y $g(x)$ se puede expresar como un producto de factores lineales y cuadráticos. Si el grado $f(x)$ es mayor que el de $g(x)$, la divisón permite escrbir la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$ en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Siendo $q(x)$ el cociente y r(x) el residuo. Como el cálculo de una prmitiva de $q(x)$ es fácil, el problema de hallar la primitiva de $\frac{f(x)}{g(x)}$ se reduce a hallar la primitiva del cociente de polinomios cuyo numerador es de menor grado que el del denominador.

Por ejemplo el cociente $\frac{2x^4-3x+5}{x(x^2-1)}$ se puede expresar en la forma

$$\frac{2x^4 - 3x + 5}{x(x^2 - 1)} = 2x + \frac{2x^2 - 3x + 5}{x(x - 1)(x + 1)}$$

Suponideno que se requiere hallar una primitiva de $\frac{f(x)}{g(x)}$, siendo el grado de $f(x)$ menor que el grado de $g(x)$ y $g(x)$ un producto de factores lineales todos distintos de la forma $x-a$. Más adelante se mostrará que en estas condiciones, si g(x) es de la fomra $c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, entonces el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se puede escribir en la forma

$$\frac{f(x)}{c(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + ... + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Siendo $A_1, A_2, ..., A_n$ constantes. El término del segundo miembro de la ecuacón de arriba se llama desocposición en fracciones parcailes del término del primer miembro. El procedimiento más sencillo para encontrar A_i es multiplicar la ecuación anterior por el denominador $g(x)$ para obtener la identidad

$$f(x) = cA_1(x-a_2)\cdots(x-a_n) + cA_2(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n) + cA_n(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})$$

Uno de los procedimientos es igualar los coeficientes decorrespondientes de los dos miembros de la ecuación anterior, otro es remplazar por x los valores $a_1, a_2, ...a_3$. Otro es una combinación de los dos anteriores
Ejemplo 113. *Calcular la siguiente integral*

$$\int \frac{x^2 - 23x + 10}{(x - 1)(x - 3)(x + 2)} dx$$

De lo explicado anteriormente la fracción anterior se puede escribir como

$$\frac{x^2 - 23x + 10}{(x - 1)(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 2}$$

Multipliocando por el denominador del primer miembro toda la igualdad, tenemos

$$x^2 - 23 + 10 = A(x - 3)(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x - 3)$$

Evaluando en $x = 1$, tenemos que $-12 = -6A$ de donde $A = 2$, evaluando en $x = 3$, tenemos que $-50 = 10B$ de donde $B = -5$ y finalmente evaluando en $x = -2$ tenemos que $60 = 15C$ por tanto $C = 4$, entonces

$$\int \frac{x^2-23x+10}{(x-1)(x-3)(x+2)}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{-5}{x-3}dx + \int \frac{4}{x+2}dx$$
$$= 2ln(x-1) - 5ln(x-3) + ln(x+2) + C$$

Los factores lineales repetidos se tratan como si fueran factores lineales distintos. La diferencia está en que si $(x-a)$ es un factor lineal que se repite k veces en el denominador, entonces, en vez de tener un solo término en el desarrollo en fracciones parciales correspondientes a $x-a$ se tienen k términos, cada uno de los cuales corresponde a una potencia de $(x-a)$ desde 1 hasta k:

$$\frac{B_1}{x-a} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{B_k}{(x-a)^k}$$

con $B_1, B_2, ..., B_k$, constantes. Si hay factores lineales distintos de los cuales alguno o todos se repiten, entonces los factores lineales distintos se tratan de la misma manera y en forma independiente y los términos resultantes se suman por ejemplo

Ejemplo 114. *Calcular la siguiente integral*

$$\int \frac{x^3-x^2-x}{(x-1)^3(x-2)^2}dx$$

La fracción la podemos escribir como

$$\frac{x^3-x^2-x}{(x-1)^3(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2}$$

Ahora multiplicando por el denominador del primer miembro, se tiene

$$x^3-x^2-x = A(x-1)^2(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-2)^2 + D(x-1)^3(x-2) + E(x-1)^3$$

Al sustituir en la expresión resultante primero $x = 1$ y después $x = 2$, se obtiene $C = -1$, $E = 2$. Para encontrar las otras variables se desarrollan los binomios y se comparan coeficientes. Entonces tenemos que $B = -2$, $D = 1$ y $A = -1$ y por tanto la integral se puede ver como:

$$\int \frac{x^3-x^2-x}{(x-1)^3(x-2)^2}dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$
$$= \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-1}{(x-1)^3}dx + \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}dx$$

Ahora hacemos $u = x-2$ entonces $u+1 = x-1$, tenemos que $du = dx$, entonces

$$\int \frac{x^3-x^2-x}{(x-1)^3(x-2)^2}dx = \int \frac{-1}{u+1}du + \int \frac{-2}{(u+1)^2}du + \int \frac{-1}{(u+1)^3}du + \int \frac{1}{u}du + \int \frac{2}{u^2}du$$

$$= -ln(u+1) + \frac{2}{u+1} + \frac{1}{2(u+1)^2} + ln(u) - \frac{2}{u} = -ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + ln(x-2) - \frac{2}{x-2}$$

$+C$

Factores cuadráticos. Por factor cuadrático real de un polinomio $g(x)$ se entiende una expresón de la forma $ax^2 + bx + c$ si su discriminante $b^2 - 4ac < 0$; entonces, no se puede descomponer como el producto de dos factores lineales con valores reales, por ejemplo , $x^3 - 3x + 4$ no se puede factorizar en factores lineales reales.

El tratamiento de los factores cuadráticos es parecido al de los factores lineales, excepto en que los numeradores de las fracciones racionales son polinomios de primer grado en vez de constantes.

El caso más simple es hallar una primitiva del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ de polinomios reales con el grado de $f(x)$ menor que el grado de $g(x)$ y $g(x)$ contiene factores cuadráticos, este tipo de primitivas da lugar a dos casos

- $\frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x) = cg'(x)$, c una constante
- $\frac{f(x)}{g(x)}$, con el grado de $f(x)$ menor que le grado de $g(x)$ y no se cumple el caso de arriba

Para hallar las primitivas del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, siendo el grado de $f(x)$ menor que el grado de $g(x)$ y $g(x)$ un producto de factores cuadráticos distintos, por ejemplo

$$g(x) = \gamma(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)...(x^2 + b_n + c_n)$$

En este caso la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$ se puede escribir en la forma

$$\frac{f(x)}{\gamma(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2)...(x^2 + b_n + c_n)}$$
$$= \frac{A_1x + B_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + b_2x + c_2} + ... + \frac{A_nx + B_n}{x^2 + b_nx + c_n}$$

Donde $A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n$ son constantes, para poder encontrar las constantes A_i, B_i, se emplean técnicas similares a las indicadas anteriormente

Ejemplo 115. *Calcular la integral*

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 36x - 67}{(xC^2 + 6x + 17)(x^2 - 2x + 3)}dx$$

la fracción se puede descomponer en la forma

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 36x - 67}{(xC^2 + 6x + 17)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 6x + 17} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 3}$$

Para hallar las constantes se multiplica la igualdad por el denominador del primer miembro; se identifican los coeficientes correspondientes de las mismas potencias de x y se resuelve el sistema resultante donde $B = 6$, $D = -5$, $C = 0$ y $A = 2$. Entonces

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 36x - 67}{(xC^2 + 6x + 17)(x^2 - 2x + 3)}dx = \int \frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 17}dx + \int \frac{-5}{x^2 - 2x + 3}dx$$

Para hacer el cálculo de la integral hagamos $u = x^2 + 6x + 17$ entonces $du = 2x + 6$ y por otro lado hagamos $v = x - 1$, entonces $x^2 - 2x + 3 = v^2 + 2$ y $dv = dx$, por tanto

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 36x - 67}{(xC^2 + 6x + 17)(x^2 - 2x + 3)}dx = \int \frac{1}{u}du + \int \frac{1}{v^2 + 2}dv = ln(u) + \frac{1}{2}arc\,tan\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= ln(x^2 + 6x + 17) + \frac{1}{2}arc\,tan\left(\frac{x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Recuerda que es convención en matemáticas que la constante en las integrales se represente por la letra C mayúscula y que el argumento de las fuciones trigonométricas van dentro de parentésis por ejemplo $sen(x)$.