Universidad Autónoma de Tlaxcala

Facultad de Ciencias Básicas, Ingeniería y Tecnología

"Título de la Tesis"

TESIS

Que para obtener el grado de:
Maestro en Matemáticas

Presenta:
Nombre del Alumno

Director de Tesis:
Nombre del director de Tesis

Apizaco, Tlaxcala, Mes 202 __ .

Hoja de liberación

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

OBJETO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales constituye un componente fundamental en el estudio del álgebra lineal, con aplicaciones esenciales en campos como la ingeniería, la física, la estadística y las ciencias computacionales. Entre los métodos más eficientes y ampliamente utilizados para resolver estos sistemas destacan las técnicas de factorización matricial, específicamente LU, LL^T (Cholesky) y LDL^T. Estas técnicas permiten descomponer matrices complejas en productos matriciales más simples, lo que facilita el cálculo, la manipulación algebraica y la interpretación de los sistemas.

No obstante, la enseñanza y el aprendizaje de estos métodos presentan desafíos significativos en los niveles medio superior y superior. Los estudiantes no solo deben internalizar algoritmos complejos, sino también comprender la abstracción que implica la notación matricial y la lógica algebraica subyacente a cada procedimiento. En muchos contextos académicos, la instrucción se limita a exposiciones teóricas acompañadas de ejercicios manuales, predominando un enfoque estático y poco interactivo que dificulta la conexión entre teoría y práctica.

Pese al creciente uso de tecnologías educativas en diversas áreas, se observa una notable carencia de herramientas digitales especializadas en la enseñanza interactiva de la factorización matricial. La mayoría de los recursos disponibles se centran en resolver sistemas lineales de manera automática o en aspectos algebraicos más generales, sin ofrecer una experiencia que permita visualizar detalladamente las matrices L, U y D, ni la posibilidad de manipular libremente los datos o validar paso a paso los resultados intermedios, aspectos fundamentales para consolidar el aprendizaje.

Esta deficiencia afecta la comprensión conceptual de los estudiantes, quienes frecuentemente desconocen cómo se construyen las matrices de descomposición, cómo validar la factorización y cómo aplicar estos procesos para resolver eficazmente el sistema original. Por ello, resulta imperativo desarrollar un recurso digital que permita la interacción activa con los procedimientos, la exploración guiada y la retroalimentación inmediata, elementos que favorecen la motivación, el razonamiento crítico y la adquisición de un conocimiento profundo y duradero.

En consecuencia, el diseño de un programa con una interfaz clara, amigable e intuitiva que guíe al estudiante durante todas las etapas de la factorización matricial se perfila como una solución educativa viable. Esta herramienta deberá incluir funcionalidades para la validación manual de resultados intermedios, la representación explícita de las transformaciones matriciales y la experimentación con distintos conjuntos de datos, fomentando así un aprendizaje constructivo, significativo y adaptado a las necesidades y ritmos individuales.

1.2. Justificación

En el contexto actual de la educación matemática, se reconoce el papel fundamental que desempeñan los recursos digitales interactivos para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos complejos y abstractos. El álgebra lineal, por su naturaleza, puede beneficiarse significativamente de software educativo que combine elementos visuales, interactividad y retroalimentación inmediata, características que fomentan un aprendizaje activo, la autonomía del estudiante y el desarrollo de habilidades analíticas y metacognitivas.

El presente proyecto propone el desarrollo de un programa interactivo, implementado en Python con bibliotecas gráficas como Tkinter o PyQt, que facilite el aprendizaje de los métodos de factorización LU, LL^{T} y $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$. Esta aplicación permitirá a los usuarios introducir sistemas personalizados, seguir detalladamente cada etapa de la factorización, visualizar las matrices generadas y validar manualmente los resultados, recibiendo retroalimentación automática y didáctica que corrija errores y refuerce conceptos clave.

Con esta propuesta se pretende abordar una necesidad educativa específica: superar la memorización mecánica de algoritmos para alcanzar una comprensión profunda y lógica de los procesos matriciales. Un entorno interactivo que fomente la experimentación y la autoverificación contribuye al desarrollo de competencias críticas, como la interpretación precisa de resultados, la toma de decisiones fundamentadas y el pensamiento estructurado.

Además, el diseño flexible y accesible del programa lo hace adecuado tanto para entornos presenciales como virtuales, pudiendo utilizarse como apoyo didáctico en clases o como herramienta para el autoaprendizaje. La elección de un lenguaje de programación abierto garantiza que el recurso sea gratuito, modificable y adaptable, lo que favorece la democratización del acceso a materiales educativos especializados y la mejora continua basada en la retroalimentación de estudiantes y docentes.

En síntesis, este proyecto constituye una contribución relevante a la innovación pedagógica en la enseñanza del álgebra lineal, integrando tecnología, interactividad y fundamentos didácticos. Se espera que esta iniciativa fortalezca la comprensión conceptual, incremente la motivación y mejore el rendimiento académico en un área fundamental del currículo matemático.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar un programa con interfaz interactiva que facilite de manera integral la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante métodos de factorización matricial LU, LL^T (Cholesky) y LDL^T. Este programa ofrecerá una guía estructurada, clara y paso a paso para el estudiante, incorporando validaciones automatizadas y retroalimentación continua que fortalezcan la comprensión tanto conceptual como práctica de los métodos. De esta forma, se fomentará un aprendizaje activo, significativo y autónomo, que desarrolle la capacidad de razonamiento matemático.

1.3.2. Objetivos específicos

- Diseñar una interfaz gráfica intuitiva y accesible que permita a los usuarios ingresar matrices y vectores de manera sencilla, flexible y segura, facilitando la exploración, manipulación y experimentación con diferentes conjuntos de datos. La interfaz deberá incluir visualizaciones dinámicas y didácticas de las matrices resultantes L, U y D, así como de las etapas intermedias del proceso, con el fin de promover una comprensión profunda y visual del algoritmo.

- Implementar eficientemente los algoritmos de factorización LU, Cholesky (LL^T) y LDL^T, asegurando el manejo correcto de matrices compatibles en dimensiones y propiedades algebraicas (como simetría, definida positiva y no singularidad). El programa incorporará validaciones internas rigurosas para prevenir errores numéricos comunes, garantizar estabilidad computacional y manejar adecuadamente casos especiales.

- Incorporar un sistema integral de retroalimentación automatizada y validación manual que permita al estudiante verificar sus cálculos en cada fase del proceso, detectar posibles errores o inconsistencias, y recibir sugerencias didácticas personalizadas que faciliten la corrección, la reflexión y el reforzamiento del aprendizaje autónomo y metacognitivo.
- Evaluar el impacto educativo del software mediante pruebas piloto con estudiantes de nivel superior, empleando instrumentos cuantitativos (pruebas de comprensión, evaluaciones de desempeño) y cualitativos (encuestas de opinión, entrevistas) para medir mejoras en la comprensión conceptual, retención de conocimientos, actitud hacia el aprendizaje y usabilidad del programa. Los resultados permitirán ajustar y optimizar la herramienta según las necesidades reales de los usuarios finales.
- Elaborar un manual que incluya guías detalladas de uso, ejemplos prácticos contextualizados para facilitar la integración efectiva del programa en los planes de estudio. Este material apoyará tanto a docentes que deseen incorporar la herramienta en su práctica educativa, como a estudiantes que utilicen el software de forma autónoma o en modalidades de autoaprendizaje.

1.4. Hipótesis y preguntas de investigación

1.4.1. Hipótesis

La implementación y uso de un programa interactivo diseñado para guiar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante factorización matricial (LU, LL^T, LDL^T) mejora significativamente la comprensión conceptual, el aprendizaje activo y la retención a largo plazo de los conceptos matemáticos involucrados. Esta mejora se refleja en un mejor desempeño académico y una mayor motivación hacia el estudio del álgebra lineal, en comparación con metodologías tradicionales basadas exclusivamente en exposiciones teóricas y resolución de ejercicios estáticos sin apoyo tecnológico.

1.4.2. Preguntas de investigación

1. ¿Qué características de la interfaz gráfica contribuyen de manera más efectiva a facilitar el aprendizaje y la comprensión de los métodos de factorización matricial?

   Esta pregunta busca identificar qué elementos visuales (por ejemplo: colores, diagramas), funcionalidades interactivas (validación inmediata, manipulación directa de matrices) y niveles de complejidad favorecen la experiencia educativa y la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes.

2. ¿Cómo influye la retroalimentación automatizada y la validación manual en el proceso de aprendizaje de los estudiantes?

   Se pretende analizar si el feedback inmediato sobre errores o aciertos estimula la reflexión crítica, la autoevaluación, la motivación para corregir errores y la profundización en los conceptos, favoreciendo un aprendizaje autónomo, significativo y perdurable.

3. ¿Cuál es el impacto real del uso del software en los niveles de comprensión y desempeño académico de los estudiantes en álgebra lineal?

   Esta interrogante está orientada a medir, mediante evaluaciones diagnósticas y sumativas, así como encuestas y entrevistas, la efectividad del programa como recurso educativo en comparación con métodos tradicionales de enseñanza.

4. ¿En qué contextos educativos (presencial, semipresencial, a distancia) resulta más efectiva la integración del programa para el aprendizaje de la factorización matricial?

   Se busca determinar las condiciones y modalidades de enseñanza en las que la herramienta tecnológica aporta mayores beneficios pedagógicos, identificando limitaciones y potencialidades según el entorno educativo, la infraestructura tecnológica disponible y el perfil de los estudiantes.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO: ÁLGEBRA LINEAL Y MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN MATRICIAL

2.1. Álgebra lineal

El **álgebra lineal** constituye una rama fundamental de las matemáticas que estudia estructuras como vectores, espacios vectoriales, matrices y transformaciones lineales. Su relevancia trasciende el ámbito teórico, extendiéndose a numerosas aplicaciones en ciencia, tecnología e ingeniería. Representa la base de múltiples técnicas computacionales modernas, desde el análisis numérico hasta el aprendizaje automático, incluyendo el modelado de sistemas físicos, financieros y estadísticos.

Desde una perspectiva educativa, el álgebra lineal frecuentemente representa el primer contacto de los estudiantes con las matemáticas abstractas. La transición desde el álgebra elemental –centrada en ecuaciones y manipulaciones simbólicas– hacia un pensamiento más estructurado requiere un cambio cognitivo significativo. La abstracción inherente a las matrices, los vectores en espacios de dimensión arbitraria y la interpretación de operaciones como transformaciones lineales puede dificultar el aprendizaje si no se complementa con estrategias pedagógicas adecuadas.

Diversos autores (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000; Harel & Kaput, 1991) han señalado que los enfoques tradicionales de enseñanza del álgebra lineal suelen enfatizar excesivamente los procedimientos algebraicos, sin establecer conexiones suficientes con la visualización geométrica, la interpretación conceptual o las aplicaciones prácticas. Como respuesta a esta problemática, se ha impulsado el desarrollo de estrategias didácticas basadas en la interacción, la visualización y la experimentación guiada mediante recursos digitales.

2.1.1. Matrices

Las **matrices** son arreglos rectangulares de elementos numéricos que permiten representar sistemas lineales, transformaciones entre espacios vectoriales y operaciones algebraicas complejas. Formalmente, una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ corresponde a un conjunto de elementos reales dispuestos en m filas y n columnas.

Estas estructuras representan el núcleo operativo del álgebra lineal computacional, permitiendo codificar problemas y aplicar algoritmos eficientes. Entre sus operaciones fundamentales destacan la adición, multiplicación, transposición, cálculo del determinante, inversión y reducción por filas, todas ellas esenciales para la solución de sistemas y la implementación de métodos numéricos. Su interpretación geométrica resulta igualmente crucial: cada matriz puede conceptualizarse como una transformación que actúa sobre vectores, modificando regiones del espacio.

2.1.2. Determinantes

El **determinante** de una matriz cuadrada constituye un valor escalar que sintetiza propiedades fundamentales de la matriz: su invertibilidad, el volumen generado al transformar un espacio y la orientación (preservada o invertida) de dicha transformación. Matemáticamente, si $\det(A) \neq 0$, entonces A resulta invertible y el sistema lineal $Ax = b$ posee solución única.

Aunque el cálculo directo de determinantes no resulta eficiente para matrices de gran dimensión, sigue siendo una herramienta esencial para el análisis teórico. Particularmente, las condiciones de aplicabilidad de ciertos métodos de factorización –como Cholesky o LU sin pivoteo– dependen de que determinados determinantes parciales (menores principales) sean distintos de cero.

2.1.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Los **sistemas de ecuaciones lineales** surgen de la necesidad de resolver simultáneamente un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales de la forma:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Este sistema puede expresarse en notación matricial como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz de coeficientes, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ el vector de incógnitas y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ el vector de términos independientes.

Los métodos de solución se clasifican en dos categorías principales:

- **Métodos directos**: Incluyen la eliminación gaussiana, la inversión matricial y las factorizaciones LU, LL^{T} y LDL^{T}.
- **Métodos iterativos**: Comprenden los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y gradiente conjugado, particularmente adecuados para sistemas dispersos o de gran escala.

Este proyecto se centra específicamente en los métodos directos basados en factorización matricial, debido a su eficiencia computacional, estabilidad numérica y estructura clara, características que además facilitan su representación didáctica mediante visualizaciones interactivas.

2.2. Métodos de Factorización Matricial

2.2.1. Introducción

La **factorización matricial** consiste en descomponer una matriz dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en un producto de matrices con estructuras particulares (triangulares, diagonales, ortogonales, entre otras). Esta descomposición facilita:

- La resolución de sistemas de ecuaciones lineales
- El cálculo de matrices inversas y determinantes
- La implementación de métodos numéricos avanzados

Desde una perspectiva didáctica, el proceso de factorización permite a los estudiantes:

- Analizar la estructura interna de las matrices
- Comprender las transformaciones paso a paso
- Visualizar la contribución de cada componente en la solución del sistema

En las siguientes secciones se detallan tres métodos fundamentales que serán implementados en el software interactivo.

2.2.2. Factorización LU

La **factorización LU** constituye una técnica fundamental del álgebra lineal numérica que descompone una matriz cuadrada A como el producto:

$$A = LU$$

donde:

- L es una **matriz triangular inferior** ($l_{ij} = 0$ para $j > i$)
- U es una **matriz triangular superior** ($u_{ij} = 0$ para $i > j$)

Aplicación a sistemas lineales

Para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, la factorización LU permite:

1. **Sustitución progresiva**: Resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$
2. **Sustitución regresiva**: Resolver $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

Esta descomposición ofrece ventajas significativas:

- Eficiencia computacional al resolver múltiples sistemas con la misma matriz A

- Modularización del proceso de solución
- Claridad conceptual para fines didácticos
- Facilidad de implementación algorítmica

La factorización LU existe y es única si y solo si todos los menores principales de A son no singulares.

2.2.3. Variantes de la factorización LU

Existen dos variantes principales de la factorización LU, diferenciadas por la normalización de los elementos diagonales:

Factorización de Doolittle

La factorización de Doolittle se caracteriza por:

- Matriz L con **unos en la diagonal principal**
- Matriz U con los coeficientes completos en la parte superior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Factorización de Crout

La factorización de Crout presenta:

- Matriz U con **unos en la diagonal principal**
- Matriz L con todos los coeficientes multiplicadores

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ambas factorizaciones son matemáticamente equivalentes en términos de su aplicación. La elección entre ellas depende de consideraciones algorítmicas y pedagógicas. La variante de Doolittle suele preferirse en contextos educativos por su directa relación con el proceso de eliminación gaussiana.

2.2.4. Relevancia pedagógica de la factorización LU

La factorización LU ofrece importantes ventajas didácticas en la enseñanza del álgebra lineal:

- **Proceso constructivo**: Permite visualizar la transformación gradual de la matriz original A en las matrices L y U, reforzando la comprensión de la eliminación gaussiana.
- **Estructura transparente**: Facilita la identificación de los multiplicadores gaussianos en L y los coeficientes resultantes en U.
- **Detección de errores**: La escritura manual de las matrices ayuda a reconocer y corregir errores frecuentes en la disposición de los elementos.
- **Aplicación sistemática**: Proporciona un método general para resolver sistemas lineales, con especial relevancia en:
  - Matemáticas aplicadas
  - Ingeniería
  - Ciencias computacionales

La factorización LU existe para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si y solo si todos sus menores principales son no singulares.

La combinación de **estructura clara** y **aplicaciones prácticas** convierte a la factorización LU en una herramienta fundamental para vincular los conceptos teóricos con su implementación algorítmica.

2.2.5. Consideraciones numéricas y estrategias de pivoteo

En la implementación práctica de la factorización LU, especialmente al trabajar con matrices mal condicionadas o con elementos pivote nulos, es fundamental garantizar la **estabilidad numérica** del algoritmo. Esta estabilidad se consigue mediante la técnica de **pivoteo parcial**, que reorganiza las filas de la matriz original mediante una matriz de permutación:

$$PA = LU$$

donde:

- P es una **matriz de permutación** que codifica los intercambios de filas realizados
- L mantiene su estructura triangular inferior con unos en la diagonal
- U conserva su forma triangular superior

El pivoteo parcial ofrece dos ventajas principales:

1. Evita divisiones por cero al seleccionar el elemento de mayor magnitud como pivote
2. Minimiza la propagación de errores de redondeo en cálculos numéricos

En el diseño de herramientas educativas, el módulo de pivoteo parcial puede implementarse como **contenido avanzado**, accesible únicamente después de que los estudiantes hayan asimilado la versión básica de la factorización LU.

2.2.6. Especificaciones del programa interactivo

El sistema educativo deberá incorporar las siguientes funcionalidades clave para facilitar el aprendizaje de la factorización LU:

1. **Módulo de entrada de datos**
   - Interfaz gráfica para ingreso manual de matrices

- Generación automática de matrices con diferentes propiedades
- Importación desde archivos externos
- Validación automática de dimensionalidad y propiedades matriciales

2. **Visualización interactiva**
   - Representación animada del proceso de eliminación gaussiana
   - Actualización dinámica de los elementos de L y U
   - Resaltado gráfico de las operaciones en curso
   - Control de velocidad y pausa para análisis detallado

3. **Sistema de evaluación**
   - Ejercicios guiados para completar elementos de las matrices
   - Retroalimentación inmediata con explicaciones detalladas
   - Registro histórico de intentos y progreso
   - Mecanismo de ayuda gradual tras múltiples intentos fallidos

4. **Análisis comparativo**
   - Visualización simultánea de las variantes Doolittle y Crout
   - Análisis de estabilidad numérica para diferentes matrices
   - Comparación de rendimiento computacional

5. **Resolución de sistemas lineales**
   - Implementación completa del proceso de solución
   - Visualización de las sustituciones progresiva y regresiva
   - Verificación numérica de las soluciones obtenidas

6. **Recursos pedagógicos**
   - Explicaciones contextuales adaptadas al nivel del usuario
   - Catálogo de errores frecuentes con sugerencias de corrección
   - Diccionario matemático integrado
   - Ejemplos resueltos paso a paso

7. **Características avanzadas**
   - Exportación de resultados en formatos estándar
   - Implementación de pivoteo parcial
   - Soporte para matrices dispersas (implementación futura)
   - Personalización de parámetros numéricos

2.3. Nombre de la sección

Teorema 2.3.1. *Enunciado del teorema*

Corolario 2.3.2. *Enunciado del corolario*

Lema 2.3.3. *Enunciado del lema*

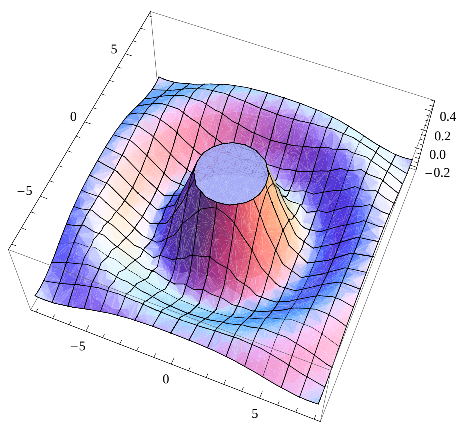
Observación 2.3.1. *Enunciado de la observación*

2.4. Ejemplo para referenciar figuras y tablas

Se puede observar en la Figura 2.1 ...

Figura 2.1

Gráfica de la función $f(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$



Nota: Esta es una nota explicativa sobre la imagen (opcional)

En la Tabla 2.1 ...

2.5. Cómo citar

- **Citas cortas** (hasta 40 palabras):Se incluyen en el texto con comillas.
- **Citas largas** (más de 40 palabras): Se escriben en párrafo separado sin comillas.

Tabla 2.1
Título de la tabla

	1	2
A		
B		

Nota: Nota de la tabla (opcional)

2.5.1. *apacite*

Para citar en formato APA, puede usarse el paquete *apacite*. Algunas opciones de citación pueden hacerse con los comandos que se presentan en la Tabla 2.2; puede consultar Meijer (2013) para la información completa de la documentación del paquete.

Tabla 2.2
Algunos comandos del paquete *apacite*

Texto plano	**Produce**
`\cite{RudinKEY} afirma que`	Rudin (1964) afirma que
`\cite[p.123]{RudinKEY} afirma que`	(Rudin, 1964, p.123) afirma que
`Como se pude ver en \citep{RudinKEY}`	Como se pude ver en (Rudin, 1964)
`\citealp{RudinKEY}`	Rudin, 1964
`Ver Rudin \citeyearpar {RudinKEY}`	Ver Rudin (1964)
`Como se pude ver en \citet{RudinKEY}`	Como se pude ver en Rudin (1964)
`Como se pude ver en \citetext{RudinKEY}`	Como se pude ver en (RudinKEY)
`Puede consultar \citeauthor {RudinKEY}`	Puede consultar Rudin
`Confrontar Lamport \citeyear {RudinKEY}`	Confrontar Lamport 1964

Nota: Tabla extraída de Wunsch (1999, p. 50).

2.5.2. Citas textuales

- **Narrativa**.

  Cita corta.

  Como menciona Apostol (1976), "*la idea de expresar geométricamente los números complejos como puntos de un plano fue formulada por Gauss en su disertación de 1799 e, independiente, por Argand en 1806.*" (p. 21). Sin embargo ...

  Cita larga

  Como menciona Apostol (1976):

  > La idea de expresar geométricamente los números complejos como puntos de un plano fue formulada por Gauss en su disertación de 1799 e, independiente, por Argand en 1806. Más tarde Gauss ideó la expresión un tanto desafortunada de

”número complejo”. Los números complejos admiten otras representaciones geométricas. En vez de utilizar puntos de un plano, se pueden utilizar puntos de otras superficies. (p. 22)

- **Con paréntesis**.

  Los números complejos, pueden representarse como puntos de un plano, “*la idea de expresar geométricamente los números complejos como puntos de un plano fue formulada por Gauss en su disertación de 1799 e, independiente, por Argand en 1806*.” (Apostol, 1976, p. 21),

2.5.3. Citas parafraseadas

- **Narrativa**.

  De acuerdo a Apostol (1976), otra representación geométrica de los números complejos es la llamada **proyección estereográfica** que consiste en proyectar los puntos del polo norte de la esfera sobre el plano tangente en el polo de dicha esfera. (p. 22)

- **Con paréntesis**.

  Otra representación geométrica de los números complejos es la llamada **proyección estereográfica** que consiste en proyectar los puntos del polo norte de la esfera sobre el plano tangente en el polo de dicha esfera.(Apostol, 1976, p. 22)

REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1976). Análisis matemático, 2a. *Edición, Editorial Reverté, España*, *518*.
Meijer, E. (2013). *The apacite package.* Citeseer.
Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill, Inc.
Wunsch, A. D. (1999). *Variable compleja con aplicaciones.* Addison Wesley.