

Машинное обучение  
ВМК МГУ  
Теоретическое домашнее задание №1

**Задача 1.** Найдите производную по матрице  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\frac{\partial}{\partial A} \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — набор собственных значений матрицы  $A$ .

**Задача 2.** Найдите производную по матрице  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\frac{\partial}{\partial A} \log \det A.$$

**Задача 3.** Найдите производную по вектору  $a \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial a} (a^T \exp(aa^T) a),$$

где  $\exp(B)$  — [матричная экспонента](#),  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Матричной экспонентой обозначают ряд

$$1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \frac{B^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

**Задача 4.** В методе t-SNE, который широко используется для визуализации данных, задача построения низкоразмерных представлений объектов сводится к минимизации функционала

$$C = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j \neq i}^{\ell} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}} \rightarrow \min_{\{z_1, \dots, z_{\ell}\}},$$

$$q_{ij} = \frac{(1 + \|z_i - z_j\|^2)^{-1}}{\sum_{k \neq m}^{\ell} (1 + \|z_k - z_m\|^2)^{-1}},$$

$$p_{i|j} = \frac{\exp(-\|x_i - x_j\|^2 / 2\sigma_j^2)}{\sum_{k \neq j} \exp(-\|x_k - x_j\|^2 / 2\sigma_j^2)}, \quad p_{i|i} = 0,$$

$$p_{ij} = \frac{p_{i|j} + p_{j|i}}{2\ell},$$

где  $x_i \in \mathbb{R}^D$ ,  $z_i \in \mathbb{R}^d$ . По непрерывности будем считать, что  $0 \log \frac{0}{0} = 0$ .

Найдите производную  $\frac{\partial C}{\partial z_i}$ .