

Projet S8 MACS 2

Méthode de décomposition de domaine espace-temps

Enzo Benbalit¹, Said Saterih¹,
Responsable du projet : Caroline Japhet²

22 octobre 2023

Résumé

Dans ce rapport on va étudier les méthodes de décomposition de domaine (DD) pour la résolution d'un problème d'advection-diffusion. Un exemple d'application de ces méthodes en mécanique des fluides est la simulation numérique des réacteurs nucléaires. Une telle étude a été faite dans le projet ANR "CINE-PARA" (Méthodes de parallélisation pour les cinétiques complexes, ANR-15-CE23-0019), et ce travail s'inscrit dans la suite de ce projet ANR. Le principe d'une méthode DD est de découper le domaine global en sous-domaines, puis, en partant d'une donnée initiale à l'interface entre les sous-domaines, de résoudre le problème physique dans chaque sous-domaine. Des données sont ensuite transmises sur l'interface, et on résout à nouveau le problème physique dans chaque sous-domaine avec ces nouvelles données. Puis on itère ce processus jusqu'à ce que la solution DD converge vers celle du problème physique. La résolution du problème dans les sous-domaines peut-être faite de façon indépendante, en parallèle, sur différents processeurs. Cela permet de résoudre efficacement le problème physique. Ici on regardera les méthodes de type Schwarz sans recouvrement, avec des conditions de transmission de Robin, introduites par P.L. Lions en 1990. Les coefficients de Robin intervenant dans ces conditions peuvent être choisis de façon à ce que les transferts de données à l'interface soient adaptés à la physique, et que l'algorithme DD converge rapidement.

On considèrera la résolution de l'équation d'advection-diffusion stationnaire ou instationnaire. Pour l'étude théorique de la méthode DD, on appliquera des résultats vus dans différents cours de MACS 2.

Travail réalisé

Le travail réalisé consiste en les étapes suivantes :

1. Étude théorique de la méthode DD :

- Comprendre l'algorithme DD pour le problème d'advection-diffusion stationnaire (généralisation de ce qui a été fait dans [1] et [4], avec ajout du terme d'advection).
- Caractère bien défini de l'algorithme DD : étude du problème local de Robin (application des théorèmes de trace et de Lax-Milgram vu dans [9]), et des conditions de transmissions.
- Convergence de l'algorithme de Schwarz, calcul du taux de convergence, choix des paramètres de Robin de façon à optimiser la convergence (extension de ce qui a été fait dans [4] avec Robin et l'advection).
- Discrétisation par un schéma volumes finis comme dans [1] et [7] en ajoutant l'advection, et vérification que l'on retrouve, à convergence, le schéma du problème global au point de l'interface.

2. Étude numérique et implémentation de la méthode DD :

- Extension du code DD stationnaire Octave, fourni dans [1, 4] en ajoutant l'advection.
- Validations du code dans un sous-domaine et du code DD, étude de la condition de M-matrice : mise en évidence d'instabilités numériques ; illustration de la convergence avec les paramètres de Robin optimisés.

1. Sup Galilée, Ingénieurs M.A.C.S, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, F-93430, Villetaneuse, France
2. CNRS, UMR 7539, LAGA, Université Sorbonne Paris Nord, F-93430, Villetaneuse, France

1 Problème d'advection-diffusion stationnaire

Soit $\Omega =]a, b[$ un intervalle borné de \mathbb{R} , $\eta \geq 0$, $\nu > 0$, $\tilde{b} \geq 0$, $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$, et $u_a, u_b \in \mathbb{R}$. On considère la résolution du problème d'advection-diffusion : chercher $\bar{u} \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\eta \bar{u}(x) + \tilde{b} \frac{d\bar{u}}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}(x) = \tilde{f}(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (1a)$$

$$\bar{u}(a) = u_a, \quad \bar{u}(b) = u_b. \quad (1b)$$

Le paramètre η est le coefficient de réaction, \tilde{b} celui d'advection, ν celui de diffusion, \tilde{f} le terme source, et u_a, u_b les conditions aux limites de Dirichlet.

Pour étudier l'existence et l'unicité d'une solution du problème (1), on commence par écrire (1) sous la forme d'un problème équivalent avec des conditions de Dirichlet homogène, à l'aide d'une méthode de relèvement.

Problème équivalent avec Dirichlet homogène

Soit r un relèvement des conditions de Dirichlet, c'est-à-dire tel que $r \in H^2(\Omega)$, et $r(a) = u_a$, $r(b) = u_b$. Une fonction simple (polynomiale) qui vérifie ces conditions est par exemple :

$$r(x) = u_a + \left(\frac{u_b - u_a}{b - a} \right) (x - a), \quad \forall x \in \Omega.$$

On fait ensuite le changement de variable $u = \bar{u} - r$ où $\bar{u} \in H^2(\Omega)$ est une solution de (1) (si elle existe). Le problème (1) est alors équivalent au problème : chercher $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\eta u(x) + \tilde{b} \frac{du}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2a)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \quad (2b)$$

avec $f = \tilde{f} - \eta r - \tilde{b} r' = \tilde{f} - \eta r - \tilde{b} \left(\frac{u_b - u_a}{b - a} \right)$. On a $f \in L^2(\Omega)$ puisque $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$, $r \in H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, et $\tilde{b} \left(\frac{u_b - u_a}{b - a} \right)$ est une constante (donc dans $L^2(\Omega)$). On a alors le résultat suivant (voir [9]) :

Théorème 1.1. *Si $f \in L^2(\Omega)$, alors le problème (2) a une unique solution $u \in H^2(\Omega)$.*

2 Algorithme de Schwarz avec conditions de Robin

Cette méthode a été introduite par P.L. Lions en 1990 [6]. Son principe est de décomposer Ω en deux sous-domaines sans recouvrement : $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, avec $x = \gamma$ ($\gamma \in]a, b[$) l'interface entre les sous-domaines, comme sur la Figure 1.

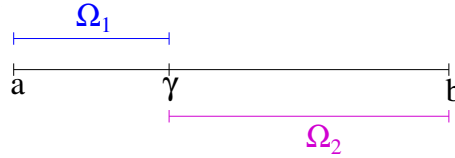


FIGURE 1 – Décomposition de Ω en deux sous-domaines, sans recouvrement

Soit $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ les paramètres de Robin (dont on précisera les valeurs ultérieurement). L'algorithme de Schwarz avec des conditions de transmission de Robin pour résoudre le problème (1) (sans relèvement) s'écrit alors :

Algorithm 1 (Schwarz avec Robin pour le problème d'advection-diffusion sans relèvement)

Choisir deux données initiales de Robin g_1^0, g_2^0 en $x = \gamma$, et poser

$$\nu \frac{d\bar{u}_2^0}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}_2^0(\gamma) + \alpha_1 \bar{u}_2^0(\gamma) := g_1^0, \quad -\nu \frac{d\bar{u}_1^0}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}_1^0(\gamma) + \alpha_2 \bar{u}_1^0(\gamma) := g_2^0. \quad (3)$$

for $k = 1, 2, \dots$

Résoudre les problèmes locaux de Robin, en parallèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \bar{u}_1^k(x) + \tilde{b} \frac{d\bar{u}_1^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 \bar{u}_1^k}{dx^2}(x) = \tilde{f}(x), \quad \forall x \in]a, \gamma[, \\ \bar{u}_1^k(a) = u_a \\ \nu \frac{d\bar{u}_1^k}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}_1^k(\gamma) + \alpha_1 \bar{u}_1^k(\gamma) = \nu \frac{d\bar{u}_2^{k-1}}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}_2^{k-1}(\gamma) + \alpha_1 \bar{u}_2^{k-1}(\gamma), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta \bar{u}_2^k(x) + \tilde{b} \frac{d\bar{u}_2^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 \bar{u}_2^k}{dx^2}(x) = \tilde{f}(x), \quad \forall x \in]\gamma, b[, \\ \bar{u}_2^k(b) = u_b \\ -\nu \frac{d\bar{u}_2^k}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}_2^k(\gamma) + \alpha_2 \bar{u}_2^k(\gamma) = -\nu \frac{d\bar{u}_1^{k-1}}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}_1^{k-1}(\gamma) + \alpha_2 \bar{u}_1^{k-1}(\gamma). \end{array} \right. \quad (4)$$

end for

Afin d'étudier le caractère bien défini de cet algorithme, dans la section 3, on va plutôt considérer l'algorithme de Schwarz appliqué au problème (2) (qui est équivalent au problème (1)), c'est-à-dire :

Algorithm 2 (Schwarz avec Robin pour le problème d'advection-diffusion avec relèvement)

Choisir deux données initiales de Robin g_1^0, g_2^0 en $x = \gamma$, et poser

$$\nu \frac{du_2^0}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_2^0(\gamma) + \alpha_1 u_2^0(\gamma) := g_1^0, \quad -\nu \frac{du_1^0}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} u_1^0(\gamma) + \alpha_2 u_1^0(\gamma) := g_2^0. \quad (5)$$

for $k = 1, 2, \dots$

Résoudre les problèmes locaux de Robin, en parallèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta u_1^k(x) + \tilde{b} \frac{du_1^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 u_1^k}{dx^2}(x) = f(x), \quad \forall x \in]a, \gamma[, \\ u_1^k(a) = 0 \\ \nu \frac{du_1^k}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_1^k(\gamma) + \alpha_1 u_1^k(\gamma) = \nu \frac{du_2^{k-1}}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_2^{k-1}(\gamma) + \alpha_1 u_2^{k-1}(\gamma), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta u_2^k(x) + \tilde{b} \frac{du_2^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 u_2^k}{dx^2}(x) = f(x), \quad \forall x \in]\gamma, b[, \\ u_2^k(b) = 0 \\ -\nu \frac{du_2^k}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} u_2^k(\gamma) + \alpha_2 u_2^k(\gamma) = -\nu \frac{du_1^{k-1}}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} u_1^{k-1}(\gamma) + \alpha_2 u_1^{k-1}(\gamma). \end{array} \right. \quad (6)$$

end for

3 Caractère bien défini de l'algorithme DD

Notons g_i^k , $i = 1, 2$, les données de Robin en γ dans (6) définies par :

$$g_i^k = (-1)^{i+1} \left(\nu (u_j^k)'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_j^k(\gamma) \right) + \alpha_i u_j^k(\gamma) \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

L'algorithme 2 sera bien défini, si g_i^k et u_i^k sont bien définis, pour $i = 1, 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela signifie que l'on doit montrer d'une part que g_i^k , $i = 1, 2$ est bien défini, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et d'autre part que le problème de Robin (6) associé à g_i^k a une unique solution, pour $i = 1, 2$. Supposons, dans un premier temps, que g_i^k , $i = 1, 2$ est bien défini, à une itération k fixée (c'est le cas à la première itération puisque g_1^0 et g_2^0 sont donnés), et montrons que les problèmes de Robin associés ont une unique solution.

3.1 Etude du problème dans un sous-domaine

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Posons $c_1 = a$ et $c_2 = b$. Le problème à résoudre dans Ω_i à l'itération k , s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta u_i^k(x) + \tilde{b} (u_i^k)'(x) - \nu (u_i^k)''(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \\ u_i^k(c_i) = 0, \\ (-1)^{i+1} \left(\nu (u_i^k)'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_i^k(\gamma) \right) + \alpha_i u_i^k(\gamma) = g_i^{k-1}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Dans la suite, les indices k et i étant fixés, pour simplifier l'écriture on pose $w = u_i^k$, $\mathcal{O} = \Omega_i$, $c = c_i$, $\alpha = \alpha_i$, et $g = g_i^{k-1}$. Le problème ci-dessus se réécrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta w(x) + \tilde{b} w'(x) - w''(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{O}, \\ w(c) = 0, \\ (-1)^{i+1} \left(\nu w'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} w(\gamma) \right) + \alpha w(\gamma) = g. \end{array} \right. \quad (9)$$

On va montrer que le problème (9) a une unique solution dans $H^2(\mathcal{O})$. Pour cela on va procéder en trois étapes :

1. Écrire la formulation variationnelle dans l'espace $V = \{v \in H^1(\mathcal{O}); v(c) = 0\}$, du problème (9),
2. Montrer que cette formulation variationnelle a une unique solution dans V , à l'aide du théorème de Lax-Milgram,
3. Montrer que la formulation variationnelle est équivalente au problème (9).

3.1.1 Formulation Variationnelle

On note $(\cdot, \cdot)_0$ et $\|\cdot\|_0$ le produit scalaire et la norme dans $L^2(\mathcal{O})$, et pour $v \in H^1(\mathcal{O})$: $\|v\|_1 = (\|v\|_0^2 + \|v'\|_0^2)^{\frac{1}{2}}$. On pose $V = \{v \in H^1(\mathcal{O}); v(c) = 0\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Théorème 3.1. La formulation variationnelle associée au problème (9) s'écrit : chercher $w \in V$ tel que

$$a(w, v) = l(v) \text{ pour tout } v \in V, \quad (10)$$

avec

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \eta(w, v)_0 + \frac{\tilde{b}}{2} ((w', v)_0 - (w, v')_0) + \nu(w', v')_0 + \alpha w(\gamma)v(\gamma), \quad \forall w, v \in V, \\ l(v) &= (f, v)_0 + gv(\gamma), \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Démonstration. On a par hypothèse $f \in L^2(\mathcal{O})$, donc de la première équation de (9) on a w, w' et w'' dans $L^2(\mathcal{O})$, et ainsi $w \in H^2(\mathcal{O})$. Pour écrire la formulation variationnelle, on multiplie la première équation de (9) par $v \in V$ et on intègre sur \mathcal{O} (on peut bien appliquer la formule de Green puisque $w \in H^2(\mathcal{O})$) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}} \eta w(x)v(x)dx + \int_{\mathcal{O}} \tilde{b}w'(x)v(x)dx - \int_{\mathcal{O}} \nu w''(x)v(x)dx = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow & \int_{\mathcal{O}} \eta w(x)v(x)dx + \frac{\tilde{b}}{2} \int_{\mathcal{O}} w'(x)v(x)dx + \frac{\tilde{b}}{2} \int_{\mathcal{O}} w'(x)v(x)dx - \int_{\mathcal{O}} \nu w''(x)v(x)dx = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow & \int_{\mathcal{O}} \eta w(x)v(x)dx + \frac{\tilde{b}}{2} \int_{\mathcal{O}} w'(x)v(x)dx - \frac{\tilde{b}}{2} \int_{\mathcal{O}} w(x)v'(x)dx + (-1)^{i+1} \left(\frac{\tilde{b}}{2} w(\gamma)v(\gamma) - \underbrace{\frac{\tilde{b}}{2} w(c)v(c)}_{=0 \text{ car } v \in V} \right) \\ & + \nu \int_{\mathcal{O}} w'(x)v'(x)dx + (-1)^{i+1} \left(\nu \underbrace{w'(c)v(c)}_{=0 \text{ car } v \in V} - \nu w'(\gamma)v(\gamma) \right) = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow & \int_{\mathcal{O}} \eta w(x)v(x)dx + \frac{\tilde{b}}{2} \int_{\mathcal{O}} (w'(x)v(x) - w(x)v'(x))dx + \nu \int_{\mathcal{O}} w'(x)v'(x)dx - \underbrace{(-1)^{i+1} \left(\nu w'(\gamma)v(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} w(\gamma)v(\gamma) \right)}_{=g-\alpha w(\gamma)} v(\gamma) = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V \\ \Rightarrow & \eta(w, v)_0 + \frac{\tilde{b}}{2} ((w', v)_0 - (w, v')_0) + \nu(w', v')_0 + \alpha w(\gamma)v(\gamma) = (f, v)_0 + gv(\gamma), \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

ce qui donne bien (10). □

3.1.2 Existence et unicité

On va montrer le résultat suivant :

Théorème 3.2. On suppose que $f \in L^2(\mathcal{O})$, et $\alpha > 0$, alors le problème variationnel (10) a une unique solution $w \in V$. De plus, il existe deux constantes $\hat{C} > 0$ et $M > 0$ telles que :

$$\|w\|_1 \leq \frac{1}{\hat{C}} (\|f\|_0 + |g|M). \quad (11)$$

Démonstration. On va montrer l'existence et l'unicité d'une solution de (10) en utilisant le théorème de Lax-Milgram (comme dans [9]) :

- **V est un espace de Hilbert.**

En effet, on a $V = \gamma_0^{-1}(\{0\})$, où γ_0 est l'application trace en $x = c$, définie par :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow v(c) \end{aligned}$$

Comme γ_0 est continue, et $\{0\}$ fermé, alors V est fermé. Ainsi V est un sous-espace fermé de $H^1(\mathcal{O})$ qui est un espace Hilbert, et donc V est un espace de Hilbert (muni de la restriction du produit scalaire de $H^1(\mathcal{O})$). En effet, si (v_n) est une suite de Cauchy dans V , alors c'est une suite de Cauchy dans $H^1(\mathcal{O})$ (pour la norme $\|\cdot\|_1$). Elle a donc une limite v dans $H^1(\mathcal{O})$ (puisque'il est complet). Comme $v_n \in V, \forall n \in \mathbb{N}$, et que V est fermé, alors $v \in V$, donc (v_n) a une limite dans V .

- **a est continue sur $V \times V$.**

a est bilinéaire sur V par la linéarité de l'intégrale et pour montrer qu'elle est continue, il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$|a(w, v)| \leq C \|w\|_1 \|v\|_1 \quad \forall w, v \in V \quad (12)$$

— Méthode générale avec le théorème de trace :

Soient $w, v \in V$, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$|a(w, v)| \leq \left| \eta \int_{\mathcal{O}} w(x)v(x)dx \right| + \left| \nu \int_{\mathcal{O}} w'(x)v'(x)dx \right| + |\alpha w(\gamma)v(\gamma)| + \left| \frac{\tilde{b}}{2} (w', v)_0 \right| + \left| \frac{\tilde{b}}{2} (w, v')_0 \right|$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\eta \geq 0$, $\nu > 0$ et $\alpha_1 > 0$. On obtient :

$$|a(w, v)| \leq \eta \|w\|_0 \|v\|_0 + \nu \|w'\|_0 \|v'\|_0 + \alpha |w(\gamma)| |v(\gamma)| + \left| \frac{\tilde{b}}{2} \|w'\|_0 \|v\|_0 + \left| \frac{\tilde{b}}{2} \|w\|_0 \|v'\|_0 \right|$$

Par la continuité de l'application trace il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|v(\gamma)| \leq M \|v\|_1, \quad \forall v \in H^1(\Omega_1)$$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_1$, et comme $\tilde{b} \geq 0$, obtient :

$$|a(w, v)| \leq (\eta + \nu + \alpha M^2 + \tilde{b}) \|w\|_1 \|v\|_1, \quad \forall w, v \in V,$$

ce qui donne (12), en posant $C = \eta + \nu + \alpha M^2 + \tilde{b}$ (on a bien $C > 0$). Donc on obtient la continuité de a .

— Méthode sans théorème trace valable en 1D :¹

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad v(x) = v(c) + \int_c^x v'(y) dy = \int_c^x v'(y) dy$$

car $v \in V$ donc $v(c) = 0$.

En appliquant cette formule en γ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathcal{O})$, on aboutit à :

$$|v(\gamma)| \leq \sqrt{|\gamma - c|} \|v'\|_0 \leq \sqrt{|\gamma - c|} \|v\|_1$$

On en déduit alors, en majorant la partie trace dans la majoration de $a(w, v)$, que :

$$|a(w, v)| \leq (\eta + \nu + \alpha |\gamma - c| + \tilde{b}) \|w\|_1 \|v\|_1$$

Ceci montre alors la continuité de la forme bilinéaire a sur $V \times V$

• **a est coercive sur $V \times V$ (V -elliptique).**

Soit $v \in V$. On a

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \eta \int_{\mathcal{O}} v^2(x) dx + \underbrace{\frac{\tilde{b}}{2} \left(\int_{\mathcal{O}} v'(x) v(x) dx - \int_{\mathcal{O}} v(x) v'(x) dx \right)}_{=0} + \nu \int_{\mathcal{O}} v'^2(x) dx + \underbrace{\alpha v^2(\gamma)}_{\geq 0 \text{ car } \alpha > 0} \\ &\geq \eta \int_{\mathcal{O}} v^2(x) dx + \nu \int_{\mathcal{O}} v'^2(x) dx \\ &\geq \min(\eta, \nu) \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

Si $\eta > 0$ alors a est coercive sur V , de constante de coercivité $\hat{C} = \min(\eta, \nu)$. Si $\eta = 0$ alors on a :

$$a(v, v) \geq \nu \int_{\mathcal{O}} v'^2(x) dx$$

donc

$$a(v, v) \geq \frac{\nu}{2} \|v'\|_0^2 + \frac{\nu}{2} \|v'\|_0^2.$$

Comme $v \in V$ on peut utiliser l'inégalité de Poincaré (voir le Théorème 3.3 ci-dessous), et on obtient :

$$a(v, v) \geq \frac{\nu}{2} \|v'\|_0^2 + \frac{\nu}{2C_p^2} \|v\|_0^2.$$

Alors on a :

$$a(v, v) \geq \min\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2C_p^2}\right) \|v\|_1^2, \quad \forall v \in V.$$

Donc a est coercive sur V car $\nu > 0$, de constante de coercivité $\hat{C} = \min(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2C_p^2})$.

Théorème 3.3. *Inégalité de Poincaré*

Soit \mathcal{O} un ouvert borné de \mathbb{R} et $v \in V$. On a alors :

$$\int_{\mathcal{O}} v^2(x) dx \leq C_p \int_{\mathcal{O}} v'^2(x) dx$$

Remarque 3.4. Ce résultat se démontre en suivant le même raisonnement que dans l'espace $H_0^1(\mathcal{O})$ vu dans [9].

Il se généralise en dimension quelconque avec un ouvert Ω borné possédant une portion du bord de mesure surfacique non nulle où la trace de la fonction $v \in H^1(\Omega)$ est nulle.

1. cette méthode est valable en 2D ou 3D dans des cas particuliers, par exemple le carré unité

• **l est continue sur V**

l est linéaire sur V par la linéarité de l'intégrale. Pour montrer qu'elle est continue, il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$|l(v)| \leq C \|v\|_1 \quad v \in V.$$

Soit $v \in V$, on a :

$$l(v) = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx + |gv(\gamma)|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|l(v)| \leq \|f\|_0 \|v\|_0 + |g| |v(\gamma)|.$$

Ainsi par définition de la norme $\|\cdot\|_1$ et par la continuité de l'application trace (ou bien la deuxième méthode exposée dans le cas 1D, avec $M = |\gamma - c|$), on obtient :

$$|l(v)| \leq (\|f\|_0 + |g|M) \|v\|_1$$

En posant $C = \|f\|_0 + |g|M$, on obtient la continuité de l .

D'après le théorème de Lax-Milgram [9] il existe une unique solution du problème (10) (en particulier, la solution est nulle aux extrémités du domaine).

• **Stabilité par rapport aux données :**

Soit $w \in V$ solution de la formulation variationnelle, on prend $v = w$ dans la FV. On a :

$$a(w, w) = l(w) = (f, w)_0 + gw(\gamma).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathcal{O})$, on obtient :

$$|a(w, w)| \leq (\|f\|_0 + |g|M) \|w\|_1.$$

Ensuite, en utilisant la coercivité de a (i.e. $a(w, w) \geq \hat{C} \|w\|_1^2$) puis en simplifiant par $\|w\|_1$, on obtient :

$$\|w\|_1 \leq \frac{1}{\hat{C}} (\|f\|_0 + |g|M),$$

ce qui prouve la stabilité par rapport aux données de la solution du problème (9). □

3.1.3 Equivalence entre le problème de Robin et la formulation variationnelle

Dans cette partie on va montrer le résultat suivant :

Théorème 3.5. *La formulation variationnelle (10) est équivalente au problème (9).*

Pour cela, on énonce d'abord un résultat de [9], donnant une condition suffisante d'existence de la dérivée faible au sens L^2 .

Proposition 3.6. *On se donne Ω un ouvert borné de \mathbb{R} . Soit f une fonction dans $L^2(\Omega)$. S'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :*

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \quad \left| \int_{\Omega} f(x)\phi'(x)dx \right| \leq C \|\phi\|_0,$$

alors f admet une dérivée faible au sens $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe $w \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} f(x)\phi'(x)dx = - \int_{\Omega} w(x)\phi(x)dx.$$

Preuve du Théorème 3.5. Dans la Section 3.1.1, on a montré que (9) implique (10). Montrons maintenant la réciproque.

On va d'abord montrer que la solution $w \in V$ de (10), donnée par le théorème de Lax-Milgram, est dans $H^2(\mathcal{O})$, i.e. montrer que w' admet une dérivée faible au sens $L^2(\mathcal{O})$. Pour cela on va utiliser la Proposition 3.6, avec $\Omega = \mathcal{O}$.

Comme $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}) \subset V$, en prenant v dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ dans formulation variationnelle, et en notant que les termes sur le bord de \mathcal{O} sont nuls si $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$, on a alors :

$$\eta \int_{\mathcal{O}} w(x)v(x)dx + \nu \int_{\mathcal{O}} w'(x)v'(x)dx + \frac{\tilde{b}}{2}(w', v)_0 - \frac{\tilde{b}}{2}(w, v')_0 = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}). \quad (13)$$

En isolant le deuxième terme du premier membre, et en faisant une intégration par partie sur les intégrales en v' sachant que $w \in H^1(\mathcal{O})$, on en déduit alors :

$$\int_{\mathcal{O}} w'(x)v'(x)dx = \frac{1}{\nu} \left(\int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx - \eta \int_{\mathcal{O}} w(x)v(x)dx - \tilde{b} \int_{\mathcal{O}} w'(x)v(x)dx \right), \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}).$$

En utilisant enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les trois intégrales du membre de droite, on en déduit alors :

$$\left| \int_{\mathcal{O}} w'(x)v'(x)dx \right| \leq C\|v\|_0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}),$$

où $C = \frac{1}{\nu}(\|f\|_0 + \eta\|w\|_0 + \tilde{b}\|w'\|_0)$ qui ne dépend pas de v . On peut alors appliquer la proposition 3.6, pour en déduire que w' admet une dérivée faible au sens $L^2(\Omega)$. Ceci montre que $w \in H^2(\Omega)$.

On peut donc appliquer la formule de Green dans (13) et on obtient :

$$\int_{\mathcal{O}} (\eta w(x) + \tilde{b}w'(x) - \nu w''(x))v(x)dx = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}).$$

En utilisant le lemme de Du Bois Reymond (cf notes de cours de distributions), on en déduit la première équation du problème (9) :

$$\eta w(x) + \tilde{b}w'(x) - \nu w''(x) = f(x), \text{ p.p. sur } \mathcal{O}. \quad (14)$$

Afin de retrouver la troisième équation du problème (9) (i.e. la condition de Robin), revenons maintenant à la formulation variationnelle (10). En appliquant la formule de Green (comme $w \in H^2(\Omega)$), on obtient la relation suivante :

$$\int_{\mathcal{O}} (\eta w(x) + \tilde{b}w'(x) - \nu w''(x))v(x)dx + [\nu(-1)^{i+1}w'(\gamma) + (\alpha - \frac{\tilde{b}}{2}(-1)^{i+1})w(\gamma)]v(\gamma) = \int_{\mathcal{O}} f(x)v(x)dx + gv(\gamma), \quad \forall v \in V. \quad (15)$$

Donc, en utilisant (14) dans l'équation ci-dessus, il s'en déduit la relation suivante :

$$\nu w'(\gamma)(-1)^{i+1} + (\alpha - \frac{\tilde{b}}{2}(-1)^{i+1})w(\gamma)v(\gamma) = gv(\gamma), \quad \forall v \in V.$$

En prenant une fonction $v \in V$ (par exemple une fonction affine sur Ω_i et qui vaut 1 en γ), et en divisant par $v(\gamma) \neq 0$:

$$\nu w'(\gamma)(-1)^{i+1} + (\alpha - \frac{\tilde{b}}{2}(-1)^{i+1})w(\gamma) = g, \text{ sur } \Omega_i,$$

et on a donc retrouvé la troisième équation de (9). Comme $w \in V$, la deuxième équation de (9) est également vérifiée, et avec (14) on trouve bien que w est solution du problème (9). \square

3.2 Caractère bien défini de l'algorithme

Montrons que l'algorithme est bien défini, c'est-à-dire que g_i^k , $k \geq 0$ (défini par (7)), et u_i^k , $k \geq 1$, sont bien définis, pour $i = 1, 2$. On va procéder par récurrence sur k , en utilisant les résultats ci-dessus.

Montrons par récurrence la validité de la proposition $\mathcal{H}(k)$ suivante, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{H}(k) : \quad \{u_i^k, g_i^k \text{ sont bien définis, } \forall i \in \{1, 2\}\}$$

Initialisation : Soit $k = 1$, et $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$. Le problème dans Ω_i s'écrit :

$$(P_i^1) \begin{cases} \eta u_i^1(x) + \tilde{b}(u_i^1)'(x) - \nu(u_i^1)''(x) = f(x), & \forall x \in \Omega_i, \\ u_i^1(c_i) = 0, \\ (-1)^{i+1} \left(\nu(u_i^1)'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2}u_i^1(\gamma) \right) + \alpha_i u_i^1(\gamma) = g_i^0. \end{cases},$$

avec $g_i^0 \in \mathbb{R}$ une donnée du problème. On a donc, par le Théorème 3.2, l'existence et l'unicité de la solution $u_i^1 \in H^2(\Omega_i)$. Prenons $k = 1$ dans (7) :

$$g_i^1 = (-1)^{i+1} \left(\nu(u_j^1)'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2}u_j^1(\gamma) \right) + \alpha_i u_j^1(\gamma) \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2.$$

Cette quantité est bien définie, pour $i = 1, 2$. En effet, d'après 3.1.3 $u_i^1 \in H^2(\Omega_i) \subset C^1(\Omega_i)$. Ainsi la propriété $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété $\mathcal{H}(k)$ vraie au rang k , montrons qu'elle reste vraie au rang $k+1$.

$$(P_i^{k+1}) \begin{cases} \eta u_i^{k+1}(x) + \tilde{b}(u_i^{k+1})'(x) - \nu(u_i^{k+1})''(x) = f(x), & \forall x \in \Omega_i, \\ u_i^{k+1}(c_i) = 0, \\ (-1)^{i+1} \left(\nu(u_i^{k+1})'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2}u_i^{k+1}(\gamma) \right) + \alpha_i u_i^{k+1}(\gamma) = g_i^k. \end{cases}$$

avec g_i^k défini à partir de la solution du domaine voisin à l'itération précédente k (voir (7)). D'après l'hypothèse de récurrence, g_i^k est bien défini, pour $i = 1, 2$. Ensuite, par le Théorème 3.2, l'E.D.P. (P_i^{k+1}) admet une unique solution $u_i^{k+1} \in H^2(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. Il reste à vérifier que g_i^{k+1} est bien défini, pour $i = 1, 2$. D'après (7), on a :

$$g_i^{k+1} = (-1)^{i+1} \left(\nu(u_j^{k+1})'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_j^{k+1}(\gamma) \right) + \alpha_i u_j^{k+1}(\gamma) \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2,$$

avec $u_i^{k+1} \in H^2(\Omega_i) \subset C^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. Nous avons donc bien que les g_i^{k+1} sont bien définis $\forall i \in \{1, 2\}$. La Propriété de récurrence est donc bien vérifiée au rang $k + 1$. Elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi l'algorithme 2 est bien défini pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.7. Notons que l'on peut écrire g_i^k , $i = 1, 2$ à l'aide d'une formule plus simple ce qui sera utile en pratique. En effet, on a, par définition de g_1^k (voir (7)), pour $k \geq 1$:

$$g_1^k = \nu \frac{du_2^k}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_2^k(\gamma) + \alpha_1 u_2^k(\gamma). \quad (16)$$

Par ailleurs la condition de Robin du problème dans Ω_2 à l'itération k (problème (P_2^k)) s'écrit :

$$\begin{aligned} & -\nu \frac{du_2^k}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} u_2^k(\gamma) + \alpha_2 u_2^k(\gamma) = g_2^{k-1} \\ \iff & \nu \frac{du_2^k}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_2^k(\gamma) = -g_2^{k-1} + \alpha_2 u_2^k(\gamma). \end{aligned} \quad (17)$$

En remplaçant (17) dans (16) on obtient :

$$g_1^k = -g_2^{k-1} + (\alpha_2 + \alpha_1) u_2^k(\gamma).$$

De manière équivalente, on trouve : $\forall k \geq 1$, $g_2^k = -g_1^{k-1} + (\alpha_2 + \alpha_1) u_1^k(\gamma)$, ainsi :

$$\forall k \geq 0, \quad g_i^k = -g_j^{k-1} + (\alpha_2 + \alpha_1) u_j^k(\gamma), \quad j = 3 - i, \quad i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket. \quad (18)$$

4 Etude théorique de la convergence de l'algorithme DD

Dans cette partie on étudie la convergence de l'algorithme 1. Pour cela, on va calculer le taux de convergence de l'algorithme.

4.1 Calcul du taux de convergence

On introduit l'erreur e_i^k à l'itération k par $e_i^k := u_i^k - \bar{u}$, $i = 1, 2$, pour $k \geq 1$.

Soit $i = 1$, e_1^k est solution du problème :

$$\begin{aligned} \eta e_1^k(x) + \tilde{b} \frac{de_1^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 e_1^k}{dx^2}(x) &= \eta(u_1^k(x) - \bar{u}(x)) + \tilde{b} \frac{d(u_1^k - \bar{u})}{dx}(x) - \nu \frac{d^2(u_1^k - \bar{u})}{dx^2}(x), \quad \forall x \in]0, \gamma[\\ &= \eta u_1^k(x) + \tilde{b} \frac{du_1^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 u_1^k}{dx^2}(x) - \eta \bar{u}(x) - \tilde{b} \frac{d\bar{u}}{dx}(x) + \nu \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}(x) \\ &= \bar{f}(x) - \bar{f}(x) = 0 \end{aligned}$$

De plus,

- en $x = 0$: $e_1^k(0) = u_1^k(0) - \bar{u}(0) = 0$
- en $x = \gamma$:

$$\begin{aligned} \nu \frac{de_1^k}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} e_1^k(\gamma) + \alpha_1 e_1^k(\gamma) &= \nu \frac{du_1^k}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_1^k(\gamma) + \alpha_1 u_1^k(\gamma) - \nu \frac{d\bar{u}}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}(\gamma) - \alpha_1 \bar{u}(\gamma) \\ &= \nu \frac{du_2^{k-1}}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_2^{k-1}(\gamma) + \alpha_1 u_2^{k-1}(\gamma) - \nu \frac{d\bar{u}}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} \bar{u}(\gamma) - \alpha_1 \bar{u}(\gamma) \\ &= \nu \frac{de_2^{k-1}}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} e_2^{k-1}(\gamma) + \alpha_1 e_2^{k-1}(\gamma) \end{aligned}$$

e_1^k est donc solution de (19) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta e_1^k(x) + \tilde{b} \frac{de_1^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 e_1^k}{dx^2}(x) = 0, \quad \forall x \in]0, \gamma[\\ e_1^k(0) = 0 \\ \nu \frac{de_1^k}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} e_1^k(\gamma) + \alpha_1 e_1^k(\gamma) = \nu \frac{de_2^{k-1}}{dx}(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} e_2^{k-1}(\gamma) + \alpha_1 e_2^{k-1}(\gamma) \end{array} \right. \quad (19)$$

De même on montre que e_2^k est solution de (20) :

$$\begin{cases} \eta e_2^k(x) + \tilde{b} \frac{de_2^k}{dx}(x) - \nu \frac{d^2 e_2^k}{dx^2}(x) = 0 & , \forall x \in]0, \gamma[\\ e_2^k(0) = 0 \\ -\nu \frac{de_2^k}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} e_2^k(\gamma) + \alpha_2 e_2^k(\gamma) = -\nu \frac{de_1^{k-1}}{dx}(\gamma) + \frac{\tilde{b}}{2} e_1^{k-1}(\gamma) + \alpha_2 e_1^{k-1}(\gamma) \end{cases} \quad (20)$$

L'équation caractéristique associée à la première équation de (19) ou de (20) est :

$$\begin{aligned} \eta + \tilde{b}r - \nu r^2 &= 0 \\ \Delta &= \tilde{b}^2 + 4\nu\eta > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a les racines :

$$r^\pm = \frac{\tilde{b} \pm \sqrt{\Delta}}{2\nu}$$

Donc, $\forall k \geq 1$, il existe $A_i^k, B_i^k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$e_i^k(x) = A_i^k e^{r^+ x} + B_i^k e^{r^- x}, \quad \forall x \in \Omega_i, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (21)$$

Pour le cas $i = 1$. On a :

$$e_1^k(x) = A_1^k e^{r^+ x} + B_1^k e^{r^- x}$$

et $e_1^k(0) = 0$ donc $A_1^k = -B_1^k$. On trouve donc

$$e_1^k(x) = A_1^k (e^{r^+ x} - e^{r^- x}).$$

Pour le cas $i = 2$. On a :

$$e_2^k(x) = A_2^k e^{r^+ x} + B_2^k e^{r^- x}$$

et $e_1^k(1) = 0$ donc $B_2^k = -A_2^k e^{r^+ - r^-}$. On trouve donc

$$e_2^k(x) = A_2^k (e^{r^+ x} - e^{r^+ - r^-} e^{r^- x})$$

On va maintenant chercher les expressions de A_i^k grâce aux conditions de transmissions pour $i = 1, 2$ (et B_i^k se déduisent des relations issues conditions aux limites). Soit $k \geq 2$. On pose $c = e^{r^+ - r^-}$.

La condition de transmission dans le domaine Ω_1 donne :

$$A_1^k \left(\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + (-\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right) = A_2^{k-1} \left(\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + (-\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right) \quad (22)$$

La condition de transmission dans le domaine Ω_2 donne :

$$A_2^k \left(-\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + (\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2)(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right) = A_1^{k-1} \left(-\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + (\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2)(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right) \quad (23)$$

On en déduit alors les relations de récurrence valables pour $k > 2$:

$$\begin{aligned} A_1^k &= \rho A_1^{k-2} \\ A_2^k &= \rho A_2^{k-2} \end{aligned}$$

Avec ρ le taux de convergence qui vaut :

$$\rho = \frac{\left(\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + (-\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right)}{\left(\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + (-\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right)} \frac{\left(-\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + (\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2)(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right)}{\left(-\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + (\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2)(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right)}$$

4.2 Paramètres optimaux

On déduit le résultat suivant

Proposition 4.1. *Si l'on choisit*

$$\alpha_1 = -\nu \frac{(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma})}{(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma})} + \frac{\tilde{b}}{2}$$

$$\alpha_2 = \nu \frac{(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma})}{(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma})} - \frac{\tilde{b}}{2}$$

alors l'algorithme converge en deux itérations.

Démonstration. En utilisant (22) et (23), on a pour $k = 2$:

$$A_1^2 \left(\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + \left(-\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1\right)(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right) = 0$$

$$A_2^2 \left(-\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + \left(\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2\right)(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right) = 0$$

Donc on a alors : $A_1^2 = 0$ et $A_2^2 = 0$.

Comme $\rho = 0$ par hypothèse, donc $A_1^3 = 0$ et $A_2^3 = 0$.

Par les relations de récurrence sur les $(A_i^k)_k$ avec $i = 1, 2$, ceci implique que :

$$\forall k > 1, A_i^k = 0$$

Donc

$$\forall k > 1, \forall x \in [0, 1], e_i^k(x) = 0$$

avec $i = 1, 2$.

Ceci prouve la convergence de l'algorithme continu en 2 itérations. □

4.3 Convergence pour α_1, α_2 quelconques

Dans un premier temps, on va regarder le cas

$$\alpha_1 = \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -\frac{\tilde{b}}{2} + \alpha,$$

avec $\alpha > \frac{\tilde{b}}{2}$.

Proposition 4.2. *Si $\alpha > \frac{\tilde{b}}{2}$, alors $|\rho| < 1$ et*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \gamma]} |e_1^{2k}(x)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\gamma, 1]} |e_2^{2k}(x)| = 0$$

.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \gamma]} |e_1^{2k+1}(x)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\gamma, 1]} |e_2^{2k+1}(x)| = 0$$

.

Démonstration.

$$\rho = \frac{\left(\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right)}{\left(\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right)} \frac{\left(-\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right)}{\left(-\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right)}$$

En interchangeant les facteurs au dénominateur, on obtient

$$|\rho| = \frac{\left| \nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right|}{\left| -\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - cr^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - ce^{r^- \gamma}) \right|} \frac{\left| -\nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right|}{\left| \nu(r^+ e^{r^+ \gamma} - r^- e^{r^- \gamma}) + \alpha(e^{r^+ \gamma} - e^{r^- \gamma}) \right|}$$

$$= \frac{|A - \alpha B|}{|A + \alpha B|} \frac{|-C + \alpha D|}{|C + \alpha D|}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \nu(r^+ e^{r^+\gamma} - cr^- e^{r^-\gamma}) > 0 \\ B &= -(e^{r^+\gamma} - ce^{r^-\gamma}) > 0 \\ C &= \nu(r^+ e^{r^+\gamma} - r^- e^{r^-\gamma}) > 0 \\ D &= (e^{r^+\gamma} - e^{r^-\gamma}) > 0 \end{aligned}$$

Donc $|\rho| < 1$.

Revenons maintenant aux erreurs :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, e_1^{2k}(x) = A_1^2 \rho^k (e^{r^+x} - e^{r^-x}) \text{ et } e_2^{2k}(x) = A_2^2 \rho^k (e^{r^+x} - e^{r^+-r^-} e^{r^-x})$$

et

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, e_1^{2k+1}(x) = A_1^1 \rho^k (e^{r^+x} - e^{r^-x}) \text{ et } e_2^{2k+1}(x) = A_2^1 \rho^k (e^{r^+x} - e^{r^+-r^-} e^{r^-x})$$

.

En passant aux sup sur $[0, 1]$, on a alors :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \sup_{x \in [0, \gamma]} |e_1^{2k}(x)| = |A_1^2| |\rho|^k \sup_{x \in [0, \gamma]} |(e^{r^+x} - e^{r^-x})| \text{ et } \sup_{x \in [\gamma, 1]} |e_2^{2k}(x)| = |A_2^2| |\rho|^k \sup_{x \in [\gamma, 1]} |(e^{r^+x} - e^{r^+-r^-} e^{r^-x})|$$

.

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \sup_{x \in [0, \gamma]} |e_1^{2k+1}(x)| = |A_1^1| |\rho|^k \sup_{x \in [0, \gamma]} |(e^{r^+x} - e^{r^-x})| \text{ et } \sup_{x \in [\gamma, 1]} |e_2^{2k+1}(x)| = |A_2^1| |\rho|^k \sup_{x \in [\gamma, 1]} |(e^{r^+x} - e^{r^+-r^-} e^{r^-x})|$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \gamma]} |e_1^{2k}(x)| = 0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\gamma, 1]} |e_2^{2k}(x)| = 0$$

.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \gamma]} |e_1^{2k+1}(x)| = 0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\gamma, 1]} |e_2^{2k+1}(x)| = 0$$

.

Ceci montre donc que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \gamma]} |e_1^k(x)| = 0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\gamma, 1]} |e_2^k(x)| = 0$$

.

Ceci achève donc la preuve de la convergence de l'algorithme DD en continu. \square

Pour l'étude de ρ pour α_1, α_2 quelconques, un premier pas dans cette direction est fait dans l'annexe 8.

5 Discrétisation par un schéma volumes finis

Dans [1] il est montré que la discrétisation par différences finies classique des conditions de Robin ne permet pas, en général, la convergence de l'algorithme DD vers la solution discrète globale. Afin de traiter ce problème, un schéma volumes finis a été alors utilisé dans [1], et nous l'étendons ci-dessous, en y ajoutant le terme d'avection.

5.1 Discrétisation du problème global

On considère une discrétisation par volumes finis "cells-centered" comme dans [3, 7, 1], du problème (1). On introduit une partition uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ avec $x_j = a + jh$, $0 \leq j \leq n$, où $h = \frac{b-a}{n}$. On pose $x_{j-\frac{1}{2}} = x_j - \frac{h}{2}$, $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{h}{2}$, $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et on note $T_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$, $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ une "cellule de contrôle". À T_j on associe x_j (le point milieu de T_j). le schéma consiste alors

- à considérer une seule inconnue U_j par cellule T_j , qui est une approximation de la solution u de (1) en x_j :

$$U_j \approx u(x_j), \quad \forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

- écrire un bilan de flux sur chaque cellule T_j

Pour cela, on intègre l'équation (1) sur T_j , avec $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} & \int_{T_j} \left(\eta u(x) + \tilde{b} \frac{du}{dx}(x) - \nu \frac{d^2u}{dx^2}(x) \right) dx = \int_{T_j} f(x) dx \\ \iff & \eta \int_{T_j} u(x) dx + \tilde{b} \left(u(x_{j+\frac{1}{2}}) - u(x_{j-\frac{1}{2}}) \right) - \nu u'(x_{j+\frac{1}{2}}) + \nu u'(x_{j-\frac{1}{2}}) = \int_{T_j} f(x) dx \end{aligned}$$

Puis on fait les approximations suivantes (correspondant à la quadrature du point milieu [2]) :

$$\int_{T_j} u(x) dx \approx h U_j, \quad \int_{T_j} f(x) dx \approx h f(x_j).$$

Pour les termes d'advection, on va utiliser un schéma centré, ce qui permet de préserver l'ordre 2 du schéma (voir aussi la remarque 5.5 ci-dessous) :

$$\tilde{b} u(x_{j-\frac{1}{2}}) \approx \tilde{b} \left(\frac{U_{j-1} + U_j}{2} \right), \quad \tilde{b} u(x_{j+\frac{1}{2}}) \approx \tilde{b} \left(\frac{U_j + U_{j+1}}{2} \right),$$

L'approximation des flux est faite de la façon suivante :

$$\nu u'(x_{j-\frac{1}{2}}) \approx \nu \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right), \quad -\nu u'(x_{j+\frac{1}{2}}) \approx -\nu \left(\frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right).$$

On obtient alors

$$\eta h U_j + \tilde{b} \left(\frac{U_j + U_{j+1}}{2} \right) - \tilde{b} \left(\frac{U_{j-1} + U_j}{2} \right) - \nu \left(\frac{U_{j+1} - U_j}{h} \right) + \nu \left(\frac{U_j - U_{j-1}}{h} \right) = h f(x_j),$$

ce qui donne, en divisant par h et en réordonnant les termes :

$$\eta U_j + \tilde{b} \left(\frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} \right) - \nu \frac{U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}}{h^2} = f(x_j), \quad \forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad (24)$$

avec les conditions de Dirichlet : $U_0 = u_a$ et $U_n = u_b$. Notons que pour le terme de diffusion, on retrouve le schéma différence finies à trois points.

Caractère bien posé du problème discret global

Les M-matrices possèdent la propriété du principe du maximum discret permettant de montrer l'existence et l'unicité de la solution associée au problème matriciel (voir [5]). Ainsi, en montrant la propriété de M-matrice, on obtient le caractère bien posé de ce schéma (cette propriété est une condition suffisante qui assure la positivité du schéma). Rappelons d'abord la définition d'une M-matrice, ainsi qu'une condition suffisante pour avoir une M-matrice (voir [8]).

Définition 5.1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Alors A est une M-matrice si $A_{i,j} \leq 0$, $\forall i, j$, $i \neq j$, et si tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Proposition 5.2. (condition suffisante pour les M-matrices) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée, une condition suffisante pour que la matrice A soit une M-matrice est :

i) $A_{i,j} \leq 0$, $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$

ii) $\sum_{j=1}^n A_{i,j} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Notons que les conditions i) et ii) sont équivalentes aux conditions : $A_{i,j} \leq 0$, $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i \neq j$, et $A_{i,i} > 0$ avec $|A_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{i,j}|$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (i.e. A est à diagonale strictement dominante).

Proposition 5.3. La matrice $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ (où n est le nombre d'intervalles), obtenue par la discrétisation du problème global, est une M-matrice si et seulement si $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$.

Démonstration. Soit A la matrice de discrétisation du problème global, on a la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \eta + \frac{2\nu}{h^2} & \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \eta + \frac{2\nu}{h^2} & \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \eta + \frac{2\nu}{h^2} & \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \eta + \frac{2\nu}{h^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

Supposons que $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$ et montrons que A est une M-matrice :

i) $A_{i,j} \leq 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, $i \neq j$.

• Soit $i < j$:

- si $j = i + 1$: on a $A_{i,i+1} = \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2}$. Alors $A_{i,i+1} \leq 0 \iff h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$
- si $j > i + 1$: on a $A_{i,j} = 0$, donc $A_{i,j} \leq 0$.
- Soit $i > j$:
 - si $j = i - 1$: on a $A_{i,i-1} = \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2}$, donc $A_{i,i-1} \leq 0$ (puisque $\tilde{b} \geq 0$, $\nu > 0$, et $h > 0$).
 - si $j < i - 1$: on a $A_{i,j} = 0$, donc $A_{i,j} \leq 0$.

On a donc :

$$\{A_{i,j} \leq 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j\} \iff h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}. \quad (25)$$

Comme par hypothèse on a supposé $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$, alors on a bien $A_{i,j} \leq 0, \forall i, j, i \neq j$.

ii) Montrons que $\sum_{j=1}^{n-1} A_{i,j} > 0, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

- Pour $i = 1$: on a $\sum_{j=1}^{n-1} A_{1,j} = \eta + \frac{\nu}{h^2} + \frac{\tilde{b}}{2h} > 0$ (car $\eta > 0, \tilde{b} \geq 0, \nu > 0, h > 0$).
- Pour $i = n-1$: on a $\sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j} = \eta + \frac{\nu}{h^2} - \frac{\tilde{b}}{2h} > 0$ car $\eta > 0$ et on a supposé $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$.
- Pour $i \in [2, n-1]$: $\sum_{j=1}^n A_{i,j} = \eta > 0$

Ceci prouve que dans Ω , la matrice de discrétisation est une M-matrice si $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$.

Réciproquement, par définition d'une M-matrice, puis de (25) on a :

$$A \text{ est une M-matrice} \Rightarrow \{A_{i,j} \leq 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j\} \xRightarrow{(25)} h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$$

ce qui prouve le résultat. \square

Ainsi, si $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$, la matrice A est inversible (par définition d'une M-matrice), donc le problème global discrétisé par volumes finis a une unique solution. De plus, par principe du maximum discret sur les M-matrices, si le second membre est positif (ce qui se produit si f est positive et les conditions de Dirichlet le sont) coordonnée par coordonnée, alors la solution globale discrétisée l'est également.

Remarque 5.4. Notons que l'on peut montrer que la condition $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$ est aussi une condition nécessaire pour que A soit une M-matrice (voir l'annexe 7).

Regardons maintenant la discrétisation du problème de Robin dans un sous-domaine.

5.2 Discrétisation du problème local de Robin

Le problème dans Ω_1 , à chaque itération k , s'écrit :

$$\begin{cases} \eta u_1^k(x) + \tilde{b}(u_1^k)'(x) - \nu(u_1^k)''(x) = f(x), & \forall x \in]a, \gamma[, \\ u_1^k(a) = u_a, \\ \nu(u_1^k)'(\gamma) - \frac{\tilde{b}}{2} u_1^k(\gamma) + \alpha_1 u_1^k(\gamma) = g_1^{k-1}. \end{cases} \quad (26)$$

Soit $n_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'indice de γ dans Ω_1 , i.e. $\gamma = x_{n_1}$. On note $(\mathbf{U}_1^k)_j$ l'approximation, dans la cellule T_j , de u_1^k :

$$(\mathbf{U}_1^k)_j \approx u_1^k(x_j), \forall j \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket.$$

En un nœud interne $x_j, j \in \llbracket 1, n_1 - 1 \rrbracket$ (correspondant à une cellule interne T_j), on va retrouver le schéma (24). Il reste donc à écrire le schéma en γ . Pour cela, on intègre la première équation de (26) sur $[x_{n_1-\frac{1}{2}}, x_{n_1}]$:

$$\int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} \left(\eta u_1^k(x) + \tilde{b}(u_1^k)'(x) - \nu(u_1^k)''(x) \right) dx = \int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} f(x) dx.$$

On obtient :

$$\eta \int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} u_1^k(x) dx + \tilde{b} u_1^k(x_{n_1}) - \tilde{b} u_1^k(x_{n_1-\frac{1}{2}}) - \nu(u_1^k)'(x_{n_1}) + \nu(u_1^k)'(x_{n_1-\frac{1}{2}}) = \int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} f(x) dx$$

c'est-à-dire

$$\eta \int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} u_1^k(x) dx - \tilde{b} u_1^k(x_{n_1-\frac{1}{2}}) + \underbrace{\tilde{b} u_1^k(x_{n_1}) + \frac{\tilde{b}}{2} u_1^k(x_{n_1}) - \nu(u_1^k)'(x_{n_1}) + \nu(u_1^k)'(x_{n_1-\frac{1}{2}})}_{=\alpha_1 u_1^k(x_{n_1}) - g_1^{k-1}} = \int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} f(x) dx$$

Puis on fait l'approximation du terme d'advection et du flux en $x_{n_1-\frac{1}{2}}$ comme dans le schéma global :

$$\begin{aligned}\tilde{b}u(x_{n_1-\frac{1}{2}}) &\approx \tilde{b}\frac{(\mathbf{U}_1^k)_{n_1-1} + (\mathbf{U}_1^k)_{n_1}}{2}, \\ \nu(u_1^k)'(x_{n_1-\frac{1}{2}}) &\approx \nu\frac{(\mathbf{U}_1^k)_{n_1} - (\mathbf{U}_1^k)_{n_1-1}}{h}.\end{aligned}$$

Pour les autres termes, on utilise une quadrature du rectangle :

$$\begin{aligned}\eta \int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} u_1^k(x) dx &\approx \eta \frac{h}{2} (\mathbf{U}_1^k)_{n_1} \\ \int_{x_{n_1-\frac{1}{2}}}^{x_{n_1}} f(x) dx &\approx \frac{h}{2} f(x_{n_1}).\end{aligned}$$

On aboutit alors au schéma suivant pour la condition de Robin, en notant $(\mathbf{U}_1^k)_j \approx u_1^k(x_j)$:

$$\nu \frac{(\mathbf{U}_1^k)_{n_1} - (\mathbf{U}_1^k)_{n_1-1}}{h} - \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{U}_1^k)_{n_1-1} + (\alpha_1 + \eta \frac{h}{2}) (\mathbf{U}_1^k)_{n_1} = \frac{h}{2} f(x_{n_1}) + g_1^{k-1}.$$

Remarque 5.5. Dans la section 6, on vérifiera numériquement que cette discrétisation est d'ordre 2. On regardera aussi se qui se passe si la condition $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$ (vue dans la Proposition 5.3) et vérifiée ou non.

Discrétisation de g_1^{k-1}

Regardons maintenant la discrétisation de $g_1^{k-1} = \nu \frac{du_2^{k-1}}{dx}(\gamma) - \frac{b}{2} u_2^{k-1}(\gamma) + \alpha_1 u_2^{k-1}(\gamma)$. Pour cela il faut donner une discrétisation de $\nu \frac{du_2^{k-1}}{dx}(\gamma) - \frac{b}{2} (u_2^{k-1})(x_{n_1})$. On va l'obtenir en intégrant l'équation vérifiée par u_2^{k-1} sur $[x_{n_1}, x_{n_1+\frac{1}{2}}]$:

$$\begin{aligned}&\int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} \left(\eta u_2^{k-1}(x) + \tilde{b}(u_2^{k-1})'(x) - \nu(u_2^{k-1})''(x) \right) dx = \int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} f(x) dx \\ \Leftrightarrow &\eta \int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} u_2^{k-1}(x) dx + \tilde{b}(u_2^{k-1})(x_{n_1+\frac{1}{2}}) - \tilde{b}(u_2^{k-1})(x_{n_1}) - \nu(u_2^{k-1})'(x_{n_1+\frac{1}{2}}) + \nu(u_2^{k-1})'(x_{n_1}) = \int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} f(x) dx\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\nu(u_2^{k-1})'(x_{n_1}) - \frac{\tilde{b}}{2} (u_2^{k-1})(x_{n_1}) = -\eta \int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} u_2^{k-1}(x) dx - \tilde{b}(u_2^{k-1})(x_{n_1+\frac{1}{2}}) + \frac{\tilde{b}}{2} (u_2^{k-1})(x_{n_1}) + \nu(u_2^{k-1})'(x_{n_1+\frac{1}{2}}) + \int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} f(x) dx$$

Puis on approche les termes à droite : on fait l'approximation du terme d'advection et du flux en $x_{n_1+\frac{1}{2}}$ comme dans le schéma global (rappelons que l'indice 0 pour \mathbf{U}_2^{k-1} correspond à $x = \gamma$) :

$$\begin{aligned}\tilde{b}(u_2^{k-1})(x_{n_1+\frac{1}{2}}) &\approx \tilde{b}\frac{(\mathbf{U}_2^{k-1})_0 + (\mathbf{U}_2^{k-1})_1}{2}, \\ \nu(u_2^{k-1})'(x_{n_1+\frac{1}{2}}) &\approx \nu\frac{(\mathbf{U}_2^{k-1})_1 - (\mathbf{U}_2^{k-1})_0}{h},\end{aligned}$$

et on utilise une quadrature du rectangle pour les autres termes :

$$\begin{aligned}\eta \int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} u_2^{k-1}(x) dx &\approx \eta \frac{h}{2} (\mathbf{U}_2^{k-1})_0 \\ \int_{x_{n_1}}^{x_{n_1+\frac{1}{2}}} f(x) dx &\approx \frac{h}{2} f(x_{n_1}).\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'approximation suivante :

$$\nu(u_2^{k-1})'(x_{n_1}) - \frac{\tilde{b}}{2} (u_2^{k-1})(x_{n_1}) \approx -\eta \frac{h}{2} (\mathbf{U}_2^{k-1})_0 - \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{U}_2^{k-1})_1 + \nu \frac{(\mathbf{U}_2^{k-1})_1 - (\mathbf{U}_2^{k-1})_0}{h} + \frac{h}{2} f(x_{n_1}).$$

La discrétisation de g_1^{k-1} est donc :

$$G_1^{k-1} = -\eta \frac{h}{2} (\mathbf{U}_2^{k-1})_0 - \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{U}_2^{k-1})_1 + \nu \frac{(\mathbf{U}_2^{k-1})_1 - (\mathbf{U}_2^{k-1})_0}{h} + \frac{h}{2} f(x_{n_1}) + \alpha_1 (\mathbf{U}_2^{k-1})_0$$

On procède de même pour le problème dans Ω_2 . Ainsi la discrétisation volumes finis des conditions de Robin est :

$$\begin{aligned} & \nu \frac{(\mathbf{U}_1^k)_{n_1} - (\mathbf{U}_1^k)_{n_1-1}}{h} - \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{U}_1^k)_{n_1-1} + (\alpha_1 + \eta \frac{h}{2}) (\mathbf{U}_1^k)_{n_1} \\ &= hf(x_{n_1}) - \eta \frac{h}{2} (\mathbf{U}_2^{k-1})_0 - \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{U}_2^{k-1})_1 + \nu \frac{(\mathbf{U}_2^{k-1})_1 - (\mathbf{U}_2^{k-1})_0}{h} + \alpha_1 (\mathbf{U}_2^{k-1})_0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & -\nu \frac{(\mathbf{U}_2^k)_1 - (\mathbf{U}_2^k)_0}{h} + \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{U}_2^k)_1 + (\alpha_2 + \eta \frac{h}{2}) (\mathbf{U}_2^k)_0 \\ &= hf(x_{n_1}) - \eta \frac{h}{2} (\mathbf{U}_1^{k-1})_{n_1} + \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{U}_1^{k-1})_{n_1-1} - \nu \frac{(\mathbf{U}_1^{k-1})_{n_1} - (\mathbf{U}_1^{k-1})_{n_1-1}}{h} + \alpha_2 (\mathbf{U}_1^{k-1})_{n_1} \end{aligned} \quad (28)$$

Proposition 5.6. *On a le résultat suivant :*

- 1) *La matrice obtenue par la discrétisation du problème de Robin dans Ω_1 est une M-matrice si $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$ et $\alpha_1 > \frac{\tilde{b}}{2} - \frac{\eta h}{2}$. De plus, cette matrice n'est pas une M-matrice si $h > \frac{2\nu}{\tilde{b}}$.*
- 2) *La matrice obtenue par la discrétisation du problème de Robin dans Ω_2 est une M-matrice si et seulement si $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$.*

Démonstration. Soit $A^{(1)}$ la matrice de discrétisation dans Ω_1 et $A^{(2)}$ la matrice de discrétisation dans Ω_2 , on rappelle que $\tilde{b} \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\nu > 0$, $h > 0$ et $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. On a :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \eta + \frac{2\nu}{h^2} & \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \eta + \frac{2\nu}{h^2} & \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \eta + \frac{2\nu}{h^2} & \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{-\tilde{b}}{2} - \frac{\nu}{h} & \frac{\nu}{h} + \alpha_1 + \eta \frac{h}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$$

Et, pour $n_2 = n - n_1$,

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{h} + \alpha_2 + \eta \frac{h}{2} & \frac{\tilde{b}}{2} - \frac{\nu}{h} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \eta + \frac{2\nu}{h^2} & \frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} & \eta + \frac{2\nu}{h^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$$

Supposons que $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$. Montrons que $A^{(2)}$ est une M-matrice, et que $A^{(1)}$ est une M-matrice si $\alpha_1 > \frac{\tilde{b}}{2} - \frac{\eta h}{2}$:

i) Soit $k \in \{1, 2\}$; montrons que $A_{i,j}^{(k)} \leq 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n_k\}$, $i \neq j$.

Ici les matrices $A^{(k)}$ sont du même type que la matrice globale A (en changeant n en n_k) à l'exception de la dernière ligne de $A^{(1)}$ et de la première ligne de $A^{(2)}$, où le coefficient extra-diagonal est multiplié par h . En utilisant la preuve de la proposition 5.3 on a donc :

$$\left\{ A_{i,j}^{(k)} \leq 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n_k \rrbracket, i \neq j \right\} \iff h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}. \quad (29)$$

Comme par hypothèse on a supposé $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$, alors on a bien $A_{i,j}^{(k)} \leq 0$, $\forall i, j$, $i \neq j$.

ii) Montrons que $\sum_{j=1}^{n_k} A_{i,j}^{(k)} > 0$, $\forall i \in \llbracket 1, n_k \rrbracket$

• **Pour $k = 1$:**

- Pour $i = 1$: $\sum_{j=1}^{n_1} A_{1,j} = \eta + \frac{\nu}{h^2} + \frac{\tilde{b}}{2h} > 0$ car $\nu > 0$.
- Pour $i = n_1$: $\sum_{j=1}^{n_1} A_{n_1,j} = \alpha_1 + \eta \frac{h}{2} - \frac{\tilde{b}}{2} > 0$ si et seulement si $\alpha_1 > \frac{\tilde{b}}{2} - \eta \frac{h}{2}$ car \tilde{b} et η sont des données du problème et h est une constante qui ne doit pas être minoré.
- Pour $i \in [2; n_1 - 1]$: $\sum_{j=1}^{n_1} A_{i,j} = \eta > 0$.

• **Pour $k = 2$:**

- Pour $i = 1$: $\sum_{j=1}^{n_2} A_{1,j} = \alpha_2 + \eta \frac{h}{2} + \frac{\tilde{b}}{2} > 0$.
- Pour $i = n_2$: $\sum_{j=1}^{n_2} A_{n_2,j} = \eta + \frac{\nu}{h^2} - \frac{\tilde{b}}{2h} > 0$ car on a supposé $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$. En effet, on a :

$$h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}} \iff \tilde{b}h \leq 2\nu \iff \frac{\tilde{b}}{2h} \leq \frac{\nu}{h^2} \iff \frac{\nu}{h^2} - \frac{\tilde{b}}{2h} \geq 0$$

Ainsi Comme $\eta > 0$, on a bien $\eta + \frac{\nu}{h^2} - \frac{\tilde{b}}{2h} > 0$

— Pour $i \in [2; n_2 - 1]$: $\sum_{j=1}^{n_2} A_{i,j} = \eta > 0$.

Ceci prouve que dans les deux sous domaine Ω_k , les matrices de discrétisation sont bien des M-matrices si elles respectent la condition $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$ et si dans Ω_1 , $A^{(1)}$ respecte la condition $\alpha_1 > \frac{\tilde{b}}{2} - \eta \frac{h}{2}$.

Réciproquement, on a, pour $k = 1, 2$:

$$A^{(k)} \text{ est une M-matrice} \Rightarrow \left\{ A_{i,j}^{(k)} \leq 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \right\} \xRightarrow{(29)} h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$$

ce qui termine la preuve des points 1) et 2). □

5.3 Étude à convergence de l'algorithme discret volumes finis

Supposons que (\mathbf{U}_i^k) tend vers $\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^{n_i+1}$, pour $i = 1, 2$. En passant à la limite dans (27)–(28), on obtient

$$\begin{aligned} \nu \frac{(\mathbf{V}_1)_{n_1} - (\mathbf{V}_1)_{n_1-1}}{h} - \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{V}_1)_{n_1-1} + (\alpha_1 + \eta \frac{h}{2}) (\mathbf{V}_1)_{n_1} \\ = hf(x_{n_1}) - \eta \frac{h}{2} (\mathbf{V}_2)_0 - \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{V}_2)_1 + \nu \frac{(\mathbf{V}_2)_1 - (\mathbf{V}_2)_0}{h} + \alpha_1 (\mathbf{U}_2^{k-1})_0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} -\nu \frac{(\mathbf{V}_2)_1 - (\mathbf{V}_2)_0}{h} + \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{V}_2)_1 + (\alpha_2 + \eta \frac{h}{2}) (\mathbf{V}_2)_0 \\ = hf(x_{n_1}) - \eta \frac{h}{2} (\mathbf{V}_1)_{n_1} + \frac{\tilde{b}}{2} (\mathbf{V}_1)_{n_1-1} - \nu \frac{(\mathbf{V}_1)_{n_1} - (\mathbf{V}_1)_{n_1-1}}{h} + \alpha_2 (\mathbf{V}_1)_{n_1} \end{aligned} \quad (31)$$

En soustrayant (31) de (30), on obtient

$$(\alpha_1 + \alpha_2)((\mathbf{V}_1)_{n_1} - (\mathbf{V}_2)_0) = 0$$

et donc

$$(\mathbf{V}_1)_{n_1} = (\mathbf{V}_2)_0. \quad (32)$$

En insérant (32) dans (30) (ou dans (31)) et en divisant par h , on a ensuite :

$$\eta (\mathbf{V}_1)_{n_1} + \tilde{b} \left(\frac{(\mathbf{V}_2)_1 - (\mathbf{V}_1)_{n_1-1}}{2h} \right) - \nu \frac{(\mathbf{V}_1)_{n_1-1} - 2(\mathbf{V}_1)_{n_1} + (\mathbf{V}_2)_1}{h^2} = f(x_{n_1}). \quad (33)$$

Ainsi, en définissant $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $V_j = (\mathbf{V}_1)_j$, $j \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket$ et $V_j = (\mathbf{V}_2)_{j-n_1}$, $j \in \llbracket n_1, n \rrbracket$, on trouve

$$\eta V_{n_1} + \tilde{b} \left(\frac{V_{n_1+1} - V_{n_1-1}}{2h} \right) - \nu \frac{V_{n_1-1} - 2V_{n_1} + V_{n_1+1}}{h^2} = f(x_{n_1}),$$

i.e. on retrouve le schéma global (24) en $j = n_1$, c'est-à-dire en $x = \gamma$.

Par ailleurs, sur le domaine Ω_i avec $i = 1, 2$, on a le problème discrétisé en faisant tendre k vers ∞ :

$$\eta (V_i)_j + \tilde{b} \left(\frac{(V_i)_{j+1} - (V_i)_{j-1}}{2h} \right) - \nu \frac{(V_i)_{j-1} - 2(V_i)_j + (V_i)_{j+1}}{h^2} = F_j^i, \quad \forall j \in \llbracket 1, n_i - 1 \rrbracket \quad (34)$$

avec $F_j^1 = f(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ et $F_j^2 = f(x_{n_1+j})$, $j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$.

En rajoutant également les conditions de Dirichlet : $(V_1)_0 = u_a$, $(V_2)_{n_2} = u_b$, le vecteur $V = ((V_1)_{j=0, \dots, n_1}, (V_2)_{j=1, \dots, n_2})$ est bien solution du problème global.

Ceci montre que si les suites de vecteurs $(U_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $i = 1, 2$ convergent, alors elles convergent bien vers la solution discrète globale.

6 Résultats numériques

Dans cette partie on va d'abord faire des tests de validation du problème local de Robin dans un sous-domaine, puis du code de décomposition de domaine.

6.1 Validation du problème local de Robin

6.1.1 Tracé de la solution discrète et vérification de l'ordre du schéma

Regardons par exemple le problème dans Ω_1 , à une itération fixée k . On note u_1 la solution du problème (26), et \mathbf{U}_1 la solution du problème de Robin discret.

On prend $\Omega_1 =]0, 2\pi[$, $\eta = \nu = 1$, $u_a = 1$, $f(x) = e^{-x} \left((\eta - \tilde{b}) \cos(x) - (\tilde{b} + 2\nu) \sin(x) \right)$, $\alpha_1 = 2(\frac{\tilde{b}}{2} - \eta \frac{h}{2})$, et $g_1^k = e^{-2\pi}(\alpha_1 + \frac{\tilde{b}}{2})$, de sorte que la solution du problème (26) est $u_1(x) = e^{-x} \cos(x)$.

Sur la Figure 2, on représente u_1 (trait plein) et la solution discrète \mathbf{U}_1 (étoiles) pour $n = 15$, $n = 50$, et $n = 200$. On voit que en $x = 0$, où il y a la condition de Dirichlet, les solutions sont confondues. On voit aussi qu'en un point intérieur ou en $\gamma = 2\pi$ la solution discrète se rapproche de la solution u , comme on s'y attend.

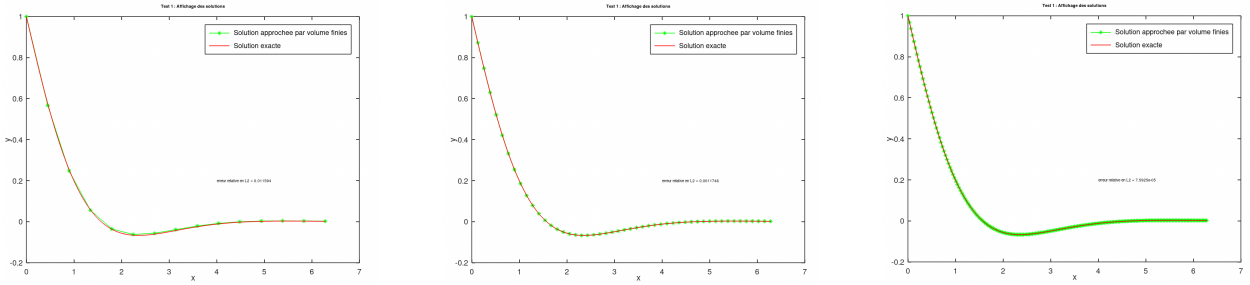


FIGURE 2 – solutions exacte (trait plein) et approchée (étoiles) pour différents maillages : $n = 15$, $n = 50$, et $n = 200$

Regardons plus précisément sur le tableau 1 des valeurs de l'erreur relative

$$e = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n_1+1} ((\mathbf{U}_1)_i - u_1(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{i=0}^{n_1+1} u_1(x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

On observe que l'erreur est divisée par 4 lorsque le pas h est divisé par 2. L'erreur se comporte donc comme un $\mathcal{O}(h^2)$, ce qui correspond bien à un schéma d'ordre 2 (voir la remarque 5.5).

h	0.125	0.0628	0.031
Erreur relative e	0.0011	0.0003	7.59e-5

TABLE 1 – Exemple 1 : erreur relative, entre les solutions discrète et continue, en fonction du pas du maillage

6.1.2 Vérification de la condition de stabilité

Ici, nous allons vérifier numériquement la condition de stabilité 5.6 pour $\Omega_1 =]0, 1[$, $\tilde{b} = 1$, $\nu = 0.01$, $\eta = 0$, $u_a = 0$ et $g_1^k = 10$.

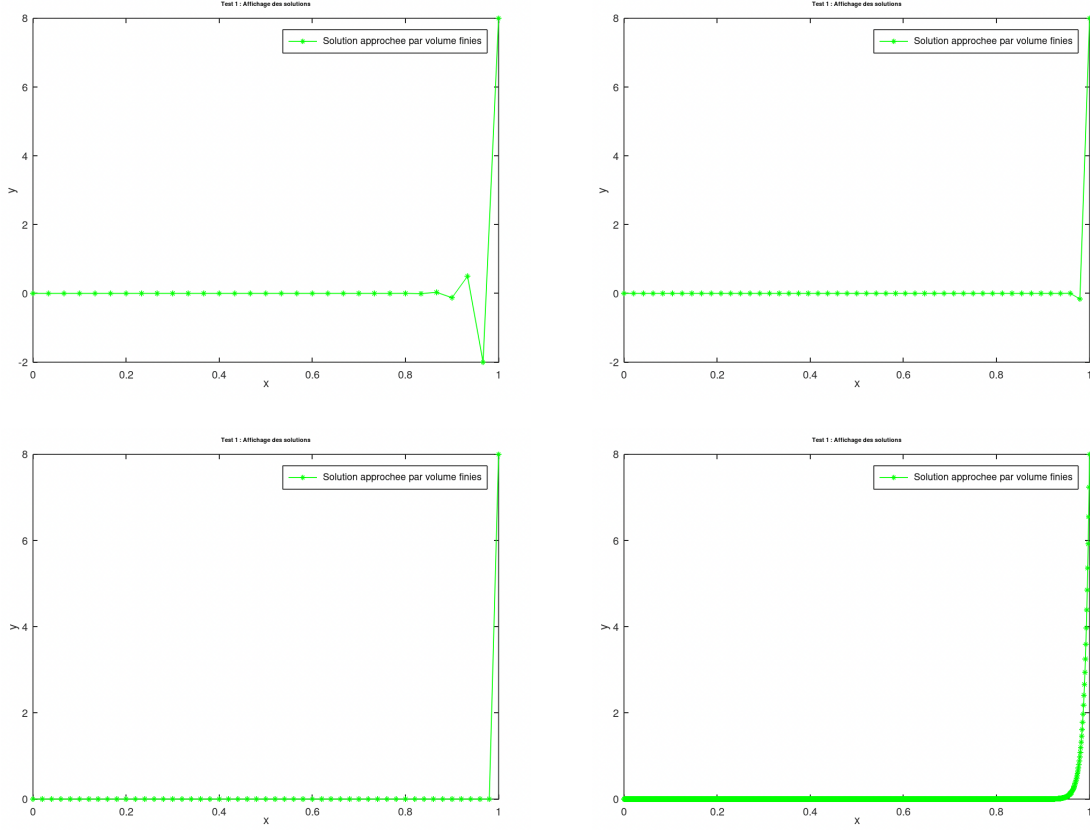


FIGURE 3 – allure de la solution approché pour $n = \{30, 48, 50, 1000\}$

Sur la figure 3, pour $n = 30$ et $n = 48$, la condition de stabilité 5.6 n'est pas vérifiée, plus n est petit plus les oscillations entre 0.8 et 1 sont grandes. De plus, pour notre exemple, la condition de stabilité $h \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}}$ est satisfaite pour $n \geq 50$. En effet, on a :

$$h = \frac{1}{n} \leq \frac{2\nu}{\tilde{b}} \iff n \geq \frac{\tilde{b}}{2\nu} = \frac{1}{0.02} = 50$$

La matrice de discrétisation n'est pas une M-matrice, la propriété de positivité discrète n'est pas respectée. Cela se traduit par des oscillations numériques entre $x = 0.8$ et $x = 1$ qui nous donnent des valeurs de \mathbf{U} négatives alors même que le second membre est positif.

6.2 Validation de l'algorithme DD

On prend $\Omega =]0, 1[$, $\eta = 1$, $\nu = 1$ et $\tilde{b} = 1$.

On prend comme solution test du problème (1) $u(x) = 0.01 \exp(r^+ x) + 0.2 \exp(r^- x)$ avec, $u_a = u(0)$, $u_b = u(1)$, et $f(x) = \eta u(x) + \tilde{b} u'(x) - \nu u''(x)$. r^+ et r^- ont été définies dans la section 4. On prend $h = \frac{1}{101}$.

Pour l'algorithme DD on prend $\gamma = 66h$, α_1 et α_2 sont les paramètres optimaux (de l'algorithme continu), et $g_1^0 = g_2^0 = 0$. Sur la Figure 4, on représente la solution discrète globale \mathbf{U} (étoiles bleues) et les solutions discrètes \mathbf{U}_1^k (rouge) et pour \mathbf{U}_2^k (orange), pour $k = 2, k = 3, k = 6$. On observe que l'algorithme \mathbf{U}_1^k et \mathbf{U}_2^k semblent tendre vers \mathbf{U} (bien qu'on ne l'ait pas montré théoriquement).

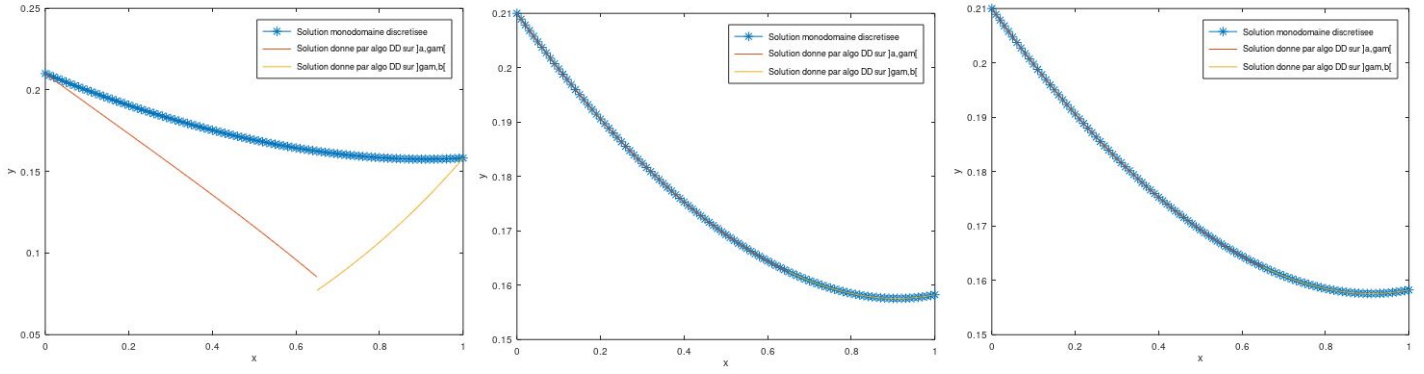


FIGURE 4 – Solutions discrète globale \mathbf{U} (étoiles bleues) et solution DD (traits pleins rouge et orange) à différentes itérations : $k = 2, k = 3, k = 6$

Regardons plus précisément, dans le tableau ci-dessous, les valeurs de l'erreur relative. On observe que l'erreur diminue lorsque les itérations augmentent, et que l'algorithme DD discret converge vers la solution discrète globale (au erreurs d'arrondis près). On observe aussi que cela converge très vite vers la solution monodomaine. Néanmoins, il faut 6 itérations pour converger (à la précision machine), les paramètres α_1 et α_2 ne sont donc plus optimaux pour l'algorithme discret.

k	2	3	6
Erreur relative e^k	2.1588e-06	7.1247e-12	1.3349e-14

TABLE 2 – Erreur relative, entre la solution DD à l'itération k et la solution discrète globale, en fonction de l'itération k

7 Annexe 1

Dans la section 5.1 on a utilisé la proposition 5.2 pour montrer que le problème discret est bien posé. On aurait pu aussi utiliser le résultat suivant :

Proposition 7.1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée, alors A est une M -matrice si et seulement si :

- i) $A_{i,j} \leq 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j$
- ii) Soit $v \in \mathbb{R}^n, Av \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$

Remarque 7.2. Supposons que $h \leq \frac{2\nu}{b}$. Le point i) a été fait dans la proposition 5.3. Pour montrer le point ii) on peut procéder comme suit :

Soit $v \in \mathbb{R}^{n+2}$, supposons $Av \geq 0$, montrons que $v \geq 0$.
Soit,

$$v_{J_0} = \min_{0 \leq j \leq n+1} v_j$$

- Soit $J_0 = 0$, alors $\forall j \in \{1, \dots, n+1\}, v_{J_0} \leq v_j$, en particulier $v_0 \leq v_1$ et $\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} \leq 0$ donc :

$$v_1 \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} \right) \leq v_0 \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} \right)$$

$$\text{Ainsi, } v_1 \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} \right) + v_0 \left(\eta + \frac{2\nu}{h^2} \right) \leq v_0 \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} + \eta + \frac{2\nu}{h^2} \right)$$

$$\text{Et, par hypothèse, } 0 \leq (Av)_0 \leq v_0 \underbrace{\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2} + \eta \right)}_{\geq 0}$$

Donc $v_0 \geq 0$ et donc $\forall j \in \{1, \dots, n+1\}, v_j \geq v_0 \geq 0$. On a bien la positivité de v pour $J_0 = 0$.

- Soit $J_0 \in \{1, \dots, n\}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$-\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right)v_{i-1} + \left(\eta + \frac{2\nu}{h^2}\right)v_i + \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2}\right)v_{i+1} \geq 0$$

Donc pour $J_0 = i$, on a :

$$-\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right)v_{J_0-1} + \left(\eta + \frac{2\nu}{h^2}\right)v_{J_0} + \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2}\right)v_{J_0+1} \geq 0$$

Comme $v_{J_0-1} \geq v_{J_0}$ et $v_{J_0+1} \geq v_{J_0}$, on a :

$$-\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right)v_{J_0-1} \leq -\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right)v_{J_0} \text{ et } \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2}\right)v_{J_0+1} \leq v_{J_0}\left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2}\right)$$

Donc,

$$0 \leq -\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right)v_{J_0-1} + \left(\eta + \frac{2\nu}{h^2}\right)v_{J_0} + \left(\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2}\right)v_{J_0+1} \leq \eta v_{J_0} \quad (\text{avec } \eta \geq 0)$$

Donc, $v_{J_0} \geq 0$

Ainsi $\forall j \in \{0, \dots, n+1\}$, $v_j \geq v_{J_0} \geq 0$. On a bien la positivité de v pour $J_0 \in \{1, \dots, n\}$.

- Soit $J_0 = n+1$, alors $\forall j \in \{0, \dots, n\}$, $v_{J_0} \leq v_j$, en particulier $v_{n+1} \leq v_n$ et $-\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right) \leq 0$ donc :

$$\begin{aligned} -v_n\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right) &\leq -v_{n+1}\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right) \\ \text{Ainsi, } -v_n\left(\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2}\right) + v_{n+1}\left(\eta + \frac{2\nu}{h^2}\right) &\leq v_{n+1}\left(-\frac{\tilde{b}}{2h} - \frac{\nu}{h^2} + \eta + \frac{2\nu}{h^2}\right) \\ \text{Et, par hypothèse, } 0 \leq (Av)_{n+1} &\leq v_{n+1} \underbrace{\left(-\frac{\tilde{b}}{2h} + \frac{\nu}{h^2} + \eta\right)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} \geq 0$ et donc $\forall j \in \{0, \dots, n\}$, $v_j \geq v_{n+1} \geq 0$. On a bien la positivité de v pour $J_0 = n+1$.

Ainsi, on a bien $v \geq 0$ si $Av \geq 0$.

— **ii) pour les problèmes de Robin :** Soit $k \in \{1, 2\}$, $v \in \mathbb{R}_k^n + 1$, supposons $A^{(k)}v \geq 0$, montrons que $v \geq 0$

On définit J_0 tq

$$v_{J_0} = \min_{0 \leq j \leq n_k} v_j$$

a) Soit $k = 1$:

- Soit $J_0 = 0$, alors $\forall j \in \{1, \dots, n_1\}$, $v_{J_0} \leq v_j$.

Or par définition de $A^{(1)}$, $v_0 = (A^{(1)}v)_0 \geq 0$. Ainsi, $\forall j \in \{1, \dots, n_1\}$, $v_j \geq v_0 \geq 0$. On a bien la positivité de v pour $J_0 = 0$.

- Soit $J_0 \in \{1, \dots, n_1 - 1\}$, par 5.1. On a bien la positivité de v pour $J_0 \in \{1, \dots, n_1 - 1\}$.

- Soit $J_0 = n_1$, $v_{n_1-1} \geq v_{n_1}$ et $-\left(\frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\nu}{h}\right) \leq 0$ donc :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\nu}{h}\right)v_{n_1-1} &\leq -\left(\frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\nu}{h}\right)v_{n_1} \\ \text{Donc, } 0 \leq (A^{(1)}v)_{n_1} &= -\left(\frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\nu}{h}\right)v_{n_1-1} + \left(\frac{\nu}{h} + \alpha_1 + \eta\frac{h}{2}\right)v_{n_1} \leq v_{n_1}\left(\alpha_1 + \eta\frac{h}{2} - \frac{\tilde{b}}{2}\right) \end{aligned}$$

Sous la condition $\left(\alpha_1 + \eta\frac{h}{2} - \frac{\tilde{b}}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow h \geq \frac{\tilde{b}-2\alpha_1}{\eta}$, on a $v_{n_1} \geq 0$

b) Soit $k = 2$:

- Soit $J_0 = n_2$, alors $\forall j \in \{0, \dots, n_2 - 1\}$, $v_{J_0} \leq v_j$.

Or par définition de $A^{(2)}$, $v_{n_2} = (A^{(2)}v)_{n_2} \geq 0$. Ainsi, $\forall j \in \{0, \dots, n_2 - 1\}$, $v_j \geq v_{n_2} \geq 0$. On a bien la positivité de v pour $J_0 = n_2$.

- Soit $J_0 \in \{1, \dots, n_2 - 1\}$, par 5.1. On a bien la positivité de v pour $J_0 \in \{1, \dots, n_2 - 1\}$.

- Soit $J_0 = 0$, $v_1 \geq v_0$ et $\left(\frac{\tilde{b}}{2} - \frac{\nu}{h}\right) \leq 0$ donc :

$$\left(\frac{\tilde{b}}{2} - \frac{\nu}{h}\right)v_1 \leq -\left(\frac{\tilde{b}}{2} + \frac{\nu}{h}\right)v_0$$

$$\text{Donc, } 0 \leq (A^{(2)}v)_0 = \left(\frac{\tilde{b}}{2} - \frac{\nu}{h}\right)v_1 + \left(\frac{\nu}{h} + \alpha_2 + \eta\frac{h}{2}\right)v_0 \leq v_0 \left(\alpha_1 + \eta\frac{h}{2} + \frac{\tilde{b}}{2}\right)_{\geq 0}$$

Donc $v_0 \geq 0$ et $\forall j \in \{1, \dots, n_2\}$, on a bien $v_j \geq v_0 \geq 0$.

Ainsi, $\forall k \in \{1, 2\}$, $v \in \mathbb{R}^{n_k+1}$, si $A^{(k)}v \geq 0$ alors $v \geq 0$.

8 Annexe 2

Proposition 8.1. *Sous les conditions suivantes sur α_1 et α_2 :*

- $\alpha_1 > \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\alpha_1(1 - x_{max}) < \frac{\sqrt{\Delta}}{2}(1 + x_{max})$
- $\alpha_2 < \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $\left(\alpha_2 > \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } \alpha_2(y_{max} - 1) < \frac{\sqrt{\Delta}}{2}(1 + y_{max})\right)$ avec $x_{max} = y_{max} = \frac{2}{e^{-\gamma(r^+ - r^-)}(1 + e^{r^+ - r^-})}$

Alors $|\rho| < 1$.

Démonstration. On souhaite déterminer un encadrement de ρ . Pour cela on va l'écrire sous la forme suivante :

$$\rho = \frac{\left((- \nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2)e^{r^+ \gamma} + (\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} - \alpha_2)e^{r^- \gamma}\right) \left((\nu r^+ - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)e^{r^+ \gamma} - (\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)e^{r^- \gamma}e^{r^+ - r^-}\right)}{\left((- \nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2)e^{r^+ \gamma} + (\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} - \alpha_2)e^{r^- \gamma}e^{r^+ - r^-}\right) \left((\nu r^+ - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)e^{r^+ \gamma} - (\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1)e^{r^- \gamma}\right)}$$

ce qui équivaut à

$$\rho = \frac{\left(1 - \left(\frac{-\nu r^- + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}{-\nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}\right)e^{-(r^+ - r^-)\gamma}\right) \left(1 - \left(\frac{\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}{\nu r^+ - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}\right)e^{(r^+ - r^-)(1-\gamma)}\right)}{\left(1 - \left(\frac{-\nu r^- + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}{-\nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}\right)e^{(r^+ - r^-)(1-\gamma)}\right) \left(1 - \left(\frac{\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}{\nu r^+ - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}\right)e^{-(r^+ - r^-)\gamma}\right)} = \phi_1 \left(\frac{\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}{\nu r^+ - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}\right) \phi_2 \left(\frac{-\nu r^- + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}{-\nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}\right)$$

Avec ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions définies par :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{1 - xe^{(r^+ - r^-)(1-\gamma)}}{1 - xe^{-\gamma(r^+ - r^-)}} \\ \phi_2(y) &= \frac{1 - ye^{-(r^+ - r^-)\gamma}}{1 - ye^{(1-\gamma)(r^+ - r^-)}} \end{aligned}$$

Etude la fonction ϕ_1 :

On étudie les variations de ϕ_1 défini sur \mathbb{R} privé du réel $e^{\gamma(r^+ - r^-)}$ en dérivant la fonction ϕ_1 et voir à quels moments la fonction ϕ_1 est entre $[-1, 1]$.

$$\phi_1'(x) = \frac{e^{-\gamma(r^+ - r^-)}(1 - e^{r^+ - r^-})}{(1 - xe^{-\gamma(r^+ - r^-)})^2} < 0$$

La fonction ϕ_1 est strictement décroissante sur \mathbb{R} privé du réel $e^{\gamma(r^+ - r^-)}$.

On dresse ci-dessous son tableau de variation :

X	$-\infty$	$e^{\gamma(r^+ - r^-)} > 0$	$+\infty$
$\phi_1'(x)$	—	—	—
$\phi_1(x)$	$e^{r^+ - r^-} > 1$	$+\infty$	$e^{r^+ - r^-} > 1$

On peut donc en déduire que l'intervalle où ϕ_1 est entre $[-1, 1]$ se situe donc vers les $x \leq e^{\gamma(r^+ - r^-)}$.

Sachant que ϕ_1 est strictement décroissante, continue sur $] -\infty, e^{\gamma(r^+ - r^-)}[$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} = e^{r^+ - r^-} > 1$ et $\lim_{x \rightarrow e^{\gamma(r^+ - r^-)}} = -\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ_1 atteint une et une seule fois 1 et -1 en respectivement x_{min} et x_{max} . Comme $\phi_1(0) = 1$, donc $x_{min} = 0$ par unicité, et en résolvant l'équation $\phi_1(x) = -1$, on en déduit alors $x_{max} = \frac{2}{e^{-\gamma(r^+ - r^-)}(1 + e^{r^+ - r^-})}$.

$\forall x \in \mathbf{R}$, $\phi_1(x) < 1$ si et seulement si $x \in]0, x_{max}[$.

On en déduit alors que $|\phi_1\left(\frac{\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}{\nu r^+ - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}\right)| < 1$ si et seulement si :

$$\frac{\nu r^- - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1}{\nu r^+ - \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_1} \in]0, x_{max}[$$

. En utilisant les expressions de r^+, r^- données précédemment, ceci revient à dire que :

$$\frac{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \alpha_1}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \alpha_1} \in]0, x_{max}[$$

. Donc les deux conditions nécessaires qu'on retiendra pour avoir ce dernier encadrement sont :

$$\alpha_1 > \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

et

$$\alpha_1(1 - x_{max}) < \frac{\sqrt{\Delta}}{2}(1 + x_{max})$$

Etude la fonction ϕ_2 :

On donne directement son tableau de variation :

X	$-\infty$	$e^{-(1-\gamma)(r^+ - r^-)} > 0$	$+\infty$
$\phi_2'(x)$		+	+
$\phi_2(x)$	$e^{-(r^+ - r^-)} < 1$	$\nearrow +\infty$	$\nwarrow e^{-(r^+ - r^-)} < 1$

Sur $] -\infty, e^{-(1-\gamma)(r^+ - r^-)}[$, comme ϕ_2 est continue, strictement croissante et que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} = e^{-(r^+ - r^-)} < 1$ et $\lim_{x \rightarrow e^{-(1-\gamma)(r^+ - r^-)}} = +\infty > 1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $y_{min} \in] -\infty, e^{-(1-\gamma)(r^+ - r^-)}[$ tel que $\phi_2(y_{min}) = 1$.

De plus $\phi_2(0) = 1$ et que $0 \in] -\infty, e^{-(1-\gamma)(r^+ - r^-)}[$, donc par unicité $y_{min} = 0$

Par les mêmes arguments, il existe un unique $y_{max} \in]e^{-(1-\gamma)(r^+ - r^-)}, +\infty[$ tel que $\phi_2(y_{max}) = -1$, et cette valeur vaut $y_{max} = \frac{2}{e^{-\gamma(r^+ - r^-)}(1 + e^{r^+ - r^-})}$.

Et par croissance de ϕ_2 , on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \phi_2(x) \in] -1, 1[\Leftrightarrow x < y_{min} = 0 \text{ ou } x > y_{max}.$$

On en déduit alors que $|\phi_2\left(\frac{-\nu r^- + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}{-\nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}\right)| < 1$ si et seulement si :

$$\frac{-\nu r^- + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}{-\nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2} < 0 \text{ ou } \frac{-\nu r^- + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2}{-\nu r^+ + \frac{\tilde{b}}{2} + \alpha_2} > y_{max}$$

. En utilisant les expressions de r^+, r^- données précédemment, ceci revient à dire que :

$$\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \alpha_2}{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \alpha_2} < 0 \text{ ou } \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \alpha_2}{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \alpha_2} > y_{max}$$

. Donc les deux conditions nécessaires qu'on retiendra pour avoir ce dernier encadrement sont :

$$\alpha_2 < \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

ou

$$\alpha_2 > \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } \alpha_2(y_{max} - 1) < \frac{\sqrt{\Delta}}{2}(1 + y_{max}).$$

Donc sous les conditions données par α_1 et α_2 , $|\rho| < 1$. □

Références

- [1] M. BOUBRED AND L. A. SARR, *Méthode de décomposition de domaine pour l'équation de diffusion en 1d*. Sup Galilée, Ingénieurs M.A.C.S, Institut Gailée, Université Sorbonne Paris Nord, 2022.
- [2] F. CUVELIER, *Analyse numérique Élémentaire*. Notes de cours MACS 1, 2020.
- [3] R. EYMARD, T. GALLOUËT, AND R. HERBIN, *Finite volume methods*, in Solution of Equation in \mathbb{R}^n (Part 3), Techniques of Scientific Computing (Part 3), vol. 7 of Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, 2000, pp. 713–1018.
- [4] C. JAPHET, *Méthodes de Schwarz pour l'équation de diffusion en une dimension*. Notes de cours MACS 2, 2022.
- [5] M. KERN, *Analyse numérique avancée*. notes de cours, MACS 2, 2023.
- [6] P.-L. LIONS, *On the Schwarz alternating method. III : a variant for nonoverlapping subdomains*, in Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, held in Houston, Texas, March 20-22, 1989, T. F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux and O. Widlund, ed., Philadelphia, PA, SIAM, 1990, pp. 202–223.
- [7] P. OMNES, *An introduction to finite volume schemes for elliptic equations*. notes de cours de MACS 3, 2011.
- [8] J.-F. SCHEID, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*. Master 2 IMOI, Ingénierie Mathématique et Outils Informatiques, Université de Lorraine, 2011-2012.
- [9] N. VAUCHELET, *Formulation variationnelle et éléments finis*. notes de cours d'EDPs Avancées, MACS 2, 2022.