

Projet Stage MACS 2

Adaptation de maillage en 1D par des estimations a posteriori pour des problèmes elliptiques et paraboliques.

Said Saterih¹

Responsable de projet : Marco Picasso²

22 octobre 2023

Résumé

Le sujet de mon stage aborde les méthodes d'adaptation de maillage par des estimations d'erreur a posteriori sur le problème de convection-diffusion stationnaire et instationnaire en 1D dans le but de créer des maillages appropriés pour avoir une certaine précision choisie sur l'erreur entre les solutions exactes et approchées. Le recours à ces méthodes d'adaptation de maillage a pour objectif principal de réduire le nombre d'équations dans les systèmes linéaires lors de la résolution numérique d'une EDO/EDP. Mais l'inconvénient comme l'indique le mot latin "a posteriori", c'est qu'il faut calculer la solution approchée à partir d'un maillage quelconque (avec un nombre de noeuds convenable) qui sera au fur à mesure amélioré avec l'algorithme d'adaptation pour pouvoir le bon maillage voulu.

1 Adaptation pour les problèmes stationnaires

1.1 Cadre de travail

On s'intéressera à l'équation d'advection-diffusion en 1D stationnaire avec des conditions de Dirichlet homogènes. Plus précisément, on se place dans un intervalle quelconque $\Omega =]a, b[$.

Le problème consiste alors de trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ dans $H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{aligned} -\epsilon u'' + \tilde{b}u' + \tilde{\eta}u &= f \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

avec :

- $f \in L^2(\Omega)$, le terme de source
- $\tilde{\eta} \geq 0$, le coefficient de réaction
- $\tilde{b} \in \mathbf{R}$, le coefficient de convection/transport
- $\epsilon > 0$, le coefficient de diffusion

1.2 Existence et unicité du problème

La formulation faible de ce problème est donnée en prenant en compte les conditions de Dirichlet après intégration par partie du terme de diffusion dans (1) :

Trouver $u \in H_0^1$ telle que :

$$\eta \int_a^b u(x)v(x)dx + \epsilon \int_a^b u'(x)v'(x) + \tilde{b} \int_a^b u'(x)v(x) = \int_a^b f(x)v(x), \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

On pose : $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, v) = \epsilon \int_a^b u'v' + \tilde{b} \int_a^b u'v + \eta \int_a^b uv$$

1. Sup Galilée, Ingénieurs M.A.C.S, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, F-93430, Villetaneuse, France

2. Professeur-Chercheur au département de mathématiques de l'EPFL, Lausanne, Suisse

et

$$l(v) = \int_a^b f v$$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on peut alors montrer que le problème (2) est bien posé.

Théorème 1.1. *Le problème (2) admet une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$.*

De plus, cette solution est dans $H^2(\Omega)$, et il existe une constante C qui ne dépend que de Ω, f, ϵ telle que :

$$|u|_1 \leq C \|f\|_0 \quad (3)$$

Démonstration. — a est une forme bilinéaire par linéarité de la dérivation et de l'intégrale.

— a est continue dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, et donc dans $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, en effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) &\leq \epsilon \|u'\|_0 \|v'\|_0 + |\tilde{b}| \|u'\|_0 \|v\|_0 + \eta \|u\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq \epsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + |\tilde{b}| \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \eta \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (\epsilon + \tilde{b} + \eta) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Par bilinéarité, cela suffit pour montrer que a est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

— a est coercive :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \epsilon \int_a^b (u')^2 + \tilde{b} \int_a^b u' u + \eta \int_a^b u^2 \\ &= \epsilon \int_a^b (u')^2 + \tilde{b} \left[\frac{u^2}{2} \right]_a^b + \eta \int_a^b u^2 \\ &= \epsilon \int_a^b (u')^2 + \eta \int_a^b u^2 \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré pour $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une constante $C_p > 0$ qui dépend que du domaine telle que :

$$a(u, u) \geq (\epsilon C_p + \eta) \int_a^b u^2$$

De plus, on a :

$$a(u, u) \geq \epsilon \int_a^b (u')^2$$

En sommant les deux dernières inégalité, on en déduit finalement :

$$a(u, u) \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Ce qui prouve la coercivité de a dans $H^1(\Omega)$, elle l'est donc dans $H_0^1(\Omega)$.

— l est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale, et elle est continue dans $H_0^1(\Omega)$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$, et l'inégalité de Poincaré.

Donc toutes les hypothèses sont réunies pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram, et en déduire qu'il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant (2).

Pour montrer que $u \in H^2(\Omega)$, on va utiliser un lemme qui fait appel au théorème de représentation de Riesz dans un espace d'Hilbert dans sa démonstration.

Lemma 1.2. *Soit $u \in L^2(\Omega)$. S'il existe une constante C indépendante de φ telle que :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \left| \int_\Omega u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_0$$

Alors $u \in H^1(\Omega)$.

Pour appliquer ce résultat, on revient à la formulation faible (2) en l'appliquant aux fonctions de C_0^∞ :

$$\epsilon \int_a^b u' \varphi' = \int_a^b f \varphi - \tilde{b} \int_a^b u' \varphi - \eta \int_a^b u \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Donc en appliquant la valeur absolue, l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\epsilon \int_a^b u' \varphi'| &\leq \left| \int_a^b f \varphi \right| + |\tilde{b}| \left| \int_a^b u' \varphi \right| + \eta \left| \int_a^b u \varphi \right| \\ &\leq \left(\|f\|_0 + |\tilde{b}| \|u'\|_0 + \eta \|u\|_0 \right) \|\varphi\|_0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Comme $u' \in L^2(\Omega)$, donc en appliquant le résultat précédent à u' , on en déduit que $u' \in H^1(\Omega)$, donc $u \in H^2(\Omega)$. Enfin pour avoir l'inégalité du théorème, il suffit utiliser la formulation faible pour $v = u \in H_0^1(\Omega)$, on aura alors :

$$\epsilon \int_a^b (u')^2 + \tilde{b} \int_a^b u' u + \eta \int_a^b u^2 = \int_a^b f u$$

Le second terme dans le premier membre s'annule par intégration par partie en tenant en compte les conditions de Dirichlet, et en utilisant par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Poincaré dans le second membre, on en déduit :

$$\epsilon |u|_1^2 \leq \epsilon \int_a^b (u')^2 + \eta \int_a^b u^2 \leq C_p \|f\|_0 |u|_1$$

On retrouve bien l'inégalité voulue et ce qui achève la preuve du théorème. \square

1.3 Discrétisation par un schéma éléments finis

Pour résoudre cette équation numériquement, on utilisera la méthode des éléments finis conforme continus polynomiaux de degré 1 par morceaux.

On discrétise l'intervalle $[a, b]$ en $N+2$ points : $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N < x_{N+1} = b$.

On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$ pour $i \in [0, N]$, $h = \max h_i$ et $K_i = [x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in [0, N]$.

On introduit alors l'espace

$$V_h^0 = \{v \in C^0(\Omega), v \in \mathbf{P}_1 \text{ sur } K_i, i \in [0, N]\} = \text{Vect}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$$

où les fonctions ϕ_i sont les fonctions chapeaux qui valent 1 en x_i et nulles ailleurs. La formulation de Galerkin s'écrit alors :

Trouver $u_h \in V_h$ telle que :

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h. \quad (4)$$

En évaluant cette formulation discrétisée aux fonctions de base ϕ_i avec $i = 1, \dots, N$, on a alors :

$$a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i), \forall i \in [1, N] \quad (5)$$

Puis, on décompose u_h dans V_h :

$$u_h = \sum_{j=1}^N (u_h)^j \phi_j \quad (\text{car au bord, on a imposé } u_h \text{ nulle i.e. } (u_h)^0 = (u_h)^{N+1} = 0)$$

En injectant cette expression de u_h dans (5), on a alors le système linéaire suivant (en supprimant les lignes Dirichlet homogènes au bord) :

Trouver

$$\mathbf{U}_h = \begin{bmatrix} (u_h)^1 \\ (u_h)^2 \\ \vdots \\ (u_h)^N \end{bmatrix}$$

$\in \mathbf{R}^N$ tel que :

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_h = \mathbf{b} \quad (6)$$

où :

- \mathbf{A} est une matrice carré tridiagonale de taille N définie par $(\mathbf{A})_{i,j} = a(\phi_j, \phi_i)$ pour $i, j \in [1, N]$.
- \mathbf{b} est un vecteur colonne de taille N défini par $b_i = l(\phi_i)$ pour $i \in [1, N]$.

Après calcul, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,i} &= \epsilon \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) + \eta \left(\frac{h_{i-1} + h_i}{3} \right) \quad \forall i \in [1, N] \\ \mathbf{A}_{i,i-1} &= -\epsilon \frac{1}{h_{i-1}} - \frac{\tilde{b}}{2} + \eta \frac{h_{i-1}}{6} \quad \forall i \in [2, N] \\ \mathbf{A}_{i,i+1} &= -\epsilon \frac{1}{h_i} + \frac{\tilde{b}}{2} + \eta \frac{h_i}{6} \quad \forall i \in [1, N-1] \\ \mathbf{b}_i &= l(\phi_i) \stackrel{\text{Trapeze}}{\approx} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2} f(x_i) \quad \forall i \in [1, N] \end{aligned}$$

1.4 Estimation a priori et validation du code de résolution du problème

Avant de donner les résultats numériques, on rappelle d'abord un résultat d'estimation d'erreur à priori, c'est-à-dire décrire le comportement l'erreur commise en utilisant le schéma éléments finis avant que l'on ait calculé la solution approchée. Ceci permettra de valider le code pour la résolution du système linéaire (6).

Proposition 1.3. *Si u est la solution du problème (1) et que u_h est la solution approchée donnée par (6), alors il existe une constante C dépendant uniquement de u et indépendante du h telle que :*

$$|u - u_h|_1 \leq Ch \quad (7)$$

Avant de prouver cette proposition, on introduit l'interpolant de Lagrange et des estimations d'erreur de cette interpolation très utiles dans toute la suite (pour les cas stationnaire et instationnaire).

Soit $r_h : V \rightarrow V_h$ l'interpolant de Lagrange en dimension 1 défini par :

$$(r_h)(u) = \sum_{i=1}^N u(x_i) \varphi_i$$

On a donc deux résultats fondamentaux d'estimation d'erreur d'interpolation :

Proposition 1.4. *Soit $w \in H^1(\text{]}a, b[})$. On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$.*

Il existe 2 constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant du domaine uniquement t.q.

$$\|w - (r_h w)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \leq C_1 h_i \|w'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}$$

$$\|w' - (r_h w)'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \leq C_2 \|w'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}$$

En sommant ces inégalités, on en déduit :

$$\|w - (r_h w)\|_{L^2(\text{]}a, b[}) \leq C_1 h \|w'\|_{L^2(\text{]}a, b[)}$$

$$\|w' - (r_h w)'\|_{L^2(\text{]}a, b[}) \leq C_2 \|w'\|_{L^2(\text{]}a, b[)}$$

Démonstration. Par le lemme de Céa, il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$|u - u_h|_1 \leq C |u_h - v_h|_1 \quad \forall v_h \in V_h$$

On prend $v_h = r_h u \in V_h$, en utilisant alors la proposition précédente, on en déduit la conclusion du théorème. Ce qui prouve que le schéma numérique est d'ordre 1. \square

On représente ci-dessous les résultats numériques données pour la résolution du problème. On prend comme données suivantes :

$$a = 0, b = 1, \tilde{b} = 1, \epsilon = 0.1, \tilde{\eta} = 1, f(x) = 1$$

La solution exacte est alors donnée par :

$$u_{ex} = \frac{\exp \frac{x}{2\epsilon}}{\exp \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\epsilon} - \exp \frac{\sqrt{\Delta}}{2\epsilon}} \left(2 \exp \left(-\frac{1}{2\epsilon} \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\epsilon} x \right) - 2 \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\epsilon} (x-1) \right) \right) + 1$$

avec $\Delta = 1 + 4\epsilon$

1.4.1 Comparaison visuelle : affichage des courbes

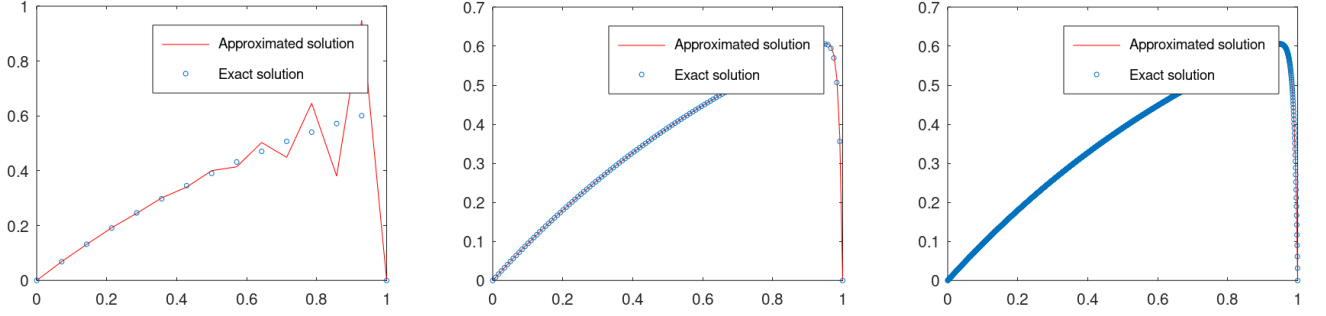


FIGURE 1 – Comparaison des courbes des solutions exactes et approchées pour $\epsilon = 0.01$, et $N = 15, 120, 1950$.

Remarque 1.5. On remarque que pour $N = 15$, on a des oscillations numériques. Ceci est normal car il faut qu'une condition de stabilité numérique soit vérifiée pour que le système linéaire soit bien posé (se référer au rapport du projet MACS2), et qu'il faut donc raffiner le maillage pour avoir visuellement une solution acceptable coïncidant avec la solution exacte.

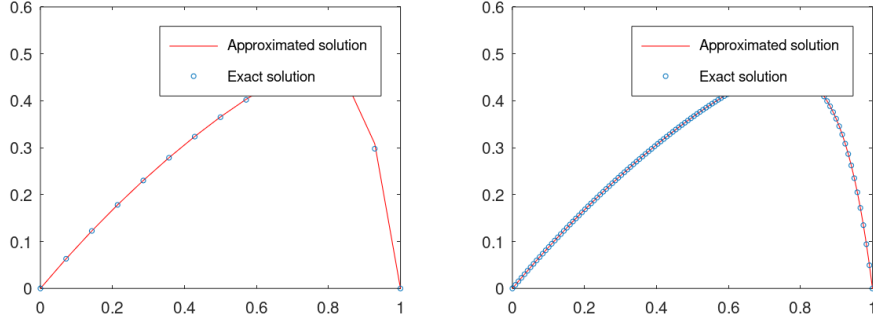


FIGURE 2 – Comparaison des courbes des solutions exactes et approchées pour $\epsilon = 0.1$, et $N = 15, 120$.

On donne également les valeurs des erreurs relatives en norme $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ définies par :

$$ER_{H_0^1(\Omega)} = \frac{|u'_{ex} - u'_h|_0}{|u'_{ex}|_0} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N \frac{h_i}{2} (((\mathbf{U}'_{ex} - \mathbf{U}'_h)^i)^2 + ((\mathbf{U}'_{ex} - \mathbf{U}'_h)^{i+1})^2)}{\sum_{i=0}^N \frac{h_i}{2} (((\mathbf{U}'_{ex})^i)^2 + ((\mathbf{U}'_{ex})^{i+1})^2)}}$$

et

$$ER_{L^2(\Omega)} = \frac{|u_{ex} - u_h|_0}{|u_{ex}|_0} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N \frac{h_i}{2} (((\mathbf{U}_{ex} - \mathbf{U}_h)^i)^2 + ((\mathbf{U}_{ex} - \mathbf{U}_h)^{i+1})^2)}{\sum_{i=0}^N \frac{h_i}{2} (((\mathbf{U}_{ex})^i)^2 + ((\mathbf{U}_{ex})^{i+1})^2)}}$$

Tout d'abord, on observe bien sûr que l'erreur pour les 2 normes diminue lorsque h tend vers 0. Et que cette convergence est de l'ordre 1 pour la norme $H_0^1(\Omega)$, ce qui est cohérent avec le résultat (1.3). Et qu'en norme $L^2(\Omega)$, on a une convergence vers la solution exacte avec un ordre 2.

Nombre de points N	15	30	60	120	240	480
Erreur relative H_0^1	0.133921	0.064276	0.0314446	0.0155447	0.00772947	0.00385371
Erreur relative L^2	0.000744254	0.000173258	4.18478e-5	1.02862e-5	2.55004e-6	6.34847e-7
Nombre de points N	960	1920	3840			
Erreur relative H_0^1	0.00192409	0.000961357	0.000480506			
Erreur relative L^2	1.58381e-7	3.95967e-8	9.82793e-9			

TABLE 1 – Erreur relatives entre les solutions exactes et approchées, en fonction du pas du maillage ($\epsilon = 0.1$).

1.5 Estimateurs d'erreur a posteriori

1.5.1 Un premier résultat d'estimation à posteriori

Ce qui a été vu dans la partie (1.4) permet d'affirmer que plus on raffine le maillage, plus l'erreur entre les solutions exactes et approchées diminue. Reprenons l'exemple de la partie précédente :

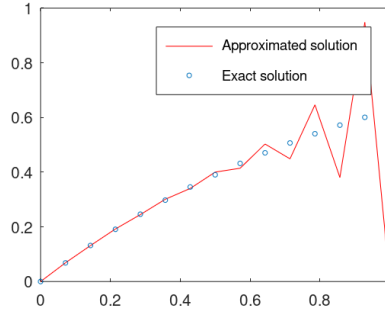


FIGURE 3 – $\epsilon = 0.01$

Par le fait que la condition de stabilité numérique évoquée précédemment ne soit pas vérifiée, on observe donc des oscillations numériques seulement aux bords, alors que entre $[0, 0.5]$, les 2 solutions coïncident convenablement. Donc cela suggère qu'il faudrait mailler le plus près du bord et pas sur la globalité de l'intervalle pour enlever ce phénomène d'instabilité. Donc une des méthodes permettant de répondre à ce besoin, c'est de faire l'adaptation basée sur des estimateurs à posteriori comme ça a été évoquée dans l'introduction. Ces estimateurs dépendent du maillage, de la solution approchée qu'il faudra calculer, et des données physiques (d'où la dénomination à posteriori). Il sera alors nécessaire de résoudre le système linéaire (6) pour avoir une solution approchée, et ces estimateurs permettent entre-autre de contrôler l'erreur commise entre les solutions exactes et approchées. Pour être plus précis, on va énoncer le théorème suivant qui est l'ingrédient clé à la construction d'un algorithme d'adaptation de maillages.

Théorème 1.6 (Estimation d'erreur à posteriori). *Soit u la solution de (2) et u_h la solution de (5), alors il existe une constante C indépendante des données $\epsilon, \tilde{\eta}, \tilde{b}$ et h telle que :*

$$|u - u_h|_1 \leq C \sqrt{\sum_{i=0}^N \eta_i^2} \quad (8)$$

avec $\eta_i^2 = h_i^2 \left\| \frac{1}{\epsilon} f - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u_h' - \frac{\tilde{\eta}}{\epsilon} u_h + u_h'' \right\|_{L^2([x_i, x_{i+1}])}^2 \quad \forall i \in [0, N]$.

La quantité $\eta_i^2 = h_i^2 \left\| \frac{1}{\epsilon} f - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u_h' - \frac{\tilde{\eta}}{\epsilon} u_h + u_h'' \right\|_{L^2([x_i, x_{i+1}])}^2 \quad \forall i \in [0, N]$, est l'estimateur à posteriori local sur l'élément $K_i = [x_i, x_{i+1}]$.

La quantité $\eta_{GLOBAL} = \sqrt{\sum_{i=0}^N \eta_i^2}$, est l'estimateur à posteriori global sur l'intervalle complet.

Donc grâce à cette majoration d'erreur dans ce théorème, pour pouvoir contrôler l'erreur, comme on l'a évoqué précédemment il suffit de contrôler l'estimateur global mais cela demande la résolution du système linéaire (6) au préalable pour avoir u_h . On verra dans le paragraphe suivant comment contrôler l'estimateur global (c'est-à-dire avoir η_{GLOBAL} de l'ordre d'une tolérance choisie).

Démonstration. On pose $R(v) = l(v) - a(u_h, v) \quad \forall v \in V = H_0^1(\Omega)$. On a alors :

$$\begin{aligned} R(v) &= a(u, v) - a(u_h, v) \\ &= a(u - u_h, v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

En prenant $v = u - u_h \in V$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} R(u - u_h) &= a(u - u_h, u - u_h) \\ &= \epsilon \int_a^b (u' - u'_h)^2 + \tilde{b} \int_a^b (u' - u'_h)(u - u_h) + \eta \int_a^b (u - u_h)^2 \\ &= \epsilon \int_a^b (u' - u'_h)^2 + \tilde{b} \left[\frac{(u - u_h)^2}{2} \right]_a^b + \eta \int_a^b (u - u_h)^2 \quad (\text{conditions Dirichlet homogènes}) \\ &= \epsilon \int_a^b (u' - u'_h)^2 + \eta \int_a^b (u - u_h)^2 \\ &\geq \epsilon \int_a^b (u' - u'_h)^2 \end{aligned}$$

D'autre part, par la relation (4), on a :

$$\forall v_h \in V_h, R(v_h) = 0$$

Donc pour tout $v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} R(u - u_h) &= R(u - u_h - v_h) \\ &\stackrel{def}{=} l(u - u_h - v_h) - a(u_h, u - u_h - v_h) \\ &= \int_a^b f(u - u_h - v_h) - \epsilon \int_a^b u'_h(u' - u'_h - v'_h) - \tilde{b} \int_a^b u'_h(u - u_h - v_h) - \eta \int_a^b u_h(u - u_h - v_h) \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u - u_h - v_h) - \epsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h(u' - u'_h - v'_h) - \tilde{b} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h(u - u_h - v_h) - \eta \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h(u - u_h - v_h) \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u - u_h - v_h) + \epsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} u''_h(u - u_h - v_h) - \tilde{b} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h(u - u_h - v_h) - \eta \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h(u - u_h - v_h) \\ &\quad - \sum_{i=0}^N [u'_h(u - u_h - v_h)]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f + \epsilon u''_h - \tilde{b} u'_h - \eta u_h \right) (u - u_h - v_h) - \sum_{i=0}^N [u'_h(u - u_h - v_h)]_{x_i}^{x_{i+1}} \end{aligned}$$

On prend ensuite $v_h = r_h(u - u_h) \in V_h$.

On a alors :

$$\begin{aligned} R(u - u_h) &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f + \epsilon u''_h - \tilde{b} u'_h - \eta u_h \right) (u - u_h - r_h(u - u_h)) - \sum_{i=0}^N [u'_h(u - u_h - r_h(u - u_h))]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f + \epsilon u''_h - \tilde{b} u'_h - \eta u_h \right) (u - u_h - r_h(u - u_h)) \quad (\text{car } u - u_h \text{ et } r_h(u - u_h) \text{ coïncident aux noeuds}) \\ &\leq \sum_{i=0}^N \|f + \epsilon u''_h - \tilde{b} u'_h - \eta u_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|u - u_h - r_h(u - u_h)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \\ &\leq C \sum_{i=0}^N h_i \|f + \epsilon u''_h - \tilde{b} u'_h - \eta u_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|u' - u'_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \\ &\leq C \left(\sum_{i=0}^N h_i^2 \|f + \epsilon u''_h - \tilde{b} u'_h - \eta u_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u' - u'_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

En assemblant par double inégalité les minoration et majorations de $R(u - u_h)$, on en déduit :

$$\epsilon |u - u_h|_1^2 = \epsilon \int_a^b (u' - u'_h)^2 \leq R(u - u_h) \leq C \left(\sum_{i=0}^N h_i^2 \|f + \epsilon u''_h - \tilde{b}u'_h - \eta u_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u' - u'_h\|_{L^2(\Omega)}$$

En divisant par ϵ et en l'intégrant dans la somme, on aboutit alors au résultat :

$$|u - u_h|_1^2 = \int_a^b (u' - u'_h)^2 \leq R(u - u_h) \leq C \left(\sum_{i=0}^N h_i^2 \left\| \frac{1}{\epsilon} f + u''_h - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u'_h - \frac{\eta}{\epsilon} u_h \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u' - u'_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Soit encore, en simplifiant par $|u - u_h|_1$:

$$|u - u_h|_1 \leq C \left(\sum_{i=0}^N h_i^2 \left\| \frac{1}{\epsilon} f + u''_h - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u'_h - \frac{\eta}{\epsilon} u_h \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

1.5.2 Implémentation des estimateurs et validation

L'objet de cette sous-partie est de voir rapidement comment on a procédé pour implémenter l'estimateur d'erreur à posteriori pour enfin passer à l'algorithme adaptatif en question.

Tout d'abord, on tient à rappeler qu'on a choisi la méthode des éléments finis P1-Lagrange, ce qui signifie que u_h est linéaire sur chaque élément K_i , et donc $u''_h = 0$ sur K_i par conséquent.

Donc l'estimateur local sur un élément K_i s'écrit alors :

$$\eta_i^2 = h_i^2 \left\| \frac{1}{\epsilon} f - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u'_h - \frac{\eta}{\epsilon} u_h \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2$$

Donc pour implémenter l'estimateur η_{GLOB} , on implémente les estimateurs locaux η_i^2 , et on le récupère en sommant sur chaque élément. Pour implémenter η_i^2 , on l'a approché par une formule de quadrature type trapèze d'ordre 2 (car exacte pour les polynômes de degré 1), ce qui donne :

$$\eta_i^2 = h_i^2 \left\| \frac{1}{\epsilon} f - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u'_h - \frac{\eta}{\epsilon} u_h \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \approx h_i^2 \frac{h_i}{2} \left(\left(\frac{1}{\epsilon} f(x_i) - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u'_h(x_i) - \frac{\eta}{\epsilon} u_h(x_i) \right)^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} f(x_{i+1}) - \frac{\tilde{b}}{\epsilon} u'_h(x_{i+1}) - \frac{\eta}{\epsilon} u_h(x_{i+1}) \right)^2 \right)$$

avec $u'_h(x_i)$ et $u'_h(x_{i+1})$ qui sont données par :

$$\frac{(u_h)^{i+1} - (u_h)^i}{h_i}, \quad \forall i \in [0, N]$$

Nombre de points N	15	30	60	120	240	480
$ u - u_h _1$	0.133921	0.064276	0.0314446	0.0155447	0.00772947	0.00385371
η_{GLOB}	6.8724e-02	3.3172e-02	1.6304e-02	8.0835e-03	4.0248e-03	2.0082e-03
$e.i. = \frac{\eta_{GLOB}}{ u - u_h _1}$	1.95506	1.97609	1.98769	1.99375	1.99685	1.99842

Nombre de points N	960	1920	3840
$ u - u_h _1$	0.00192409	0.000961357	0.000480506
η_{GLOB}	1.0031e-03	5.0127e-04	2.5057e-04
$e.i. = \frac{\eta_{GLOB}}{ u - u_h _1}$	1.99921	1.9996	1.9998

TABLE 2 – Erreur relatives entre les solutions exactes et approchées, en fonction du pas du maillage pour $\epsilon = 1$ et $\tilde{b} = \tilde{\eta} = 1$

Nombre de points N	15	30	60	120	240	480
$ u - u_h _1$	1.0380e-01	6.7053e-02	4.0031e-02	2.1067e-02	1.0362e-02	5.0145e-03
η_{GLOB}	31.5988	15.4826	7.6369	3.7896	1.8872	0.9417
$e.i. = \frac{\eta_{GLOB}}{ u - u_h _1}$	3.0441	2.3090	1.9077	1.7988	1.8213	1.8779

Nombre de points N	960	1920	3840
$ u - u_h _1$	2.4402e-03	1.1991e-03	5.9368e-04
η_{GLOB}	0.4704	0.2351	0.1175
$e.i. = \frac{\eta_{GLOB}}{ u - u_h _1}$	1.9275	1.9603	1.9792

TABLE 3 – Erreur relatives entre les solutions exactes et approchées, en fonction du pas du maillage pour $\epsilon = 0.01$ et $\tilde{b} = \tilde{\eta} = 1$

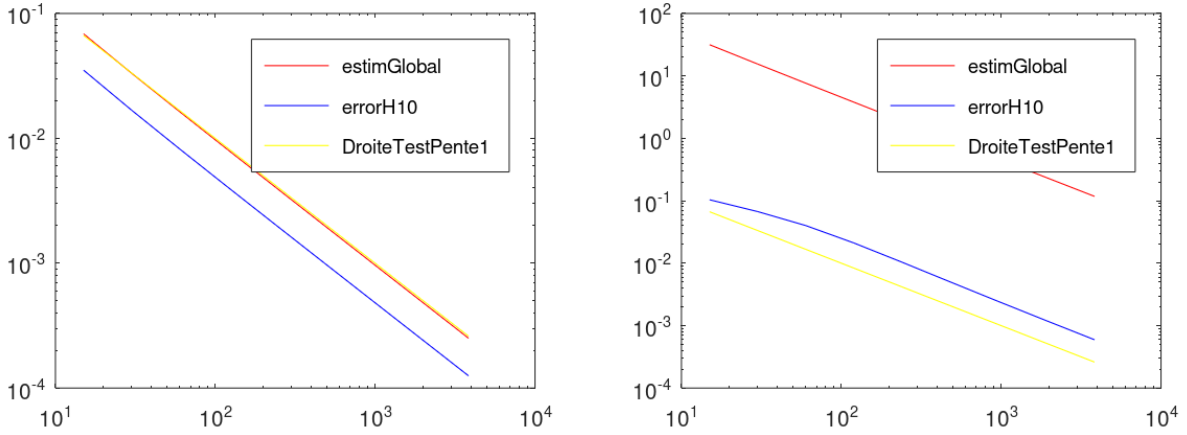


FIGURE 4 – Comportement de η_{GLOB} et l'erreur H_0^1 en fonction de N pour $\epsilon = 1$ à gauche et $\epsilon = 0.01$ à droite et $\tilde{b} = \tilde{\eta} = 1$

On observe bien que l'estimateur global η_{GLOB} a le même comportement asymptotique que l'erreur $H_0^1(\Omega)$, et que de plus, le ratio entre ces 2 quantités semblent tendre tous 2 vers une même valeur en faisant varier le coefficient de diffusion, ce qui suggère donc que ce ratio est indépendant de la solution choisi. En effet, on peut montrer théoriquement que dans le cas général, ce ratio est compris entre 2 constantes strictement positives indépendantes de h (dans le cas stationnaire et instationnaire), et qu'il tend même vers 2 pour ce cas en 1D.

1.6 Algorithme adaptatif basé sur cet estimateur à posteriori

1.6.1 Construction d'un algorithme adaptatif

On rappelle que le but c'est de réduire la norme $H_0^1(\Omega)$ de l'erreur commise entre les solutions exactes et approchées en raffinant ou déraffinant "au bons endroits". Grâce au théorème (1.6), on peut contrôler cette erreur, en contrôlant η_{GLOB} .

Si $\sqrt{\sum_{i=0}^N \eta_i^2} \leq TOL$ alors $|u - u_h|_1 \leq TOL$.

Mais en pratique, on veut contrôler l'erreur relative et donc on veut trouver un maillage telle que :

$$0.75TOL \leq \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^N \eta_i^2}}{|u'_h|_0} \leq 1.25TOL \quad (9)$$

Un condition suffisante pour avoir cette double inégalité est donnée ci-dessous :

$$\frac{(0.75TOL)^2 |u'_h|_0^2}{N+1} \leq \eta_i^2 \leq \frac{(1.25TOL)^2 |u'_h|_0^2}{N+1} \quad \forall i \in [0, N] \quad (10)$$

Autrement dit, sur chaque du maillage, il faut que l'estimateur local qui lui est associé vérifie cette double inégalité pour que η_{GLOB} soit de l'ordre de TOL. Si ce n'est pas le cas, il faudra alors soit raffiner l'élément en ajoutant le milieu par exemple(s'il est grand à la bande supérieure) ou le déraffiner en enlevant un point (s'il est petit à la bande inférieure). Et on répète ainsi l'opération jusqu'à ce que (9) est vérifiée.

Algorithm 1 Algorithme adaptatif

Data: $f \in L^2$, $\eta > 0$, $\epsilon > 0$, $\tilde{b} \in \mathbf{R}$, $a < b$, $TOL > 0$ et τ_h^0 un maillage initial

Result: Maillage adapté de $[a, b]$ telle que (9) soit vérifiée

```

1 N = size( $\tau_h^0$ )-2 (nombre de points internes dans le maillage);
  Calculer  $u_h$  avec  $\tau_h^0$ 
  Calculer  $RB = \frac{(1.25TOL)^2 |u_h|_1^2}{N+1}$  et  $LB = \frac{(0.75TOL)^2 |u_h|_1^2}{N+1}$ 
  Calculer  $\eta_{GLOB}^2$ 
   $\tau = \tau_h^0$ 
  while  $\eta_{GLOB}^2 \leq (0.75TOL)^2 \vee \eta_{GLOB}^2 \geq (1.25TOL)^2$  do
2   xnew =  $\lceil \tau(1) \rceil$  for  $k = 1$  to  $N + 1$  do
3     Calculer  $\eta_k^2$ ;
     if  $\eta_k^2 \geq RB$  then
4       xnew =  $[xnew, \frac{\tau(k) + \tau(k+1)}{2}, \tau(k+1)]$  (On raffine en ajoutant le milieu entre l'élément  $[\tau(k), \tau(k+1)]$ );
5     if  $\eta_k^2 \leq LB$  then
6       if  $k = N + 1$  then
7         xnew =  $[xnew, \tau(k+1)]$  (On déraffine à gauche en enlevant  $\tau(k)$ );
8       else
9         xnew =  $[xnew]$  (On déraffine à droite en enlevant  $\tau(k+1)$ );
10    if  $LB \leq \eta_k^2 \leq RB$  then
11      xnew =  $[xnew, \tau(k+1)]$ ;
12   $\tau = xnew$ ;
  N = size( $\tau$ )-2 (nombre de points internes dans le maillage);
  Calculer  $u_h$  avec  $\tau$ 
  Calculer  $RB = \frac{(1.25TOL)^2 |u_h|_1^2}{N+1}$  et  $LB = \frac{(0.75TOL)^2 |u_h|_1^2}{N+1}$ ;
  Calculer  $\eta_{GLOB}^2$ ;
13 return  $\tau$ ;

```

1.6.2 Résultat numériques

On prend comme données :

$$a = 0, b = 1, \tilde{b} = 1, \epsilon = 0.1, \eta = 1, f(x) = 1$$

La solution exacte est alors donnée par :

$$u_{ex} = \frac{\exp \frac{x}{2\epsilon}}{\exp \frac{-\sqrt{\Delta}}{2\epsilon} - \exp \frac{\sqrt{\Delta}}{2\epsilon}} \left(2 \exp \left(-\frac{1}{2\epsilon} \right) \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\epsilon} x \right) - 2 \sinh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\epsilon} (x-1) \right) \right) + 1$$

avec $\Delta = 1 + 4\epsilon$

TOL	η_{GLOB}	$ u - u_h _1$	e.i.	Nombre itérations	Nombre de points	Proportions de pts entre $[\frac{a+b}{2}, b]$
1	1.4117	6.0818e-01	2.3211	3	6	0.6667
0.75	8.0072e-01	3.7268e-01	2.1486	3	9	0.7500
0.5	5.2179e-01	2.4183e-01	2.1577	3	12	0.7778
0.25	3.1071e-01	1.4974e-01	2.0750	3	18	0.7805
0.10	1.3290e-01	6.6492e-02	1.9987	4	41	0.8387
0.075	8.1305e-02	4.0278e-02	2.0186	5	62	0.8333
0.05	6.7599e-02	3.3760e-02	2.0023	5	78	0.8497
0.025	3.3940e-02	1.6975e-02	1.9994	6	153	0.8460
0.01	1.0410e-02	5.2020e-03	2.0012	8	474	0.8469
0.005	5.2048e-03	2.6017e-03	2.0006	9	947	0.8475

TABLE 4 – Résultats fournis par l'algorithme adaptatif

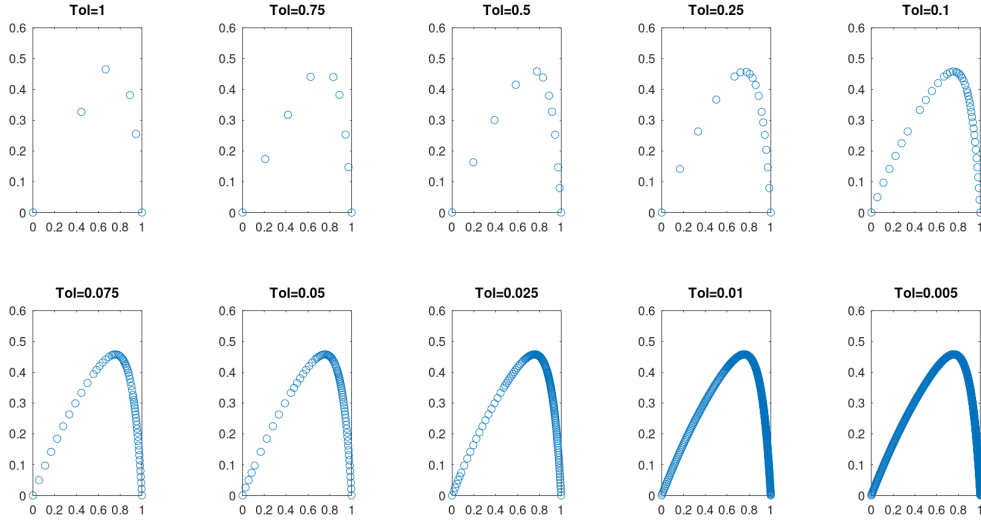


FIGURE 5 – Résultat graphique de l'algorithme d'adaptatif en faisant varier la tolérance

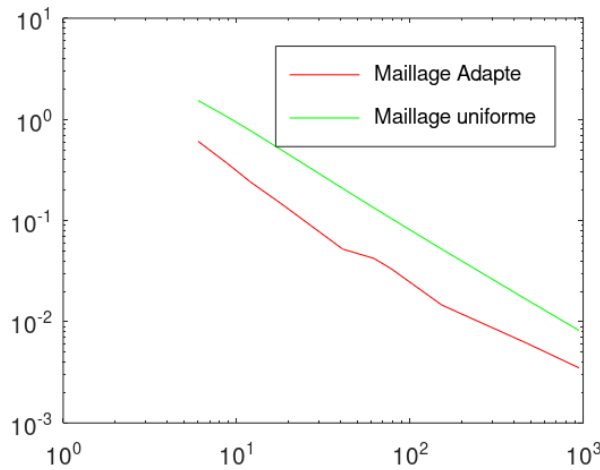


FIGURE 6 – Erreur en norme H_0^1 en variant le nombre de points de discrétisation

On observe que sur l'avant-dernier graphique que l'algorithme va raffiner de plus en plus (lorsqu'on diminue la tolérance), les endroits où l'on observait les oscillations numériques. Pour ce qui est de l'e.i., on a une convergence vers 2 en raffinant, ce qui est cohérent avec ce qui a été énoncé dans la partie précédente. Et en observant le dernier graphique où l'on a tracé l'erreur en norme $H_0^1(\Omega)$ en fonction de la taille du maillage, ce que l'on a

gagné avec l'adaptation, c'est qu'on réduit la taille du système linéaire pour avoir la tolérance souhaitée.

2 Adaptation pour les problèmes d'évolution paraboliques

L'objectif de cette partie est de donner un algorithme d'adaptation espace-temps qui va cette fois-ci ajouter de l'adaptation du pas de temps.

2.1 Cadre de travail

On considère l'équation d'advection-diffusion instationnaire. Plus précisément, on se place dans un intervalle quelconque $\Omega =]a, b[$.

Le problème consiste alors de trouver $u :]0, T[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{b} \frac{\partial u}{\partial x} + f \quad (11)$$

Avec les conditions aux limites Dirichlet homogènes :

$$u(t, a) = u(t, b) = 0 \quad (12)$$

Avec la condition initiale :

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\Omega) \quad \forall x \in \Omega \quad (13)$$

avec :

- $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, le terme de source
- $\tilde{b} \in \mathbb{R}$, le coefficient de convection/transport
- $\epsilon > 0$, le coefficient de diffusion

2.2 Existence et unicité du problème

La formulation faible en espace de ce problème est donnée en prenant en compte les conditions de Dirichlet après intégration par partie du terme de diffusion dans (11) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) v + \epsilon \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) v' - \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) v = \int_a^b f(t, \cdot) v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t > 0. \quad (14)$$

On pose : $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u(t, \cdot), v) = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) v + \epsilon \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) v' - \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) v$$

et

$$l_t(v) = \int_a^b f(t, \cdot) v$$

Théorème 2.1. *Si $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$ alors le problème (14) admet une unique solution $u(t, \cdot)$ dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ telle que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ dépendant du domaine Ω et ϵ telle que :*

$$\|u\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 = \int_0^T |u(t, \cdot)|_1^2 \leq C \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (15)$$

Démonstration. On admettra l'existence et unicité du problème (14).

On prend $v = u(t, \cdot)$ dans la formulation faible (14), ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \frac{u^2}{2}(t, \cdot) + \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right)^2 - \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) u(t, \cdot) = \int_a^b f(t, \cdot) u(t, \cdot) \quad \forall t > 0$$

On montre que la troisième intégrale dans le membre de gauche est nulle en intégrant par parties et en utilisant les conditions de Dirichlet. Puis en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$ et l'inégalité de Poincaré dans le second membre, on aboutit à cette inégalité différentielle :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \frac{u^2}{2}(t, \cdot) + \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right)^2 \leq C_p \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t > 0$$

En utilisant enfin l'inégalité de Young, on en déduit :

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \frac{u^2}{2}(t, \cdot) + \epsilon \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right)^2 \leq \frac{C_p^2}{2\epsilon} \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \frac{\left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}^2}{2} \quad \forall t > 0$$

En intégrant en temps entre 0 et T :

$$\int_a^b u^2(T, \cdot) + \epsilon \int_0^T \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, \cdot) \right)^2 \leq C_1 \|f(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_a^b u_0^2 \quad \forall t > 0$$

où $C_1 = \frac{C_p^2}{\epsilon}$. On a montré ainsi le résultat souhaité. \square

2.3 Discrétisation espace-temps de l'équation

On va utiliser le schéma classique Euler implicite qui est stable pour la discrétisation en temps en procédant comme suit :

On se donne $N_T + 1$ points distincts dans $[0, T]$ qu'on appellera $(t_n)_{n \in [0, N_T]}$, et on pose $\tau_n = t_{n+1} - t_n \quad \forall n \in [0, N_T - 1]$.

On utilisera un schéma éléments finis conforme P1-Lagrange pour la discrétisation en espace comme cela a été fait dans la partie 1.3. Il s'agit donc de trouver $u_h^{n+1} \in V_h$ telle que :

$$\int_a^b \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\tau_n} v_h + \epsilon \int_a^b \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} v_h' - \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} v_h = \int_a^b f(t_{n+1}, \cdot) v_h, \quad \forall v \in V_h, \forall n \geq 0 \quad (16)$$

2.3.1 Propriétés du schéma

On commence d'abord par énoncer 2 résultats de stabilité qu'implique le schéma numérique choisi.

Proposition 2.2. *Si $f \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ alors :*

$$\frac{1}{\tau_n} \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{1}{\tau_n} \|u_h^n\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t_{n+1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \right) \|u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall n \geq 0 \quad (17)$$

Ceci implique en particulier que :

$$\forall n \geq 1, \|u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k \|f(t_{k+1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \quad (18)$$

Il existe $C > 0$ indépendante de u (dépend uniquement du domaine et le coefficient de diffusion) telle que :

$$\forall n \geq 1, \tau^{n-1} \left\| \frac{\partial u_h^n}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|u_h^0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k \|f(t_{k+1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (19)$$

2.3.2 Convergence du schéma et ordre de convergence

Théorème 2.3. *Si $u \in H^2(\Omega)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de $h = \max h_i$ et $\tau = \max \tau^n$ telle que :*

$$\sum_{n=0}^{N_T} \tau^n |u(t^n, \cdot) - u_h^n|_1^2 \leq C (h^2 + \tau^2)$$

2.4 Estimateur d'erreur a posteriori

On va énoncer dans ce paragraphe un résultat d'estimateur d'erreur à posteriori qui servira pour construire un algorithme d'adaptation espace-temps. Ce qui change par rapport au problème stationnaire c'est qu'il faut construire un interpolant en temps qu'on notera $\varphi_\tau = \varphi_\tau(t, x)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\varphi_\tau(t_n, \cdot) = u_h^n \quad \forall n \in [0, N_T + 1]$.
- φ_τ est continue(en temps) sur $[0, T]$.
- φ_τ est de classe C^1 (en temps) sur $[t^n, t^{n+1}]$.

Pour pouvoir respecter ces conditions, on choisira φ_τ continue sur la globalité de l'intervalle temporel et linéaire par morceau.

Elle est donnée par l'expression :

$$\varphi_\tau = u_h^n + \frac{t - t^n}{\tau^n} (u_h^{n+1} - u_h^n) \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}]$$

Après avoir défini cet interpolant, on peut donc donner le théorème clé qui servira pour l'adaptation espace-temps.

Théorème 2.4. *Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement du domaine telle que :*

$$\int_a^b (u - \varphi_\tau)^2(x, t^{n+1}) dx + \epsilon \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a^b \left(\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, t) dx dt \leq \int_a^b (u - \varphi_\tau)^2(x, t^n) dx + C \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{i=0}^N \tilde{\eta}_i^2 \quad (20)$$

$$\text{avec } \tilde{\eta}_i^2 = h_i^2 \frac{1}{\epsilon} \|f - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 + (\epsilon + \frac{|\tilde{b}|^2}{\epsilon}) \|\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2.$$

En sommant sur n , on en déduit enfin l'estimation à posteriori :

$$\sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_a^b \left(\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, t) dx dt \leq C \sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{i=0}^N \eta_i^2 \quad (21)$$

$$\eta_i^2 = h_i^2 \frac{1}{\epsilon^2} \|f - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 + (1 + \frac{|\tilde{b}|^2}{\epsilon^2}) \|\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2.$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que la formulation de Galerkin (16) peut s'écrire :

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} v_h(x) dx + \epsilon \int_a^b \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}(x) v_h'(x) dx - \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}(x) v_h(x) dx = \int_a^b f(t_{n+1}, x) v_h(x) dx, \quad \forall v_h \in V_h, \forall n \geq 0$$

On va d'une part majorer $a(u(t, \cdot) - \varphi_\tau(t, \cdot), u(t, \cdot) - \varphi_\tau(t, \cdot))$, ce qui donne $\forall t > 0$

$$\begin{aligned}
a(u(t, \cdot) - \varphi_\tau, u(t, \cdot) - \varphi_\tau) &\stackrel{def}{=} \int_a^b \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial t} (u(t, \cdot) - \varphi_\tau) + \epsilon \int_a^b \left| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right|^2 \\
&\quad - \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} (u(t, \cdot) - \varphi_\tau) \\
&= \int_a^b \frac{\partial(f(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial t} (u(t, \cdot) - \varphi_\tau) - \epsilon \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} + \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} ((u(t, \cdot) - \varphi_\tau) \\
&= \int_a^b (f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t})(u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) - \epsilon \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h)}{\partial x} \\
&\quad + \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} (t, \cdot) (u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) + \int_a^b (f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t}) v_h \\
&\quad - \epsilon \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} v_h' + \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} v_h \quad \forall v_h \in V_h \\
&= \int_a^b (f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t})(u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) - \epsilon \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h)}{\partial x} \\
&\quad + \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} ((u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) + \int_a^b (f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)) v_h \\
&\quad + \epsilon \int_a^b (\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}) v_h' + \tilde{b} \int_a^b (\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}) v_h \quad \forall v_h \in V_h
\end{aligned}$$

On prend $v_h = r_h(u(t, \cdot) - \varphi_\tau) \in V_h$ (interpolant de Lagrange spatial). En décomposant les intégrales en somme d'intégrales sur chaque élément, cela donne :

$$\begin{aligned}
a(u(t, \cdot) - \varphi_\tau(t, \cdot), u(t, \cdot) - \varphi_\tau(t, \cdot)) &= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t})(u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) - \epsilon \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h)}{\partial x} \right) \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} (u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) + (f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)) v_h \right) \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\epsilon (\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}) v_h' + \tilde{b} (\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}) v_h \right) \\
&= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t})(u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) + \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\tau}{\partial^2 x} (u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) \right) \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} (u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) + (f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)) v_h \right) \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\epsilon (\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}) v_h' + \tilde{b} (\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}) v_h \right) \\
&= \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\tau}{\partial^2 x} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right) (u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h) \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)) v_h + \epsilon (\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}) v_h' + \tilde{b} (\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}) v_h \right)
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats d'estimation d'erreur de l'interpolation de Lagrange, sachant que $w(t, \cdot) = u(t, \cdot) - \varphi_\tau \in$

$H_0^1(\Omega)$, on en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\|r_h(w(t, \cdot))\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|w(t, \cdot) - r_h(w(t, \cdot))\|_0 + \|w(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\Omega) \left\| \frac{\partial w(t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} h + C_p \left\| \frac{\partial w(t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{On utilise l'inégalité de Poincaré} \\
&\leq C_1(\Omega) \left\| \frac{\partial w(t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
\left\| \frac{\partial r_h(w(t, \cdot))}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \frac{\partial w(t, \cdot) - r_h(w(t, \cdot))}{\partial x} \right\|_0 + \left\| \frac{\partial w(t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\Omega) \left\| \frac{\partial w(t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial w(t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_2(\Omega) \left\| \frac{\partial w(t, \cdot)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

On revient au calcul précédent en majorant les intégrales par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(K_i)$:

$$\begin{aligned}
a(u(t, \cdot) - \varphi_\tau, u(t, \cdot) - \varphi_\tau(t)) &\leq \sum_{i=0}^N \left\| f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\tau}{\partial^2 x} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \\
&\quad + \sum_{i=0}^N \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|v_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \\
&\quad + \epsilon \sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|v_h'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \\
&\quad + \sum_{i=0}^N |\tilde{b}| \left\| \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|v_h\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}
\end{aligned}$$

Ensuite, on majore encore en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbf{R}^N :

$$\begin{aligned}
a(u(t, \cdot) - \varphi_\tau, u(t, \cdot) - \varphi_\tau) &\leq \left(\sum_{i=0}^N \left\| f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\tau}{\partial^2 x} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u(t, \cdot) - \varphi_\tau - v_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \left(\sum_{i=0}^N \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \epsilon \left(\sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_h'\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + |\tilde{b}| \left(\sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left(\sum_{i=0}^N \left\| f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\tau}{\partial^2 x} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_1 \left(\sum_{i=0}^N \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_2 \epsilon \left(\sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_1 |\tilde{b}| \left(\sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

On utilise ensuite une version de l'inégalité de Young qu'on rappelle :

$$\forall r > 0, \forall a, b \in \mathbf{R}, |ab| \leq \frac{2a^2}{r} + \frac{b^2r}{8}$$

Ce qui donne alors :

$$\begin{aligned} a((u - \varphi_\tau)(t, \cdot), (u - \varphi_\tau)(t, \cdot)) &\leq \frac{2C^2}{\epsilon} \left(\sum_{i=0}^N \|f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\tau}{\partial x^2} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right) + \frac{\epsilon}{8} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{2C_1^2}{\epsilon} \left(\sum_{i=0}^N \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right) + \frac{\epsilon}{8} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2C_2\epsilon \left(\sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right) + \frac{\epsilon}{8} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{2C_1^2 \tilde{b}^2}{\epsilon} \left(\sum_{i=0}^N \left\| \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} - \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right) + \frac{\epsilon}{8} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \tilde{C} \sum_{i=0}^N \tilde{\eta}_i^2 + \frac{\epsilon}{2} \left\| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

avec $\tilde{C} = \max(2C^2, 2C_1^2, 2C_2) > 0$.

Donc en revenant à la définition de la forme bilinéaire a , on a prouvé que :

$$\int_a^b \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial t} ((u(t, \cdot) - \varphi_\tau)(t, \cdot)) + \frac{\epsilon}{2} \int_a^b \left| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right|^2 - \tilde{b} \int_a^b \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} ((u(t, \cdot) - \varphi_\tau)) \leq \tilde{C} \sum_{i=0}^N \tilde{\eta}_i^2$$

En utilisant une interversion dérivation-intégrale sur le premier terme à gauche et que le troisième terme qu'on peut calculer directement (dérivée composée de la fonction carré) est nul car $u(t, \cdot) - \varphi_\tau \in H_0^1(\Omega)$, on en déduit que :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^b \frac{(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)^2}{2} \right) + \frac{\epsilon}{2} \int_a^b \left| \frac{\partial(u(t, \cdot) - \varphi_\tau)}{\partial x} \right|^2 \leq \tilde{C} \sum_{i=0}^N \tilde{\eta}_i^2$$

En intégrant l'expression entre $[t_n, t_{n+1}]$, on retrouve le résultat voulu, ce qui termine la preuve. \square

2.4.1 Implémentation des estimateurs et validation

On constate que chaque élément l'estimateur d'erreur global $\tilde{\eta}_{GLOBAL}^2$ se réécrit :

$$\tilde{\eta}_{GLOBAL}^2 = \sum_{i=0}^N (\tilde{\eta}_i^X)^2 + (\tilde{\eta}_i^T)^2$$

avec :

$$\begin{aligned} (\tilde{\eta}_i^X)^2 &= h_i^2 \frac{1}{\epsilon} \left\| f - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_\tau}{\partial x^2} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 = h_i^2 \frac{1}{\epsilon} \left\| f - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \\ (\tilde{\eta}_i^T)^2 &= \frac{1}{\epsilon} \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 + \left(\epsilon + \frac{|\tilde{b}|^2}{\epsilon} \right) \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \end{aligned}$$

Donc pour implémenter l'estimateur η_{GLOBAL} , on implémente les estimateurs locaux $(\tilde{\eta}_i^X)^2$ et $(\tilde{\eta}_i^T)^2$, et on le récupère en sommant sur chaque élément. On a approché $(\tilde{\eta}_i^X)^2$ par une formule de quadrature type trapèze d'ordre 2 (car exacte pour les polynômes de degré 1) en espace et la méthode du point milieu pour le temps, ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\tilde{\eta}_i^X)^2 &= h_i^2 \frac{1}{\epsilon} \int_{t_n}^{t^{n+1}} \left\| f(t, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t}(t, \cdot) + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 dt \\ &\approx \tau^n h_i^2 \frac{1}{\epsilon} \frac{h_i}{2} \left(\left(f(t^{\frac{n}{2}}, x_i) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t}(t^{\frac{n}{2}}, x_i) + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(t^{\frac{n}{2}}, x_i) \right)^2 + \left(f(t^{\frac{n}{2}}, x_{i+1}) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t}(t^{\frac{n}{2}}, x_{i+1}) + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(t^{\frac{n}{2}}, x_{i+1}) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

avec $t^{\frac{n}{2}} \stackrel{def}{=} \frac{t^n + t^{n+1}}{2}$.

On procède de la même façon pour $(\tilde{\eta}_i^T)^2$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\eta}_i^T)^2 &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{1}{\epsilon} \|f(t, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 + \left(\epsilon + \frac{|\tilde{b}|^2}{\epsilon}\right) \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(t, \cdot) \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 dt \\ &\approx \tau^n \left(\frac{1}{\epsilon} \|f(t^{\frac{n}{2}}, \cdot) - f(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 + \left(\epsilon + \frac{|\tilde{b}|^2}{\epsilon}\right) \left\| \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(t^{\frac{n}{2}}, \cdot) \right\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \right) \\ &\approx \tau^n h_i \frac{1}{2\epsilon} (f(t^{\frac{n}{2}}, x_i) - f(t^{n+1}, x_i))^2 + \tau^n h_i \frac{1}{2\epsilon} (f(t^{\frac{n}{2}}, x_{i+1}) - f(t^{n+1}, x_{i+1}))^2 + \tau^n h_i \frac{\epsilon + \frac{|\tilde{b}|^2}{\epsilon}}{2} \left(\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}(x_i) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(t^{\frac{n}{2}}, x_i) \right. \\ &\quad \left. + \tau^n h_i \frac{\epsilon + \frac{|\tilde{b}|^2}{\epsilon}}{2} \left(\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}(x_{i+1}) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(t^{\frac{n}{2}}, x_{i+1}) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

On prendra comme premières données pour la validation :

$$a = 0, b = 1, T = 1, f(t, x) = -\tilde{b}\pi \exp(-\epsilon\pi^2 t) \cos(\pi x).$$

La solution exacte pour ces données :

$$u_{ex}(t, x) = \exp(-\epsilon\pi^2 t) \sin(\pi x)$$

Nombre de points N	20	40	80	160	320	640
τ	0.025	0.0125	6.25e-3	3.125e-3	0.00156	0.00078
$\ u - u_h\ _{L^2(0,T,H_0^1)}$	0.119440	0.058900	0.029187	0.014521	0.0072521	0.0035657
η_{GLOB}	0.255891	0.125568	0.062107	0.030875	0.015494	0.007784
$e.i. = \frac{\eta_{GLOB}}{\ u - u_h\ _{L^2(0,T,H_0^1)}}$	2.1424	2.1319	2.1279	2.1232	2.1139	2.1098

TABLE 5 – Résultat numériques sur les erreurs et l'estimateur en variant le pas de temps et d'espace pour $\epsilon = 0.1$ et $\tilde{b} = 0.09$

Pour le second test , on prend f tel que :

$$u_{ex}(t, x) = \cos(t) \sin(\pi x)$$

En

Nombre de points N	20	40	80	160	320	640
τ	0.025	0.0125	6.25e-3	3.125e-3	0.00156	0.00078
η_{GLOB}	0.360465	0.177042	0.087483	0.043454	0.021764	0.01051
$\ u - u_h\ _{L^2(0,T,H_0^1)}$	0.154468	0.075950	0.037571	0.018675	0.0093369	0.00466857
$e.i. = \frac{\eta_{GLOB}}{\ u - u_h\ _{L^2(0,T,H_0^1)}}$	2.3336	2.3310	2.3285	2.3269	2.3230	2.3190

TABLE 6 – Résultat numériques sur les erreurs et l'estimateur en variant le pas de temps et d'espace pour $\epsilon = 1$ et $\tilde{b} = 0.8$

2.5 Algorithme d'adaptation de maillage espace-temps basé sur cet estimateur à posteriori

2.5.1 Construction d'un algorithme adaptatif

On rappelle que le but c'est de réduire la norme l'erreur entre $u(t^n, \cdot)$ et u_h^n entre 2 instants consécutifs en raffinant/déraffinant et en diminuant/augmentant le pas du temps simultanément. Grâce au théorème (2.4), on peut contrôler cette erreur, en contrôlant $\int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{i=0}^N \tilde{\eta}_i^2$ qui est calculable. Mais en pratique, on veut contrôler l'erreur relative et donc on veut trouver un maillage tel que :

$$0.75TOL \leq \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{i=0}^N \tilde{\eta}_i^2}{\sum_{n=0}^{N_T-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\varphi_\tau|^2_1}} \leq 1.25TOL \quad \forall n \geq 0 \quad (22)$$

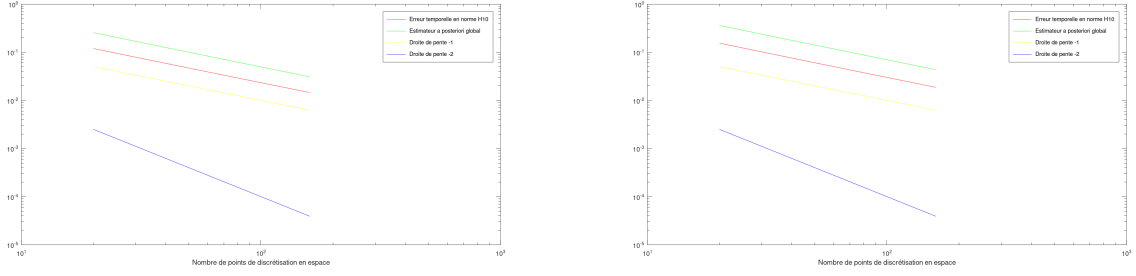


FIGURE 7 – Comportement de η_{GLOB} et l'erreur H_0^1 en fonction de N pour $\epsilon = 1$ à gauche et $\epsilon = 0.01$

Un condition suffisante pour avoir cette double inégalité est donnée ci-dessous :

$$\frac{(0.75TOL)^2 (\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\varphi_\tau|^2_1)}{2} \leq \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{i=0}^N (\tilde{\eta}_i^X)^2 \leq \frac{(1.25TOL)^2 (\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\varphi_\tau|^2_1)}{2} \quad \forall n \in [0, N_T - 1] \quad (23)$$

$$\frac{(0.75TOL)^2 (\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\varphi_\tau|^2_1)}{2} \leq \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{i=0}^N (\tilde{\eta}_i^T)^2 \leq \frac{(1.25TOL)^2 (\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\varphi_\tau|^2_1)}{2} \quad \forall n \in [0, N_T - 1] \quad (24)$$

On utilise ensuite la méthode du point milieu pour approcher les intégrales temporelles, ce qui donne finalement :

$$\frac{(0.75TOL)^2 |\varphi_\tau|^2_1(t^{\frac{n}{2}})}{2} \leq \sum_{i=0}^N (\tilde{\eta}_i^X)^2 (t^{\frac{n}{2}}) \leq \frac{(1.25TOL)^2 |\varphi_\tau|^2_1(t^{\frac{n}{2}})}{2} \quad \forall n \in [0, N_T - 1] \quad (25)$$

$$\frac{(0.75TOL)^2 |\varphi_\tau|^2_1(t^{\frac{n}{2}})}{2} \leq \sum_{i=0}^N (\tilde{\eta}_i^T)^2 (t^{\frac{n}{2}}) \leq \frac{(1.25TOL)^2 |\varphi_\tau|^2_1(t^{\frac{n}{2}})}{2} \quad \forall n \in [0, N_T - 1] \quad (26)$$

avec $t^{\frac{n}{2}} = \frac{t^n + t^{n+1}}{2}$.

Si ces deux conditions suffisantes ne sont pas vérifiées, il faudra alors soit raffiner l'élément en ajoutant le milieu par exemple (s'il est grand à la bande supérieure), le déraffiner en enlevant un point (s'il est petit à la bande inférieure) ou bien augmenter/diminuer le pas de temps entre t^n et t^{n+1} . Et on répète ainsi l'opération jusqu'à ce que (22) est vérifiée.

Algorithm 2 Algorithme adaptatif espace-temps

Data: $f \in L^2$, $\eta > 0, \epsilon > 0, \tilde{b} \in \mathbf{R}, a < b, TOL > 0, \tau_h^0$ un maillage initial, τ pas de temps initial, $u_0 \in L^2$ la condition initiale, t^0 un instant initial

Result: Un maillage adapté de $[a, b]$ et une suite de pas de temps adaptés tels que (22) soit vérifiée

```
14 N = size( $\tau_h^0$ )-2 (Nombre de points internes);  
     $t_{old} = t^0$ ;  
     $t_{new} = t^0 + \tau$ ;  
    Calculer  $u_{old}$  vecteur contenant les évaluations de  $u_0$  en  $\tau_h^0$ ;  
    Calculer  $u_{new}$  à partir de  $u_{old}$  (avec un solveur type éléments finis);  
    Calculer  $RB = \frac{(1.25TOL)^2 |\varphi_\tau|_1^2 (\frac{t_{old}+t_{new}}{2})}{2}$  et  $LB = \frac{(0.75TOL)^2 |\varphi_\tau|_1^2 (\frac{t_{old}+t_{new}}{2})}{2}$ ;  
    Calculer  $(\eta_{GLOB}^X)^2 = \sum_{i=0}^N (\tilde{\eta}_i^X)^2 (\frac{t_{old}+t_{new}}{2})$  à partir de  $\tau_h^0, u_{new}, u_{old}, t_{new}, t_{old}$  et des données;  
    Calculer  $(\eta_{GLOB}^T)^2 = \sum_{i=0}^N (\tilde{\eta}_i^T)^2 (\frac{t_{old}+t_{new}}{2})$  à partir de  $\tau_h^0, u_{new}, u_{old}, t_{new}, t_{old}$  et des données.  
     $X = \tau_h^0$ ;  
    while  $t_{new} \leq T$  do  
15     while  $((\eta_{GLOB}^T)^2 \leq LB) \vee ((\eta_{GLOB}^T)^2 \geq RB) \vee ((\eta_{GLOB}^X)^2 \leq LB) \vee ((\eta_{GLOB}^X)^2 \geq RB)$  do  
16         if  $(\eta_{GLOB}^T)^2 \leq LB$  then  
17              $\tau = \frac{3}{2}\tau$ ;  
              $t_{new} = t_{old} + \tau$   
18         if  $(\eta_{GLOB}^T)^2 \geq RB$  then  
19              $\tau = \frac{1}{2}\tau$ ;  
              $t_{new} = t_{old} + \tau$   
20         if  $((\eta_{GLOB}^X)^2 \leq LB) \vee ((\eta_{GLOB}^X)^2 \geq RB)$  then  
21              $u_{oldNew} = [u_{old}(1)]$ ;  
              $x_{new} = [X(1)]$ ;  
             N = size(X)-2; (nb de points internes du nouveau maillage)  
             for  $k = 1$  to  $N + 1$  do  
22                  $h_k = X(k + 1) - X(k)$ ;  
                 Calculer  $(\tilde{\eta}_k^X)^2 = \tau h_k^2 \frac{1}{\epsilon} \|f(\frac{t_{old}+t_{new}}{2}, \cdot) - \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial t} + \tilde{b} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}(\frac{t_{old}+t_{new}}{2}, \cdot)\|_{L^2(X(k), X(k+1))}^2$ ;  
                 if  $(\tilde{\eta}_k^X)^2 \geq \frac{RB}{N+1}$  then  
23                      $x_{new} = [x_{new}, \frac{X(k)+(k+1)}{2}, X(k+1)]$  (On raffine en ajoutant le milieu);  
                      $u_{oldNew} = [u_{oldNew}, \frac{u_{old}(k)+u_{old}(k+1)}{2}, u_{old}(k+1)]$   
24                 if  $(\tilde{\eta}_k^X)^2 \leq \frac{LB}{N+1}$  then  
25                     if  $k = N + 1$  then  
26                          $x_{new} = [x_{new}, X(k+1)]$ ; (On déraffine à gauche en enlevant  $X(k)$ );  
27                     else  
28                          $x_{new} = [x_{new}]$  (On déraffine à droite en enlevant  $X(k+1)$ );  
29                 if  $LB \leq (\tilde{\eta}_k^X)^2 \leq RB$  then  
30                      $x_{new} = [x_{new}, X(k+1)]$ ; (On ne change rien)  
                      $u_{oldNew} = [u_{oldNew}, u_{old}(k+1)]$ ;  
31              $X = x_{new}$ ;  
              $u_{old} = u_{oldNew}$ ;  
32         Calculer  $u_{new}$  à partir de  $u_{old}$ , du nouveau maillage  $X$  et des données;  
         Calculer  $(\eta_{GLOB}^X)^2$ ;  
         Calculer  $(\eta_{GLOB}^T)^2$ ;  
         Calculer  $LB$  et  $RB$ ;  
33     Récupérer le nouveau maillage adapté  $X$  et également le pas de temps adapté  $\tau$ ;  
      $t_{old} = t_{new}$ ;  
      $t_{new} = t_{old} + \tau$ ;  
      $u_{old} = u_{new}$ ;
```

2.5.2 Résultats obtenus par l'algorithme adaptatif espace-temps.

On choisit comme données :

$$a = 0 \quad b = 1 \quad \tilde{b} = 1.2 \quad \epsilon = 1 \quad T = 1$$

Et on prend le second membre f tel que la solution exacte soit :

$$u_{ex}(t, x) = \cos(t) \sin(\pi x)$$

TOL	η_{GLOB}	$\ u - u_h\ _{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}$	e.i.
0.4	0.4317	0.1293	3.3402
0.2	0.2805	0.099843	2.8091
0.1	0.1451	0.053922	2.6906
0.05	0.077394	0.027932	2.7708
0.025	0.038175	0.014059	2.7154
0.01	0.017078	6.7799e-3	2.5189
0.005	8.5414e-3	3.4434e-3	2.4806

TABLE 7 – Résultats fournis par l'algorithme adaptatif

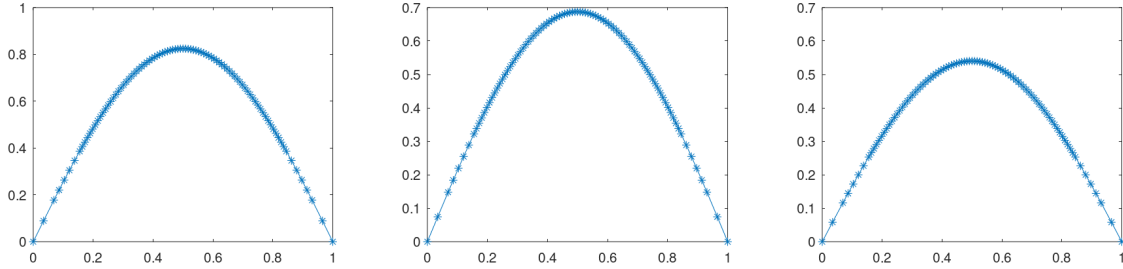


FIGURE 8 – Soltution donnée par l'algorithme adaptatif espace-temps aux instants 0.6, 0.8125, 0.9875

Suite à l'adaptation, on constate que sur la figure l'algorithme a tendance à raffiner le maillage entre $[0.2, 0.8]$ à chaque instant, pour être un peu plus précis, en faisant un simple calcul de pourcentage, on a entre 70%-80% de points dans cet intervalle pour tout instant, ce qui est normal car la solution a tendance à devenir nulle aux bords, donc il faudra peu de points pour la reconstruire aux bords. Au vu des valeurs numériques dans le tableau, on retrouve bien l'ordre 1 du schéma et un comportement asymptotique similaire entre l'estimateur global et l'erreur. Pour ce qui est de la quantité e.i (effectivity index), elle possède aussi des valeurs proches à celles dans le test des estimateurs de la partie précédente. En ajoutant l'adaptation en temps (mais qui n'est pas illustrée), ce que l'on gagne dans ce type de problème parabolique c'est que l'on observe en détail le régime transitoire, en effet les pas de temps sont très petits initialement de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} , et au fur à mesure que l'on se rapproche d'un régime permanent, on a des pas de temps qui deviennent grands de l'ordre de 10^{-1} .

Bibliographie

- [1] Ivo BABUŠKA, Ricardo DURÁN et Rodolfo RODRÍGUEZ. « Analysis of the Efficiency of an a Posteriori Error Estimator for Linear Triangular Finite Elements ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29.4 (1992), p. 947-964. ISSN : 0036-1429. URL : <https://www.jstor.org/stable/2157985> (visité le 15/09/2023).
- [2] L. FORMAGGIA et S. PEROTTO. « Anisotropic error estimates for elliptic problems ». In : *Numerische Mathematik* 94.1 (mars 2003), p. 67-92. ISSN : 0029-599X, 0945-3245. DOI : 10.1007/s00211-002-0415-z. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s00211-002-0415-z> (visité le 15/09/2023).
- [3] PICASSO MARCO. *Notes de cours analyse numérique avancée*.
- [4] VAUCHELET NICOLAS. *Notes de cours d'éléments finis*.
- [5] M. PICASSO. « Adaptive finite elements with large aspect ratio based on an anisotropic error estimator involving first order derivatives ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.1-3 (déc. 2006), p. 14-23. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/j.cma.2005.11.018. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782506001083> (visité le 15/09/2023).
- [6] Marco PICASSO. « Adaptive finite elements for a linear parabolic problem ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 167.3-4 (déc. 1998), p. 223-237. ISSN : 00457825. DOI : 10.1016/S0045-7825(98)00121-2. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782598001212> (visité le 15/09/2023).
- [7] Jacques RAPPAZ et Marco PICASSO. *Introduction à l'analyse numérique*. fre. 3e éd. Enseignement des mathématiques. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 2017. ISBN : 9782889151936.