Huiswerk 5 voor Lineaire Algebra KI/INF

1. (2 pt, $\frac{1}{2}$ pt per deelvraag) Bepaal met een geometrische redenering de eigenwaarden van de volgende matrices, en voor iedere eigenspace een basis van eigenvectoren (als ze bestaan!):

   (a) Een rotatie van π radialen om een as $\overrightarrow{a}$ door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$.

   (b) Een rotatie over $\pi/4$ radialen om de oorsprong in $\mathbb{R}^2$.

   (c) De spiegeling in een vlak V door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$.

   (d) De loodrechte projectie op een lijn L door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$.

2. (1 pt, $\frac{1}{2}$ pt per deelvraag) Welke van deze matrices kan niet worden gediagonaliseerd?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (B7.2) Laat zien dat AB al 'similar' is aan BA, als B inverteerbaar is.

4. Is de matrix $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ 'similar to' de matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$? Beantwoord dit zonder de diagonalisatie uit te voeren!

5. Factorizeer de matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in de vorm SDS^{-1}, met D diagonaal.

6. Vind de matrix A met eigenwaarden 1 en 4, waarvan de eigenvectoren $[3,1]^T$ en $[2,1]^T$ zijn. (Hint: $A = SDS^{-1}$.)

7. Diagonaliseer $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (als mogelijk), dus geef S en D in $A = SDS^{-1}$.

8. Voor $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, bepaal een ontzettend goede benadering van M^{100} door middel van diagonalisering.

9. Als een matrix Q diagonaliseerbaar is, dan is de determinant $\det(Q)$ het product van de eigenwaardes. Waarom?

10. Vind alle wortels van de matrix $K = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. (De wortel van een matrix K is een matrix W zodanig dat $W^2 = K$.)

11. Bernadelli heeft een kever bestudeerd "die maar 3 jaar leeft, en in zich in het derde jaar voortplant". We houden de populatie van 3 opeenvolgende jaren bij in een vector. Als de overlevingskans van het eerste jaar 1/2 is, en voor het het tweede jaar 1/3, dan is de matrix voor de ontwikkeling van de bevolking $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$. Laat zien dat $K^3 = I$, en bereken de populatie van kevers over 6 jaar, als er aan het begin 3000 in iedere leeftijdsgroep zitten.

12. (2 pt, $\frac{1}{2}$ pt per deelvraag) Een multinationale bedrijf in de VS, Europa en Japan heeft een kapitaal van 4 gazillion. Aan het begin van onze studie heeft het 2 gazillion in de VS en Europa, en niets Japan. Ieder jaar blijft de helft van het VS geld in de VS, en een kwart gaat naar Europa en Japan. Voor Japan en Europa blijft de helft thuis en de helft gaat naar de VS.

(a) Vind de matrix M zodat

$$\begin{bmatrix} VS \\ J \\ EU \end{bmatrix}_{\text{jaar } k+1} = M \begin{bmatrix} VS \\ J \\ EU \end{bmatrix}_{\text{jaar } k}$$

.

(b) Vind de eigenwaarden en eigenvectoren van M.

(c) Vind de verdeling van de 4 gazillion kapitaal aan het einde van de wereld (onder de vereenvoudigende aanname dat dit nog lang duurt - deze vraag dateert van vóór Trump).

(d) Vind de verdeling in jaar k.

13. Arguing geometrically, find all eigenvectors and eigenvalues of the following linear transformation:

- Reflection about a line in $\mathbb{R}^2$.
- Rotation through an angle of $180°$ in $\mathbb{R}^2$.
- Orthogonal projection onto a line L in $\mathbb{R}^3$.

14. Use the method of Example 4.5 (from Poole, p.258) to find all the eigenvalues of the matrix A. Give bases for each of the corresponding eigenspaces. Illustrate the eigenspaces and the effects of multiplying eigenvectors by A as in Figure 4.8 (in Poole).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

15. Compute the determinant using cofactor expansion along the first row and along the first column.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

16. Use the determinant to find out for which values of the constant k the matrix A is invertible.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & k & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

17. For the matrix A, compute the characteristic polynomial and find the eigenvalues. Find also the eigenspace corresponding to each eigenvalue and find a basis for each eigenspace. Finally, give the algebraic multiplicity and the geometric multiplicity of each eigenvalue.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. (0.75 pt) Find all 2×2 matrices for which $\vec{e}_1$ is an eigenvector with associated eigenvalue 5. (0.25 pt) What is the dimension of the subspace of all 2×2 matices for which $\vec{e}_1$ is an eigenvector with eigenvalue 5?

19. Use Cramer's rule to solve the following system

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4y + 5z &= 3 \\ 6x + 7z &= -1 \end{aligned}$$