

Kombinatorika

Muhammad Saiful Islam

muhammad@saiful.web.id | [@saifulwebid](https://twitter.com/saifulwebid)

Jumat, 27 Januari 2017

ComLabs C, SMA Negeri 2 Bandung

Referensi

- *Lecture slide by Julio Adisantoso,*
<http://julio.staff.ipb.ac.id/files/2014/02/slide-02-kombinatorika.pdf>
- https://matreg1pasca.files.wordpress.com/2012/05/kombinematika-diskrit_rini-copy.pdf

Counting problem

- Ali membeli sebuah lampu pijar dari suatu toko. Sebelum membayar, lampu itu dicobanya dahulu apakah dapat menyala atau mati. Apa saja kemungkinan yang akan terjadi?
- Kegiatan mencoba lampu pijar dinamakan percobaan. Setiap lampu yang akan dicoba hanya memiliki dua kemungkinan hasil, yaitu nyala atau mati, misalkan dilambangkan sebagai A (nyala) atau M (mati). Maka hasil percobaan yang mungkin terjadi, dapat dinotasikan sebagai himpunan $P = \{A, M\}$.
- Bagaimana hasil percobaan jika Ali membeli dua lampu pijar?

Counting problem (2)

- *Counting problem* mencoba menemukan berapa banyaknya hasil yang mungkin muncul pada berbagai macam percobaan.

Contoh *counting problem*

- Pada lomba lari cepat 100m, empat orang pelari lolos ke putaran final, yaitu A, B, C, dan D.
- Pada pertandingan itu tersedia hadiah untuk juara I dan II.
- Berapa macam susunan pemenang yang akan muncul di akhir pertandingan?
- Solusi:
 - $P = \{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$
 - Jumlah kemungkinan = $4 \cdot (4 - 1) = 12$ kemungkinan

Contoh *counting problem* (2)

- Seseorang asal Jakarta akan melakukan perjalanan berawal di Bandung, kemudian ke Yogyakarta, dan berakhir di Surabaya.
- Saat ini dia harus memutuskan jenis transportasi yang akan digunakan.
 - Dari Jakarta ke Bandung, dia bisa memilih bus atau pesawat
 - Dari Bandung ke Yogyakarta bisa memilih bus, pesawat, atau kereta api
 - Dan dari Yogyakarta ke Surabaya bisa memilih naik bus atau kereta api
- Berapa macam jenis transportasi yang dapat dipilih?

Contoh *counting problem* (2)

- Saat ini dia harus memutuskan jenis transportasi yang akan digunakan.
 - Dari Jakarta ke Bandung, dia bisa memilih bus atau pesawat
 - Dari Bandung ke Yogyakarta bisa memilih bus, pesawat, atau kereta api
 - Dan dari Yogyakarta ke Surabaya bisa memilih naik bus atau kereta api
- Solusi:
 - Peristiwa 1: Jakarta ke Bandung, 2 kemungkinan
 - Peristiwa 2: Bandung ke Yogyakarta, 3 kemungkinan
 - Peristiwa 3: Yogyakarta ke Surabaya, 2 kemungkinan
 - Total, ada $2 \times 3 \times 2 = 12$ kemungkinan transportasi

Counting problem (3)

- **Tidak ada aturan yang pasti untuk menjawab pertanyaan berapa banyak hasil yang mungkin muncul dari suatu percobaan.**
 - Cara paling mudah: mendaftar semua kemungkinan yang ada
 - Jika melibatkan bilangan cacah yang besar, maka jadi tidak efektif dan efisien
- Secara umum, bisanya dipakai salah satu atau gabungan dari pendekatan-pendekatan yang disebut **permutasi** dan **kombinasi**.

Aturan Penjumlahan

Jika A_1, A_2, \dots, A_k adalah himpunan yang saling asing dengan kardinal hingga, dan $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, maka:

$$|A| = \sum_{i=1}^k |A_i|$$

Aturan Perkalian

- Misalkan terdapat dua percobaan. Jika percobaan 1 menghasilkan m kemungkinan kejadian, dan percobaan 2 menghasilkan n kemungkinan kejadian, maka akan ada mn kemungkinan kejadian dari percobaan bersama 1 dan 2.
- Hukum ini dapat dikembangkan untuk k percobaan, masing-masing menghasilkan n_1, n_2, \dots, n_k kemungkinan kejadian, maka k percobaan secara bersama akan menghasilkan $n_1 n_2 \dots n_k$ kemungkinan kejadian.

Contoh soal

Contoh 1. Jika tiga dadu seimbang yang berbeda dilemparkan, berapa banyaknya kemungkinan angka yang muncul?

Contoh 2. Dua dadu berwarna merah dan putih. Berapa cara untuk mendapatkan jumlah angka 9 atau 5?

Contoh soal (2)

Contoh 3. Suatu pabrik makanan kaleng memberi kode pada produknya dengan kode yang terdiri 3 huruf diikuti 4 angka (misalkan ABD2531).

- Jika huruf maupun angka boleh berulang, berapa banyak kode yang dapat dibuat pabrik tersebut?
- Bagaimana jika hanya huruf yang dapat diulang?
- Bagaimana jika hanya angka yang dapat diulang?
- Bagaimana jika angka dan huruf tidak boleh diulang?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Dasar prinsip inklusi-eksklusi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Contoh soal (3)

Contoh 4. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif yang kurang atau sama dengan (\leq) 100 yang habis dibagi 3 atau 7!

Faktorial

Untuk bilangan asli n , didefinisikan:

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Selanjutnya didefinisikan:

$$0! = 1$$

Permutasi

- Bentuk khusus dari aturan perkalian
- Jika banyaknya obyek yang disusun adalah n , maka urutan pertama dipilih dari n obyek, urutan ke-2 dipilih dari $(n - 1)$ obyek, urutan ke-3 dipilih dari $(n - 2)$ obyek, dan seterusnya hingga urutan ke- n dipilih dari 1 obyek.
- Dengan menggunakan aturan perkalian, banyaknya permutasi n obyek adalah:

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (2)(1) = n!$$

Permutasi r dari n elemen

- Banyaknya kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$
- Jika banyaknya obyek yang disusun adalah n , maka urutan pertama dipilih dari n obyek, urutan ke-2 dipilih dari $(n - 1)$ obyek, urutan ke-3 dipilih dari $(n - 2)$ obyek, dan seterusnya hingga urutan ke- r dipilih dari $(n - r + 1)$ obyek.
- Banyaknya permutasi r dari n obyek:

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!} = nPr$$

Contoh soal (4)

Contoh 5. Dalam suatu kelas terdapat 3 mahasiswa laki-laki dan 2 perempuan. Mereka diberi ujian dan diperingkat berdasarkan nilai ujian. Asumsikan tidak ada dua mahasiswa memperoleh nilai ujian yang sama.

- Berapa banyak susunan peringkat berbeda yang mungkin dihasilkan?
- Jika mahasiswa laki-laki diperingkat sendiri, dan demikian juga mahasiswa perempuan, berapa banyak susunan peringkat berbeda yang mungkin?

Contoh soal (5)

Contoh 6. Ali memiliki 10 buku, yaitu 4 Matematika, 3 Kimia, 2 Sejarah, dan 1 Bahasa. Ia ingin menyusun buku di mana yang sejenis mengelompok menjadi satu. Berapa banyak susunan buku yang mungkin?

Contoh 7. Berapa banyak susunan yang dapat dihasilkan dari huruf-huruf P E P P E R? (Ingat, berbagai susunan dari PPP dihitung sama sebagai satu kemungkinan. Demikian pula susunan dari EE.)

Permutasi majemuk

Jika diketahui n objek, di mana terdapat n_1, n_2, \dots , dan n_r yang sama, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ maka banyaknya permutasi atau susunan yang berbeda sebanyak:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

Contoh soal (6)

Contoh 8. Berapa banyak susunan bendera yang mungkin jika terdapat 4 bendera biru, 3 bendera merah, dan 2 bendera kuning?

Contoh 9. *A chess tournament has 10 competitors, of which 4 are Russian, 3 are from the United States, 2 are from Great Britain, and 1 is from Brazil. If the tournament result lists just the nationalities of the players in the order in which they placed, how many outcomes are possible?*

Kombinasi

Contoh 10. Berapa banyak kemungkinan 3 objek dapat dipilih dari 5 objek A, B, C, D, dan E?

Solusi:

- Persoalan ini sama saja dengan memilih satu per satu objek berturut-turut.
 - Pemilihan pertama menghasilkan 5 kemungkinan
 - Pemilihan kedua menghasilkan 4 kemungkinan
 - Pemilihan terakhir menghasilkan 3 kemungkinan.
 - Secara bersama akan ada $5 \times 4 \times 3$ kemungkinan.

Kombinasi

Contoh 10. Berapa banyak kemungkinan 3 objek dapat dipilih dari 5 objek A, B, C, D, dan E?

Solusi:

- Misalkan yang terpilih adalah A, B, dan C, maka susunan yang mungkin terjadi ada $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ kemungkinan, yaitu ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, dan CBA.
- Karena urutan pemilihan tidak diperhatikan, maka diperoleh banyaknya kemungkinan = $\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

Kombinasi (2)

- Menghitung banyaknya himpunan bagian dengan r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen
- Beberapa himpunan dengan elemen-elemen sama (meskipun urutan berbeda) merupakan himpunan yang sama, sehingga dihitung sekali
 - Perhatikan bahwa himpunan $\{a, b\}$ dapat juga dituliskan dengan $\{b, a\}$
 - Ada $r!$ buah himpunan atas r elemen yang sama

Kombinasi (3)

- Ada $r!$ buah himpunan atas r elemen yang sama

$$nPr = r! \cdot nCr$$

$$nCr = \frac{nPr}{r!} = \frac{n!}{(n - r)! r!} = \binom{n}{r}$$

- Nilai $\binom{n}{r}$ disebut sebagai **koefisien binomial**.

Kaidah Pengambilan Objek

- **Tertata**
 - Urutan diperhatikan
- **Tidak tertata**
 - Urutan tidak diperhatikan
- **Dengan pemulihan**
 - Objek yang diambil dikembalikan lagi sebelum pengambilan selanjutnya
- **Tanpa pemulihan**
 - Objek yang diambil tidak dikembalikan lagi

Contoh soal (7)

Contoh 11. Suatu panitia terdiri dari 3 orang dipilih dari 20 orang. Berapa banyak kemungkinan anggota panitia dapat terpilih?

Contoh 12. Dari 5 perempuan dan 7 laki-laki, berapa kemungkinan yang terjadi jika dipilih anggota panitia yang terdiri dari 2 perempuan dan 3 laki-laki? Bagaimana jika 2 dari laki-laki bermusuhan dan menolak ada dalam panitia secara bersama?

Kesimpulan

Pengambilan tanpa pemulihan maupun dengan pemulihan, dapat bersifat:

- Tidak tertata (*unordered*) jika urutan objek yang terambil tidak diperhatikan
- Tertata (*ordered*) jika urutan objek yang terambil diperhatikan

Kesimpulan (2)

Urutan objek yang terambil	Cara pengambilan tanpa pemulihan	Cara pengambilan dengan pemulihan
Tertata	Permutasi r dari n objek yang berbeda $nPr = \frac{n!}{(n - r)!}$	Permutasi r bola yang berbeda ke dalam n wadah n^r
Tidak tertata	Kombinasi r dari n objek $nCr = \binom{n}{r}$	Penempatan r bola yang sama ke dalam n wadah $\binom{n + r - 1}{r}$

Latihan

- <https://osk17.saiful.web.id/>
- *User account* diumumkan secepatnya
 - <https://saiful.web.id/osk-sman2bdg-2017/>
 - *Keep in touch* di grup LINE ;)
- Liburan ...?
 - Sabtu (28/1) kita libur; Sabtu (4/2) juga libur
 - Solusi yang disepakati:
 - Jumat (3/2) dari jam 13.00 s.d. 16.00 WIB
 - Jumat (10/2) dari jam 13.00 s.d. 16.00 WIB

See you later ☺