中３数学

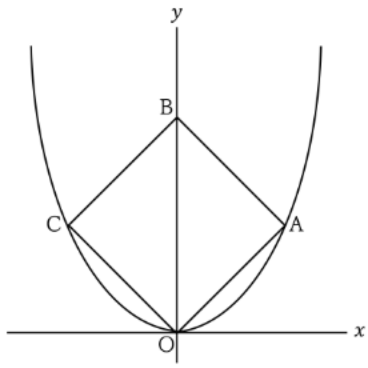
《演習問題》

〔解答・解説〕

【1】　次の各問に答えよ。

(1)　正方形 OABC は対角線 OB を y 軸上の線分として，頂点 A，C は放物線$y = ax^2$ 上にある。また，四角形 OABC の面積は 32 ㎠である。ただし，座標の 1 目盛りは 1cm とする。

〔城北埼玉高，68〕



①　a の値を求めよ。

A. $a = \frac{1}{4}$

B(0, t) としたとき

$\frac{1}{2}t^2 = 32$

$t^2 = 64$

$t = 8\ (t > 0)$

∴

A(4, 4)

C(−4, 4) より

$a = \frac{1}{4}$

② 直線 BC の放物線の交点のうち，C でないものを D とするとき，点 D の座標を求めよ。

A. (8, 16)

C(-4, 4), B(0, 8)

∴

BC: $y = x + 8$

$\frac{1}{4}x^2 = x + 8$

$x^2 - 4x - 32 = 0$

$(x + 4)(x - 8) = 0$

$x = -4, 8$

∴

D(8, 16)

(2)　放物線 $y=x^2$ と，2 点（a ，a^2），（$-a$ ，a^2）を結ぶ直線 AB とで囲まれる点 O を含む部分の面積は $\frac{4}{3}a^3$ で求めることができる。このことを利用し，図 2 の AO と OB と AB で囲まれた図形の面積を求めよ。
なお，AB の式は $y=2x+3$ である。
また、$a>0$ である。

〔法政大女子高，73〕

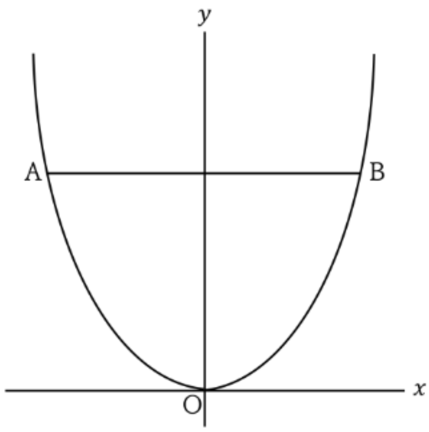


図 1

A. $\frac{45}{4}$

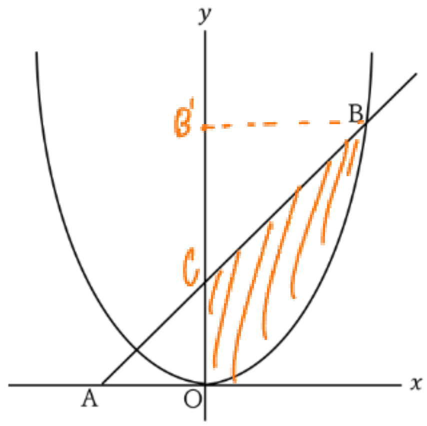


図 2

ABとy軸の交点をCとしたとき
斜線部をS_1，
△AOCをS_2，
Bとy座標が同じy軸上の点をB'としたときの S_1と△BB'Cとの和をS_3としたとき，

$x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$

$\therefore\ B(3,9),\ A(-\frac{3}{2},0)$

$C(0,3)$

より

S_3は~~与式~~より

$S_3=\frac{4}{3}\cdot 3^3\cdot\frac{1}{2}$

$=18$

$S_2=18-(3\times 6\times\frac{1}{2})$

$=9$

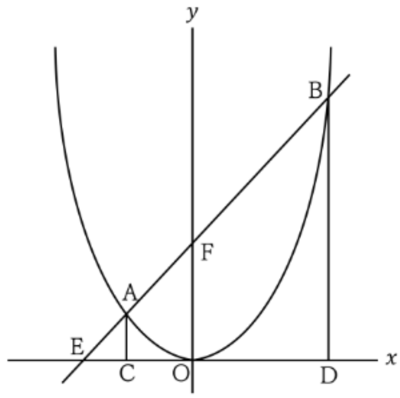
$S_1=\frac{3}{2}\times 3\times\frac{1}{2}$

$=\frac{9}{4}$

$\therefore\ 9+\frac{9}{4}=\frac{45}{4}$

【2】 a，b は正の定数とする。放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=ax+b$ が 2 点 A，B で交わっている。A，B から x 軸にそれぞれ垂線 AC，BD を下ろす。
また，直線 $y=ax+b$ と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ E，F とする。AC：BD = 1：9 のとき，次の問いに答えよ。

〔東大寺学園高，76〕



(1) OC：OD を求めよ。

A. 1：3

C$(-c, 0)$とした とき
A$(-c, ac^2)$
B$(3c, 9ac^2)$
よって
$c:3c=1:3$

(2)　$\frac{b}{a}$ の値を求めよ。

A、$\frac{3}{4}$

(1)より

$A(-c,\ ac^2)$
$B(3c,\ 9ac^2)$

また、
$y=ax+b$ 上の点として考えると、

$A(-c,\ -ac+b)$
$B(3c,\ 3ac+b)$

$\therefore$

$$\begin{cases} ac^2 = -ac+b \\ 9ac^2 = 3ac+b \end{cases}$$

$8ac^2 = 4ac$

$c = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}a = -\frac{1}{2}a + b$

$\frac{3}{4}a = b$

$\therefore$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{4}a}{a}$$

$$= \frac{3}{4}$$

(3)　面積比 △OAB：△OEF を求めよ。

A. $8:3$

(2) より

$C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}a\right)$

$B\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}a\right)$

$b = \frac{3}{4}a$

∴

$\triangle OAB = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \times \frac{3}{4}a \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4}a$

また、

$AB : y = ax + b$

$= ax + \frac{3}{4}a$

∴

$E\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

よって

$\triangle OEF = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}a \times \frac{1}{2}$

$= \frac{9}{32}a$

∴

$\frac{3}{4}a : \frac{9}{32}a = 24 : 9$

$= 8 : 3$

【3】 原点をOとする座標平面上に，放物線 $y=ax^2$ があり，この放物線上に2点P，Qがある。点Pの座標は（-2，-3），点Qの x 座標は正である。
また，点Qを通って x 軸に平行な直線と y 軸との交点をRとする。△OQRの面積は△OPRの面積の2倍であるとき，次の問いに答えよ。

〔市川高等学校（平成28年度）〕

（1） 定数 a の値，点Qの座標を求めよ。

A. $a=-\frac{3}{4}$, Q(4, -12)

$-3=a\cdot(-2)^2$

$a=-\frac{3}{4}$

△OQR = 2△OPR

∴

|Qのx座標|は|Pのx座標|の2倍であるため

Q(4, -12)

(2) 直線 QR と放物線との交点のうち，点 Q と異なる点を T とする。点 P を通り，四角形 OPTR の面積を二等分する直線の式を求めよ。

A. $y=-\frac{27}{4}-\frac{33}{2}$

$P(-2,-3)$

$R(0,-12)$

$T(-4,-12)$

Pとy座標が同じy軸上の点をP'としたとき，

四角形OPTRは，△OPP'，四角形PP'RTに分けることができる

$\triangle OPP' = 3\times 2\times \frac{1}{2}$

$= 3$

四角形 $PP'RT = 6\times 9\times \frac{1}{2}$

$= 27$

∴

四角形 $OPTR = 30$

点Pを通る直線とTRとの交点のx座標を $-k$ としたとき，

$9\times(4-k)\times\frac{1}{2}=15$

$36-9k=30$

$k=\frac{2}{3}$

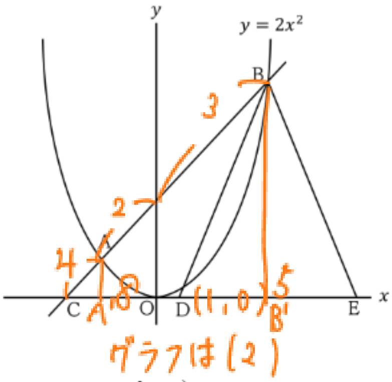
$\frac{4}{3}\to 9$

∴

$\left(-\frac{2}{3},\ -12\right)$ を通るため

$y=-\frac{27}{4}x-\frac{33}{2}$

【4】　原点を O とする座標平面上に放物線 $y=2x^2$ があり，$y=ax+b$ との交点を x 座標が負の数である方を A とし，もう一方の交点を B とし，x 軸との交点を点 C とする。また，x 軸上に点 C の x 座標より大きい任意の場所に点 D，点 E がある。点 D の x 座標を d，点 E の x 座標を e とする。また，点 D と点 E は、点 B から引かれた y 軸に平行な直線と線対称である。



このとき，次の問いに答えよ。($a>0$ ，$b>0$ ，$d<e$ とする)

(1)　$a=1$，$b=1$ であるとき，次の問いに答えよ。

①　点 A と点 B の座標を求めよ。

A、$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，$B(1, 2)$

$y=2x^2$ ，$y=x+1$

$2x^2=x+1$

$2x^2-x-1=0$

$(2x+1)(x-1)=0$

$x=-\frac{1}{2}$ ，1

$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$B(1, 2)$

② 点 D と点 C が一致しているとき，△DBE の面積を求めよ。

A. 4

$C(-1, 0)$
$B(1, 2)$

$\triangle ECB = (2 \times 2) \times 2 \times \frac{1}{2}$
$= 4$

③　△BCD が CD = BD の二等辺三角形のとき，△BAD の面積を求めよ。

A. $\frac{1}{2}$

$D(d, 0)$

$BD^2 = 2^2 + (1-d)^2$

$CD = 1+d$

$BD = CD$ より

$2^2 + (1-d)^2 = (1+d)^2$

$4 + 1 - 2d + d^2 = 1 + 2d + d^2$

$4d = 4$

$d = 1$

$D(1, 0)$ より

$\triangle BAD = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

(2) △BCE = 78, BDE = 30, ~~D(0, −1)~~ D(1, 0) である。また，AB と y 軸の交点を F としたとき，AF : BF = 2 : 3 となる。
このとき，点 C の座標を求めよ。また，a ，b の値をそれぞれ求めよ。

A. $C(-7, 0)$, $(a, b) = \frac{7}{3}, \frac{49}{3}$

$A(-2t, 8t^2)$
$B(3t, 18t^2)$

A, B から x 軸に下ろした垂線と、
x 軸の交点を A', B' としたとき、
$AA' : BB' = 4 : 9$
$\therefore$
$A'C : B'C = 4 : 9$
$A'C : A'B' = 4 : 5$
$\therefore$
$CO : B'O = 2 : 1$
$DC : B'D = 8 : \frac{5}{2}$
$= 16 : 5$
$CO : B'O = 14 : 7$
… ♪

よって
♪の比における 2 が座標上の 1 と分かるため
$DC = 16 \times \frac{1}{2} = 8$ $8 - 1 = 7$ $C(-7, 0)$ …解①

$C(-6t, 0)$ より $t = \frac{7}{6}$

また、

$AB: y = 2tx + 12t^2$
より
$a = 2t$, $b = 12t^2$ より
$a = \frac{7}{3}$, $b = \frac{49}{3}$ …解②