МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Моделирование уравнений динамики и кинематики**

**твердого тела**

Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ

по дисциплине

«Проектирование систем управления подводными РТК»

для студентов программ магистратуры



Севастополь

2022

УДК 681.5

**Моделирование уравнений динамики и кинематики твердого тела:** Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Проектирование систем управления подводными РТК» для студентов программ магистратуры / Разраб. А.А. Кабанов – Севастополь: Изд-во СевГУ, 2022. – 11 с.

Целью методических указаний является оказание помощи студентам при выполнении лабораторных работ, целью которых является приобретение навыков моделирования систем управления подводными РТК.

Методические указания предназначены для студентов программ магистратуры по направлениям 15.04.06 – Мехатроника и робототехника, 27.04.04 –Управление в технических системах.

Рецензент:

В.А. Крамарь, д-р. техн. наук, профессор.

**СОДЕРЖАНИЕ**

[1. Цель работы 4](#_Toc119974508)

[2. Краткие теоретические сведения 4](#_Toc119974509)

[2.1. Математическая модель движения твердого тела 4](#_Toc119974510)

[2.2. Определение параметров динамики 6](#_Toc119974511)

[3. Задание на работу 8](#_Toc119974512)

[4. Содержание отчета и порядок защиты работы 10](#_Toc119974513)

[5. Контрольные вопросы 10](#_Toc119974514)

[БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 10](#_Toc119974515)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 11](#_Toc119974516)

# 

# 1. Цель работы

**Целью данной работы** является исследование технологии компьютерной реализации и моделирования движения твердых тел. В лабораторной работе рассматриваются вопросы компьютерной реализации моделей движения в терминах физики твердого тела средствами пакета Matlab.

# 2. Краткие теоретические сведения

## 2.1. Математическая модель движения твердого тела

Общие координаты твердого тела определяются в геоцентрической системе координат по SNAME-нотации [1]:

где определяет расположение при продольном, боковом и вертикальном перемещении, соответственно, а вектор определяет углы Эйлера: крен, тангаж и рыскание, соответственно.

{I}

surge

sway

heave

{B}

roll

yaw

pitch

Рисунок 1 – Схема позиционирования системы тела

Вектор скоростей выражается в системе координат, связанной с телом. Скорости по объявленной выше нотации следует записывать как

Таблица 1 – SNAME-нотация

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| DOF | Forces and Moments | Velocities | Positions and Euler angles |
| Surge |  |  |  |
| Sway |  |  |  |
| Heave |  |  |  |
| Roll |  |  |  |
| Pitch |  |  |  |
| Yaw |  |  |  |

При условии отсутствия гидродинамических эффектов, создаваемых водной средой, возможно записать выражение для динамики тверддого тела в следующей форме

где – матрица инерции твердого тела,

– матрица Кориолиса твердого тела,

– вектор гравитационных сил и моментов,

– вектор (сил и моментов) внешних возмущений и управлений, приложенных к твёрдому телу.

Стоит отметить, что определенной физической интерпретации интеграла от вектора (2) не существует, поэтому для получения (1) необходимо предварительно связать скорости инерциальной системы и системы тела. Связь между линейными и угловыми скоростями в системе отсчета транспортного средства и в мировой (инерциальной) системе определяется следующим образом

где – матрица поворота, полученная из углов Эйлера,

– Якобиан, связующий угловые скорости мировой системы отсчета и системы тела.

Следует остановиться на матрице поворотов. Принято описывать тремя основными поворотами вокруг осей , и (соглашение ). Обратите внимание, что порядок, в котором выполняются эти вращения, не является произвольным. В приложениях наведения, навигации и управления обычно используется соглашение от (Inertial) до (Body), заданное в терминах углов Эйлера , и для вращений. Эта матрица обозначается .

Транспонирование матрицы подразумевает, что тот же результат получается путем преобразования вектора из в , то есть путем изменения порядка преобразования на обратный. Эта последовательность вращения математически эквивалентна

### 2.2. Определение параметров динамики

Матрица в уравнении (3) константная, симметричная и положительно определенная (). Величины, наполняющие ее, во многом зависят от формы рассматриваемого объекта и в самом общем случае имеет следующий вид [1]

где – масса твердого тела,

– это единичная матрица размерности ,

– это тензор инерции в системе отсчета данного тела,

– вектор от начала координат до центра тяжести твердого тела,

– оператор преобразования вектора в кососимметричную матрицу:

в развернутом виде:

По Фоссену [3] матрица в общем случае определяется из блоков матрицы инерции . В данном случае , тогда

Помимо этого, возможен аналогичный, более комплексный способ расчета , без знания матрицы инерции :

В работе [3] для расчета автор использует выражение

где – масса судна включая воду в пространстве,

– ускорение свободного падения.

# 3. Задание на работу

Задание заключается в построении модели движения твердого тела с использованием средств Matlab и Simulink. Необходимо реализовать модель динамики и кинематики (рис. 2), предварительно определив параметры (7, 9-11), затем выполнить моделирование при воздействии произвольного вектора сил и моментов, представить и провести анализ полученных результатов. Также, следует оценить адекватность модели, в том числе, при отсутствии гравитационных сил и моментов .

В качестве результатов моделирования достаточно предоставить графики из Matlab-скрипта и Simulink-схемы для произвольно выбранного управляющего воздействия, рассчитанных смешанных положений (1) и их производных (4), а также для скоростей, выраженных в системе отсчета тела (2).

Варианты форм твердых тел для моделирования представлены в таблице 2. Вариант задания студента определяется его порядковым номером в списке группы. Для всех представленных вариантов полагать, что центр масс совпадает с началом координат.

При определении (7) необходим расчет тензора инерции. В источнике [4] приведены формулы расчета тензоров для тел различных форм.

Рисунок 2 – Схема решения уравнений (3) и (4)

Перед формированием отчета необходимо предварительно убедиться в идентичности результатов, полученных в Matlab и Simulink. Результаты этой работы будут использованы при выполнении последующих работ, связанных с построением моделей динамики подводных аппаратов и затем реализацией алгоритмов управления на данных моделях.

Таблица 2 – Варианты заданий

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ варианта** | **Форма тела** | **Параметры** | | |
| 1 | Полнотелая сфера |  |  | |
| 2 |  |  | |
| 3 |  |  | |
| 4 |  |  | |
|  |  |  | | |
| 5 | Правильный полнотелый конус |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
|  |  |  |  | |
| 9 | Полнотелый цилиндр |  |  |  |
| 10 |  |  |  |
| 11 |  |  |  |
| 12 |  |  |  |

4. Содержание отчета и порядок защиты работы

Выполнение и защита лабораторной работы производится каждым студентом индивидуально. Защита результатов лабораторной работы осуществляется при наличии работающей компьютерной модели и полностью оформленного отчета.

Отчет должен включать в себя следующие разделы

* титульный лист;
* цель работы;
* постановка задачи;
* сведения о выполнении заданий (включая при необходимости схемы алгоритма работы программ, тексты программ, результаты работы программ);
* выводы.

Защита работы состоит в следующем:

* предъявление работающей компьютерной модели;
* предъявление отчета, оформленного в соответствии с требованиями;
* ответы на вопросы по теоретической и практической части работы.

5. Контрольные вопросы

1. Что такое модель кинематики?

2. Что такое модель динамики?

3. Чем обусловлена связь моделей динамики и кинематики?

4. Какие системы отсчета используются для моделирования движения тел?

5. Что такое углы Эйлера? Какие трудности может вызывать их использование?

6. Для чего используются матрицы вращения?

7. Как связаны переменные, характеризующие положение объекта в разных системах координат?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Fossen T.I. Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control. 2nd. Edition: Wiley, 2021. ISBN-13: 978-1119575054.

2. Antonelli G., Antonelli G. Underwater robots: motion and force control of vehicle manipulator systems / G. Antonelli, G. Antonelli, 2. ed-е изд., Berlin [u.a.]: Springer, 2006.

3. Fossen T. I. Guidance and control of ocean vehicles / T. I. Fossen, Chichester; New York: Wiley, 1994. 480 c.

4. Wikipedia URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List\_of\_moments\_of\_inertia (дата обращения: 01.09.2022).

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Пример Matlab-скрипта для расчета параметров динамики твердого тела

%% ПАРАМЕТРЫ ТВЕРДОГО ТЕЛА

m = ...; % масса тела [кг]

I0 = ...; % тензор инерции тела [кг \* м^2]

r\_g\_b = ...; % координаты центра масс [м]

%% РАСЧЕТ ЯКОБИАНА J(n) (4)

% матрица (5)

J\_k\_o = @(eta)[ 1 0 -sin(eta(5)); ...

0 cos(eta(4)) cos(eta(5))\*sin(eta(4)); ...

0 -sin(eta(4)) cos(eta(5))\*cos(eta(4)) ];

% матрица (6)

R\_I\_B = @(eta)[ cos(eta(6))\*cos(eta(5)) ...

sin(eta(6))\*cos(eta(5)) ...

-sin(eta(5)); ...

-sin(eta(6))\*cos(eta(4)) + cos(eta(6))\*sin(eta(5))\*sin(eta(4)) ...

cos(eta(6))\*cos(eta(4)) + sin(eta(6))\*sin(eta(5))\*sin(eta(4)) ...

sin(eta(4))\*cos(eta(5)); ...

sin(eta(6))\*sin(eta(4)) + cos(eta(6))\*sin(eta(5))\*cos(eta(4)) ...

-cos(eta(6))\*sin(eta(4)) + sin(eta(6))\*sin(eta(5))\*cos(eta(4))

cos(eta(4))\*cos(eta(5)) ];

J = @(eta)[ R\_I\_B(eta) zeros(3); ...

zeros(3) J\_k\_o(eta) ];

%% РАСЧЕТ МАТРИЦЫ M\_RB (7)

% преобразование в кососимметричную матрицу (8)

S = @(x)[ 0 -x(3) x(2); ...

x(3) 0 -x(1); ...

-x(2) x(1) 0 ];

M\_RB = [ m\*eye(3) -m\*S(r\_g\_b); ...

m\*S(r\_g\_b) I0 ];

%% РАСЧЕТ C\_RB(v) (9)

M = M\_RB;

M11 = M(1:3,1:3); M12 = M(1:3,4:6);

M21 = M(4:6,1:3); M22 = M(4:6,4:6);

C\_RB = @(v)[ zeros(3) -S(M11\*v(1:3)+M12\*v(4:6)); ...

-S(M11\*v(1:3)+M12\*v(4:6)) -S(M21\*v(1:3)+M22\*v(4:6)) ];

%% РАСЧЕТ g(n) (11)

x\_g = r\_g\_b(1); y\_g = r\_g\_b(2); z\_g = r\_g\_b(3);

g = @(eta)[ (m\*9.81)\*sin(eta(5));

-(m\*9.81)\*cos(eta(5))\*sin(eta(4));

-(m\*9.81)\*cos(eta(5))\*cos(eta(4));

-(y\_g\*m\*9.81)\*cos(eta(5))\*cos(eta(4)) + ...

(z\_g\*m\*9.81)\*cos(eta(5))\*sin(eta(4));

(z\_g\*m\*9.81)\*sin(eta(5)) + ...

(x\_g\*m\*9.81)\*cos(eta(5))\*cos(eta(4));

-(x\_g\*m\*9.81)\*cos(eta(5))\*sin(eta(4)) - ...

(y\_g\*m\*9.81)\*sin(eta(5)) ];

Заказ № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_г.

Изд-во СевГУ