代数教程

A Course in Algebra

温贝格（E. B. Vinberg） 著[1]

中国科学院大学 张远航 译[2]

2016 年 9 月 19 日

[1]据 2003 年 AMS 版译出.

[2]zhangyuanhang15@mails.ucas.ac.cn

目录

前　　言

我写作本书的动机是 1992 至 1994 年间在莫斯科独立大学数学学院教授的一门两年的代数课程. 学生的热情和较少的人数使我可以把讲授的难度保持在高于莫斯科国立大学数学力学系通常的教学难度以上，并涉及一些超出一般大学这门课程内容的话题. 然而撰写这本书的过程中我用到了在莫斯科国立大学的教学经验，因此最终定稿只有部分内容与我在独立大学讲授的课程相关.

第一章至第七章及第八章的部分多少对应于莫斯科国立大学数学力学系第一年代数课的内容. 其余章节则覆盖甚至是超出了第二年代数课的内容. 这些章节主要是供专攻代数的学生使用.

注意，第七章主要介绍欧几里得空间、仿射空间及射影空间中的三种几何. 但是，这一章不应视为对几何知识的说明，它介绍的是几何的代数学方法.

前四章中，我尝试介绍得足够具体，从而适合如莫斯科国立大学数学系新生这样的读者.（不过集合和映射的语言从书的最开始便不加解释地使用了.）后续章节中，我便放开手脚跳过了一些可以很容易重新补足的细节，因为在我看来，读者应逐步培养其数学素养.

本书几乎不包括技术上困难的证明. 我按照自己对数学的看法，尝试着以概念性的证明取代计算和繁琐的推导. 某些读者可能觉得这种风格难以接受，不过对学生来说，花些功夫接受新观念对于解答书中没有涉及的问题来说是值得的.

英译本中，书末的参考文献已加以修订. 它自然不是完整的，某种程度上讲甚至有些随意，但我相信对读者或许有用.

我要对所有莫斯科国立大学数学力学系高等代数教研室的现任和前任成员表示感谢，他们帮助我形成了属于自己代数教学方法.

英译本中修正了数处错印和谬误，并加入了一些解释.

E. B. 温贝格　　　　2002 年 11 月于莫斯科

第 1 章　代数结构

初识一个人，你只能记住他们的姓名和相貌. 过后再见时，你便会对他们有更深入的了解，甚至和他们成为朋友.

第一章只向你介绍书中涉及到的多数代数结构. 想要更深入地理解它们还需一段时间，期间需要阅读和解题.

1.1　序言

如果能精确定义代数的讨论对象，那么它必然是对代数结构的研究. 代数结构 (algebraic structure) 是指定义有运算的集合. 集合 M 上的一个运算 (operation) 是指映射

$$M \times M \to M,$$

也就是一种为 M 中任意两元素指定一个 M 中同类元素的法则. 这些元素可以是数，也可以是其他对象.

下面这些数集是代数结构著名的重要例子. 它们定义有加法和乘法运算：

$\mathbb{N}$，全体自然数的集合；

$\mathbb{Z}$，全体整数的集合；

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$，全体非负整数的集合；

$\mathbb{Q}$，全体有理数的集合；

$\mathbb{R}$，全体实数的集合；

$\mathbb{R}_+$，全体非负实数的集合.

我们作一个注记，不是每个数集上都定义有加法和乘法运算. 例如，负数的集合上就没有定义乘法，因为两个负数之积是正数. 在无理数的集合上，乘法和加法都没有定义，因为两个无理数的和与积都可能是有理数.

下面是一些元素非数的代数结构的例子：

例 1.1. 令 M, N, P 为三个集合，并设

$$f : N \to M, \quad g : P \to N$$

为其间的映射.f 和 g 的**乘积** (product) 或称**复合** (composite) 是映射

$$fg : P \to M,$$

定义为

$$(fg)(a) = f(g(a)) \quad \forall a \in P,$$

即 g 和 f 依次作用的结果. 特别地，若 $M = N = P$，我们就得到全体 M 到自身映射的集合上的一个运算. 在一类称为群的代数结构中，这个运算给出了许多重要的例子. 例如，根据欧氏几何的公理，平面的两个运动的乘积仍是一个运动. 考虑全体这类运动的集合上的乘法运算，就得到了称为平面的运动群的代数结构.

例 1.2. 三维空间中，全体向量连同加法和点积运算就是有两个运算的代数结构的一个例子. 但是要注意，内积不是上面定义的这类运算. 事实上，它的运算结果和原向量不属于同一个集合. 代数中也会考虑内积这样更为一般的运算，但我们暂时不去管它.

上面的例子都是自然的，因为它们都是在真实世界或是数学的内在发展中出现的. 但事实上可以考虑任意集合上的任意运算. 例如，我们可以把集合 $\mathbb{Z}_+$ 和这样一个运算一同考虑，对任两个数，它给出十进制表示中相同数码的个数. 尽管如此，只有少数代数结构是我们真正感兴趣的.

此外，代数研究者只对可以用其特定运算描述的代数结构和元素感兴趣. 同构的概念给出了这一观点的正式表述.

定义 1.3. 设 M, N 为两个集合，分别定义了运算 $\circ$ 和 $*$. 称代数结构 $(M, \circ)$ 和 $(N, *)$ 是**同构的**，如果存在双射

$$f : M \to N$$

使得

$$f(a \circ b) = f(a) * f(b)$$

对一切 $a, b \in M$ 成立. 我们把这一事实记作 $(M, \circ) \simeq (N, *)$. 映射 f 称为 $(M, \circ)$ 与 $(N, *)$ 的一个**同构**.

我们类似地定义有两种或更多种运算的代数结构之间的同构.

例 1.4. 映射

$$a \mapsto 2^a$$

是带有加法运算的实数集与带有乘法运算的正实数集之间的同构. 事实上,

$$2^{a+b} = 2^a 2^b.$$

除了基数 2 外我们也可以考虑任意不为 1 的正基数. 这表明两个同构的代数结构之间可能存在许多不同的同构.

例 1.5. 设 M 为平面沿某固定直线的平移全体. 记实数 a

1.2 阿贝尔群

1.3 环和域

1.4 子群、子环和子域

1.5 复数域

1.6 剩余类环

1.7 向量空间

1.8 代数

1.9 矩阵代数

第 2 章　线性代数基础

第 3 章　多项式代数基础

第 4 章　群论基础

4.1　定义及例子

4.2　几何与物理中的群

4.3　循环群

4.4　生成集

4.5　陪集

4.6　同态

第 5 章　向量空间

第 6 章　线性算子

6.1　线性算子的矩阵

6.2　特征向量

6.3　欧几里得空间上的线性算子与双线性函数

6.4　若尔当标准型

可以证明，我们在前一节中考虑的特殊线性算子，如对称算子、埃尔米特算子和酉算子都能化成对角型. 一般地，??中描述的这种约化法受到制约.

首先，特征多项式不一定能分解成线性因子，即可能有少于 n 个根. 复数域上的线性算子则没有这个问题. 对于实数域上的线性算子，我们可以考虑其复化，这样就某种程度上排除了问题：选取一个合适的复向量基底，就可以理解原算子在实空间上的作用. 例如，我们在 6.2 节中看到，每个虚特征向量都对应了是空间的一个二维不变子空间. 在 9.5 节中，我们将证明一般情形下也可以作类似的延拓.

第二个障碍是特征空间的维数可能小于特征多项式对应的根的重数. 这种情况下我们就不得不放弃把矩阵完全对角化的追求. 不过，如果特征多项式能分解成线性因子，我们就可以把矩阵化成所谓的若尔当标准型，它和对角阵差别不大. 这就是本节的主题.

既然仅有特征向量是不够的，我们自然需要考虑一些更为一般的向量.

定义 6.1. 线性算子 $\mathcal{A}$ 对应于数 $\lambda \in K$ 的**根向量**是一个向量 $e \in V$，使得

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m e = 0$$

对某个 $m \in \mathbb{Z}_+$ 程璐. 满足这一条件最小的 m 称为根向量 e 的**高**.

特别地，特征向量是高为 1 的根向量. 把 0 向量视作高为 0 的根向量（对应于任意 λ）是有价值的.

6.5 线性算子的函数

第 7 章　仿射空间与射影空间

7.1　仿射空间

在初等几何中，我们处理的不仅有向量，还有点（实际上大多数时间我们都在和点打交道）. 仿射空间的公理同时反映出点和向量的基本性质，就像初等几何中，向量空间的公理能反映出向量的基本性质一样.

在初等几何“通常的”欧氏空间中，我们可以定义点和向量的加法运算，即点 p 和向量 x 的和是向量 x 从 p 出发时的终点. 这一运算的性质是下面定义的基础.

令 V 为域 K 上的向量空间.

定义 7.1. 与向量空间 V 相关联的**仿射空间** (affine space) 是一个集合 S，其上定义了满足如下条件的加法运算 $S \times V \to S$：

(i) $p + (x + y) = (p + x) + y \quad (p \in S, x, y \in V)$;

(ii) $p + 0 = p \quad (p \in S$，0 是零向量)；

(iii) 对任意 $p, q \in S$，存在唯一的向量 x 使得 $p + x = q$.

集合 S 的元素称为点. 条件 (iii) 中的向量 x 称为**连接点** p **和点** q **的向量**，记作 $\overline{pq}$. 条件 (i) 意味着

$$\overline{pq} + \overleftarrow{qr} = \overline{pr} \quad \forall p, q, r \in S.$$

每个向量空间 V 都可以视作仿射空间，如果我们把向量同时作为向量和点考虑，并把向量和点的加法运算定义为向量的加法. 这里，向量 $\overline{pq}$ 是向量 p 和 q 的差.

反过来，如果我们在仿射空间 S 中固定一点 o（即“原点”，origin），我们就可以把点 p 与其**位置向量** (position vector) $\overline{op}$ 等同起来. 这样一来，向量和点的加法就成为了熟悉的向量加法. 这种把点和向量等同的做法称为仿射空间的**向量化** (vectorization).（当然，这与原点的选取有关.）

仿射空间的维数定义为相应的向量空间的维数.

7.2 凸集

7.3 仿射变换及运动

7.4 二次曲面

7.5 射影空间

第 8 章　张量代数

8.1　向量空间的张量积

8.2　向量空间的张量代数

8.3　对称代数

8.4　格拉斯曼代数

第 9 章　交换代数

第 10 章　群

第 11 章　线性表示与结合代数

第 12 章　李　群

部分习题答案

参考文献

索　　引