

MASTER SCIENCE DE LA MATIÈRE
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

rapport bibliographique 2013
Alexis Morvan
M1 Physique

L'effet Hall quantique : une introduction à l'ordre topologique

L'objectif de ce projet bibliographique est d'introduire la notion d'ordre topologique au travers de l'étude d'un phénomène physique de première importance dans le paysage de la physique moderne : l'effet Hall quantique. Le problème est d'abord traité sous l'angle de la quantification du mouvement de particules chargées en niveaux de Landau. Ensuite, le problème est traité de façon à faire apparaître l'aspect topologique en étudiant l'effet d'un champ magnétique sur les fonctions d'onde de Bloch d'un réseau.

Ce projet Bibliographique à été supervisé par David Carpentier.

1^{er} mai 2013

Table des matières

1	Introduction : Effet Hall classique et quantique	1
1.1	Effet Hall classique	1
1.2	L'effet Hall quantique entier : l'expérience de K.V.Klitzing	2
2	Effet Hall Quantique : première approche	3
2.1	Préliminaire : Invariance de jauge	3
2.2	Niveau de Landau	5
2.2.1	Mouvement classique	5
2.2.2	Quantification en niveau de Landau	6
2.3	Influence du désordre sur la quantification en niveau de Landau	8
2.4	Effets de bords	9
3	Aspects topologiques de l'effet Hall quantique	12
3.1	Électrons de Bloch soumis à un fort champ magnétique	12
3.2	Dérivation de la conductance de Hall	15
3.3	Monopole de Dirac	18
3.3.1	Quantification de la charge magnétique	18
3.3.2	Charge topologique	20
3.4	Classe topologique	21
4	Conclusion	22

1 Introduction : Effet Hall classique et quantique

1.1 Effet Hall classique

Avant de parler de l'effet Hall quantique, rappelons que l'effet Hall a été découvert par Edwin Hall lors de sa thèse en 1879. C'est un phénomène qui apparaît dans un conducteur lorsque celui-ci est soumis à un champ magnétique. Afin de rappeler les grandes lignes de ce phénomène, considérons un gaz bidimensionnel d'électrons de charge q et de masse m placé dans un conducteur en forme de ruban comme décrit figure 1.

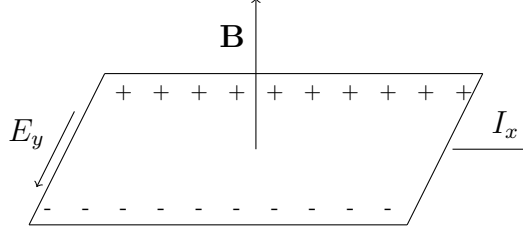


FIGURE 1 – Géométrie de Hall d'un conducteur.

La description d'un tel gaz peut être fait à l'aide du modèle de Drude où les électrons sont considérés comme des particules classiques et ponctuelles. Le modèle de Drude suppose de plus que les électrons subissent une force dissipative $-m\mathbf{v}/\tau$ avec τ la constante de relaxation. Le gaz d'électrons est soumis à un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ perpendiculaire, les équations du mouvement pour un porteur de charge en régime stationnaire s'écrivent :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m \frac{\mathbf{v}}{\tau} = 0, \quad (1.1)$$

En introduisant le courant surfacique $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$, nous obtenons une relation matricielle entre le champ électrique et le courant surface qui généralise la loi d'Ohm : $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ avec ρ le **tenseur de résistivité** :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_0 & -B/nq \\ B/nq & 1/\sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

où $\sigma_0 = nq^2\tau/m$ est la conductivité de Drude en champ nul.

La géométrie de la figure 1 ne permet pas la création d'un courant selon y dans le régime permanent donc $j_y = 0$, et le champ électrique s'écrit alors :

$$E_x = \frac{1}{\sigma_0} j_x, \quad E_y = \frac{B}{nq} j_x. \quad (1.2)$$

Ainsi, une différence de potentiel entre les deux extrémités du ruban crée un champ électrique qui à son tour crée un courant I selon x . Comme nous sommes en présence d'un champ magnétique, ce courant induit un champ électrique dans la direction y et donc crée une tension entre les deux bords du ruban appelée tension de Hall : $V_H = LE_y$ où L est la largeur de l'échantillon. Le courant I selon x est donné par $I = j_x L$, soit $V_H = \frac{B}{nq} I$. Nous pouvons alors définir une résistance transverse dite résistance de Hall :

$$R_H = V_H/I = \frac{B}{nq}, \quad (1.3)$$

C'est la mesure de cette résistance qui permet de déterminer soit le signe des charges et le nombre de porteurs de charge si on connaît le champ magnétique appliqué, soit le champ magnétique si on connaît le nombre de porteurs de charge (c'est le principe des sondes à effet Hall).

1.2 L'effet Hall quantique entier : l'expérience de K.V.Klitzing

En 1980, K. von Klitzing étudie le transport électrique d'un gaz d'électrons bidimensionnel (échantillon de Si-MOSFET). Il mesure simultanément la résistance longitudinale R_{xx} et la résistance de Hall $R_H = R_{xy}$ et s'aperçoit que pour des très basses températures 15 K et de fort champ magnétique (15 T), la résistance de Hall présente des plateaux et la résistance longitudinale s'annule exactement au mêmes endroit :

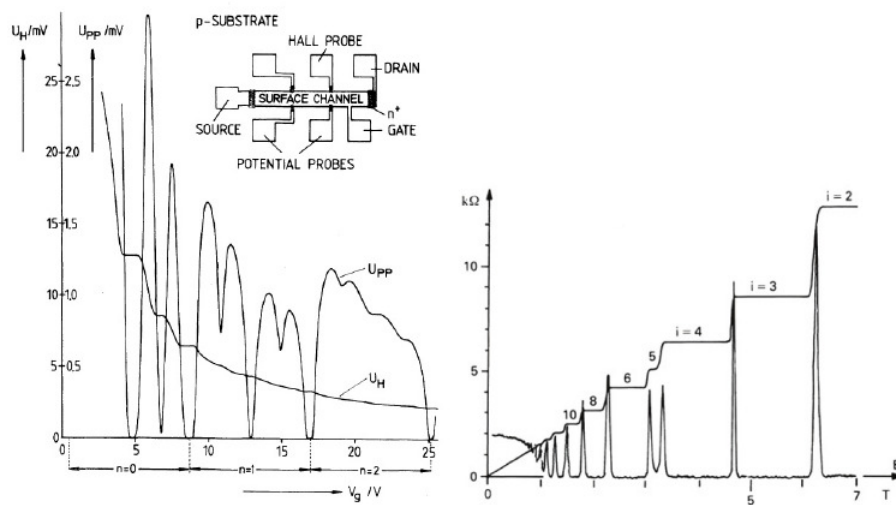


FIGURE 2 – à gauche, mesure de la résistance longitudinale U_{PP} et transversale U_H dans un échantillon de Si-MOSFET sous champ magnétique publiée par Klitzing en 1980 VON KLITZING, DORDA et PEPPER 1980. A droite une mesure plus récente de l'effet Hall entier.

Dans l'article *New method for high-accuracy determination of the fine structure constant based on quantized hall resistance* VON KLITZING, DORDA et PEPPER 1980, K. von Klitzing montre que cette quantification de la résistance de Hall correspond à :

$$R_H = \frac{h}{Ne^2} \quad \text{avec } N \text{ un entier.} \quad (1.4)$$

et met en évidence le caractère fondamental de cette quantification : celle-ci ne dépend que des constantes universelles de la physique, et notamment, donne un accès direct à la constante de structure fine $\alpha = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{e^2}{h}$.

C'est cette quantification que nous proposons d'expliquer, et de montrer qu'elle mène de façon naturelle à la notion d'ordre topologique.

1. μ_0 et c sont des constantes fixé par conventions à des valeurs fixes.

2 Effet Hall Quantique : première approche

Dans cette section, je commence par un bref préliminaire sur les invariances de jauge, concept central de l'effet Hall quantique qui sera réutilisé dans la section suivante. Je décris ensuite l'effet Hall quantique à l'aide de la quantification des niveaux d'énergies d'une particule astreinte à se déplacer dans le plan et soumise à un fort champ magnétique. La quantification en niveau de Landau fondera cette interprétation. J'explique alors l'apparition des plateaux dans la conductivité ainsi que l'apparition des courants de bords.

2.1 Préliminaire : Invariance de jauge

Dans cette partie, nous nous proposons de décrire les changements de jauge et l'invariance par changement de jauge de l'électromagnétisme classique s'applique au cas de la mécanique quantique. Les résultats qui suivent peuvent être retrouvés dans le livre de NAKAHARA 2003 et celui de SAKURAI 1993. Rappelons qu'en mécanique classique le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) peut s'écrire localement² en fonction d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur : $\phi(x)$ et \mathbf{A} tels que :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.1)$$

Or, nous savons qu'ils ne sont pas uniques. Si nous considérons la transformation suivante dite de jauge :

$$\phi \mapsto \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (2.2)$$

nous voyons que les quantités physiques et observables que sont les champs magnétiques et électriques n'en sont pas affectés³. Or, c'est bien le champ électromagnétique que nous pouvons observer et mesurer. Ainsi, les quantités physiques *i.e.* observables et mesurables sont les quantités **invariantes de jauge**.

Exemple : le champ magnétique uniforme

Considérons un champ magnétique uniforme dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$: $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Ce champ magnétique peut être décrit par une jauge dite **jauge symétrique** :

$$\mathbf{A}_S = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2} = \frac{B}{2}(-y, x, 0). \quad (2.3)$$

Un calcul rapide nous montre que $\nabla \times \mathbf{A}_S = B\hat{\mathbf{z}}$. Nous pouvons donc utiliser cette jauge dans le cas d'un champ uniforme. Maintenant, si nous appliquons une transformation de jauge 2.2 avec $\chi = -\frac{Bxy}{2}$, nous obtenons un nouveau vecteur potentiel :

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_S + \nabla \chi = \frac{B}{2}(-y, x, 0) - \frac{B}{2}(y, x, 0) = B(-y, 0, 0). \quad (2.4)$$

De nouveau, un calcul rapide nous montre que $\nabla \times \mathbf{A}_L = B\hat{\mathbf{z}}$. Le champ \mathbf{B} est bien invariant par changement de jauge. La jauge que nous venons de définir est appelée jauge de Landau.

2. localement est ici à comprendre dans le sens où on ne peut pas toujours trouver de potentiel global. C'est ce qu'il se passe notamment dans l'effet Hall quantique.

3. En utilisant le formalisme Lagrangien des champs électromagnétiques, cette transformation ne change le Lagrangien que d'une différentielle d'une fonction ce qui ne change en rien les équations du mouvement d'Euler-Lagrange.

Elle est particulièrement adaptée pour les problèmes invariants par translation selon la direction $\hat{\mathbf{z}}$. C'est cette invariance de jauge des champs observables \mathbf{E} et \mathbf{B} qui nous amène à ne considérer que les quantités invariantes de jauge comme les bonnes quantités du problème physique. Une quantité dépendant de la jauge ne peut avoir de sens physique. Expérimentalement, cela correspondrait à une quantité qui varie suivant la façon dont on l'observe. La jauge est un outil de calcul souvent très pratique, mais il faut vérifier que les quantités calculées restent invariantes de jauge. Comme nous ne traitons dans ce rapport d'aucun cas où les variables dépendent du temps, nous allons supposer que tout est indépendant du temps et nous allons nous restreindre à l'étude de la transformation de jauge sans composante temporelle :

$$\phi \mapsto \phi, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\chi. \quad (2.5)$$

La question que nous nous posons alors est : quelles sont les quantités invariantes de jauge en mécanique classique ? Nous nous attendons alors que ces quantités restent invariantes de jauge en mécanique quantique.

Pour une particule dans un champ magnétique, la position \mathbf{r} est évidemment invariante de jauge (la force de Lorentz permet d'écrire la trajectoire uniquement avec les champs \mathbf{E} et \mathbf{B}). De la même façon, la vitesse, ou plutôt, en mécanique Hamiltonien le **moment cinématique** $\mathbf{\Pi} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ est invariant de jauge. Par contre, le **moment canonique** \mathbf{p} défini par les équations de Hamilton :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.6)$$

n'est en général pas un invariant de jauge.

En mécanique quantique, nous nous attendons à un comportement similaire, à savoir que $\langle \mathbf{r} \rangle$ et $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ soient invariants de jauge et que le moment canonique $\langle \mathbf{p} \rangle$ ne le soit pas.

Prenons un état quantique $|n\rangle$ en présence d'un champ \mathbf{A} fonction de l'opérateur position \mathbf{r} . Notons $|n'\rangle$ le même état dans une autre chose, *i.e.* associé au potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi. \quad (2.7)$$

Avec χ fonction de l'opérateur position. Pour que les moyennes sur ces états de \mathbf{r} et $\mathbf{\Pi}$ soient invariantes, il faut que :

$$\langle n | \mathbf{r} | n \rangle = \langle n' | \mathbf{r} | n' \rangle \quad (2.8)$$

$$\langle n | \mathbf{p} - e\mathbf{A} | n \rangle = \langle n' | \mathbf{p} - e\mathbf{A}' | n' \rangle. \quad (2.9)$$

Avec la condition supplémentaire que la norme soit préservée :

$$\langle n | n \rangle = \langle n' | n' \rangle. \quad (2.10)$$

Cette dernière condition nous impose immédiatement que l'opérateur qui envoie $|n\rangle$ sur $|n'\rangle$ soit un opérateur unitaire :

$$|n'\rangle = U|n\rangle. \quad (2.11)$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation 2.8 à l'aide de ces opérateurs :

$$U^\dagger \mathbf{r} U = \mathbf{r} \quad (2.12)$$

De plus, comme \mathbf{A} et χ ne sont fonction que de l'opérateur position, $U^\dagger \mathbf{A} U = \mathbf{A}$ et $U^\dagger (\nabla\chi) U = \nabla\chi$. Ce qui nous permet alors de réécrire l'équation 2.9

$$U^\dagger \mathbf{p} U = \mathbf{p} + e\nabla\chi \quad (2.13)$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur

$$U = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi\right) \quad (2.14)$$

convient. Ainsi, un changement de jauge va influencer les états propres de l'Hamiltonien. Et donc les fonctions d'onde :

$$\psi' = e^{\frac{ie}{\hbar}\chi}\psi. \quad (2.15)$$

Les courants et les densités sont donc invariants de jauge. Mais la fonction d'onde n'est pas un invariant de jauge dans le sens où un changement de jauge va modifier la phase de cette fonction d'onde. Il faut donc faire attention à cette subtilité pour manipuler les fonctions d'ondes.

2.2 Niveau de Landau

Dans ce qui suit, nous allons détailler le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique. Dans un premier temps dans un cadre classique puis dans le cadre de la mécanique quantique. Nous verrons enfin comment le désordre inhérent aux échantillons expérimentaux influe sur ces considérations.

2.2.1 Mouvement classique

Dans un premier temps, considérons un électron de charge $-e$ et de masse m placé dans un champ magnétique $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Les équations du mouvement, obtenues grâce à l'expression de la force de Lorentz $\mathbf{f} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ s'écrivent :

$$\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} \quad (2.16)$$

$$\ddot{y} = \omega_c \dot{x}. \quad (2.17)$$

où l'on a introduit la **pulsation cyclotron** : $\omega_c = \frac{eB}{m}$. Une manière élégante de résoudre ce système d'équations différentielles consiste à passer par le plan complexe en posant $z = x + iy$:

$$\ddot{z} = i\omega_c \dot{z} \quad (2.18)$$

Ce qui s'intègre immédiatement en :

$$z(t) = Z + re^{i\omega_c t + \phi} \quad (2.19)$$

Ainsi, un électron décrit un cercle de rayon r autour d'un **centre de guidage** $Z = (X, Y)$. On peut écrire alors la trajectoire réelle de l'électron :

$$x(t) = X + r \cos(\omega_c t + \phi), \quad (2.20)$$

$$y(t) = Y + r \sin(\omega_c t + \phi). \quad (2.21)$$

Afin de bien décomposer le mouvement, nous écrivons les coordonnées relatives : $(u_x, u_y) = (x(t) - X, y(t) - Y)$. Avec ces notations, la vitesse de la particule s'écrit simplement $\mathbf{v} = \omega_c(u_x, u_y, 0)$.

La quantification canonique se faisant par le biais du formalisme Hamiltonien, écrivons l'Hamiltonien d'un électron soumis à un champ magnétique. Celui-ci n'est rien d'autre que

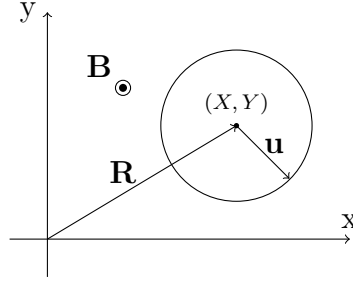


FIGURE 3 – Mouvement d'un électron dans un champ magnétique.

l'Hamiltonien d'une particule chargée en présence d'un champ potentiel \mathbf{A} tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Ainsi :

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}[(p_x + eA_x)^2 + (p_y + eA_y)^2] \quad (2.23)$$

En introduisant les variables relatives qui ne sont rien d'autre que les composantes du moment cinématique, on voit apparaître un oscillateur harmonique :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{\Pi}^2 = \frac{1}{2}m\omega_c^2(u_x^2 + u_y^2). \quad (2.24)$$

Notons que le moment cinématique est invariant de jauge et par conséquent constitue une grandeur physique. L'Hamiltonien sous cette forme est bien invariant de jauge (comme on pouvait s'y attendre).

2.2.2 Quantification en niveau de Landau

La description quantique du même système se fait via la quantification canonique :

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar, \quad [x, y] = [p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0. \quad (2.25)$$

Cependant, nous savons que l'opérateur de moment canonique \mathbf{p} n'est pas invariant de jauge. Nous allons choisir des opérateurs invariants de jauge pour diagonaliser notre Hamiltonien. Celui-ci ne dépendra alors pas de la jauge considérée. Le choix évident d'un tel opérateur est le moment cinématique : $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$. Nous avons vu que :

$$\mathbf{\Pi} = \omega_c(u_x, u_y, 0). \quad (2.26)$$

Nous allons donc utiliser les opérateurs u_x et u_y pour diagonaliser notre Hamiltonien. La relation de commutation $[x, y] = 0$ nous donne alors :

$$[u_x, u_y] = -[X, Y] \quad (2.27)$$

De plus, nous savons que les composantes du centre de guidage sont des constantes du mouvement donc : $[X, \mathcal{H}] = [Y, \mathcal{H}] = 0$. Nous allons donc utiliser ces deux opérateurs pour diagonaliser notre Hamiltonien avec les opérateurs u_x et u_y . Nous allons former un oscillateur

harmonique avec ces quantités :

$$[u, v] = \frac{1}{m^2 \omega_c^2} [p_x + eA_x, p_y + eA_y], \quad (2.28)$$

$$= \frac{e}{m^2 \omega_c^2} ([p_x, A_y] - [p_y, A_x]), \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{eB^2} (\partial_x A_y [p_x, x] - \partial_y A_x [p_y, y]), \quad (2.30)$$

$$= \frac{-i\hbar}{eB}. \quad (2.31)$$

Nous voyons apparaître une longueur caractéristique appelée **longueur magnétique** : $l_B \equiv \sqrt{\hbar/eB}$,

$$[u, v] = -il_B^2, \quad [X, Y] = il_B^2. \quad (2.32)$$

Nous pouvons donc introduire des opérateurs d'annihilation et de création :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}l_b}(u - iv), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_b}(u + iv), \quad (2.33)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}l_b}(X + iY), \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_b}(X - iY). \quad (2.34)$$

Ces deux jeux d'opérateurs fournissent bien les relations de commutations voulues : $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$ et $[a, b] = [a, b^\dagger] = 0$. L'Hamiltonien est alors un simple oscillateur harmonique à une dimension :

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.35)$$

Les énergies sont donc données par : $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$ où n est la valeur propre de l'opérateur $a^\dagger a$. On remarque que l'opérateur b n'intervient pas. Il y a donc une très grosse dégénérescence des énergies : l'énergie ne dépend pas du nombre quantique m associé à b . Nous pouvons écrire un état quelconque comme étant :

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0, 0\rangle \quad (2.36)$$

Nous pouvons alors tracer le spectre énergétique figure 4. Lorsque le champ magnétique appliqué est fort, l'énergie entre deux niveaux de Landau devient très grande devant l'énergie thermique, et un niveau de Landau plein se conduit comme un très bon isolant séparé des niveaux supérieurs par un gap d'énergie.

Il ne reste plus que le calcul de la dégénérescence de chaque niveau de Landau. La densité d'état d'un gaz d'électrons bidimensionnel est telle que $\rho_{2D}(\varepsilon) = m/(2\pi\hbar^2)$ par direction de spin. Cette densité d'état équirépartie va être modifiée lorsque le champ magnétique \mathbf{B} augmente, jusqu'à donner les niveaux de Landau discrets séparés par $\hbar\omega_c$. Nous pouvons donc supposer que les états du niveau de Landau vont, en champ nul se répartir sur une bande de largeur $\hbar\omega_c$ pour donner la densité d'état d'un gaz d'électrons bidimensionnel en champ nul. La densité d'état pour une direction de spin d'un niveau de Landau vaut ainsi : $\rho_{NL} = \hbar\omega_c m / (2\pi\hbar^2)$ soit,

$$\rho_{NL} = \frac{eB}{h} \quad (2.37)$$

Cette densité d'état est grande : pour un champ magnétique de 1 T, $\rho_{NL} = 2.10^{15} \text{m}^{-2}$.

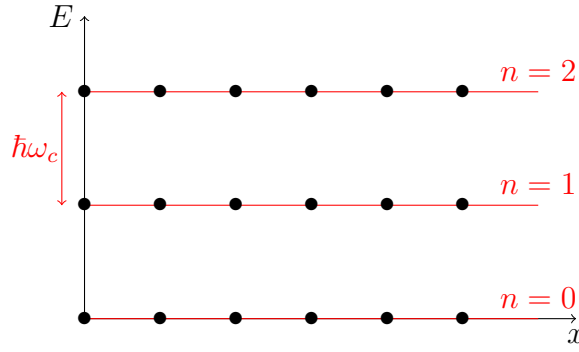


FIGURE 4 – Spectre énergétique des niveaux de Landau.

2.3 Influence du désordre sur la quantification en niveau de Landau

Nous souhaitons maintenant étudier l'effet d'un potentiel de désordre dû à des impuretés par exemple dans l'échantillon. L'effet de telles impuretés est d'introduire un potentiel électrique dans l'échantillon. Nous nous plaçons maintenant dans le cas d'un champ magnétique fort, tel que la longueur magnétique l_B soit petite devant la longueur caractéristique de variation de ce potentiel de désordre. Ainsi, les fonctions d'ondes étant de largeur spatiale l_B voient ce désordre comme un potentiel électrostatique V local et le désordre a donc pour résultat de faire se déplacer les électrons le long des équipotentielles. Celles-ci pouvant être fermées, le désordre va localiser les électrons autour des impuretés. Ceux-ci ne pourront alors bien évidemment pas participer au phénomène de transport.

Si maintenant on regarde l'effet de ce potentiel, il introduit un terme en $V_{\text{désordre}}(\mathbf{r})$ dans le spectre, ce qui conduit à déplacer aléatoirement les énergies des électrons d'un niveau de Landau, et donc à élargir les raies du spectre des niveaux de Landau comme on peut le voir figure 5.

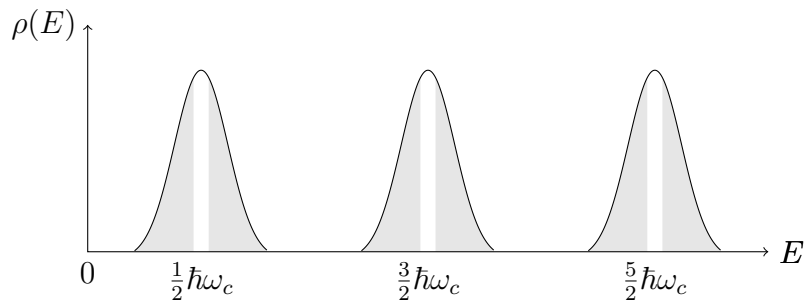


FIGURE 5 – Spectre énergétique des niveaux de Landau élargi par le potentiel de désordre. Les états localisés sont représentés en gris. Cette figure reprend la figure de D.YOSHIOKA 2002 p.34.

Les électrons localisés ne peuvent participer au transport électrique, ils ne contribuent pas non plus à la conductance de Hall.

2.4 Effets de bords

Maintenant que nous savons comment s'organise le spectre en énergie des électrons soumis à un fort champ magnétique, intéressons nous à l'effet de la géométrie finie. Pour cela, nous supposons que notre échantillon reste invariant selon la direction x mais possède des bords selon la direction y . Nous supposons que ces bords introduisent un terme potentiel $V(y)$ qui varie lentement devant la longueur magnétique l_b *i.e.*

$$l_B \frac{\partial V}{\partial y} \ll \hbar \omega_c. \quad (2.38)$$

Dans cette approximation, le spectre s'écrit simplement :

$$E(y) = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + V(y). \quad (2.39)$$

Ainsi, au centre de l'échantillon, les niveaux de Landau restent les mêmes niveaux que ceux décrits précédemment car le potentiel $V(y)$ y est nul, mais près des bords, à cause de ce potentiel de confinement, l'énergie augmente et dépend de la position près du bord. Ce spectre est représenté sur la figure 6. Nous voyons que typiquement, le potentiel chimique se

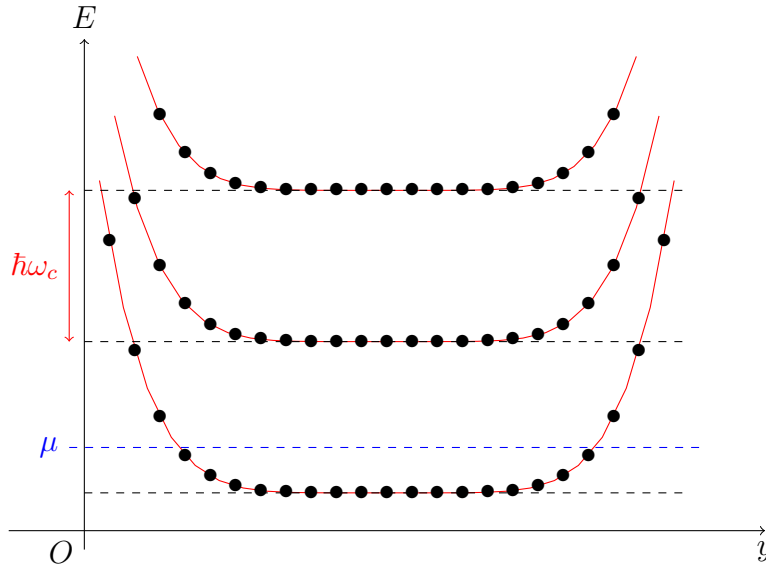


FIGURE 6 – Echantillon avec des bords idéaux.

situe entre deux niveaux de Landau. Comme la différence entre les niveaux de Landau est très grande devant les variations thermiques et les variations dues au désordre, les électrons qui ne sont pas sur le bord ne peuvent être excités, et seuls les états de bords peuvent être excités sur un niveau supérieur. Ainsi, le comportement de ce système au niveau du transport des électrons est entièrement déterminé par ces états de bords. Le nombre de canaux (états de bord) qui détermine le transport de l'échantillon est donc exactement le nombre de niveau de Landau remplis M .

Prenons maintenant une géométrie proche de celle utilisé par Von Klitzing : une géométrie à 4 terminaux (contre 6 terminaux pour l'expérience de K. Von Klitzing) représenté figure 7.

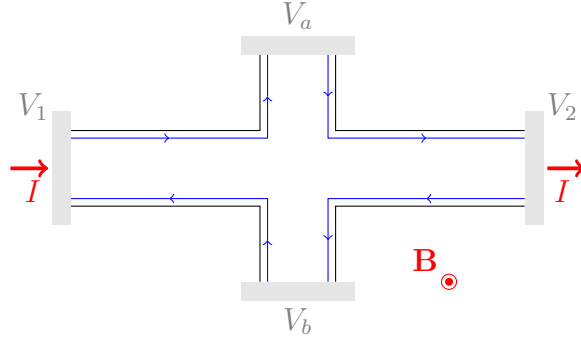


FIGURE 7 – Echantillon à quatre terminaux pour mesurer la résistance de Hall. En bleu est représenté un courant de bord (correspondant à un niveau de Landau rempli) .

Les deux terminaux (1) et (2) servent à injecter le courant dans l'échantillon. Comme nous avons vu qu'il ne peut y avoir diffusion le long des bords, la transmission entre chaque terminal relié par un courant de bord est parfaite. Ainsi $V_1 = V_a$ et $V_2 = V_b$. La résistance longitudinale est donc nulle :

$$R_L = \frac{V_a - V_b}{I} = 0. \quad (2.40)$$

Ensuite, le courant parcourant l'échantillon dans la direction x est donné par les contributions des deux bords. Pour chaque niveau de Landau, nous pouvons écrire le courant issu du terminal (1)⁴ :

$$I_{\rightarrow} = -e \sum_{k>0} \frac{v_k}{L} n_{FD}(\varepsilon_k + eV_1) \quad (2.41)$$

où n_{FD} est le taux d'occupation de la statistique de Fermi-Dirac. Le courant issu du terminal (2) s'écrit de même :

$$I_{\leftarrow} = -e \sum_{k<0} \frac{v_k}{L} n_{FD}(\varepsilon_k + eV_2) \quad (2.42)$$

Le courant total s'écrit alors :

$$I = I_{\rightarrow} + I_{\leftarrow} = -e \sum_{k>0} \frac{v_k}{L} (n_{FD}(\varepsilon_k + eV_1) - n_{FD}(\varepsilon_k + eV_2)) \quad (2.43)$$

à température nulle et en passant à la limite continue, nous pouvons écrire :

$$I = -\frac{e}{2\pi} \int_{eV_1}^{eV_2} v_k \frac{dk}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (2.44)$$

$$= \frac{e^2}{h} (V_1 - V_2). \quad (2.45)$$

En se souvenant de la relation 1.3 définissant la résistance de Hall comme la différence de potentiel entre V_a et V_b divisée par le courant entre (1) et (2), nous obtenons que :

$$R_H = \frac{e^2}{h}, \quad (2.46)$$

4. Cette formule vient de la généralisation du courant porté par un état quantique à la traversée d'une barrière de potentiel. On peut montrer que le courant porté par un état k vaut $j = -\frac{ev_k}{L} T$ où T est le coefficient de transmission en intensité et L est la longueur de la barrière et $v_k = \hbar k/m$ est la vitesse de l'état k . Toute cette partie peut être traitée de façon plus systématique à l'aide du formalisme de Landauer-Buttiker.

par niveau de Landau rempli. Ainsi, pour M niveaux remplis, le courant est simplement M fois le courant d'un canal, ce qui nous amène à une résistance de Hall de :

$$R_H = \frac{h}{Me^2}. \quad (2.47)$$

Ce qui se traduit bien par une quantification de la résistance de Hall car le nombre de canaux varie de façon discrète. De plus, comme les perturbations introduites par le potentiel de désordre ne modifient pas les caractéristiques des états de bords, il y a bien des plateaux dans cette conductivité.

3 Aspects topologiques de l'effet Hall quantique

Nous proposons maintenant une approche différente, nous avons vu que le désordre n'influait que très peu le comportement de notre système. Cette remarque permet de justifier une approche topologique, si nous trouvons des quantités physiques liées à une certaine topologie encore à définir, nous pourrions affirmer que cette propriété est très *robuste* dans le sens où des transformations continues du système ne changent en rien la physique. Pour effectuer cette approche nous proposons de partir d'un réseau d'atomes comme dans le cas de l'étude des métaux. Il est à noter que les résultats qui suivent ont été généralisée au cas où le système n'est plus sous forme de réseau.

3.1 Électrons de Bloch soumis à un fort champ magnétique

Considérons ici un système d'électrons à 2D sans interactions, mais soumis à un fort champ magnétique \mathbf{B} et à un potentiel U périodique de période a dans la direction x et b dans la direction y : $U(x+a, y) = U(x, y+b) = U(x, y)$. L'équation de Schrödinger s'écrit donc :

$$H\psi = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + U(x, y) \right] \psi = E\psi, \quad (3.1)$$

où l'impulsion \mathbf{p} et le potentiel vecteur \mathbf{A} sont inscrits dans le plan xy . En champ nul, cette équation est celle des électrons dans un solide. Comme dans le cas du champ nul, le système est invariant selon les translations spatiales discrètes $T_{\mathbf{R}}$ où \mathbf{R} est un vecteur du réseau direct : $\mathbf{R} = na\mathbf{e}_x + mb\mathbf{e}_y$. Les translations spatiales étant générées par l'opérateur impulsion, l'opérateur de translation s'écrit de façon explicite :

$$T_{\mathbf{R}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}\right). \quad (3.2)$$

Cependant, l'Hamiltonien n'est pas invariant par translation spatiale : par construction, le potentiel U reste invariant mais le moment ne l'est pas. En effet, $\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$ n'est pas nécessairement égal à $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ⁵. En toute généralité, les deux diffèrent d'un gradient d'une fonction scalaire :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) + \nabla g(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Ainsi, le théorème de Bloch pour les métaux ne peut s'appliquer ici. Nous pouvons cependant définir un nouvel opérateur de translation en utilisant le moment généralisé : $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ d'un électron dans un champ électromagnétique. Nous obtenons alors l'opérateur de translation dit *magnétique* :

$$\tilde{T}_{\mathbf{R}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{R} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\right), \quad (3.4)$$

$$= T_{\mathbf{R}} \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}\right). \quad (3.5)$$

5. par exemple, si on considère un champ uniforme, \mathbf{B} est invariant par translation. Une des jauges que l'on peut utiliser est la jauge symétrique : $\mathbf{A}_S(x, y) = B/2(-y, x, 0)$. Il est alors évident que le potentiel vecteur n'est pas invariant par translation.

Par la suite, nous travaillerons sur un plan infini et nous utiliserons par conséquent la jauge symétrique : $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$. Dans cette jauge, l'opérateur de translation magnétique s'écrit :

$$\tilde{T}_{\mathbf{R}} = T_{\mathbf{R}} \exp \left(\frac{ie}{\hbar} (\mathbf{B} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{r}/2 \right). \quad (3.6)$$

Nous voyons alors que ceux-ci commutent avec l'Hamiltonien :

$$[\tilde{T}_{\mathbf{R}}, \mathcal{H}] = 0 \quad (3.7)$$

Une différence majeure avec le cas des métaux est que les opérateurs de translations ne commutent pas entre eux, pour effectuer ce calcul, nous avons besoin d'un corollaire de la *formule de Baker-Campbell-Hausdorff* dans le cas des opérateurs position et impulsion avec $[x, p_x] = i\hbar$ ⁶ :

$$e^{i\alpha\hat{x}} e^{i\beta\hat{p}_x} = e^{i\beta\hat{p}_x} e^{i\alpha\hat{x}} e^{-\alpha\beta[x, p_x]} \quad (3.8)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{iBe}{2\hbar} a\hat{y} \right) T_b &= \exp \left(-\frac{iBe}{2\hbar} a\hat{y} \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} b\hat{p}_y \right) \\ &= \exp \left(\frac{i}{\hbar} b\hat{p}_y \right) \exp \left(-\frac{iBe}{2\hbar} a\hat{y} \right) \exp \left(\frac{Be}{2\hbar^2} ab[\hat{y}, \hat{p}_y] \right) \\ &= T_b \exp \left(\frac{iBe}{2\hbar} a\hat{y} \right) \exp \left(\frac{iBe}{2\hbar} ab \right) \end{aligned}$$

de même avec T_a :

$$\exp \left(\frac{iBe}{2\hbar} b\hat{x} \right) T_a = T_a \exp \left(\frac{iBe}{2\hbar} b\hat{x} \right) \exp \left(-\frac{iBe}{2\hbar} ab \right)$$

Ainsi, nous obtenons le commutateur pour les translations magnétiques :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_a \tilde{T}_b &= T_a \exp \left(-\frac{iBe}{2\hbar} a\hat{y} \right) T_b \exp \left(\frac{iBe}{2\hbar} b\hat{x} \right) \\ &= T_b T_a \exp \left(-\frac{iBe}{2\hbar} a\hat{y} \right) \exp \left(\frac{iBe}{2\hbar} b\hat{x} \right) \exp \left(\frac{iBe}{2\hbar} ab \right) \\ &= \tilde{T}_b \tilde{T}_a \exp \left(\frac{iBe}{\hbar} ab \right) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons la relation de commutation suivante :

$$\tilde{T}_a \tilde{T}_b = \exp(2i\pi\phi) \tilde{T}_b \tilde{T}_a \quad (3.9)$$

avec $\phi = (eB/h)ab$ le flux magnétique qui traverse une cellule élémentaire. Bien que nous ne puissions pas prendre l'ensemble des opérateurs de translation magnétique, nous pouvons voir que lorsque ϕ est un nombre rationnel, $\phi = p/q$, nous avons un sous-ensemble d'opérateurs

6. Cette formule n'est vraie que dans la mesure où le commutateur $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ commute lui même avec les opérateurs \hat{x} et \hat{p} .

qui commutent entre eux en ne considérant que les translations selon le nouveau réseau de Bravais :

$$\mathbf{R}' = n(qa\mathbf{e}_x) + m(b\mathbf{e}_y). \quad (3.10)$$

Nous sommes donc maintenant en présence d'un jeu d'opérateurs de translation magnétiques qui commutent entre eux et qui commutent avec l'Hamiltonien. Nous pouvons donc codiagonaliser ces opérateurs : soit ψ un vecteur propre de \mathcal{H} et $\tilde{T}_{\mathbf{R}'}$. Il est facile de voir que les valeurs propres associées à \tilde{T}_{qa} et \tilde{T}_b sont :

$$\tilde{T}_{qa}\psi = e^{ik_1qa}\psi, \quad (3.11)$$

$$\tilde{T}_b\psi = e^{ik_2b}\psi, \quad (3.12)$$

où k_1 et k_2 sont les composantes de l'impulsion du cristal généralisée qui peuvent être prises dans la première zone de Brillouin magnétique :

$$-\pi/qa \leq k_1 \leq \pi/qa, \quad -\pi/b \leq k_2 \leq \pi/b. \quad (3.13)$$

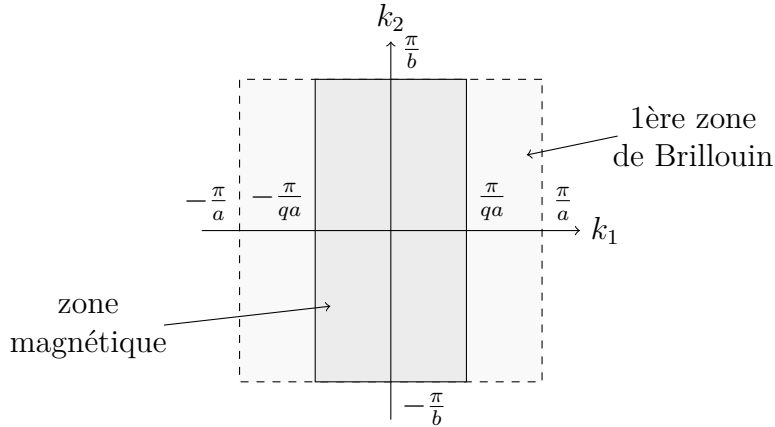


FIGURE 8 – Première zone de Brillouin généralisée. La zone délimitée par les pointillés correspond à la première zone de Brillouin dans le cas où aucun champ n'est appliqué à l'échantillon.

Les fonctions propres peuvent alors s'écrire sous la forme de Bloch :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

Avec des conditions de Bloch généralisées pour les fonctions $u_{\mathbf{k}}$:

$$u_{\mathbf{k}}(x + qa, y) = e^{-i\pi py/b}u_{\mathbf{k}}(x, y), \quad (3.15)$$

$$u_{\mathbf{k}}(x, y + b) = e^{i\pi px/qa}u_{\mathbf{k}}(x, y). \quad (3.16)$$

Regardons maintenant ce qui se produit si nous considérons un chemin autour d'une cellule magnétique. Nous avons un changement de phase comme le montre la figure 9.

Si nous faisons le tour d'une cellule, d'après les équations 3.16, nous avons un changement de phase de $2\pi p$. Nous avons donc une différence de phase entre la fonction d'origine et la fonction d'onde après avoir fait le tour de la cellule. Cependant, comme p est un entier, la

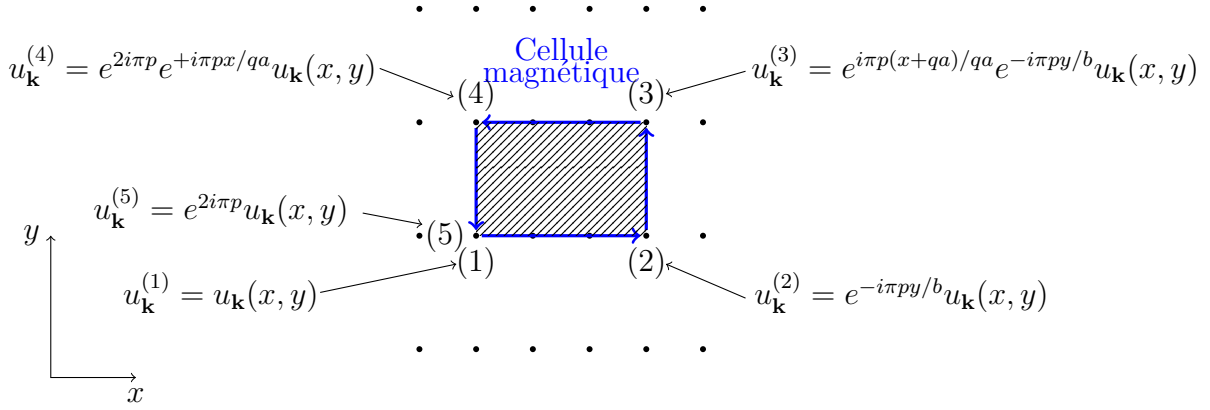


FIGURE 9 – Chemin atour d’une cellule magnétique.

fonction d’onde reste la même. La fonction d’onde est bien univaluée. Cependant, la quantité p n’étant pas nécessairement nulle, elle peut être intéressante. Un moyen de la calculer et la suivante, on décompose de façon polaire la fonction d’onde :

$$u_{\mathbf{k}}(x, y) = |u_{\mathbf{k}}(x, y)| \exp(i\theta_{\mathbf{k}}(x, y)), \quad (3.17)$$

Il est alors facile d’obtenir l’entier p , en remarquant que $2\pi p = \theta_{\mathbf{k}}^{(5)} - \theta_{\mathbf{k}}^{(1)} = \oint_{\mathcal{C}} \nabla \theta_{\mathbf{k}}(x, y) d\mathbf{l}$. Finalement ⁷

$$p = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \nabla \theta_{\mathbf{k}}(x, y) d\mathbf{l}. \quad (3.18)$$

Cette quantité est invariante de jauge car un changement de jauge ajoute une fonction analytique à $\theta_{\mathbf{k}}$, donc ce terme, intégré sur le bord de la cellule magnétique s’annulera. C’est le caractère *non-analytique* de la fonction $\theta_{\mathbf{k}}$ qui assurera un p différent de zéro. Que ce passe-t-il en ces endroits ? La phase n’est pas définie car la fonction d’onde prend la valeur zéro. Ainsi, nous venons de montrer que la fonction $u_{\mathbf{k}}(x, y)$ s’annule en certains points associés à une vortécité p .

3.2 Dérivation de la conductance de Hall

L’écriture des fonctions d’ondes sous la forme de Bloch (équ.3.14) permet de réécrire l’équation de Schrödinger en termes de $u_{\mathbf{k}}$:

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}^{\alpha} = E^{\alpha} u_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \quad (3.19)$$

Avec :

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla + \hbar \mathbf{k} + e\mathbf{A} \right)^2 + U(x, y), \quad (3.20)$$

et α l’indice de la bande considérée et \mathbf{k} dans la première zone de Brillouin considérée en 3.13.

Lorsqu’un faible champ électrique est appliqué, le courant résultant peut être déterminé grâce à la formule de la réponse linéaire de Nakano et Kubo. La réponse linéaire du courant dans la direction perpendiculaire à l’application du champ électrique est donnée par la

7. On retrouve exactement les mêmes arguments et formules pour les vortex de l’Hélium superfluide.

conductivité de Hall :

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2 \hbar}{i} \sum_{E^\alpha < E_F < E^\beta} \frac{(v_y)_{\alpha\beta}(v_x)_{\beta\alpha} - (v_x)_{\alpha\beta}(v_y)_{\beta\alpha}}{(E^\alpha - E^\beta)^2}, \quad (3.21)$$

Afin de pouvoir calculer cette conductance, nous devons d'abord calculer les composants de l'opérateur vitesse :

$$\mathbf{v} = \frac{-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}}{m} \quad (3.22)$$

Pour cela, il suffit d'intégrer sur une cellule magnétique unitaire et nous obtenons :

$$(\mathbf{v})_{\alpha\beta} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \int_0^{qa} dx \int_0^b dy (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* \mathbf{v}(u_{\mathbf{k}}^\beta), \quad (3.23)$$

En utilisant la normalisation $\int_0^{qa} dx \int_0^b |u|^2 = 1$. Nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{k}} = \hbar \mathbf{v} + \frac{\hbar^2}{m} \mathbf{k} \quad (3.24)$$

donc

$$(v_i)_{\alpha\beta} = \frac{1}{\hbar} \langle \alpha | \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_i} | \beta \rangle - \frac{\hbar}{m} k_i \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.25)$$

Comme dans la formule de Nakano-Kubo 3.21 nous ne considérons que les termes hors diagonaux, le second terme n'apparaît pas. Il suffit donc de calculer les éléments hors diagonales de l'opérateur dérivé du Hamiltonien. Nous avons :

$$\langle \alpha | \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_i} | \beta \rangle = \int_0^{qa} dx \int_0^b dy (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_i} (u_{\mathbf{k}}^\beta), \quad (3.26)$$

Avec l'équation de Schrödinger 3.19, nous avons :

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_i} u_{\mathbf{k}}^\beta = -\tilde{\mathcal{H}} \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} + E^\beta \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} + \frac{\partial E^\beta}{\partial k_i} u_{\mathbf{k}}^\beta. \quad (3.27)$$

Ainsi :

$$\langle \alpha | \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_i} | \beta \rangle = \int_0^{qa} dx \int_0^b dy \left\{ - (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* \tilde{\mathcal{H}} \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} + (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* E^\beta \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} + (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* \frac{\partial E^\beta}{\partial k_i} u_{\mathbf{k}}^\beta \right\}, \quad (3.28)$$

$$= \int_0^{qa} dx \int_0^b dy \left\{ - E^\alpha (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} + E^\beta (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} + (u_{\mathbf{k}}^\alpha)^* \frac{\partial E^\beta}{\partial k_i} u_{\mathbf{k}}^\beta \right\}, \quad (3.29)$$

$$= (-E^\alpha + E^\beta) \langle \alpha | \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} \rangle + \frac{\partial E^\beta}{\partial k_i} \langle \alpha | \beta \rangle \quad (3.30)$$

Ici encore, nous oublions le terme hors diagonale qui n'entre pas en compte dans le calcul de la conductance de Hall. Nous obtenons ainsi les termes de la matrice, en notant qu'on peut aussi utiliser le conjugué de l'équation de Schrödinger, nous arrivons à :

$$\langle \alpha | \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial k_i} | \beta \rangle = (E^\beta - E^\alpha) \langle \alpha | \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\beta}{\partial k_i} \rangle \quad (3.31)$$

$$= -(E^\beta - E^\alpha) \langle \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\alpha}{\partial k_i} | \beta \rangle. \quad (3.32)$$

Nous pouvons alors écrire la formule de Nakano-Kubo sous la forme :

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{i\hbar} \sum_{E^\alpha < E_F < E^\beta} \left(\left\langle \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\alpha}{\partial k_2} \middle| \beta \right\rangle \langle \beta | \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\alpha}{\partial k_2} \right) - \left\langle \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\alpha}{\partial k_1} \middle| \beta \right\rangle \langle \beta | \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\alpha}{\partial k_1} \right). \quad (3.33)$$

En utilisant la relation de fermeture : $\sum(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|) = 1$, il vient pour une bande complètement remplie :

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2i\pi} \int d^2k \int d^2r \left(\frac{\partial u_{\mathbf{k}}^{\alpha*}}{\partial k_2} \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\alpha}{\partial k_1} - \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^{\alpha*}}{\partial k_1} \frac{\partial u_{\mathbf{k}}^\alpha}{\partial k_2} \right). \quad (3.34)$$

Nous allons maintenant réécrire la conductance en introduisant un champ \mathbf{A} analogue à un potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \int d^2r u_{\mathbf{k}}^* \nabla_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} = \langle u_{\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (3.35)$$

Ainsi, la conductance magnétique d'une bande s'écrit à l'aide de ce nouveau vecteur :

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2i\pi} \int d^2k [\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}(\mathbf{k})]_3, \quad (3.36)$$

où l'indice représente la troisième composante du vecteur.

Si on associe \mathbf{A} à un vecteur potentiel, on voit qu'il s'agit en fait de calculer le flux d'un champ magnétique dans la cellule magnétique. Avant de poursuivre l'étude de cette formule et de ces conséquences, traitons le cas plus simple conceptuellement mais éducatif du monopole de Dirac.

3.3 Monopole de Dirac

3.3.1 Quantification de la charge magnétique

Avant de répondre à la question précédente, examinons le problème du monopole magnétique. Les équations de Maxwell présentent une asymétrie, observée par Dirac, entre les porteurs de charge électrique et les porteurs de charge magnétique. La source d'un champ magnétique est toujours une particule chargée en mouvement ou un dipôle magnétique, mais il n'existe pas de charge ponctuelle magnétique statique. Ce fait est visible dans les équations de Maxwell sur les flux : $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ mais $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Dirac est le premier à avoir montré que la charge d'un tel monopole est nécessairement quantifiée. La démonstration qui suit est due à T.T. Wu et C.N. Yang.

Considérons un monopole magnétique de charge magnétique g placé en $\mathbf{r} = 0$, produisant un champ magnétique semblable au champ électrique d'une charge ponctuelle à savoir :

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (3.37)$$

L'existence d'un tel monopole modifierait l'équation de Maxwell sur la divergence du champ magnétique :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_M(\mathbf{r}) = 4\pi g\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad (3.38)$$

et le flux magnétique Φ obtenu en intégrant \mathbf{B} sur une sphère \mathcal{S} de rayon R :

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi g \quad (3.39)$$

La description en terme de champ magnétique \mathbf{B} ne semble poser aucun soucis particulier. Essayons maintenant de décrire ce monopole par un potentiel vecteur \mathbf{A} tel que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, le théorème de Stokes en prenant l'équateur de la sphère \mathcal{S} s'écrit alors :

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla \times \mathbf{A} = 0 = \Phi. \quad (3.40)$$

Or dans l'hypothèse où il y aurait effectivement un monopole, le flux Φ n'est visiblement pas nul. Ceci contredit l'hypothèse qu'il existe un potentiel \mathbf{A} défini sur toute la sphère permettant de décrire le champ magnétique \mathbf{B} du monopole. Si nous essayons de construire un tel vecteur, nous pourrions prendre :

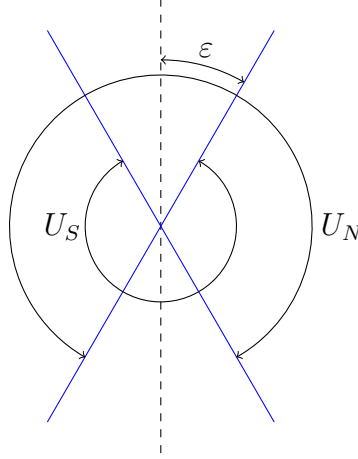
$$\mathbf{A} = \frac{g(1 - \cos\theta)}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\phi, \quad (3.41)$$

Le calcul mènerait bien à \mathbf{B} sur la sphère, mais le problème se poserait pour $\theta = \pi$, en ce point, le potentiel diverge.

Cette situation est similaire au problème des vertex de l'Hélium 4 superfluide, ou de l'étude d'un écoulement autour d'un obstacle. La topologie considérée (ici, l'espace privé de l'origine de la charge) ne permet pas de définir ce champ de vecteur de façon unique. Afin de contourner le problème, nous pouvons considérer deux potentiels qui décrivent le champ magnétique \mathbf{B} sur deux domaines ouverts homéomorphes à un ouvert du plan euclidien :

$$U_N = \{(r, \theta, \phi), \theta < \pi - \varepsilon\} \quad (3.42)$$

$$U_S = \{(r, \theta, \phi), \theta > \varepsilon\} \quad (3.43)$$

FIGURE 10 – Régions de définition des vecteurs potentiels $\mathbf{A}^{(N)}$ et $\mathbf{A}^{(S)}$.

Ces deux cartes nous permettent de construire un atlas de la sphère, à savoir que la réunion de ces deux ouverts est la sphère \mathcal{S} toute entière. Nous construisons alors les potentiels vecteurs sur ces deux ouverts :

$$\mathbf{A}^{(N)} = \frac{g(1 - \cos \phi)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad \text{pour } \theta < \pi - \varepsilon \quad (3.44)$$

$$\mathbf{A}^{(S)} = \frac{g(1 + \cos \phi)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi, \quad \text{pour } \theta > \varepsilon \quad (3.45)$$

Pris ensemble, ces deux potentiels permettent d'obtenir le champ magnétique partout sur la sphère \mathcal{S} .

Maintenant, si nous regardons ce qui se passe sur la zone où les deux fonctions sont définies, entre ε et $\pi - \varepsilon$, nous pouvons utiliser indistinctement l'un ou l'autre des deux potentiels. Ainsi, ces deux potentiels sont localement équivalents sur la zone de recouvrement et il existe une transformation de jauge qui permet de passer de l'un à l'autre :

$$\mathbf{A}^{(N)} - \mathbf{A}^{(S)} = \frac{2g}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi. \quad (3.46)$$

Le gradient d'une fonction en coordonnées sphériques s'écrivant :

$$\nabla \chi = \frac{\partial \chi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \quad (3.47)$$

nous obtenons la fonction qui permet la transformation de jauge :

$$\nabla \chi = 2g \mathbf{e}_\phi \quad (3.48)$$

Maintenant suivant le choix de la jauge, la fonction d'onde d'une particule de charge e sur la sphère s'écrit différemment, et grâce à la propriété des fonctions d'onde sous une transformation de jauge (éq. 2.15) nous avons :

$$\psi^{(S)} = \exp \left(\frac{2ieg\phi}{\hbar} \right) \psi^{(N)}. \quad (3.49)$$

Comme $\psi^{(S)}$ et $\psi^{(N)}$ doivent être univaluées, si nous faisons un tour autour de l'équateur nous devons retrouver la même fonction d'onde. En utilisant l'équation 3.49, nous avons :

$$\frac{2ge}{\hbar} \in \mathbb{Z} \quad (3.50)$$

Ainsi, le monopole magnétique est nécessairement quantifié.

3.3.2 Charge topologique

Prenons maintenant le problème dans le sens inverse de la section précédente : supposons que nous connaissions les fonctions d'onde sur une sphère *i.e.* supposons que nous connaissions les fonctions d'onde sur les ouverts U_1 et U_2 de la section précédente. Nous voulons déterminer si à l'intérieur de la sphère, il y a un monopole *i.e.* une charge topologique. Ainsi, nous avons deux fonctions d'ondes :

$$\psi^{(i)}(\mathbf{r}) = |\psi^{(i)}(\mathbf{r})| e^{i\theta_i(\mathbf{r})} \quad \text{avec } \mathbf{r} \in U_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.51)$$

Nous savons que l'information sur la présence ou non de monopole est contenu dans la différence de phase entre ces fonctions d'onde au niveau du recouvrement entre U_1 et U_2 . Nous définissons ainsi les fonctions de transferts :

$$t_{ij}(\mathbf{r}) = \exp\left(i(\theta_i(\mathbf{r}) - \theta_j(\mathbf{r}))\right) = \exp(if_{ij}(\mathbf{r})) \quad (3.52)$$

D'après ce que nous venons de voir sur le monopole de Dirac, cette fonction $f_{i,j}$ n'est rien d'autre que la fonction associée à la transformation de jauge qui relie le potentiel vecteur entre les deux ouverts.

Une seule de ces fonctions de transfert nous intéresse, c'est la fonction f_{12} . Nous voyons que si cette fonction est nulle, il n'y a pas de différence de phase entre les deux ouverts, ce qui signifie que l'on peut donner une définition *globale* de la phase des fonctions d'onde. Ce qui implique qu'il n'y a pas de monopole / charge topologie au centre de la sphère. Si maintenant cette fonction n'est pas identiquement nulle, cela signifie qu'il y a une charge topologique. Afin de trouver cette charge topologique, nous allons prendre l'intégrale du gradient de la fonction de transfert f_{12} , car nous savons d'après 3.48 que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \nabla f_{12}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 2ng. \quad (3.53)$$

avec n la charge du monopole, \mathcal{C} la courbe de l'équateur. Cette quantité est bien sur invariante de jauge.

3.4 Classe topologique

Nous allons maintenant essayer de généraliser ce qui précède au cas de la première zone de Brillouin avec au-dessus fibre type $U(1)$. Le monopole de Dirac correspondant à une base de sphère S^2 et une fibre type $U(1)$. La topologie triviale, *i.e.* lorsque l'espace total peut s'écrire $S^2 \times U(1)$ correspond à l'absence de charge. En présence d'une charge, l'espace total n'est que localement le produit cartésien d'un ouvert U de S^2 et de $U(1)$, c'est ce qu'on appelle un fibré. Dans le cas de la première zone de Brillouin magnétique, l'espace de base est un tore T^2 et à cela s'ajoute la possibilité pour la fonction d'onde de s'annuler en certains points. Ceci à pour conséquence de créer des points tels que la phase ne soit pas définie en certains point. Nous allons écarter ce problème en recouvrant notre tore en plusieurs ouverts $\{U_i, i \in I\}$ homéomorphes au plan tel que l'intersection de deux ouverts ne contienne pas de valeur singulière (de zéro), et tel que la réunion de tout ces ouverts forme la base toute entière, à savoir un tore T^2 . Comme pour le monopole de Dirac, nous introduisons les fonctions de transferts entre deux ouverts de la base, nous introduisant les fonctions de transitions, qui ne sont que des phases :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = e^{if^{(ij)}(\mathbf{k})}. \quad (3.54)$$

La fonction $f^{(ij)}$ est le relèvement de la fonction de transition. Nous introduisons de plus la 1-forme de connexion :

$$\omega = g^{-1}Ag + g^{-1}dg = A + id\chi \quad (3.55)$$

où $g = e^{i\chi}$ et où nous avons introduit la 1-forme associée au potentiel vecteur :

$$A = \langle u_{\mathbf{k}} | \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} | u_{\mathbf{k}} \rangle dk_{\mu}. \quad (3.56)$$

cette connexion met une structure sur notre fibré et nous permet d'introduire alors la courbure associée au champ A :

$$F = dA = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial k_{\nu}} dk_{\nu} \wedge dk_{\mu} \quad (3.57)$$

Cette forme n'est autre qu'une forme de Chern, Et il est connu que l'intégrale de cette courbure sur toute la variété donne un nombre entier appelé nombre de Chern :

$$\oint \frac{i}{2\pi} F = C_1 \quad (3.58)$$

Finalement nous avons la relation pour la conductance Hall en comparant avec l'équation 3.36 :

$$\sigma = -\frac{e^2}{h} C_1. \quad (3.59)$$

Le nombre de Chern étant entier, nous voyons que cette approche topologique du problème avec des outils théoriques comme la réponse linéaire de Kubo nous permet de retrouver le résultat que nous donnait la quantification en niveau de Landau.

4 Conclusion

Nous avons donc pu voir que la quantification de l'effet Hall se traduit simplement en terme de niveau de Landau, et la physique de ce phénomène est entièrement comprise grâce à cette approche. Cependant, la seconde approche, qui utilise des arguments topologiques à l'avantage de montrer que la physique de l'effet Hall quantique est très fortement liée à la topologie de l'ensemble des fonctions d'onde électroniques au dessus de la zone zone de Brillouin. Cette seconde approche nous permet de mettre en exergue l'importance de l'aspect topologique de certains problèmes de physique. Plusieurs voies s'ouvrent alors naturellement après ceci : existe-t-il un généralisation de cet ordre topologique ? la réponse est affirmative avec l'apparition de l'effet Hall quantique de spin et les isolants topologiques, mais il faut alors rentrer plus loin dans la description topologique et inclure des effet comme le couplage spin-orbite.

Références

- D.YOSHIOKA (2002). *The Quantum Hall Effect*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer. ISBN : 9783540431152.
- KOHMOTO, M (1985). « Topological invariant and the quantization of the Hall conductance ». Dans : *Ann. Phys.* 160.2, 343–354.
- MONTAMBAUX, Gilles (2013). *Physique mésoscopique et conduction quantique. Programme d'approfondissement Physique*. Département de Physique de l'Ecole Polytechnique. URL : <http://129.175.80.92/montambaux/X-meso.htm>.
- NAKAHARA, M. (2003). *Geometry, Topology, and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Pub.
- SAKURAI, J.J. (1993). *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley.
- VON KLITZING, K, G DORDA et M PEPPER (1980). « New method for high-accuracy determination of the fine structure constant based on quantized hall resistance ». Dans : *Phys. Rev. Lett.* 45.6, 494–497.