

Boussole dans deux champs magnétiques

Alexis Morvan

2010-2011

Résumé

Je me suis intéressé au mouvement d'une boussole soumise à deux champs magnétiques : l'un fixe, l'autre tournant à vitesse constante. Après avoir observé expérimentalement quelques mouvements de la boussole, j'ai essayé de modéliser ces phénomènes et d'étudier les différents régimes de cette dernière.

Dans un premier temps, j'ai réalisé les expérimentations avec le matériel du lycée et une caméra amateur (24 images par seconde). J'ai ensuite contacté M. Croquette, chercheur au CNRS, qui m'a reçu dans son laboratoire et m'a permis d'utiliser son matériel.

Ce T.I.P.E a été motivé par la question suivante : *comment expliquer cette grande variété de mouvements de la boussole à partir de l'étude de l'équation différentielle ?*

Je remercie M.Croquette qui m'a gentiment invité à son laboratoire, m'a permis d'utiliser son matériel et m'a ensuite fourni de nombreuses explications par courriels.

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Etude du mouvement de la boussole dans un champ magnétique fixe	3
1.2	Étude du mouvement de la boussole dans un champ magnétique tournant	4
1.3	Cas dissipatif	4
2	Expériences et résultats expérimentaux	5
2.1	Notation et principe	5
2.2	Premier montage expérimental	5
2.3	Montage expérimental de M.Croquette	6
2.4	Résultats expérimentaux	6
3	Modélisation et étude mathématique	9
3.1	La section de Poincaré	9
3.2	Cas conservatif	9
3.3	Cas dissipatif	11
3.4	Mouvement chaotique	14
3.5	Intermittence	15
3.6	"Mapping" des mouvements de la boussole	16
4	Conclusion	17

1. Introduction

1.1 Etude du mouvement de la boussole dans un champ magnétique fixe

Une boussole placée dans un champ fixe n'est autre qu'un pendule simple : posons \mathcal{M} le moment magnétique de notre boussole et J son moment cinétique. Supposons que la boussole soit placée dans un champ magnétique fixe B (par exemple, pour le champ magnétique terrestre, $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{T}$).

En appliquant le théorème du moment cinétique, il vient :

$$J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B\sin(\theta) \quad (1.1)$$

On retrouve bien l'équation du pendule simple. On pose $\omega_0^2 = \frac{\mathcal{M}B}{J}$. L'équation est alors :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad (1.2)$$

L'espace des phases est un outil très puissant : dans le cas du pendule simple, il permet de voir immédiatement les différentes trajectoires possibles (image ci-contre).

Sur le portrait de phase se dessine une zone où le mouvement de la boussole reste borné. Il s'agit d'une résonance. Remarquons que la demi taille de cette résonance vaut $2\omega_0$.

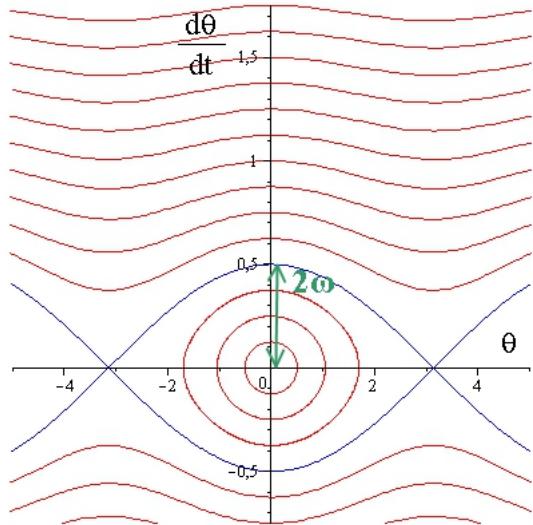


FIGURE 1.1 – Portrait de phase d'une boussole placée dans un champ magnétique fixe

1.2 Étude du mouvement de la boussole dans un champ magnétique tournant

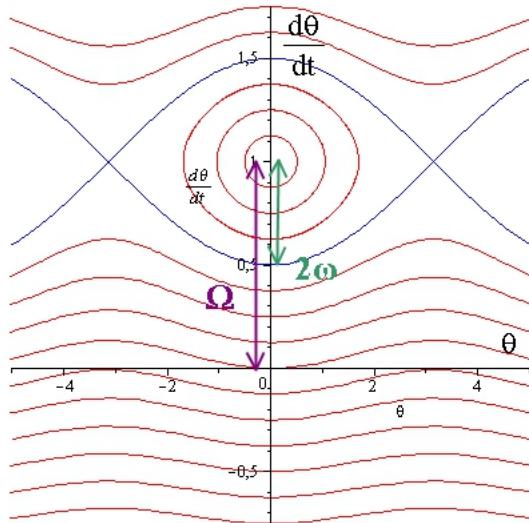


FIGURE 1.2 – Portrait de phase

Lorsque la boussole est placée dans un champ magnétique tournant à la vitesse angulaire constante Ω , on obtient une équation différentielle similaire :

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin(\theta - \Omega \cdot t) = 0 \quad (1.3)$$

Malgré le fait que cette équation ne soit pas autonome, le changement de variable $\alpha(t) = \theta(t) - \Omega t$ permet de retrouver l'équation précédente. Remarquons qu'il s'agit en fait d'un changement de référentiel, l'équation en α est l'équation du mouvement de la boussole dans le référentiel tournant avec le champ fixe.

L'équation selon α est alors : $\ddot{\alpha} + \omega_1^2 \sin \alpha = 0$. Ainsi, le portrait de phase est celui de la boussole dans un champ fixe mais translaté de Ω vers le haut.

Lorsque la boussole est plongée dans les deux champs magnétiques, nous pouvons nous attendre à avoir une superposition de ces portraits des phases et à l'apparition de deux résonances. Ainsi, le mouvement de la boussole va dépendre de la distance entre celles-ci (Ω) et de leurs tailles ($2\omega_0$ et $2\omega_1$). Définissons donc *a priori* un paramètre : $s = \frac{2\omega_0 + 2\omega_1}{\Omega}$ appelé paramètre de stochasticité qui représente le chevauchement des deux résonances. Donc, si $s \ll 1$, on s'attend à trouver deux résonances dans l'espace des phases.

1.3 Cas dissipatif

Dans le cas dissipatif, en supposant les frottements fluides, on obtient cette nouvelle équation différentielle (dans le cas d'un champ fixe) :

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad (1.4)$$

Les trajectoires dans l'espace des phases tendent toutes vers un point comme on peut le constater sur la figure suivante :

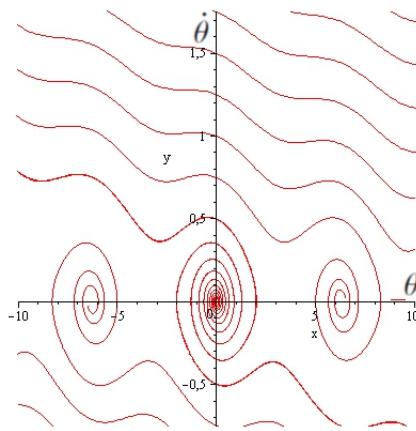
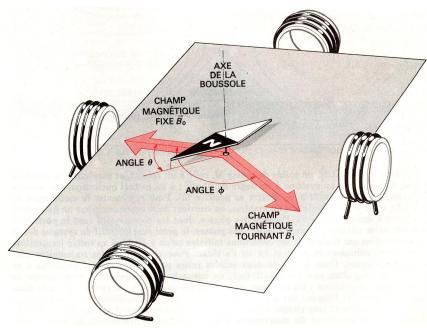


FIGURE 1.3 – Portrait de phase d'une boussole dans un champ fixe soumis à des frottements fluides

2. Expériences et résultats expérimentaux

2.1 Notation et principe



On soumet la boussole à deux champs :

- \vec{B}_0 le champ fixe
- $\vec{B}_1(t)$ le champ tournant à la vitesse angulaire constante Ω

Le schéma ci-contre représente cette situation.

On pose les variables suivantes :

- J le moment d'inertie de la boussole
- \mathcal{M} le moment magnétique de la boussole

Le Théorème du moment cinétique appliquée à la boussole nous permet ainsi d'avoir l'équation différentielle suivante (dans le cas conservatif) :

$$J\ddot{\theta}(t) = -\mathcal{M}B_0 \sin \theta(t) - \mathcal{M}B_1 \sin(\theta(t) - \Omega t) \quad (2.1)$$

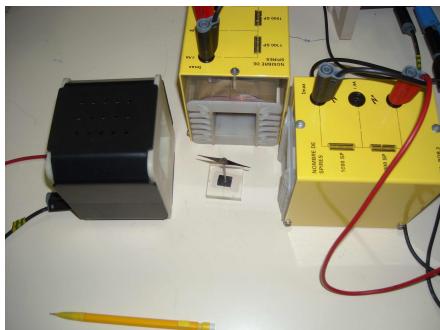
soit

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2 \sin \theta(t) - \omega_1^2 \sin(\theta(t) - \Omega t) \quad (2.2)$$

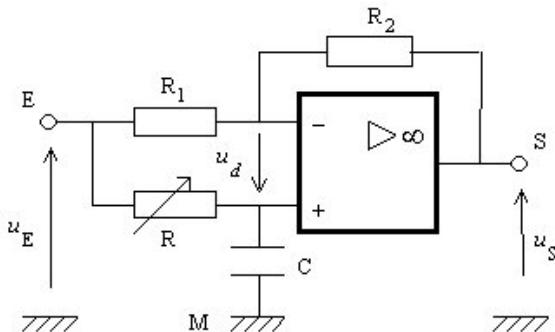
en définissant $\omega_i^2 = \frac{\mathcal{M}B_i}{J}$, les demi-tailles des résonances. Lors de l'expérimentation, deux problèmes se sont posés : d'une part, la création d'un champ tournant, d'autre part, l'acquisition de résultats. J'ai résolu le premier problème suite à plusieurs approches et le second en utilisant une caméra (24 images par seconde). J'ai aussi essayé de relever le champ créé par la boussole grâce à une petite bobine, mais ce champ est si petit qu'il m'a été impossible de le détecter.

2.2 Premier montage expérimental

Ma première idée a été de créer ce champ grâce à des bobines : deux bobines alimentées en régime sinusoïdal et en quadrature de phase permettent d'obtenir un champ magnétique tournant. Voici des photos de mon montage :



Les deux bobines jaunes m'ont servi à créer un champ magnétique tournant. . Quant à la bobine noire, elle a été nécessaire à la conception d'un champ fixe. Voici le schéma électrique du montage que j'ai utilisé pour créer un déphasage entre l'intensité parvenant à chaque bobine :



Ce montage introduit un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ entre son signal d'entrée et celui de sortie pour une fréquence d'entrée telle que : $RC\Omega = 1$. Pour avoir une fréquence de 5Hz par exemple, j'ai pris les valeurs $R = 33k\Omega$ et $C = 1\mu F$

A cause de la chute d'intensité en sortie de ce montage, j'ai du placer à sa suite un amplificateur de puissance afin que les deux bobines soient alimentées avec à peu près la même intensité.

2.3 Montage expérimental de M.Croquette

J'ai pris contact avec M.Croquette qui avait réalisé un article sur le sujet ; il m'a invité et m'a permis d'utiliser sa boussole (ainsi que son matériel, dont une caméra bien plus précise que celle que j'avais à ma disposition)



FIGURE 2.1 – Boussole de M.Croquette

boussole.

Voici une photo de ce dispositif : le champ tournant est ici créé par la rotation d'une roue sur laquelle est fixé un aimant. Cette roue tourne grâce à l'entrainement d'une courroie reliée à un petit moteur. Ici, la boussole est composée de deux aimants placés en vis à vis. Pour éliminer les frottements solides, la boussole repose sur coussin d'air (grâce à un bulleur d'aquarium).

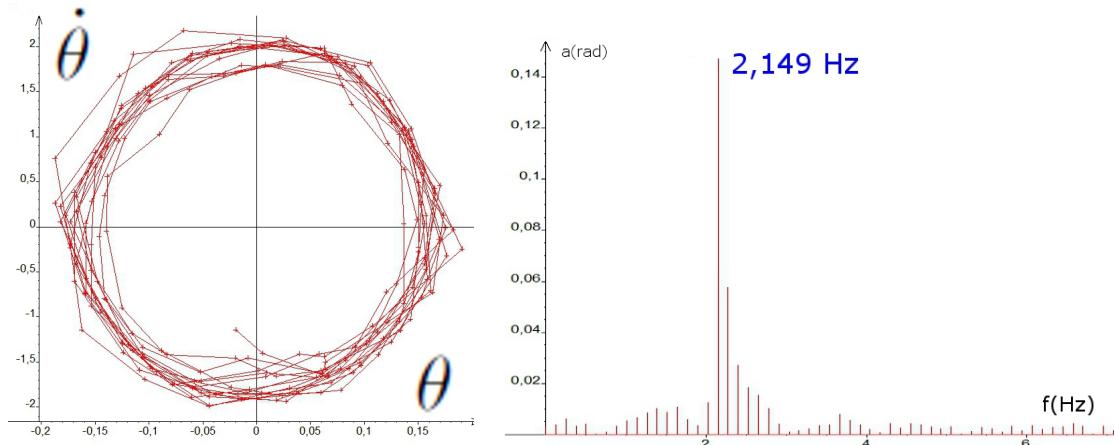
Ce dispositif a de nombreux avantages comparé à celui que j'ai réalisé moi même : Premièrement, il permet d'atteindre des fréquences bien plus basses qu'avec le précédent montage où les composants électriques soumis à des fréquences en dessous de 2Hz ne fonctionnaient plus comme ils l'auraient dû.

Le second avantage se situe sur le plan visuel. Les directions du champ magnétique tournant et de la boussole sont indiquées par deux flèches différentes. C'est pourquoi, on obtient une meilleure perception du mouvement de la boussole.

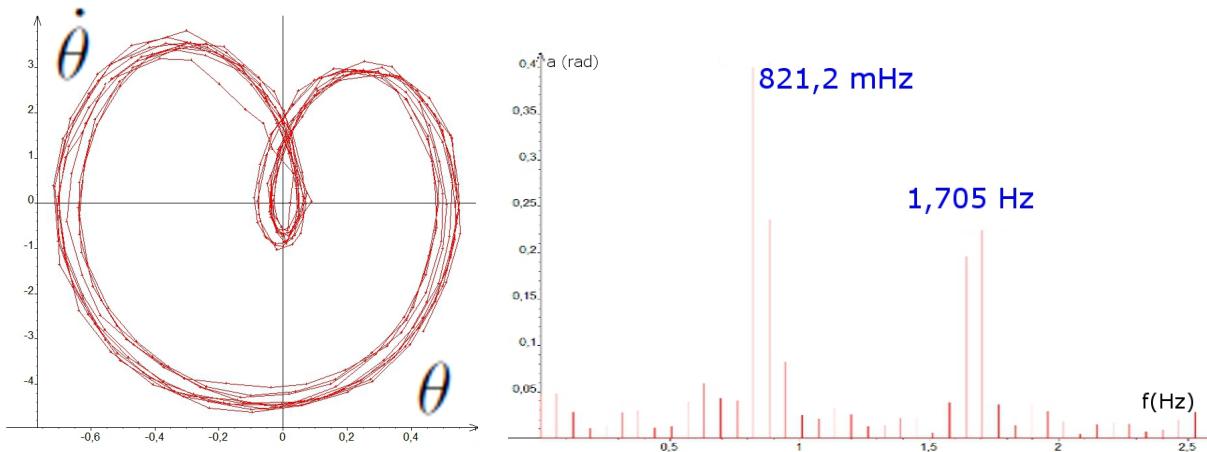
2.4 Résultats expérimentaux

Les résultats qui suivent ont été obtenus soit avec mon montage, soit avec le matériel de M.Croquette. Lorsque la fréquence du champ tournant est grande, i.e. $s \ll 1$, on s'attend à ce que le mouvement de la boussole reste dans une des résonances, l'autre tournant trop vite pour que la boussole puisse s'y accrocher.

J'ai observé ce phénomène expérimental pour une fréquence du champ tournant de 2Hz.



Mais, si on diminue Ω (ici jusqu'à 1,7Hz) , on voit apparaître un phénomène de dédoublement fréquence :



Dans ce dernier cas, un mouvement chaotique est perceptible. La boussole oscille alors aléatoirement entre le champ tournant et le champ fixe.

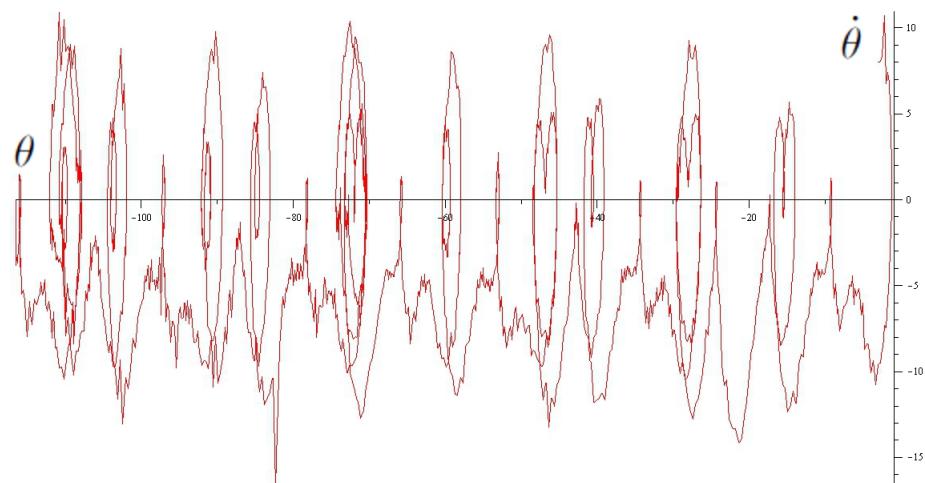


FIGURE 2.2 – Mouvement chaotique

Enfin, l'augmentation de ce paramètre se traduit par l'apparition de ces courbes :

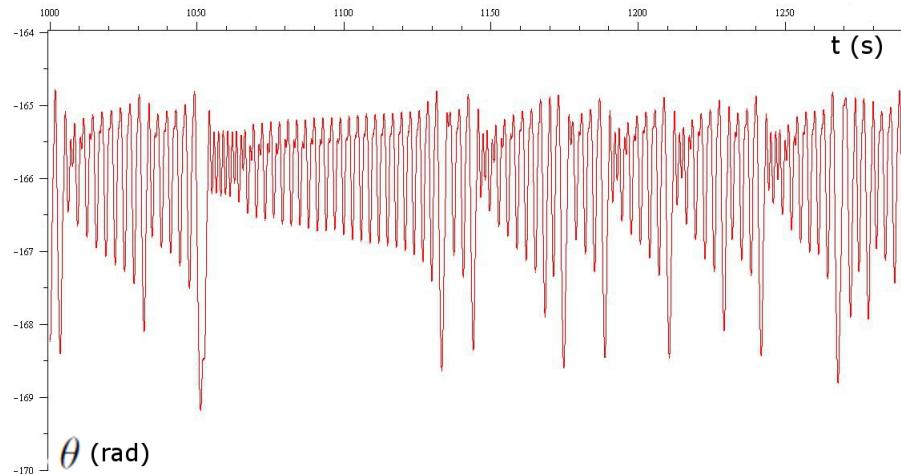


FIGURE 2.3 – Intermittence

Cette courbe a été réalisée grâce au matériel de M.Croquette, avec une caméra de 100 images par seconde. Une phase laminaire, c'est-à-dire une phase régulière où le mouvement est presque celui d'un oscillateur, est ensuite suivie d'une bouffée chaotique. J'ai observé la répétition de cet enchainement et la répartition des durées des phases laminaires :

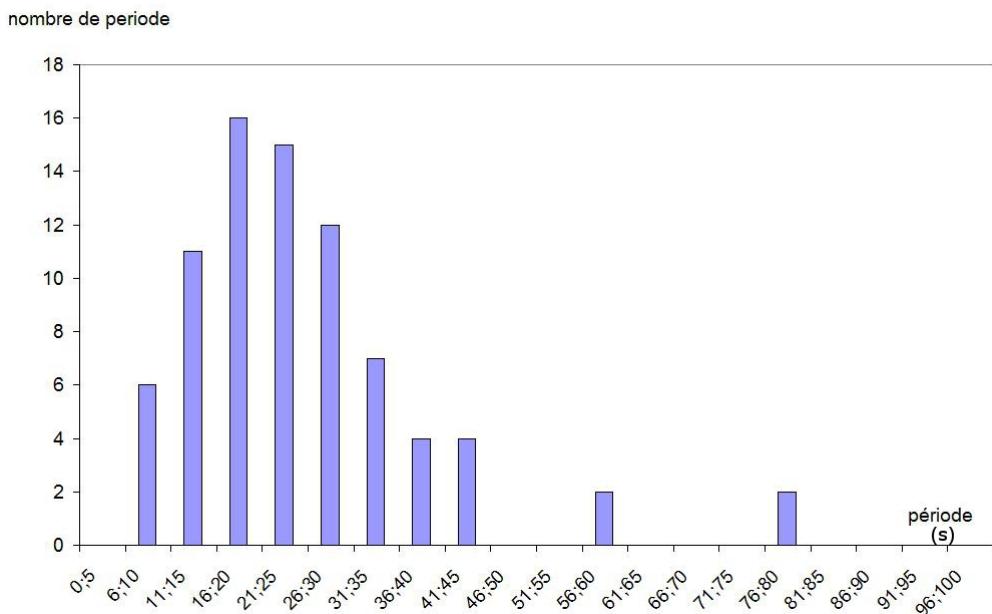


FIGURE 2.4 – Répartition des durée des phases laminaires

3. Modélisation et étude mathématique

3.1 La section de Poincaré

Une section de Poincaré est une découpe de l'espace des phases selon un hyperplan. Ici, l'espace des phases présente une périodicité selon le 3ème axe. La coupe s'effectue donc ici tous les $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. La section est alors l'image stroboscopique des solutions à la fréquence du champ tournant.

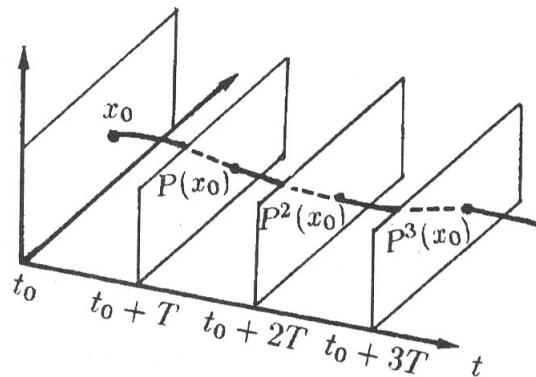


FIGURE 3.1 – Principe de la section de Poincaré

On définit aussi l'application du premier retour (ou application de Poincaré) : à un point du plan de la section de Poincaré, on associe son image lorsqu'il recoupe l'hyperplan. Ici, l'application du premier retour s'écrit :

$$P(x_0) = x(x_0, t_0)(t + T)$$

où $x(x_0, t_0)$ est la solution passant par le point (x_0, t_0)

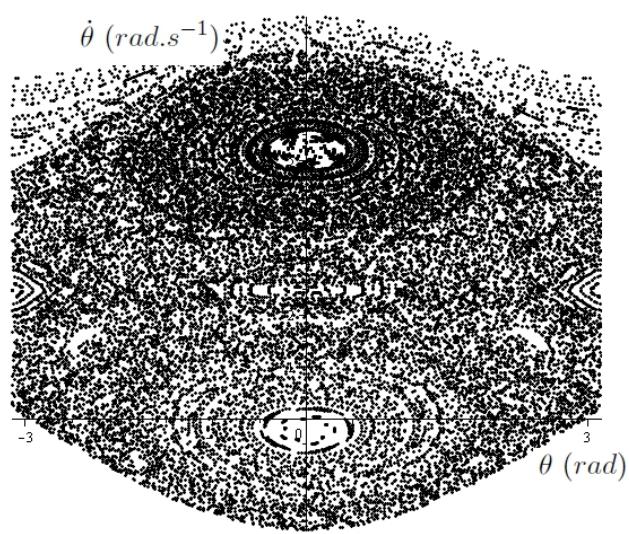
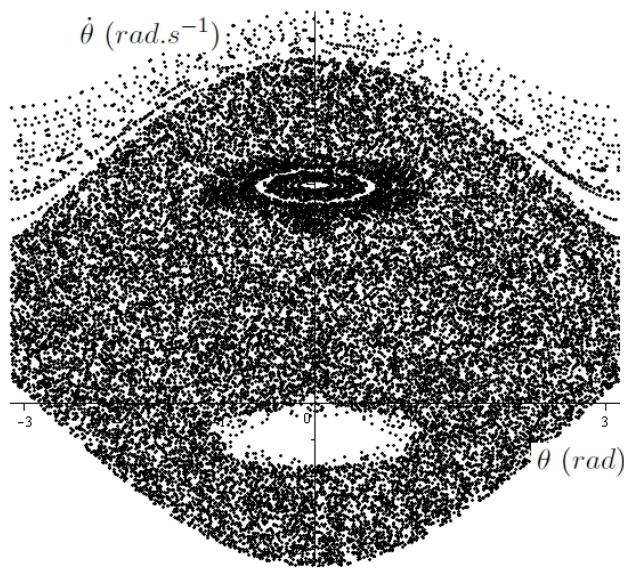
Cet outil nous permet alors de visualiser le type de mouvements que peut avoir la boussole. On peut représenter la section de Poincaré, contrairement à l'espace des phases en trois dimensions.) On a alors réduit le problème à l'étude d'une suite récursive.

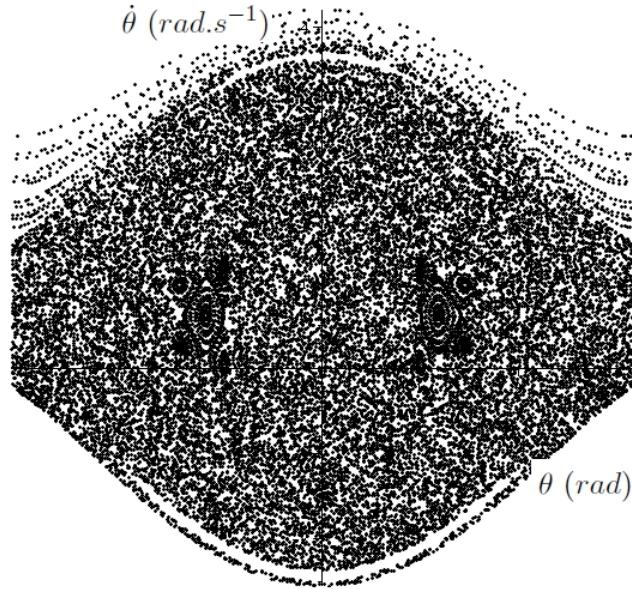
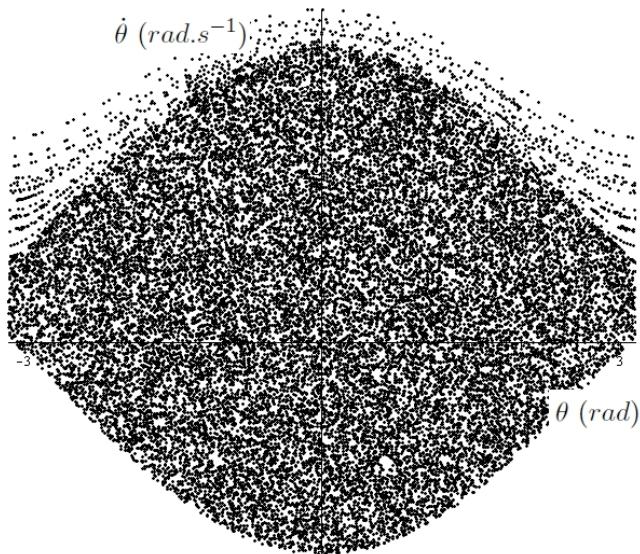
3.2 Cas conservatif

On réutilise le paramètre de stochasticité défini en introduction :

$$s = \frac{2\omega_0 + 2\omega_1}{\Omega}$$

Avec le logiciel de calcul Maple, j'ai tracé des sections de Poincaré en fonction d'un paramètre de stochasticité croissant :

FIGURE 3.2 – Section de Poincaré $s=0.2$ FIGURE 3.3 – Section de Poincaré $s=0.4$

FIGURE 3.4 – Section de Poicaré $s=0.8$ FIGURE 3.5 – Section de Poicaré $s=1.0$

Pour $s \ll 1$, on distingue deux résonances semblables à celles observées pour la boussole dans un champ unique. Et plus s augmente, plus les deux résonances se rapprochent et finissent par disparaître, laissant place au chaos.

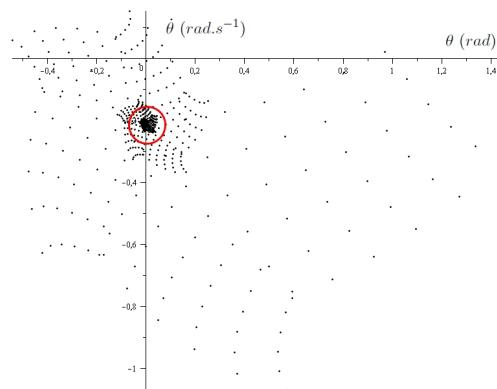
3.3 Cas dissipatif

On ne peut cependant pas négliger le fait que la boussole est soumise à des frottements. Supposons que ceux-ci soient fluides même si avec certaines boussoles que j'ai utilisées, ils étaient plutôt de type solide.

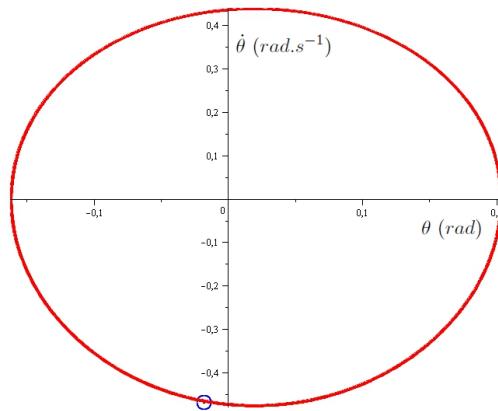
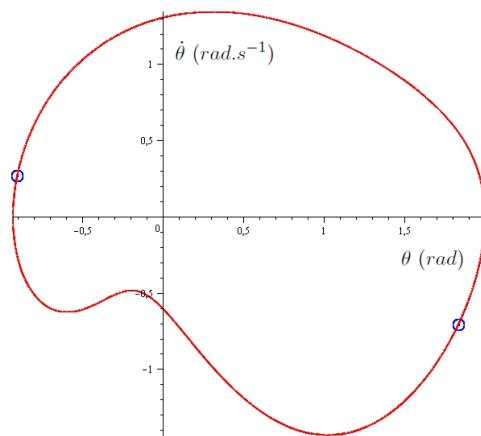
L'équation différentielle est alors :

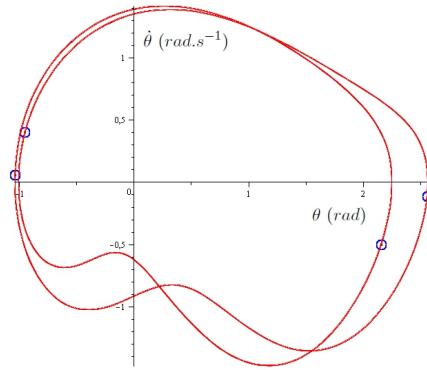
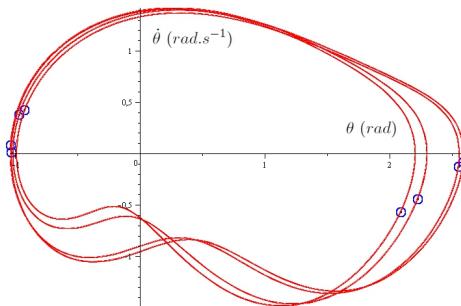
$$\ddot{\theta}(t) = -\lambda \dot{\theta} - \omega_0^2 \sin \theta(t) - \omega_1^2 \sin (\theta(t) - \Omega t) \quad (3.1)$$

J'ai une fois de plus tracé avec Maple des sections de Poincaré pour un paramètre de stochasticité croissant.

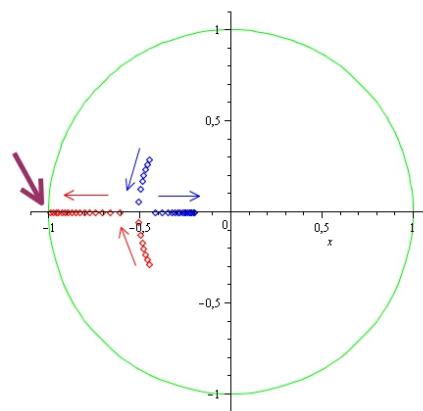
FIGURE 3.6 – Section de Poincaré $s=0.2$. Encadré en rouge : point attracteur

Il apparaît que certains points semblent attirer les trajectoires. En fait, si on regarde l'application du premier retour P , on remarque que celle-ci peut avoir des points fixes attracteurs, et ceux-ci correspondent avec ces points. Un point fixe de P est une orbite stable pour le mouvement de la boussole. Afin de mieux comprendre ce phénomène, voici quelques sections de Poincaré (point bleus) superposées aux portrait des phases (en rouge) où j'ai supprimé le régime transitoire (la section de Poincaré ne présente donc que ces points attracteurs)

FIGURE 3.7 – Section de Poincaré $s=0.4$ FIGURE 3.8 – Section de Poincaré $s=0.6$

FIGURE 3.9 – Section de Poincaré $s=0.66$ FIGURE 3.10 – Section de Poincaré $s=0.662$

Les points fixes des applications du second (P^2), troisième (P^3) retour sont eux aussi des orbites stables du mouvement de la boussole mais avec une période plus grande (double, triple,...). Une question se pose alors : comment expliquer le passage de un point fixe à deux pour un certain s ? En fait, avant ce "dédoubllement", le point attracteur est un point fixe de P , mais si on augmente s , ce point fixe de P disparaît pour laisser place à un point fixe de P^2 . D'où le dédoubllement de période. Afin d'éclaircir ce point, une étude plus fine est nécessaire : le point fixe attracteur de P va perdre sa stabilité alors que s augmente. La stabilité de ce point fixe peut être déterminée grâce à l'étude des valeurs propres de la jacobienne de l'application P en ce point fixe : J'admetts que le point fixe est un point stable si les valeurs propres (complexes) de la jacobienne en ce point sont incluses dans le cercle unité. Voici la représentation des valeurs propres de la jacobienne de P , notée J , en l'unique point fixe pour s compris entre 0,4 et 0,52.

FIGURE 3.11 – Représentation des valeurs propres complexes de J et du cercle unité

Les flèches rouges et bleues indiquent le sens de variation des valeurs propres pour s croissant et la flèche violette indique qu'une des valeurs propres de J sort du cercle unité par la valeur -1. Et si on regarde après la valeur de $s = 0,52$, on ne trouve plus de point fixe pour P .

En revanche, si on étudie P^2 , on s'aperçoit que cette application admet un point fixe stable pour $s > 0,52$. Ce qui explique le premier phénomène observé expérimentalement où l'on obtient un dédoublement de la fréquence du mouvement. Il faut noter que ce dédoublement de période se poursuit avec exactement le même principe : le point fixe de P^2 devient instable aux alentours de $s=0.59$ mais P^3 admet un point fixe.

3.4 Mouvement chaotique

Si on continue d'augmenter s , on voit alors apparaître une figure sans point attracteur clairement défini mais qui présente une forme étrangement ordonnée :

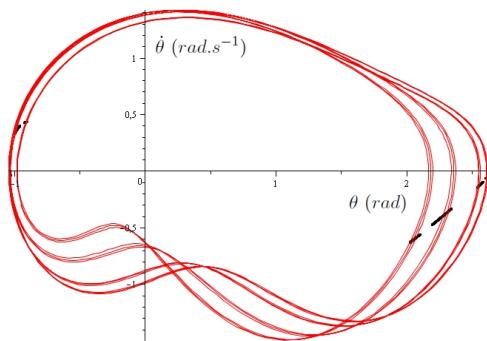


FIGURE 3.12 – Section de Poincaré $s=0.665$

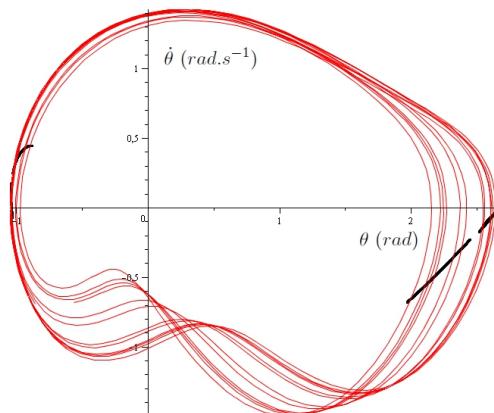
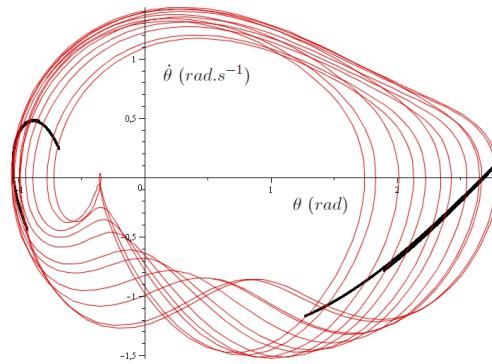
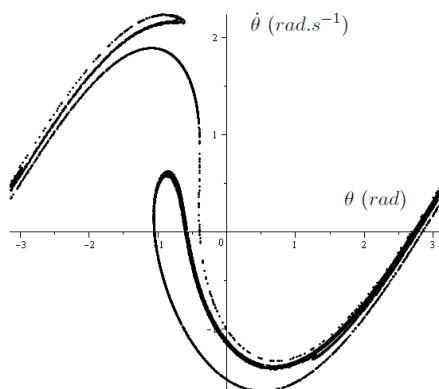


FIGURE 3.13 – Section de Poincaré $s=0.667$

FIGURE 3.14 – Section de Poincaré $s=0.68$ FIGURE 3.15 – Section de Poincaré $s=0.73$. Attracteur étrange

Il s'agit d'un attracteur étrange, caractéristique du chaos. Et si on trace le portrait de phase, on reconnaît un mouvement observé expérimentalement :

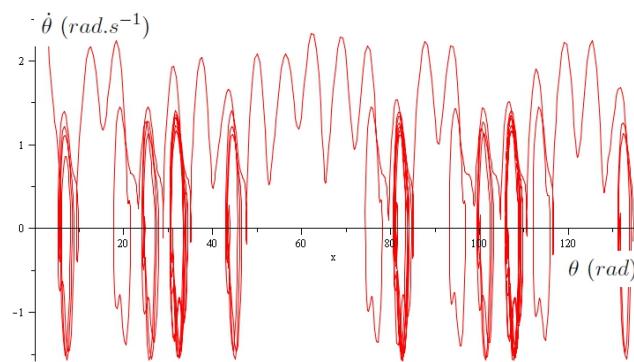
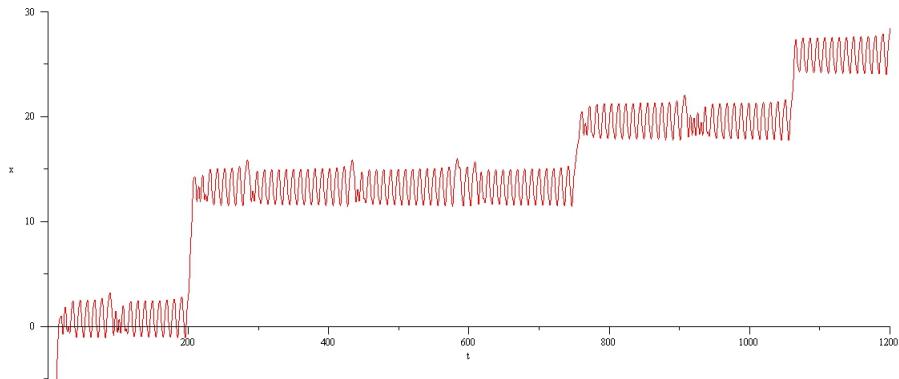


FIGURE 3.16 – Portrait de phase mouvement chaotique

La boussole oscille entre le champ fixe et le champ tournant de manière aléatoire.

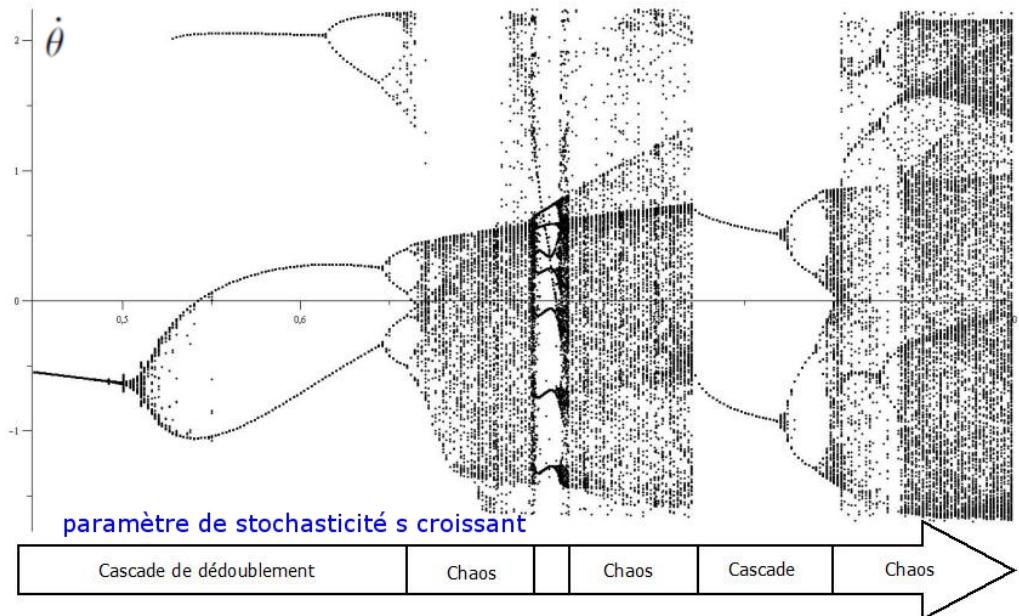
3.5 Intermittence

On continue d'augmenter s , et on voit, juste avant que des solutions régulières réapparaissent un phénomène d'intermittence semblable aux résultats expérimentaux :

FIGURE 3.17 – Intermittence $s=0.82$

3.6 "Mapping" des mouvements de la boussole

On peut résumer ces résultats théoriques au moyen d'un unique graphe : on trace la composante selon $\dot{\theta}$ des points fixes de P, P^2, P^3 , etc... en fonction du paramètre de stochasticité.



On distingue nettement la cascade de dédoublement puis une zone où le mouvement est chaotique (lorsque on a une continuité de points) puis de nouveau des solutions régulières puis une nouvelle cascade etc...

Cette représentation permet de déterminer le mouvement de la boussole grâce aux connaissances du paramètre de stochasticité.

4. Conclusion

Ce T.I.P.E m'a permis d'étudier un phénomène physique simple en apparence, mais qui se révèle d'une grande complexité.

Il apparaît en premier lieu que de nombreux systèmes où interviennent des équations différentielles non linéaires utilisent les outils auxquels j'ai eu à me confronter dans le cadre de cette étude. C'est notamment le cas lors des analyses liées aux dynamos (l'effet dynamo de la terre par exemple) où encore celles des phénomènes météorologiques.

De plus, les expériences que j'ai menées m'ont amené à faire face à des difficultés dont la résolution a nécessité une réflexion à la fois générale et précise sur différents points. Dans l'optique de conduire au mieux ce projet, j'ai également pris contact avec un chercheur dont les connaissances et l'expérience m'ont été précieuses.

Cependant, je suis conscient qu'il reste encore des points perfectibles. En particulier, l'acquisition d'une position angulaire plus précise car 24 ou 32 images/seconde sont insuffisantes ou encore à une étude expérimentale plus quantitative, ce que peut permettre une analyse évolutive selon le coefficient de frottement.

Bibliographie

- [1] Vincent Croquette. Déterminisme et chaos. *Pour la science*, 62 :62–77, Decembre 1982.
- [2] Huyêñ Dang-Vu et Claudine Delcarte. *Bifurcation et chaos*. Edition Ellipse, 2000.
- [3] Jérémie Oden. Le chaos dans les systèmes dynamiques, juin 2007.
- [4] P.Bergé, Y. Pomeau, and Ch. Vidal. *L'ordre dans le Chaos*. Edition Hermann, 1984.