Neist teine, imaginaarosa tingimus ütleb:

$$\operatorname{Im}\left(z^2\right)+\operatorname{Im}\frac{1}{z^2}=0, \tag{1.24}$$

$$\operatorname{Im}\left(z^2\right)+\operatorname{Im}\frac{\left(z^2\right)^*}{\left|z^2\right|^2}=0, \tag{1.25}$$

$$\left(1-\frac{1}{\left|z^2\right|^2}\right)\operatorname{Im}\left(z^2\right)=0 \tag{1.26}$$

ehk

$$|z|=1 \quad \vee \quad z^2\in\mathbb{R}. \tag{1.27}$$

Mida ütleb meile aga esimene võrratus valemis (1.23)? Juhul $|z|=1$ ei saa see olla täidetud: analüüsisime juba, et sel ühikringjoonel on a positiivne. Kui aga $z^2\in\mathbb{R}$, peame lahendama reaalmuutuja võrratuse:

$$A\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+B<0, \tag{1.28}$$

$$\frac{Az^4+Bz^2+1}{z^2}<0. \tag{1.29}$$

Lugeja nullkohti me juba sisuliselt teame:

$$z_0^2\in\left\{-C^2,-\frac{1}{C^2}\right\}. \tag{1.30}$$

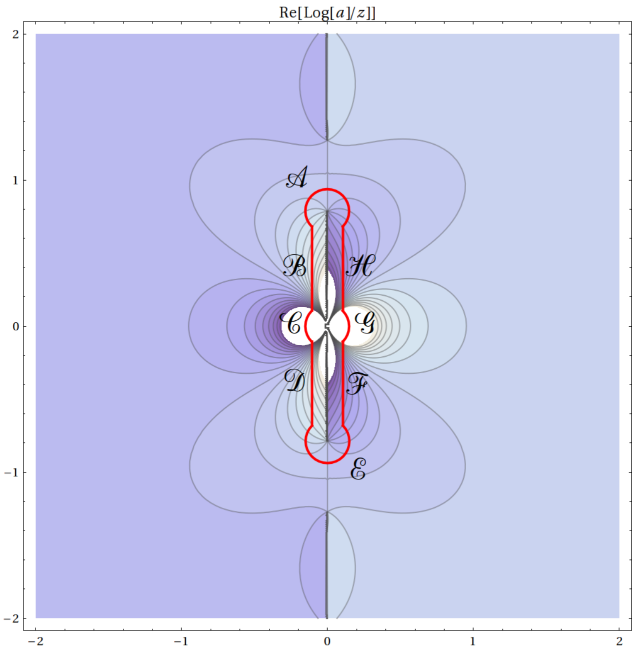
Mõlemad on kordsuselt ühekordsed, kuna z^2 suhtes on nad ruutvõrrandi lahendid. Nimetaja nullkoht $z_0^2=0$ on samuti ühekordne. Paneme veel tähele, et valemi (1.18) kohaselt juhul $y>1$ kehtib võrratus $0<C<1$. Siit järelduv avaldise $A\left(z^2+1/z^2\right)+B$ märk on tabeli viimases veerus:

$z^2>0$	$z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$	+
$-C^2<z^2<0$	$z\in[-iC,0]\cup[0,iC]$	−
$-\frac{1}{C^2}<z^2<-C^2$	$z\in\left[-\frac{i}{C},-iC\right]\cup\left[iC,\frac{i}{C}\right]$	+
$z^2<-\frac{1}{C^2}$	$z\in\left[-i\infty,-\frac{i}{C}\right]\cup\left[\frac{i}{C},i\infty\right]$	−

Teine ja neljas tabeli rida kirjeldavad haruvahetust. Teise rea haruvahetus jääb ühikringi sisse, neljanda oma välja.

1.3 Integreerimiskontuur

Integreerimiskontuuri võime vastavalt Cauchy teoreemile deformeerida integraali muutmata niikaua, kuni me ei ületa sellega ühtki iseärasust. Tõmbame kontuuri siis ümber keskmise haruvahetuse nii kokku kui võimalik. Tekib joon, mis koosneb sirglõikudest $\mathscr{B}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{F}$ ja $\mathscr{H}$ ning kaartest $\mathscr{A}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{E}$ ja $\mathscr{G}$, nagu järgnevalt kujutatud.



1.4 Sümmeetria

Olgu

$$f(z)=\operatorname{Ln}\left[A\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+B\right]\frac{1}{z}, \tag{1.31}$$

nii et

$$I=-\frac{i}{4}\oint f(z)\,dz. \tag{1.32}$$

Kuna

$$\operatorname{Ln}\left(z^*\right)=(\operatorname{Ln}z)^*, \tag{1.33}$$

siis ka

$$f\left(z^*\right)=f(z)^*. \tag{1.34}$$

Järelikult

$$\left(\int_{\mathscr{D}}+\int_{\mathscr{E}}+\int_{\mathscr{F}}\right)f(z)\,dz=-\left[\left(\int_{\mathscr{H}}+\int_{\mathscr{A}}+\int_{\mathscr{B}}\right)f(z)\,dz\right]^*. \tag{1.35}$$

Miinusmärk tuleb sellest, et kaaskompleksi võtmisel muutub integreerimissuund vastupidiseks.

1.5 Kaar $\mathscr{A}$

Kaar $\mathscr{A}$ ümbritseb punkti iC. Selle ümbruses (kaare raadius r olgu konstant)

$$z=iC+re^{i\varphi}\implies dz=ire^{i\varphi}d\varphi. \tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}I_{\mathscr{A}}&=\int_{\mathscr{A}}f(z)\,dz=\\&=\lim_{r\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\operatorname{Ln}\left\{A\left[\left(iC+re^{i\varphi}\right)^2+\frac{1}{\left(iC+re^{i\varphi}\right)^2}\right]+B\right\}\times\\&\times\frac{1}{iC+re^{i\varphi}}\times ire^{i\varphi}d\varphi.\end{aligned} \tag{1.37}$$

Arendades logaritmitava r järgi Taylori ritta kohal $r=0$ ja jättes alles vaid esimest järku tuletisega liikme — kuna