# Confinement of quarks (1974, Wilson)

quarkのconfinementをqualitativeに説明したい。

⇒ 4d Euclidean spaceをdiscritizeってlattice化させたtheoryを建てて、strong-coupling limitでquarkがbindされていることを確かめる。

使っているのは Abelian lattice gauge theory (QED with strong coupling)

使っている fermionは quark

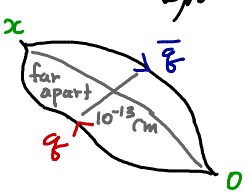
quantizationとしては path integral formalism

## Section II. Quark binding mechanism

☆ Quark confinementの判断基準を建てたい。
→ 何がどんな形をしていたら, quarkがbindってると言えるのか?

quark-antiquarkのloopをみる。→ current-current propagator

$$D_{\mu\nu}(x-0)=\langle\Omega|TJ_\mu(x)J_\nu(0)|\Omega\rangle$$




all classical quark pathとall classical gauge field configurationに対して, $e^{iS}$を重みとして average.
そこには $\exp[ig\oint A_\mu(x)ds^\mu]$ もある。
→ first quantization...

vacuum loopは importantでないと仮定。

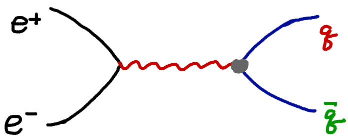
large $q$ $\longrightarrow$ small $x$

large $x$ $\not\longrightarrow$ small $q$ $\quad\because$ QED(or QCD)のみ考えているから，ある程度は stableにいられる。
(weak int.を考りョに入れていない。)

large $x$ での well-separated $q$-$\bar{q}$の有無

$\Longrightarrow$ large $x$ での $e^+$-$e^-$ annhl. の $q$-$\bar{q}$ thresholdの searchのようなこと。

$\sim \exp[-(2m)\cdot\sqrt{x^2}]$




★ gauge field averageの計算 → quark confinementの判断基準を建てるために。

$$\frac{\int \mathcal{D}A \exp\left[i\int d^4y\, \frac{1}{2}A_\mu(y)\,(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(y) + ig\oint A_\rho(y)\, ds^\rho\right]}{\int \mathcal{D}A \exp\left[i\int d^4y\, \frac{1}{2}A_\mu(y)\,(\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(y)\right]}$$

$\Longrightarrow$ いわゆる Wilson loopの vacuum expectation value.

Completing the squares.

$$A_\mu(y) \to A'_\mu(y) = A_\mu(y) - ig\oint D_{\mu\sigma}(y-y')\,ds'^\sigma$$

$$\left( (\partial^2 g^{\mu\nu}-\partial^\mu\partial^\nu)D_{\nu\rho}(y-y') = i\,\delta^\mu{}_\rho\, \delta^{(4)}(y-y') \right)$$

$\Longrightarrow$ $\exp\left[-g^2\oint ds^\mu \oint ds'^\nu D_{\mu\nu}(y-y')\right]$

1. four-dimensional ( temporal + 3- spatial)

$$D_{\mu\nu}(y-y') = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} e^{-iq\cdot(y-y')} \longrightarrow [M]=2 \Rightarrow \sim \frac{g_{\mu\nu}}{(y-y')^2}$$ 自ら,ふるまい。

$y-y'$ large → negligible → $y'$が $y$の neighbourhood なら contribution 大。


$$-g^2 \oint ds^\mu \oint ds'^\nu D_{\mu\nu}(y-y') \sim \int_0^P dy \int_0^P dy' \, \Theta(y-y') \frac{1}{(y-y')^2}$$

tangent vector 間の角度の information 有り。

$$\sim \int_0^P dy \int_{y-\delta}^{y+\delta} dy' \cdot 1 \cdot \frac{1}{(y-y')^2} = \int_0^P dy \left[-\frac{1}{y-y'}\right]_{y-\delta}^{y+\delta}$$

$$= \frac{2}{\underset{(\text{cutoff})}{\delta}} \int_0^P dy \simeq \frac{2}{\delta}\cdot P$$

∴ (gauge field averaging @ 3-spatial dim) $\sim e^{-g^2\frac{2}{\delta}P} \underset{(P\sim\sqrt{x^2})}{\sim} e^{-C\sqrt{x^2}}$

threshold に contribute.

2. 2-dimensional (temporal + 1-spatial)

$D_{\mu\nu}(y-y')$ の $[M]=0$ $\sim \eta_{\mu\nu}\log(y-y')^2$

$y$ と $y'$が neighbour でなくてもいい → large $(y-y')$ にキョウミがある。 → $P^2$

(gauge field averaging @ 2-dim) $\sim e^{-c'P^2} \sim e^{-c'P\cdot\sqrt{x^2}}$

threshold に contribute.

large $x$ means large $cP$. ($\because P \sim \sqrt{x^2}$)

→ $x$が大きくなればなるほど、それに伴って $q$-$\bar{q}$ thresholdも一緒に大きくなる。

→ well-separated (or isolated) $q$や$\bar{q}$を見るためにはlarge $x$が必要なのに、large $x$になったら $q$-$\bar{q}$ thresholdも果てしなく大きくなるので、こういうことが起こるのは不可能。

$\therefore$ 2-dim. spaceではquarkのconfinementあり。

$\exp[-c\sqrt{x^2}]$の 4-dim.ではこういうことが起こらない

⇒ free quark-antiquarkがありえるなら, そのWilson loopのvacuum expectation valueは

$e^{-cP}$のようなふるまいをしているだろう。

まとめ： Quark binding mechanism

Wilson loopのvacuum expectation valueが,

$e^{-cP}$のようなふるまいをしているなら、binding 無し (かもしれない)

$e^{-cP^2}$のようなふるまいをしているなら、binding 有り。

lattice discretizationをしてから, strong coupling approximationにてWilson loopのvacuum expectation valueを計算したら、$\exp[-cP^2]$のようなふるまいをしていた!

⇒ (少なくともstrong couplingではconfinementあり!)

# Section III. Lattice quantization of gauge fields

## A Classical action on a lattice

$$\boxed{\nabla_\mu \psi \to \frac{\psi_{n+\hat\mu} - \psi_{n-\hat\mu}}{2a}} \qquad \boxed{\int d^4x \to a^4 \sum_n}$$

gauge transformation on the lattice

$$\psi_n \to \psi_n' = e^{ig y_n} \psi_n$$

$$\bar\psi_n \to \bar\psi_n' = \bar\psi_n e^{-ig y_n}$$

$$A_{n\mu} \to A_{n\mu}' = A_{n\mu} - \frac{y_{n+\hat\mu} - y_n}{a}$$

fermionic part

$$A_\psi = -\left(-a^3 \sum_n \sum_\mu \frac{1}{2} \bar\psi_n \gamma_\mu (\psi_{n+\hat\mu} - \psi_{n-\hat\mu}) + a^4 \sum_n m_0 \bar\psi_n \psi_n\right)$$

nearest-neighbour coupling → ~~gauge~~ inv.

$$\begin{cases} \bar\psi_n \gamma_\mu \psi_{n+\hat\mu} \to \bar\psi \gamma_\mu \psi_{n+\hat\mu} e^{iagA_{n\mu}} \quad (\to U_\mu(n)) \\ \bar\psi_n \gamma_\mu \psi_{n-\hat\mu} \to \bar\psi_{n+\hat\mu} \gamma_\mu \psi_n \to \bar\psi_{n+\hat\mu} \gamma_\mu \psi_n e^{-iagA_{n\mu}} \to (U_\mu^\dagger(n)) \end{cases}$$

link variable

これなら, gauge inv.

$$B_{n\mu} = agA_{n\mu} \to 2\pi \text{ periodicity.}$$

· Gauge field action.

field strength tensorのdiscretization

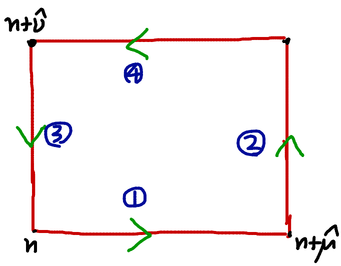
$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F_{n\mu\nu}$$

$$f_{n\mu\nu} = a^2 g F_{\mu\nu} = B_{n+\hat{\mu},\nu} - B_{n\nu} - B_{n+\hat{\nu},\mu} + B_{n\mu}$$

$$\rightarrow = B_{n\mu} + B_{n+\hat{\mu},\nu} - B_{n+\hat{\nu},\mu} - B_{n\nu}$$

$B_{n\mu}$のperiodicityを保たせつつactionを作りたい。→ $\overset{\text{①}}{e^{iB_{n\mu}}}\,\overset{\text{②}}{e^{iB_{n+\hat{\mu},\nu}}}\,\overset{\text{③}}{e^{-iB_{n+\hat{\nu},\mu}}}\,\overset{\text{④}}{e^{-iB_{n\nu}}}$

$$\boxed{A_B = \frac{1}{2g^2}\sum_n\sum_\mu\sum_\nu e^{if_{n\mu\nu}}} \xrightarrow[\text{continuum limit}]{} A_B \simeq a^4 \sum_n \left\{-\frac{1}{4}(F_{n\mu\nu})^2\right\}$$




full action (ただし, $K=\frac{1}{2}a^3$、$c=m_0 a^4$)

$$A = -\left[-K\sum_n\sum_\mu\left(\bar{\psi}_n\gamma_\mu\psi_{n+\hat{\mu}}e^{iB_{n\mu}} - \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu\psi_n e^{-iB_{n\mu}}\right) + c\sum_n\bar{\psi}_n\psi_n - \frac{1}{2g^2}\sum_n\sum_\mu\sum_\nu e^{if_{n\mu\nu}}\right]$$

## B. Quantization

- path integralの lattice versionを定義する。
- transfer matrix methodで Hamiltonianを定義する。

fermion(grassman)はあとでやり、gauge fieldから。

Wilson loopの vacuum expectation valueから。

$$\exp\left[ig\oint_P A_\mu(x)\,ds^\mu\right] \longrightarrow \exp\left[i\sum_P \underbrace{(\pm)}_{\text{orientation}} B_{n\mu}\right]$$

orientation $\begin{cases} \overset{n}{\bullet} \longrightarrow \overset{n+\hat{\mu}}{\bullet} & : (+) \\ \overset{n}{\bullet} \longleftarrow \overset{n+\hat{\mu}}{\bullet} & : (-) \end{cases}$

$$I(P) = \frac{\left(\prod_m \prod_\nu \int_{-\pi}^{\pi} dB_{m\nu}\right) \exp\left[i\sum_P (\pm) B_{n\mu} + \frac{1}{2g^2}\sum_{n\mu\nu} e^{if_{n\mu\nu}}\right]}{Z}$$

$$Z = \left(\prod_m \prod_\nu \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}}_{\text{gauge fixingは要らない。}} dB_{m\nu}\right) \exp\left[\frac{1}{2g^2}\sum_{n\mu\nu} e^{if_{n\mu\nu}}\right]$$

c.f.) 計算の便利のために使うことはある。$\longrightarrow$ ex) maximal tree

- Hamiltoneanの definition : transfer matrix method

  time sliceの設定 : $-N \le n_0 \le N$ ($2N+1$個。)

$V$は time sliceごとの、3d-latticeの全energyを与える matrix ($V = e^{-aH}$)

$$Z = \mathrm{Tr}\, V^{2N+1} \left( = \langle n | V^{2N+1} | \underbrace{n}_{\text{energy eigenstate.}} \rangle \right)$$

$V = V(B, B')$ — BとB'は adjacent time slice 同士。($B = B_{n_0 0}$、$B' = B_{n_0+1,0}$)

— $n_0$ から $n_0+1$ まで time evolution をしてくれる。

$$\left.\begin{array}{l} V(-N, -N+1) \\ \quad\vdots \\ V(-1, 0) \\ V(0, 1) \\ V(1, 2) \\ \quad\vdots \\ V(N, -N) \end{array}\right\} \longrightarrow (2N+1) \text{ pairs}$$

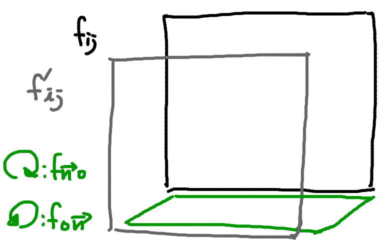
2つのVの multiplicationには $\prod_i \int_{-\pi}^{\pi} dB_{\vec{m} i}$ が necessary.

$$V(B,B')V(B',B'') = \prod_i \int_{-\pi}^{\pi} dB'_{\vec{m} i} \left(\prod_{\vec{m}} \int_{-\pi}^{\pi} dB_{\vec{m} 0}\, e^{U}\right)\left(\prod_{\vec{m}} \int_{-\pi}^{\pi} dB'_{\vec{m} 0}\, e^{U'}\right)$$

$$U = \frac{1}{4g^2}\sum_{\vec{n}}\sum_i\sum_j \left(e^{if'_{\vec{n}ij}} + e^{if_{\vec{n}ij}}\right) + \frac{1}{2g^2}\sum_{\vec{n}}\sum_i \left(e^{if_{\vec{n}i0}} + e^{if_{\vec{n}0i}}\right)$$

$$U' = \frac{1}{4g^2}\sum_{\vec{n}}\sum_i\sum_j \left(e^{if''_{\vec{n}ij}} + e^{if'_{\vec{n}ij}}\right) + \frac{1}{2g^2}\sum_{\vec{n}}\sum_i \left(e^{if'_{\vec{n}i0}} + e^{if'_{\vec{n}0i}}\right)$$

$$U+U' = \frac{1}{4g^2}\sum_{\vec{n}}\sum_i\sum_j \left(e^{if''_{\vec{n}ij}} + \underbrace{2e^{if'_{\vec{n}ij}}}_{\prod_i \int_{-\pi}^{\pi} dB'_{\vec{m} i}} + e^{if_{\vec{n}ij}}\right) + \frac{1}{2g^2}\sum_{\vec{n}}\sum_i \left(\underbrace{e^{if'_{\vec{n}i0}} + e^{if'_{\vec{n}0i}}}_{\prod_{\vec{m}} \int_{-\pi}^{\pi} dB'_{\vec{m} 0}} + \underbrace{e^{if_{\vec{n}i0}} + e^{if_{\vec{n}0i}}}_{\prod_{\vec{m}} \int_{-\pi}^{\pi} dB_{\vec{m} 0}}\right)$$



c.f.)

$$U(N,-N)+U(-N,-N+1)=\frac{1}{4g^2}\sum_{\vec{n}ij}\left(e^{if^{(-N+1)}_{\vec{n}ij}}+2e^{if^{(-N)}_{\vec{n}ij}}+e^{if^{(N)}_{\vec{n}ij}}\right)+\frac{1}{2g^2}\sum_{\vec{n}i}\left(e^{if^{(-N)}_{\vec{n}i0}}+e^{if^{(-N)}_{\vec{n}0i}}+e^{if^{(N)}_{\vec{n}i0}}+e^{if^{(N)}_{\vec{n}0i}}\right)$$

V: Hermitian matrix → $\mathbb{R}$ eigenvalue → complete orthogonal eigenstate.

$$V|n\rangle = \lambda|n\rangle \qquad V^{2N+1}|n\rangle = \lambda^{2N+1}|n\rangle$$

V: ある time slice の 3d lattice 上の全 energy.

V たちに関してはかけ算だったが，全ての time slice の energy は足されるべき。⇒ logarithm.

$$\therefore E=-\underbrace{a^{-1}}\log\lambda \qquad \Rightarrow \quad V=e^{-aH}$$

→ consideration for dimension.

- quark binding は Abelian でも説明可 → ここでは Abelian のみ。

- grassmann integration: demand "translational invariance"

$$\langle\bar{\psi}_0\psi_0\bar{\psi}_1\psi_1\rangle=\int d\psi_1 d\bar{\psi}_1 d\psi_0 d\bar{\psi}_0\,\bar{\psi}_0\psi_0\bar{\psi}_1\psi_1=1 \qquad \left(\int d\eta\cdot 1=0,\ \int d\eta\cdot\eta=1\right)$$

$$(\text{the others}) = 0$$

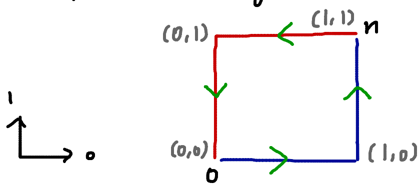
いじょうは current-current propagator on the lattice

$$D_{n\mu\nu}=\frac{\left(\prod_m\prod_\nu\int_{-\pi}^{\pi}dB_{m\nu}\right)\langle\bar{\psi}_n\gamma_\mu\psi_n\bar{\psi}_0\gamma_\nu\psi_0\,e^A\rangle}{\underbrace{\left(\prod_m\prod_\nu\int_{-\pi}^{\pi}dB_{m\nu}\right)\langle e^A\rangle}_{=Z_{tot}}}$$

K expansion (hopping parameter expansion)

→ どんなsituationを計算したいか。

for simplicity, unit squareで考えよう。




quark : $\exp\left[K\sum_n\sum_\mu \bar{\psi}_n\gamma_\mu\psi_{n+\hat{\mu}}e^{iB_{n\mu}}\right] \to (K\bar{\psi}_{00}\gamma_0\psi_{10}e^{iB_{00,0}})\times(K\bar{\psi}_{10}\gamma_1\psi_{11}e^{iB_{10,1}})$

antiquark $\exp\left[K\sum_n\sum_\mu(-)\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu\psi_n e^{-iB_{n\mu}}\right] \to (-K\bar{\psi}_{11}\gamma_0\psi_{01}e^{-iB_{01,0}})\times(-K\bar{\psi}_{01}\gamma_1\psi_{00}e^{-iB_{00,1}})$

unit squareを作るにはこの4つが必要。

quarkが, (0,0)、(1,0), (1,1) に hop
antiquarkが (0,0)、(0,1)、(1,1) に hop
→ Wilson lineは, hopの足あと。

closed loopにならないと, grassman integral bracket ⟨・⟩ が 0になる。($\because \int d\eta\, 1 = 0$)

それゆえ, Wilson lineも, Wilson loopにならざるを得ない。

gauge field path integralは, Wilson loopのvacuum exp. valueの計算になっている。

・$e^{-c\sum_n\bar{\psi}_n\psi_n}$で必要なorderのtermだけ取る!

# Section IV. Strong-coupling Approximation

• quark confinementの有無を調べる。($g \gg 1$ , $K \ll 1$ にて)

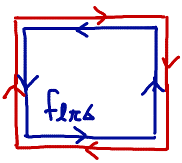
•判断の手段として、先ほど存在が確かめられたWilson loopのvacuum expectation valueを使う。

•そのnumerator ($I_N(P)$)だけ、考えてみる。

$$I_N(P) = \left(\prod_m \prod_\nu \int_{-\pi}^{\pi} dB_{m\nu}\right) \exp\left[i \sum_P (\pm) B_{n\mu} + \underbrace{\frac{1}{2g^2}}_{\ll 1} \sum_{n\mu\nu} e^{i f_{n\mu\nu}}\right]$$

• テストに zeroth order にしたら、Wilson loopの $\exp(iB)$ たちのせいで 0になっちゃった。

• first order にしたら、$\sum_P (\pm) B_{n\mu} + f_{l\pi\sigma} = 0$ だったら nonzero contributionであるのがわかった。




→ Wilson loopが plaquetteの逆orientationでplaquetteぴったりだったら良い。

• arbitrary Wilson loopを、k-th orderで打ち消し合ったとしよう。

$$I_N^{(k)}(P) = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2g^2}\right)^k \left(\prod_m \prod_\nu \int_{-\pi}^{\pi} dB_{m\nu}\right) \sum_{l_1\pi_1\sigma_1} \quad \sum_{l_k\pi_k\sigma_k} \exp\left[i \sum_P (\pm) B_{n\mu} + i f_{l_1\pi_1\sigma_1} + \quad + i f_{l_k\pi_k\sigma_k}\right]$$

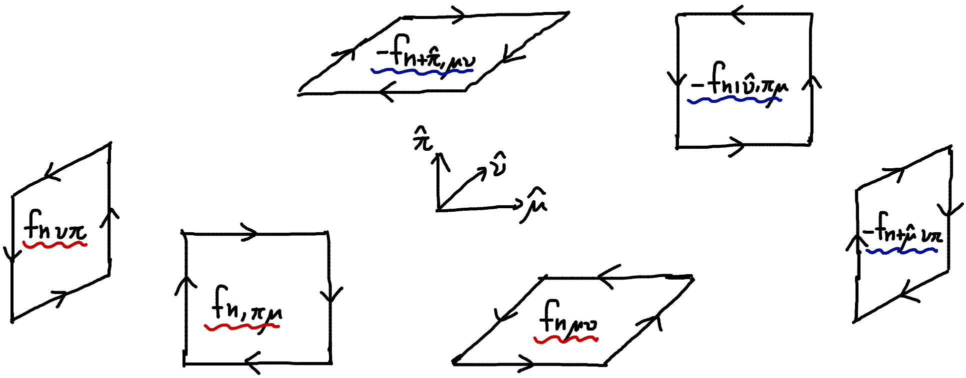
→ Wilson loopの enclosed area を plaquetteのタイルで詰めたようなこと。

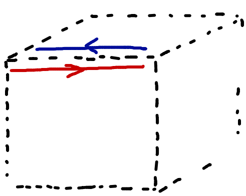
$$(\text{タイルの個数}) = \frac{A}{a^2} \; (=k) \qquad (A \text{ enclosed area})$$

$$I_N(P) \sim (g^{-2})^{\frac{A}{a^2}} = \exp\left[-\left(\frac{\log g^2}{a^2}\right) \cdot A\right] \sim \exp\left[-\left(\frac{2\log g}{a^2}\right) P^2\right]$$ ⇒ confinementあり!

minimal enclosed area 以外にも nonzero contribution はありえる。

unit cube (lattice の Bianchi identity) で例えよう。




 $= 0$

こういうのを用いて, higher-order の nonzero contribution も考えられる。$\Rightarrow$ complicate すぎる。

denominator $Z$ も考えて, $I(P)$ 全体(ratio) を考えなければいけない。