

Z^0 Boson 及び J/ψ Meson の質量測定と μ 粒子の寿命測定

200612296 崔在敦

平成 20 年 7 月 1 日

目 次

1	実験の目的	2
2	μ 粒子の寿命測定実験	2
2.1	実験の準備	2
2.1.1	実験装置	2
2.1.2	μ 粒子寿命測定の原理	2
2.2	HV Curve と Timing Curve の測定	3
2.2.1	ライトリーク・テスト	3
2.2.2	検出効率の HV 依存性の測定	4
2.2.3	タイミング・カーブの測定	9
2.3	μ 粒子寿命測定のためのセットアップ及び測定	11
2.4	μ 粒子の寿命データの解析	12
2.4.1	Al Stopper	12
2.4.2	Fe Stopper	14
3	CDF データによる Z^0 、 J/ψ 粒子の質量解析	16
3.1	NTUPLE を用いたデータ解析	16
3.2	Z^0 Boson	17
3.2.1	PAW を用いた Z^0 Boson 不変質量解析	17
3.3	J/ψ Meson	18
3.3.1	第一次 J/ψ Meson 不変質量解析 :: Systematic Error	18
3.3.2	第二次 J/ψ Meson 不変質量解析 :: m_μ を考慮した補正	19
4	その他	21
4.1	課題	21
4.2	Dirac 方程式入門	28

1 実験の目的

素粒子実験の入門として、宇宙船中の μ 粒子を捕らえて μ 粒子の寿命を測定する。また、CDF(Collider Detector at Fermilab) 検出器で得られたデータを使って、 Z^0 Boson 及び J/ψ Meson の質量を求める。素粒子やその相互作用に関する理解を深めるとともに、素粒子物理学実験に用いる基本的な検出器、エレクトロニクス取り扱い、実験データの処理法を習熟し、先端検出器の概要について学ぶ。

2 μ 粒子の寿命測定実験

2.1 実験の準備

2.1.1 実験装置

1. オシロスコープ (Oscilloscope)
2. 関数ジェネレーター (Function generator)
3. 同軸ケーブル (Coaxial Cable)
4. 波高弁別機 (Discriminator module)
5. ナノ・セカンド・ディレイ (Nano-second delay module)
6. 同時信号検出機 (Coincidence module)
7. 遅延ゲート発生器 (Gate & delay generator module)
8. スケーラー (Scaler)
9. シンチレーション・カウンタ (Scintillation counter)
10. 高圧電源 (High-Voltage power system)

2.1.2 μ 粒子寿命測定の原理

ある寿命を持つ粒子の時刻 t での個数を $N(t)$ とすると、次のような関係が成り立つことが知られている。

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) \quad (2.1)$$

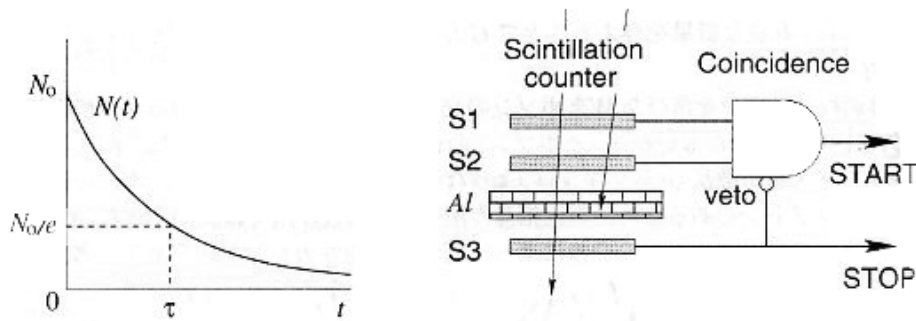
つまり、単位時間内に崩壊する粒子の個数は $N(t)$ に比例している。ここで Γ は粒子の種類によって決まる定数で、普段

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (2.2)$$

とおき、 τ をその粒子の平均寿命と定義する。(2.1) を解くと、

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (2.3)$$

となる。下の左図で (2.3) を図示した。



この実験の原理は上の右図によく縮約されている。宇宙から飛んできたミュ粒子は、ほとんどの割合で測定装置を貫くが、その中の一部は $S2$ と $S3$ の間のストッパ (Al、Fe) にかかってしまう (言い換えると、シンチレーションカウンター $S1$ 、 $S2$ を通過する)。そしてやがて数マイクロ秒後にミュ粒子は崩壊して電子や陽電子と 2 つの中性微子に分かれるが、この遅れて生まれた電子を $S3$ で検出するのである。このようなミュ粒子のそれぞれのイベントの所要時間はパルスカウンターで測定する。それぞれのイベント測定のスタート信号としては $S1 \wedge S2 \wedge \bar{S3}$ を、ストップ信号としては $S3$ を使う。

ここで、(2.3) において時刻 t 間で二崩壊した個数を $N_d(t)$ とすると、 $N_d(t) = N_0 - N(t)$ より、

$$N_d(t) = N_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \quad (2.4)$$

なので、 μ 粒子が金属板で静止した時刻を $t = 0$ としたとき、時刻 t において単位時間あたりに崩壊する粒子数は、

$$\frac{dN_d}{dt}(t) = \frac{1}{\tau} N_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (2.5)$$

となる。ここで、スタート信号とストップ信号の間の時間を t として、これを横軸にとり、時刻 t から dt における崩壊した度数 $N_i(t)$ を縦軸にとってグラフを描く (ヒストグラム)。とくに、 $t - \log N_i(t)$ グラフ (ヒストグラム) は、時刻 t に対して傾き $-\frac{1}{\tau}$ の直線をなすので、これからミュ粒子の平均寿命 τ を知ることができる。

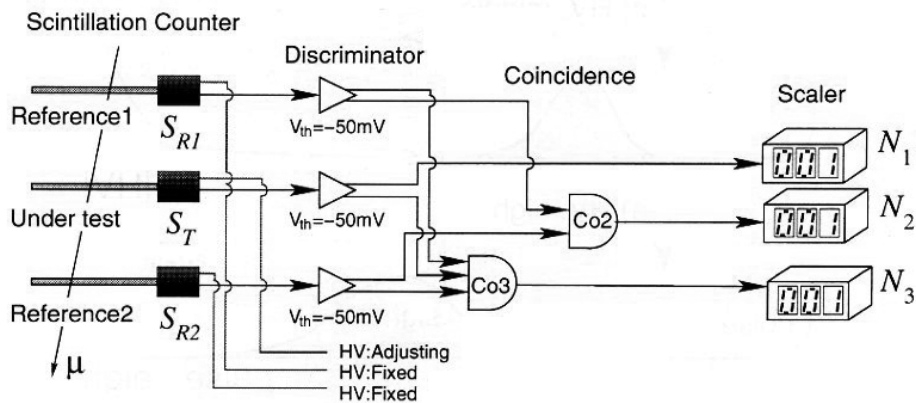
2.2 HV Curve と Timing Curve の測定

2.2.1 ライトリーク・テスト

フォトマルは光に敏感なので、まずは、オシロスコープを用いて十分なライトリークテストを通し、光漏れを点検しなければいけない。異常信号がとられた場合、黒テープなどで十分に補修する。

2.2.2 検出効率の HV 依存性の測定

HV Curve の測定 シンチレーションカウンターは人間が作ったものであり、カウンターごとに個性が必ず存在するはずである。荷電粒子が通過することによってカウンターで発生する光子の数はほぼ Constant であるとしても、その光子がフォトマルの光電面までたどり着く確率は全てのカウンターに対して全く同じく作るのはほとんどできないので、光電面を照らす入射光の量はカウンターごとに違って来る。それに、フォトマルに入射した光の量に対する出力信号の大きさはフォトマルの個性、または印加電圧 (HV) に依存する。しかも、フォトマルのダイノードからの熱電子などのさまざまな原因でノイズも発生する。一般にノイズの波高分布は波高が低いほど頻度が高い。したがって、荷電粒子が通過する際、カウンターの応答が、信号に対する波高は十分に拾うがノイズはできるだけ落とすような、そういうデスクリミネータの適切な V_{th} (しきい値) に対して適切な大きさになるように、フォトマルの電圧を設定する必要がある。この最適な増幅率を設定するために、HV カーブの測定を以下のように行う。



まず、テストしようとするカウンター (S_T) の上下に Reference1 カウンター (S_{R1})、Reference2 カウンター (S_{R2}) を配置し、上図のような回路を組み、スケーラーで N_1 、 N_2 、 N_3 を計数する。ここで、 N_1 、 N_2 、 N_3 の意味は次のようである。

N_1 カウンター T が MIP 信号、またはノイズを検出した数。

N_2 カウンター $R1$ 、および $R2$ が同時に信号を検出した数。すなわち、 $R1$ 、 $R2$ の間に位置する T を通過した事象の数。

N_3 カウンター $R1$ 、および $R2$ が同時に信号を検出し、そのとき、 T も同時に信号を検出した事象の数。

ここで、デスクリミネータの個性もありうるので、なるべくカウンターごとに専用入力端子を決めておく。そしてそれぞれのしきい値は -50mV と固定しておく。信号パルスのしきい値を超えるタイミングのずれも考慮して、デスクリミネータの出力幅も、たとえば 50ns 程度に十分広めにしておく。 S_{R1} 、 S_{R2} のフォトマルが印加す

る電圧は、とりあえずノイズは気にせず、十分な信号が拾える増幅率になるように、 -1800V 程度に高めておく。そして S_T の印加電圧は初期値 -2000V から約 100V ごと高めていって測定を行う。

このとき、それぞれの HV ごとに N_3/N_2 の値をとり、プロットする。これは、”(MIP 信号)+(ノイズ)の係数率(rate)”グラフである。また、それぞれの印加電圧でのカウントを数えるとき、あらかじめ決めておいた測定時間間隔 ΔT を用いて $N_1/\Delta T$ の値もとり、プロットする。これは”検出効率”である。

測定データの統計処理 係数率はポアソン分布に従う。ポアソン分布は発生確率が一定な、偶発事象を扱うものである。4.1 節にその性質に関して詳しく述べておいたが、期待値が μ である事情が N 回観測されたとき、確率分布は

$$\frac{\mu^N e^{-\mu}}{N!} \quad (2.6)$$

に従う。ここで、一般的に μ は不明であるので、観測量 N を μ の推定量として使うことにする。実際、これは N が大きければ大きいほど正しい。その標準偏差を統計誤差の幅として扱うと、

$$N \pm \sqrt{N} \quad (2.7)$$

となる。したがって、統計誤差を入れた係数率は

$$\frac{N}{\Delta t} \pm \frac{\sqrt{N}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

検出効率は、” N_2 回試行して N_3 回成功した”というケースなので、二項分布に従う。試行の成功確率を p としたとき、

$$P(N_3; N_2, p) = \frac{N_2!}{N_3!(N_2 - N_3)!} p^{N_3} (1 - p)^{N_2 - N_3} \quad (2.9)$$

ここでも、 p は一般的に不明なので、その推定値として N_3/N_2 を使う。実際、これは N_2 、 N_3 が大きいほど正しい。その標準偏差を統計誤差の幅として扱うと、

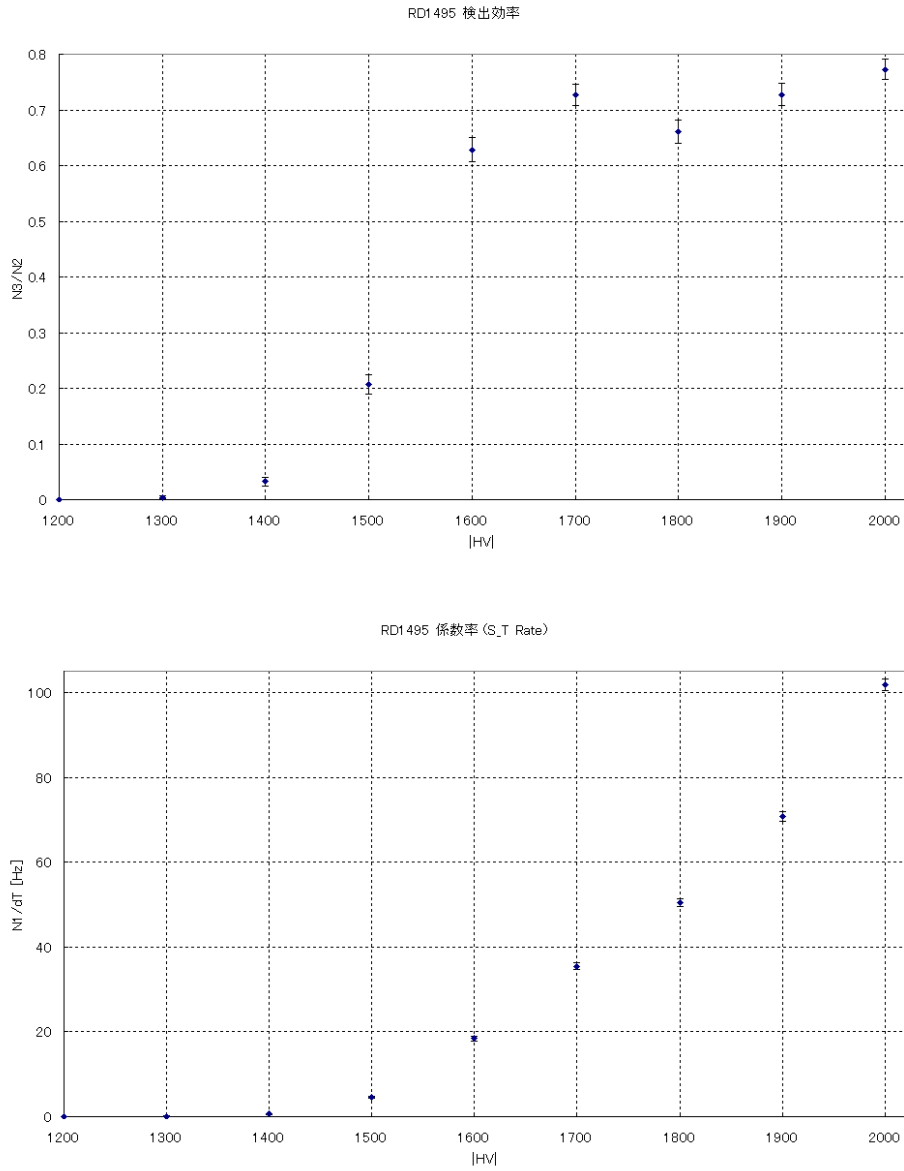
$$N_3 \pm \sqrt{N_3 \cdot \frac{N_3}{N_2} \cdot \left(1 - \frac{N_3}{N_2}\right)} \quad (2.10)$$

ゆえに、検出効率の統計誤差は

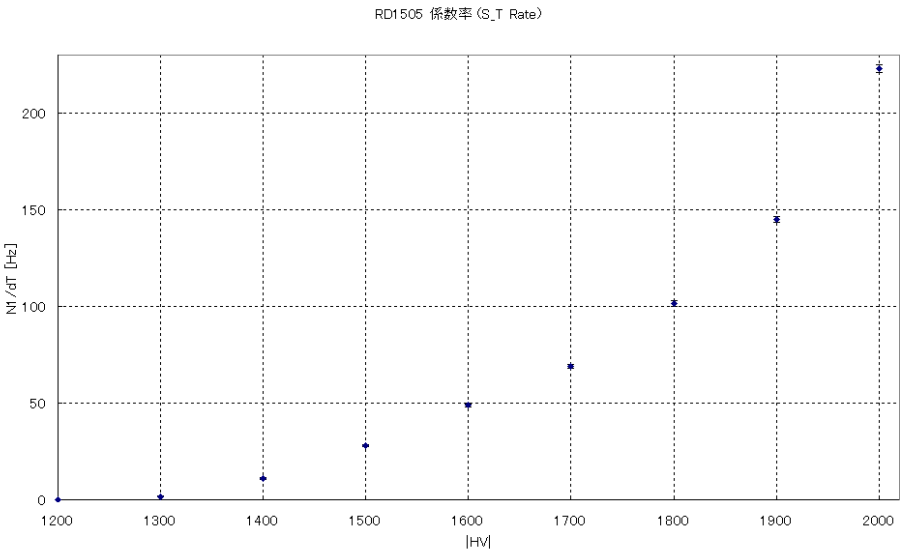
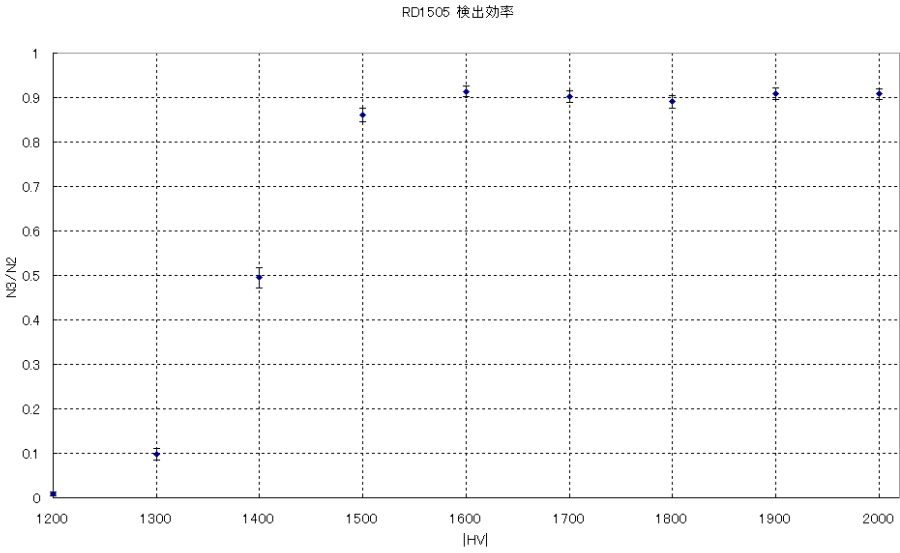
$$\frac{N_3}{N_2} \pm \frac{1}{N_2} \left(\sqrt{N_3 \cdot \frac{N_3}{N_2} \cdot \left(1 - \frac{N_3}{N_2}\right)} \right) \quad (2.11)$$

となる。

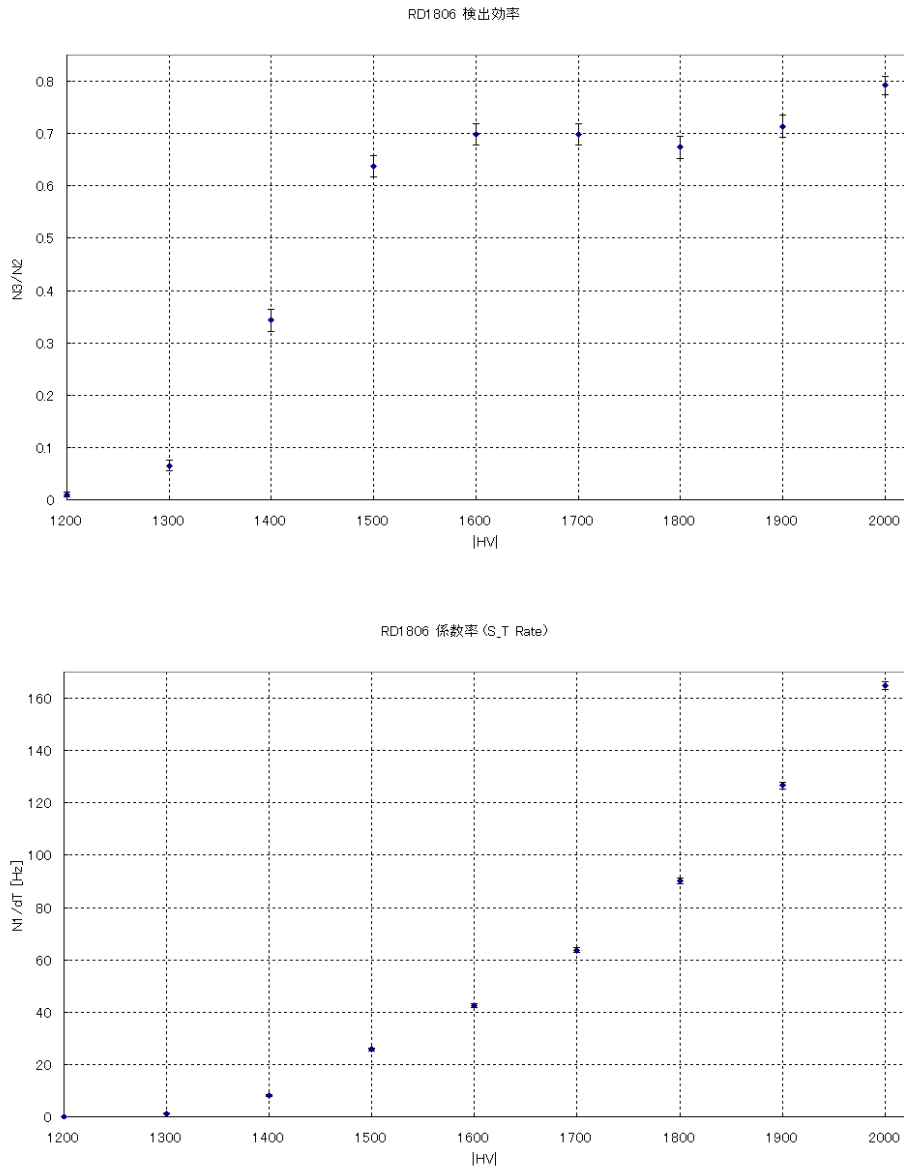
RD1495 検出効率カーブのプラトーの部分が相当揺れている。測定未熟よりも、測定回数不足に起因しているようである。この HV 値は 1700 V に決めた。



RD1505 1550 V

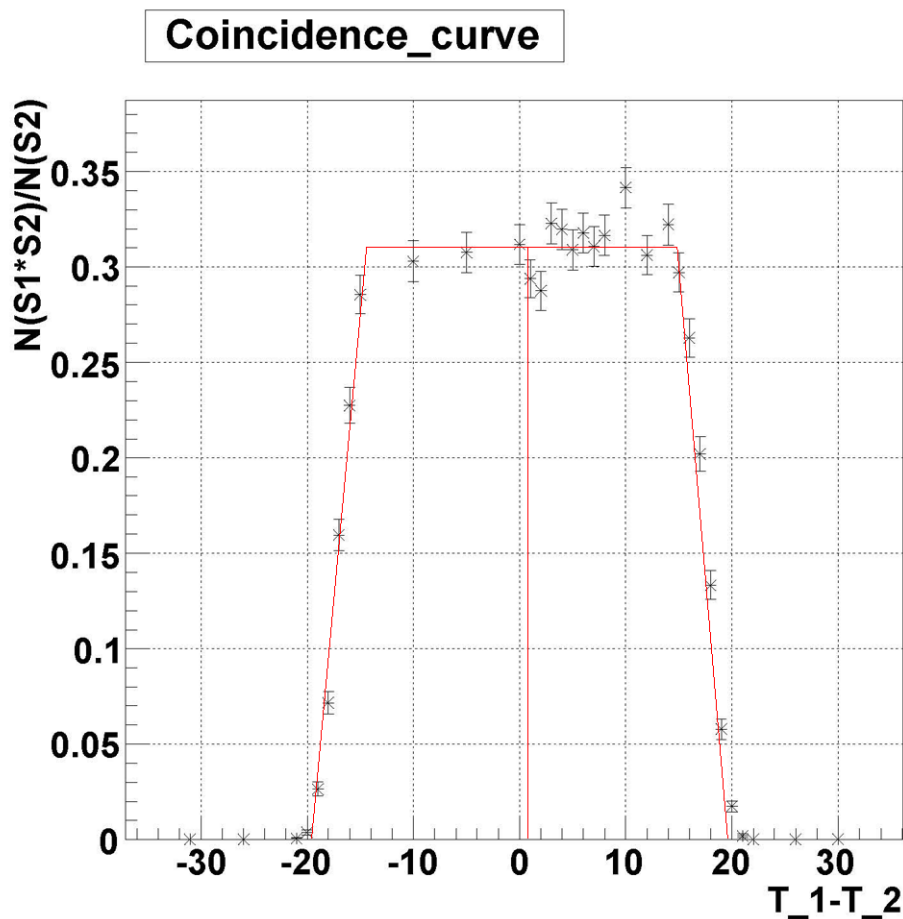


RD1806 1550 V



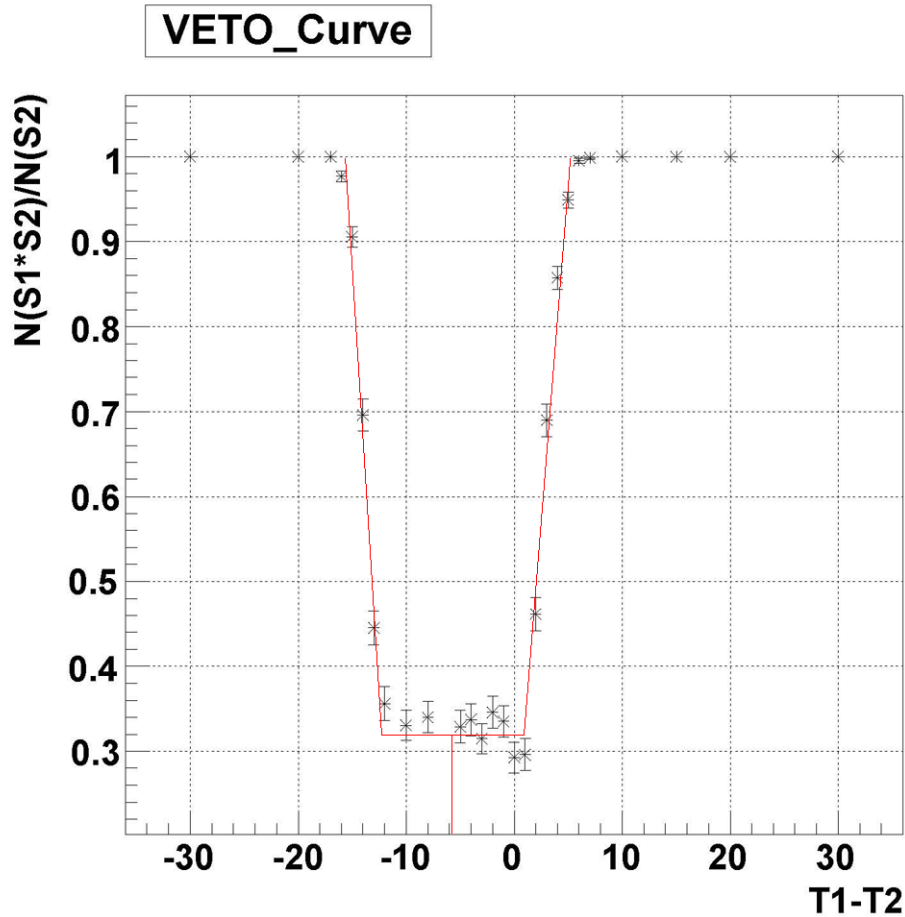
2.2.3 タイミング・カーブの測定

Coincidence Curve S_1 と S_2 のタイミングをあわせる。積み重ねた順番は上から RD1495、RD1505、RD1806 である。それぞれの印加電圧は HV Curve で確定した値を使う。



Delay の設定値はカーブの中央値を使う。 $T_1 - T_2$ のタイミングの差は約 0 ns であった。図の赤い線は 0ns でなく 1ns をさしているようだが、それは赤い線を強調するために少しずらして描いたからである。

Veto Curve $S_1 \cdot S_2$ と S_3 のタイミングをあわせる。 $(T_1 - T_2)$ (S_1 と S_2 のタイミング) は Coincidence Curve で得た値を使う。



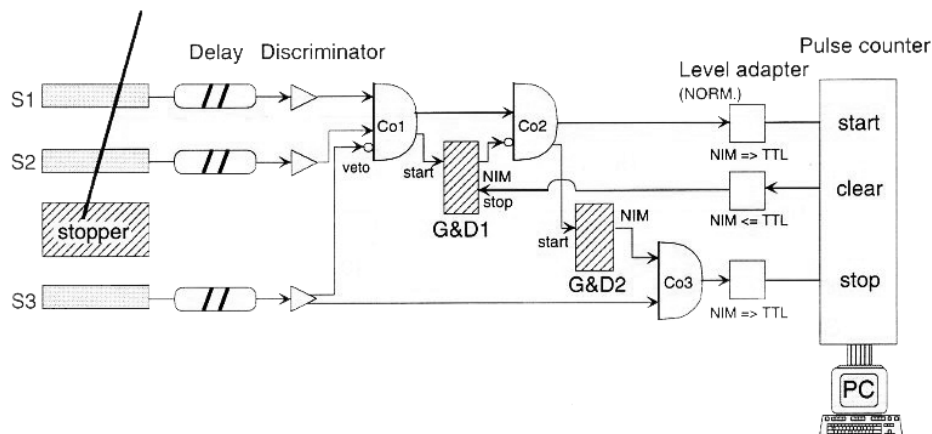
$(T_1 - T_2)$ と T_3 のタイミングの差は約 6 ns であった。ここで、VETO Curve グラフの x-y 軸の表記が間違っている。訂正すると、

$$(T_1 - T_2) \longrightarrow (T_1 - T_2) - T_3$$

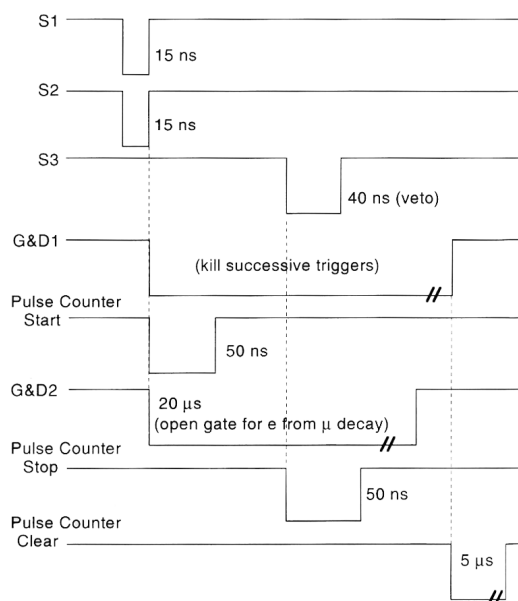
$$\frac{N(S_1 \cdot S_2)}{N(S_2)} \longrightarrow \frac{N(S_1 \cdot S_2 \cdot \bar{S}_3)}{N(S_1 \cdot S_2)}$$

今後、Delay Module で、 T_1 を 6ns、 T_2 を 6ns すらし、 T_3 はずらさないことにした。

2.3 μ 粒子寿命測定のためのセットアップ及び測定



高圧電源の取り扱いに十分注意しながら、上図のように測定回路を組み立てた。ここで、 S_3 のディスクリミネータを Scaler につなげ、 S_3 の数をとった。また、第2 コインシデンス (Co2) も Scaler につなげ、総スタート信号の数をとった。そして、1Hz パルス を Scaler に入れるなどの方法で、1 秒単位で総測定時間もとった。これら 3 つの値は、 μ 粒子寿命解析のとき、崩壊時間分布ヒストグラムから正しい Fitting 範囲を切り取るときに必要である。十分な DAQ テストを行ってから、長時間測定に入った。下は測定のタイミング・チャートである。エレクトロニクス・パーツにはこのような論理体系で動いてもらった。



2.4 μ 粒子の寿命データの解析

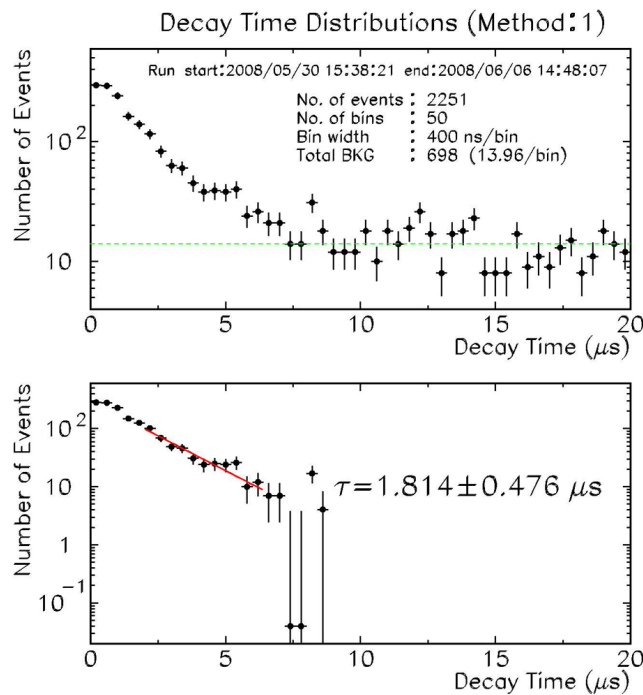
2.4.1 Al Stopper

Fit 範囲の決定:: μ^- の原子核捕獲 μ^- の崩壊事象の寄与が μ^+ の崩壊事象の寄与より少ないので、それを考慮して $n^+(t) > 5 \times n^-(t)$ を満たす時間 t を最小値をとった。そしてその範囲に該当でない bin は排除した。 μ^- 粒子の原子核捕獲に関する情報、大気中の μ^- と μ^+ 粒子の存在比率などを考慮して、簡単な計算で次のような式を得た。そして Al の原子量は 13 なので、それを Z に代入した。

$$t = \frac{\log \frac{5}{1.3}}{56(Z)^{3.7}} = \frac{\log \frac{5}{1.3}}{56(13)^{3.7}} \simeq 1.818 [\mu s] \quad (2.12)$$

1bin は 400ns 程度であるので、これが入る 5bin までを捨てて、6bin からとった。

Fit 範囲の決定::バックグラウンドの見積もり (1) 本物のミュー粒子の寿命は $2.2\mu s$ 程度である。 $\Delta t = 10$ の bin での事象数は、 $\Delta t = 0$ の bin での事象数の約 1 パーセントである。なので、 $10\mu s$ 以上の bin ではバックグラウンドの寄与がないと仮定して、全体のバックグラウンドを推定する。 $10 \sim 20\mu s$ の間に 25bin があり、その中に 349 個が入ってあったので、1bin 辺りのバックグラウンドの数は 13.96 個であった。それを踏まえて、 $13.96 + 3\sqrt{13.96} \simeq 25.17$ 個より少ないか同じ値を持つ、ある時刻以上の bin は捨てることにして、16bin までとることにした。つまり、6bin、16bin を有効 Fit 範囲とみなした。それで、平均寿命として $1.814 \pm 0.476\mu s$ を得た。



Fit 範囲の決定::バックグラウンドの見積もり (2) S_3 のみで観測される信号はノイズによるバックグラウンドであることを用いた見積もりの方法である。ノイズが偶然 START 信号でゲートが開いているとき計測され、STOP 信号を作るという状況を考えよう。ここで、 S_3 の Rate を、単位時間当たりの S_3 の係数 (S_3 の総係数/全測定時間) と定義する。そこに、全ての START 信号の数と、bin の幅時間をかけた量を、1bin 当たりのバックグラウンドの数とみなす。

Start 信号の数 1036309

S_3 の係数 19072628

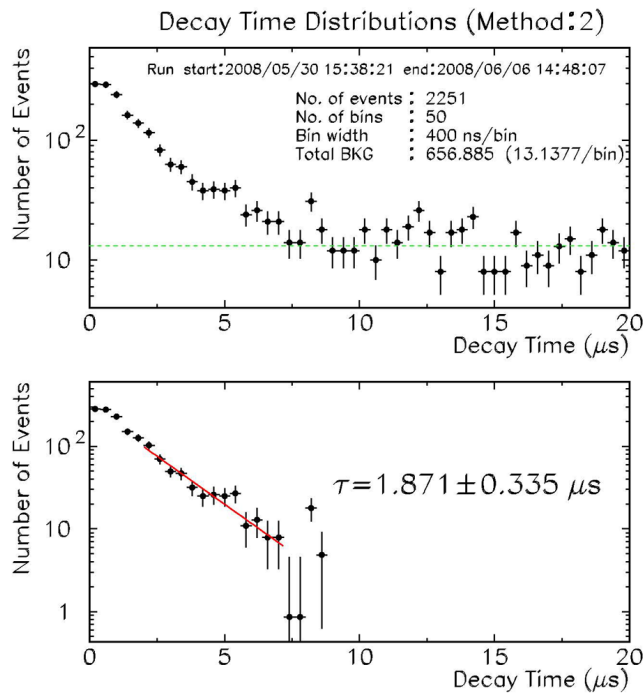
全測定時間 601784 秒

bin の幅 400 ns

$$N_{bkg}^{1bin} = \frac{19072628}{601784} \times 1036309 \times 400 \times 10^{-9} \simeq 13.1377 \quad (2.13)$$

$$N_{obs}(t) \geq 13.1377 + 3\sqrt{13.1377} \simeq 24.01 \quad (2.14)$$

ゆえに、標準偏差の 3 倍の幅 (誤差 99.7%) まで考慮して、全ての bin でのバックグラウンドの数は 24 個だとみなし、24 個より小さいか同じくらいを持つ bin を排除した。それで 6bin から 18bin までを有効 Fit 範囲とした。その対数の傾きの逆数を求めた結果、平均寿命として $1.871 \pm 0.335 \mu s$ を得た。



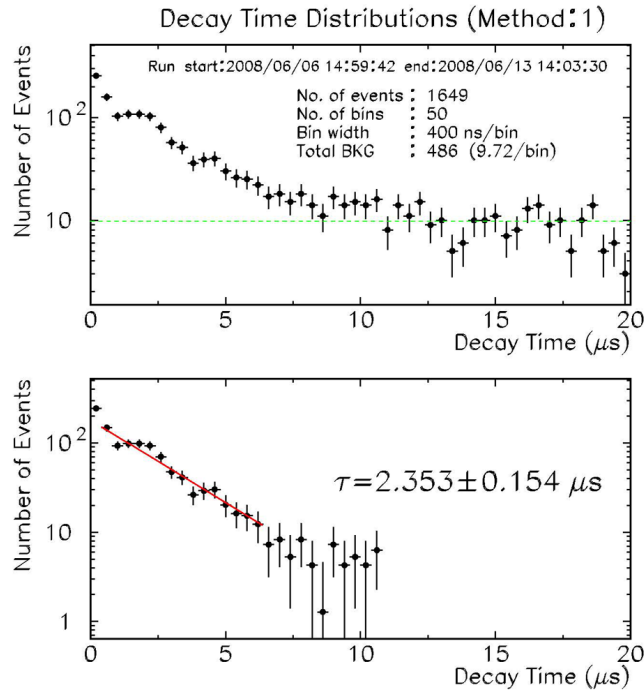
2.4.2 Fe Stopper

Fit 範囲の決定: μ^- の原子核捕獲 Al Stopper と同じ方法を使う。

$$t = \frac{\log \frac{5}{1.3}}{56(Z)^{3.7}} = \frac{\log \frac{5}{1.3}}{56(26)^{3.7}} \simeq 0.14 [\mu\text{s}] \quad (2.15)$$

1bin は 400ns 程度であるので、140ns を含む 1bin を捨てて、2bin からとった。

Fit 範囲の決定: バックグラウンドの見積もり (1) Al Stopper と同じ方法を使う。
 $10 \sim 20 \mu\text{s}$ の間に 25bin があり、その中に 243 個が入ってあったので、1bin 辺りのバックグラウンドの数は 9.72 個であった。それを踏まえて、 $9.72 + 3\sqrt{9.72} \simeq 19.1$ 個より少ないか同じ値を持つ、ある時刻以上の bin は捨てることにして、2bin、16bin を有効 Fit 範囲とみなした。それで、平均寿命として $2.353 \pm 0.154 \mu\text{s}$ を得た。



Fit 範囲の決定::バックグラウンドの見積もり (2) Al Stopper と同じ方法を使う。

Start 信号の数 778680

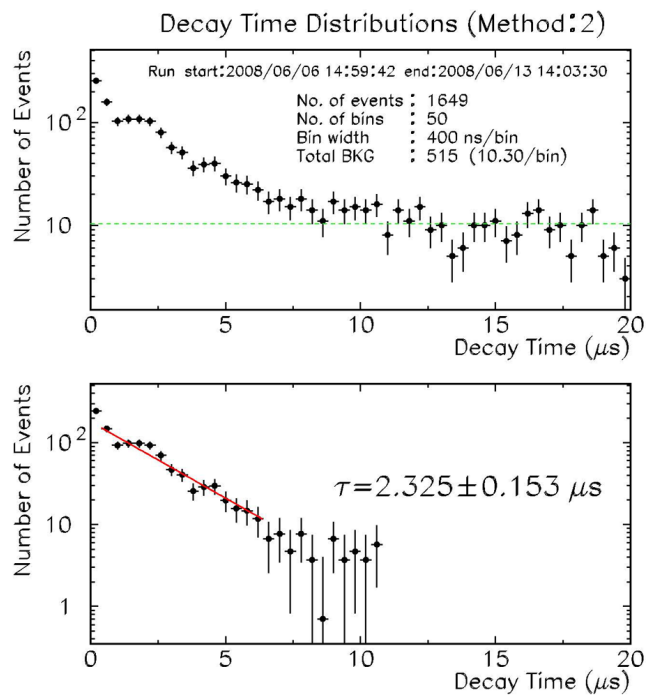
S3 の係数 19891689

全測定時間 601432 秒

$$N_{bkg}^{1bin} = \frac{19891689}{601432} \times 778680 \times 400 \times 10^{-9} \simeq 10.30 \quad (2.16)$$

$$N_{obs}(t) \geq 10.30 + 3\sqrt{10.30} \simeq 19.93 \quad (2.17)$$

ゆえに、標準偏差の3倍の幅(誤差99.7%)まで考慮して、全てのbinのバックグラウンドは20個だとみなし、20個より小さいか同じくらいを持つbinを排除した。それで2binから16binまでを有効Fit範囲とした。その対数の傾きの逆数を求めた結果、ミュー粒子の平均寿命として $2.325 \pm 0.153 \mu s$ を得た。



<< 解析結果のまとめ >>

	Al	Fe
Method 1	$1.814 \pm 0.476 \mu s$	$2.353 \pm 0.154 \mu s$
Method 2	$1.871 \pm 0.335 \mu s$	$2.325 \pm 0.153 \mu s$
Particle Data Group	$2.19703 \pm 0.00004 \mu s$	

3 CDF データによる Z^0 、 J/ψ 粒子の質量解析

3.1 NTUPLE を用いたデータ解析

質量解析の原理

陽子と反陽子が衝突すると、 Z^0 Boson となるが、やがて μ^+ 、 μ^- の2つの粒子に崩壊する。この2体崩壊で4元運動量が保存することを用いて Z^0 Boson の質量を計算することができる。ちょうど、NTUPLE データでは μ^+ 、 μ^- の質量が与えられているので、それを用いる。

今後自然単位系 ($c = 1$ 、 $\hbar = 1$) を採用しよう。4元運動量同士の内積はスカラー量であり、どのような座標系で観測してもその値が変わらない。それを用いて、 Z^0 Boson の静止系を基準座標系に採択して考えることにする。

$$\begin{aligned} p_Z^2 &= \left(\begin{pmatrix} M_Z \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right)^2 = (p_{\mu+} + p_{\mu-})^2 = p_{\mu+}^2 + 2p_{\mu+} \cdot p_{\mu-} + p_{\mu-}^2 \\ &= m_{\mu+}^2 + m_{\mu-}^2 + 2(E_{\mu+}E_{\mu-} - \vec{p}_{\mu+} \cdot \vec{p}_{\mu-}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

特に Z^0 Boson の場合、その質量は 90GeV 程度で、 μ 粒子の場合 106MeV 程度に過ぎないので、計算の簡単さをために μ 粒子の不変質量を無視することができる。

$$M_Z^2 \simeq 2(\|\vec{p}_{\mu+}\| \|\vec{p}_{\mu-}\| - \vec{p}_{\mu+} \cdot \vec{p}_{\mu-}) \quad (3.2)$$

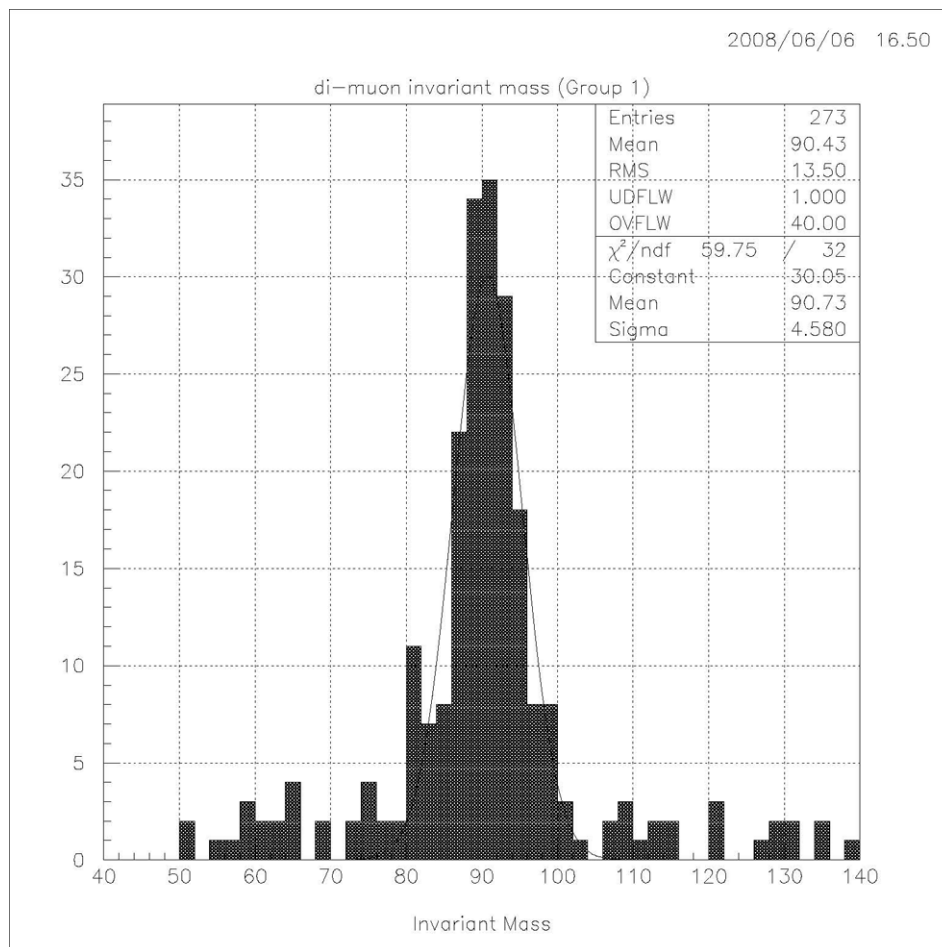
NTUPLE の含む物理量

変数名 (Variable)	物理量の定義 (エネルギー:GeV、長さ:cm、角度:rad)
ZVERT	衝突点の Z 座標 (ビーム軸方向成分)
MisET	消失横向きエネルギー (missing E_T) の大きさ
MisPH	消失横向きエネルギーの ϕ 成分
α	1, 2
Px $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α の運動量 x 成分
Py $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α の運動量 y 成分
Pz $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α の運動量 z 成分
Q $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α の電荷
Iso $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α のまわり ($\Delta R < 0.4$) のエネルギー和
EM $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α の電磁カロリメータエネルギー
Had $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α のハドロンカロリメータエネルギー
DXU $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α の CTC 飛跡の外挿と CMU 飛跡とのずれ
DXP $_{\alpha}$	候補 μ 粒子 α の CTC 飛跡の外挿と CMP 飛跡とのずれ

3.2 Z^0 Boson

3.2.1 PAW を用いた Z^0 Boson 不変質量解析

Z^0 Boson は W^\pm Boson とともに弱い相互作用の媒介粒子である。1968 年、ワインバーグ、サラムの弱電磁気統一場理論から予見され、1983 年 CERN で発見した。PDG による質量は $91.1876 \pm 0.0021[\text{GeV}]$ で、電荷は 0、スピンは 1 である。



これは PAW で、apply-zcuts.kumac ファイルを用いた解析結果である。ここで NTUPLE 形式で記録されたデータサンプル mumul.paw と、信号事象か雑音事象かを取捨選択するために、cuts.for を用いている。ヒストグラムに全ての解析結果を積み上げて、そこにガウス分布関数をフィットした。このピークをその中心値ととり、それを Z^0 Boson の質量とした。そして、カットした山の sigma(標準偏差) を範囲内のエントリのルートで割り、それを中心値の持つ誤差とした。誤差の決め方は中心極限定理によるものである。

計算結果、 $90.73 \pm 0.3288[\text{GeV}]$ を得た。これは World average(PDG Fit) として与えられている $91.1876 \pm 0.0021[\text{GeV}]$ に $1.3917\sigma (\simeq 83.6\%)$ 程度ずれている。

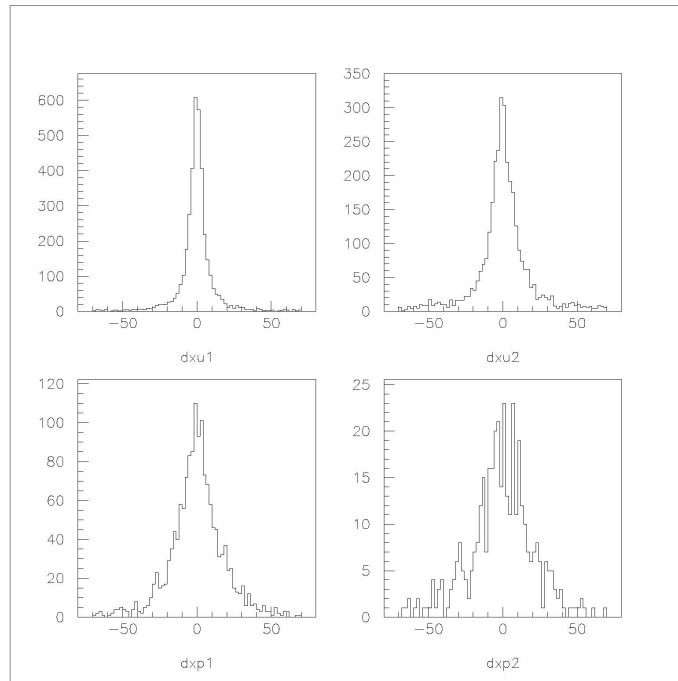
3.3 J/ψ Meson

3.3.1 第一次 J/ψ Meson 不変質量解析 :: Systematic Error

J/ψ Meson は c クォークと反 c クォークの束縛状態の粒子である。電磁相互作用でレプトン対またはクォーク対に崩壊する。その寿命は 0.7×10^{-20} 秒程度である。崩壊するとき、約 6 % の比率で μ 粒子対にも崩壊する。CDF データでもこの事象をキャッチして J/ψ Meson の質量を計算することができる。

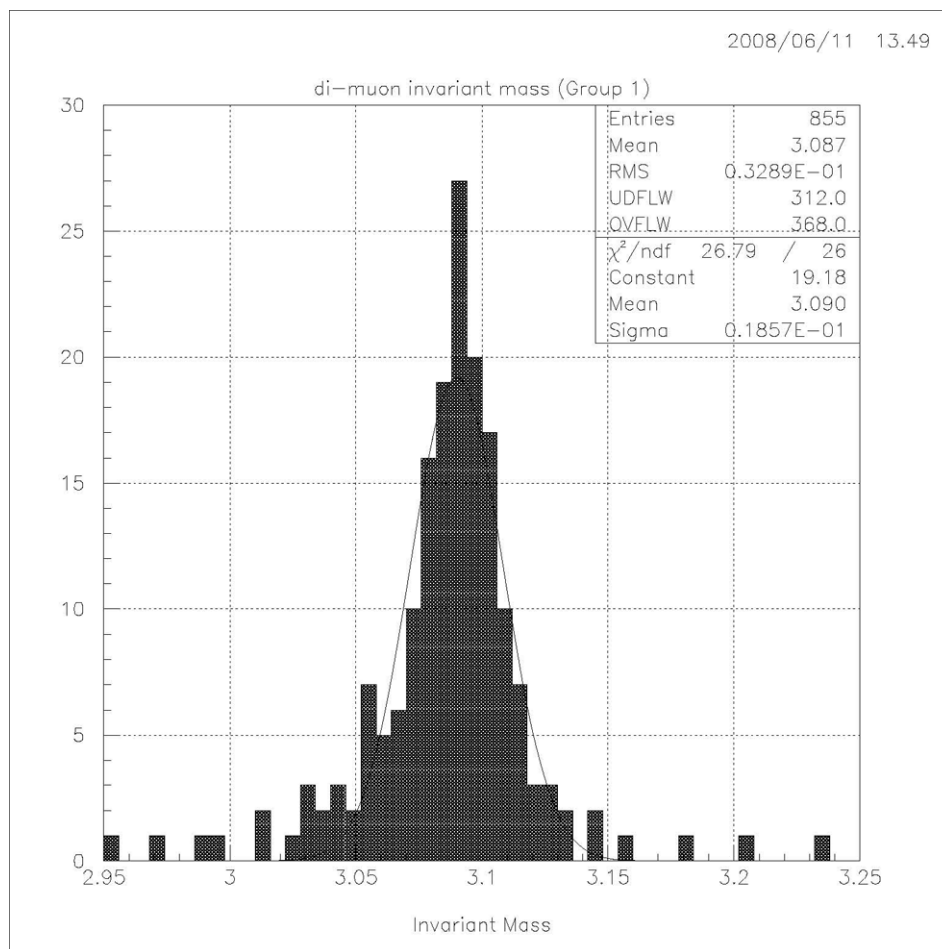
基本的に、 Z_0 Boson の質量解析で用いた `apply zcuts.kumac` と `cuts.for` をそのまま使うが、ただし、 J/ψ Meson は質量が小さいため (3GeV 程度)、 μ 粒子候補の横方向運動量 $p_T (= \sqrt{p_x^2 + p_y^2})$ も小さくなる。なのでそのカット値を下げたトリガーで効率よく収集したサンプル (`mumu2.paw`) で解析するのがより望ましい。

そして `cuts.for` も Z_0 Boson にあわせたカット基準を持っているので、それを多少変えなければいけない。まずは、`cuts.for` の中でのカット条件で、 p_T の部分を無効にする。 J/ψ Meson の p_T は Z_0 Boson より小さいので、この条件があるままだとデータヒストグラムをうまく積み上げることができない。また、 Z_0 Boson との質量差により、その飛跡もはるかに違うので、DXU1、DXU2、DXP1、DXP2 のカット値も修正しなければいけない。そのために、`mumu2.paw` の Ntuple データでからその 4 つの量を直接プロットし、肉眼で雑音事象の範囲を決定した。



これより、DXU1 は 35、DXU2 は 40、DXP1 は 45、DXP2 も 45 にした。

このような解析ツールの補正を行って、PAW で `apply zcuts.kumac` を稼動させた。その結果は以下の図のようである。



$$3.090 \pm 0.00144[\text{GeV}]$$

この値は World Average($3.096916 \pm 0.000011\text{GeV}$) から $4.798\sigma \simeq 99.9988\%$ 程度ずれている。これはひどくずれているので、Statistical Error とみなすより、システマティック・エラーとみなすのが望ましい。これは apply zcuts.kumac を用いた分析で、粒子の2体崩壊での μ^+ 、 μ^- の不変質量を無視したままおいたからである。実際 Z boson の質量は 90GeV 程度、ミュー粒子は 106MeV 程度であり、約2桁のスケールの差があってその質量分析の際にミュー粒子不変質量を無視しても無理はなかったが、 J/ψ 粒子の質量は 3GeV 程度で、スケールが約1桁くらいしか大きくないので、その効果は無視してはいけないのである。

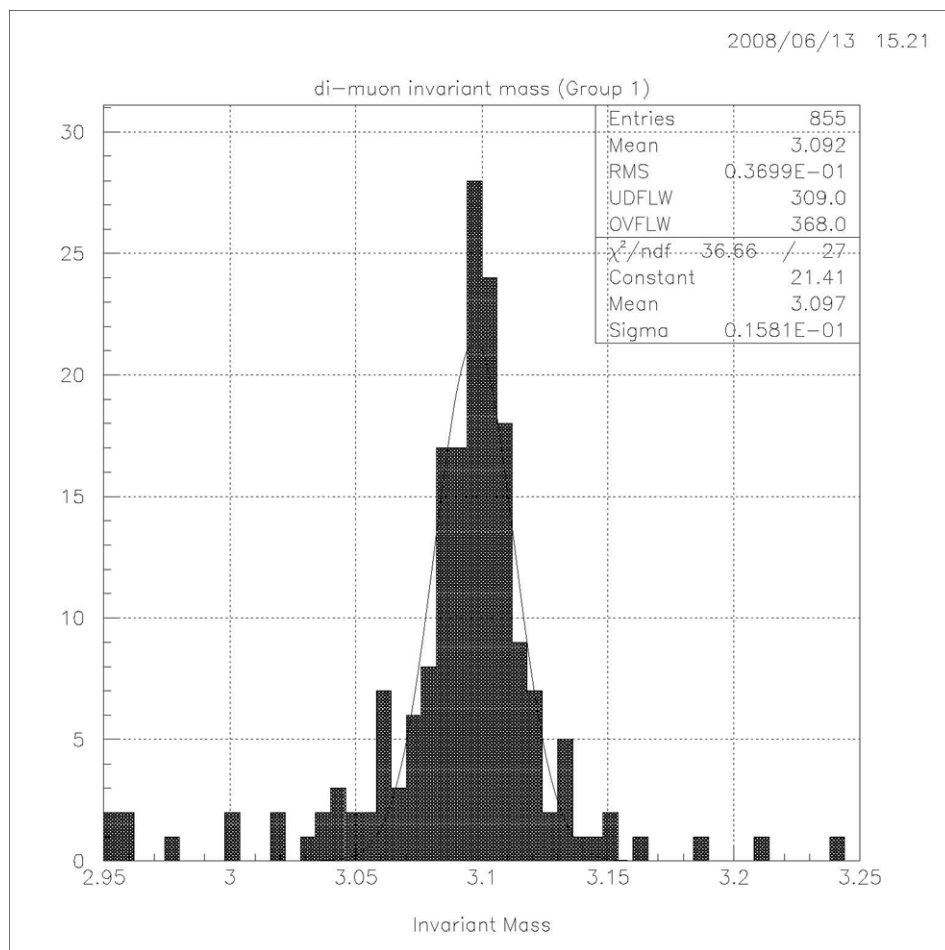
したがって、 m_μ を考慮した補正を行った後、もう一度解析を行った。

3.3.2 第二次 J/ψ Meson 不変質量解析 :: m_μ を考慮した補正

apply zcuts.kumac の不変質量計算式の部分を、以下のように修正した。

$$\begin{aligned}
 M_{\mu\mu}^2 &= m_{\mu+}^2 + m_{\mu-}^2 + 2(E_{\mu+}E_{\mu-} - \vec{p}_{\mu+} \cdot \vec{p}_{\mu-}) \\
 &= m_{\mu+}^2 + m_{\mu-}^2 + 2\left(\sqrt{m_{\mu+}^2 + \vec{p}_{\mu+}^2}\sqrt{m_{\mu-}^2 + \vec{p}_{\mu-}^2} - \vec{p}_{\mu+} \cdot \vec{p}_{\mu-}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

そして、もう一度 PAW で apply zcuts.kumac を稼動させた。



$$3.097 \pm 0.00456[\text{GeV}]$$

この値は World Average から 0.018σ ($\simeq 1.47\%$) 程度ずれている。

<< 解析結果のまとめ >>

	実験値 [GeV]	PDG[GeV]	ゆらぎ
Z^0 Boson	90.73 ± 0.3288	91.1876 ± 0.0021	$1.3917\sigma (\simeq 83.6\%)$
J/ψ Meson	3.097 ± 0.00456	3.096916 ± 0.000011	$0.018\sigma (\simeq 1.47\%)$

4 その他

4.1 課題

(b-1) ミュー粒子の質量は $106\text{MeV}/c^2$ と表されるが、グラム単位では何グラムか。また、 1kg の質量は何 eV/c^2 か。

$1 [\text{eV}] = 1.602\ 176\ 46 \times 10^{-19} [\text{J}]$ 、 $c = 299\ 792\ 458 [\text{m/s}]$ であるので、

$$\frac{106 \times 10^6 \times 1.60217646 \times 10^{-19}}{(299792458)^2} = 1.89 \times 10^{-28} [\text{kg}] = 1.89 \times 10^{-25} [\text{g}]$$

一方、 1kg を eV/c^2 単位に換算すると、

$$\frac{(299792458)^2}{1.60217646 \times 10^{-19}} = 5.60958921 \times 10^{35} [\text{eV}/c^2]。$$

(b-5) ミュー粒子の寿命 τ を 2.2×10^{-6} 秒、質量を $0.106\text{GeV}/c^2$ として、次の式

$$\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{G^2(m_\mu c^2)^5}{192\pi^3 \hbar^7 c^6} \quad \left(\text{ただし、} G = \frac{\sqrt{2}g^2(\hbar c)^2}{8(M_W c^2)^2} \right)$$

で、 $\frac{G}{(\hbar c)^3} [\text{GeV}^{-2}]$ の値を計算せよ。

上に与えられた式は、ミュー粒子の崩壊過程についてのその崩壊確率である。 M_W は W boson の質量、 g は W boson とフェルミオンとの Coupling constant である。ここで、

$$\tau = 2.2 \times 10^{-6} [\text{s}]$$

$$\hbar = 6.58211899 \pm 0.0000000016 [\text{GeV} \cdot \text{s}]$$

$$m_\mu c^2 = 0.106 [\text{GeV}]$$

とおくと、簡単な計算で

$$\frac{G}{(\hbar c)^3} = \left(\frac{192\pi^3 \hbar}{\tau(m_\mu c^2)^5} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1.15 \times 10^{-5} [(\text{GeV})^{-2}]。$$

(b-6) 上の結果を用いて W boson の質量を計算してみよ。

標準模型、もしくは1979年にワインバーグとサラムにノーベル物理学賞を抱かせた弱電磁気統一場理論によると、電磁相互作用の結合定数 e と弱い相互作用の結合定数 g との間に、

$$e = g \sin \theta_W$$

という関係がある。ここで、 θ_W は Weinberg angle というパラメーターで、標準理論の枠組み内では予言できないが、実験からは、 $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$ と求められている。これらを用いると、簡単な計算で W boson の質量が計算できる。

$$M_W c^2 = \left(\frac{\pi \alpha (\hbar c)^3}{\sqrt{2} G \sin^2 \theta_W} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 78.3 \text{ [GeV]} \quad \left(\text{但し、} \alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} \sim \frac{1}{137} \right)$$

(d-1) 統計処理::二項分布からポワソン分布を導く。

今、時間間隔 T の間に平均 n 個の現象がおきると仮定する。この T を N で等分すると、この等分された T/N 微小時間内にこの現象が1回おきる確率は n/N である。よって、 T 時間の間にこの現象が m 回だけおきる確率 $P(N, m, n/N)$ は、 N 回の試行を行うことにより、

$$P_b \left(N, m, \frac{n}{N} \right) = \frac{N!}{m!(N-m)!} \left(\frac{n}{N} \right)^m \left(1 - \frac{n}{N} \right)^{N-m} \quad (4.1)$$

で与えられる。これは二項分布である。ここで、Stirling の公式:

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N \quad (4.2)$$

を考慮しよう ($N \gg 1$)。

$$\begin{aligned} P_b \left(N, m, \frac{n}{N} \right) &\simeq \frac{\sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N}{m! \sqrt{2\pi(N-m)} e^{-(N-m)} (N-m)^{(N-m)}} \left(\frac{n}{N} \right)^m \left(1 - \frac{n}{N} \right)^{N-m} \\ &= \frac{n^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m}{N}}} \frac{e^{-m}}{\left(1 - \frac{m}{N} \right)^{N-m}} \left(1 - \frac{n}{N} \right)^{N-m} \\ &= \frac{n^m}{m!} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m}{N}}} \frac{e^{-m}}{\left(1 - \frac{m}{N} \right)^{\left(-\frac{N}{m} \right) \cdot (-m)}} \left(1 - \frac{n}{N} \right)^{\left(-\frac{N}{n} \right) \cdot (-n)} \left(\frac{1 - \frac{m}{N}}{1 - \frac{n}{N}} \right)^m \end{aligned}$$

ここで、 $N \rightarrow \infty$ と N に対する極限をとり、そこから得られる新しい確率分布を P_P とおくと、

$$P_P(m, n) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_b \left(N, m, \frac{n}{N} \right) = \frac{e^{-n}}{m!} n^m. \quad (4.3)$$

これはポワソン分布と定義されている。

(d-2) 統計処理 2::ポワソン分布の規格性、平均、分散

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} P_P(m, n) &= e^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^m}{m!} = e^{-n} \cdot e^n = 1 \\
\sum_{m=0}^{\infty} m P_P(m, n) &= n e^{-n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n^{(m-1)}}{(m-1)!} = n e^{-n} \cdot e^n = n \\
\sum_{m=0}^{\infty} (m-n)^2 P_P(m, n) &= e^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} (m^2 - 2mn + n^2) \frac{n^m}{m!} \\
&= e^{-n} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{n^m}{m!} - 2n e^{-n} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{n^m}{m!} + n^2 e^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^m}{m!} \\
&= e^{-n} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{n^m}{m!} - n^2 = n e^{-n} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} - n^2 \\
&= n e^{-n} \sum_{m=1}^{\infty} (m-1+1) \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} - n^2 = n^2 + n - n^2 = n
\end{aligned}$$

(d-3) 統計処理 3::二項分布のガウス分布近似性

二項分布に伴う確率関数から出発しよう。

$$P_b\left(N, m, \frac{n}{N}\right) = W(m) = \frac{N!}{m!(N-m)!} \left(\frac{n}{N}\right)^m \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-m}$$

ベルヌーイ試行の回数 N が大きくなると、 $m - W(m)$ グラフは、一つの鋭いピークを持つことになる。このピークの位置を $m = \mu$ とする。そして、関数の増減を調べる限り、その対数で議論を展開しても同じだから、 $\log W(m)$ を考えることにする。

$$\log W(m) = \log N! - \log m! - \log(N-m)! + m \log \frac{n}{N} + (N-m) \log \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

一方、 $\log W(m)$ を $m = \mu$ 周りでテイラー展開してみると、

$$\log W(m) = \log W(\mu) + \frac{(m-\mu)}{1!} \left[\frac{d \log W}{dm}(m) \right]_{m=\mu} + \frac{(m-\mu)^2}{2!} \left[\frac{d^2 \log W}{dm^2}(m) \right]_{m=\mu} \quad (4.4)$$

ここで $\log W(m)$ の微分を考えよう。まず、 $\log m!$ 型の微分を考えよう。 m は十分大きいものと仮定されており、そしてベルヌーイ試行などからの値なのでさらに離散的である。なので その微小変化は 1 と考えられる ($dm = 1$) ので、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm} \log m! &= \lim_{dm \rightarrow 1} \frac{\log(m+dm)! - \log m!}{dm} \\
&= \log(m+1)! - \log m! = \log(m+1) \simeq \log m
\end{aligned}$$

を得る。 m は加算な離散値であるため（連続でないため）、これは m が 1 ですら微小量と見なせるほど十分に大きい場合に成り立つ近似である。同様に、 $\log(N-m)!$ の 1 次導関数を近似的に

$$\begin{aligned}\frac{d}{dm} \log(N-m)! &= \lim_{dm \rightarrow 1} \frac{\log(N-m-dm)! - \log(N-m)!}{dm} \\ &= \log(N-m-1)! - \log(N-m)! = -\log(N-m)\end{aligned}$$

となる。これで、 $W(m)$ の微分を近似的に計算できる。

$$\frac{d \log W}{dm}(m) = -\log m + \log(N-m) + \log \frac{n}{N} - \log \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

これをもう一回微分すると、次のようである。

$$\frac{d^2 \log W}{dm^2}(m) = -\frac{1}{m} - \frac{1}{N-m} = -\frac{N}{m(N-m)}$$

ここで 1 次導関数に戻ろう。ベルヌーイ試行の回数 N を大きくしたとき、ピークとなる点を $m = \mu$ としたのを踏まえると、得られた 1 次導関数に代入すれば 0 とならなければならないことがわかる。つまり、

$$\begin{aligned}\left[\frac{d \log W}{dm}(m) \right]_{m=\mu} &= -\log \mu + \log(N-\mu) + \log \frac{n}{N} - \log \left(1 - \frac{n}{N}\right) = 0 \\ \iff \log \frac{\mu}{N-\mu} &= \log \frac{\frac{n}{N}}{1 - \frac{n}{N}} \iff \mu = N \cdot \frac{n}{N} = n\end{aligned}$$

である。一方、2 次導関数に $m = \mu = N \cdot \frac{n}{N}$ を代入すると、

$$-\frac{N}{m(N-m)} = -\frac{1}{N \cdot \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

を得る。以下、 $\sigma^2 = N \cdot \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ とおく。今まで得られた値を (4.4) に代入すると、

$$\log W(m) = \log W(\mu) - \frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2} + o(m^3)$$

である。 $N \rightarrow \infty$ の仮定下で議論を展開しているので、近似的に 3 次以上の項は 0 に限りなく近いと見なし、無視すると、

$$W(m) = W(\mu) \exp \left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

となる。ここで、 $W(m)$ は確率密度関数なので、規格化定数として $W(\mu)$ を決めなければならない。

$$W(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) = W(\mu) \sqrt{2\pi\sigma^2} = 1$$

これで、次のような確率密度関数を得る。

$$W(m) = P_G(m, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.5)$$

これは正規分布またはガウス分布と呼ばれている。特に、ここで、 $N \rightarrow \infty$ の下、 $\mu \rightarrow n \wedge \sigma^2 \rightarrow n$ なので、それを反映すると、

$$P_G(m, n, \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{(m-n)^2}{2n}} \quad (4.6)$$

となる。

(d-4) 統計処理 4::相関のある場合の平均と分散

事象 A と事象 B があるとする。ここで、B は A が起こらない限り起こらないものとする。、すると両者の測定は相関を持つ。A を N_0 回観測して m 回 B が起こる確率は、二項分布に従う。この場合の平均をから求めよう。

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N_0} m P_b \left(N_0, m, \frac{n}{N_0} \right) &= \sum_{m=1}^{N_0} \frac{m N_0!}{m! (N_0 - m)!} \left(\frac{n}{N_0} \right)^m \left(1 - \frac{n}{N_0} \right)^{N_0 - m} \\ &= \sum_{m=1}^{N_0} \frac{N_0!}{(m-1)! (N_0 - m)!} \left(\frac{n}{N_0} \right)^m \left(1 - \frac{n}{N_0} \right)^{N_0 - m} \\ &= \sum_{m=0}^{N_0} \frac{N_0!}{m! (N_0 - m - 1)!} \left(\frac{n}{N_0} \right)^{m+1} \left(1 - \frac{n}{N_0} \right)^{N_0 - m - 1} \\ &= \sum_{m=0}^{N_0} (N_0 - m) \left(\frac{n}{N_0} \right) \left(\frac{N_0}{N_0 - n} \right) P_b \left(N_0, m, \frac{m}{N_0} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{N_0} n \left(\frac{N_0 - m}{N_0 - n} \right) P_b \left(N_0, m, \frac{m}{N_0} \right) \end{aligned}$$

これを片付けると、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{n}{N_0 - n} \right) \sum_{m=0}^{N_0} m P_b \left(N_0, m, \frac{n}{N_0} \right) &= \frac{n N_0}{N_0 - n} \\ \sum_{m=0}^{N_0} m P_b \left(N_0, m, \frac{n}{N_0} \right) &= n \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。ゆらぎは次のように計算する。

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{N_0} (m-n)^2 P_b \left(N_0, m, \frac{n}{N_0} \right) &= \sum_{m=0}^{N_0} (m^2 - 2mn + n^2) P_b \left(N_0, m, \frac{n}{N_0} \right) \\
 &= \sum_{m=1}^{N_0} m^2 P_b - 2n \sum_{m=1}^{N_0} m P_b + n^2 \\
 &= \sum_{m=1}^{N_0} \frac{m^2 N_0!}{m!(N_0-m)!} \left(\frac{n}{N_0} \right)^m \left(1 - \frac{n}{N_0} \right)^{N_0-m} - n^2 \\
 &= n^2 + n \left(1 - \frac{n}{N_0} \right) - n^2 \\
 &= n \left(1 - \frac{n}{N_0} \right) \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

(h-1) W boson の質量は CDF で精密測定されている。1998 年に発表した結果は $80.470 \pm 0.089 [\text{GeV}/c^2]$ である。この数値と今回求められた Z boson の質量から、Weinberg 角に関する $\sin^2 \theta_W$ を求めよう。2002 年版の Particle Data では World average として 0.23143 ± 0.00015 が与えられている。

3.1.1 節でも述べているが、私の PAW 分析からは $Z_M = 90.73 \pm 0.3288 [\text{GeV}]$ となっている。この値は World average (PDG Fit) として与えられている $91.1876 \pm 0.0021 [\text{GeV}]$ に $1.3917\sigma (\simeq 83.6\%)$ 程度ずれている。

標準模型より、

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \tag{4.9}$$

が知られている。ここで、

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \left(\frac{M_W}{M_Z} \right)^2 \tag{4.10}$$

と変形できる。ここに数値を入れると

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \theta_W &= 1 - \left(\frac{80.470}{90.73} \right)^2 \\
 &\simeq 0.213 \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

となる。次に、伝播された誤差も求めよう。

$$\begin{aligned}
 \Delta(\sin^2 \theta_W) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \sin^2 \theta_W}{\partial M_W}\right)^2 (\Delta M_W)^2 + \left(\frac{\partial \sin^2 \theta_W}{\partial M_Z}\right)^2 (\Delta M_Z)^2} \\
 &= 2 \times \sqrt{\left(\frac{M_W}{M_Z^2}\right)^2 (\Delta M_W)^2 + \left(\frac{M_W^2}{M_Z^3}\right)^2 (\Delta M_Z)^2} \\
 &= 2 \times \sqrt{\left(\frac{80.47}{90.73^2}\right)^2 (0.089)^2 + \left(\frac{80.47^2}{90.73^3}\right)^2 (0.3288)^2} \\
 &\simeq 0.006
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\therefore \sin^2 \theta_W = 0.213 \pm 0.006 \tag{4.13}$$

を得る。この値は World average(PDG Fit) として与えられている 0.23143 ± 0.00015 に $3.0717\sigma (\simeq 99.79\%)$ 程度ずれている。

(h-2) Z 粒子自体は、Breit-Wigner の共鳴式

$$f(E) = \frac{1}{(E - M_Z)^2 + (\Gamma_Z)^2} \tag{4.14}$$

で表される固有の質量分布を有する(不確定性原理)。 $\Gamma_Z = 2.495\text{GeV}$ として Breit-Wigner による分布はどのようになるか。測定した不変質量の分布に重ね書きしてみよう。その際、双方の分布の面積が等しくなるように Breit-Wigner の分布を規格化しておくこと。

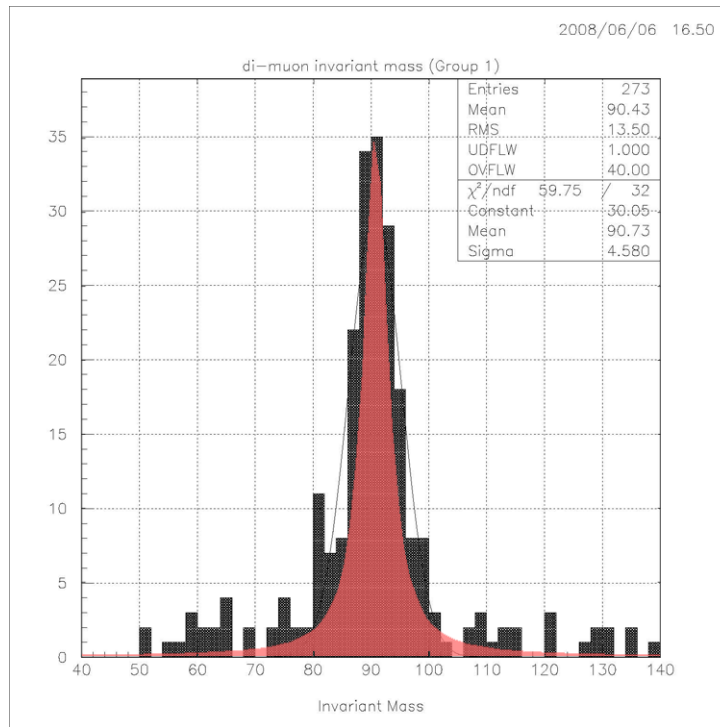
一応、共鳴式を確率密度のように扱うことにする。簡単な計算で規格化できる。

$$f(E) = \frac{1}{\pi} \frac{(\Gamma_Z)^2}{(E - M_Z)^2 + (\Gamma_Z)^2} \tag{4.15}$$

Z boson の不変質量分布のピークは 35 程度なので、それにあわせて式を補正すると、

$$f(E) \simeq \frac{3.1416 \times 35}{\pi} \frac{(\Gamma_Z)^2}{(E - M_Z)^2 + (\Gamma_Z)^2} = \frac{109.956}{\pi} \frac{(\Gamma_Z)^2}{(E - M_Z)^2 + (\Gamma_Z)^2}$$

となる。これを gnuplot で表せて、フォト・ショップを用いて大きさや比率などを全て考慮して、Z-boson 不変質量分布図と合成した。



両方のピークをあわせたら、双方の内部面積には多少差があるが、ヒストグラムの角々をきれいに通っている。

4.2 Dirac 方程式入門

Klein-Gordon 方程式

相対論的量子力学 特殊相対性理論によると、全ての慣性系は物理的に全く同等で、ある慣性系から他の慣性系に移って現象を眺めて記述しても、ローレンツ変換に対して不変でありその方程式の形は保たなければならない。しかし量子力学におけるシュレディンガー方程式は構造的に、時間座標に対して1階、空間座標に対して2階の微分方程式であり、時間と空間が別に扱われているから、時空に対してローレンツ不変でない。これを補完して相対論に合う方程式を探すためにさまざまな試みが行われた。そしてディラックがついその方程式を定立した。

Klein-Gordon 方程式 相対論的量子力学を建てようとした物理学者たちの闘争の産物で、Klein-Gordon 方程式という優雅な方程式がある。静止質量 m 、運動量 p を持つ、真空中を運動している粒子のエネルギーは

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (4.16)$$

で与えられるが、ここで、直観的に量子力学的センスで

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (4.17)$$

という対応を考え、エネルギー運動量関係式に反映し、それらを演算子とみなし右側に”波動関数”をかけると

$$\begin{aligned}\square^2\psi &= \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi \\ \left(\eta^{\mu\nu}\partial x^\mu\partial x^\nu\psi &= \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi\right)\end{aligned}\quad (4.18)$$

となる。これを Klein-Gordon 方程式という。ここで、 \square^2 は d'Alembertian と呼び、

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

と定義する。この式はシュレディンガー方程式とは違って時間に対する 2 階微分方程式である。なので、ローレンツ不変ではあり、相対論的波動方程式として重要な意味を持つ。しかし、量子力学的に扱うには多少問題があって、この方程式では $|\psi|^2$ をが”確率密度”として扱うことができないという点である。 $|\psi|^2$ が確率密度であるためには、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1$$

となるように、時間にかかわらずに規格化できなければならない。言い換えると、

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 d\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} \right) d\mathbf{r} = 0 \quad (4.19)$$

が成り立たなければならない。しかし、Klein-Gordon 方程式は時間に対して 2 階微分方程式であるので、 ψ とその 1 次導関数は不定性を持ってしまう。なので Klein-Gordon 方程式に対して (4.19) は成り立たず、確率密度として $|\psi|^2$ を与えるのはできないのである。簡単な計算で Klein-Gordon 方程式なりには、

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} \right) d\mathbf{r} = 0 \quad (4.20)$$

と、保存量が提示されてはあるが、その積分の中身は (4.19) の中身とは違って必ずしも正であるとは限らないので、これも”確率密度”と考えるのはできないのである。だからといって Klein-Gordon 方程式がだめな方程式だとは言わない。量子力学的波動方程式とみなすことはできないが、前にも述べたように相対論的波動方程式として重要な意味を持つ。

Dirac 方程式と Dirac 行列

Dirac 行列の構築 われわれは、Klein-Gordon 方程式がだめな理由であった、E が 2 次形式で表されているのを乗り越えなければいけない。弥縫策として (4.16) の両

辺にスクエア・ルートを被らせることも考えられるが、だとあからさまに (4.17) の置き換えが使えなくなる。ここで無理やり、次のような量を考えてみよう。

$$\frac{E}{c} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc \quad (4.21)$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を普通の数だと考えると、これの両辺の自乗をとっても (4.16) にするのはできないが、発想の転換で、これを行列扱いしてみよう。まず、(4.16) を”無理やり因数分解したような形”を出して、それと (4.16) を比べることによって条件を絞っていこう。

$$\left(\frac{E}{c} + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc \right) \left(\frac{E}{c} - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta mc \right) = 0 \quad (4.22)$$

ここで、行列は必ずしも交換しないというのを踏まえて展開すると、

$$\begin{aligned} & \frac{E^2}{c^2} - \alpha_1^2 p_1^2 - \alpha_2^2 p_2^2 - \alpha_3^2 p_3^2 - \beta^2 m^2 c^2 \\ & - (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 - (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) p_2 p_3 - (\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_3) p_3 p_1 \\ & - (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) p_1 mc - (\alpha_2 \beta + \beta \alpha_2) p_2 mc - (\alpha_3 \beta + \beta \alpha_3) p_3 mc = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

ここで、 α と β が次のような条件を満たすとき、(4.23) は (4.16) と等しくなる。

$$\begin{aligned} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i &= 2\delta^{ij} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i &= 0 \\ \alpha^{i^2} &= \beta^2 = 1 \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.24)$$

α と β は、 4×4 行列となっている。これはエネルギー・運動量などが4元化されてることから自然と要請される。これより、(4.24) の条件を満たす 4×4 行列のことを Dirac 行列という。

ここで、 4×4 行列に拡張した Pauli 行列を次のように定義する。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

これらは 2×2 行列と同じく、次のような交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_1 = i\sigma_3, & \sigma_2 \sigma_3 &= -\sigma_3 \sigma_2 = i\sigma_1 \\ \sigma_3 \sigma_1 &= -\sigma_1 \sigma_3 = i\sigma_2, & \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

σ 行列だけでは全ての 4×4 行列を表現できないので、追加に ρ 行列を定義する。

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

ρ 行列は σ 行列と同じ交換関係を持つ。

$$\begin{aligned}\rho_1\rho_2 &= -\rho_2\rho_1 = i\rho_3, & \rho_2\rho_3 &= -\rho_3\rho_2 = i\rho_1 \\ \rho_3\rho_1 &= -\rho_1\rho_3 = i\rho_2, & \rho_1^2 &= \rho_2^2 = \rho_3^2 = 1\end{aligned}\quad (4.28)$$

また、 ρ 行列と σ 行列との間には次が成り立つ。

$$\sigma_i\rho_j = \rho_j\sigma_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.29)$$

これらは数学的に簡潔で優雅な構造を持っている。 4×4 行列は 16 個の成分があるが、また、1 (1 個)、 σ_i (3 個)、 ρ_i (3 個)、 $\sigma_i\rho_j$ (9 個) の 16 個の独立な行列を選ぶこともできる。Dirac 行列もこれらで表すことができる。

(4.21) から、われわれは直観的に Dirac 方程式の Hamiltonian を考えられる。

$$H(\mathbf{p}) = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \quad (4.30)$$

ここで特に注目すべきなのは、演算子は形式的に空間座標に対して 1 階の微分の形式をとっているということだ。ここで、 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ である。(4.25) に対するシュレディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2) \psi \quad (4.31)$$

のように表される。これを Dirac の波動方程式という。

ここで、 α_i 、 β が 4×4 行列なので、それに対応して波動関数も 4 つの成分に分ける必要がある。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

これを「スピノル」という。(4.31) に対する確率密度、確率流れはそれぞれ

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma=0}^3 \psi_{\sigma}^*(\mathbf{r}, t) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma=0}^3 c \psi_{\sigma}^*(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\alpha} \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \quad (4.34)$$

であって、これは連続方程式を満たす。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4.35)$$

そして、 $\beta = \gamma^0$ 、 $\alpha = \gamma^0 \gamma^i$ とおくと、Dirac 方程式を共変化することができる。

$$i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - mc \psi = 0, \quad \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2\delta^{\mu\nu}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (4.36)$$

つまり、Dirac 方程式はローレンツ変換に対して不変である。

Dirac 方程式と角運動量 ハミルトニアン (4.30) (今後、便宜上これを Dirac のハミルトニアンと呼ぶ) で表される粒子の性質を調べよう。まず、角運動量を調べよう。相対論的效果を排除した理論では軌道角運動量 ($L = r \times p$) は保存する。つまり、ハミルトニアンと交換する。それでは Dirac のハミルトニアンとの交換関係はどうなるだろうか。

$$[L, c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2] = i\hbar \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} \quad (4.37)$$

軌道角運動量だけなら、ディラックのハミルトニアンと交換しない。一方

$$[\boldsymbol{\sigma}, c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2] = -2i\hbar \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} \quad (4.38)$$

なのが知られている。つまり、

$$\left[L + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}, c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \right] = 0 \quad (4.39)$$

であり、

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} \quad (4.40)$$

は保存量である。つまり、Dirac 粒子は、スピンの半整数の粒子であって、軌道角運動量、スピン角運動量が別々に保存せず、全角運動量だけが保存する。そしてスピンという概念はオプションとかでつけたものでなく、そのものの中から帰納的に出てきたものであるのではなおさら不思議なのである。Dirac 方程式は、スピンが半整数倍な粒子、つまりフェルミオンのための方程式である。

Pauli の表現による Dirac 方程式 (4.24) ~ (4.29) の具体例として、

$$\alpha_i = \rho_1 \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

をとれば、(4.24) を満たすのがわかる。これは Dirac 行列の一例であって、いちばん有名な Pauli の表現というものである。

Pauli の表示による Dirac 方程式をもうちょっと表せてみると次のようである。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & -i\hbar \sigma_\mu \nabla_\mu \\ -i\hbar \sigma_\mu \nabla_\mu & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Weyl の表現による Dirac 方程式 ディラック方程式

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \sum_{i=1}^3 \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \psi = \beta mc^2 \quad (4.43)$$

で、 $m = 0$ とおいた

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \sum_{i=1}^3 \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \psi = 0 \quad (4.44)$$

$$H\psi = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\psi$$

をワイル方程式と呼ぶ。ここで、

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

一方 γ を用いた表現では、

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のようである。これをディラック方程式に適用してみよう。

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi &= (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ &= i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{c\partial t} \\ \frac{\partial}{c\partial t} & 0 \end{pmatrix} + i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \nabla_i \\ -\sigma^i \nabla_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - mc \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -mc & i\hbar \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \nabla_i \right) \\ i\hbar \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \sigma^i \nabla_i \right) & -mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

ここで、質量 $m = 0$ とおいたので、これを反映すると、行列はきれいに対角化され、方程式はきれいに二つに分かれる。

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\sigma_i \nabla_i \right) \psi_1 = 0 \quad (4.47)$$

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\sigma_i \nabla_i \right) \psi_2 = 0 \quad (4.48)$$

ワイルの表現はその質量を 0 と仮定しているから、中性微子が出てくる弱い相互作用に適う表現である。中性微子の質量を 0 とするのは標準模型 (Standard Model) から起因するが、最近の一連の実験 (K2K 実験など) では、中性微子は質量を持っているべきだという結果が得られている。中性微子もエネルギーを持って振動をしたり、ほかの粒子に崩壊したりするのがわかったが、そのような活動をするためには、必然的に中性微子も質量を持たなければいけないのである。なので、中性微子の質量を 0 とみなして確立した標準模型は、もはや絶対的な基本理論よりも、効率よく近似する有効理論、に近くなったのだ。もし、このまま研究が休みなく行われ、中性微子の質量が実際に精密に計算されるなら、宇宙を構成する質量の大部分を明確に説明できるようになるのであろう。