数学分析教程 (第 3 版) – 笔记
(常庚哲 史济怀 编著)

余启帆
2020 年 1 月于中国科学技术大学

数学分析教程

目录

第 1 章 实数和数列极限

1.1 实数

1.1.1 数域

经过加、减、乘、除四则运算之后仍然在其内.

如, 有理数. 据此, 称全体有理数组成一个**数域**.

1.1.2 实数与有理数

每一个**实数**都能用**有理数**去逼近到任意精确的程度.

$$\frac{p}{q} \le x < \frac{p+1}{q} \Leftrightarrow 0 \le x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q} \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}.$$

1.1.3 实数集与数轴

全体实数正好充满整个数轴.

提示 设 $x = a.b_1b_2b_3\cdots$, 运用闭区间套定理.

1.1.4 稠密

我们说 $\mathbb{R}$ 中的数集 E 在 $\mathbb{R}$ 中是**稠密**的, 如果在任意两个实数间必有 E 中的一个数.

这说明, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是**稠密**的.

1.1.5 无穷递降法

正整数不可能无止境地递减下去.

1.1.6 记号“□”

记号“□”表示待证明的命题已经证明完毕.

1.1.7 稠密与连续性

有理数和无理数合起来统称为实数.

这样, 实数和数轴上的点就建立了一一对应, 或者说, 全体实数正好充满了数轴.

这一事实称为实数的连续性.

可见, 稠密的数集并不一定连续, 而连续的数集必定稠密.

1.1.8 实数系统连续性的表现形式

1. **定理 1.5.1** 单调且有界的数列一定有极限.

2. **定理 1.5.2**(闭区间套定理) 设 $I_n = [a_n, b_n]\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 并且 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. 如果这一列区间的长度 $\left|I_n\right| = b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$, 那么交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 含有唯一的一点.

3. **定理 1.7.1**(列紧性定理, Bolzano-Weierstrass Theorem) 从任何有界的数列中必可选出一个收敛的子列.

4. **定理 1.7.2**(Cauchy 收敛准则) 一个数列收敛的充分必要条件是, 它是基本列.

5. **定理 1.8.1**(确界原理) 非空的有上界的集合必有上确界; 非空的有下界的集合必有下确界.

6. **定理 1.9.1**(紧致性定理, 有限覆盖定理, Heine-Borel Theorem) 设$[a,b]$是一个有限闭区间, 并且它有一个开覆盖$\left\{I_\lambda\right\}$, 那么从这个开区间族中必可选出有限个成员(开区间)来, 这有限个开区间所成的族仍是$[a,b]$的开覆盖.

1.2 数列和收敛数列

1.2.1 极限和收敛数列

定义 1.2.1 设$\left\{a_n\right\}$是一个数列, a是一个实数. 如果对**任意给定**的$\varepsilon>0$, 存在一个$N\in\mathbf{N}^*$, 使得当$n>N$时, 有

$$\left|a_n-a\right|<\varepsilon$$

就说数列$\left\{a_n\right\}$当n趋向于无穷大时以a为**极限**, 记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

也可以简记为$a_n\to a(n\to\infty)$. 我们也说数列$\left\{a_n\right\}$**收敛于**a.

存在极限的数列称为**收敛数列**, 不收敛的数列称为**发散数列**.

1.3 收敛数列的性质

1.3.1 收敛数列的几何定义

定义 1.3.1 数列$\left\{a_n\right\}$当$n\to\infty$时收敛于实数a是指：对任意的$\varepsilon>0$, 总存在$N\in\mathbf{N}^*$, 使得此数列中除有限多项$a_1,a_2,\cdots,a_N$可能是例外, 其他的项均落在a的ε邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内.

1.3.2 极限的唯一性

定理 1.3.1 如果数列$\left\{a_n\right\}$收敛, 则它只有一个极限. 也就是说, 收敛数列的极限是唯一的.

提示 用反证法. 假设数列$\left\{a_n\right\}$有两个不同的极限a与b, 不妨设$a<b$. 令$\varepsilon=\dfrac{1}{2}(b-a)$.

1.3.3 上界、下界与有界数列

定义 1.3.2 设$\left\{a_n\right\}$是一个数列. 如果存在一个实数A, 使得$a_n\le A$对一切$n\in\mathbf{N}^*$成立, 则称$\left\{a_n\right\}$是**有上界**的, A是此数列的一个**上界**.

类似地, 可以定义**有下界**的数列.

如果数列$\left\{a_n\right\}$既有下界又有上界, 则称它是一个**有界数列**.

1.3.4 收敛数列是有界的.

定理 1.3.2 收敛数列是有界的.

提示 设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a. 当 $n > N$ 时，有 $\left|a_n - a\right| < 1$. 若令 $M = \left|a_1\right| + \left|a_2\right| + \cdots + \left|a_N\right| + \left|a\right| + 1$(此处，1可用 $\forall \varepsilon > 0$ 替代)，则对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $\left|a_n\right| \le M$.

事实上，更严格地，可取 $M = \max(\left|a\right| + 1, \left|a_1\right|, \left|a_2\right|, \cdots, \left|a_N\right|)$.

1.3.5 子列

定义 1.3.3 ()

如此定义，$\left\{a_n\right\}$自身也可以看作是$\left\{a_n\right\}$的子列.

定理 1.3.3 设收敛数列$\left\{a_n\right\}$的极限是a，那么$\left\{a_n\right\}$的任何一个子列都收敛于a.

提示 任取$\left\{a_n\right\}$的一个子列$\left\{a_{k_n}\right\}$. 则$k_n \ge n > N$.

说明 如果数列$\left\{a_n\right\}$的两个子列收敛于不同的极限，那么数列$\left\{a_n\right\}$是发散的.

推论 1.3.1 数列$\left\{a_n\right\}$收敛的充分必要条件是它的偶数项子列$\left\{a_{2n}\right\}$和奇数项子列$\left\{a_{2n-1}\right\}$都收敛，而且有相同的极限.

1.3.6 极限的四则运算

定理 1.3.4 设$\left\{a_n\right\}$与$\left\{b_n\right\}$都是收敛数列，则$\left\{a_n + b_n\right\}$，$\left\{a_n b_n\right\}$也是收敛数列. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$，则$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也收敛，并且有：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

特别地，如果c是常数，便有$\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$，其中，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$.

提示 先证明：当$b \ne 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$. 再通过化归方法，化为(2)的情况.

1.3.7 无穷小数列

定义 1.3.4 如果收敛数列$\left\{a_n\right\}$的极限等于0，那么这个数列称为**无穷小数列**，简称**无穷小**.

定理 1.3.5 ()

1.3.8 夹逼原理(两边夹法则)

定理 1.3.6 设$a_n \le b_n \le c_n (n \in \mathbf{N}^*)$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$，那么$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

提示 从定义出发.

1.3.9 不等式与收敛数列

定理 1.3.7 (1)设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\alpha,\beta$ 满足 $\alpha < a < \beta$，那么当 n 充分大时，有 $a_n > \alpha$；同样，当 n 充分大时，有 $a_n < \beta$.

(2)设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且 $a < b$，那么当 n 充分大时，一定有 $a_n < b_n$.

(3)设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，并且当 n 充分大时 $a_n \le b_n$，那么有 $a \le b$.

提示 运用实数系统的连续性，在 $a < b$ 间取 c 满足 $a < c < b$.

证明 (1)令 $\varepsilon = a - \alpha > 0$，考虑 a 的 ε 邻域.

(2)任取 $m \in \mathbf{R}$ 满足 $a < m < b$. 由(1)可知，存在一个 $N \in \mathbf{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，有 $a_n < m < b_n$.

(3)用反证法. 由(2)可知，结论与条件相违背.

1.4 数列极限概念的推广

1.4.1 无穷大数列

定义 1.4.1 如果数列 $\{a_n\}$ 满足条件：对任何正数 A，都存在 $N \in \mathbf{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，有 $a_n > A$，则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $+\infty$ (正无穷大)，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

如果对任何正数 A，都存在 $N \in \mathbf{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，有 $a_n < -A$，则称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $-\infty$ (负无穷大)，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

定义 1.4.2 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$，则称 $\{a_n\}$ 趋向于 ∞，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

无论三种情形

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

中的哪一种，数列 $\{a_n\}$ 都称为**无穷大**.

讨论 设数列 $\{a_n\}$：$a_n = (-1)^n n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$，能称 $\{a_n\}$ 趋向于 ∞ 吗？

回答 由定义可知，答案是肯定的.

1.4.2 无穷大的性质

(1)如果 $\{a_n\}$ 是无穷大，那么 $\{a_n\}$ 必然无界.

注意 与“收敛数列必然有界”相似，上述命题的逆命题不成立，例如

$$1,0,2,0,3,0,\cdots,n,0,\cdots$$

是无界的，但这个数列不是无穷大. 但有：

(2)从无界数列中一定能选出一个子列是无穷大.

提示 用反证法.

(3)如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (或 $-\infty,\infty$)，那么对 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{k_n}\}$，也有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = +\infty$ (或 $-\infty,\infty$).

(4)如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

注意 上述性质对 $a_n - b_n$ 和 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 不成立.

(5) $\{a_n\}$ 是无穷大的充分必要条件是 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为无穷小.

1.4.3 扩充的实数系统

将全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 连同两个符号 $-\infty$ 与 $+\infty$ 放在一起, 从而形成**扩充的实数系统**, 我们把这扩充了的系统记作 $\mathbf{R}_\infty$, 即 $\mathbf{R}_\infty = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.5 单调数列

1.5.1 单调数列

定义 1.5.1 ()

1.5.2 有界和收敛

定理 1.5.1 单调且有界的数列一定有极限.

证明(1) 将数列的各项表示成十进制无尽小数, 运用 $\varepsilon - N$ 语言.

证明(2) 运用确界原理.

设 $\{a_n\}$ 是一个递增数列, 且有上界. 由确界原理, 知 $a = \sup a_n$ 是存在的. 一方面, $a \geq a_n$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立; 另一方面, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 一定有一个 $a_N (N \in \mathbf{N}^*)$, 使得 $a - \varepsilon < a_N$. 由数列的递增性质, $a_n \geq a_N > a - \varepsilon$ 对 $n \geq N$ 成立, 即 $0 \leq a - a_n \leq \varepsilon$ 对 $n \geq N$ 成立, 这正是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 证毕.

说明 事实上, 结合“收敛数列是有界的”这一性质, 上述定理可表述为:

(收敛数列的单调有界判别法) 单调数列**收敛**的充分必要条件是其为**有界数列**.

1.5.3 闭区间套定理

定理 1.5.2 设 $I_n = [a_n, b_n] (n \in \mathbf{N}^*)$, 并且 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$. 如果这一列区间的长度 $|I_n| = b_n - a_n \to 0 (n \to \infty)$, 那么交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 含有唯一的一点.

提示 利用“单调有界数列一定收敛”的性质.

1.5.4 无穷级数

和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

称为无穷级数, 其中每个 $a_i (i \in \mathbf{N}^*)$ 都是实数.

它的前 n 项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

由此构成的数列 $\{S_n\}$ 称为式(1)的部分和数列.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 就称级数(1)是收敛的, S 称为级数(1)的和.

如果数列$\{S_n\}$不收敛，就称级数(1)是发散的，级数(1)没有和.

1.6 自然对数的底 e

1.6.1 两个数列

同时考察如下两个数列：

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$s_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

记 $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$，$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$，则有：$\mathrm{e} = s$.

1.6.2 自然对数的底 e

定理 1.6.1 自然对数的底 e 是无理数.

注意 通过上述讨论，我们看到，数列$\{e_n\}$与$\{s_n\}$的各项都是有理数，但是它们的极限却是无理数. 我们又一次看到了在全体有理数中添加无理数的必要性. 否则，极限运算就无法进行.

1.7 基本列和 Cauchy 收敛准则

1.7.1 基本列(Cauchy 列)

定义 1.7.1 设$\{a_n\}$是一实数列. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，若存在 $N \in \mathbf{N}^*$，使得当 $m,n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m,n > N$ 时，有$|a_m - a_n| < \varepsilon$，则称数列$\{a_n\}$是一个**基本列**或 Cauchy 列.

基本列的特征：只要数列中两个项充分地靠后，而不论它们的相对位置如何，它们之差的绝对值便可以小到事先任意给定的程度.

等价叙述 令 $m = n + p$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，若存在 $N \in \mathbf{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ 对一切 $p \in \mathbf{N}^*$ 成立，则数列$\{a_n\}$叫作**基本列**.

1.7.2 列紧性定理(Bolzano-Weierstrass Theorem)

定理 1.7.1 从任何有界的数列中必可选出一个收敛的子列.

证明(1) 先证明一个引理.

引理 1.7.1 从任一数列中必可取出一个单调子列.

引理 1.7.1 的证明 先引入一个定义：如果数列中的一项大于这个项之后的所有各项，则称这一项是一个“龙头”. 则“龙头”或“非龙头”中必有一类含有无穷多项. 分两种情况来讨论.

情况(a) 如果在数列中存在着无穷多个“龙头”，那么把这些可作“龙头”的项依次取下来，显然将得到一个严格递减的数列.

情况(b) 设在此数列中只有有限多个项可作“龙头”. 这时取出最后一个“龙头”的下一项，记作 a_{i_1}. 由于 a_{i_1} 不是“龙头”，在它的后边必有一项 $a_{i_2}(i_2 > i_1)$ 满足 $a_{i_1} \le a_{i_2}$；因 a_{i_2} 也不是“龙头”，在它的后边也

必可找到一项$a_{i_3}(i_3 > i_2)$，使得$a_{i_3} \geq a_{i_2}$. 如此进行下去，就得到子列$\left\{a_{i_n}\right\}$，它显然是一个递增的子列.

回到原题.

设$\left\{a_n\right\}$是一个有界的数列. 根据**引理 1.7.1**，从中可以取出一个单调子列$\left\{a_{i_n}\right\}$，这个子列当然也是有界的. 利用**定理 1.5.1**，得知$\left\{a_{i_n}\right\}$是一个收敛数列. 证毕.

证明(2) 不妨设$\left\{a_n\right\}$是一个有界的数列，令$\alpha_n = \inf\left\{a_n,a_{n+1},\cdots\right\}$，则$\left\{\alpha_n\right\}$单调增且有上界，因而收敛. 设$\alpha$为其极限. 根据$\alpha_{t_1}$是下确界的性质，存在自然数$n_1$使得$\alpha_{t_1} \leq a_{n_1} < \alpha_{t_1} + 1$. 记$t_2 = n_1 + 1$.（为了使$n_2 > n_1$，从而保证所得到子列的各项各不相同）又存在$a_{n_2}$使得$\alpha_{t_2} \leq a_{n_2} < \alpha_{t_2} + \dfrac{1}{2}$. 令$t_3 = n_2 + 1$. 按照这个过程，可以构造$\left\{a_n\right\}$的子列$\left\{a_{n_k}\right\}$使得$\alpha_{t_k} \leq a_{n_k} < \alpha_{t_k} + \dfrac{1}{k}$. 因为$\alpha_{t_k} \to \alpha(k \to \infty)$，所以$a_{n_k} \to \alpha(k \to \infty)$. 证毕.

证明(3) 设$\left\{x_n\right\}$是一个有界数列. 则存在两个不相同的实数a和b，使得：

$$a \leq x_n \leq b,\ n = 1,2,\cdots.$$

构造一列闭区间$\left\{\left[a_n,b_n\right]\right\}$如下：首先取$\left[a_1,b_1\right] = \left[a,b\right]$，然后把$\left[a_1,b_1\right]$二等分得到两个子区间$\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$和$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$. 两个子区间中，至少有一个含有数列$\left\{x_n\right\}$的无穷多项. 记这个含有$\left\{x_n\right\}$的无穷多项的子区间为$\left[a_2,b_2\right]$(当两个子区间都含有$\left\{x_n\right\}$的无穷多项时，任取其一记为$\left[a_2,b_2\right]$). 再把$\left[a_2,b_2\right]$二等分. 如此类推下去，应用数学归纳法，得到一列闭区间$\left\{\left[a_k,b_k\right]\right\}$具有下述性质：

(1)形成一个闭区间套：$\left[a_1,b_1\right] \supseteq \left[a_2,b_2\right] \supseteq \cdots \supseteq \left[a_k,b_k\right] \supseteq \left[a_{k+1},b_{k+1}\right] \supseteq \cdots$;

(2)长度趋于零：$\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{b-a}{2^{k-1}} = 0$;

(3)每个区间$\left[a_k,b_k\right]$都含有数列$\left\{x_n\right\}$的无穷多项.

任取$\left\{x_n\right\}$中的一项记为x_{n_1}，则$x_{n_1} \in \left[a_1,b_1\right]$. 再取$\left\{x_n\right\}$中位于$x_{n_1}$后面并且属于区间$\left[a_2,b_2\right]$中的一项记为$x_{n_2}$. 如此做下去，一般地，当取定$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k}$之后，再取$\left\{x_n\right\}$中位于$x_{n_k}$后面并且属于区间$\left[a_{k+1},b_{k+1}\right]$中的一项记为$x_{n_{k+1}}$. 这样，运用第二数学归纳法，就得到了$\left\{x_n\right\}$的一个子数列$\left\{x_{n_k}\right\}$具有性质：

$$x_{n_k} \in \left[a_k,b_k\right],\ k = 1,2,\cdots.$$

根据闭区间套定理，从(1)和(2)推知闭区间列$\left\{\left[a_k,b_k\right]\right\}$含有唯一的公共点$c$，且$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$. 由于$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k,\ k = 1,2,\cdots$，所以由两边夹法则知，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$，所以子数列$\left\{x_{n_k}\right\}$是收敛数列. 证毕.

说明(3) 以上证明中使用的方法称为**二分法**，是数学分析中经常采用的一个方法.

1.7.3 数列的 Cauchy 收敛准则(Cauchy's Criterion for Convergence)

定理 1.7.2 一个数列收敛的充分必要条件是，它是基本列.

提示 证明充分性时，考虑列紧性定理.

说明 Bolzano-Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛准则是实数系统连续性的另外两种表现形式.

1.8 上确界和下确界

1.8.1 上确界和下确界

定义 1.8.1 设 E 为一非空的有上界的集合, 实数 β 满足以下两个条件:

(1)对任何 $x \in E$, 有 $x \le \beta$;

(2)对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必可找到一个 $x_\varepsilon \in E$, 使得 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$.

这时, 称 β 为集合 E 的**上确界(Supremum)**, 记为 $\beta = \sup E$.

由(1)与(2)可见, E 的上确界 β 是 E 的最小上界.

定义 1.8.2 设 E 为一非空的有下界的集合, 实数 α 满足以下两个条件:

(1)对任何 $x \in E$, 有 $x \ge \alpha$;

(2)对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必可找到一个 $y_\varepsilon \in E$, 使得 $y_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

这时, 称 α 为集合 E 的**下确界(Infimum)**, 记为 $\alpha = \inf E$.

同理可知, E 的下确界是 E 的最大下界.

显然, 若集合 E 中有最大(最小)数 a, 那么 $\sup E(\inf E) = a$.

1.8.2 确界原理

定理 1.8.1 非空的有上界的集合必有上确界; 非空的有下界的集合必有下确界.

提示 对于第一个论断, 可使用二分法, 结合闭区间套定理.

对于第二个论断, 可仿照第一个论断的证法; 也可通过化归方法, 注意到 $\inf(-E) = -\sup E$, 构造 $F = -E = \left\{-x : x \in E\right\}$, 将问题转化为第一个论断.

技巧 证明 $\beta = \sup E$ (或 $\alpha = \inf E$)的一般思路:

(1)证明其为上界(下界);

(2)证明其为最小上界(最大下界):

构造数集 E 中的一个数 $d \in E$, 证明: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, $d > \beta - \varepsilon$ ($d < \alpha + \varepsilon$).

1.9 有限覆盖定理

1.9.1 开覆盖

定义 1.9.1 如果 A 是实数集, $\mathrm{J} = \left\{I_\lambda\right\}$ 是一个开区间族, 其中 $\lambda \in \Lambda$, 这里的 Λ 称为指标集. 如果 $A \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, 称开区间族 $\left\{I_\lambda\right\}$ 是 A 的一个**开覆盖**, 或者说 $\left\{I_\lambda\right\}$ 盖住了 A.

等价叙述 任取 $a \in A$, 总有 J 中的一个成员, 记为 $I_{\lambda(a)}$, 使得 $a \in I_{\lambda(a)}$.

1.9.2 *有限覆盖定理(Heine-Borel Theorem)(紧致性定理)

定理 1.9.1 设 $\left[a,b\right]$ 是一个有限闭区间, 并且它有一个开覆盖 $\left\{I_\lambda\right\}$, 那么从这个开区间族中必可选出有限个成员(开区间)来, 这有限个开区间所成的族仍是 $\left[a,b\right]$ 的开覆盖.

提示(1) 反证法. 二分法.

提示(2) 运用 Lebesgue 数定理.

证明(2) 不妨设 $b-a=1$，取 $n>\dfrac{1}{\sigma}$，将区间 $[a,b]$ n 等分，这时每一个子区间的长度小于 σ，根据 Lebesgue 数定理，可以从 $\{I_n\}$ 中选出 n 个开区间来，它们的并覆盖 $[a,b]$.

1.9.3 *Lebesgue 数定理

问题 1.9.1 设开区间族 $\{I_\lambda\}$ 是有限闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖，则必存在 $\sigma>0$，使得只要区间 $A\subset[a,b]$ 且 A 的长度 $|A|<\sigma$，就必有 $\{I_\lambda\}$ 中的一个区间包含 A. 其中 σ 称为 Lebesgue 数.

1.10 *上极限和下极限

1.10.1 极限点

我们把数列 $\{a_n\}$ 的收敛子列 $\{a_{k_n}\}$ 的极限称为 $\{a_n\}$ 的一个极限点.

说明(1) 注意“收敛”数列的广义与狭义. 此处的收敛数列是指“有极限，即只趋向于一个值，其中，这个值可以为有限值，也可以为无限值”的数列(广义).

如果数列 $\{a_n\}$ 无界，则除了有限的极限点外，它还可以以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为其极限点.

说明(2) 一个数列虽然可能没有极限，但是它的极限点构成的数集 $E\neq\varnothing$，因此，数集 E 的上(下)确界存在，故这个数列的上极限和下极限也一定是存在的.

1° 对收敛数列而言，极限点只有一个，即它的极限.

2° 对发散数列而言，

如果它有界，根据 Bolzano-Weierstrass 定理，从中可以找出一个收敛的子列，则它可以有若干个甚至无穷多个极限点;

如果它无界，那么总可以找到一个子列趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$，则除了有限的极限点外，它还可以以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为其极限点.

1.10.2 上极限和下极限

定义 1.10.1 设 $\{a_n\}$ 是一个数列，E 是由 $\{a_n\}$ 的全部极限点构成的集合. 记 $a^*=\sup E$，$a_*=\inf E$，则 a^* 和 a_* 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限，记为 $a^*=\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$，$a_*=\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

定理 1.10.1 设 $\{a_n\}$ 为一数列，E 与 a^* 的意义已在**定义 1.10.1** 中描述. 那么：

(1) $a^*\in E$;

(2)若 $x>a^*$，则存在 $N\in\mathbf{N}^*$，使得当 $n\geq N$ 时，有 $a_n<x$;

(3) a^* 是满足前两条性质的唯一的数.

证明 (1)直接构造一个子列 $\{a_{k_n}\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}=a^*$.

说明 性质(1)表明：数列 $\{a_n\}$ 的上(下)极限正是它的一切收敛的子列的极限所组成的集合中的最大(小)者.

定理 1.10.2 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个数列.

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 当且仅当 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

(3)若 N 是某个正整数，当 $n > N$ 时，$a_n \le b_n$，那么 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$，$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

定理 1.10.3 对数列 $\{a_n\}$，定义 $\alpha_n = \inf\limits_{k\ge n} a_k$，$\beta_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k$，那么：

(1) $\{\alpha_n\}$ 是递增数列，$\{\beta_n\}$ 是递减数列;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a_*$，$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = a^*$.

说明 $a^* = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} a_k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$，$a_* = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} a_k = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

1.10.3 两条不等式链

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n \le \liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \le \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

1.11 Stolz 定理 – Stolz–Cesàro Theorem

1.11.1 Stolz 定理

定理 1.11.1(Stolz, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型) 设 $\{b_n\}$ 是严格递增且趋于 $+\infty$ 的数列. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$，其中 A 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

提示 分类讨论，化归方法.

第 2 章 函数的连续性

2.1 集合的映射

2.1.1 映射

定义 2.1.1 设 A,B 是两个集合, 如果 f 是一种规律, 使得对 A 中的每一个元素 x, B 中有唯一确定的元素——记为 $f(x)$ ——与 x 对应, 则称 f 是一个从 A 到 B 的**映射**, 用 $f:A\to B$ 来表示.

集合 A 叫作映射 f 的定义域; $f(x)\in B$ 叫作 x 在映射 f 之下的**像**或 f 在 x 上的值.

2.1.2 像与值域

设 $E\subset A$, 即 E 为 A 的一个子集. 令 $f(E)=\left\{f(x):x\in E\right\}$. 也就是说, $f(E)$ 是映射 f 之下 E 中元素的像的全体, 称为 E 的**像**. 显然, 如果 $f:A\to B$, 那么 $f(E)\subset B$.

特别地, 定义域 A 的像 $f(A)$ 叫作 f 的**值域**.

2.1.3 定义

定义 2.1.2 设 $f:A\to B$, 且 $g:A\to B$. 如果对任何 $x\in A$, 均有 $f(x)=g(x)$, 则称映射 f 与 g 相等, 记为 $f=g$.

定义 2.1.3 设 $f:A\to B$. 如果 $f(A)=B$, 则称 f 是从 A 到 B 上的**满射**, 也就是说, B 中的任何元素都是 A 中某一元素在 f 之下的像.

定义 2.1.4 设 $f:A\to B$. 如果当 $x,y\in A$, 且 $x\neq y$ 时, 有 $f(x)\neq f(y)$, 则称 f 为**单射**.

定义 2.1.5 设 $f:A\to B$ 既是单射又是满射, 则称映射 f 是一对一的. 这时, 也说 f 在集合 A 与 B 之间建立一个**一一对应**. 此时, 可以定义映射 f 的逆映射 $f^{-1}:B\to A$.

定义 2.1.6 设 $f:A\to B$, $F\subset B$, 则 A 的子集 $f^{-1}(F)=\left\{x\in A:f(x)\in F\right\}$ 叫作 F 的**原像**.

2.1.4 复合

定义 2.1.7 设映射 $f:B\to C$, 映射 g 的定义域为 A. 当 $x\in A_1=g^{-1}(B)$ 时, 定义映射 $f\circ g(x)=f(g(x))$.

显然, $f\circ g:A_1\to C$, 称为映射 f 与 g 的复合.

结合律运算: $f\circ g\circ h=f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h=f(g(h(x)))$

设 $f:A\to A$, 那么 f 的 n 次复合 $f\circ f\circ\cdots\circ f$ (这里有 n 个 f), 可以简记为 f^n.

交换律不适用: $f\circ g\neq g\circ f$

2.1.5 恒等映射

设映射 $f:A\to B$ 是一个一一对应, 因此它的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 也是一个一一对应, 并且 $f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=x$ 对一切 $x\in A$ 成立.

若集合 A 到自身的映射 I_A, 使得 $I_A(x)=x$ 对一切 $x\in A$ 成立, 则称 I_A 为 A 上的**恒等映射**.

如果 $f:A\to A$ 是一对一的, 那么 f^{-1} 存在, 并且有 $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A$.

2.2 集合的势

2.2.1 势

设 A 与 B 是两个集合, 如果存在一个从 A 到 B 上的一对一的映射, 我们就称集合 A 与 B 有相同的“势”或有相同的“基数”, 这时我们称 A 与 B 等价, 用 $A \sim B$ 表示.

势的性质：

1. 自反性：$A \sim A$;

2. 对称性：若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

3. 传递性：若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

显然, 对两个有限集 A 与 B, A 与 B 有相等的势的充分必要条件是它们的元素个数相等.

集合的势是有限集中“元素个数”这一概念的推广, 并且“势”是一切互相等价的集合唯一共有的属性.

无限集可能与某个真子集有相同的势. 这种现象在有限集的情形下是绝不会发生的.

2.2.2 集合

定义 2.2.1 令 $\mathbb{N}^*$ 是正整数的全体, 且 $N_n = \{1,2,\cdots,n\}$.

(1)如果存在一个正整数 n, 使得集合 $A \sim N_n$, 那么 A 叫作**有限集**. 空集也被认为是有限集.

(2)如果集合 A 不是有限集, 则称 A 为**无限集**.

(3)若 $A \sim \mathbb{N}^*$, 则称 A 为**可数集**. 据此可知, 可数集必为无限集.

(4)若 A 既不是有限集, 也不是可数集, 则称 A 为**不可数集**.

(5)若 A 是有限集或者 A 是可数集, 则称 A 是**至多可数**的.

讨论 可数集与可列集有什么区别?

2.2.3 集合与势

定理 2.2.1 可数集 A 的每一个无限子集是可数集.

说明 这个定理表明, 可数集代表着“最小的”无限势, 因为没有不可数集能作为一个可数集的子集.

定理 2.2.2 设 $\{E_n\}(n = 1,2,3,\cdots)$ 是一列至多可数集. 令 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 那么 S 是至多可数集.

说明 即, 可数个可数集的并集也是可数集.

定理 2.2.3 $\mathbf{R}$ 中的全体有理数是可数的.

提示 构造可数个互不相交的可数集的并集.

定理 2.2.4 $[0,1]$ 上的全体实数是不可数的.

提示 用反证法, 结合闭区间套定理.

说明 这指明了一个事实：并不是每一个无限集都是可数的.

2.3 函数

2.3.1 函数

如果对映射 $f: X \to Y$，X 与 Y 都由实数组成, 则 f 称为一个函数.

函数是一类特殊的映射, 是从实数到实数的映射, 其中, 上述的 f 是单变量函数.

2.3.2 定义域

定义域就是一切使得函数表达式有意义的自变量 x 的全体.

2.3.3 反函数与恒等映射

映射 $f: X \to Y$ 有逆映射 $f^{-1}: Y \to X$, 这时我们称 f^{-1} 为 f 的**反函数**.

如果 $y = f(x)(x \in X)$, 那么 $x = f^{-1}(y)(y \in Y)$.

由以上两式, 推知 $f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y(y \in Y)$，$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x(x \in X)$.

这表明, $f \circ f^{-1}$ 是 Y 上的恒等映射, $f^{-1} \circ f$ 是 X 上的恒等映射.

2.3.4 单调函数

定义 2.3.1 ()

定理 2.3.1 设函数 f 在其定义域 X 上式严格递增(递减)的, 那么反函数 f^{-1} 必存在, f^{-1} 的定义域为 $f(X)$, 并且 f^{-1} 在这一集合上也是严格递增(递减)的.

提示 用反证法.

2.4 函数的极限

2.4.1 函数极限

定义 2.4.1 设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义, 但 x_0 这一点自身可以是例外. 设 l 是一个实数.

如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得对一切满足不等式 $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ 的 x，均有 $\left|f(x) - l\right| < \varepsilon$, 则称当 x 趋于点 x_0 时函数 f 有**极限** l, 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$; 或者, 记作 $f(x) \to l \ \ (x \to x_0)$. 这时, 也可以说函数 f 在点 x_0 有极限 l.

定义两个记号:

$$B_\delta(x_0) = \left\{x : \left|x - x_0\right| < \delta\right\},\ B_\delta(\breve{x}_0) = \left\{x : 0 < \left|x - x_0\right| < \delta\right\}$$

称 $B_\delta(x_0)$ 为 x_0 的以 x_0 为中心、δ 为半径的邻域(简称 x_0 的 δ 邻域);

称 $B_\delta(\breve{x}_0)$ 为 x_0 的以 x_0 为中心、δ 为半径的空心邻域(简称 x_0 的 δ 空心邻域).

则函数极限的**定义 2.4.1** 可表述为:

定义 2.4.1 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $\delta > 0$, 使得对一切 $x \in B_\delta(\breve{x}_0)$, 均有 $\left|f(x) - l\right| < \varepsilon$, 则称 l 为 f 当 x 趋于 x_0 时的极限, 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

说明 (1)在讨论 f 在点 x_0 的极限时, f 在 x_0 是否有定义并不重要, 因为不等式 $0 < \left|x - x_0\right|$ 已经把 $x = x_0$ 的可能性排除在外;

(2)在一般情形之下, δ 与 ε 有关系, 为了强调这种依赖关系, 有时把 δ 写为 $\delta(\varepsilon)$, 因此称为 $\varepsilon - \delta$ 语言,

但这不意味着 δ 是 ε 的函数;

(3) f 在 x_0 是否有极限、有极限时极限值等于多少，只取决于 f 在点 x_0 的充分小的近旁(邻域)的状态，而与 f 在远处的值无关，与 f 在点 x_0 处本身的情况(是否有定义，取值为多少)也无关.

2.4.2 函数极限与数列极限

定理 2.4.1 函数 f 在 x_0 处有极限 l 的充分必要条件是，对**任何一个**收敛于 x_0 的数列 $\left\{x_n \neq x_0 : n = 1,2,3,\cdots\right\}$，数列 $\left\{f(x_n)\right\}$ 有极限 l .

提示 证明充分性时用反证法，考虑直接构造一个数列 $\left\{x_n \neq x_0 : n = 1,2,3,\cdots\right\}$，它收敛于 x_0 ，但是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$.

技巧 证明函数 f 在 x_0 处极限不存在的思路：

(1)构造两个收敛于 x_0 的数列：$\left\{x_n\right\},\left\{x_n'\right\}$；

(2)证明数列 $\left\{f(x_n)\right\},\left\{f(x_n')\right\}$ 分别收敛于不同的值.

(3)由**定理 2.4.1** 知，函数 f 在 x_0 处极限不存在.

如, (**2.4·例 4**).

注意 处处不存在极限的函数是存在的. 如, Dirichlet(狄利克雷)函数：

定义函数 $D : \mathbf{R} \to \left\{0,1\right\}$ 如下：

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{为有理数时}, \\ 0, & \text{当}x\text{为无理数时}. \end{cases}$$

则对任意的 $x_0 \in \mathbf{R}$ ，$\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在.

提示 构造有理数数列和无理数数列两个数列.

2.4.3 函数极限的唯一性

定理 2.4.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它是唯一的.

提示 利用数列极限的唯一性.

2.4.4 函数的 x_0 邻域有界性

定理 2.4.3 若 f 在 x_0 处有极限，那么 f 在 x_0 的一个近旁是有界的. 也就是说，存在整数 M 及 δ ，使得当 $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ 时，$\left|f(x)\right| < M$.

提示 设 f 在 x_0 处的极限等于 l . 则只需确定 $M = M(\delta,l)$ 即可.

2.4.5 函数极限的四则运算

定理 2.4.4 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，那么有：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} fg(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

2.4.6 函数极限的夹逼原理

定理 2.4.5 设函数 f,g 与 h 在点 x_0 的近旁(点 x_0 自身可能是例外)满足不等式 $f(x)\le h(x)\le g(x)$. 如果 f 与 g 在点 x_0 有相同的极限 l，那么函数 h 在点 x_0 也有极限 l .

提示 可直接仿照“数列的夹逼定理”进行证明，也可利用**定理 2.4.1** 来证明.

2.4.7 不等式与函数极限

定理 2.4.6 设存在 $r>0$，使得当 $0<\left|x-x_0\right|<r$ 时，不等式 $f(x)\le g(x)$ 成立. 又设在 x_0 处这两个函数都有极限，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

2.4.8 函数极限的 Cauchy 收敛准则

定理 2.4.7 函数 f 在 x_0 处有极限的充分必要条件是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x_1,x_2\in B_\delta(\breve{x}_0)$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$.

2.4.9 复合函数的极限定理

定理 2.4.8 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$，$\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=x_0$. 如果在 t_0 的某个邻域 $B_\eta(t_0)$ 内 $g(t)\neq x_0$，那么 $\lim\limits_{t\to t_0}f(g(t))=l$.

说明 条件 $g(t)\neq x_0$ 至为重要，因为 $f(x)$ 在 x_0 处可能不连续！条件“在 t_0 的某个邻域 $B_\eta(t_0)$ 内 $g(t)\neq x_0$”表明 $g(t)$ 在 t_0 处不连续.

2.4.10 单边极限

定义 2.4.2 设函数 f 在 (x_0,x_0+r) (r 是一个确定的正数)上有定义. 设 l 是一个给定的实数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta\in(0,r)$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$，则称 l 为 f 在 x_0 处的右极限，表示成 $l=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$. 在右极限存在的情形下，这个右极限常记为 $f(x_0+)$ 或 $f(x_0+0)$. 也就是说，$f(x_0+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$.

类似地，可以定义 f 在 x_0 处的左极限 $f(x_0-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

右极限和左极限统称为单边极限.

注意 (1) $f(x_0)$ 与 $f(x_0-)$，$f(x_0+)$ 这两者之间可能毫无联系.

(2) $f(x_0+),f(x_0-)$ 并非具体的函数值.

2.4.11 极限与单边极限的关系

定理 2.4.9 设函数 f 在 x_0 的某个邻域内(x_0 可能是例外)有定义，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件

是 $f(x_0+)=f(x_0-)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，这个共同的值也就是函数 f 在 x_0 处的极限值.

2.4.12 变量代换法

变量代换, 又称换元, 在数学分析的各个部分中都是非常有用的.

2.5 极限过程的其他形式

2.5.1 函数 f 在无穷处极限

定义 2.5.1 设 l 是一确定的实数, 表达式

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=l$$

的意思是, 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 A，当 x 满足 $\left|x\right|>A$ 时, 有 $\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$. 这时, 我们说"当 x 趋向于无穷时, 函数 f 有极限 l". 上式也可以简记为

$$f(x)\to l=f(\infty)\ \ (x\to\infty)$$

定义 2.5.2 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 $A>0$，使得当 $x>A$ 时, 有 $\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$. 在这种情况下, 我们说"在正无穷处函数 f 有极限 l"，记为 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$. 简记为 $f(x)\to l\ \ (x\to+\infty)$.

对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 $A>0$，使得当 $x<-A$ 时, 有 $\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$. 在这种情况下, 我们说"在负无穷处函数 f 有极限 l"，记为 $f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$. 简记为 $f(x)\to l\ \ (x\to-\infty)$.

定理 2.5.1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$ 当且仅当 $f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 同时成立.

2.6 无穷小与无穷大

2.6.1 无穷大与无穷小

定义 2.6.1 设 x_0 是一个实数, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个近旁(可能除 x_0 之外)有定义. 如果对任意给定的正数 A，存在 $\delta>0$，使得当 $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ 时, 有 $\left|f(x)\right|>A$，则称"当 x 趋向于 x_0 时, 函数 f 趋向于无穷大"，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，或者 $f(x)\to\infty\ \ (x\to x_0)$.

类似地, 还可以定义

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty,\ \ \lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty,\ \ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\ \ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty.$$

对所有这些情形, 我们说"在所标明的极限过程中, f 是一个**无穷大(量)**".

如果在某一极限过程中, $\lim f(x)=0$，则称"在该过程中, f 是一个**无穷小(量)**".

说明 无穷大的倒数是无穷小; 不取零值的无穷小的倒数是无穷大.

即, 在任何情形下, $\dfrac{t}{0}(t\in\mathbf{R}^*)$ 都是没有意义的.

2.6.2 无穷小的比较

定义 2.6.2 设当 $x\to x_0$ 时, f 与 g 都是无穷小, 并且 g 在 x_0 的一个充分小的近旁(除 x_0 之外, $B_\delta(\breve{x}_0)$)不取零值.

(1)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，那么称 f 是比 g **更高阶的无穷小**;

(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$，则称 f 与 g 是**同阶的无穷小**;

(3)如果(2)中的极限值 $l=1$，那么称 f 与 g 是**等价的无穷小**，记为 $f\sim g\ \ (x\to x_0)$.

(4)把无穷小的“阶”进行“量化”:

当 $x\to x_0$ 时，很自然地取 $x-x_0$ 当作“1阶无穷小”.

设当 $x\to x_0$ 时，f 是一个无穷小，那么当 f 与 $(x-x_0)^\alpha(\alpha>0)$ 为同阶无穷小时，称 f 为 α 阶的无穷小.

注意 此处并不关心(2)中 l 的具体值，即，不要求 f 与 $(x-x_0)^\alpha(\alpha>0)$ 是等价的无穷小.

事实上，可待定 $\beta(\beta\neq 0)$，使得 $f\sim\beta(x-x_0)^\alpha(\alpha>0,\beta\neq 0)$.

2.6.3 无穷大的比较

设在某一极限过程中，f 与 g 都是无穷大，那么：

(1)当 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 时，称 g 是比 f 更高阶的无穷大，也可以说 f 是比 g 更低阶的无穷大.

(2)当 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbf{R}^*$ 时，称它们是同阶的无穷大

(3)当(2)中的极限值 $l=1$ 时，称 f 与 g 是**等价的无穷大**.

(4)把无穷大的“阶”进行“量化”：例如，

1° 当 $x\to 1$ 时，最好取 $\dfrac{1}{x-1}$ 作为标准的无穷大.

2° 当 $x\to\infty$ 时，取 $\left|x\right|$ 作为标准的无穷大是十分合理的.

注意 并不是对每一个无穷小或无穷大都能定出“阶”来. 例如，

当 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 是一个无穷小. 可是，把 x 取为标准的无穷小时，不可能为无穷小 $x\sin\dfrac{1}{x}$ “定阶”.

2.6.4 等价的无穷小或无穷大

定理 2.6.1 如果当 $x\to x_0(x_0\in\mathbf{R}_\infty)$ 时，f,g 是等价的无穷小或无穷大，那么：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}$.

证明 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}g(x)h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)$.

注意 这种代替只能发生在以因式形式出现的无穷小(无穷大)上，而不能发生在以加项或减项出现的无穷小(无穷大)上.

2.6.5 两个记号

定义 2.6.3 设函数 f 与 g 在 x_0 的近旁(x_0 除外)有定义，并且 $g(x)\neq 0$.

(1) 当 $x \to x_0$ 时，若比值 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 保持有界，即存在正常数 M ，使得 $\left|f(x)\right| \le M\left|g(x)\right|$ 成立，就用 $f(x) = O(g(x))\ \ (x \to x_0)$ 来表示;

(2)当 $x \to x_0$ 时，若 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是一个无穷小，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ，就用 $f(x) = o(g(x))\ \ (x \to x_0)$ 来表示.

(3)特别地，记号 $f(x) = O(1)(x \to x_0)$ 表示在 $x \to x_0$ 过程中函数 f 有界;

$f(x) = o(1)(x \to x_0)$ 表示在 $x \to x_0$ 过程中函数 f 是一个无穷小.

说明 式子 $f(x) = O(g(x))$ 或 $f(x) = o(g(x))$ 中的符号“ $=$ ”应当理解为属于($\in$)的意思，表示函数 f 属于等式右边所代表的类型，即，级别的比较.

“等式”两边的项不能进行交换，也不能消去相同的项.

例如，$O(1) + o(1) = O(1)$ ，$O(1) + O(1) = O(1)$ 都有着明确的意义.

2.7 连续函数

2.7.1 连续函数

定义 2.7.1 设 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. 我们称函数 f 在点 $x_0 \in (a,b)$ 连续，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. 也就是说，对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，存在一个适当的 $\delta > 0$ ，使得当 $\left|x - x_0\right| < \delta$ 时，有 $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

说明(1) 由这一定义可以看出，若函数 f 在 x_0 处连续，

(1) f 在点 x_0 处有极限;

(2) f 在点 x_0 处有定义.

说明(2) 存在处处不连续的函数，也存在只有一个连续点的函数. 而这些都是通过 Dirichlet 函数来表达的.

2.7.2 单边连续

定义 2.7.2 如果 $f(x_0+) = f(x_0)$ ，则称函数 f 在 x_0 处右连续;

如果 $f(x_0-) = f(x_0)$ ，则称函数 f 在 x_0 处左连续.

说明 显然，函数 f 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$.

2.7.3 连续函数的四则运算

定理 2.7.1 如果函数 f 与 g 在 x_0 处连续，那么 $f \pm g$ 与 fg 都在 x_0 处连续. 进一步，若 $g(x_0) \ne 0$ ，则 $\dfrac{f}{g}$ 也在 x_0 处连续.

2.7.4 复合函数的连续性

定理 2.7.2 设函数 g 在 t_0 处连续，记 $g(t_0)$ 为 x_0 . 如果函数 f 在 x_0 处连续，那么复合函数 $f \circ g$ 在 t_0 处连续.

2.7.5 区间上的连续函数

定义 2.7.3 设 I 是一个开区间. 如果函数 f 在 I 上的每一点处都连续, 则称 f 在 I 上连续.

设 $I = \left[a,b\right]$, 称 f 在 I 上连续, 是指 f 在 (a,b) 上连续, 并且在 a 点处右连续, 同时在 b 点处左连续.

f 在 I 上连续, 也称 f 是 I 上的**连续函数**. 用 $C(I)$ 记 I 上连续函数的全体.

2.7.6 *反函数的连续性

定理 2.7.3 设 f 是区间 I 上严格递增(减)的连续函数, 那么 f^{-1} 是 $f(I)$ 上的严格递增(减)的连续函数.

2.7.7 初等函数

多项式函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数(**基本初等函数**), 以及由它们经过有限次的四则运算、有限次复合所形成的函数, 统称为**初等函数**.

定理 2.7.4 初等函数在它们各自的定义域上都是连续的.

2.7.8 连续点与间断点

设 x_0 是函数 f 的定义域中的一点. 如果 f 在 x_0 连续, 则称 x_0 为 f 的连续点;

如果 f 在 x_0 不连续, 则称 x_0 为 f 的间断点.

定义 2.7.4 设 x_0 是函数 f 的间断点.

(1)如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 存在, 且是有限的数, 但 $f(x_0+) \neq f(x_0-)$, 则称 x_0 为 f 的一个**跳跃点**, 差 $\left|f(x_0+) - f(x_0-)\right| > 0$ 称为 f 在这一点的**跳跃**;

(2)如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 存在且有限, 并且 $f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0)$, 则称 x_0 为 f 的**可去间断点**(意思是说, 如果修改函数 f 在 x_0 处的值, 可使 x_0 成为新的函数的连续点);

跳跃点和可去间断点统称为 f 的**第一类间断点**.

(3)如果 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 二者中至少有一个不存在或者不是有限的数, 那么 x_0 叫作 f 的**第二类间断点**.

2.7.9 *区间单调函数的间断点

定理 2.7.5 设 f 是区间 (a,b) 上的递增(减)函数, 则 f 的间断点一定是跳跃点, 而且跳跃点集是至多可数的.

提示 考虑跳跃点集 E 与有理数集(至多可数的)的一个子集之间建立的一一对应.

讨论 区间 (a,b) 是否可以是无限区间?

说明 存在间断点不可数的函数. 例如, Dirichlet 函数是一个处处不连续的函数, 它的间断点的集合为 $\mathbf{R}$, 是不可数集.

2.8 连续函数与极限运算

2.8.1 连续函数的极限

函数 f 在 x_0 处连续这一事实也可以表示为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

2.8.2 几个重要的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a(a>0)$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$.

2.8.3 有理函数的极限

考察有理函数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, 其中 p 与 q 是多项式. 下面求极限 $l=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

设

$$p(x)=(x-x_0)^a p_1(x)\ \ (\alpha\in\mathbf{N}^*)$$
$$q(x)=(x-x_0)^\beta q_1(x)\ \ (\beta\in\mathbf{N}^*)$$

其中 $p_1(x_0)\neq 0$, $q_1(x_0)\neq 0$. 则有

$$\frac{p(x)}{q(x)}=(x-x_0)^{\alpha-\beta}\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

显然, l 为一有限数当且仅当 $\alpha\geq\beta$.

(1)当 $\alpha>\beta$ 时, $l=0$;

(2)当 $\alpha=\beta$ 时, $l=\dfrac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)}$.

2.8.4 幂指函数

函数 $u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$ 称为**幂指函数**.

在其定义域之内, 有等式 $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$.

可见, 当 u,v 为连续函数时, 幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 也是连续函数.

2.8.5 “1^∞ 型”幂指函数的极限

如果在某一极限过程中, 有

$$\lim u(x)=1,\ \lim v(x)=\infty$$

那么称极限 $\lim u(x)^{v(x)}$ 是“1^∞ 型”的.

只要极限 $\lambda=\lim(u-1)v$ 存在且有限, 那么立即得出

$$\lim u^v=\lim\left((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v}=\mathrm{e}^\lambda.$$

2.8.6 极限计算的技巧

(1)将确定的、非零极限的因式分离;

(2)考虑等价无穷小替换;

(3)使用 L'Hospital 法则时, 要检查定理的条件是否被满足;

2.9 函数的一致连续性

2.9.1 一致连续

定义 2.9.1 设I是一个区间，函数$f:I\to\mathbf{R}$．如果对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个$\delta>0$，使得当$x_1,x_2\in I$且$\left|x_1-x_2\right|<\delta$时，有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$，则称函数$f$在区间$I$上是一致连续的.

2.9.2 连续与一致连续

函数f在区间I上连续，δ不仅仅与给定的ε有关，而且与点x_0的位置有关．对同一个$\varepsilon>0$，相应地就有不可数无穷个δ．在这种情况下，我们无法保证最小的δ存在.

而在一致连续的定义中，上述最小的δ存在，即取上述过程中最小的δ即可，这样的δ完全由ε所决定，与自变量在区间I上的位置无关，是一个对所有$x\in I$都统一的正数.

2.9.3 不一致连续

函数f在区间I上**不是一致连续**的，当且仅当存在一个$\varepsilon_0>0$，对每一个$n\in\mathbf{N}^*$，都可以在I中找到两个点，记为s_n与t_n，使得虽然有$\left|s_n-t_n\right|<\dfrac{1}{n}$，但是$\left|f(s_n)-f(t_n)\right|\geq\varepsilon_0$.

2.10 有限闭区间上连续函数的性质

2.10.1 连续与一致连续

定理 2.10.1 设函数f在$\left[a,b\right]$上连续，那么f在$\left[a,b\right]$上必定一致连续．其中，$a,b\in\mathbf{R}$.

提示 运用反证法及列紧性定理.

证明(1) 用反证法．假设$f(x)$在$\left[a,b\right]$上不是一致连续的，则存在某个正数ε_0，使得对任意自然数n，都存在$x_n,y_n\in\left[a,b\right]$满足$\left|x_n-y_n\right|<\dfrac{1}{n}$，但是$\left|f(x_n)-f(y_n)\right|\geq\varepsilon_0$．由 Bolzano-Weierstrass Theorem，数列$\left\{x_n\right\}$有子列$\left\{x_{n_k}\right\}$收敛于$x\in\left[a,b\right]$．从$\left|x_{n_k}-y_{n_k}\right|<\dfrac{1}{n_k}$知，$\left\{y_{n_k}\right\}$也收敛于$x$．由于$f$连续，有$\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k})-f(y_{n_k}))=f(x)-f(x)=0$．这与$\left|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\right|\geq\varepsilon_0$是矛盾的．证毕.

注意 区间必须是闭的、有界的.

说明(1) 上述的**证明(1)**中，分别在 Bolzano-Weierstrass Theorem 和最后取极限的过程中用到了有界、闭区间的性质.

证明(2) 由f在$\left[a,b\right]$上连续得：

$$\forall x_0\in\left[a,b\right],\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\left|x-x_0\right|<\delta,\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon.$$

令x_0历遍$\left[a,b\right]$，则(x,x_0)历遍$\left\{(x_1,x_2)\middle|(x_1,x_2)\in\left[a,b\right]^2\right\}$，故$f$在$\left[a,b\right]$上一致连续．证毕.

说明(2) 细心的读者应当发现，此处得到的δ依赖于x_0的位置，即$\delta=\delta(x_0)$，当x_0历遍$\left[a,b\right]$时，并不能保证这样最小的正数δ存在(这样所有的δ构成的集合E确实有下确界，但$\inf E=0$时，$\delta=0$不为

正数). 而“最小的正数δ存在, 是一个对区间$\left[a,b\right]$上的任意数都统一的量”这一点恰为一致连续的重点!

故, **证明(2)**是伪证!

证明(3) 用反证法. 假设f在$\left[a,b\right]$上连续但不一致连续, 则

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2:\left|x_1-x_2\right|<\delta,\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\ge\varepsilon_0.$$

固定x_2, 不妨记为$x_2=x_0$, 即对x_0, $\exists x_1:\left|x_1-x_0\right|<\delta$, 但$\left|f(x_1)-f(x_0)\right|\ge\varepsilon_0$.

故f在x_0处不连续, 矛盾! 证毕.

说明(3) 在分析上述的**证明(3)**前, 我们不妨先来回顾一下连续与一致连续及其逆否命题的定义.

定义 2.7.1(连续) 设$f:\left[a,b\right]\to\mathbf{R}$. 我们称函数$f$在点$x_0\in(a,b)$连续, 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 也就是说, 对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在一个适当的$\delta>0$, 使得当$\left|x-x_0\right|<\delta$时, 有$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.

定义(不连续) 设$f:\left[a,b\right]\to\mathbf{R}$. 我们称函数$f$在点$x_0\in(a,b)$不连续, 如果:

存在一个正数$\varepsilon_0>0$, 对$\forall\delta>0$, 均存在$x':\left|x'-x_0\right|<\delta$, 但$\left|f(x')-f(x_0)\right|\ge\varepsilon_0$.

定义 2.9.1(一致连续) 设I是一个区间, 函数$f:I\to\mathbf{R}$. 如果对任意给定的$\varepsilon>0$, 总存在一个$\delta>0$, 使得当$x_1,x_2\in I$且$\left|x_1-x_2\right|<\delta$时, 有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon$, 则称函数$f$在区间$I$上是一致连续的.

定义(不一致连续) 函数f在区间I上**不是一致连续**的, 当且仅当存在一个$\varepsilon_0>0$, 对每一个$n\in\mathbf{N}^*$, 都可以在I中找到两个点, 记为s_n与t_n, 使得虽然有$\left|s_n-t_n\right|<\dfrac{1}{n}$, 但是$\left|f(s_n)-f(t_n)\right|\ge\varepsilon_0$.

定义(不一致连续) 函数f在区间I上不是一致连续的, 如果:

存在一个正数$\varepsilon_0>0$, 对$\forall\delta>0$, 均存在$x_1,x_2\in I$满足: $\left|x_1-x_2\right|<\delta$, 但$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\ge\varepsilon_0$.

回到**证明(3)**.

证明(3)中, 取定x_2, 而“$\forall\delta>0,\exists x_1,x_2$”表明$x_2$的取值依赖于$\delta$, 即$x_2=x_2(\delta)$. 故取定$x_2$也就意味着$\delta$也同时被取定.

而不连续的定义中要求: 对于x_2, $\forall\delta>0$, $\exists x'\cdots$, 注意: 是任意的$\delta>0$!

故此处对x_2能够找到这样的$x_1:\left|x_1-x_2\right|<\delta$, 但$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\ge\varepsilon_0$, 仅仅是因为$x_1$与$x_2$的接近程度还不够恰当.

要证明函数在x_2不连续, 必须说明即使是与x_2充分接近的, 但仍有$\left|f(x')-f(x_2)\right|\ge\varepsilon_0$.

故, **证明(3)**也是伪证!

不难发现, 上述的两个伪证, 从头到尾都没有用到关于闭区间的任何性质, 因此伪证是必然的.

以上写出的两个伪证, 是笔者在学习过程中所犯的错误, 原因是对一致连续以及不连续等定义的理解并不透彻, 希望通过对伪证的陈述与分析, 加强读者对于诸定义的理解与认识, 不再重蹈覆辙.

另, 重新回顾不一致连续的定义后, 也就不难理解**证明(1)**的思想了.

2.10.2 取值有界

定理 2.10.2 有界闭区间上的连续函数必在该区间上有界.

提示 考虑列紧性定理.

2.10.3　确界与最值

定理 2.10.3　设 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续. 记 $M=\sup\limits_{x\in\left[a,b\right]}f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in\left[a,b\right]}f(x)$，则必存在 $x^*,x_*\in[a,b]$，使得 $f(x^*)=M$，$f(x_*)=m$.

提示　构造法.

2.10.4　零值定理

定理 2.10.4　设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 如果 $f(a)f(b)<0$，则必存在一点 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$.

提示　考虑二分法及闭区间套定理.

2.10.5　介值定理

定理 2.10.5　设 f 是区间 $[a,b]$ 上非常值的连续函数，γ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何实数，则必存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=\gamma$.

提示　构造 $g(x)=f(x)-\gamma$，运用零值定理.

推论 2.10.1　设非常值函数 f 在 $I=[a,b]$ 上连续，那么 f 的值域 $f(I)$ 是一个闭区间.

第 3 章 函数的导数

3.1 导数的定义

3.1.1 导数

定义 3.1.1 设函数 f 在点 x_0 的近旁有定义，如果极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限，则称这个极限值为 f 在点 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$，并称函数 f 在点 x_0 可导.

曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的方程是

$$y=f(x)+f'(x_0)(x-x_0)$$

3.1.2 单边导数

定义 3.1.2 设函数 f 在点 x_0 的右边 $\left[x_0,x_0+r\right)$ 上有定义. 若极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在且有限，则称此极限为 f 在点 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x_0)$.

类似地，可定义 f 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$.

函数 f 在点 x_0 可导的充分必要条件是，在点 x_0 的左、右导数存在且相等，即 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

说明 此结论常常用于证明函数 f 在点 x_0 不可导. 即，当 $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ 时，函数 f 在点 x_0 不可导.

3.1.3 可导与连续

定理 3.1.1 若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 必在 x_0 连续.

提示 考虑连续函数的定义，往证 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=f(x_0)$.

说明(1) 这表明，当我们研究在一个区间 (a,b) 上由全体可导函数所构成的集合时，它是区间 (a,b) 上全体连续函数组成的集合的一个子集.

说明(2) 连续函数可以在一点乃至无穷算多个点上没有导数，即存在“处处没有切线的连续曲线”.

3.1.4 区间上可导

定义 3.1.3 如果函数 f 在开区间 (a,b) 中的每一点可导，则称 f 在 (a,b) 上可导；如果 f 在 (a,b) 上可导，并且在点 a 处有右导数，在点 b 处有左导数，则称 f 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上可导.

类似地，可以定义 f 在 $\left[a,b\right)$ 与 $\left(a,b\right]$ 上可导.

3.2 导数的计算

3.2.1 求导的四则运算

定理 3.2.1 ()

推广 设

$$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$$

则

$$(u_1u_2\cdots u_n)' = u_1u_2\cdots u_n\left(\sum_{i=1}^{n}\ln u_i\right)' = u_1u_2\cdots u_n\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i'}{u_i} = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n'$$

引理 设 f 是一个恒取正值的可导函数，那么由公式 $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$.

3.2.2 链式法则

定理 3.2.2 设函数 φ 在点 t_0 处可导，函数 f 在点 $x_0 = \varphi(t_0)$ 处可导，那么复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 t_0 处可导，并且

$$(f\circ\varphi)'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'\circ\varphi(t_0)\varphi'(t_0)$$

推广 由单个或更多的环节组成的复合函数．如果 $y = f(u)$ ，$u = \varphi(v)$ ，$v = \psi(x)$ ，即 $y = f\circ\varphi\circ\psi(x)$，则 y 关于自变量 x 的导数是

$$y' = (f\circ\varphi\circ\psi)'(x) = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x) = f'\circ\varphi\circ\psi(x)\varphi'\circ\psi(x)\psi'(x)$$

3.2.3 反函数的求导

设 $y = f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上连续且严格单调．如果它在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) \neq 0$ ，那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导，并且

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

即，原函数的导数等于反函数导数的倒数．

说明 注意考虑几何意义．如图，$\tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta}$．

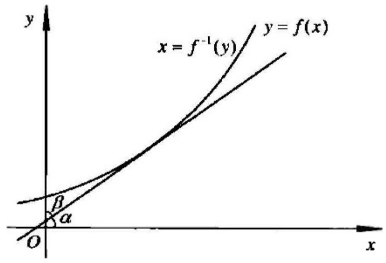

图 3. 5

3.3 高阶导数

3.3.1 高阶导函数

设函数 f 在区间 I 上可导，那么 $f'(x)(x\in I)$ 在 I 上定义了一个函数 f' ，称之为 f 的**(一阶)导函数**．

如果 f' 在 I 上可导，那么 f' 的导函数 $(f')' \triangleq f''$ ，称为 f 的**二阶导函数**．

由归纳可知，对任何正整数 $n\in\mathbf{N}^*$ ，可以定义 f 的 n **阶导函数** $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

3.3.2 Leibniz's Theorem

设函数 f 与 g 在区间 I 上都有 n 阶导数，那么乘积 fg 在区间 I 上也有 n 阶导数，并且

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}$$

这里 $f^{(0)} = f$ ，$g^{(0)} = g$ ，其中组合系数 $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}(k = 0,1,2,\cdots,n)$.

提示(1) 用数学归纳法，进行合理的哑标变换．

提示(2) 用数学归纳法, 运用二项式系数公式$\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$.

3.4 微分学的中值定理

在这一节中, 我们研究定义在有限闭区间$\left[a,b\right]$上的函数f, 并且设f在$\left[a,b\right]$上连续, 在开区间(a,b)上可导. 以下所有讨论都是在这些条件之下进行的.

3.4.1 极值与极值点

定义 3.4.1 设函数 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$. 如果对点 $x_0\in(a,b)$, 存在 $\delta>0$, 使得 $\Delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$, 并且当$x\in\Delta$时, $f(x_0)\geq f(x)$, 即$f(x_0)$是f在Δ上的最大值, 那么称$f(x_0)$是f在(a,b)上的一个**极大值**, x_0称为f的一个**极大值点**.

类似地, 可以定义f在(a,b)上的**极小值**和**极小值点**.

极小值和极大值统称为**极值**, 而极小值点和极大值点统称为**极值点**.

讨论 如此定义, 常值函数应当处处为极值点?

回答 常值函数的定义域即为它的极值点集.

3.4.2 Fermat's Theorem

定理 3.4.1 若函数f在其极值点$x_0\in(a,b)$处可导, 则必有$f'(x_0)=0$.

等价叙述 函数在其上可导的极值点必为驻点.

注意 这个命题的逆命题是不正确的. 如, 函数$f(x)=x^3$, $x=0$是它的一个驻点, 但是它不是一个极值点.

几何意义 如果x_0是函数f的极值点且在$(x_0,f(x_0))$处曲线$y=f(x)$的切线存在, 那么这条切线必与横轴平行, 即切线斜率为0.

3.4.3 驻点

定义 3.4.2 满足$x_0\in(a,b)$且$f'(x_0)=0$的点x_0, 称为函数f的一个驻点.

3.4.4 Rolle's Theorem

定理 3.4.2 设函数f在$\left[a,b\right]$上连续, 在(a,b)内可导, 且$f(a)=f(b)$, 那么存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$.

说明 事实上, 可以得到更强的结论——ξ为一极值点, 依 Fermat 定理, 知$f'(\xi)=0$.

3.4.5 Cauchy's Lemma

引理 3.4.1 设函数f与λ在$\left[a,b\right]$上连续, 在(a,b)上可导, 并且$\lambda(a)=1$, $\lambda(b)=0$, 则必存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\lambda'(\xi)(f(a)-f(b)).$$

提示 构造函数$\varphi(x)$, 使得$\varphi(a)=\varphi(b)$, $\varphi'(x)=f'(\xi)-\lambda'(\xi)(f(a)-f(b))$, 从而由 Rolle 定理, 存在

一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $\lambda'(\xi) = 0$.

引入函数 $\varphi(x) = f(x) - (\lambda(x)f(a) + (1-\lambda(x))f(b))$.

3.4.6 Lagrange 中值定理(Lagrange's Mean Value Theorem)

定理 3.4.3 设 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

提示 在**引理 3.4.1** 中取 $\lambda(x) = \dfrac{b-x}{b-a}(a \le x \le b)$.

几何意义 (在区间 $\left[a,b\right]$ 上，画出函数 $y = f(x)$ 的图像．用直线段把这条曲线的两个端点 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 连接起来，上式的左边正是这条直线段的斜率．)

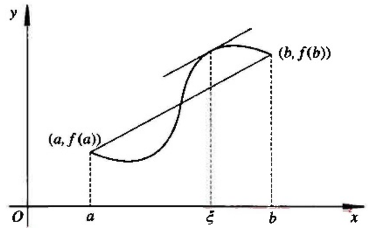

图 3. 8

在曲线 $y = f(x)$ 的一个内点上，有平行于这段割线的切线.

推论 如果函数 f 在开区间上有有界的导函数，那么 f 在 $\left[a,b\right]$ 上一定是一致连续的.

推论 3.4.1 设函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上为常数的充分必要条件是，$f' = 0$ 在 (a,b) 上成立.

推论 3.4.1' 设函数 f 与 g 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，并且 $f' = g'$ 在 (a,b) 上成立，那么 $f - g$ 在 $\left[a,b\right]$ 上是一个常数.

3.4.7 Cauchy 中值定理(Cauchy's Mean Value Theorem)

定理 3.4.4 设函数 f 和 g 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在区间 (a,b) 上可导，且当 $x \in (a,b)$ 时，$g'(x) \ne 0$，这时必存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

提示 在**引理 3.4.1** 中取 $\lambda(x) = \dfrac{g(b)-g(x)}{g(b)-g(a)}(a \le x \le b)$.

3.4.8 微分学的中值定理

Rolle 定理、Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理，前一个都是后一个的特例，它们统称为“微分学的中值定理”.

它们都只证明了 ξ 的存在性，即，至少有一个，但是可能不止一个．而无法指明这种点的确切位置.

3.4.9 Darboux Theorem

定理 3.4.5 如果 f 在 $\left[a,b\right]$ 上可导，那么：

(1) 导函数 f' 可以取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值;

(2) f' 无第一类间断点.

提示 运用 Fermat 定理.

注意 由于无法说明导函数 f' 的连续性，所以不能直接使用零值定理或介值定理进行证明.

说明 这表明，即使 f' 在 $\left[a,b\right]$ 上不连续，它仍然具有介值性，这一点是导函数所特有的性质.

3.5 利用导数研究函数

3.5.1 单调性

定理 3.5.1 设函数 f 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，那么 f 在 $\left[a,b\right]$ 上递增(减)的充分必要条件是，$f' \geq 0 (\leq 0)$ 在区间 (a,b) 上成立.

提示 证明充分性时，运用 Lagrange 中值定理.

定理 3.5.2 设函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上可导. 如果 $f' > 0$ ($f' < 0$)在 (a,b) 上成立，那么 f 在 $\left[a,b\right]$ 上是严格递增(严格递减)的.

注意 此定理的逆定理不成立！即，严格递增(严格递减)的函数并不必须有严格正的(严格负的)导函数. 如，函数 $f(x) = x^3$ 虽然在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格递增的，但是 $f'(0) = 0$.

定理 3.5.3 设函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内除了有限个点之外，有正(负)的导数，那么 f 在 $\left[a,b\right]$ 上严格递增(严格递减).

提示 将**定理 3.5.2** 作用于有限个区间.

定理 3.5.4 设函数 f 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么 f 在 $\left[a,b\right]$ 上严格递增(严格递减)的充分必要条件是：

(1)当 $x \in (a,b)$ 时，$f' \geq 0$ ($f' \leq 0$);

(2)在 (a,b) 的任意开子区间上，$f' \neq 0$.

讨论 事实上，条件(2)控制了“函数 f 在开区间 (a,b) 内除了有限个点之外，有正(负)的导数”，因此**定理 3.5.3** 中的条件是否为充分必要条件？

“设函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，那么它在开区间 (a,b) 内除了有限个点之外，有正(负)的导数的充分必要条件是，f 在 $\left[a,b\right]$ 上严格递增(递减).”

回答 充分性有误. f 在 $\left[a,b\right]$ 上严格递增(递减)，但函数 f 可以在无限个点处不可导.

应当修改如下.

设函数 f 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么函数 f 在开区间 (a,b) 内除了有限个点 $f' = 0$ 外，有正(负)的导数的充分必要条件是，f 在 $\left[a,b\right]$ 上严格递增(严格递减).

事实上，**定理 3.5.4** 中的条件(2)讲述的即是函数 f 在 (a,b) 上只有有限个点 $f' = 0$，确实与**定理 3.5.3** 中的条件等价.

3.5.2 极值

1. **严格极小值**

定理 3.5.5 设函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，$x_0 \in (a,b)$.

(1)如果存在正数 $\delta > 0$，使得在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上 $f' > 0$，而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上 $f' < 0$，那么 $f(x_0)$ 是 f 的一个严格极大值，所谓“严格极大值”是指，当 $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ 时，$f(x) < f(x_0)$；

(2)如果存在正数$\delta > 0$，使得在$(x_0-\delta,x_0)$上$f' < 0$，而在$(x_0,x_0+\delta)$上$f' > 0$，那么$f(x_0)$是f的一个严格极小值, 所谓“严格极小值”是指, 当$0 < \left|x - x_0\right| < \delta$时, $f(x) > f(x_0)$;

2. **二阶导数与严格极值**

定理 3.5.6 设f在$\left[a,b\right]$上连续, $x_0 \in (a,b)$是f的一个驻点. 设$f''(x_0)$存在, 那么:

(1)当$f''(x_0) < 0$时, $f(x_0)$是f的一个严格极大值;

(2)当$f''(x_0) > 0$时, $f(x_0)$是f的一个严格极小值.

提示 运用**定理 3.5.5**.

3. **最值**

连续函数f在它有定义的有限闭区间$\left[a,b\right]$上, 必取到它的**最小值**和**最大值**.

最小值和最大值统称为**最**值, 而在其上取到最值的点称为**最值点**.

最值是唯一的, 但是最值点却不一定只有一个.

3.5.3 凸性

定义 3.5.1 设函数f在区间I上有定义. 如果对任何$x_1,x_2 \in I$，$x_1 \neq x_2$, 以及任意的$\lambda_1,\lambda_2 > 0$，且$\lambda_1+\lambda_2 = 1$, 都有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

则称f为I上的**凸函数**.

如果上述不等式对任何$x_1 \neq x_2$以及$\lambda_1,\lambda_2 > 0$，$\lambda_1+\lambda_2 = 1$, 不等号总成立, 则称f在I上是**严格凸函数**.

3.5.4 Jensen Inequation

定理 3.5.7 设f在区间I上是凸函数, 则对任何$x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$，以及$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n > 0$，且$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = 1$, 都有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

如果f是I上的严格凸函数, 则当$x_1,x_2,\cdots,x_n$不全相等时, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

提示 运用数学归纳法.

定理 3.5.8 设f在区间I上是凸函数, 则对任何$x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$, 以及对任意的正数$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，有不等式

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}.$$

如果f是严格凸的, 那么当$x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$不全相等时, 上式中的不等号是严格的.

3.5.5 凸性与导数、斜率的关系

定理 3.5.9 函数 f 在区间 I 上是凸函数的充分必要条件是，对任何 $(x_1,x_2)\subset I$ 及任何 $x\in(x_1,x_2)$，有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

f 是 I 上的严格凸函数，当且仅当上式中出现的都是严格的不等号.

几何意义 凸函数具有割线斜率的递增性.

3.5.6 凸性与导函数

定理 3.5.10 设 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则 f 在 $\left[a,b\right]$ 上为凸函数的充分必要条件是，f' 在 (a,b) 上递增.

提示 证明必要性时，运用**定理 3.5.9**. 证明充分性时，运用 Lagrange 中值定理.

定理 3.5.10' 设 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则 f 在 $\left[a,b\right]$ 上为严格凸函数的充分必要条件是，f' 在 (a,b) 上严格递增.

注意 在严格凸函数的情形下，不能直接将**定理 3.5.9** 中的不等式改为严格不等号而证毕，因为在极限过程中，可能破坏不等号的严格性，即不等号可能由严格变为不严格.

3.5.7 凸函数与二阶导数

定理 3.5.11 设函数 f 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 上有二阶导数，则 f 在 $\left[a,b\right]$ 上为凸函数的充分必要条件是，$f''\ge 0$ 在 (a,b) 上成立;

而 f 在 $\left[a,b\right]$ 上为严格凸函数的充分必要条件是，$f''\ge 0$ 在 (a,b) 上成立，并且在 (a,b) 的任何开子区间内，$f''\ne 0$.

3.6 L'Hospital 法则 – L' Hôspital's Rule

3.6.1 "$\frac{0}{0}$ 型"

定理 3.6.1 设 f,g 在 (a,b) 上可导，并且 $g(x)\ne 0$ 对 $x\in(a,b)$ 成立. 又设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$. 在这些条件下，如果极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞)，那么便有

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

提示 运用 Cauchy 中值定理.

说明 如果上式右边仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型，那么在确定 f',g' 仍满足定理的条件之后，便可得出

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots$$

3.6.2 “$\dfrac{0}{0}$型” $x \to \infty$ 极限过程

定理 3.6.2 ()

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.6.3 * “$\dfrac{\infty}{\infty}$型”

定理 3.6.3 设函数 f 与 g 在 (a,b) 上可导，$g(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$. 如果极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞)，那么

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

提示 需要考虑函数的上极限.

注意 此情况并不要求 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$.

3.7 函数作图

3.7.1 要素

(1)定义域和值域;

(2)对称性;

(3)周期性.

3.7.2 拐点

定义 3.7.1 设函数 f 在 x_0 的两旁(包括 x_0 在内)有定义. 在 x_0 的一侧图像 $y=f(x)$ 是严格凸的, 另一侧是严格凹的, 那么称 x_0 是 f 的一个**拐点**.

显然, 当 f 在 x_0 的近旁有连续的二阶导数时，x_0 为拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

3.7.3 渐近线

定义 3.7.2 (1)如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则称 $y=a$ 或 $y=b$ 为 $y=f(x)$ 的一条**水平渐近线**;

(2)如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\pm\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\pm\infty$，则称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的一条**竖直渐近线**;

(3) 如果 $a\neq 0$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$，则称 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的一条**斜渐近线**.

其中，$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

第 4 章 一元微分学的顶峰——Taylor 定理

4.1 函数的微分

4.1.1 微分

定义 4.1.1 设函数 f 在 (a,b) 上有定义，且 $x_0 \in (a,b)$．如果存在一个常数 λ，使得

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\lambda\Delta x+o(\Delta x)\ \ (\Delta x\to 0)$$

则称函数 f 在点 x_0 处**可微**.

函数的改变量的线性主要部分 $\lambda\Delta x$ 称为 f 在 x_0 处的**微分**，记为 $\mathrm{d}f(x_0)$．

说明 (1)对单变量函数来说，可导和可微是等价的;

(2)微分是 Δx 的一个齐次线性函数，它的系数是 $f'(x_0)$，这个线性函数的定义域是整个实数，即 $\Delta x\in(-\infty,+\infty)$；

几何意义 该点的切线函数的改变量.

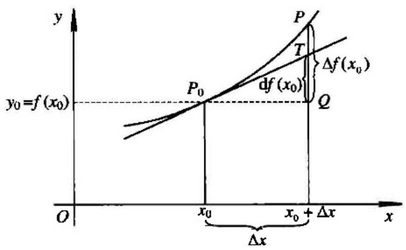

图 4.1

等价式 (1)

$$\mathrm{d}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x$$

(2)当 x 是自变量时($\mathrm{d}x=(x)'\Delta x=\Delta x$)，

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$$

(3)记 $\Delta x\to x-x_0$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ \ (x\to x_0)$$

上式也可以作为函数 f 在点 x_0 处可微的定义式.

(4)当 $\left|x-x_0\right|\to 0$ 时，

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

即，函数值 $f(x)$ 可以近似地由上式右边的 x 的线性函数($y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线)来代替.

4.1.2 函数四则运算的微分

()

4.1.3 导数的 Leibniz 记号

导函数

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=f'(x)\Leftrightarrow f'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

说明 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 是函数微分与自变量微分的商，因此导数也称为**微商**.

4.1.4 高阶微分

如果 f 在 x 处有 n 阶导数，那么 n 阶微分

$$\mathrm{d}^n y=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$$

因而有记号，n 阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x) \ \ (n = 1,2,\cdots)$$

4.1.5 一阶微分形式的不变性

设 $y = f(x)$，$x = \varphi(t)$．定义复合函数 $y = f \circ \varphi(t)$，从而由微分公式

$$\mathrm{d}y = (f \circ \varphi)'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\varphi'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$$

说明 如果 x 是自变量，上式成立.

即，上式无论是对独立的自变量还是对中间变量，均成立．这称为**一阶微分形式的不变性**.

4.2 带 Peano 余项的 Taylor 定理

Taylor's Theorem with Peano's Form of Remainder

4.2.1 Taylor's Polynomial

定义 4.2.1 设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数，这里 n 是任意给定的正整数．令

$$T_n(f,x_0;x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

称它为 f 在 x_0 处的 n **次 Taylor 多项式(N$^{\text{th}}$-order Taylor's Polynomial)**.

4.2.2 Taylor's Theorem with Peano's Form of Remainder

定理 4.2.1 设函数 f 在点 x_0 处有直到 n 阶的导数，则有

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f,x_0;x) + o((x-x_0)^n) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_n)^n) \ \ (x \to x_0) \end{aligned}$$

说明 上式称为函数 f 的 **Taylor 展开式(Taylor's Expansion)**.

4.2.3 Peano's Form of Remainder

令

$$R_n(x) = f(x) - T_n(f,x_0;x) \ \ (n = 1,2,\cdots)$$

称它为**余项(Remainder)**．当前，对余项 R_n 只有定性的刻画

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

这种余项我们称为 **Peano 余项(Peano's Form of Remainder)**.

上述过程中，令 $x_0 = 0$，则有：

4.2.4 Maclaurin's Polynomial

称多项式

$$T_n(f,0;x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为 f 的 n 次 **Maclaurin 多项式(Maclaurin's Polynomial)**.

4.2.5 Maclaurin's Theorem with Peano's Form of Remainder

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f,0;x) + o(x^n) \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

说明 上式称为函数 f 的 **Maclaurin 展开式(Maclaurin's Expansion)**.

4.2.6 几个重要的 Maclaurin **展开式**

(1) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

(5) $(1+x)^\lambda = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\lambda}{k}x^k + o(x^n)$

(6) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

4.2.7 极值问题

定理 4.2.2 设函数 f 在 x_0 处有直到 k 阶的导数，并且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0,\ \ f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

那么：

(1)当 k 为奇数时，x_0 不是 f 的极值点.

(2)当 k 为偶数时，若 $f^{(k)}(x_0) > 0$，则 x_0 是 f 的严格极小值点;

若 $f^{(k)}(x_0) < 0$，则 x_0 是 f 的严格极大值点.

提示 运用带 Peano 余项的 Taylor 定理.

4.3 带 Lagrange 余项和 Cauchy 余项的 Taylor 定理

Taylor's Theorem with Lagrange and Cauchy's Form of Remainder

4.3.1 Taylor's Theorem with Lagrange's Form of Remainder

定理 4.3.1 设 f 在开区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数，x_0, x 是 (a,b) 中的任意两点，那么 $\exists\xi$ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数，使得

$$f(x) = T_n(f,x_0;x) + R_n(x)$$

其中,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称为 **Lagrange 余项(Lagrange's Form of Remainder)**.

特别地, 上式中取 $n=0$, 得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$$

即为熟知的 **Lagrange 中值定理**, 因此, Taylor 定理是 Lagrange 中值定理的推广.

4.3.2 Taylor's Theorem with Cauchy's Form of Remainder

定理 4.3.1' 设 f 在开区间 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数, x_0, x 是 (a,b) 中的任意两点, 那么 $\exists \xi$ 是位于 x_0 与 x 之间的一个数, 使得

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(x)$$

其中,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

称为 **Cauchy 余项(Cauchy's Form of Remainder)**.

4.3.3 Lagrange 插值公式

设函数 $f:[a,b]\to \mathbf{R}$. 由 n 个不同的点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \cdots, (x_n, f(x_n))$ 所决定的 n 次函数记为 l_n, 即

$$l_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod\limits_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)} f(x_i).$$

上式称为 **Lagrange 插值公式**.

特别地, 当 $n=2$ 时, 由两点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 所决定的线性函数记为 l, 即

$$l(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

l 叫作 f 在区间 $[a,b]$ 上的**线性插值**.

4.3.4 函数与线性插值的误差分析

定理 4. 3. 2 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 在 (a,b) 上有二阶导数, l 是由 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 确定的线性函数. 如果 $|f''|$ 在 (a,b) 上的上界为 M, 那么对任意的 $x\in[a,b]$, 有

$$\left|f(x)-l(x)\right| \le \frac{M}{8}(b-a)^2.$$

提示 运用 Taylor 定理.

第 5 章 求导的逆运算

5.1 原函数的概念

5.1.1 原函数

如果两个函数 F 与 f 满足关系

$$F'(x) = f(x)$$

这里 x 在某一个区间上变化, 那么称 F 为 f 在该区间上的一个原函数. 原函数族 $\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$ 记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

第 6 章 函数的积分

6.1 积分的概念

6.1.1 分割

分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

称 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 为 π 的分点序列;

和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称为 f 的 **Riemann 和(积分和)**;

值点序列 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 称为此积分和的**值点序列**, 有时也称为**介点集**.

6.1.2 Riemann's Integral

定义 6.1.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义. 若实数 I 使得对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 只要 $[a,b]$ 的分割 π 满足, 不论 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$ 如何选择, 都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

成立, 则称 f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**, 称

$$I = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

是 f 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分(Riemann's Integral)**.

6.1.3 性质与运算法则

(1)设 f 在 $[a,b]$ 上可积且非负, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0.$$

(2)设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 $f \ge g$ 在 $[a,b]$ 上成立, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(3)如果 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $f \pm g$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 并且

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(4)如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 那么对任意的常数 c, cf 在 $[a,b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(5)
$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(6)
$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

6.1.4 Newton-Leibniz Formula

定理 6.1.1 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 (a,b) 上有原函数 F. 如果 F 在 $[a,b]$ 上连续, 那么必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

提示 运用 Lagrange 中值定理.

意义 将求可积函数 f 的积分的问题, 转化成为求 f 的原函数的问题.

说明 此公式逆向使用有时也有意想不到的效果 (注意与 Lagrange 中值定理相联系).

定理 6.3.4 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, F 是 f 在 $[a,b]$ 上的任一原函数, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

定理 6.3.5 如果函数 F 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 那么

$$\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)\,(a \le x \le b)$$

6.2 可积函数的性质

6.2.1 可积必有界.

定理 6.2.1 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

提示 固定所有 $\xi_j(j \neq i)$, 令 ξ_i 历遍 $[x_{i-1},x_i]\,(i = 1,2,\cdots,n)$.

6.2.2 积分的可加性

定理 6.2.2 设 $c \in (a,b)$, f 在 $[a,c],[c,b]$ 上可积, 那么 f 在 $[a,b]$ 上也可积, 并且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

6.2.3 积分的保号性

定理 6.2.3 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续且非负, 但 f 不恒等于 0, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

提示 运用合理的放缩, 结合极限的保号性和积分的可加性.

6.2.4 绝对值不等式的积分形式

定理 6.2.4 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 那么 $\left|f\right|$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$$

6.2.5 积分平均值定理 (积分第一中值定理)

定理 6.2.5 设函数 f 与 g 在 $[a,b]$ 上连续, g 在 $[a,b]$ 上不改变符号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

提示 运用连续函数的介值定理.

特别地，令 $g(x) \equiv 1$，便得出：

推论 6.2.1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，则存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

几何意义 面积函数的介值性.

6.2.6 第二积分平均值定理（积分第二中值定理）

定理 16.2.3~定理 16.2.4 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，g 在 $[a,b]$ 上非负，那么:

(1) 若 g 在 $[a,b]$ 上递减，则必存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 g 在 $[a,b]$ 上递增，则必存在 $\eta \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 g 在 $[a,b]$ 上单调（无论是否非负），则必存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

提示 对于(3)中“$f \in C[a,b]$，g 在区间 $[a,b]$ 上可微且 $g'(x) \le 0$”的情况可以使用积分第一中值定理证明.（对变上限积分作为其中一个函数，用分部积分法.）

说明 以上 g 单调的条件均保证了其可积性.

6.2.7 Integral Form of Cauchy-Schwarz Inequation

设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，那么

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

6.3 微积分基本定理

6.3.1 变上限积分

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么对任何 $x \in [a,b]$，f 在 $[a,x]$ 上也可积. 定义函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

称为 f 的变上限积分. 其中 x 可在 $[a,b]$ 上变化.

定理 6.3.1 设 f 在 $[a,b]$ 上可积，那么其变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理 6.3.2 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，在一点 $x_0 \in [a,b]$ 处连续，那么 F 在 x_0 处可导，并且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

6.3.2 微积分基本定理

定理 6.3.3 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)\,(a \le x \le b)$$

说明 这表明,

(1)一个函数的原函数可以通过变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 来表示, 即变上限积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 f 的一个原函数.

(2)对一个函数的导数积分可以还原到这个函数自身

推论 6.3.1 $[a,b]$ 上的连续函数一定有原函数.

6.4 分部积分与换元

6.4.1 分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

说明 这种方法常常用来建立递推式.

6.4.2 Taylor's Theorem with Integral Form of Remainder

定理 6.4.1 设函数 f 在 (a,b) 上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数, 那么对任意固定的 $x_0 \in (a,b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\,(a < x < b).$$

提示 连续应用分部积分公式.

说明 (1) 同**定理 4.3.1 (Lagrange 中值定理)** 相比较, 不难发现, 这里所加的条件稍强, 不仅要求 $f^{(n+1)}$ 存在, 而且要求它连续 (这保证了其可积性).

(2) 运用积分中值定理, 立即得到:

(2.1) Lagrange's Form of Remainder:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(2.2) Cauchy's Form of Remainder:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

6.4.3 换元积分法

定理 6.4.2 设函数 f 在区间 I 上连续, $a,b \in I$, 函数 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数, $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I$, 且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

6.5 可积性理论

6.6 Lebesgue 定理

6.7 反常积分

6.7.1 无穷积分

设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，对任何 $b>a$ ，f 在 $[a,b]$ 上可积. 这时带变动上限 b 的积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就定义了 $[a,+\infty)$ 上的一个函数. 如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限，那么就把这个极限记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

并称上述积分**收敛**，并称函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上可积. 如果上述极限不存在，称无穷积分(1)是**发散**的.

设函数 f 在全数轴上有定义，并且在任何有界区间上都是可积的，任取 $a\in\mathbb{R}$ ，如果无穷积分

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，那么称无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

6.7.2 Newton-Leibniz's Formula for Infinite Integral

定理 6.7.1 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上可积，且有原函数 F ，那么

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a).$$

6.7.3 瑕积分

设函数 f 在 $(a,b]$ 上有定义，且

$$\lim_{\varepsilon\to a^+} f(x) = \infty,$$

但对任何 $\varepsilon\in(0,b-a)$ ，函数 f 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积. 如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在且有限，则称瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

收敛. 否则称瑕积分(2)**发散**. 其中点 a 称为**瑕点**.

如果 a,b 都是瑕点那么任取一点 $c \in (a,b)$，定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果右边的两个瑕积分同时收敛.

6.7.4 Newton-Leibniz's Formula for Improper Integral

若 F 是 f 在 $(a,b]$ 上的一个原函数，a 是瑕点，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a+).$$

6.7.5 几点说明

(1) 通过换元积分法可以实现常义积分与两种广义积分的互化;

(2) 直接运用分部积分法、换元积分法等方式求广义积分时，同时证明了其收敛性; 但若需要通过解方程等方式间接求广义积分，则需先证明其收敛性 (常常通过换元来实现).

第 7 章 积分学的应用

7.1 积分学在几何学中的应用

7.2 物理应用举例

7.3 面积原理

7.3.1 面积原理

定理 7.3.1 若 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$ 时, f 是一个非负的递增函数, 则当 $\xi \geq m$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq f(\xi).$$

提示 充分利用函数 f 单调递增的性质即可.

定理 7.3.2 设 $x \geq m \in \mathbb{N}^*$ 时, f 是一个非负的递减函数, 则极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^{n} f(x)\mathrm{d}x\right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(m)$. 更进一步, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 那么

$$\left|\sum_{k=m}^{[\xi]} f(k) - \int_m^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - \alpha\right| \leq f(\xi - 1).$$

其中 $\xi \geq m + 1$.

7.3.2 Cauchy 积分判别法

设当 $x \geq 1$ 时, $f \geq 0$ 且递减, 那么无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

提示 运用面积原理.

第 8 章

第 9 章

第 10 章

第 11 章

第 12 章

第 13 章

第 14 章　数项级数

14.1　无穷级数的基本性质

14.1.1　无穷级数

定义 14.1.1　无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

的前 n 项和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为这个级数的第 n 个部分和. 如果数列 $\{S_n\}$ 存在有限的极限 S，就称级数(*)是收敛的, 其和为 S，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限, 就说级数(*)是发散的.

14.1.2　级数收敛的必要条件

定理 14.1.1　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

说明　注意: 对于反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 不一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (请尝试构造反例).

14.1.3　线性性质

定理 14.1.2　如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛, 那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ 也收敛, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

这里 α, β 是任意两个实数.

说明　这是极限的四则运算法则的直接推论.

14.1.4　结合律

定理 14.1.3　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一收敛级数. 如果把级数的项任意结合而不改变其先后的次序, 得新级数

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots \tag{2}$$

这里正整数 $k_j (j = 1,2,\cdots)$ 满足 $k_1 < k_2 < \cdots$, 那么新级数也收敛, 且与原级数由相同的和.

说明　这是“收敛数列的任意子列均收敛, 且与原数列具有相同极限”的直接推论.

定理 14.1.4　如果级数(2)在同一括号中的项都有相同的符号, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是级数(2)收敛, 且两者有相同的和.

提示　证明充分性时, 运用两边夹法则.

14.1.5 有限项的改变

定理 14.1.5 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 前面去掉有限项或加上有限项，不影响级数的敛散性.

14.2 正项级数的比较判别法

14.2.1 正项级数

如果对 $n = 1,2,\cdots$, 都有 $a_n \geq 0$, 就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

说明 只有有限个负项的级数也可以当成正项级数看待.

14.2.2 正项级数收敛与部分和数列有界

定理 14.2.1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

14.2.3 比较判别法

定理 14.2.2 设有两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. 如果从第 N 项开始有不等式

$$a_n \leq b_n$$

那么:

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

定理 14.2.3(极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数. 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

那么:

(1) 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

(2) 若 $l = 0$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(3) 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

14.2.4 Cauchy 积分判别法

定理 14.2.4 设当 $x \geq 1$ 时，$f(x) \geq 0$ 且递减，那么无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

14.3 正项级数的其他判别法

14.3.1 Cauchy 开方判别法

定理 14.3.1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数.

(1) 如果存在正数 $q < 1$，使得对充分大的 n，有

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 如果对无穷多个 n，有

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

说明 (1)中正数 $q < 1$ 的存在性是必要的，这保证了 $\{a_n\}$ 无法趋近于 1.

定理 14.3.2(极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个正项级数，且

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

那么:

(1) 若 $q < 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $q > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $q = 1$，无法判断.

14.3.2 商比判别法

引理 14.3.1 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 是两个正数列. 如果当 $n \geq n_0$ 时，有不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

那么:

(1) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

提示 累乘法. 往求不等式 $a_n \leq cb_n$，其中 c 为待定常数.

14.3.3 D'Alembert 判别法

定理 14.3.3 设 $a_n > 0\,(n = 1,2,\cdots)$.

(1) 如果存在正数 $q < 1$, 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 如果当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 14.3.4(极限形式) 设 $a_n > 0\,(n = 1,2,\cdots)$.

(1) 如果 $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$;

(2) 如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q' > 1$, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$;

(3) 如果 $q = 1$ 或 $q' = 1$, 那么无法判断.

14.3.4 Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法

定理 14.3.5 设 $\{a_n\}$ 是任意的正数列, 那么

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

说明 由此可得, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法的适用面更广, 但它们都只能判别比几何级数收敛得快的级数.

14.3.5 Raabe 判别法

定理 14.3.6 设 $a_n > 0\,(n = 1,2,\cdots)$.

(1) 如果存在 $r > 1$, 使得当 $n > n_0$ 时, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 如果对充分大的 n, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$$

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

提示 将$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$作比较.

定理 14.3.7(极限形式) 设正数列$\{a_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)(n \to \infty).$$

那么:

(1) 若$l > 1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若$l < 1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散;

(3) 若$l = 1$, 无法判断.

14.3.6 Gauss 判别法

定理 14.3.8 设正数列$\{a_n\}$满足:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)(n \to \infty)$$

那么:

(1) 若$\beta > 1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2) 若$\beta < 1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

14.4 任意项级数

14.4.1 Cauchy 收敛准则

定理 14.4.1 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是, 其部分和数列$\{S_n\}$是 Cauchy 列, 即, 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$n > N$时,

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$$

对一切正整数p成立.

14.4.2 Leibniz 判别法

定理 14.4.2 如果$\{a_n\}$递减趋于0, 那么交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$收敛.

提示(1) 对级数重新结合.

提示(2) 运用 Dirichlet 判别法.

说明 (1) 满足上述条件的交错级数称为 **Leibniz 级数**.

(2) 误差估计:

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是一个 Leibniz 级数, 其和为 S. 则 $\left|S_n - S\right| \le a_{n+1}$.

提示 $\{S_{2n}\}$ 递增趋于 S, $\{S_{2n+1}\}$ 递减趋于 S.

(3) $0 \le S \le a_1$.

14.4.3 Abel 分部求和公式和 Abel 引理

14.4.4 Dirichlet 判别法

定理 14.4.3 设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是两个数列, $S_k = \sum\limits_{l=1}^{k} a_l$, 它们满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$ 单调趋于 0; (b) $\{S_k\}$ 有界.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

14.4.5 Abel 判别法

定理 14.4.4 设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 满足以下两个条件:

(a) $\{b_k\}$ 单调有界; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

说明 试比较 Dirichlet 判别法与 Abel 判别法.

14.5 绝对收敛和条件收敛

14.5.1 绝对收敛必收敛

定理 14.5.1 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ 收敛, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

提示 运用 Cauchy 收敛准则.

14.5.2 绝对收敛和条件收敛

定义(绝对收敛级数) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ 也收敛;

定义(条件收敛级数) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ 发散.

说明 收敛的正项级数是绝对收敛级数, 故其具有绝对收敛级数的所有性质.

14.5.3 绝对收敛级数的可交换性

定理 14.5.2 交换绝对收敛级数中无穷多项的次序，所得的新级数仍然绝对收敛，其和也不变.

提示 构造数列

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, a_n \geq 0 \\ 0, \ a_n < 0 \end{cases}, a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2} = \begin{cases} -a_n, a_n \leq 0 \\ 0, \quad a_n > 0 \end{cases} (n = 1,2,\cdots)$$

说明 此处强调的是无限次操作，因为对于有限次操作的情况是平凡的.

14.5.4 Riemann's Theorem

定理 14.5.3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则适当交换各项的次序，可使其收敛到任一指定的实数 $S \in \mathbb{R}_{\infty}$.

14.6 级数的乘法

14.6.1 Cauchy 乘积

两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 相乘得一个新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$，其中

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积.

14.6.2 Cauchy's Theorem

定理 14.6.1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛，其和分别为 A, B，那么把 $a_i b_j \ (i, j = 1,2,\cdots)$ 按任意方式相加所得的级数都是绝对收敛的，且其和就等于 AB.

14.6.3 Mertens's Theorem

定理 14.6.2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，其和分别为 A, B，如果其中至少有一个绝对收敛，那么它们的 Cauchy 乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = AB.$$

提示 运用 Cauchy 方法.

14.6.4 Abel's Theorem

定理 14.6.3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. 如果它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，那么必有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB.$$

14.7 无穷乘积

14.7.1 无穷乘积

给定数列 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$，称

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

为一个无穷乘积.

称

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 p_2 \cdots p_n \ (n = 1, 2, \cdots)$$

为这个无穷乘积的部分乘积.

如果当 $n \to \infty$ 时，数列 $\{P_n\}$ 有有限的极限 P，且 $P \neq 0$，则称这个无穷乘积是收敛的，记为

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P.$$

如果 $\{P_n\}$ 的极限不存在，或者虽然存在但等于 0，则称它是发散的.

14.7.2 无穷乘积收敛的必要条件

定理 14.7.1 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 1.$$

14.7.3 无穷乘积收敛的充分必要条件

定理 14.7.2 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) \cdots (1)$ 收敛.

在收敛的情况下，如果式(1)的和是 S，那么

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \mathrm{e}^{S}.$$

14.7.4 无穷乘积与无穷级数

定理 14.7.3 如果从某个 n 起都有 $a_n > 0$ (or $a_n < 0$)，那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

定理 14.7.4 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$，那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

第 15 章 函数列与函数项级数

15.1 问题的提出

15.1.1 函数项级数

设

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

是定义在区间 $[a,b]$ 上的一列函数. 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

是 $[a,b]$ 上的一个**函数项级数**.

15.1.2 收敛与收敛点集

在 $[a,b]$ 内任取一点 x_0, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 便是一个数项级数. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称函数项级数(1)在点 x_0 **收敛**; 反之, 则称级数(1)在点 x_0 处**发散**.

如果级数(1)在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛, 则称级数(1)在区间 $[a,b]$ 上**收敛** (或**逐点收敛**).

使级数(1)收敛 (发散) 的那些点的全体, 称为级数(1)的**收敛 (发散) 点集**.

15.1.3 和函数

设 $[a,b]$ 是级数(1)的收敛点集. 则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \, (a \le x \le b)$$

称为级数(1)在 $[a,b]$ 上的**和函数**.

称 $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ 是函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数.

15.2 一致收敛

15.2.1 函数列的收敛

定义(收敛) 设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数列. 对 $x_0 \in [a,b]$, 如果数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在点 x_0 收敛.

定义(逐点收敛) 如果 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 内的每一点都收敛, 则称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上**收敛** (或**逐点收敛**).

$\varepsilon - N$ **表述** 对任给的 $x_0 \in [a,b]$ 和任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(x_0,\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| f_n(x_0) - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

称 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 f.

15.2.2 一致收敛

定义 15.2.1 设函数列 $\{f_n\}$ 在点集 I 上收敛与 f. 如果对任意给定的正数 ε, 都存在与 x 无关的正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

对一切 $x\in I$ 都成立，则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上**一致收敛**于函数 f .

说明 (1) 与函数的“连续”和“一致连续”相类似，此处的“一致收敛”强调的是对一切 $x\in I$ 都统一的数 $N=N(\varepsilon)$ 的存在性. 同样，我们也有一致收敛必收敛等结论.

(2) 我们研究的是函数的性质，故应当得出一些对所有 $x\in I$ 都成立的结论，从而我们在考虑函数项级数时，考虑的是“一致收敛”而不仅仅是“收敛”(这是相对于某一个数列而言的).

15.2.3 一致收敛的充分必要条件

定理 15.2.1 函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f 的一个充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0$$

其中 $\beta_n=\sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x)-f(x)\right|$.

15.2.4 Cauchy 收敛准则

定理 15.2.2 设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的一个函数列，那么 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时，

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 p 成立.

15.2.5 函数项级数的一致收敛

定义 15.2.2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数项级数，令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ 为它的部分和. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$.

15.2.6 函数项级数的 Cauchy 收敛准则

定理 15.2.3 定义在区间 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时，不等式

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|=\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$$

对任意的 $x\in I$ 及任意的正整数 p 成立.

15.2.7 *函数项级数一致收敛的必要条件

推论 15.2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的一个必要条件是，它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0 .

15.2.8 Weierstrass 判别法

定理 15.2.4 如果存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得在区间 I 上有不等式

$$\left|u_n(x)\right| \le a_n \ (n = 1,2,\cdots)$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

提示 运用 Cauchy 收敛准则.

15.2.9 有界与一致有界

设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 I 上的函数列. 如果对每一个 $x \in I$，都有正数 $M(x)$，使得 $\left|f_n(x)\right| \le M(x)$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 成立, 则称函数 $\{f_n\}$ 在 I 上**逐点有界**.

如果存在一个常数 M，使得

$$\left|f_n(x)\right| \le M \ (n = 1,2,\cdots)$$

对一切 $x \in I$ 成立, 则称函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上**一致有界**.

15.2.10 Dirichlet 判别法

定理 15.2.5 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足:

(a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在区间 I 上一致收敛于 0；

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和在 I 上一致有界, 即

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le M \ (x \in I, n = 1,2,\cdots)$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

15.2.11 Abel 判别法

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上满足:

(a) $\{b_n(x)\}$ 对每个固定的 $x \in I$ 都是单调的, 且在 I 上一致有界, 即

$$\left|b_n(x)\right| \le M \ (x \in I, n = 1,2,\cdots)$$

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

15.3 极限函数与和函数的性质

15.3.1 连续性

定理 15.3.1 如果函数列 $\{f_n\}$ 的每一项都在区间 I 上连续，且 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛于函数 f，那么 f 也在 I 上连续. 即,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

提示 对每一点 $x_0 \in I$，证明 f 在 x_0 处连续.

说明 如果能够证得 f 在 $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$ 上连续，那么也可得到 $f \in C(a,b)$，而不要求 $\{f_n\}$ 在 (a,b) 上一致收敛于 f. 这使得此定理的适用范围更广.

定理 15.3.2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$，且每一项 $u_n(x)$ 都在 I 上连续，那么和函数 $S(x)$ 也在 I 上连续.

15.3.2 Dini's Theorem

定理 15.3.3 设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x \in [a,b]$，数列 $\{f_n(x)\}$ 递减地趋于 0，那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛（于 0）.

提示(1) 运用有限覆盖定理.

提示(2) 运用 Bolzano-Weierstrass 定理.

提示(3) 运用 Lebesgue 方法.

说明 若不使用有限覆盖定理，事实上只需将其证明思想转述为实数系统连续性的其余等价命题即可.

推广 设函数列 $\{f_n\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续. 如果对每一个 $x \in [a,b]$，数列 $\{f_n(x)\}$ 递增（减）地趋于 $f(x) \in C[a,b]$（但对所有 x，单调性应保持一致），那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

提示 上述推广是自然的. 考虑 $\{R_n(x) = \left|f(x) - f_n(x)\right|\}$.

定理 15.3.4 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续且非负. 如果它的和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，那么该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

提示 考虑余项 $\{R_n(x) = S(x) - S_n(x)\}$ 构成的函数列.

说明 此处考虑的是"正项级数".

15.3.3 可积性

定理 15.3.5 如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，那么 f 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

提示 运用 Lebesgue 定理.

推论 15.3.1 如果 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 15.3.6 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，那么 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积，并且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

推论 15.3.2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，那么

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

15.3.4 可微性

定理 15.3.7 设函数列 $\{f_n\}$ 满足条件:

(a) 每一个 f_n 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

(b) 由导函数构成的函数列 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 g ;

(c) 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 上收敛.

那么函数列 $\{f_n\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微函数 f ，并且对每一个 $x\in[a,b]$，有

$$f'(x)=g(x)\Leftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n(x)).$$

提示 运用 Cauchy 收敛准则.

定理 15.3.8 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足条件:

(a) 每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

(b) 由各项的导函数组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;

(c) 至少在某一点 $x_0\in[a,b]$ 处收敛.

那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，并且 $S'(x)=g(x)$ ，即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

15.4 由幂级数确定的函数

15.4.1 幂级数

一般形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots\tag{1}$$

说明 多项式可看做一种特殊的幂级数，幂级数也可看做一个“无穷次”的多项式.

特殊形式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots\tag{2}$$

15.4.2 Abel's Theorem – 幂级数的收敛点集

定理 15.4.1 如果幂级数(2)在点 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 处收敛，那么它必在区间 $\left|x\right| < \left|x_0\right|$ 上绝对收敛；如果幂级数(2)在点 $x = x_1$ 处发散，那么它必在 $\left|x\right| > \left|x_1\right|$ 上发散.

提示 考虑 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|\left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$.

15.4.3 Cauchy-Hadamard Theorem – 收敛半径与收敛区间

对给定的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2}$$

记

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}}$$

称为幂级数(2)的**收敛半径**，那么：

(1) 当 $R = 0$ 时，级数(2)只在 $x = 0$ 这一点收敛；

(2) 当 $R = +\infty$ 时，级数(2)在整个数轴上都绝对收敛；

(3) 当 $0 < R < +\infty$ 时，级数(2)在区间 $(-R,R)$ 内绝对收敛，在 $[-R,R]$ 之外发散.

说明 可见，幂级数(2)的收敛点集是区间 $(-R,R)$，对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\pm R)^n$ 的敛散性则需具体问题具体分析.

15.4.4 幂级数内闭一致收敛

定理 15.4.3 设级数(2)的收敛半径为 R，则对任意的 $r \in (0,R)$，级数(2)在 $[-r,r]$ 上一致收敛. 称级数(2)在 $(-R,R)$ 上内闭一致收敛.

提示 运用 Weierstrass 判别法.

说明 (1) 可见，幂级数的和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不仅在收敛区间内是连续的，而且具有任意阶导数.

(2) 后面我们将看到，对于收敛区间端点的单边连续性，则由端点处级数的敛散性决定.

15.4.5 连续性与可微性

定理 15.4.4 设级数(2)的收敛半径为 R，则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续，而且在 $(-R,R)$ 内有任意阶导数：

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}\ (k = 1,2,\cdots)$$

说明 这条定理揭示了幂级数在收敛区间内可逐项求导，这正是幂级数和多项式的相似之处.

15.4.6 可积性

定理 15.4.5 设级数(2)的收敛半径为 R，$S(x)$ 是它的和函数，那么对任意的 $x \in (-R,R)$，有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

而且上式右边幂级数的收敛半径仍为 R.

提示 运用在幂级数在 $[0,x]$ 上的一致收敛性.

说明 若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 也收敛, 则不论 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 处是否收敛, 均有

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}. \tag{*}$$

讨论 上述“推广”如何证明?

提示 上述等式讲述的是求和号与积分号的可交换性,

但是换一个角度理解, 我们也可以看成是对 $f(x)$ 的变上限积分做幂级数展开, 由下述 Abel 第二定理, 如上推广在这样的理解下则显得非常自然. 确切地说, 我们有:

$f(x)$ 在 $[0,R)$ 上内闭一致收敛, 从而

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \forall x \in [0,R)$$

若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 也收敛, 则由如下 Abel 第二定理可知式(*)成立.

15.4.7 Abel 第二定理

定理 15.4.6 设级数(2)的收敛半径为 R. 如果在 $x = R$ 处级数(2)收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续; 如果级数(2)在 $x = -R$ 处收敛, 则 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

提示 往证: 级数(2)在 $[0,R]([-R,0])$ 上一致收敛. 运用 Abel 判别法.

说明 此定理的意义在于, 在函数幂级数展开 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的问题中, 将等式成立的范围转化为级数收敛的范围. 即, 通过级数的敛散性判断原等式的成立性. 确切地说, 我们有:

函数 $f(x) \in C[-R,R]$, 若等式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 上成立, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\text{or } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\right)$ 也收敛, 则

$$f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\text{or } f(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\right)$$

证明 事实上, 记 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 不妨设 $g(x)$ 在 $[0,R]$ 上收敛, 则由 Abel 第二定理知, $g(x)$ 在 $x = R$ 处左连续, 又 $f(x)$ 在 $x = R$ 处左连续, 故

$$f(R) = f(R-) = \lim_{x \to R^-} f(x) = \lim_{x \to R^-} g(x) = g(R-) = g(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

证毕.

15.4.8 Tauber's Theorem

定理 15.4.7 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$ 存在.

如果 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$，那么其和函数 $S(x)$ 在 $x = 1$ 处左连续，即，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

说明 另外一个简单的充分条件是 $a_n \geq 0$.

讨论 如何证明?

15.4.9 幂级数的 Cauchy 乘积

定理 15.4.8 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径均为 R，那么当 $x \in (-R, R)$ 时，有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l} x^n$$

特别地，由于当 $\left|x\right| < 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$，故若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 1，那么当 $\left|x\right| < 1$ 时，有

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} a_l x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k x^n$$

$$\cdots$$

15.5 函数的幂级数展开式

15.5.1 Taylor 级数与 Maclaurin 级数

设 f 在 $x = x_0$ 处由任意阶导数，那么

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为 f 在 $x = x_0$ 处的 **Taylor 级数**.

特别地，当 $x_0 = 0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

称为 f 的 **Maclaurin 级数**.

15.5.2 Taylor 级数收敛于函数的充分必要条件

函数 f 能在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是，对任意的 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$，有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

15.5.3 函数展开为 Taylor 级数的充分条件

定理 15.5.1 如果存在常数 M，使得对 $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 及一切充分大的正整数 n，均有

$$\left|f^{(n)}(x_0)\right| \le M,$$

那么 f 能在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上展开为 Taylor 级数.

提示 往证:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \; (x_0 - R < x < x_0 + R)$$

15.5.4 几个初等函数的幂级数展开式

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \; (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \; (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \; (-1 < x \le 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \; (-1 \le x \le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \begin{cases} a \le -1, & (-1,1) \\ -1 < \alpha < 0, & (-1,1] \\ \alpha > 0, & [-1,1] \end{cases}$$

15.6 用多项式一致逼近连续函数

15.6.1 一致逼近

设 f 是定义在有限闭区间上的函数. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$，总能找到多项式 P，使得对 $[a,b]$ 中所有的 x，

$$\left|f(x) - P(x)\right| < \varepsilon$$

成立, 则称 f 在 $[a,b]$ 上能用多项式**一致逼近**.

15.6.2 Weierstrass 定理

定理 15.6.1 闭区间 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 都能在这个区间上用多项式一致逼近.

第 16 章

第 17 章

第 18 章

18.1

18.1.1

第 19 章 微分方程(微积分学导论 第 5 章)

19.1 微分方程的基本概念

19.1.1 阶

方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶称为方程的**阶**.

19.1.2 微分方程

一般地, n 阶微分方程可表达为

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x)) = 0.$$

如果一个函数 $y = \varphi(x)$ 在某个区间内具有直到 n 阶的连续导数, 并且将这个函数及其导数代入上述微分方程, 使之成为恒等式, 即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)) = 0$$

在 I 内成立, 则称函数 $y = \varphi(x)$ 是微分方程的一个**解**, 区间 I 成为解 $y = \varphi(x)$ 的**定义区间**.

与代数方程不同, 微分方程的解通常不是常数, 而是函数, 并且解的个数可能有无穷多.

19.1.3 通解与特解

含有独立常数的解称为通解, 当独立常数取某个具体值时所得到的满足定解条件的解称为方程的特解.

一般地, n 阶方程的通解含有 n 个独立常数, 故需要 n 个定解条件.

19.1.4 齐次线性微分方程

如果微分方程

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x)) = 0.$$

中的函数 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 是关于变量 $(y,y',\cdots,y^{(n)})$ 的线性函数, 而且其系数仅为 x 的已知函数, 则该微分方程称为**线性微分方程**, 否则称它为**非线性微分方程**.

n 阶线性微分方程可表达为

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

其中系数 $a_{n-1}(x),\cdots a_0(x)$ 和右端项 $f(x)$ 都是已知函数. 当 $f(x) \equiv 0$ 时, 称之为**齐次线性微分方程**, 否则称之为**非齐次线性微分方程**.

19.1.5 线性微分方程的叠加原理

定理 19.1.1 设函数 $y = \varphi_i(x)\,(i = 1,2,\cdots,m)$ 是线性方程

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f_i(x)\,(i = 1,2,\cdots,m)$$

的解, 则其线性组合 $y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_m\varphi_m(x)$ 是线性方程

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = C_1f_1(x) + \cdots + C_mf_m(x)$$

的解, 其中 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是常数.

特别地, 当 $f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0$ 时, 叠加原理说明线性齐次方程的解构成一个线性空间, 称为解空

间.

19.1.6 一阶线性定解问题解的存在唯一性

定理 19.1.2 设函数 $p(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$x_0 \in (a,b)$ 为一个给定点，y_0 为给定实数，则存在唯一一个在 (a,b) 内连续可微的函数 $y = \varphi(x)$，满足定解问题

$$\begin{cases} y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

19.1.7 二阶线性定解问题解的存在唯一性

设函数 $p(x),q(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$x_0 \in (a,b)$ 为一个给定点，y_0,y_1 为给定实数，则存在唯一一个在 (a,b) 内二阶连续可微的函数 $y = \varphi(x)$，满足定解问题

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases}.$$

19.2 一阶微分方程

19.2 .0 一阶微分方程的一般形式

$$F(x,y(x),y'(x)) = 0 \Rightarrow y'(x) = f(x,y)$$

19.2.1 变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x,y) = g(x)h(y) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\mathrm{d}x + C$$

其中不定积分在此处只表示被积函数的某一个原函数.

上述变量 x,y 之间的一个隐函数关系，称为方程的隐式解;

如果能从隐式解中解出 y 为 x 和 C 的函数关系，即 $y = \varphi(x,C)$，那么称其为方程的显式解.

隐式解和显式解都称为微分方程的通解.

注意 如果存在常数 $\overline{y}$，使得 $h(\overline{y}) = 0$，则 $y = \overline{y}$ 是方程的一个特解. 特解和通解构成原方程的全解.

19.2.2 齐次方程

$$y'(x) = f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $\dfrac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow u' = \dfrac{\varphi(u) - u}{x}$

化为变量分离方程.

19.2.3 可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

其中 a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 是常数，设 a_1,b_1,a_2,b_2 不全为零.

1. $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，$c_1^2+c_2^2\neq 0$ (c_1,c_2 不全为零，否则化为齐次方程的情形)

作变量的平移代换

$$x=\xi+h, y=\eta+k$$

其中 ξ,η 是新的自变量，h,k 是待定常数.

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a_1x+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}{a_2\xi+b_2\eta+a_2h+b_2k+c_2}\right)$$

令

$$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0\\ a_2h+b_2k+c_2=0\end{cases}$$

由于 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，故由线性方程组理论知，上述方程的解 (h,k) 一定存在.

事实上,

$$h=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, k=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

于是,

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)$$

2. $a_1b_2-a_2b_1=0$

作代换 $z=a_ix+b_iy$ ($i=1$ or 2)

19.2.4 一阶线性方程

$$y'(x)+p(x)y(x)=f(x)$$

1. 一阶齐次线性方程

$$y'(x)+p(x)y(x)=0$$

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\ (c\in\mathbb{R})$$

2. 一阶非齐次线性方程

$$y'(x)+p(x)y(x)=f(x)$$

说明 这是叠加原理的一种形式.

19.2.5 伯努利方程(Bernoulli's Equation)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$$

作变换 $u=y^{1-n}$，即可得到一个关于 u 的线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

19.2.6 微分方程的求解方法

1. 积分因子法(以求解一阶非齐次线性方程为例)

两端同乘因子 $\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

2. *常数变易法

将对应的齐次方程的通解中的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_m$ 变易为 m 个适当的函数 $C_1(x),C_2(x),\cdots,C_m(x)$，使之成为非齐次方程的(特)解. 这种方法用于从齐次方程到非齐次方程的求解, 对于高阶微分方程尤其有效.

3. *线性叠加法(以求解一阶非齐次线性方程为例)

由方程的线性性, 非齐次线性方程的通解等于齐次方程的通解 $y_{\mathrm{h}}(x)$ 与非齐次方程的特解 $y_{\mathrm{p}}(x)$ 之和,

$$y(x)=y_{\mathrm{h}}(x)+y_{\mathrm{p}}(x)=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

其中, $y_{\mathrm{p}}(x)$ 可由 $y_{\mathrm{h}}(x)$ 通过常数变易法得到.

19.3 可降阶的二阶微分方程

19.3 .0 二阶微分方程的一般形式

$$F(x,y(x),y'(x),y''(x))=0$$

19.3.1 不显含未知函数的二阶微分方程

$$F(x,y'(x),y''(x))=0$$

作变量代换 $p=y'(x)$, 则方程化为一阶微分方程

$$F(x,p(x),p'(x))=0$$

19.3.2 不显含自变量的二阶微分方程

$$F(y,y',y'')=0$$

作变量代换 $p=y'(x)$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

19.4 二阶线性微分方程解的结构

19.4 .0 二阶线性微分方程的标准形式

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

其中系数 $p(x),q(x),f(x)\in C(I)$.

当 $f(x)=0$ 时, 方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

称为**二阶齐次线性微分方程**.

19.4.1 (二阶齐次线性微分方程解的结构)

19.4.2 解空间与基本解组

由线性方程的叠加原理, 齐次线性微分方程的解的全体构成一个线性空间, 称为该方程的**解空间**.

类似于向量空间, 如果能够找到该方程两个线性无关的特解, 就可以利用它们的线性组合来表达该方

程的所有解, 故称二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的特解为该方程的**基本解组**.

19.4.3 线性相关

设 m 个函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义, 如果存在一组不全为零的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_m$, 使得线性组合

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_m\varphi_m(x)\equiv 0, \forall x\in(a,b)$$

则称函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$ 在区间 (a,b) 上**线性相关**; 否则称它们在区间 (a,b) 上**线性无关**.

定理 5.4.1(线性相关的必要条件) 函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a,b) 上线性相关的必要条件是

$$y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\equiv 0$$

在区间 (a,b) 上成立.

提示 运用线性方程组理论.

19.4.4 Wronski's Determinante

$$W[y_1,y_2](x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

称为 $y_1(x),y_2(x)$ 的 **Wronski 行列式(Wronski's Determinante)**.

说明 注意留意 $W(x)$ 与 $\left(\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)'$ 的关系.

19.4.5 Liouville's Formula

定理 5.4.2 函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

在区间 (a,b) 上的两个解, 则其 Wronski 行列式

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}$$

其中 x_0 是 (a,b) 上的任意固定点.

注意 上述公式中出现的是定积分.

19.4.6 Liouville's Theorem

定理 5.4.3 函数二阶齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

在区间 (a,b) 上的两个解, 则 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a,b) 上线性相关的充分必要条件是 $W(x)\equiv 0, x\in(a,b)$.

或写作:

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 (a,b) 上线性无关的充分必要条件是 $W(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$.

提示 证明充分性时运用方程定解问题解的唯一性.

19.4.7 基本解组的存在性与通解的表达

二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

存在两个线性无关解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，并且 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是其基本解组，即上述方程的通解可以表示为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

提示 (1) 基本解组存在性只需运用定解问题解的存在性构造使得其 $W(x) \neq 0$ 的两个特解即可.

(2) 表达通解时运用方程定解问题解的唯一性.

19.4.8 基本解组的求解 – 未知函数变换及降价法

设函数 $y_1(x)$ 是齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一个非零解，则函数

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

是方程的另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的非零解.

提示(1) 作未知函数变换 $z(x) = \dfrac{y(x)}{y_1(x)}$. 转化为不显含未知函数的二阶微分方程，用降阶法求解.

提示(2) 运用 Liouville 公式，取 $W(x_0) = 1$，考虑 $\left(\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)'$.

推广 (n 阶)在求解高阶齐次线性微分方程时，如果已知 n 阶齐次线性微分方程的一个非零解 $y_1(x)$，则作未知函数变换 $z(x) = \dfrac{y(x)}{y_1(x)}$，就可以得到一个可降阶的方程. 一般地，如果已知 k 个线性无关解，则可以将方程的阶数降低 k 次. 特别地，如果已知 $n-1$ 个线性无关的非零解，依次应用降阶法，即可得到一个一阶线性微分方程，从而得到 n 个线性无关的解.

19.4.9 (二阶非齐次线性微分方程解的结构)

19.4.10 非齐次线性方程的通解

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}}$$

其中 y_{h} 是对应齐次方程的通解，y_{p} 是非齐次方程的一个特解.

19.4.11 常数变易法

定理 5.4.5 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的两个线性无关解，则非齐次线性微分方程有形如

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

的特解，其中

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x, C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x$$

这里 $W(x)$ 是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的 Wronski 行列式.

特解:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t)\mathrm{d}t.$$

提示 这里 $C_1(x)$,$C_2(x)$ 是待定函数, 因此可以令 $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$, 从而消去 $C_1(x)$,$C_2(x)$ 的二阶导数.

19.5 二阶常系数线性微分方程

19.5 .0 二阶常系数线性微分方程

1. 齐次

$$y'' + py' + qy = 0$$

2. 非齐次

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

其中 p,q 是常数.

19.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程 – 特征方程

令 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, 代入方程 $y'' + py' + qy = 0$, 可得:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

称上述代数方程为齐次微分方程的**特征方程**, 并且称特征方程的根 λ 为微分方程的**特征根**.

0. 通解

$$y_{\mathrm{h}} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

1. 两个相异的实根.

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

是一组线性无关解.

2. 两个相同的实根.

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}$$

由 Liouville 公式,

$$y_2(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{p}{2}x}$$

3. 共轭复根

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, y_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

说明 对于高次的特征方程, 若 λ_0 为 n 重根, 则方程有特解

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}, y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \cdots, y_n = x^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}.$$

19.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程 – 待定系数法

1. $f(x) = P_n(x)$ 是 n 次多项式.

1.1 $\lambda = 0$ 不是特征根($q \neq 0$).

$$y_{\mathrm{p}} = Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

1.2 $\lambda = 0$ 是单重特征根.

$$y_{\mathrm{p}} = xQ_n(x) = x(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$$

1.3 $\lambda = 0$ 是双重特征根.

$$y_{\mathrm{p}} = x^2 Q_n(x) = x^2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$$

2. $f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$

19.5.3 欧拉方程

二阶变系数方程

$$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$$

为 **Euler 方程(Euler's Equation)**, 其中 $p, q \in \mathbb{R}$ 是常数.

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = \frac{f(x)}{x^2}$$

作变量代换 $x = \pm\mathrm{e}^t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + (p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + qy = f(\pm\mathrm{e}^t)$$