大学数学学习指导

线性代数

——方法导引

屠伯埙编著

DA XUE SHU XUE XUE XI ZHI DAO

复旦大学出版社

大学数学学习指导

线 性 代 数

——方 法 导 引

屠伯埙 编著

复 旦 大 学 出 版 社

綫 性 代 数

——方法导引

复旦大学出版社出版
新华书店上海发行所发行
复旦大学印刷厂印刷
字数256千　开本850×1168　1/32　印张8.75
1986年11月第一版　1986年11月第一次印刷
印数：1——10,000

书号：13253·026　　定价：1.80元

内 容 简 介

本书系统地介绍了线性代数的方法。第一部分是“解析理论”，即矩阵论，介绍了它的六大基本方法；第二部分为“几何理论”，详细介绍了四个基本的方法。此外，每章都配有大量的例题和习题，较难的习题都附上了提示。本书可供理工科师生和线性代数自学者阅读与参考，也可供报考研究生的读者作为复习的材料。

序

本书介绍了处理线性代数问题的各种方法。作者在多年讲授本课程的过程中，经常听到有些学生反映：线性代数解题方法“灵活多变，不易捉摸”。事实上，不少人学后尚能动口（内容似乎懂），但不能动手（分析问题和解决问题的能力较差）。为有助于解决这一矛盾，同时也为了区别于一般教科书和习题集，本书着重于概念的运用和方法的归纳，并配有大量的例题和练习，大多数习题附上了提示。因此，本书不但可作为理工科学生学习线性代数的参考书，也可作为广大自学者和报考研究生的读者作为复习线性代数的综合性材料。

本书在“解析理论”这一部分中，详细介绍了矩阵论的六大方法，讨论了方阵的各种标准形；对于“几何”理论的六大方法，则选择其中四个常用的方法进行详细的论述。至于具体的计算方法，一般就不再写入。此外，为节省篇幅，本书略去了一般线性代数教科书中常见的定理证明，但对其他书上很少出现的一些有用而又容易接受的方法，则在有关地方作了介绍。因此，本书也可供讲授线性代数的教师阅读与参考。

编者多年来为复旦大学学生讲授线性代数，并数次为报考研究生的学生开设线性代数理论与方法的复习辅导讲座，因此本书主要取材于编者的讲稿。书中归纳的主要方法和理论是编者在执教过程中的经验与体会，限于本人的水平，难免有处理不妥与片面之处，甚至可能会有某些错误，恳切希望广大读者批评指正。

屠伯埙　1984年国庆

线性代数的基本内容与学习要求

线性代数由两大方面组成：一为矩阵论部分，也称为线性代数的解析理论部分；二为线性代数的“几何”理论部分。

矩阵论部分比较具体，它所要解决的问题也相当明确，而解决问题的方法虽然是多种多样的，但其主要的，是六大基本方法之运用（计算方法未列入其中）。关于这部分的要求，除了要掌握主要的基本结论以及基本运算外，应以掌握六大基本方法之运用为主，并且兼及其他方法。

“几何”理论部分比较抽象，由于它的基本概念是以代数、分析、几何等方面的某些概念作为雏型而抽象出来的，因此重点应放在对这些概念的理解与运用上，具体地说：一、要求对线性空间公理系统的意义与作用有初步的了解，并能用公理系统论证一些基本结论，以初步训练严谨的思维与严格的逻辑推理能力，为学习现代数学走好第一步；二、要求能初步将基本概念及由其推导出来的基本结论运用到代数方面、分析方面以及几何方面；三、要求会运用“几何”理论中的六个基本方法中的四个方法，并了解另外两个方法的运用。

目　录

第九章　正定阵及其应用

第二部分　线性代数的“几何理论”

第十章　线性空间与欧氏空间

第十一章　线性空间上的线性映射

第十二章　线性代数的“几何”理论中的基本方法

第一部分　线性代数的“解析理论”

第一章　矩　　阵

在本书中，称以数 a_{ij} 为元素的 m 行 n 列矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $m\times n$ 阵，简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$。当 $m=n$ 时，即 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为方阵时，称 A 为 n 阶阵（或 n 级阵），称 $n\times 1$ 阵为 n 维列向量，称 $1\times n$ 阵为 n 维行向量，以 A' 表示 A 的转置阵，即 $A'=(b_{ij})_{n\times m}$，$b_{ij}=a_{ji}$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$。为节省篇幅，今后常用 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 表示列向量。

称以实数为元素的方阵为实方阵；以复数为元素的方阵为复方阵。

在本书中用得最多的两种实方阵是实对称阵及正交阵，它们的定义分别为：

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实方阵，且 $A=A'$，即 $a_{ij}=a_{ji}$；$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 A 为**实对称阵**。

设 A 是 n 阶实阵，且 $AA'=I_n$，则称 A 为**正交阵**，这里 I_n 表示 n 阶单位阵。

§1　基本概念与基本结论

本章的主要概念有三，即矩阵的分块与分块矩阵；非异阵及其逆阵；矩阵的初等变换与初等阵。上述三者与“矩阵的秩”（见第三、四章）及“矩阵的特征值”（见第五章）是矩阵中最基础的概念。

一、关于矩阵的分块与分块矩阵

若将 $m\times n$ 阵 A 作如下分块：

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots\cdots & & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array}=(A_{ij})_{r\times s} \qquad (1)$$

其中，子块（或称子矩阵）A_{ij} 是 $m_i\times n_j$ 阵，$\sum\limits_{i=1}^{r}m_i=m$，$\sum\limits_{j=1}^{s}n_i=n$，则 A 既是以数为元素的 $m\times n$ 阵，又可将 A 看作以子矩阵 A_{ij} 为元素的 $r\times s$ 分块矩阵。

与数为元素的矩阵一样，分块矩阵也有三种运算：加法、数量乘法与乘法、以乘法运算最为重要，它的运算规则如下。

设 B 是 $n\times p$ 阵，若将 B 作如下分块：

$$B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots\cdots & & & \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} \end{array}=(B_{ij})_{s\times t},\quad \sum_{i=1}^{t}p_i=p$$

则

$$AB=(A_{ij})_{r\times s}\cdot(B_{ij})_{s\times t}=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots\cdots & & & \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix} \end{array}$$

其中

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{is}B_{sj}=\sum_{i=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$$

$$i=1,2,\cdots,r;\quad j=1,2,\cdots,t$$

换言之，两个分块矩阵在作乘法运算时，必须符合两个条件：（1）$(B_{ij})_{s\times t}$的行数与$(A_{ij})_{r\times s}$的列数相同（都是s）；（2）分块后的子矩阵的乘法都要有意义（指凡是要相乘的子块），这两者缺一不可，下面的例子就是错误的：

例 若n阶阵F的分块是

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}=\begin{array}{c|cc} & n-1 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ I_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}$}} \\ n-1 & & \end{array}$$

其中I_{n-1}是$n-1$阶单位阵，$\alpha=(-a_{n-1},-a_{n-2},\cdots,-a_1)'$，按此分块法就不能求$F^2$，因为从

$$F^2=\begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ I_{n-1} & \alpha \end{pmatrix} \end{array}\cdot\begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ I_{n-1} & \alpha \end{pmatrix} \end{array}$$

中看出，虽然前者的列数与后者的行数相同，然而要相乘的子矩阵却不能进行乘法运算（因为前者子矩阵的列数与后者子矩阵的行数不相同）。本例中的方阵F常称为弗罗本尼乌斯(Frobenius)阵。

另外，若A的分块法如（1）那样，则须注意：

$$A'=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{r1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{r2} \\ \cdots\cdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{rs} \end{pmatrix}$$

二、关于非异阵及其逆阵

定义 对于方阵A，若存在同阶方阵（或称同级方阵）B，使$AB=BA=I$（I是同级单位阵），则称A为**非(奇)异阵**(或**可逆阵**)。而称B为A的**逆阵**。否则，就称A为**奇异阵**。

由矩阵乘法的定义易证：有一行（或一列）为0的方阵必为奇异

阵。

有关非异阵的基本性质有六条，其中一、二两条为：

定理1. 若 A 是非异阵，则 A 的逆阵是唯一的(故可记为 A^{-1})，并且 A'，$\overline{A}$，$kA(k\neq 0)$ 均非异，它们的逆阵分别是：

$$(A')^{-1}=(A^{-1})',\ (\overline{A})^{-1}=(\overline{A^{-1}}),\quad (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1} \qquad (2)$$

又 $(A^{-1})^{-1}=A$。这里 A' 表示 A 的转置，$\overline{A}$ 表示 A 的共轭，即 A 的每个元素（数）的共轭（复数）按照 A 的原来的相对位置排成的同阶方阵。

定理2. 若 A_1，A_2，…，A_s 是同阶非异阵，$s\geqslant 2$，则 $A_1A_2\cdots A_s$ 是非异阵，且

$$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1} \qquad (3)$$

非异阵的第三、四、五条性质见第二段（定理 4、5，6）；第六条性质见第二章定理 4 .

三、关于矩阵的初等变换与初等阵

矩阵的初等变换与初等阵的概念见本章 §4，关于它的基本结论有四条，即

定理3. 对任何非零 $m\times n$ 阵 A（即 m 行 n 列的长方阵，其元素中至少有一个数非零），必存在 m 阶非异阵 P 与 n 阶非异阵 Q，使

$$PAQ=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},\quad r>0 \qquad (4)$$

且 r 由 A 唯一确定。其中，I_r 是 r 阶单位阵，主对角块的 0 是 $(m-r)\times(n-r)$ 阵，而左下角与右上角的 0 分别是 $(m-r)\times r$ 阵与 $r\times(n-r)$ 阵。

定理4. 设 A 是 n 阶非零阵，且[由（4）式]

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ r>0$$

（此时 $m=n$），其中 P 与 Q 都是 n 阶非异阵，则 A 是非异阵的充要

条件是 $r=n$ 。

定理5. 方阵 A 是非异阵的充要条件是 A 可表（或分解）为有限个初等阵（它们都是非异阵）的乘积。

定理6. n 阶阵 A 是非异阵的充要条件是 $n\times 2n$ 阵 (A,I_n) 可经有限次初等变换化为 (I_n,B)。当 (A,I_n) 可经有限次初等变换化为 (I_n,B) 时，恒有 $B=A^{-1}$。

§2 非异阵及其逆阵

在下节的例 3 中将用初等变换的方法证明：$AB=I$ 的充要条件是 $BA=I$。据此，为要判别方阵 A 是否非异，只要看能否找到同阶方阵 B，使 $AB=I$（或 $BA=I$），即可知 A 为非异阵，且 $B=A^{-1}$。

判断方阵的非异性并求出其逆阵的主要方法有四种：

第一，初等变换法 若能用有限次初等行变换将 $(A,\ I)$ 化为 (I,B)，则由定理 6 可知 A 是非异阵，且 $B=A^{-1}$，此法对数字矩阵特别适用。因为任何教科书上均有此类例子，故这里不再举例了。又此法对非数字阵有时也相当有效（见§4）。

第二，行列式法 用行列式判断 A 的非异性并求其逆，见第二章§3.

第三，降阶方法 （见 §4）

第四，"和化积"法 这是专门用于讨论与方阵之和有关的一类问题的方法，这里用来判断方阵之和是否非异，其基本思想是，将方阵之和 $A+C$ 直接化为 $(A+C)B=I$ 的形状，此时 $A+C$ 为非异，且 $B=(A+C)^{-1}$（见例 1）；或者将方阵之和 $A+C$ 表为若干个已知的非异阵之积，再应用定理 2，即知 $A+C$ 是非异阵，并可得出其逆阵（见例 2）。

例1. 若方阵 A 满足矩阵恒等式：

$$A^3=3A(A-I) \tag{5}$$

证明：$I-A$ 是非异阵，并求 $(I-A)^{-1}$。

证 将（5）式改写为

$$-3A+3A^2-A^3=0 \tag{6}$$

欲证 $I-A$ 是非异阵，就是要找出 B，使

$$(I-A)B=I$$

不论如何找法，(6) 式右端必须出现单位阵，故在 (6) 式两端加上 I，即得

$$I-3A+3A^2-A^3=I$$

由于 I 与 A 可交换，所以上式可改写为 $(I-A)^3=I$，亦即

$$(I-A)(I-A)^2=I$$

故 $I-A$ 是非异阵，且 $(I-A)^{-1}=(I-A)^2$。

例2. 设 A、B 及 $A+B$ 都是非异阵。证明：$A^{-1}+B^{-1}$ 也是非异阵，并求其逆。

证 将 $A^{-1}+B^{-1}$ 表示为已知非异阵的乘积：

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(I+AB^{-1})=A^{-1}(B+A)B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

由定理 1 可知，A^{-1} 与 B^{-1} 都是非异阵，再由定理 2 知 $A^{-1}+B^{-1}$ 是非异阵，且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(B^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

下章还将继续用到和化积的思想（第二章 §2 例 1），有时，需要结合其他技巧，方能应用和化积的思想，下例就是。

例 3. 设 A 与 B 分别是 $n\times m$ 阵与 $m\times n$ 阵，且 I_m-BA 是非异阵，证明：I_n-AB 也是非异阵，并求 $(I_n-AB)^{-1}$。

证 在证明之前先分析一下，我们的目的是要找 C，使 $(I_n-AB)C=I_n$，欲达此目的，自然要应用假设条件：I_m-BA 的非异性，这就必须先建立 (I_n-AB) 与 (I_m-BA) 的关系式，很自然地会想到下式：

$$B(I_n-AB)=(I_m-BA)B \tag{7}$$

（把 B 从左边“送入”括号内，再“取出” B 到括号的右边，此法称为“送取法”，其思想在别处也很有用）。以下将由此正式证明本例：由 (7) 式可得：

$$B=(I_m-BA)^{-1}B(I_n-AB)$$

于是

$$I_n=(I_n-AB)+AB=(I_n-AB)+A(I_m-BA)^{-1}B(I_n-AB)$$

$$=[I_n+A(I_m-BA)^{-1}B](I_n-AB)$$

故 I_n-AB 是非异阵，且

$$(I_n-AB)^{-1}=I_n+A(I_m-BA)^{-1}B$$

由例 3 立刻可得下面的

例4. 设 A 是 n 阶非异阵，α 与 β 分别是 n 维列向量，且 $1+\beta'A^{-1}\alpha\neq 0$，证明：$A+\alpha\beta'$ 也是非异阵，并求 $(A+\alpha\beta')^{-1}$。

证 先将 $A+\alpha\beta'$ 写成：

$$A+\alpha\beta'=A[I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta')] \tag{8}$$

由定理 2，只要证明 $I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta)'$ 是非异阵即可，但由假设：$1-(-\beta)'(A^{-1}\alpha)\neq 0$，故由例 3 可知：$I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta')$ 是非异阵，且

$$[I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta')]^{-1}=I_n+(A^{-1}\alpha)[1-(-\beta')A^{-1}\alpha]^{-1}(-\beta')$$
$$=I_n-\frac{A^{-1}\alpha\beta'}{1+\beta'A^{-1}\alpha}$$

由上式并应用定理 2 及 (8) 式得到：

$$(A+\alpha\beta')^{-1}=[I_n-(A^{-1}\alpha)(-\beta')]^{-1}A^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}}{1+\beta'A^{-1}\alpha} \tag{9}$$

(9) 式被称为**歇尔曼**(Sherman)－**摩利逊**(Morrison)公式，该公式在计算方法与最优化理论中都是有用的。

§3 矩阵的初等变换与初等阵

一、“八字规则”

矩阵的初等变换是指对 $m\times n$ 阵 A 作如下的三种变换：

1. 对调 A 的第 i、j 两行(列)的位置($1\leqslant i,j\leqslant m$，或 $1\leqslant i,j\leqslant n$)。
2. 以一个非零数 C 乘 A 的第 i 行(列)($1\leqslant i\leqslant m$ 或 $1\leqslant i\leqslant n$)。
3. 将 A 的第 j 行(列)的 k 倍(k 是一个数)加到第 i 行(列)上去($1\leqslant i,j\leqslant m$ 或 $1\leqslant i,j\leqslant n$)。

分别称上述变换为第一、二、三种**初等行(列)变换**。

初等阵是指

1．对调单位阵的第 i 行(列)和第 j 行(列)的位置得到的方阵：

$$P_{ij}=\begin{array}{r}\\ \\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&0&&1&&\\&&&&\ddots&&&\\&&&1&&0&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \longleftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ (1\leqslant i,j\leqslant m\text{ 或 }1\leqslant i,j\leqslant n)\\ \longleftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

2．以非零数 c 乘单位阵的第 i 行（列）得到的方阵：

$$D_i(c)=\begin{array}{r}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&c&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \longleftarrow\text{第 } i \text{ 行}(1\leqslant i\leqslant m\text{或}1\leqslant i\leqslant n)\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

3．将单位阵的第 j 行（列）的 k 倍加到第 i 行（列）上得到的方阵：

$$T_{ij}(k)=\begin{array}{r}\\ \\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}&&&&j&&\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \longleftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\ \quad(1\leqslant i,j\leqslant m\text{ 或 }1\leqslant i,j\leqslant n)\\ \longleftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

分别称上述初等阵为第一、二、三种(初等变换相应的）初等阵。

矩阵的初等变换与初等阵的密切联系可由下列命题表出。

命题 矩阵 A 作一次初等行（或列）变换后得到的矩阵 B(或 C) 等于以一个相应的初等阵左（或右）乘 A，即 $B=PA$（或 $C=AP$），P 是相应的初等阵。

为便于记忆，上述关系可概括为**“左行右列，首尾为主”**的**八字规则**。“左行右列”意即：以初等阵 P 左乘 A 的结果（得到 B）相当于对 A 作相应的行变换；以初等阵 P 右乘 A 的结果（得到 C）相当于对 A 作相应的列变换。“首尾为主”是专对第三种初等变换来说的（它用得最多），即 $T_{ij}(k)$左乘 A 后使 A 的第 i 行变化，“i”位于$T_{ij}(k)$

下标之首；$T_{ij}(k)$右乘 A 致使 A 的第 j 列变化，而"j"位于$T_{ij}(k)$下标之尾。例如，将

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的第 1 行减去第 3 行（即将 A 的第 3 行的 -1 倍加到 A 的 第 1 行上）得到：

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

由八字规则，$B=T_{13}(-1)A$。

上述命题是很有用的，其原因在于：在很多问题中，往往把涉及非异阵的问题用初等变换来解决（参阅定理 5），下列两例即是。

例1. 证明三种初等阵均非异，并求其逆。

证 由八字规则，可以看出：

$$P_{ij}P_{ij}=I;\quad D_i(c)D_i(c^{-1})=I;\quad T_{ij}(k)T_{ij}(-k)=I$$

故三个初等阵均非异，且

$$P_{ij}^{-1}=P_{ij};\quad D_i(c)^{-1}=D_i(c^{-1});\quad T_{ij}(k)^{-1}=T_{ij}(-k)$$

例2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明：必定存在 2 阶非异阵 P，使 $P^{-1}AP=B$。

证 若 P 存在，则由定理 5，P 可表为有限个初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 的乘积：$P=P_1P_2\cdots P_s$。反之，若能找到有限个初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 使 $P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2\cdots P_s=B$，则记乘积 $P_1P_2\cdots P_s=P$，它就是所要求的 2 阶非异阵。故问题归结为能找出初等阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$，使

$$P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2\cdots P_s=B$$

（这里还用了定理 2），按照八字规则，问题归结为能否由 A 作初等变换以及（紧接着作）它的逆变换，并经有限次这种成对变换后得到 B。今先作 A 的行变换，将 A 的第 2 行加到第 1 行上去，得到：

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}=B_1$$

用初等阵来描述，即

$$B_1=T_{12}(1)A$$

又由计算

$$T_{12}(1)AT_{12}(-1)=B_1T_{12}(-1),$$

故应对 B_1 作相应的列的逆变换。根据八字规则，即将 B_1 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列上，得到

$$B_1=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}=B_2$$

即

$$B_2=B_1T_{12}(-1)=T_{12}(1)AT_{12}(-1)$$

再将 B_2 的第 1 行的 $-1/2$ 倍加到 B_2 的第 2 行上，得到

$$B_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=B_3$$

$\left(即\ B_3=T_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)B_2\right)$，然后作相应的列的逆变换：将 B_3 的第 2 列的 $\frac{1}{2}$ 倍加到 B_3 的第 1 列上去，得到

$$B_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=B$$

$\left(即\ B=B_3T_{21}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$，故得

$$\begin{aligned}B&=B_3T_{21}\left(\frac{1}{2}\right)=T_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)B_2T_{21}\left(\frac{1}{2}\right)\\&=T_{21}\left(-\frac{1}{2}\right)T_{12}(1)AT_{12}(-1)T_{21}\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

于是

$$P=T_{12}(-1)T_{21}\left(\frac{1}{2}\right)$$

就是所要求的非异阵。

仿上法，对n阶阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots\cdots&&&\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}n&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\cdots\cdots&&&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

仍然可证：存在n阶非异阵P，使$P^{-1}AP=B$。本例除了用初等变换方法外，用方阵的标准形理论也是容易证明的（见第四章习题3），不过，用初等变换还可求出P的具体形状。

除了八字规则的运用（经常与定理5联用）外，定理3［即(3)式］也是常用的理论。如下两例所示。

例3. 设A是n阶阵，如果存在n阶阵B，使$AB=I_n$，则必有$BA=I_n$。

证 由定理3，存在n阶非异阵P与Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{10}$$

以$Q^{-1}B$左乘上式两边，并由假设可得

$$P=PI_n=PAB=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{-1}B$$

于是

$$I_n=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q^{-1}BP^{-1} \tag{11}$$

由上式可知，必有$r=n$。不然的话，至少$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$的最后一行是零，故（11）式右边的第$n$行$n$列元素是0，但$I_n$的第$n$行第$n$列元素是1，此为矛盾，于是（10）、（11）两式可分别化简为：

$$PAQ=I_n,\qquad Q^{-1}BP^{-1}=I_n,$$

由上两式即得：$Q^{-1}BAQ=I_n$，故得

$$BA=QI_nQ^{-1}=I_n$$

例4. 设A是非零奇异阵，则必定存在非零奇异阵B，使$AB=0$。

证 对 A 成立(10)式。又因 A 奇异，故由定理4知：$0<r<n$，令

$$B=Q\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}.$$

由于$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$不是零阵，而 Q 是非异阵，故 $B\neq 0$，又因为 $0<r<n$，故至少 B 的第一列是零，因而 B 是奇异阵，并且

$$AB=P^{-1}(PAB)=P^{-1}(PAQ)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$$
$$=P^{-1}\cdot 0=0$$

二、分块阵的初等变换

将一个 $m\times n$ 阵 M 分成如下四块：

$$M=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s & n-s\end{array}\\ \begin{array}{c} r\\ m-r\end{array} & \begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}\end{array}$$

再进行各种变换与运算，是矩阵中最常用的方法，对上述 2×2 分块阵，定义下列三种初等变换：

（i）将分块阵 M 的两行（列）对调。

（ii）将非异阵$C_1(C_2)$左（右）乘 M 的某一行（列）。

（iii）将非零阵$K_1(K_2)$左（右）乘 M 的某一行（列）加到另一行（列）上，分别称上述三种初等行（列）变换为**分块阵的初等行(列)变换**。

今后常用分块阵的初等变换处理矩阵问题，今先举一例。

例5. 设 A 与 C 分别是 r 阶与 $n-r$ 阶非异阵，B 是$(n-r)\times r$ 阵，

证明：$M=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n-r & r\end{array}\\ \begin{array}{c} r\\ n-r\end{array} & \begin{pmatrix}O & A\\ C & B\end{pmatrix}\end{array}$是非异阵，并求 M^{-1}。

证 对 $n\times 2n$ 阵，(M,I_n)，作如下分块阵的初等变换：

$$(M,I_n)=\left(\begin{array}{cc:cc}0 & A & I_r & 0\\ C & B & 0 & I_{n-r}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1、2 两行对调}} \begin{pmatrix} C & B & \vdots & 0 & I_{n-r} \\ 0 & A & \vdots & I_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第 1 行上}]{\text{以} -BA^{-1}\text{左乘第 2 行}} \begin{pmatrix} C & 0 & \vdots & -BA^{-1} & I_{n-r} \\ 0 & A & \vdots & I_r & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{且以} A^{-1}\text{左乘第 2 行}]{\text{以} C^{-1}\text{左乘第 1 行}} \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0 & \vdots & -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \\ 0 & I_r & \vdots & A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

由定理 6 可知 M 是非异阵，并且

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

同例 5 的方法，当 A 与 C 均是非异阵时（它们未必同阶），则可证$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$也是非异阵，且

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

§4 矩阵理论中的六大基本方法

一、六大方法简述

处理矩阵问题方法尽管多种多样，但关键的基本方法有六个，它们是：

第一，矩阵分块的方法；

第二，初等变换的方法；

第三，降阶与升阶的方法；

第四，运用标准单位向量的方法；

第五，运用特征值的方法；

第六，运用矩阵标准形的方法。

这六者之中，核心的思想方法是降阶法。降阶的思想，不仅在线代数

的解析理论中占有极重要的地位，且在线代数的“几何”理论中也是重要的。

这六大方法又经常是若干个联合运用的，特别是矩阵的分块与初等变换的思想与方法，可说是两个必不可少的有力工具，它们贯穿在其他方法的运用中，这两个方法的作用，在前几节中已可略窥其一、二。以后（特别是下一章）将经常用到它们。关于第五、第六两种方法，将在第五～九章中详加论述，以下将介绍第三、第四两种方法，重点是介绍第四个方法（对于降阶方法，以后将逐步展开）。

二、降阶与升阶的方法

降阶的基本思想很简单，即将高阶矩阵问题化为低阶矩阵问题。实现这一思想的步骤，是将原矩阵 M 用若干初等变换化为“分块上（或下）三角阵”：

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \quad \left(\text{或}\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}\right)$$

再由低阶阵 M_1、M_2、M_3 按问题的要求来处理。例如定理 3 就是把原矩阵 A（用非异阵 P 左乘、非异阵 Q 右乘）化为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，化简后的作用已在 §4 中初步看到。又如非异阵的求逆问题，也可用降阶的方法处理，如下例所示。

例1. 设 n 阶阵

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}$$

且 A 与 $D-CA^{-1}B$ 都是非异阵（未必同阶），证明 M 是非异阵，并求 M^{-1}。

证 用分块阵的初等变换，以 $-CA^{-1}$ 左乘$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的第一行，并加到第二行上去，得到$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$，由（类似的）′八字规则，可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \qquad (14)$$

当 A 与 $D-CA^{-1}B$ 都是非异阵时，由例 5 的说明可知$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$是非异阵，且由（13）式可得：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

由（14）式并应用定理 2 即知$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$是非异阵，且

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B) \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

本例说明，在所设条件下，可把高阶方阵的求逆化为低阶方阵求逆。我们常称（16）式为**方阵求逆的第一降阶定理。**

由于矩阵的复杂性，有时反把矩阵作适当的“升阶”，使升阶后的矩阵问题较易处理，然后由此解决原矩阵的问题。为了说明这个问题，下面用升阶方法再来证明 § 3 例 4 的歇尔曼-摩利逊公式(即(9)式）如下：

将 n 阶阵 $A+\alpha\beta'$ 升阶为 $n+1$ 阶阵：$\begin{pmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & A+\alpha\beta' \end{pmatrix}$，今先证明这个方阵是非异阵，且求出其逆。对于分块阵

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -\beta' & 1 & 0 \\ 0 & A+\alpha\beta' & 0 & I_n \end{array}\right)$$

作如下的初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta' & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & A+\alpha\beta' & \vdots & 0 & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{加到第二行}]{\text{以 }\alpha\text{ 左乘第一行}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta' & \vdots & 1 & 0 \\ \alpha & A & \vdots & \alpha & I_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{加到第一行上}]{\text{以 }\beta'A^{-1}\text{ 左乘第二行}} \begin{pmatrix} 1+\beta'A^{-1}\alpha & 0 & \vdots & 1+\beta'A^{-1}\alpha & \beta'A^{-1} \\ \alpha & A & \vdots & \alpha & I_n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{以}\frac{-\alpha}{1+\beta'A^{-1}\alpha}\text{左乘第一行，加到第二行上}}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\beta'A^{-1}\alpha & 0 & \vdots & 1+\beta'A^{-1}\alpha & \beta'A^{-1} \\ 0 & A & \vdots & 0 & I_n-\dfrac{\alpha\beta'A^{-1}}{1+\beta'A^{-1}\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{以}(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}\text{与 }A^{-1}\text{ 分别左乘第一行与第二行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & \dfrac{\beta'A^{-1}}{1+\beta'A^{-1}\alpha} \\ 0 & I_n & \vdots & 0 & A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}}{1+\beta'A^{-1}\alpha} \end{pmatrix}.$$

由定理 6 知，$\begin{pmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & A+\alpha\beta' \end{pmatrix}$是非异阵，且

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & A+\alpha\beta' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\beta'A^{-1}}{1+\beta'A^{-1}\alpha} \\ 0 & A^{-1}-\dfrac{A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}}{1+\beta'A^{-1}\alpha} \end{pmatrix} \tag{17}$$

若把（17）式右端的矩阵记为$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$，即记

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & A+\alpha\beta' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

则由

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & A+\alpha\beta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

可得$(A+\alpha\beta')D_1=I_n$，故 $A+\alpha\beta'$ 也是非异阵。于是由（13）式可得

$$\begin{pmatrix}1 & -\beta \\ 0 & A+\alpha\beta'\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\beta'(A+\alpha\beta')^{-1} \\ 0 & (A+\alpha\beta')^{-1}\end{pmatrix} \tag{18}$$

比较（17）与（18）式右端 2×2 分块阵的第二行第二列元素，即得歇尔曼-摩利逊公式。

由原矩阵如何升阶的问题，当然要视原矩阵的形状及所要解决的问题而定。一般说来，它是比较复杂的。上述由 $A+\alpha\beta'$ 升阶为 $\begin{pmatrix}1 & -\beta' \\ 0 & A+\alpha\beta'\end{pmatrix}$ 的做法却比较容易想到，因为我们希望把 $A+\alpha\beta'$ 的第二项矩阵 $\alpha\beta'$ 消掉，以充分利用 A 的非异性。

三、标准单位向量

定义 称 n 维列向量（即 $n\times1$ 阵）：

$$e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} j\text{行}, \qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

为（第 j 个）**n 维标准单位向量**。

今后，若不指明标准单位向量的维数，则总认为它的维数满足可乘的条件。

标准单位向量有下述基本性质：

1. $e'_i e_j=\delta_{ij}$； $\qquad i,j=1,2,\cdots,n \qquad (19)$

这里 $\delta_{ii}=1$， $\delta_{ij}=0$， $i\neq j$

2. 对任一 $m\times n$ 阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，恒有

$$Ae_j=a_j; \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{20}$$

$$e'_i A=\tilde{a}_i; \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{21}$$

$$e'_i Ae_j=a_{ij} \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{a}_j$ 为 A 的第 j 列，$\widetilde{\boldsymbol{a}}_i$ 为 A 的第 i 行。

证　(19) 式是明显的。今将 A 按它的列分块：

$$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

则

$$A\boldsymbol{e}_j=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}_j.$$

同理，将 A 按它的行分块：

$$A=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{a}}_1\\ \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i\\ \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_n\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{e}'_iA=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{a}}_1\\ \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_i\\ \vdots\\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m\end{pmatrix}=\widetilde{\boldsymbol{a}}_i$$

又由 (20) 与 (21) 式可得

$$\boldsymbol{e}'_iA\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}'_i\boldsymbol{a}_j=a_{ij}$$

(因 $\boldsymbol{a}_j$ 的第 i 行就是数 a_{ij})。

从 $m\times n$ 阵 A 中依次取出 i_1 行、i_2 行；…、i_k 行；j_1 列、j_2 列、

…、j_l 列($1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$; $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_l\leqslant n$)。将它们按照 A 的原来相对位置排成一个 $k\times l$ 阵:

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_l} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_2j_l} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_l} \end{pmatrix} \tag{23}$$

称为 A 的**子矩阵**。它与原矩阵有如下关系式:

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_l} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_l} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} A(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \cdots, \mathbf{e}_{j_l}) \tag{24}$$

证 由分块阵的乘法以及(22)式,

$$\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} A(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \cdots, \mathbf{e}_{j_l}) = \begin{pmatrix} e'_{i_1}Ae_{j_1} & e'_{i_1}Ae_{j_2} & \cdots & e'_{i_1}Ae_{j_l} \\ e'_{i_2}Ae_{j_1} & e'_{i_2}Ae_{j_2} & \cdots & e'_{i_2}Ae_{j_l} \\ \cdots\cdots & & & \\ e'_{i_k}Ae_{j_1} & e'_{i_k}Ae_{j_2} & \cdots & e'_{i_k}Ae_{j_l} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_l} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_l} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_l} \end{pmatrix}$$

当 $k=l$ 时,子矩阵(23)简记为

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

由(24)式可得:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} A(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_k})$$

……………………………………………………(25)

当 $j_1=i_1,\ j_2=i_2,\ \cdots,j_k=i_k$ 时，称 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$为 A的**主子阵**。

(20)、(21)、(22)、(24)、(25) 五个式子表明，标准单位向量把 A 的任一列、任一行、任一元素、任一子矩阵(前三者自然也是子矩阵)与A 联系起来，这将为以后的讨论提供很大帮助。以下九个例子将进一步显示标准单位向量的作用。

例2. 求n阶弗罗本尼乌斯矩阵F (见 (4) 式) 的k次幂，$2\leqslant k\leqslant n$。

解 因 F 可写成:

$$F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\alpha)$$

其中 $\alpha=(-a_n,-a_{n-1},-a_{n-2},\cdots,-a_1)'$。由 (20) 式可得

$$e_i=Fe_{i-1},\quad i=2,3,\cdots,n \tag{26}$$

$$\alpha=Fe_n \tag{27}$$

由 (26) 的诸式还可得

$$e_i=F^{i-1}e_1,\quad i=2,3,\cdots,n \tag{28}$$

今设

$$F^k=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

则由 (26) 与 (28) 式，并应用 (20) 式可得

$$\beta_i=F^ke_i=F^k(Fe_{i-1})=F(F^ke_{i-1})=F\beta_{i-1},\ (1\leqslant i\leqslant n) \tag{29}$$

并且

$$\beta_1=F^ke_1=e_{k+1},\quad 当\ k\leqslant n-1 \tag{30}$$

又当 $k=n$ 时，由 (27)、(28) 式可得

$$\beta_1=F^ne_1=F(F^{n-1}e_1)=Fe_n=\alpha \tag{31}$$

故只要由 (30) 或 (31) 式算出β_1，则由 (29) 式就可算出其他β_i，从而算出 $F^k(k\leqslant n)$。

这个方法告诉我们，不必先逐次求出 F^2、F^3、…、F^{k-1} 再求 F^k，而可直接求出 F^k，只要 $k\leqslant n$。

例3. 设 A' 是 A 的转置阵，证明

$$\left(A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right)'=A'\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \tag{32}$$

证 应用（25）式可得

$$\left(A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right)' = \left[\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} A(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_k})\right]'$$

$$= \begin{pmatrix} e'_{j_1} \\ e'_{j_2} \\ \vdots \\ e'_{j_k} \end{pmatrix} A'(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}) = A'\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

称 $P_{j_1j_2\cdots j_n} = (e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_n})$为 n 阶**排列阵**.这里，$j_1j_2\cdots j_n$是1，2，…，n 这 n 个数的任意一个排列。

例4. 证明：n 阶排列阵是正交阵。

证 应用（19）式可得

$$P'_{j_1j_2\cdots j_n}P_{j_1j_2\cdots j_n} = \begin{pmatrix} e'_{j_1} \\ e'_{j_2} \\ \vdots \\ e'_{j_n} \end{pmatrix}(e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

例5. 设 A 是 $m\times n$ 阵。证明：若对任一 n 维列向量 x，恒有 $Ax=0$，则必有 $A=0$。

证 既然对任一 n 维列向量 x，也就是对所有的 n 维列向量 x，恒有 $Ax=0$，那末，特别对其中的 n 维列向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，也应有：

$$Ae_j = 0,\ j=1,2,\cdots,n$$

由（20）式可知：Ae_j 是 A 的第 j 列，故 $A=0$。

本例从特殊推至一般，这是个常用的推理方法，而用好这一方法的关键是要善于运用“特殊性”。对本例来说就是要取 e_j 这一“特殊性”。这种“特殊性”要因问题的不同而异，如下列两例所示。

例6.[4] 若对所有的 n 维列向量 x，恒有 $x'Ax=0$。证明：A 必满足 $A'=-A$（称满足条件 $A'=-A$ 的实阵 A 是**反对称阵**）。

证 将要证的等式 $A'=-A$，用其元素来表达，就是要证：$a_{ii}=0$，$a_{ij}=-a_{ji}$， $i\neq j$， $i,j=1,2,\cdots,n$。

仿例 5 证法，特别取 $x=e_i$，则由 $e_i'Ae_i=0$，即得 $a_{ii}=0$（应用（22）式）。再取 $x=e_i+e_j$，$i\neq j$，则由

$$0=(e_i+e_j)'A(e_i+e_j)=e_j'Ae_i+e_i'Ae_j$$

即得 $a_{ij}=-a_{ji}$。

例 6 中的第二步，取 $x=e_i+e_j$ 是值得注意的。这种借用 $(e_i+e_j)'\cdot A(e_i+e_j)$ 为过渡以推出 $e_i'Ae_j$ 与 $e_j'Ae_i$ 之关系的想法，在以后还会遇到。

例7. 证明：与所有 n 阶非异阵可交换的 n 阶阵 A 必为**纯量阵**（或称**数量阵**）：$A=kI_n$。

证 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

今特别取非异阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}=(e_1,2e_2,\cdots,ne_n)=\begin{pmatrix} e_1' \\ 2e_2' \\ \vdots \\ ne_n' \end{pmatrix}$$

由假设，$AB=BA$，即

$$A(e_1,2e_2,\cdots,ne_n)=\begin{pmatrix} e_1' \\ 2e_2' \\ \vdots \\ ne_n' \end{pmatrix}A$$

应用（20）、（21）两式，上式就是

$$ia_{ij}=ja_{ij}$$

故当 $i\neq j$ 时，

$$a_{ij}=0;\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

于是 A 必须是对角阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

再取非异阵

$$P_{ij}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\quad i & \quad j \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}=(e_1,\cdots,e_{i-1},e_j,e_{i+1},\cdots,e_{j-1},e_i,e_{j+1},\cdots,e_n)$$

由 $AP_{ij}=P_{ij}A$，即得 $a_{ii}=a_{jj},i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$。故 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$。所以 $A=kI_n$。其中 $k=a_{11}$。

若在例 7 中，取非异阵为

$$B_{ij}=(e_1,\cdots,e_{i-1},e_j,e_{i+1},\cdots,e_{j-1},-e_i,e_{j+1},\cdots,e_n)$$

$$i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n。$$

则由 $AB_{ij}=B_{ij}A$ 亦可证得 $A=kI_n$。熟悉标准单位向量运用的读者，请自行证之。

例8. 设 F 是 n 阶弗罗本尼乌斯矩阵。证明：对适合不等式 $1\leqslant s\leqslant n$ 的任一正整数 s 以及任意 $s+1$ 个不全为零的数 b_0、b_1、$\cdots$、b_s，必有

$$b_sF^s+b_{s-1}F^{s-1}+\cdots+b_1F+b_0I_n\neq 0$$

证 记 $A=b_sF^s+b_{s-1}F^{s-1}+\cdots+b_1F+b_0I_n$，下面证明 A 中至少有一列非零，由于

$$Ae_1=b_sF^se_1+b_{s-1}F^{s-1}e_1+\cdots+b_1Fe_1+b_0e_1,$$

故当 $s+1\leqslant n$ 时，应用（28）式，将上式化为：

$$Ae_1=b_se_{s+1}+b_{s-1}e_s+\cdots+b_1e_2+b_0e_1$$

$$=\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

因 b_0、b_1、$\cdots$、b_s 不全为零，故 Ae_1（即 A 的第 1 列）非零。于是 $A\neq 0$。

对照例 5 与本例可见，欲证矩阵 $A=0$，可证 A 的每一列（行）全为 0；欲证 $A\neq 0$，可证 A 中至少有一列（行）非零。当然，如能证明 A 中至少有一非零元素，则可以更快地证得 $A\neq 0$。

例9. 设 n 阶阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \\ n-1 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

我们称 A 为基础循环阵。证明：

$$A^k=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (k=1,2,\cdots,n-1) \tag{33}$$

$$A^n=I_n \tag{34}$$

证 因为 A 可写成：$A=(e_n,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1})$，故由（20）式得：

$$Ae_1=e_n,\ Ae_s=e_{s-1};\ s=2,\cdots,n \tag{35}$$

今对 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$用归纳法。$k=1$ 时，（33）式正确。设对 $k-1$，（33）式正确，即

$$A^{k-1}=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-k+1} \\ I_{k-1} & 0 \end{pmatrix}=(e_{n-k+2},e_{n-k+3},\cdots,e_n,e_1,e_2,\cdots,e_{n-k+1})$$

于是，由（35）诸式可得：

$$\begin{aligned} A^k=AA^{k-1}&=A(e_{n-k+2},e_{n-k+3},\cdots,e_n,e_1,e_2,\cdots,e_{n-k+1}) \\ &=(Ae_{n-k+2},Ae_{n-k+3},\cdots,Ae_n,Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_{n-k+1}) \\ &=(e_{n-k+1},e_{n-k+2},\cdots,e_{n-1},e_n,e_1,e_2,\cdots,e_{n-k}) \\ &=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

再应用（35）诸式可得

$$\begin{aligned} A^n=AA^{n-1}&=A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}=A(e_2,e_3,\cdots,e_n,e_1) \\ &=(e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},e_n)=I_n \end{aligned}$$

此外，我们还称 n 阶阵

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \cdots\cdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{pmatrix}$$

为**循环阵**。

例10 证明：任意两个循环阵的乘积仍是循环阵。

证 因 C 可表示为下式：

$$C=c_0I_n+c_1\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0 & I_{n-2}\\ I_2 & 0\end{pmatrix}+\cdots+c_{n-2}\begin{pmatrix}0 & I_2\\ I_{n-2} & 0\end{pmatrix}+c_{n-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ I_{n-1} & 0\end{pmatrix}$$

应用（33）诸式，上式可改写为

$$C=c_0I_n+c_1\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2+\cdots+c_{n-2}\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}$$

$$+c_{n-1}\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}$$

若

$$D=d_0I_n+d_1\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2+\cdots+d_{n-2}\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}+$$

$$d_{n-1}\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}$$

表示另一循环阵，则由（34）式可知

$$CD=b_0I_n+b_1\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2+\cdots+b_{n-2}\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}+$$

$$b_{n-1}\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}$$

仍是循环阵。

标准单位向量在多方面的运用告诉我们，它的定义和结论虽然都

很简单，但在矩阵问题的处理中，却是不可忽视的“基本功”。在以后的不少章节中，将继续运用它。

习　题

1．试找出 n 阶阵 $A\neq 0$，$B\neq 0$，使 $A^2+B^2=0(n\geqslant 2)$。（提示：A 与 B 的取法甚多，例如取 A 的第一行第一列元素为 1，其余元素为 0；取 B 的第一行第一列元素为 $\sqrt{-1}$，其余元素为 0）。

2．设 a_1，a_2 都是复数，称方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\overline{a_2} & \overline{a_1} \end{pmatrix} \quad (\overline{a_i}\text{为 } a_i \text{ 的共轭复数})$$

为**四元数矩阵**，又设

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -\overline{b_2} & \overline{b_1} \end{pmatrix}$$

为另一四元数矩阵，证明：

（i）$A\cdot B$ 也是四元数矩阵，即四元数矩阵类的方阵保持乘积性质（参阅 §4 例10）；

（ii）若 a_i，b_i 为实数（$i=1,2$），则 $AB=BA$；

（iii）若 a_i，b_i 是复数（$i=1,2$），则未必有 $AB=BA$。

3．（i）设 α 是 n 维复列向量，且 $\overline{\alpha}'\alpha=0$，证明 $\alpha=0$。并由此证明：若 A 是 $m\times n$ 复矩阵，且 $\overline{A}'A=0$，则 $A=0$。

（ii）设 A 是 $m\times n$ 阵，x 是 n 维列向量，则 $Ax=\mathbf{0}$ 的充要条件是，$\overline{A}'Ax=\mathbf{0}$。

4．设 S 是 n 阶反对称实阵（即满足 $S'=-S$ 的实阵），证明：对任何 n 维列向量 x，恒有 $x'(I_n+S)x\geqslant 0$。

（提示：先证 $x'Sx=0$）。

5．设 n 阶阵 A 满足 $A^2=A$（称 A 为**幂等阵**），证明 I_n-2A 是非异阵，并求 $(I_n-2A)^{-1}$。

（提示：由假设可得：$-A+A^2=0$，于是 $-4A+4A^2=0$，再设法用“和化积”的方法）

6．设 A、B 以及 $A+B$ 都是非异阵，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也是非异阵，且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$。

7．分别对满足下列恒等式的方阵 A，证明：$I-A$ 是非异阵，并求 $(I-A)^{-1}$：

（i）$A^2-A+I=0$，

（ii）$A^k=0$（k 是正整数）。

（提示：对(ii)，将 $A^k=0$ 化为 $I^k-A^k=I$。）

8．设 A、B 以及 $AB-I$ 都是非异阵，证明：

（i）$A-B^{-1}$ 为非异阵。

（ii）$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 也是非异阵，并求 $[(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}]^{-1}$。

9．设 U 与 V 都是 n 阶正交阵，D 是 r 阶非异阵 $(r\leqslant n)$，且

$$U'\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U=V'\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$$

证明：

$$U'\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U=V'\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$$

（提示：将假设的矩阵等式改写为：$W\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}W'$，其中 $W=VU'$，且 W 是正交阵。于是，要证的等式就是：$W\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}W'$。作分块：$W=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{pmatrix} \end{array}$，再对 $W\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}W'$ 进行分块运算，并运用 D 的非异性即得证。）

10．设 $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i=a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，$n>1$。证明

$$M=\begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots\cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

是非异阵，并求 M^{-1}。

（提示：将M表成

$$M=\begin{pmatrix} -a_1 & & & \\ & -a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

然后设法应用歇尔曼-摩利逊公式。）

11．证明下列 n 阶阵均是非异阵，并求它们的逆阵。

（i）

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}，其中 \prod_{i=1}^{n} a_i\neq 0$$

（ii）

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}，其中 a_n\neq 0$$

（提示：设法将F适当分块，使其能应用（12）式。）

12．设 A 与 C 是非异阵（未必同阶）。

（i） 证明：方阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$是非异阵，并求其逆。

（ii） 证明：方阵$\begin{pmatrix} D & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$是非异阵，并求其逆。

13．证明：与所有n阶阵可交换的阵A必是纯量阵。（提示：用例7的结论立即得证，若不用该结论，则特别取n阶阵$E_{ij}=(0,0,\cdots,e_{ij},0,\cdots,0)$，即$E_{ij}$是第$i$行第$j$列元素为1，与其余元素均为0的$n$阶阵。由$AE_{ij}=E_{ij}A$，即可得$A$是纯量阵。）

14．设n阶阵：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{array}{c} \\ n-1 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

证明：

$$A^k=\begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ k=1,2,\cdots,n-1$$

$$A^n=0。$$

15．设A与B均为$m\times n$阵，证明：若对任一$n\times p$阵C，恒有$AC=BC$，则$A=B$。

16．设A为$m\times n$阵，$\mathbf{b}$为m维列向量，若对任何非零的n维列向量x，恒有$A\mathbf{x}=b$，求证：$A=0,b=0$。

17．证明：若矩阵A非零，则必存在非零列向量α与β，使$\alpha'A\beta\neq0$。

18．设A与B为同阶实方阵，且A及$C=A-\sqrt{-1}\,B$都是非异阵（由定理1，显然$\overline{C}=A+\sqrt{-1}\,B$也是非异阵）。证明$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$是非异阵。并且

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} C^{-1}-\sqrt{-1}\,\overline{C}^{-1}BC^{-1} & \sqrt{-1}\,(C^{-1}-\overline{C}^{-1}-\sqrt{-1}\,\overline{C}^{-1}BC^{-1}) \\ \overline{C}^{-1}BC^{-1} & \overline{C}^{-1}+\sqrt{-1}\,\overline{C}^{-1}BC^{-1} \end{pmatrix}$$

（提示：对$M=\left(\begin{array}{cc:cc} A & B & I & 0 \\ -B & A & 0 & I \end{array}\right)$用分块阵的初等变换，以$\sqrt{-1}\,I$左

乘 M 的第二行加到第一行上去，…，最后变换成 $\begin{pmatrix} I & 0 & \vdots & G \\ 0 & I & \vdots & \end{pmatrix}$ 的形状。）

19．设 A 与 D 分别是 r 阶与 s 阶非异阵，B 与 C 分别是 $r\times s$ 与 $s\times r$ 阵，证明：

（i）若 $D-CA^{-1}B$ 是非异阵，则 $A-BD^{-1}C$ 也是非异阵，且

$$(A-BD^{-1}C)^{-1}=A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

注意：若在上式中取 B 为 n 维列向量 α，D 为 -1，C 为 n 维行向量 β'，即得歇尔曼-摩利逊公式。

（提示：仿§4中推导歇尔曼-摩利逊公式的方法，把 $A-BD^{-1}C$ 升阶为 $\begin{pmatrix} I_r & D^{-1}C \\ 0 & A-BD^{-1}C \end{pmatrix}=M$，用分块阵的初等变换证明 M 非异，并求出 M^{-1}，从中可得所要证明的结论。）

20．设 A、B、C、D 都是同阶非异阵，且 $D-CA^{-1}B$ 是非异阵，证明：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，$A-BD^{-1}C$，$C-DB^{-1}A$，$B-AC^{-1}D$ 是非异阵，且

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

（提示：应用题 19 及例 6 中的（16）式。）

第二章　行　列　式

§1　基本概念与基本结论

本章的基本概念是，n 阶行列式以及它的一些子式。

n 阶行列式的定义方法有四种，大多数书中如下定义：

定义　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶阵，当 $n=1$ 时，称 a_{11} 为 1 阶行列式（或 1 级行列式）；当 $n>1$ 时，称

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1)$$

为 n 阶行列式（或 n 级行列式）。也称 D_n 为**方阵 A 的行列式**，记为：$D_n=|A|$，或 $D_n=\det A$。此处 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，$\sum$ 系对所有 $n!$ 个不同的排列求和，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前取正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 前取负号。

定义　设 $A\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_k \\ j_1j_2\cdots j_k \end{pmatrix}$ 是 $m\times n$ 阵 A 的子矩阵，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$；$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$，称行列式 $\left|A\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_k \\ j_1j_2\cdots j_k \end{pmatrix}\right|$ 为 A 的 k 阶**子行列式**，简称为 k 阶**子式**。当 $m=n$ 时，也称 $\left|A\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_k \\ j_1j_2\cdots j_k \end{pmatrix}\right|$ 为 n 阶行列式 $|A|$ 的 k 阶子式。

特别称 $\left|A\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_k \\ i_1i_2\cdots i_k \end{pmatrix}\right|$ 为 A 的（或 $|A|$ 的）k 阶**主子式**，称 $\left|A\begin{pmatrix} 12\cdots k \\ 12\cdots k \end{pmatrix}\right|$ 为 A 的（或 $|A|$ 的）k 阶**顺序主子式**。

由上定义可知，$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$是位于 A（或$|A|$中的i_1、i_2、$\cdots i_k$ 行与 j_1、j_2、$\cdots j_k$ 列的交叉点上的 k^2 个元素按照 A（或$|A|$）中原来的相对位置排成的一个 k 阶行列式。

用$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$表示 k 阶子式的优点是，含意清晰，便于运用，节省篇幅。

例 1　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则易知 n 阶行列式$|A|$可表成：

$$|A|=\left|A\begin{pmatrix}12\cdots n\\ 12\cdots n\end{pmatrix}\right|$$

因此$|A|$也可看作 A（或$|A|$的）n 阶顺序主子式。

例 2　4 阶行列式

$$\left|A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

的位于第 2、3 两行与第 2、4 两列的 2 阶子式为：

$$\left|A\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{32}&a_{34}\end{vmatrix}$$

定义　设 $A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}$是 n 阶阵 $A=A\begin{pmatrix}1&2\cdots n\\1&2\cdots n\end{pmatrix}$的 k 阶子矩阵，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$；$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$。若划掉 $A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}$在 A 中所在的 i_1、i_2、$\cdots$、i_k 行以及所在的 j_1、j_2、$\cdots$、j_k 列，则得到一个 $n-k$ 阶阵，称为 $A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}$的**余子阵**，记为 $A_C\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}$。称 $n-k$ 阶行列式$\left|A_C\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$为$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$（在$|A|$中，或 A 中）的**余子式**。

定义　记

$$\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}\cdot\left|A_C\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right| \quad (2)$$

称$\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$为$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$（在$|A|$中，或 A 中）的**代数余子**

式。

例 3 $\left|A\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}\right|$ $\left(\text{在}\left|A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\right|\text{中}\right)$ 的余子式与代数余子式分别是：

$$\left|A_c\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}\right|=\left|A\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix}\right|,$$

$$\left|\hat{A}_c\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}\right|=(-1)^{(2+3)(2+4)}\left|A_c\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}\right|=-\left|A\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix}\right|$$

通常，分别记$|A|$的 1 阶子式 $a_{ij}=\left|A\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}\right|$的余子式与代数余子式为 M_{ij} 与 A_{ij}，即

$$M_{ij}=\left|A_c\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}\right|=\left|A\begin{pmatrix}1\cdots(i-1)(i+1)\cdots n\\1\cdots(j-1)(j+1)\cdots n\end{pmatrix}\right|$$

$$A_{ij}=\left|\hat{A}_c\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}\right|=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

本章的基本结论有四，第四个基本结论将在§5 中详述，而将前三个基本结论写成下面的定理 1、2、3。

定理 1 n 阶行列式$|A|$有如下七个基本性质：

1. 行列式$|A|$与其转置行列式$|A'|$相等，即

$$|A|=|A'| \tag{3}$$

于是，凡对$|A|$的列成立的性质，对$|A'|$的列即$|A|$的行也成立，称$|A'|$为$|A|$的**转置行列式**。

2. 如$|A|$的某一列的每个元素均有因子 k，则可将 k 提出，即若$|A|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\alpha_j,\cdots,\alpha_n|$，而 $\alpha_j=k\beta_j$ （此处 α_j 是 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)$的第 j 列），则

$$|A|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},k\beta_j,\alpha_{j+1},\cdots\alpha_n|=k|\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\beta_j,\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n| \quad\cdots\cdots(4)$$

（由（4）式知，一列全为 0 之行列式必等于 0。）

3. 如果$|A|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots\alpha_n|$的第 j 列 α_j 是两列之和 $\alpha_j=\beta_j+\gamma_j$，则$|A|$可表为两个行列式之和：

$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\beta_j+\gamma_j,\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\beta_j,\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n|$$

$+|\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\gamma_j,\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n|$

$$\cdots\cdots(5)$$

4．两列相同的行列式$|A|$必为0。即

$$|A|=|\alpha_1,\cdots,\overset{j}{\alpha_j},\cdots,\overset{k}{\alpha_j},\cdots,\alpha_n|=0。\tag{6}$$

5．如果$|A|$的某两列成比例，则$|A|=0$。

6．将$|A|$的某列的k倍加到$|A|$的另一列上，所得行列式$|B|$与$|A|$相等。

7．互易$|A|$的两列后得出的行列式$|B|=-|A|$，即

$$|\alpha_1,\cdots,\overset{j}{\alpha_j},\cdots,\overset{k}{\alpha_k},\cdots,\alpha_n|=-|\alpha_1,\cdots,\overset{j}{\alpha_k},\cdots,\overset{k}{\alpha_j},\cdots,\alpha_n|。\tag{7}$$

定理2　设A与B都是n阶阵，则

$$|A|\cdot|B|=|AB|。\tag{8}$$

我们称（8）式为**行列式乘法规则**。

定理3　设A_{ij}是n阶行列式$|A|$的元素a_{ij}的代数余子式，则

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},1\leqslant j\leqslant n\tag{9}$$

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},1\leqslant i\leqslant n\tag{10}$$

我们称（9）（或（10））式为**$|A|$按它的j列（或i行）的展开式。**

除了上述三个主要的基本结论外，尚有一个基本结论，它是定理3的推广，它就是下面的：

拉普拉斯（Laplace）定理　n阶行列式$|A|$等于它的位于取定的某k个列(行)中的所有C_n^k个k阶子式与它的代数余子式的乘积之和。即

$$|A|=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\left|A_0\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_k\\j_1j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\hat{A}_0\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_k\\j_1j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|\tag{11}$$

$$|A|=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n}\left|A_0\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_k\\j_1j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\hat{A}_0\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_k\\j_1j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|\tag{12}$$

称（11）式((12)式)为**$|A|$按它的第j_1、j_2、…、j_k列（第i_1、i_2、…、i_k行）的展开式。**

在本书中尽量避免运用拉普拉斯定理，其原因是，本章主要结论的导出可以完全不用它。另外，也为了方便大多数未学这个定理的读

者，使他们可连贯地读下去。

§2 行列式乘法规则

在本书中，要经常运用行列式乘法规则。行列式乘法规则的证法至少有四种，本节将避免应用拉普拉斯定理，仅用初等变换及行列式的基本性质来证明它。其证法易懂，且其思路也是有用的。为此先证：

引理 设 P 是初等阵，A 是同阶方阵。则

$$|AP|=|A|\cdot|P| \tag{13}$$

证 由行列式的定义直接可知下列“上三角形行列式”。

$$|R|=\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{vmatrix}=r_{11}r_{22}\cdots r_{nn} \tag{14}$$

其中 R 是上三角阵。同样，可知“下三角形行列式”：

$$|L|=\begin{vmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \cdots\cdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{vmatrix}=l_{11}l_{22}\cdots l_{nn} \tag{15}$$

其中 L 是下三角阵。由（14）、（15）两式即知第二、三种初等阵的行列式的值是，

$$|D_i(c)|=1\cdots1\cdot c\cdot1\cdots1=c \tag{16}$$

$$|\mathrm{T}_{ij}(k)|=1\cdots1\cdots1=1 \tag{17}$$

又由（7）式可算出第一种初等阵 P_{ij} 的行列式：

$$\begin{aligned}|P_{ij}|&=|e_1\cdots,e_j,\cdots,e_i,\cdots,e_n|\\&=-|e_1,\cdots,e_i\cdots,e_j,\cdots,e_n|=-|I_n|=-1\end{aligned} \tag{18}$$

故由八字规则及（18）、（17）、（16）三式即得

$$|AP_{ij}|=-|A|=|A||P_{ij}|;\ |AD_i(c)|=c|A|$$
$$=|A|\cdot|D_i(c)|;\ |AT_{ij}(k)|=|A|=|A|\cdot|T_{ij}(k)|,$$

故得（13）式。

(13)式很有用。例如，我们只用行列式性质 2 到性质 6 以及(13)式，就可证得行列式性质 1（作为习题）。又如，由（13）式还可得：

推论 1 奇异阵之行列式等于 0 。

证 由第一章定理4，任何 n 阶奇异阵 B 可表成：$B=L\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{M}$，而 L 与 $\mathbf{M}$ 都是 n 阶非异阵，且 $r<n$。又因 $\mathbf{M}$ 非异，故由第一章定理5：$\mathbf{M}=\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\cdots\mathbf{M}_s$，此处 $\mathbf{M}_i$ 都是初等阵；$i=1,2,\cdots,s$。连续运用（13）式可得：

$$|B|=\left|L\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\cdots\mathbf{M}_s\right|=\left|L\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathbf{M}_1\cdots\mathbf{M}_{s-1}\right|\cdot|\mathbf{M}_s|$$

$$=\cdots=\left|L\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right||\mathbf{M}_1|\cdots|\mathbf{M}_s|,$$

因为 $r<n$，故 $L\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$的最后一列是零（向量），故由行列式性质2，$\left|L\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right|=0$。所以 $|B|=0$。

今证：$|AB|=|A|\cdot|B|$。如果 B 是奇异阵，则由上述证明知，

$$|AB|=\left|AL\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}M_1\cdots M_s\right|=\left|AL\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right||M_1|\cdots|M_s|$$

$$=0=|A|\cdot 0=|A|\cdot|B|$$

如果 B 是非异阵，则由第一章定理5，$B=B_1B_2\cdots B_t$，其中 $B_1,\cdots,B_t$ 都是初等阵。再连续运用（13）式，

$$|AB|=|AB_1\cdots B_{t-1}||B_t|=\cdots=|A||B_1||B_2|\cdots|B_t|$$

又因

$$|B|=|B_1\cdots B_{t-1}||B_t|=\cdots=|B_1||B_2|\cdots|B_t|$$

故得 $|AB|=|A||B|$。

今可用行列式来判断方阵的非异性，如下所述。

定理4. 方阵 A 非异（奇异）的充要条件是，$|A|\neq 0$（$|A|=0$）。

证 若 A 非异，则存在 B，使 $AB=I$，由行列式乘法规则，$|A|\cdot|B|=|AB|=|I|=1$，故 $|A|\neq 0$。反之，若 $|A|\neq 0$，则由推论1知，A 必是非异阵（因奇异阵的行列式为0）。

推论2. 设 A 与 C 分别是 m 阶阵与 n 阶阵（m 未必与 n 相同），B 是 $m\times n$ 阵，则

$$\begin{vmatrix}A & B\\ 0 & C\end{vmatrix}=|A|\cdot|C| \qquad (19)$$

证 由行列式乘法规则可得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{vmatrix}, \tag{20}$$

将$\begin{vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$依次按它的第 1、2、…、$m$列展开，即得$\begin{vmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix} = |C|$，又将$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$依次按它的第$m+n$行、$m+n-1$行、…、$n+1$行展开，得到$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = |A|$，故由（20）式即得（19）式。

应用行列式乘法规则，可将某些涉及两个方阵之和的行列式问题用“和化积”的思想予以解决（参阅第一章§2），如下例所示，

例1. 设A与B都是正交阵，且它们的行列式反号，则$A+B$必为奇异阵。

证 应用定理4，只要证$|A+B|=0$即可。由于A与B均是正交阵，故$AA'=I$；$B'B=I$，按照“和化积”的想法，并应用行列式乘法规则，即得

$$\begin{aligned} |A+B| &= |A(I+A'B)| = |A||I+A'B| \\ &= |A||(B'+A')B| = |A|\cdot|B'+A'|\cdot|B| \\ &= |A|\cdot|B|\cdot|(A+B)'| = |A||B||A+B| \end{aligned} \tag{21}$$

上述最后一步用了行列式性质1。又因

$$|A|^2 = |A||A'| = |AA'| = |I| = 1$$

而A是实方阵，因此$|A|$是实数，故由上式知，$|A| = \pm 1$，即任一正交阵的行列式等于± 1。今因$|A|$与$|B|$反号，所以$|A|\cdot|B| = -1$。于是（21）式化为：$|A+B| = -|A+B|$，所以$|A+B|=0$.

§3 伴随阵，用行列式求非异阵之逆阵

设$A=(a_{ij})_{n\cdot n}$是复阵，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，记

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称 adj$\underset{\sim}{A}$ 为 A 的**伴随阵**。伴随阵是处理行列式与矩阵问题时一个有用的过渡工具，伴随阵是由于下列原因引出的：

将 A 按它的列分块：$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n)$，由（6）式，

$$0=|\alpha_1,\cdots,\overset{j}{\alpha_j},\cdots,\overset{k}{\alpha_j},\cdots,\alpha_n|$$

$$=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & j & & k & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j}\cdots a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2j}\cdots a_{2j}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj}\cdots a_{2j}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \end{array},\quad j\neq k;j,k=1,2,\cdots,n$$

再将上式右端行列式按它的第 k 列展开，由定理 3 可得：

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0=0\cdot|A|,j\neq k;j,k=1,2,\cdots,n$$

将上述 n^2-n 个式子与（9）式的 n 个式子合起来即得：

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\delta_{jk}|A|;$$
$$j,k=1,2,\cdots,n \qquad \cdots\cdots(22)$$

将（22）的 n^2 个等式写成矩阵等式：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=|A|I_n \qquad (23)$$

仿上法，用两行相同的行列式等于 0 这一事实可得

$$a_{i2}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0=0\cdot|A|,i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n$$

上列诸式与（10）的几个式合起来，可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}|A|;i,j=1,2,\cdots,n$$

将（24）的 n^2 个式子也写成矩阵等式：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & \cdots\cdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=|A|I_n \qquad (25)$$

由（23）式与（25）式，伴随阵的概念自然随之而得。该两式合起来就得：

$$(\mathrm{adj}A)\cdot A = A\cdot \mathrm{adj}A = |A|\cdot I_n \tag{26}$$

当 A 是非异阵时，由定理 4：$|A|\neq 0$，故由（26）式得

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A \tag{27}$$

这就给出了用行列式求非异阵之逆的方法。

注意：（27）式主要用于理论推导，而不用于具体计算。因为，即使象 4 阶非异阵这样的低阶方阵，用行列式方法求逆，就需要计算一个 4 阶行列式与 16 个 3 阶（代数余）子式，其计算量将是很大的。故除了一些特殊形状的方阵外，一般不采用（27）式求非异阵之逆。然而，对 2 阶非异阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$来说，用(27)式却是最方便的，因为此时

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} \tag{28}$$

所以由（28）式可知，今后可以直接写出 2 阶非异阵之逆。

对一些特殊的非异阵，可将初等变换方法与行列式方法结合起来求逆，如下例所示。

例 1 证明

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

是非异阵，并求 M^{-1}。

证 将 M 分块为：$M=\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & B\end{pmatrix}$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$B=I_2$，$C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$。因为，$|A|=1$，$|C|=7$，故 A 与 C 均非异（由定理 4），于是应用第一章的（12）式可知M非异，且

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}-C^{-1}BA^{-1} & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C^{-1}A^{-1} & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

由（28）式，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad C^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

因而 $C^{-1}A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}9 & -2\\ -10 & 3\end{pmatrix}$，所以

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-9}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{10}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7}\\ 4 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(27)式的另一个应用是，可由它导出**克拉梅**(Cramér)法则。将 n 阶(n 元）线性代数方程组：$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_j; j=1,2,\cdots,n$ 改写成**“矩阵方程”**：$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

则当 $|A|\neq 0$（即 A 非异）时，$Ax=b$ 有唯一解：$x=A^{-1}b$，再由(27)式即得如下的：

克拉梅(Cramér)法则：当 $|A|\neq 0$ 时，$Ax=b$ 有唯一解：

$$x=\frac{(\mathrm{adj}A)b}{|A|}$$

也即

$$x_j=\frac{|\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1},\mathbf{b},\alpha_{j+1},\cdots,\alpha_n|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\&&\cdots\cdots&&&&\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots\cdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}}$$

其中 α_j 是 $|A|$ 的第 j 列； $j=1,2,\cdots,n$。

例 2 如果 n 阶线性方程组 $Ax=b$ 对任何 n 维列向量 b 均有解，则对任何 n 维列向量 β，$(\mathrm{adj}A)x=\beta$ 必有唯一解。

证 既然 $Ax=\mathbf{b}$ 对所有的 $\mathbf{b}$ 均有解，故特别取 $\mathbf{b}=\mathbf{e}_i$，此处 e_i 为维标准单位向量，设 $Ax=e_i$ 的解为：$x=\beta_i$;$i=1,2,\cdots,n$，则 $A\beta_i=e_i$； $i=1,2,\cdots,n$，故由分块矩阵的乘法，

$$A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n)=I_n$$

这说明 A 是非异阵，故 $|A|\neq0$。又由(27)式可得：$\mathrm{adj}A=|A|A^{-1}$，于是由第一章定理 1，$\mathrm{adj}A$ 也是非异阵，故由克拉梅法则，$(\mathrm{adj}A)x=\beta$ 有唯一解：$x=(\mathrm{adj}A)^{-1}\beta$。

(26) 式与 (27) 式的一个有趣应用如下例所示，它用矩阵的元素及其代数余子式的关系式来刻划正交阵的特性。

例 3 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是 n 阶非零实阵，$n\geqslant2$，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，

(i) 如果 A 是正交阵，则 $A_{ij}=a_{ij}$，(当 $|A|=1$)； $A_{ij}=-a_{ij}$，(当 $|A|=-1$)； $i,j=1,2,\cdots,n$，

(ii) 如果 $A_{ij}=a_{ij}$; $i,j=1,2,\cdots,n$，则 A 必是行列式等于 1 的正交阵，

(iii) 如果 $A_{ij}=-a_{ij}$;$i,j=1,2,\cdots,n$，则 A 必是行列式等于 -1 的正交阵，

换言之：A 是行列式为 1 的正交阵的充要条件是：$A_{ij}=a_{ij}$,$(i,j=1,2,\cdots,n)$;A 是行列式为 -1 的正交阵的充要条件是：$A_{ij}=-a_{ij}$,$(i,j=$

$1,2,\cdots,n$)。

证 因 A 正交，故（上节例1已证）得 $|A|=\pm1$，于是由(27)式可得

$$A'=A^{-1}=|A|^{-1}\mathrm{adj}A$$

比较上式两边的第 j 行第 i 列元素，即得 $a_{ij}=|A|^{-1}A_{ij}$，故得(i)

再证(ii) 因 $A_{ij}=a_{ij}; i,j=1,2,\cdots,n$，故由（26）式即得

$$AA'=|A|\cdot I_n \tag{29}$$

上式两边取行列式，并由行列式乘法规则可得

$$|A|^2=|A|\cdot|A'|=|A|^n \tag{30}$$

又比较（29）式两边的主对角元，即得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}^2=\cdots=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2=|A|$$

因 A 是实方阵，且非零，故由上式可知，$|A|>0$，于是由（30）式即得 $|A|^{n-2}=1$，因为 $|A|$ 是实数，且大于0，故必有：$|A|=1$（因 $x^{n-2}-1=0$ 的实根只能是1或 -1），于是由（29）式，A 是正交阵

再证（iii）同（ii）的证法，由假设 $A_{ij}=-a_{ij}$，可得

$$AA'=-|A|I_n \tag{31}$$

比较上式两边的主对角元即得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}^2=\cdots=\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2=-|A|$$

故由 A 是非零实阵的假设可知，$|A|<0$。又在（31）两边取行列式即得：$|A|^2=(-1)^n|A|^n$，或者 $|A|^{n-2}=(-1)^n$，当 n 是奇数时，只有 $|A|=-1$；当 n 是偶数时，由于 $|A|<0$，故也只能是 $|A|=-1$（$|A|\neq1$），于是由（31）式知，A 是正交阵。

§4 行列式的各种计算方法

计算高阶行列式是复杂而困难的事，但在实际问题与理论问题中又往往非解决不可。从理论上来说，虽然必可用行列式的性质将原行列式化为上三角形行列式（数字行列式确是这样计算的），但对文字行列式，就未必能实现这一想法，故需另想他法。本节将介绍四类常

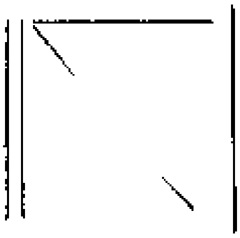
见的方法，它仅以§1中的定理1、2、3为基础。在§5中还将介绍一些有时更为有用的方法。

第一类方法——将原行列式化成上（下）三角形行列式

上（下）三角形行列式等于它的主对角元的乘积（见(14)、(15)式）。因此，若能将原行列式化为上（下）三角形行列式，自然是最理想的了，数字行列式必能这样做，文字行列式却未必。然而，以下两例所示的行列式必能化为上三角形行列式。

例 1 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$$

（= ，称为**模型 I**）

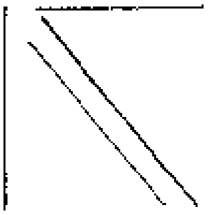
解 我们恒可设 $a_i\neq 0, i=2,3,\cdots,n$。因若有某些 $a_i=0$，例如 $a_n=0$，则将 D_n 按它的第 n 列展开，得到 $D_n=(-1)^{n+1}b_n\Delta_{n-1}$，而容易算出：$\Delta_{n-1}=(-1)^n a_2\cdots a_{n-1}c_n$。对其他 $a_i=0$ $(i\neq 1)$ 的情形也可仿此办理。

今将 D_n 的第 i 列的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍全加到 D_n 的第1列上，$i=2,\cdots,n$，由行列式性质6，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{b_ic_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & a_n \end{vmatrix}=a_2\cdots a_n\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right) \quad (32)$$

例 2 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & b_{n-2} & \\ & & & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

（= ，称为**模型 II**）

解 与例1的想法一样，恒可设 $b_i\neq 0$；$i=1,2,\cdots,n-1$（注意：否则 D_n 可表成一个数乘以 D_{n-2}，而不是 D_{n-1}！）。

今依次以第 n 列的$\frac{-c_{n-1}}{b_{n-1}}$倍加到第 $n-1$ 列、再以第 $n-1$ 列的$\frac{-c_{n-2}}{b_{n-2}}$倍加到第 $n-2$ 列、最后以第 2 列的$\frac{-c_1}{b_1}$倍加到第 1 列，

$$D_n=\begin{vmatrix} r_{11} & * & * & \cdots & * \\ & b_1 & & & \\ & & b_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} \end{vmatrix}=r_{11}b_1b_2\cdots b_{n-1} \tag{33}$$

其中

$$r_{11}=a_0-a_1\frac{c_1}{b_1}+a_2\frac{c_1c_2}{b_1b_2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\cdot\frac{c_1c_2\cdots c_{n-1}}{b_1b_2\cdots b_{n-1}} \tag{34}$$

D_n 的第 1 行中非第 1 列的元素在计算时用不到，故只打 * 号，而一概不具体写出（今后对解决问题本身用不到的元素均如此做，不再另作说明）。

很明显，凡行列式能够化为模型Ⅰ与模型Ⅱ者，必能化为上三角形行列式计算之。（参阅本节例 6 与例 8）。当然，不是模型Ⅰ与Ⅱ的行列式有时也能化为上三角形行列式，如下例所示。

例 3 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -a & -a & \cdots & -a & -a \\ a & x & -a & \cdots & -a & -a \\ a & a & x & \cdots & -a & -a \\ & & \cdots\cdots & & & \\ a & a & a & \cdots & x & -a \\ a & a & a & \cdots & a & -a \end{vmatrix}$$

解 将最后一列分别加到前面 $n-1$ 个列上，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} x-a & & & & \\ & x-a & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & x-a & \\ & & & & -a \end{vmatrix}=(-a)(x-a)^{n-1}$$

第二类方法——找递推关系式以求出原行列式

如果记原行列式为 D_n，则要找 D_n 与 D_{n-1} 的关系式，或者 D_n 与 D_{n-1}、D_{n-2} 的关系式，再由此求出 D_n，请看以下两例。

例 4 计算下面的**范德蒙**(Van der Monde)**行列式**：

$$D_n=|V_n|=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1}\\ \cdots\cdots & & & & & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1}\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1}\end{vmatrix} \tag{35}$$

(有时记 $V_n=V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**范德蒙矩阵**。)

解 从 $|V_n|$ 的最后第 2 列开始，依次将前一列的 $-x_n$ 倍加到后一列上，得到

$$|V_n|=\begin{vmatrix}1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \cdots & x_1^{n-3}(x_1-x_n) & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \cdots & x_2^{n-3}(x_2-x_n) & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ & \cdots\cdots & & & & \\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1}-x_n) & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)|V_{n-1}|$$

$$=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})|V_{n-1}|$$

这就是要找的递推关系式。于是可得如下诸等式

$$|V_n|=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})|V_{n-1}|$$

$$|V_{n-1}|=(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})|V_{n-2}|$$

$$\cdots\cdots$$

$$|V_3|=(x_3-x_1)(x_3-x_2)|V_2|$$

$$|V_2|=(x_2-x_1)$$

逐次向上代入诸等式，即有

$$\begin{aligned}|V_n|=&(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})\\ &\times(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})\\ &\times(x_3-x_1)(x_3-x_2)\\ &\times(x_2-x_1)\end{aligned}$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \tag{36}$$

这里，$\prod$是连乘号，$\prod\limits_{1 \leq j < i \leq n}$ 表示对所有满足$1 \leq j < i \leq n$的因子$x_i - x_j$作乘积。

例 5 计算如下的n阶"三对角行列式"：

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & & \\ & 1 & a+b & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解 将D_n按它的第1列展开，得到

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

再将上式右端的第2项（$n-1$阶）行列式按它的第1行展开，即得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \tag{37}$$

今先将（37）式改写为：

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$$

连续运用关于$D_n - bD_{n-1}$的上述递推公式，可得

$$D_n - bD_{n-1} = a^{n-2}(D_2 - bD_1) \tag{38}$$

再将（37）式改写为

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

故同理可得

$$D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(D_2 - aD_1) \tag{39}$$

由直接计算可知，$D_1 = a+b, D_2 = a^2 + b^2 + ab$，将它们分别代入（38）式与（39）式，得到

$$D_n - aD_{n-1} = a^n, D_n - bD_{n-1} = b^n \tag{40}$$

当$a \neq b$时，由（40）的两式可算得：

$$D_n = \frac{1}{a-b}(a^{n+1} - b^{n+1})$$

当 $a=b$ 时，（40）式化为 $D_n=aD_{n-1}+a^n$，连续运用这个递推关系式可得：

$$D_n=a^{n-1}D_1+(n-1)a^n=(n+1)a^n\ （因\ D_1=2a）$$

第三类方法——升阶方法

第一、二类方法实际上是降阶的思想方法。有时，对某些行列式来说，需要将它的阶数放大，使升阶后的行列式易于计算，从而求出原行列式，如下面两例所示。

例6 设 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'$ 是 n 维实列向量。且满足：$u'u=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2=1$，称 n 阶阵 I_n-2uu' 为**实镜象阵**。证明：

$$|I_n-2uu'|=\begin{vmatrix}1-2u_1^2 & -2u_1u_2 & \cdots & -2u_1u_n\\ -2u_2u_1 & 1-2u_2^2 & \cdots & -2u_2u_n\\ \cdots\cdots & & & \\ -2u_nu_1 & -2u_nu_2 & \cdots & 1-2u_n^2\end{vmatrix}=-1 \qquad (41)$$

证 将 $|I_n-2uu'|$ 升阶为下面的 $n+1$ 阶行列式：

$$|I_n-2uu'|=\begin{vmatrix}1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n\\ 0 & 1-2u_1^2 & -2u_1u_2 & \cdots & -2u_1u_n\\ 0 & -2u_nu_1 & -u_12u_2 & \cdots & -2u_2u_n\\ \cdots\cdots & & & & \\ 0 & -2u_2u_1 & -2u_2^2 & \cdots & 1-2u_n^2\end{vmatrix}$$

将上式右边的 $n+1$ 阶行列式的第一行的 u_i 倍分别加到它的 $i+1$ 行上；$i=2,\cdots,n$，即得

$$|I_n-2uu'|=\begin{vmatrix}1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n\\ u_1 & 1 & & & \\ u_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_n & & & & 1\end{vmatrix}$$

上式是可以化为上三角形的模型Ⅰ，故由(32)式及假设条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2=1$ 即得

$$|I_n-2uu'|=1\cdot1\cdots\cdots1\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{2u_i^2}{1}\right)=1-2\sum_{i=1}^{n}u_i^2=-1$$

本例也可直接将$|I_n-2uu'|$化为上三角形行列式，但有一定的技巧性（见本章习题12）。

例7　计算n阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n\\ \cdots\cdots & & & & & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^n\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n\end{vmatrix}$$

解　将D_n升阶为下面的$n+1$阶行列式：

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n\\ \cdots\cdots & & & & & & \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n\\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} & x^n\end{vmatrix}$$

即插入一行与一列，使Δ_{n+1}是关于$x_1,x_2,\cdots,x_n,x$的$n+1$阶范德蒙行列式，此处x是变数。由此可知，D_n是Δ_{n+1}的元素x^{n-1}的余子式。应用（36）式可得

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1}&=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)\\&\quad\times(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})\\&\quad\times\cdots\\&\quad\times(x_3-x_2)(x_3-x_1)\\&\quad\times(x_2-x_1)\\&=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\end{aligned}$$

故Δ_{n+1}是一个关于x的n次多项式，它可写成

$$\Delta_{n+1}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\{x^n+(-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+\cdots\}$$

另一方面，将Δ_{n+1}按它的第$n+1$行展开，即得

$$\Delta_{n+1}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\cdot x^n+(-1)^{2n+1}D_nx^{n-1}+\cdots$$

比较 Δ_{n+1} 中关于 x^{n-1} 的系数，即得

$$D_n=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\geqslant j<i\geqslant n}(x_i-x_j)$$

上例的升阶想法虽然比较自然（化成有已知结论的范德蒙行列式），然而插入的最后一行（x 的幂）却不是马上可以想到的。一般说来，升阶法是比较难掌握的，因此，只有在用其他方法不易解决，或者明显地可用升阶法解决的时候（如下面的例 8）才考虑用此法。象例 6，也可不用此法，解决它的最简捷的方法将在下节出现（§5例 4）。

有时，可以一题多解，如下例所示。

例 8 用第一、二、三类方法计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ \cdots\cdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

解 不妨设 $x_i\neq a$，否则立即可将 D_n 化为上三角形行列式，问题已解决。

（i）先用升阶法。将 D_n 升阶为：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots\cdots \\ 0 & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

将上式右端行列式的第 2、3、$\cdots n+1$ 各行分别减去第 1 行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1-a & & & \\ -1 & & x_2-a & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & x_n-a \end{vmatrix}$$

于是化为能用上三角形行列式结论的模型 I，由（32）式得

$$D_n=(x_1-a)\cdots(x_n-a)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{-a}{x_i-a}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right)$$

(ii) 找递推关系式。将 x_n 写成：$x_n=(x_n-a)+a$，于是

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a+0 \\ a & x_2 & a & \cdots & a & a+0 \\ \cdots\cdots \\ a & a & a & \cdots & x_{n-1} & a+0 \\ a & a & a & \cdots & a & a+(x_n-a) \end{vmatrix}$$

应用行列式性质 3，

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a & a \\ \cdots\cdots \\ a & a & a & \cdots & x_{n-1} & a \\ a & a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots\cdots \\ a & a & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ a & a & \cdots & a & x_n-a \end{vmatrix}$$

上述右端的第一个行列式容易算出（可化为上三角形行列式），它的值是，$a(x_1-a)\cdots(x_{n-1}-a)$；第二个行列式按它的最后一列展开，其值为$(x_n-a)D_{n-1}$，故得

$$D_n=a(x-a_1)\cdots(x_{n-1}-a)+(x_n-a)D_{n-1}$$

然后用归纳法 便 得 $D_n=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right)$（计算过程略）

(iii) 化成上三角形行列式。从 D_n 的第 n 行开始，依次将每一行减去上一行，即可得

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ a-x_1 & x_2-a & & & & \\ & a-x_2 & x_3-a & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & x_{n-1}-a & \\ & & & & a-x_{n-1} & x_n-a \end{vmatrix}$$

于是又化为能用上三角形行列式结论的模型Ⅱ，以下就不再重复计算了。

第四类方法——运用行列式乘法规则

设要计算之行列式为 $D=|A|$，下面介绍三种用法：

（i）先算出 $D^2=|A||A'|=|AA'|=k$，然后根据 D 的具体形状判定 $D=\sqrt{k}$ 或 $D=-\sqrt{k}$。

例 9 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

解 由行列式乘法规则可得

$$D^2=\begin{vmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix}=\delta^4,\ (\delta=a^2+b^2+c^2+d^2)$$

所以 $D=\pm\delta^2=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$，但由 D 可直接看出，它含有 a^4 这一项，故可判定：$D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。

（ii）取某个已知的非零行列式 Δ，使这种 Δ 乘 D 后，可得：$\Delta D=k\Delta$，于是 $D=k$。

例10 计算 n 阶循环行列式：（参阅第一章 §5 例10）

$$D_n=|C|=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \cdots\cdots & & & & & \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n & c_1 \end{vmatrix}$$

解 为书写简洁起见，以 $n=3$ 为例介绍此法。取 $x^3-1=0$ 的三个根：$x_1=1$，$x_2=\omega$，$x_3=\omega^2$$\left(\text{其中 }\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$，作 x_1,x_2,x_3 的范德蒙行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix}=(\omega^2-1)(\omega^2-\omega)(\omega-1)\neq 0$$

（因 $1,\omega,\omega^2$ 全不相同），由于 $\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$，故由行列式乘法规则可得：

$$\Delta D_3=\begin{vmatrix} c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \\ c_1+\omega c_3+\omega^2c_2 & c_2+\omega c_1+\omega^2c_3 & c_3+\omega c_2+\omega^2c_1 \\ c_1+\omega^2c_3+\omega c_2 & c_2+\omega^2c_1+\omega c_3 & c_3+\omega^2c_2+\omega c_1 \end{vmatrix}$$

$$=(c_1+c_2+c_3)(c_1+\omega c_3+\omega^2c_2)(c_1+\omega^2c_3+\omega c_2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$$

$$=(c_1+c_2+c_3)(c_1+\omega c_2+\omega^2c_3)(c_1+\omega^2c_2+\omega c_3)\cdot\Delta$$

上式两端消去 Δ 即得

$$D_3=(c_1+c_2+c_3)(c_1+\omega c_2+\omega^2c_3)(c_1+\omega^2c_2+\omega c_3).$$

当然，对 3 阶循环行列式来说，可直接算得

$$D_3=c_1^3+c_2^3+c_3^3-3c_1c_2c_3$$

这里取 $n=3$ 来算 D_n，只是为了说明方法而已。由上述两个式子还可顺便得出分解式：$c_1^3+c_2^3+c_3^3-3c_1c_2c_3=(c_1+c_2+c_3)\cdot(c_1+\omega c_2+\omega^2c_3)\cdot(c_1+\omega^2c_2+\omega c_3)$。

对 n 阶行列式 D_n，完全仿照上面的方法，可得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}(c_1+\zeta_ic_2+\zeta_i^2c_3+\cdots+\zeta_i^{n-1}c_n)$$

其中 ζ_i 是 $x^n-1=0$ 的 n 个不同的单位根；$i=1,2,\cdots,n$。

(iii)将 D 拆成若干个容易计算的行列式之积。

这是经常运用的方法，它比(i)、(ii)两法容易应用些。

例11 证明 3 阶阵：

$$A=\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \cos(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\psi) \\ \cos(\varphi+\theta) & \cos 2\varphi & \cos(\varphi+\psi) \\ \cos(\psi+\theta) & \cos(\psi+\varphi) & \cos 2\psi \end{pmatrix}$$

是奇异阵。

证：由和角公式及行列式乘法规则，

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \cos\psi & \sin\psi & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\varphi & \cos\psi \\ -\sin\theta & -\sin\varphi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

故 A 是奇异阵。

§5 行列式的分块，行列式的降阶定理

本节的结论与方法十分有用，其思想方法主要是降阶的思想，有时也涉及升阶的想法。

一、行列式的分块

与矩阵的分块一样，今将 n 阶行列式适当分块：

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots\cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix} \tag{42}$$

其中A_{ij}是 $n_i \times n_j$ 阵。$\sum_{i=1}^{s} n_i = n$。称(42)式右边的行列式为 s 阶分块行列式。下列命题在行列式计算中将起重要作用。

基本命题 以非零阵 $K(K_1)$左（右）乘分块行列式（42）的某一行（列）加到它的另一行（列）上去，得到的新的分块行列式与原行列式相等。

证 仅就“行变换”证之，也即要证：

$$|B| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots\cdots \\ A_{i1}+KA_{j1} & A_{i2}+KA_{j2} & \cdots & A_{is}+KA_{js} \\ \cdots\cdots \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{js} \\ \cdots\cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots\cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{is} \\ \cdots\cdots \\ A_{j1} & A_{j2} & \cdots & A_{js} \\ \cdots\cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{vmatrix} = |A|$$

由“八字规则”可得

$$B=\begin{pmatrix} I_{n_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & I_{n_i} & & K & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & I_{n_j} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & I_{n_s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots\cdots & & & \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

上式两边取行列式，并用乘法规则及第二章（19）式，即得

$$|B|=|I_{n_1}|\cdots|I_{n_s}|A=|A|$$

对“列变换”，可仿此证得。

例 1 设A与B为同阶方阵，则

$$D=\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B|\,|A-B| \qquad (43)$$

证 以I左乘D的第2行后加到D的第1行上，由基本命题即得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix}$$

以$-I$右乘上式右端分块行列式的第1列并加到第2列上，得到，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} \qquad (44)$$

因为分块下三角阵的行列式是分块上三角行列式的转置，它仍等于每个子块的行列式的乘积，故由（44）式得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B|\,|A-B|$$

应用（43）式，下列行列式就显得十分容易算出了：

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} c-a & d+b \\ d+b & c-a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -c-a & b-d \\ b-d & -c-a \end{vmatrix}$$

$$=\{(a+c)^2-(b-d)^2\}\{(a-c)^2-(b+d)^2\}$$

$$=(a+b+c-d)(a-b+c+d)\cdot$$

$$(a+b-c+d)(a-b-c-d)$$

例 2 设 B 与 C 都是同阶实方阵，则

$$\begin{vmatrix} B & C \\ -C & B \end{vmatrix} = |B+\sqrt{-1}C|\cdot|B-\sqrt{-1}C| \tag{45}$$

称（45）式为**查拉基-华兹乌斯基**(Szaraki-Wazewski)**公式**。

证 先以$\sqrt{-1}I$ 右乘原行列式的第 2 列并加到第 1 列上去，再以 $(-\sqrt{-1}\cdot I)$左乘新得到的行列式的第 1 行并加到它的第 2 行上，由基本命题即得

$$\begin{vmatrix} B & C \\ -C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B+\sqrt{-1}C & C \\ \sqrt{-1}(B+\sqrt{-1}C) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B+\sqrt{-1}C & C \\ 0 & B-\sqrt{-1}C \end{vmatrix}$$

$$= |B+\sqrt{-1}C|\ |B-\sqrt{-1}C|$$

由（45）式立即可得

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \sqrt{-1}\begin{pmatrix} -c & -d \\ -d & c \end{pmatrix}\right| \cdot$$

$$\left|\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \sqrt{-1}\begin{pmatrix} -c & -d \\ -d & c \end{pmatrix}\right|$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

（参阅本章 §4 例 9）

二、行列式的两个降阶定理

第一降阶定理　设$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$是方阵，且 A 非异，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\cdot|D-CA^{-1}B| \tag{46}$$

证 这只要以 $-CA^{-1}$ 左乘$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$的第一行，并加到第二行上去，由基本命题。便得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

注 一些矩阵论专著及近几年的文献中常称此定理为**许尔**

(Schur)**定理**（原出处见：I. Schur, Potenzreihen im Inern des Einheitstreises, *J. Reine Angew. Math.*, Bd 147(1917), s. 205～232)，但也有称为**加藤**（かおて）**定理**的。为明确其实际含义，我将它们改称为第一降阶定理。

由第一降阶定理即可得如下重要的推论1。

推论 1 设A与D分别是n阶非异阵与m阶非异阵，B与C分别是$n\times m$阵与$m\times n$阵，则有如下的**升阶公式**：

$$|D-CA^{-1}B|=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix} \tag{47}$$

推论 2 设A、B、C、D是同阶方阵，如果A是非异阵，且$AC=CA$，则

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB| \tag{48}$$

证 由第一降阶定理，并应用行列式乘法规则得到

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|A|\,|D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|,$$

由假设：$AC=CA$，故上式即可化为（48）式。

第一降阶定理的另一种形式是，若方阵$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$中的$D$是非异阵，则

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|D|\cdot|A-BD^{-1}C| \tag{49}$$

由于其证明与（46）式的证法相同，故从略。将(49)式与（47）式合并运用，便得如下一个更有用的降阶定理。

第二降阶定理 设A与D分别是n阶非异阵与m阶非异阵，B与C分别是$n\times m$阵与$m\times n$阵，则

$$|D-CA^{-1}B|=\frac{|D|}{|A|}|A-BD^{-1}C| \tag{50}$$

行列式的两个降阶定理的证明虽然是一目了然的，然而它们却有极其广泛的应用，下面举一串例子说明之。

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&0&1&-1\\3&2&1&0&2\\1&1&2&-1&5\\0&-1&6&1&4\\4&5&8&7&-1\end{vmatrix}$$

解 由第一降阶定理，

$$D=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}\cdot\left|\begin{pmatrix}2&-1&5\\6&1&4\\8&7&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&2\\8&-2&11\\2&14&-20\end{vmatrix}=1\cdot\left|\begin{pmatrix}-2&11\\14&-20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}(0,2)\right|$$

$$=\begin{vmatrix}-2&-5\\14&-24\end{vmatrix}=118$$

对任何 n 阶行列式，我们总可以仿照例 3 的做法，将它降低 2 阶。如该行列式左上角的 2 阶阵奇异，则考虑其前两行中的其他 2 阶阵，取其中一个非异阵并经列的对调将它调到左上角即可。若前两行中的所有 2 阶阵均奇异，则此两行成比例，其值已得出，即该行列式等于零。

例 4 证明实镜象阵 $I_n-2\,uu'$ 的行列式等于 -1，其中 u 是 n 维实向量，且 $u'u=1$（参阅本章 §4 例 6）。

证 由第二降阶定理即得

$$|I_n-2uu'|=|I_n-(2u)1^{-1}u'|=\frac{|I_n|}{1}(1-2u'u)=1-2=-1$$

这个证法之简捷远非 §4 例 6 的证法可比拟。

为了运用时方便起见，常将第二降阶定理改写为：

$$|D+CA^{-1}B|=\frac{|D|}{|A|}|A+BD^{-1}C| \qquad (51)$$

例 5 设 A 是 n 阶非异阵，α 与 β 都是 n 维列向量，则由 (51) 式可得

$$|A+\alpha\beta'|=\frac{|A|}{1}(1+\beta'A^{-1}\alpha)=|A|(1+\beta'A^{-1}\alpha)$$

所以$A+\alpha\beta'$是非异阵当且仅当$1+\beta'A^{-1}\alpha\neq0$。(参阅第一章§2例4)。

例 6 设$\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$，计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n\\ \cdots\cdots & & & \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0\end{vmatrix},\quad n\geq2$$

解 先将D_n改写为下列两个方阵之和的行列式，再凑成$D+CA^{-1}B$的形状：

$$D_n=\left|\begin{pmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1+a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n\\ a_2+a_1 & a_2+a_2 & \cdots & a_2+a_n\\ \cdots\cdots & & & \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_n\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\right|$$

故由(51)式即得

$$D_n=\frac{\begin{vmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}}\cdot$$

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}\right|$$

$$=(-2)^n\prod_{i=1}^n a_i\begin{vmatrix}1-\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_j & 1-\frac{n}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{n-2}\prod_{i=1}^n a_i\left\{(n-2)^2-\sum_{i,j=1}^n\frac{a_j}{a_i}\right\}$$

例 6 表明，第二降阶定理将 n 阶行列式“一下子”降为 2 阶行列式，从而使这个在早年历史上认为较难之题迎刃而解了。

例 4、例 5 也是将高阶行列式化为低阶行列式的例子。这就给我们以启示：若能象例 6 那样，将 n 阶行列式 $|A|$ 所在的方阵 A 分解为：

$$A=D+M \tag{52}$$

这里 D 是一个比较容易计算其行列式与求逆的非异阵(如对角阵)，而

$$M=HL \tag{53}$$

其中 H 与 L 分别是 $n\times r$ 阵与 $r\times n$ 阵，$r<n$，则由 (51)、(52)、(53) 式即得

$$|A|=|D+HL|=|D|\cdot|I_r+LD^{-1}H|$$

这样就将 n 阶行列式降为 r 阶行列式了。那么，如何找分解式 (52) 与 (53)，且使 r 尽可能小呢？这是个有趣的问题。关于分解式(53)在第四章中会涉及到。

今再将第一降阶定理用于理论推导中，如下两例所示。

例 7 设 $\Delta_i=\left|A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&i\\1&2&\cdots&i\end{pmatrix}\right|$ 是实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 i 阶顺序主子式；$i=1,2,\cdots,n$。对任意一个 i：$1<i<n$，如果 $\Delta_i=0$，而 $\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}\neq0$，证明 $\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}<0$。

证 记 $A_i=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&i\\1&2&\cdots&i\end{pmatrix}$，$1\leqslant i\leqslant n$，将 Δ_i 写成：

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&(i-1)\\1&2&\cdots&(i-1)\end{pmatrix} & \alpha\\ \alpha' & A\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_{i-1}&\alpha\\ \alpha'&a_{ii}\end{vmatrix} \tag{54}$$

其中 $\alpha'=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{i-1,i})$。由假设：$\Delta_{i-1}\neq 0$，故 A_{i-1} 是非异阵，故由第一降阶定理，(54) 可化为：$\Delta_i=\Delta_{i-1}(a_{ii}-\alpha' A_{i-1}^{-1}\alpha)$，但由假设 $\Delta_i=0$，故得

$$a_{ii}-\alpha' A_{i-1}^{-1}\alpha=0 \tag{55}$$

同理，由第一降阶定理可知，

$$\Delta_{i+1}=\begin{vmatrix} A_{i-1} & \alpha & \beta \\ \alpha' & a_{ii} & a_{i,i+1} \\ \beta' & a_{i,i+1} & a_{i+1,i+1}\end{vmatrix}$$

$$=\Delta_{i-1}\left|\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i,i+1} & a_{i+1,i+1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix}A_{i-1}^{-1}(\alpha,\beta)\right|$$

$$=\Delta_{i-1}\begin{vmatrix} a_{ii}-\alpha' A_{i-1}^{-1}\alpha & a_{i,i+1}-\alpha' A_{i-1}^{-1}\beta \\ a_{i,i+1}-\beta' A_{i-1}^{-1}\alpha & a_{i+1,i+1}-\beta' A_{i-1}^{-1}\beta\end{vmatrix} \tag{56}$$

因为 A 是实对称阵，故 A_{i-1} 也是 $i-1$ 阶实对称阵。若记 $g=a_{i,i+1}-\alpha' A_{i-1}^{-1}\beta$，于是

$$a_{i,i+1}-\beta' A_{i-1}^{-1}\alpha=(a_{i,i+1}-\beta' A_{i-1}^{-1}\alpha)'=a_{i,i+1}-\alpha' A'^{-1}_{i-1}\beta$$
$$=a_{i,i+1}-\alpha' A_{i-1}^{-1}\beta=g$$

故由 (55) 式及上式，(56) 式可化为

$$\Delta_{i+1}=\Delta_{i-1}\begin{vmatrix} 0 & g \\ g & * \end{vmatrix}=-g^2\cdot\Delta_{i-1}$$

但已知 $\Delta_{i+1}\Delta_{i-1}\neq 0$，故由上式知，$\Delta_{i-1}\Delta_{i+1}<0$。

例 7 的结论对讨论实对称阵的性质是重要的。

例 8 设 A 是 n 阶实方阵，且 $AA'=bI_n, b>0$，则对任何适合 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 的 k，恒有

$$\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ j_1 & j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|=b^{k-n}\cdot|A|\cdot\left|\hat{A}_c\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ j_1 & j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right| \tag{57}$$

这里 $\left|\hat{A}_c\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ j_1 & j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$ 是 Δ 的 k 阶子式 $\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ j_1 & j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$ 的代数余子式；$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$。

证 由假设可知 A 必是非异阵。又，应用子矩阵与原矩阵的关系式：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ j_1 & j_2\cdots j_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix}A(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_k})$$

(第一章的(25)式)，并由升阶公式(本章(47)式)及假设：$AA'=bI_n$(即 $A^{-1}=b^{-1}A'$)可得

$$\left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ j_1 & j_2\cdots j_k \end{pmatrix}\right|=\left|0+\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix}(A^{-1})^{-1}(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_k})\right|$$

$$=\frac{1}{|A^{-1}|}\begin{vmatrix} A^{-1} & (e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_k}) \\ -\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=|A|\begin{vmatrix} bA' & (e_{j_1},e_{j_2},\cdots e_{j_k}) \\ -\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} & 0 \end{vmatrix} \tag{58}$$

采用互换相邻两列与两行的办法可将 $n+k$ 阶行列式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} b^{-1}A' & (e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_k}) \\ -\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} & 0 \end{vmatrix} \tag{59}$$

的前 n 个列中的第 i_1、i_2、…、i_k 列依次调到前 k 个列，再将它的前 n 个行中的第 j_1、j_2、…、j_k 行依次调到前 k 个行，得到一个新的 $n+k$ 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} b^{-1}A'\begin{pmatrix} j_1 j_2\cdots j_k \\ i_1 i_2\cdots i_k\end{pmatrix} & * & I_k \\ * & b^{-1}B & 0 \\ -I_k & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}\cdot\Delta \quad (60)$$

其中

$$|B|=\left|A_C'\begin{pmatrix} j_1 j_2\cdots j_k \\ i_1 i_2\cdots i_k\end{pmatrix}\right|$$

因为$b^{-1}A'\begin{pmatrix} j_1 j_2\cdots j_k \\ i_1 i_2\cdots i_k\end{pmatrix}=\left(b^{-1}A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right)'$[第一章的（32式）]，故得

$$D=\begin{vmatrix} \left(b^{-1}A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right)' & * & I_k \\ * & b^{-1}B & 0 \\ -I_k & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad (61)$$

$$|B|=\left|\left(A_C\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right)'\right|=\left|A_C\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right| \qquad (62)$$

用行列式性质将分块行列式（61）的第1、3两列对调，可算得：

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} I_k & * & * \\ 0 & b^{-1}B & * \\ 0 & 0 & -I_k \end{vmatrix}\cdot(-1)^k=|I_k|\,|b^{-1}B|\,|-I_k|\cdot(-1)^k \\ &=|b^{-1}B|=b^{k-n}|B| \qquad (63)\end{aligned}$$

以（59）代入（58），再以（60）、（63）代入，最后以（62）代入，就得到：

$$\begin{aligned}\left|A\begin{pmatrix} i_1\ i_2\cdots i_k \\ j_1\ j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|&=|A|\cdot\Delta=|A|\cdot(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}\cdot D \\ &=|A|b^{k-n}(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}\left|A_C\begin{pmatrix} i_1\ i_2\cdots i_k \\ j_1\ j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right| \\ &=|A|\cdot b^{k-n}\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix} i_1\ i_2\cdots i_k \\ j_1\ j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|\end{aligned}$$

由例8可知，任何正交阵A（此时$b=1,|A|=\pm1$）的k阶子式与其代数余子式最多差一个负号。

§6 柯希-皮内公式 两个方阵之和的行列式

本节运用降阶定理以及拉普拉斯定理提供行列式理论中另外一些结论，它们除了可用于进一步计算行列式外，还用于理论推导中。特别是两个方阵之和的行列式，对某些非数学的基础学科也有用，

一、柯希-皮内(Cauchy-Binet)公式

行列式乘法规则的一个推广公式是下面的

柯希-皮内公式 设 A 是 $n\times m$ 阵，B 是 $m\times n$ 阵，则

（i）当 $n>m$ 时，$|AB|=0$,

（ii）当 $n\leqslant m$ 时，恒有：

$$|AB|=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_n\leqslant m}\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right| \tag{64}$$

证 由升阶公式（（47）式）可得

$$|AB|=|0-(-A)I_m^{-1}B|=\frac{1}{|I_m|}\begin{vmatrix}I_m & B\\ A & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}I_m & B\\ A & 0\end{vmatrix} \tag{65}$$

当 $n>m$ 时，将（65）式右端行列式按它的最后 n 个列展开，则在它的 $m+n$ 行中任取 n 行所成的每个 n 阶子式中，至少有 $n-m$ 个行是零（向量），故由拉普拉斯定理知 $|AB|=0$。

当 $n\leqslant m$ 时，仍将（65）式右端的 $n+m$ 阶行列式按它的最后 n 个列展开，则 $\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}$ 中不等于零的子式最多有 C_m^n 个，面其中任意一个都是某个 $\left|B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|$，$1\leqslant j_1<\cdots<j_n\leqslant m$，故若能证明每个 $\left|B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|$ 在这个 $m+n$ 阶行列式中对应的代数余子式恰好是 $\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\right|$，则由拉普拉斯定理即可得到（64）式。下面就来证明这个事实：

先求出特殊的子式 $\left|B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|$ 的代数余子式。将上述 $m+n$ 阶行列式（65）如下分块：

$$\begin{vmatrix} I_m & B \\ -A & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 & B_1 \\ 0 & I_{m-n} & B_2 \\ -A_1 & -A_2 & 0 \end{vmatrix} \tag{66}$$

其中，$A_1 = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$，$B_1 = B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$ 易知 $|B_1|$ 的代数余子式是，

$$(-1)^{\sum_{k=1}^{n}[k+(m+k)]}\begin{vmatrix} 0 & I_{m-n} \\ -A_1 & -A_2 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} 0 & I_{m-n} \\ -A_1 & -A_2 \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{67}$$

将（67）式最右端的行列式按它的第 n 个列展开，得到

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & I_{m-n} \\ -A_1 & -A_2 \end{vmatrix} &= (-1)^{\sum_{k=1}^{n}[(m-n+k)+k]}|-A_1|\,|I_{m-n}| \\ &= (-1)^{n(m-n+1)}|A_1| \end{aligned} \tag{68}$$

以（68）式代入（67）式，可知 $|B_1| = \left|B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|$ 的代数余子式恰好是，

$$(-1)^{mn}(-1)^{n(m-n+1)}|A_1| = |A_1| = \left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|$$

今再求任一 n 阶子式 $\left|B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|$ 的代数余子式，将行列式 $\Delta = \begin{vmatrix} I_m & B \\ -A & 0 \end{vmatrix}$ 的子块 (I_m, B) 中的第 j_1、j_2、…、j_n 行依次调到第1、2、…、n 行的位置，同时将 Δ 的子块 $\begin{pmatrix} I_m \\ -A \end{pmatrix}$ 中 A 的第 j_1、j_2、…、j_n 列依次调到第 1、2、…、n 列的位置，易知经这些对调后得到的新行列式 D 恰好等于 Δ，且

$$D = \begin{vmatrix} I_n & 0 & B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix} \\ 0 & I_{m-n} & B_3 \\ -A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix} & -A_3 & 0 \end{vmatrix}$$

这又化为刚才讨论过的情形，故可知$\left|B\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\right|$在$D(=\Delta)$中的代数余子式就是$\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\right|$。

柯希-皮内公式的四个重要应用如下：

（i）**拉格朗日（Lagrange）恒等式**：设a_i,b_i都是复数，$i=1,2,\cdots,m$；$m\geqslant 2$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}|b_i|^2\right)-\left|\sum_{i=1}^{m}a_i\,b_i\right|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|a_ib_j-a_jb_i|^2 \quad (69)$$

证 因为

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}|b_i|^2\right)-\left|\sum_{i=1}^{m}a_i\overline{b_i}\right|^2=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{m}|a_i|^2 & \sum_{i=1}^{m}a_i\overline{b_i}\\ \overline{\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\overline{b_i}\right)} & \sum_{i=1}^{m}|b_i|^2\end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a_1} & \overline{b_1}\\ \overline{a_2} & \overline{b_2}\\ \vdots & \vdots\\ \overline{a_m} & \overline{b_m}\end{pmatrix}\right| \quad (70)$$

因为$m\geqslant 2$，故由柯希-皮内公式，（70）式化为：

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}|b_i|^2\right)-\left|\sum_{i=1}^{m}a_i\overline{b_i}\right|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\begin{vmatrix}a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\overline{a_i} & \overline{b_i}\\ \overline{a_j} & \overline{b_j}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|a_ib_j-b_ia_j|^2$$

（ii）**柯希-许瓦尔兹（Schwarz）不等式**：设a_i,b_i都是复数，$i=1,2,\cdots,m$；$m\geqslant 2$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{m}a_i\overline{b_i}\right|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m}|b_i|^2\right) \quad (71)$$

这是明显的，因为（69）式右端恒非负。

（iii）广谱不等式：设z_i是任意复数，$i=1,2,\cdots,s$，s是大于1的任意自然数，则

$$s \geqslant \frac{\left|\sum_{i=1}^{s} z_i\right|^2}{\sum_{i=1}^{s}|z_i|^2 - \frac{1}{2}\max_{1\leqslant i<j\leqslant s}|z_i - z_j|^2} \tag{72}$$

证 在拉格朗日恒等式中取 $m=s, b_i=1, a_i=z_i; i=1,2,\cdots,s$，则得到

$$s\left(\sum_{i=1}^{s}|z_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^{s} z_i\right|^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant s}|z_i - z_j|^2 \tag{73}$$

由于（73）式右端的任何 Z_i 都出现 $s-1$ 次，故为简便计，不妨设

$$\max_{1\leqslant i<j\leqslant s}|z_i - z_j| = |z_1 - z_s| \tag{74}$$

于是（73）式化为

$$s\sum_{i=1}^{s}|z_i|^2 - \left|\sum_{i=1}^{s} z_i\right|^2 = |z_1 - z_s|^2 + \sum_{j=2}^{s-1}|z_1 - z_j|^2 + \sum_{j=2}^{s-1}|z_j - z_s|^2$$
$$+ \sum_{2\leqslant i<j\leqslant s-1}|z_i - z_j|^2 \tag{75}$$

当 $s=2$ 时，上式右端的最后三个和式不出现。应用不等式：$a^2+b^2 \geqslant (a+b)^2/2$，（$a$ 与 b 为实数）以及不等式 $|x+y| \leqslant |x|+|y|$（x 与 y 为复数，）（75）式可化为：

$$s\sum_{i=1}^{s}|z_i|^2 - \left|\sum_{i=1}^{s} z_i\right|^2 \geqslant |z_1 - z_s|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{s-1}|z_1 - z_s|^2$$
$$+ \sum_{2\leqslant i<j\leqslant s-1}|z_i - Z_j|^2 \geqslant |Z_1 - Z_s|^2$$
$$+ \frac{(s-2)}{2}|Z_1 - Z_s|^2 = \frac{s}{2}|Z_1 - Z_s|^2$$

上面的不等式经过整理，并注意到（74）式，即得（72）式。

不等式（72）在理论上有较广泛的应用，我们称之为广谱不等式。

(iv)乘积矩阵的子式的展开式：设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $n\times l$ 阵，则

$$
\left|(AB)\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ j_1 & j_2\cdots j_k \end{pmatrix}\right|
$$

$$
=\begin{cases} \displaystyle\sum_{1\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant n} \left|A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_k \\ t_1 & t_2\cdots t_k \end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix} t_1 t_2\cdots t_k \\ j_1 j_2\cdots j_k \end{pmatrix}\right|, & \text{当 } k\leqslant n \\ 0, & \text{当 } k>n \end{cases} \tag{76}
$$

$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$；$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant l$。

证 将 A 按它的行分块，B 按它的列分块：

$$
A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix},\quad B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)
$$

由矩阵乘法的定义易知：

$$
\left|C\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_k \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ \alpha_{i_2} \\ \vdots \\ \alpha_{i_k} \end{pmatrix}(\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_k})\right|,\quad (C=AB)
$$

上式右端行列式中的前一个矩阵是 $k\times n$ 阵，后一个是 $n\times k$ 阵，故由柯希-皮内公式即得所要证之两个等式。

二、两个方阵之和的行列式

设 A 与 B 都是 n 阶阵，则 $|A+B|$ 可表成 A 的各阶子式与相应的 B 的代数余子式的乘积之和。即有如下展开式：

$$
\begin{aligned}
|B+A| &= |B|+\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_1\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\hat{B}_C\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix}\right| \\
&\quad+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \\ j_1 j_2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\hat{B}_C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \\ j_1 j_2 \end{pmatrix}\right| \\
&\quad+\cdots+\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-1}\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{n-1}\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_{n-1} \\ j_1\cdots j_{n-1} \end{pmatrix}\right| \\
&\quad\cdot\left|\hat{B}_C\begin{pmatrix} i_1\cdots i_{n-1} \\ j_1\cdots j_{n-1} \end{pmatrix}\right|+|A|.
\end{aligned} \tag{77}
$$

证 将 B 与 A 按它的列分块：

$$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),\quad A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

连续运用行列式性质 3，可得

$$\begin{aligned}|B+A| &= |\beta_1+\alpha_1,\beta_2+\alpha_2,\cdots,\beta_n+\alpha_n|\\ &= |\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n|+\sum_{j_1=1}^{n}|\beta_1,\cdots\beta_{j_1-1},\alpha_{j_1},\beta_{j_1+1},\cdots\beta_n|\\ &+\sum_{1\le j_1<j_2\le n}|\beta_1,\cdots,\beta_{j_1-1},\alpha_{j_1},\beta_{j_1+1},\cdots,\beta_{j_2-1},\alpha_{j_2},\beta_{j_2+1},\cdots,\beta_n|\\ &+\cdots\cdots\\ &+\sum_{1\le j_1<\cdots<j_{n-1}\le n}|\alpha_{j_1},\cdots,\beta_{j_n},\cdots,\alpha_{j_{n-1}}|+|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|\end{aligned}$$

应用拉普拉斯定理，将上式右端的 $n-1$ 个多重和式中的行列式分别按其第 j_1 列，第 j_1、j_2 列，第 j_1、j_2、$\cdots$、j_{n-1} 列展开，即得（77）式。

（77）式的计算量很大，用得较多的是下列三种特例：

（i）B 是对角阵：

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

此时除了 B 的主子式以及它的代数余子式（它们也是主子式）外，其他子式全是零。又因

$$|B|=\lambda_1\cdots\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i,\quad \left|\hat{B}_C\begin{pmatrix}i_1\\ i_1\end{pmatrix}\right|=\lambda_1\cdots\lambda_{i_1-1}\lambda_{i_1+1}\cdots\lambda_n=\prod_{j\ne i_1}\lambda_j$$

$$\left|\hat{B}_C\begin{pmatrix}i_1 i_2\\ i_1 i_2\end{pmatrix}\right|=\prod_{j\ne i_1,i_2}\lambda_j,\cdots,\quad \left|\hat{B}_C\begin{pmatrix}i_1\cdots i_{n-1}\\ i_1\cdots i_{n-1}\end{pmatrix}\right|=\prod_{j\ne i_1,\cdots,i_{n-1}}\lambda_j,$$

故此时（77）式可化为：

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}+A\right| &= \prod_{j=1}^{n}\lambda_j+\sum_{i_1=1}^{n}\left|A\begin{pmatrix}i_1\\ i_1\end{pmatrix}\right|\prod_{j\ne i_1}\lambda_j\\ &+\sum_{1\le i_1<i_2\le n}^{n}\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\\ i_1 i_2\end{pmatrix}\right|\prod_{j\ne i_1,i_2}\lambda_j+\cdots\\ &+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-1}\le n}\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_{n-1}\\ i_1 i_2\cdots i_{n-1}\end{pmatrix}\right|\prod_{j\ne i_1,\cdots,i_{n-1}}\lambda_j\\ &+|A|\end{aligned}\tag{78}$$

(ii) $B=\lambda I_n$。此时在（78）式中取 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$，就能得到下面这个特别有用的式子：

$$|\lambda I_n+A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n \tag{79}$$

其中，$a_k=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1 & i_2\cdots i_k\\ i_1 & i_2\cdots i_k\end{pmatrix}\right|$ 即 a_k 是 A 的所有 k 阶主子式之和，$k=1,2,\cdots,n$。

(iii) $B=(\lambda_1 e,\lambda_2 e,\cdots\lambda_n e)$，而 $e=(1,1,\cdots 1)'$。由于 $k\geqslant 2$ 时 B 的所有 k 阶子式全是零，故此时（77）式化为：

$$\begin{aligned}
&|(\lambda_1 e,\lambda_2 e,\cdots,\lambda_n e)+A|\\
&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-1}\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{n-1}\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_{n-1}\\ j_1\cdots j_{n-1}\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\hat{B}_C\begin{pmatrix}i_1\cdots i_{n-1}\\ j_1\cdots j_{n-1}\end{pmatrix}\right|\\
&\quad+|A|\\
&=\sum_{1\leqslant i_n\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_n\leqslant n}(-1)^{i_n+j_n}\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i_n\\ j_n\end{pmatrix}\right|\\
&\quad\times(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{n-1}(i_s+j_s)}\left|B\begin{pmatrix}i_n\\ j_n\end{pmatrix}\right|+|A|\\
&=\sum_{1\leqslant i_n\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_n\leqslant n}(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{n}(i_s+j_s)}\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i_n\\ j_n\end{pmatrix}\right|\\
&\quad\times\left|B\begin{pmatrix}i_n\\ j_n\end{pmatrix}\right|+|A|
\end{aligned}$$

因为 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 $12\cdots n$ 的任意排列，故 $\sum\limits_{s=1}^{n}(i_s+j_s)$ 是偶数，又 $\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}\right|=A_{ij}$（见§1 定义），$\left|B\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}\right|=\lambda_j$，故得

$$\begin{aligned}
&|(\lambda_1 e,\lambda_2 e,\cdots,\lambda_n e)+A|\\
&=\sum_{1\leqslant i_n\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j_n\leqslant n}\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i_n\\ j_n\end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix}i_n\\ j_n\end{pmatrix}\right|+|A|\\
&=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}\right|+|A|\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_j A_{ij}+|A|
\end{aligned}$$

或者将上式写成：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1+a_{11} & \lambda_2+a_{12} & \cdots & \lambda_n+a_{1n} \\ \lambda_1+a_{21} & \lambda_2+a_{22} & \cdots & \lambda_n+a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \lambda_1+a_{n1} & \lambda_2+a_{n2} & \cdots & \lambda_n+a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j A_{ij} \quad (80)$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

我们可以应用上述已知的公式来计算 n 阶行列式。

例 1 计算 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots\cdots & & & \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

（见 §4 例 8 ）。先将 D 写成两个特殊的方阵之和的行列式：

$$D = |B+A| = \left| \begin{pmatrix} x_1-a & & & \\ & x_2-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \cdots\cdots & & & \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \right|$$

当 $k \geqslant 2$ 时，A 的所有 k 阶子式全是零，故由（78）式可得

$$\begin{aligned} D &= \prod_{j=1}^{n}(x_j-a) + \sum_{i=1}^{n}\left| A\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \right| \prod_{j \neq i}(x_j-a) \\ &= \prod_{j=1}^{n}(x_j-a) + a\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i}(x_j-a) \end{aligned}$$

例 2 计算实镜象阵 I_n-2uu' 的行列式，$(u'u=1)$。记 $A=-2uu'$，因为 A 的 k 阶子式全为 0（当 $k \geqslant 2$），故由（79）式得到

$$|I_n-2uu'| = 1^n + a_1 1^{n-1}$$

但 $a_1 = -2(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2) = -2u'u = -2$，所以

$$|I_n-2uu'| = 1-2 = -1$$

习　　题

1．应用 §2 的引理以及行列式的性质 2 到性质 7 证明性质 1。即 $|A| = |A'|$。

（提示：当 A 奇异，A' 也奇异，由引理得出的推论知，$|A|=0$，$|A'|=0$；当 A 非异，则 $A=P_1P_2\cdots P_s, A'=P'_s\cdots P'_2P'_1$，而 P_i 和 P'_i 均为初等阵，且 $|P_i|=|P'_i|$，于是应用§2的引理即得。）

2．用行列式乘法规则证明：

$$(a_1^3+a_2^3+a_3^3-3a_1a_2a_3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3-3b_1b_2b_3)$$
$$=(c_1^3+c_2^3+c_3^3-3c_1c_2c_3)$$

其中 c_1,c_2,c_3 是由 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 经过加、减、乘三种运算得出的数。

（提示：$a_1^3+a_2^3+a_3^3-3a_1a_2a_3$ 可表成一个3阶循环阵的行列式——见本章§4例10，并应用第一章§4例10）

3．设 a_i，b_i 均为实数；$i=1,2,3,4$。证明：

（i）$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)=c_1^2+c_2^2$

其中 c_1,c_2 是由 a_1,a_2,b_1,b_2 经过加、减，乘三种运算得到的数。

（ii）$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)=(c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2)$

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 是由 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$ 经加、减、乘运算得到的数。

（提示：对(i)，由$a_1^2+a_2^2=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix}$，再应用行列式乘法规则即得。对（ii)，作复数：$x_1=a_1+\sqrt{-1}\,a_3, x_2=a_2+\sqrt{-1}\,a_4$，则

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=|x_1|^2+|x_2|^2=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -\overline{x_2} & \overline{x_1} \end{vmatrix}$$

再应用行列式乘法规则即可。）

注 由(i)与(ii)自然会联想到，对任意正整数 k 以及任意实数 a_i，b_i，$i=1,2,\cdots,2^k$，是否恒有

$$\left(\sum_{i=1}^{2^k}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2^k}b_i^2\right)=\sum_{i=1}^{2^k}c_i^2 \quad ? \qquad (*)$$

其中 $c_1,\cdots,c_n$ 是由 a_i,b_j 经加、减、乘运算得到的数，$i、j=1,2,\cdots,n$。

这个有趣的问题称为**平方和问题**。当 $k=1,2$ 时已由(i)与(ii)所证实。当 $k=3$，回答也肯定（但这里不能证明它，因要用超越本书范围的所谓“八元数”的概念）。但当 $k\geqslant4$ 时已被**呼尔维茨**（Hurwitz）

在 1933 年否定掉了。直到1965年，**费斯脱**(Physter)才用矩阵技巧证明：当 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是由 a_i, b_j 经过加、减、乘、除四种运算得出的数时，(＊)式仍然成立。

4. 证明：

(i) 如果 A 满足 $A^2 = I$（称 A 为对合阵），则当 A 为实阵时，必有：$|A| = 1$ 或 $|A| = -1$。

(ii) 设方阵 A 非零，如果存在最小自然数 s，使 $A^s = 0$（称A为 s 次幂零阵），则 $|A| = 0$。

(iii) 如果 A 是非异阵，则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$。

5. 设 A 与 B 都是对合阵，且 $|A| + |B| = 0$，证明$A+B$是奇异阵。（提示：完全仿 §2 例 1 之证法。）

6. 证明方阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

是非异阵，并求 M^{-1}。

7. 如果 n 阶阵 A 的任一元素均是整数，则称 A 为**整数阵**。如果 n 维列向量的每一分量均是整数，则称它为**整向量**。又称行列式等于 ± 1 的方阵为**么模阵**。

(i) 证明么模整数阵之逆阵仍是么模整数阵。

(ii) 设 A 是 n 阶整数阵。问：对任何 n 维整向量 b，n 阶线性方程组 $Ax = b$ 有整数解的充要条件是什么？并证之。（提示：由(i)，考虑么模整数阵的伴随阵的性质，并应用克拉梅法则。）

8. 设 A_{ij} 是 n 阶对合阵 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式，证明：$A_{ij} = \pm a_{ij}$；$i, j = 1, 2, \cdots, n$。

9. (i) 设

$$A = \begin{pmatrix} a+b\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & a-b\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

其中 a 与 b 是实数。证明 A 的任一元素与它的代数余子式的共轭复数相等。

(ii) 设 A 是 n 阶非零复阵，A_{ij} 是 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式，且 $a_{ij}=\overline{A_{ij}}$；$i,j=1,2,\cdots,n$，证明 A 非异，且 $|\overline{A}|=|A|^{n-1}$。

10．设 A 是 n 阶阵，证明：$|\mathrm{adj}A|=|A|^{n-1}$。
（提示：当 A 是非异阵时，应用（36）式。当 A 是奇异阵时，用(36)式证明 $\mathrm{adj}A$ 也奇异，再用定理 4。）

11．用化为上三角形行列式的方法计算下列行列式：

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots\cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 或 (ii) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & -a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots\cdots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

（提示：对(ii)，可化为能用上三角形行列式之模型Ⅱ。）

12．不用升阶法，试直接将 n 阶实镜象阵 I_n-2uu' 的行列式化成上三角形行列式，从而证明 $|I_n-2uu'|=-1$（此处 $u'u=1$）。
（提示：设 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，$D_n=|I_n-2uu'|$ 当 $u_n=0$ 时，立得 $D_n=D_{n-1}$，于是由归纳法即得 $D_n=-1$、当 $u_n\neq 0$ 时，用“送取法”：将 u_n 乘到(送入)第 n 行(上)，然后在第 n 列提出（取出）u_n，即可很快化为上三角形行列式。送取法的想法在第一章 §2 例 3 中已说过。）

13．用找 D_n 与 D_{n-1} 的关系式计算下面的柯希行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1+y_1} & \dfrac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_1+y_n} \\ \dfrac{1}{x_2+y_1} & \dfrac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_1} & \dfrac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$$

（提示：将 D_n 的前 $n-1$ 行中的每一行都分别减去其第 n 行，并在每一行每一列中提取公因子。再在提出公因子后的行列式 Δ 的前 $n-1$

列中，分别将它的每一列减去 Δ 的第 n 列，再提取公因子，即得

$$D_n=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j)(y_n-y_j)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_n+y_j)\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_i+y_n)}D_{n-1}$$

然后用归纳法。)

14. 应用范德蒙行列式的结论计算如下行列式

(i) $\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2}y_1 & \cdots & x_1y_1^{n-2} & y_1^{n-1} \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2}y_2 & \cdots & x_2y_2^{n-2} & y_2^{n-1} \\ \cdots\cdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2}y_n & \cdots & x_ny_n^{n-2} & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & x_1^2+x_1 & \cdots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2} \\ 1 & x_2+1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} \\ \cdots\cdots \\ 1 & x_n+1 & x_n^2+x_n & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-1} & x_1 & x_1^2\cdots x_1^{n-1} \\ \dfrac{x_2}{x_2-1} & x_2 & x_2^2\cdots x_2^{n-1} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{x_n}{x_n-1} & x_n & x_n^2\cdots x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

(提示：对 (ii) 从第 2 列起，依次以后一列减去其前一列即可，对 (iii)，设法化为(ii)。)

15. 找 D_n 与 D_{n-1}、D_{n-2} 的递推关系式，从而求出 D_n。

(i) $D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\theta & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

(ii)
$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & & \\ & \gamma & \alpha & \beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \alpha & \beta \\ & & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

(iii)
$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots\cdots & & & & & \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

(提示：对(iii)，设法找出 D_n 与 D_{n-1}、D_{n-2} 的两个递推关系式，从而解出 D_n。)

16．用升阶法计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_2^n \\ \cdots\cdots & & & & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

(提示：完全仿§4 例 7 之求法。)

17．用第一，二、三类方法计算下面的行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \cdots\cdots & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

18．证明下面的 n 阶阵 A 是非异阵：

$$A=\begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\varphi_1) & \cos(\theta_1-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_1-\varphi_n) \\ \cos(\theta_2-\varphi_1) & \cos(\theta_2-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_2-\varphi_n) \\ \cdots\cdots & & & \\ \cos(\theta_n-\varphi_1) & \cos(\theta_n-\varphi_2) & \cdots & \cos(\theta_n-\varphi_n) \end{pmatrix}$$

19．设 $s_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k$，k 是非负整数，证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdots\cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}\geqslant 0$$

而 $D_n=0$ 的充要条件是，$x_i=x_j, i\neq j; i,j=1,2,\cdots,n$。

（提示：将 D_n 表成 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的范德蒙行列式乘上它的转置行列式即可）

20．s_k 的假设同 19 题，计算行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \cdots\cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

（提示：可先计算：

$$D_{n+1}\cdot\begin{vmatrix} V'_n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

从而算出 D_{n+1}，此处 V_n 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的范德蒙矩阵。）

21．设 $A、B、C、D$ 是同阶方阵，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{vmatrix}=|A+B+C+D|\cdot|A+B-C-D|$$
$$\times|A-B+C-D|\cdot|A-B-C+D|$$

（提示：应用 §5 例 1 的结论）

22．计算下列行列式

（i）$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & -d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ （ii）$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ C & D & A & B \\ -D & C & -B & A \end{vmatrix}$，（$A、B、C、D$ 为方阵）

23. 设 A 与 B 为同阶方阵，计算行列式：

(i) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & -A \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} A & JBJ \\ B & JAJ \end{vmatrix}$，其中 $J=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

(提示：设法应用 §5 例 1 与例 2 即可算出(i)与(ii)。)

注 称$\begin{pmatrix} A & JBJ \\ B & JAJ \end{pmatrix}$为**中心对称阵**。它对应用数学中的信息论、线性系统论、线性估计论、数值分析等都有用。

24. 用行列式第一降阶定理计算下面的行列式

(i) $$D_5=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(ii) $$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ c & \lambda & d & \cdots & d \\ c & d & \lambda & \cdots & d \\ \cdots\cdots \\ c & d & d & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \quad (n\geqslant 2)$$

25. (费礼士，Phillis) 设 w_i, z_j 都是复数，

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} w_i & z_j \\ -\overline{z_j} & \overline{w_i} \end{pmatrix}; \quad i,j=1,2,\cdots,n$$

证明：

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots\cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}\geqslant 0$$

(提示：设法用第一降阶定理，并用归纳法即得。)

26. 用行列式第二降阶定理计算下面的行列式：

(i) $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ \cdots\cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

(ii) $$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots\cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}$$

27. 设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $n\times m$ 阵，$\lambda\neq 0, m\geqslant n$，证明：

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|$$

（提示：用行列式第二降阶定理即得。）

28. 设 A 是 n 阶反对称实方阵（即满足 $A' = -A$ 的实阵），且 A 的顺序主子式：$\Delta_{2k} \neq 0, \Delta_{2k-2} \neq 0, k \geq 2, 2k \leq n$，证明：$\Delta_{2k} \cdot \Delta_{2k-2} > 0$。此处设。

$$\Delta_i = \left| A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i \\ 1 & 2 & \cdots & i \end{pmatrix} \right|$$

（先证：奇数阶反对称行列式必为 0。这因为，由 $A' = -A$ 可得 $|A| = |A'| = |-A| = (-1)^n|A|$，而 n 是奇数，故 $|A| = -|A|$，即 A 的行列式为 0，然后完全仿 §5 例 7 之证法。）

29. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是正交阵，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。证明：只要有某一个 $a_{ij} \neq 0$，使 $a_{ij} + A_{ij} = 0$，则对任何满足 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$；$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ 的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$；$j_1, j_2, \cdots j_k$，恒有：

$$\left| A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_k \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \end{pmatrix} \right| + \left| \hat{A}_C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_k \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \end{pmatrix} \right| = 0$$

（提示：应用 §5 例 8 之结论．

30. 设 n 阶阵 A 满足：$A^2 = bI_n, b > 0$，证明：

$$\left| A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_k \\ j_1 & j_2 \cdots j_k \end{pmatrix} \right| = b^{k-n}|A| \cdot \left| \hat{A}_C\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \cdots j_k \\ i_1 & i_2 \cdots i_k \end{pmatrix} \right|$$

其中，$1 \leq k \leq n-1, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n; 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$。

（提示：完全仿 §5 例 8 之证法。）

31. （**雅可比，Jacobi**）设 A 是 n 阶非异阵，证明：对满足 $1 \leq k \leq n-1$ 的 k 以及 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$；$1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ 的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 与 $j_1, j_2, \cdots j_k$，恒有

$$\left| (\mathrm{adj}A)\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix} \right| = |A|^{k-1}\left| \hat{A}_C\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_k \\ i_1 i_2 \cdots i_k \end{pmatrix} \right|$$

（当 A 是奇异阵时，上式也正确，见第四章习题10。）

32. 设 n 阶阵 A 的 k 阶顺序主子式 $\Delta_k = \left| A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} \right| \neq 0$，$1 \leq k \leq n-1$，$n \geq 2$，记

$$s_{ij} = \left| A\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots k & i \\ 1 & 2 \cdots k & j \end{pmatrix} \right|；\quad i, j = k+1, k+2, \cdots, n,$$

$$S=\begin{pmatrix} s_{k+1,k+1} & \cdots & s_{k+1,n} \\ \cdots\cdots & & \\ s_{n,k+1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

称 S 为**西尔维斯脱(Sylvester)矩阵**，证明：

（i）

$$|A|=\frac{1}{\Delta_k^{n-k-1}}|S|=\frac{1}{\Delta_k^{n-k-1}}\begin{vmatrix} s_{k+1,k+1} & s_{k+1,k+2} & \cdots & s_{k+1,n} \\ s_{k+2,k+1} & s_{k+2,k+2} & \cdots & s_{k+2,n} \\ \cdots\cdots & & & \\ s_{n,k+1} & s_{n,k+2} & \cdots & s_{nn} \end{vmatrix}$$

称上式为行列式的**第三降阶定理**。

（ii）$|S|=\Delta_k^{n-k-1}|A|$（称为**西尔维斯脱恒等式**）。

（提示：将 A 如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix} & A_1 \\ A_2 & A\begin{pmatrix}k+1\cdots n\\ k+1\cdots n\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

对 $|A|$ 应用第一降阶定理，再记

$$A\begin{pmatrix}k+1\cdots n\\ k+1\cdots n\end{pmatrix}-A_2\left(A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\right)^{-1}A_1$$

$$=\begin{pmatrix} c_{k+1,k+1} & c_{k+1,k+2} & \cdots & c_{k+1,n} \\ c_{k+2,k+1} & c_{k+2,k+2} & \cdots & c_{k+2,n} \\ \cdots\cdots & & & \\ c_{n,k+1} & c_{n,k+2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

然后对 c_{ij} 用行列式的升阶公式，即得(i)。由(i)显然得到(ii)。)

注　当 $k=1$，即 $a_{11}\neq 0$，第三降阶定理可写成实用算式：

$$|A|=\frac{1}{a_{11}^{n-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{2n}\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{1n}\\ a_{31} & a_{3n}\end{vmatrix} \\ \cdots\cdots & & & \\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{n1} & a_{n2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{n1} & a_{n3}\end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{1n}\\ a_{n1} & a_{nn}\end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

33．设 A 是 n 阶非异实阵，证明：

$$\left|(A'A)\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\right|>0,\ k=1,2,\cdots,n$$

（提示：由于 $|A|\neq 0$，故 A 的前 k 个列至少有某个 k 阶子式 $\left|A\begin{pmatrix}i_1 & i_2\cdots i_k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\right|\neq 0$，再应用公式（76）即得证。）

34．设 A_{ij} 是 n 阶阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式，证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1\\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1\\ \cdots\cdots & & & & \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1\end{vmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$$

（提示：将 1 表成：$1=(a_{in}+1)-a_{in}$；$i=1,2,\cdots,n$，然后证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1\\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1\\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

再应用公式（80）即得证。）

35．设 A 是 n 阶正交阵，证明：对满足 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 的任何 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 以及 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 的 k，恒有

$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}\left|A\begin{pmatrix}i_1 & i_2\cdots i_k\\ j_1 & j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|^2=1$$

（提示：应用拉普拉斯定理与 §5 例 8 之结论即可。若不用拉普拉斯定理，则应用柯希-皮内公式及 A 的正交性即可。）

第三章　线性方程组及其应用

§1 基本概念与基本结论

将 m 个方程、n 个未知量的如下线性方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i; \qquad i=1,2,\cdots,m$$

写成"矩阵方程" $Ax=b$ 的形状。其中系数矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$，并记 A 的增广阵为 $\widetilde{A}=(A,b)$。

本章的主要基本概念有三：$Ax=b$ 的解（向量）；向量（列向量或行向量）组的线性相关与线性无关；矩阵的秩（数）。其中核心的概念是矩阵的秩，它是如下定义的。

定义　设 $m\times n$ 阵分别按它的行与列的分块是

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \tilde{\alpha}_2\\ \vdots\\ \tilde{\alpha}_m\end{pmatrix}$$

其中，

$$\tilde{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}); \qquad \alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$$

称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的任一极大线性无关组中的向量个数 r 为 A 的**秩数**，简称为**秩**，并记为：$r(A)=r$。

向量组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots\alpha_{j_r}$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一个**极大线性无关组**，如果：(i)$\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性无关，(ii)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任一向量都

是$a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_r}$的线性组合。

关于秩的基本结论有如下四个，分别写成定理1、2、3、4。

定理 1 A的行向量$\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_m$的任一极大线性无关组的个数也是$r$。换言之，$A$与$A'$有相同的秩：

$$r(A)=r(A').$$

定理 2 设A与B分别是$m\times n$阵与$n\times l$阵，则

$$r(AB)\leqslant r(A),\qquad r(AB)\leqslant r(B)。$$

定理 3 设$m\times n$阵A的秩为r，则必存在m阶非异阵P与n阶非异阵Q，使

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

反之，若(3)成立，则$r(A)=r$。(因为$r(PAQ)=r(A)$)

定理 3 指出，可以用初等变换求矩阵的秩。

定理 4 $m\times n$阵A的秩是r的充要条件是，A至少有一个r阶子式不等于零，而A的任何$r+1$阶子式全为零。换言之，A的秩就是A中非零子式的最高阶数。

线性方程组$Ax=b$要解决的问题是：(i)怎样判断它是否有解？(ii)在$Ax=b$有解时，如何求其解，解的形状怎样？(iii)在$Ax=b$有解时，解有什么特性？(iv)在$Ax=b$有解时，它的解有哪些应用？

上述四个问题已全部解决，关于(iv)，见§2，关于(i)、(ii)、(iii)由下面三个基本结论完全解决。

定理 5 线性方程组$Ax=b$有解的充要条件是，$r(A)=r(\tilde{A})$。

定理 6 设A是$m\times n$阵，$r(A)=r$，若$Ax=b$有解，则

(i)当$r<n$时，$Ax=b$有无穷多个解(向量)；

(ii)当$r=n$时，$Ax=b$只有一个解(唯一解)；

(iii)若$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_r \end{pmatrix}$是$A$的一个$r$阶非异子矩阵，则解向量$x$中的分量$x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n}$可取任意数，而$x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_r}$可由下列方程解出：

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_r} \end{pmatrix} = \left[A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_{j_1} \\ b_{j_2} \\ \vdots \\ b_{j_r} \end{pmatrix} - \left[A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r \end{pmatrix}\right]^{-1} B \begin{pmatrix} x_{j_{r+1}} \\ x_{j_{r+2}} \\ \vdots \\ x_{j_n} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $j_1,\cdots,j_r,j_{r+1},\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，B 是下列 $r\times(n-r)$ 阵：

$$B=\begin{pmatrix} a_{i_1,j_{r+1}}\cdots a_{i_1,j_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i_r,j_{r+1}}\cdots a_{i_r,j_n} \end{pmatrix}.$$

定理 7 设 A 是 $m\times n$ 阵，$r(A)=r(A,b)=r<n$，且 $A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r \end{pmatrix}$ 是非异阵，又设 $j_1\cdots,j_r,j_{r+1},\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，并设 T 是这种 n 阶排列阵，它使

$$T\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_r} \\ x_{j_{r+1}} \\ \vdots \\ x_{j_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$$

则线性方程组 $Ax=b$ 的解有如下的“结构定理”：

（i）“齐次线性方程组”$Ax=0$ 必有一个“基础解系”，它由 $Ax=0$ 的 $n-r$ 个线性无关的解（向量）$\delta_1=T\beta_1,\delta_2=T\beta_2,\cdots,\delta_{n-r}=T\beta_{n-r}$ 组成，使得 $Ax=0$ 的任一解（向量）都是 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r}$ 的线性组合。其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$ 是 $n\times(n-r)$ 阵：

$$\begin{pmatrix} -\left[A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r \end{pmatrix}\right]^{-1} B \\ I_{n-r} \end{pmatrix} = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}) \tag{5}$$

的 $n-r$ 个列。

反之，对任何数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$，$k_1\delta_1+\cdots+k_{n-r}\delta_{n-r}$ 都是 $Ax=0$ 的解。当 $k_1,\cdots,k_{n-r}$ 取遍任何数时，称所有解 $k_1\delta_1+\cdots+k_{n-r}\delta_{n-r}$ 中的任一个为 $Ax=0$ 的**通解**。

（ii）非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的任一解 a 等于它的某一个指定的（确定的）解 α（称为 $Ax=b$ 的特解）加上 $Ax=0$ 某一个解。即

$\alpha=\alpha_0+l_1\delta_1+l_2\delta_2+\cdots+l_{n-r}\delta_{n-r}$，而 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-r}$ 为某些唯一确定的数。

反之，$Ax=b$ 的一个特解加上 $Ax=0$ 的通解全是 $Ax=b$ 的解。

当 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 取遍任何数时，称所有解 $\alpha_0+k_1\delta_1+k_2\delta_2+\cdots+k_{n-r}\delta_{n-r}$ 中的任一个为 $Ax=b$ 的通解。于是可将(ii)概括为：

$Ax=b$ 的通解等于 $Ax=b$ 的特解加上 $Ax=0$ 的通解。

§2 线性方程组解的理论与应用，用消去法解线性方程组

一、解的理论的应用

$Ax=b$ 的解的理论的应用主要依据下述三个结论。

第一，克拉梅法则之逆定理： 如果 n 阶线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解，则 A 必是非异阵。(由定理 6 的(i)显然可知)。

此结论对判断工程设计的正确性有帮助。例如，由某项工程技术问题归结出来的数学模型为 $Ax=b$，从实际情况可知其解 x 是唯一的。如果 $Ax=b$ 的系数阵 A 是奇异的（即 $|A|=0$)，则可断定此模型是错误的，必须作出修改。

第二，齐次方程组之基本定理： n 阶齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解（即解 x 不是零向量）的充要条件是，A 为奇异阵。(这由定理 6 也知是显然的)

此结论主要用于从理论上判断方阵 A 是否非异，如下面三例所示。

例 1 设 α 与 β 都是 n 维非零列向量，A 是 n 阶非异阵，则 $(\beta'A^{-1}\alpha)A-\alpha\beta'$ 必是奇异阵。

证 只要证齐次方程组 $[(\beta'A^{-1}\alpha)A-\alpha\beta']x=0$ 有非零解即可。因为 $\alpha\neq 0$，而 A 非异，故 $A^{-1}\alpha\neq 0$，又因

$$[(\beta'A^{-1}\alpha)A-\alpha\beta'](A^{-1}\alpha)=(\beta'A^{-1}\alpha)\alpha-\alpha(\beta'A^{-1}\alpha)=0$$

（因 $\beta'A^{-1}\alpha$ 是一个数），故 $A^{-1}\alpha$ 确是 $[(\beta'A^{-1}\alpha)A-\alpha\beta']x=0$ 的非零解。所以 $(\beta'A^{-1}\alpha)A-\alpha\beta'$ 是奇异阵。

注意，当 $\beta' A^{-1}\alpha \neq 0$ 时，由行列式的第二降阶定理也可证得 $\beta' A^{-1}\alpha - \alpha\beta'$ 的奇异性。而当 $\beta' A^{-1}\alpha = 0$ 时，则 $-\alpha\beta'$ 显然是奇异阵(因 $-\alpha'\beta$ 的 n 个行全成比例)。

例2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称实阵，$\boldsymbol{D}$ 是主对角元全大于零的 n 阶实对角阵，证明：$|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}|>0$。

证 先证 $|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}|\neq 0$。如不然，则 $\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}$ 是奇异阵，故存在 n 维实列向量 $\xi\neq 0$，使 $(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A})\xi=\boldsymbol{0}$。于是

$$\xi'\boldsymbol{D}\xi+\xi'\boldsymbol{A}\xi=\xi'(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A})\xi=\xi'\cdot 0=0$$

但 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$ (因 $\boldsymbol{A}$ 反对称)，故 $\xi'\boldsymbol{A}\xi=0$，所以 $\xi'\boldsymbol{D}\xi=0$。若记

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}, \qquad \xi=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

则得 $\sum_{i=1}^{n} d_i\xi_i^2=\xi'\boldsymbol{D}\xi=0$。由假设 $d_i>0$，而 ξ_i 为实数，$i=1,2,\cdots n$，故必有：$\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$，即 ξ 是零向量，此为矛盾，故必有 $|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}|\neq 0$。

再证 $|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}|>0$，这需要用到数学分析中关于连续函数的**魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理**："设 $f(x)$ 为实闭区间 $[a,b]$ 上的连续实值函数，如果 $f(a)f(b)<0$，则必存在 ξ，$a<\xi<b$，使 $f(\xi)=0$"。下面证明 $|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}|>0$。

作实闭区间 $[0,1]$ 上的连续实值函数：$f(x)=|\boldsymbol{D}+x\boldsymbol{A}|$，因为对任意实数 x，$x\boldsymbol{A}$ 仍是反对称阵，故对任何 $x\in[0,1]$，根据上面已证的结论，恒有 $f(x)=|\boldsymbol{D}+x\boldsymbol{A}|\neq 0$，由于

$$f(0)=|\boldsymbol{D}|=d_1d_2\cdots d_n>0$$

故若 $|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}|=f(1)<0$，则由魏尔斯特拉斯定理，必存在 ξ，$0<\xi<1$，使 $f(\xi)=|\boldsymbol{D}+\xi\boldsymbol{A}|=0$，此为矛盾。故 $|\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A}|>0$。

据例 2 可知，对任何反对称实阵，$\boldsymbol{I}_n\pm\boldsymbol{A}$ 必非异。

例3 如果方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|; \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

则称 A 为**严格对角占优阵**，

(i) 证明 A 必是非异阵。此结论称为**勒维-阿达马**（Lévy-Hadamard）**定理**。

(ii) 如果 A 是严格对角占优实方阵，且 A 的主对角元全是正数，也即

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|; \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

则 $|A|>0$。

证 若 A 奇异，则存在 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)'\neq 0$（即 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 不全为 0），使 $A\xi=0$，也即：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j=0$；$i=1,2,\cdots,n$，将这些等式改写为：

$$a_{ii}\xi_i=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\xi_j; \qquad i=1,2,\cdots,n$$

上式两边取绝对值，并放大其右端，可得

$$|a_{ii}|\,|\xi_i|=\left|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\xi_j\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\cdot|\xi_j|; \qquad i=1,2,\cdots,n, \tag{8}$$

记 $|\xi_t|=\max\{|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots,|\xi_n|\}$（即 $|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots,|\xi_n|$ 中之最大数），并在(8)的 n 个不等式中特别取第 t 个不等式，则得

$$|a_{tt}|\cdot|\xi_t|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}|a_{tj}|\cdot|\xi_j|\leqslant\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}|a_{tj}|\right)|\xi_t|$$

因 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 不全为 0，故 $|\xi_t|\neq 0$，于是从上式中消去 $|\xi_t|$，得到：$|a_{tt}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}|a_{tj}|$，这与假设（6）相矛盾。故 A 非异。

再证(ii)，由(i)知 A 非异，故 $|A|\neq 0$。今证 $|A|>0$。作 [0,1 上连续实值函数：

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11} & xa_{12} & \cdots & xa_{1n}\\ xa_{21} & a_{22} & \cdots & xa_{2n}\\ & \cdots & \cdots & \\ xa_{n1} & xa_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则由假设（7）可知，$f(0)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}>0$。若 $|A|=f(1)<0$，则由魏尔斯特拉斯定理，存在ξ，$0<\xi<1$，使

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \xi a_{12} & \cdots & \xi a_{1n} \\ \xi a_{21} & a_{22} & \cdots & \xi a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \xi a_{n1} & \xi a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=f(\xi)=0$$

但由假设（7），上式左边行列式的元素仍然满足：

$$a_{ii}>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|\xi a_{ij}| \qquad (因\ 0<\xi<1),$$

故由(i)，也应有 $f(\xi)\neq 0$。此为矛盾。故 $|A|=f(1)>0$。

上三例是个示范，告诉我们运用齐次方程组判断方阵奇异（例1）与非异（例2、例3）的具体方法，对判断非异阵来说，还告诉我们何时用其整体向量之非零性（例2）；何时需用其分量（例3）。还告诉我们，证明 $|A|>0$ 时连续函数 $f(x)$的两种具有代表性的不同作法。读者不难由此举一以反三（参阅本章习题2与习题3）。

第三，齐次方程组 $Ax=0$ 必存在基础解系，且可具体构造出来。（见定理 7 的(i)）

例4 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 阵，则必存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 阵 B，使 $AB=0$。

证 设 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A\delta_i=0$；$i=1,2,\cdots,n-r$，于是

$$A(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r})=(A\delta_1,A\delta_2,\cdots,A\delta_{n-r})=(0,0,\cdots,0)=0$$

易知 $B=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r})$ 是秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 阵（因 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r}$ 线性无关），故 B 即为所求。

例5 设 α 与 β 都是 n 维实列向量，且满足 $\alpha'\beta=1$，试具体找出 n 阶实阵 A 与 B，它们的第 1 列分别是 α 与 β，使得 $A'B=I_n$。

解 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$，由 $\alpha'\beta=1$ 可得

$$b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=1 \tag{9}$$

故至少存在某个 i，$1\leqslant i\leqslant n$，使 $b_ia_i\neq 0$。不失一般性，可设 $a_1\neq 0$，$b_1\neq 0$，于是由（5)式，下列 $1\times n$ 线性方程组：

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0 \tag{10}$$

的基础解系是如下的 $n\times(n-1)$ 阵

$$\begin{pmatrix} -b_1^{-1}b_2 & -b_1^{-1}b_3 & \cdots & -b_1^{-1}b_n \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}=(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n) \tag{11}$$

的 $n-1$ 个列向量 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$，作 n 阶阵：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} a_1 & -b_1^{-1}b_2 & -b_1^{-1}b_3 & \cdots & -b_1^{-1}d_n \\ a_2 & 1 & & & \\ a_3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n & & & & 1 \end{pmatrix},(\text{其中 } \alpha_1=\alpha)$$

由行列式第一降阶定理及(9)式可得

$$|A|=|I_{n-1}|\left\{a_1+(b_1^{-1}b_2,b_1^{-1}b_3,\cdots,b_1^{-1}b_n)\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right\}$$

$$=a_1+b_1^{-1}(b_2a_2+b_3a_3+\cdots+b_na_n)=b_1^{-1}\neq 0,$$

故 A 是非异阵，且由于 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都是方程组 (10) 的解，故可得 $\beta'\alpha_i=0$，即$\alpha'_i\beta=0$；$i=2,3,\cdots,n$，于是

$$A'\beta=\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}\beta=\begin{pmatrix} \alpha'_1\beta \\ \alpha'_2\beta \\ \vdots \\ \alpha'_n\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\mathbf{e}_1$$

作 n 阶阵：

$$B=(\beta,A'^{-1}e_2,A'^{-1}e_3,\cdots,A'^{-1}e_n)$$

则由$A'B=(A'\beta,e_2,e_3,\cdots,e_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)=I_n$知，$A$与$B$即为所求。

例6 设 A 是 $m\times n$ 复阵，证明：

$$r(A\overline{A'})=r(\overline{A'}A)=r(A) \tag{12}$$

证 设 $r(A)=r$，$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，由于

$Ax=\mathbf{0}$ 与 $\overline{A'}Ax=\mathbf{0}$ 是同解方程组（见第一章习题3），故 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{n-r}$ 也是 $\overline{A'}Ax=\mathbf{0}$ 的解。因为 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r}$ 线性无关，因而 $\overline{A'}Ax=\mathbf{0}$ 的任一解（因而）也是 $Ax=\mathbf{0}$ 的解，是 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r}$的线性组合，所以 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n-r}$ 也是 $\overline{A'}Ax=\mathbf{0}$ 的一个基础解系。今设 $r(\overline{A'}A)=s$，则 $\overline{A'}Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系中向量的个数应是 $n-s$。因为齐次线性方程组的任意两个基础解系所含的向量个数相同，故 $n-s=n-r$，也即 $r=s$ 故得 $r(A)=r(\overline{A'}A)$。同法可证 $r(A)=r(A\overline{A'})$。

二、用消去法解线性方程组

从计算角度来说，用消去法判断线性方程组是否有解，同时在有解时找出它的全部解，是求解线性方程组最简捷的方法，比用定理5与定理6优越，今介绍此法，先证

引理 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 阵，则必存在 n 阶非异阵 P，n 阶排列阵T，使得

$$PAT=\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

证 将定理3中的（3)式改写成

$$P_1A=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中 P_1 与 Q 分别是 m 阶非异阵与 n 阶非异阵，由于初等变换不改变矩阵的秩，故$\begin{pmatrix} Q_1 Q_2 \\ 0\ \ 0 \end{pmatrix}$的秩也是 r，设$\begin{pmatrix} Q_1 Q_2 \\ 0\ \ 0 \end{pmatrix}$的 j_1、j_2、…、j_r 列线性无关，于是存在 n 阶排列阵 $P_{j_1j_2\cdots j_rj_{r+1}j_{r+2}\cdots j_n}=T$，使

$$P_1AT=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

的右端矩阵的前 r 列恰好是 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$（这由标准单位向量的性质便知），也即$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}$的秩为 r，故由定理4，A_1 必是非异阵。记 $A_1^{-1}A_2=B$，$P=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}P_1$，于是由（15）式即得

$$PAT=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}P_1AT=\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由引理，可将线性方程组 $Ax=b$ 化成同解方程组：

$$(PAT)(T'\mathbf{x})=Pb$$

（因 T 是正交阵，见第一章 §5 例 4），记

$$T'\mathbf{x}=\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix},\qquad Pb=\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_1\\ \mathbf{C}_2\end{pmatrix}\tag{17}$$

其中 $\mathbf{Z}_1$ 与 $\mathbf{C}_1$ 均为 $r\times 1$ 阵。由（13）式与（17）式，（16）可化为同解方程组：

$$\begin{pmatrix}I_r & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

也即

$$\begin{pmatrix}Z_1+BZ_2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

由此可知，$Ax=b$ 有解的充要条件是，$\mathbf{C}_2=0$，当 $\mathbf{C}_2=0$ 时，方程组 $Ax=b$ 的解可以通过解下列方程组

$$\mathbf{Z}_1=C_1-BZ_2\tag{18}$$

$$x=TzZ\tag{19}$$

得出，这里的 $\mathbf{Z}_2$ 可以取任何 $n-r$ 维列向量。当 $r=n$ 时，有 $Ax=b$ 有唯一解；当 $r<n$ 时，$Ax=b$ 有无穷多个解。

解一个具体的线性方程组 $Ax=\mathbf{b}$ 时，根本不必求出 P 与 T 的具体形状，只要用消去法（初等变换）将 $\widetilde{A}=(A,b)$ 化成

$$(A,b)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}I_r & B & \mathbf{C}_1\\ 0 & 0 & \mathbf{C}_2\end{array}\right),$$

就立刻可知 $Ax=b$ 是否有解。当 $c_2=0$（即有解）时，就可由（18）、（19）式找出 $Ax=b$ 的全部解。不过要注意，虽然对 (A,b) 的行可以作任何一种初等变换，但对 (A,b) 的列仅能作列的对调，这点要特别注意。

例7　解线性方程组：

$$\begin{aligned}&-4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\ &2x_1-x_2+x_3+3x_4=-8\\ &6x_1-3x_2+3x_3+2x_4=-10\end{aligned}$$

解 作下列初等变换：

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}-4 & 2 & -2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 3 & -8\\ 6 & -3 & 3 & 2 & -10\end{array}\right)\xrightarrow[\text{行加第一行}]{\text{第3行减第2}}\left(\begin{array}{cccc|c}-4 & 2 & -2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 3 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{两列}]{\text{对调1、4}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & -4 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 2 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{行的3倍}]{\text{第2行减第1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & -4 & 2\\ 0 & -7 & 7 & 14 & -14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}\left(-\frac{1}{7}\right)}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{2行的2倍}]{\text{第1行减第}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

故原方程组有解，且可化为：

$$z_1=-2,\qquad z_2=2+z_3+2z_4,$$

而 z_3 与 z_4 可取任意数。由于

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=P_{14}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_4\\z_2\\z_3\\z_1\end{pmatrix},\qquad (\text{此处 } T=P_{4231}=P_{14})$$

所以原方程组的解是，$x_1=z_4$，$x_2=z_2$，$x_3=z_3$，$x_4=z_1$，即

$$x_4=-2,\ x_2=2+x_3+2x_1\ \ ((x_1、x_3\text{ 可取任意数})。$$

§3 矩阵的秩与矩阵的子式

一、矩阵的秩的两个初等性质的应用

矩阵的秩是矩阵的列向量组（或行向量组）的任一极大线性无关组所含向量的个数，故由向量组线性相关与线性无关的概念，容易得出下列关于秩的两个初等性质：（证略）。

(i) 设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $l\times n$ 阵，则

$$\max(r(A),r(B))\leqslant r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B) \tag{20}$$

(ii) 设 A 与 B 分别是 $r\times s$ 阵与 $p\times q$ 阵，C 是 $r\times q$ 阵，则

$$r\begin{pmatrix}A & C\\0 & B\end{pmatrix}\geqslant r(A)+r(B) \tag{21}$$

并且当 A（或 B）是方阵且非异时，或者 $C=0$ 时，上式的等号成立。

例1 设A与B都是$m\times n$ 阵，证明：

$$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B) \tag{22}$$

证 用“和化积”的思想（参阅第一章§2例 2 以及 第二章§2例 1），将 $A+B$ 表成：

$$A+B=(I_m,I_m)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$$

先应用定理 2，再应用（20）式，即得

$$r(A+B)\leqslant r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B)$$

二、行（列）向量的无关性与行列式

n 维向量组与该向量组排成的矩阵的子式有如下的密切联系，即

定理8 p 个 n 维行向量：$\alpha_i=(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n})$；$i=1,2,\cdots,p,p\leqslant n$，线性无关的充要条件是，由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$排成的 $p\times n$ 阵：

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \\a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn}\end{pmatrix}$$

中至少有一个 p 阶子式不等于 0。

由定理 8 即得：

方阵 A 是 n 阶非异阵$\Longleftrightarrow r(A)=n$。（故称非异阵为**满秩阵**）。

行向量组的无关性与行列式的联系比之矩阵的秩与行列式的联系具有更大的灵活性，如下例所示。

例2 对任意一个 $p\times n$ 阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix},p\leqslant n$$

证明：必存在主对角线上只出现 1 或 -1的 $p\times n$ 对角形阵 D，使$A+D$ 的 p 个行向量线性无关。

证 首先，$a_{11}+1$ 与 $a_{11}-1$ 这两个数中至少有一个不为 0（否则会有$1=-1$ 的矛盾）不妨设 $a_{11}-1\neq 0$，则

$$\alpha_1=(a_{11}-1,a_{12},\cdots,a_{1n})\neq 0$$

故 α_1 线性无关。再考虑向量 α_1 与向量：

$$\beta_1=(a_{21},a_{22}+1,a_{23},\cdots,a_{2n})$$

$$\beta_2=(a_{21},a_{22}-1,a_{23},\cdots,a_{2n})$$

则可证下列两个行列式：

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}+1 \end{vmatrix},\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-1 \end{vmatrix}$$

中至少有一个不等于 0，不然的话，经过简单计算，又可得 $1=-1$ 的矛盾。故不妨设 $\Delta_1\neq 0$，由定理8，α_1 与 β_1 必线性无关，于是找到了$2\times n$对角形阵：$D_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，使得$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$的两个行向量线性无关。

今对p用归纳法，设对A的$p-1$阶顺序主子阵$A_{p-1}=A\begin{pmatrix} 1\ 2\ \cdots p-1 \\ 1\ 2\ \cdots p-1 \end{pmatrix}$，已找到$(p-1)\times n$ 阵：

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ & & & d_{p-1} \end{pmatrix}=(D_{p-1},0),\qquad \left(D_{p-1}=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_{p-1} \end{pmatrix}\right)$$

其中 $d_i=1$ 或 $d_i=-1$；$1\leqslant i\leqslant p-1$，使得

$$\left|A_{p-1}+D_{p-1}\right|=\begin{vmatrix} a_{11}+d_1 & a_{12} & \cdots & a_{1p-1}; \\ a_{21} & a_{22}+d_2 & \cdots & a_{p-1;2} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{p-1,1} & a_{2,p-12} & \cdots & a_{p-1;p-1}+d_{p-1} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (28)$$

则同样可以证下列两个行列式：

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}A_{p+1}+D_{p-1} & u\\ v & a_{pp}+1\end{vmatrix},\qquad \Delta_4=\begin{vmatrix}A_{p+1}+D_{p-1} & u\\ v & a_{pp}-1\end{vmatrix}$$

中至少有一个不等于0，其中$u=(a_{1p},a_{2p},\cdots,a_{p-1,p})'$，$v=(a_{p1},a_{p2},\cdots a_{p,p-1})$。事实上，如果$\Delta_3=\Delta_4=0$，则因$A_{p-1}+D_{p-1}$非异（由（23）式），故由行列式第一降阶定理可知，

$$0=\Delta_3=|A_{p-1}+D_{p-1}|\cdot(a_{pp}+1-v(A_{p-1}+D_{p-1})^{-1}u),$$

$$0=\Delta_4=|A_{p-1}+D_{p-1}|\cdot(a_{pp}-1-v(A_{p-1}+D_{p-1})^{-1}u),$$

由上两式及（23）可得：$1=-1$，此为矛盾，故Δ_3与Δ_4中至少有一个非零。所以又找到了$p\times n$阵：$D=\begin{pmatrix}D_{p-1} & 0 & 0\\ 0 & d_p & 0\end{pmatrix}$，$d_p=1$或$d_p=-1$，使$A+D$的$p$阶顺序主子式（$\Delta_3$或$\Delta_4$）不等于0，故由定理8，$A+D$的$p$个行向量线性无关。

例2的一个特例：当$p=n$时，即得行列式的一个有用结论："对任何方阵A，必可找到主对角元是1或-1的对角阵D，使$|A+D|\neq 0$"。

三、矩阵的秩与矩阵的子式

§1定理4已指出了矩阵A的秩与A的子式的关系，且其充分性提供了用行列式求A的秩的方法：若A的r阶子式，$D\neq 0$，且A的所有$r+1$阶子式全为0，则$r(A)=r$。然而，用这个结论求A的秩是不可取的。因为条件给得太多，因而验证时的计算量就随之增多。下面给出一个用较弱的条件求A的秩的方法，先引进

定义 设$D=\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ j_1 j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right|$是$m\times n$阵$A$的$r$阶子式，称包含$D$的$r+1$阶子式：$\left|A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r i_{r+1}\\ j_1\cdots j_r j_{r+1}\end{pmatrix}\right|$为$D$的**加边子式**。

命题 如果$m\times n$阵A的某个r阶子式D不等于0，而D的所有加边子式全等于零，则A的秩为r。

证 为书写简洁计，不妨设$D=\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots r\\ 1 & 2 & \cdots r\end{pmatrix}\right|\neq 0$，由定理8，$A$

的前 r 行 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_r$ 线性无关，若能证任一 $\tilde{\alpha}_p$（A 的第 p 行）是 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots\tilde{\alpha}_r$ 的线性组合；$r+1\leqslant p\leqslant n$，则 $r(A)=r$。今证之：作 $(r+1)\times n$ 阵：

$$\tilde{A}_p=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_1\\ \tilde{\alpha}_2\\ \vdots\\ \tilde{\alpha}_r\\ \tilde{\alpha}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn}\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr} & a_{p,r+1} & \cdots & a_{pn}\end{pmatrix}\quad r+1\leqslant p\leqslant n$$

若能证 $r(\tilde{A}_p)=r$，则 $\tilde{\alpha}_p$ 就是 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_r$ 的线性组合。为证明这一点，要用到假设条件，故先将 $\tilde{A}_p$ 按它的列分块 $\tilde{A}_p=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$ 此处 α_j 均为 $r+1$ 维列向量；$j=1,2,\cdots,n$。由于 $D\neq0$，故由定理8，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。但由假设，D 的加边子式全为 0，故对任一 s；$r+1\leqslant s\leqslant n$，恒有 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_s|=0$，于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_s$ 线性相关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，所以 α_s 全是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合；$s=r+1,\cdots n$。这正好说明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $\tilde{A}_p$ 的列向量组的极大线性无关组，所以，$r(\tilde{A}_p)=r$，因而由上面的说明，$r(A)=r$。

上述证明中关键的两步，即：作 $\tilde{A}_p$ 以及借助 $\tilde{A}_p$ 的列向量组的无关性（行向量的问题通过行列式过渡到借助列向量来解决问题），乃是经常采用的思维方法，请予以注意。（参阅本章习题12）

习　题

1．设 A 是 n 阶实对称阵（即 $A'=A$），证明 $I_n+\sqrt{-1}\,A$ 与 $I_n-\sqrt{-1}\,A$ 全是非异阵。

（提示：仿§2例2第一部分之证法。）

2．设 A 是非异实阵，S 是反对称实阵，则 $|A'A+S|>0$。

3．(i)设 A 是 n 阶实阵，证明：必存在正整数 N，使 $|NI_n+A|>0$。

(ii) 设 A 是 n 阶实阵，若对任意 n 维实列向量，恒有：$x'Ax>0$，证明：$|A|\neq0$。

(iii) 设 A 是 n 阶实阵，若对任意 n 维非零的实列向量 x，恒有：$x'Ax>0$，证明：$|A|>0$。

（提示：设法取满足本章（7）式的 N，并用 §2 例 3 的 (ii) 之结论即得(i)。又用反证法即得(ii)。对于(iii)，作 $[0,\infty)$ 上的连续实值函数：$f(t)=|tI_n+A|$，然后仿 §2 例 3 之证法。）

4．设 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是实阵，且 $a_{ii}>0$；$i=1,2,\cdots,n$，$a_{ij}<0$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots n$，又设 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=0$；$i=1,2,\cdots,n$，证明：$r(A)=n-1$。

（提示：由假设易知 $|A|=0$。考虑顺序主子阵 $A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots n-1\\ 1 & 2 & \cdots n-1\end{pmatrix}$，由假设条件可证得，$a_{ii}>\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|a_{ij}|$；$i=1,2,\cdots,n-1$，再用 §2 例 3 之结论。）

5．证明：任何 r 个线性无关的 n 维列向量 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r$ $(r<n)$ 必可作为某个线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系。

6．设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $n\times l$ 阵，证明：方程组 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 是同解方程组的充要条件是，$r(AB)=r(B)$。

（提示：仿 §2 例 6 之证法，本题是该例的结论之推广。）

7．用消去法判断下列线性方程组是否有解，若有解，求出它：

$$
\begin{aligned}
2x_1+4x_2+x_3-2x_4&=5\\
3x_1+6x_2-3x_3-3x_4&=3\\
x_1+2x_2+5x_3-x_4&=7\\
2x_1+4x_2-8x_3-2x_4&=-4
\end{aligned}
$$

8．用 §2 第二段的引理证明定理 4。

（提示：由引理，存在 P 与 T，使 $PAT=\begin{pmatrix}I_r & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，故

$$r(A,b)=r\left(P(A,b)\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=r(PAT,Pb)=r\left(\begin{array}{cc|c}I_r & B & C_1\\ 0 & 0 & C_2\end{array}\right)$$

于是 $Ax=b$ 有解 $\Longleftrightarrow C_2=0\Longleftrightarrow r(A,b)=r\begin{pmatrix}I_r & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}=r=r(A)$。）

9．设 A 与 B 是同阶方阵，证明：$r(AB-I)\leqslant r(A-I)+r(B-I)$。

（提示：由 $AB-I=(AB-B)+(B-I)$，再用定理2及（22）式。）

10. 设 A 是 n 阶阵，证明：必存在主对角元是 1 或 -1 的 n 阶对角阵 D，使 $DA+I$ 是非异阵。

（提示：应用 § 3例 2 之结论及行列式乘法规则。）

11. 设 I_n 是 n 阶单位阵，证明：

（i）若 S 是 n 阶反对称实阵，则 $A=(I_n-S)(I_n+S)^{-1}$ 必是正交阵（$I_n\pm S$ 的非异性见 §2 例 2。）

（ii）反之，若存在 n 阶正交阵 A，使 $A+I_n$ 是非异阵，则必存在 n 阶反对称实阵 S，使 $A=(I_n-S)(I_n+S)^{-1}$。

（iii）任何 n 阶正交阵 A 必有分解式：

$$A=D(I_n-S)(I_n+S)^{-1}$$

其中 D 是主对角元是 1 或 -1 的对角阵，且 $|AD|=1$。称上式为广义**凯莱（Cayley）分解**。

（提示：(i)易证，对(ii)，令 $S=(I_n+A)^{-1}(I-A)$ 即可。对(iii)，用本习题第 10 题及本题(ii)。）

12. (i)设秩为 r 的 $m\times n$ 阵 A 的第 i_1、i_2、…、i_r 行线性无关，且 A 的第 j_1、j_2、…、j_r 列线性无关，证明：$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ j_1 j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right|\neq 0$。

(ii)由(i)证明下列著名结论："秩为 r 的 n 阶实对称阵 A 至少有一个 r 阶主子式不等于零"。

（提示，对(i)，作 $r\times n$ 阵 A_1，它由 A 的 i_1、i_2、…、i_r 行组成，由此证明，A_1 的各列都是 A_1 的 j_1、j_2、…、j_r 这 r 个列的线性组合，其证法与 §3 的命题的证明思路完全相同，对(ii)，由 $r(A)=r$ 的假设，可知 A 必有 r 个行，例如，第 $i_1,i_2\cdots,i_r$ 行是 A 的行向量的极大线性无关向量组，再应用 A 的对称性及(i)的结论即得 $\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ i_1 i_2\cdots i_r\end{pmatrix}\right|\neq 0$。）

第四章　矩阵的秩及其应用

本章是秩的理论的进一步讨论，它的理论与方法都是有用的。

§1　列满秩阵与行满秩阵

定义　称秩为 r 的 $n\times r$ 阵为**列满秩阵**，秩为 r 的 $r\times n$ 阵称为**行满秩阵**。

满秩阵（非异阵）既是列满秩阵，又是行满秩阵。

列满秩阵有下列两个基本结论，即定理 1 与定理 2。

定理1　设 r 个 n 维列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关，则必可找到 $n-r$ 个线性无关的 n 维列向量 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$，使 $\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 线性无关，换言之，对任一 $n\times r$ 列满秩阵 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$，必存在 $n\times(n-r)$ 列满秩阵 C，使 $A=(B,C)$ 是满秩阵（非异阵）。

证　设 B 的 r 阶子式 $\left|B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots i_r\\ 1 & 2 & \cdots r\end{pmatrix}\right|\neq 0$，则存在 n 阶排列阵 $P_{i_1\cdots i_r i_{r+1}\cdots i_n}=T'$，使得

$$TB=\begin{pmatrix}B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots i_r\\ 1 & 2 & \cdots r\end{pmatrix}\\ B_2\end{pmatrix},$$

由于

$$G=\begin{pmatrix}B\begin{pmatrix}i_1\cdots i_s\\ 1\cdots r\end{pmatrix} & 0\\ B_2 & I_{n-r}\end{pmatrix}$$

是非异阵$\left(\text{因 } |G|=\left|B\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\ 1\cdots r\end{pmatrix}\right|\cdot|I_{n-r}|\neq 0\right)$，$T$ 是正交阵，故只要作 $n\times(n-r)$ 阵：$C=T'\begin{pmatrix}0\\ I_{n-r}\end{pmatrix}$，则 C 是列满秩阵，且

$$A=(B,C)=T'\left(TB,\begin{pmatrix}0\\I_{n-r}\end{pmatrix}\right)=T'G$$

是非异阵。

定理 1 的证明是构造性的，即由 B 可具体构造出 C，且从证明过程中可以看出，这种 C 不是唯一的。

定理2 对 $m\times n$ 列满秩阵 B，必存在 $n\times m$ 行满秩阵 A，使 $AB=I_n$。

证 设 $|B_1|=\left|B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots i_n\\1 & 2 & \cdots n\end{pmatrix}\right|\neq 0$，则必存在排列阵 $P_{i_1\cdots i_n\cdots i_m}=T'$，使 $TB=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$，由于 B_1 是 n 阶非异阵，故记 $A_1=B_1^{-1}$，令 $A=(A_1,0)T$，则 A 显然是 $n\times m$ 行满秩阵，且

$$AB=(A_1,0)TB=(A_1,0)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=A_1B_2=I_n.$$

对行满秩阵 R，也有与定理 2 相平行的结论，即存在列满秩阵S，使 $RS=I$。

推论1 任一列满秩阵可以从矩阵等式的左端消去，即若 A 是列满秩阵，且 AB＝AC，则必 B＝C。

这由定理 2 可以明显地看出。同样，对行满秩阵有下述平行的结论。

推论2 行满秩阵可以从矩阵等式的右侧消去。

由于列（行）满秩阵是比满秩阵（非异阵）更广泛的概念，故用它处理长方矩阵问题将显得更方便，这将在下例的证明过程中看到这一点。

例1 设 A 是秩为 r 的幂等阵（即 $A^2=A$），则必存在非异阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}I_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

证 由第三章定理 3，存在 n 阶非异阵 R 与 T，使得 $R^{-1}AT=\begin{pmatrix}I_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，将 $T^{-1}R$ 分块，$T^{-1}R=\begin{pmatrix}B_1B_2\\B_3B_4\end{pmatrix}$，则

$$R^{-1}AR=(R^{-1}AT)(T^{-1}R)=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

由假设，$A^2=A$，故得

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=R^{-1}AR=(R^{-1}AR)^2=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} B_1^2 & B_1B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$(B_1,B_2)=(B_1^2,B_1B_2)=B_1(B_1,B_2)$$

也即

$$(B_1-I_r)(B_1,B_2)=0=0(B_1,B_2) \tag{3}$$

但由（2），$r=r(A)=r(R^{-1}AR)=r(B_1,B_2)$，故 (B_1,B_2) 是行满秩阵，由推论 2，它可从上面的矩阵等式(3)的右侧消去，故得 $B_1=I_r$，代入(2)式即得

$$R^{-1}AR=\begin{pmatrix} I_r & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将上式右边矩阵作分块阵的初等列变换及其相应的行的逆变换，即

$$\begin{pmatrix} I_r & B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & -B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

记 $P=R\begin{pmatrix} I_r & -B_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$，则 P 是非异阵，且由上两式即得（1)式。

由（1)式可以推出幂等阵 A 的两个性质：

(i) $r(A)+r(I_n-A)=n$ (4)

(ii)任何幂等阵 A 必可分解为两个实对称阵的乘积。

证 由（1)式可得

$$P^{-1}(I_n-A)P=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

故

$$r(A)+r(I_n-A)=r\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}=r+(n-r)=n。$$

这证明了(i)，又(1)式可写成：

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P'\cdot(P^{-1})'P^{-1}=S_1\cdot S_2$$

其中 $S_1=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P'$， $S_2=(P^{-1})'P^{-1}$。易证它们都是实对称阵。

将一个实方阵分解为两个实对称阵的乘积不仅在理论上，而且在工程力学上也是有用的。

§2 秩的降阶定理

定理 3 设 A 是 $m\times n$ 阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的非异顺序主子阵，则

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=r(A)+r(D-CA^{-1}B) \tag{5}$$

本定理也称为**秩的第一降阶定理**。

证 因为

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

而 A 是非异阵，故由上式及第三章 §3 中的(21)式知

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}=r(A)+r(D-CA^{-1}B)$$

例1 求下列矩阵 A 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

解 先将 A 的第二、三两行对调（其秩不变），然后用秩的第一降阶定理可得：

$$r(A)=r\begin{pmatrix}1&-2&0&1&1&-4\\0&1&-1&0&1&-1\\2&-4&3&2&0&2\\-1&1&3&4&4&2\end{pmatrix}$$

$$=r\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}+r\left[\begin{pmatrix}3&2&0&2\\3&4&4&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-4\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&1&-4\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}\right]$$

$$=2+r\begin{pmatrix}3&0&*&*\\2&5&*&*\end{pmatrix}=4$$

上式最后第 2 算式的$\begin{pmatrix}3&0&*&*\\2&5&*&*\end{pmatrix}$的 $*$ 处不必算出，因为$\begin{vmatrix}3&0\\2&5\end{vmatrix}\neq 0$，故知其秩已是 2。

不难看出，秩的第一降阶定理与行列式第一降阶定理，从结论到证法都有相似之处，(不过一为长方阵，一为方阵。由定理 3 立刻可得重要的：

推论 设 A、B、C、D 分别是 $r\times r$ 阵、$r\times(n-r)$ 阵、$(m-r)\times r$阵、$(m-r)\times(n-r)$阵，且 A 非异，则

$$r(D-CA^{-1}B)=r\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}-r(A) \tag{6}$$

称(6)式为**秩的升阶公式**。

定理4 设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $n\times l$ 阵，则

$$r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n \tag{7}$$

我们称(7)式为**西尔维斯脱不等式**。

证 由升阶公式以及第三章§3中的(21)式，

$$r(AB)=r(0-(-A)I_n^{-1}B)=r\begin{pmatrix}I_n&B\\-A&0\end{pmatrix}-r(I_n)$$

$$=r\begin{pmatrix}B&I_n\\0&-A\end{pmatrix}-n\geqslant r(B)+r(-A)-n=r(A)+r(B)-n。$$

西尔维斯脱不等式有多种证法，上述证法最简洁。此不等式有较多的应用，下面举三个例子。

例2 设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $n\times l$ 阵，且 $AB=0$，则

$$r(A)+r(B)\leqslant n。\tag{8}$$

证 由(7)式，$0=r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$，故得(8)。

例3 设 A 是 n 阶幂等阵，不用 (1)式，试证 (4)式。

证 由 $A^2=A$ 可得 $A(I_n-A)=0$，故由 (8)式可得

$$r(A)+r(I_n-A)\leqslant n \tag{9}$$

另一方面，由第三章§2 例 1 中的 (22) 式可得，

$$n=r(I_n)=r[A+(I_n-A)]\leqslant r(A)+r(I_n-A) \tag{10}$$

(9)与 (10) 合并即得 (4)式。

例4 设 A 是 $m\times n$ 阵，P 与 Q 分别是 $l\times m$ 列满秩阵与 $n\times p$ 行满秩阵，则

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A) \tag{11}$$

证 由第三章定理 2 及不等式 (7)可得，

$$r(A)\geqslant r(PA)\geqslant r(p)+r(A)-m=r(A)$$

故 $r(PA)=r(A)$。同理可证：$r(AQ)=r(A)$。于是

$$r(PAQ)=r(P(AQ))=r(AQ)=r(A)$$

秩的第一降阶定理的另一种形式可叙述如下。

定理 3′ 设 D 是 $m\times n$ 阵$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$的非异主子矩阵，则

$$r\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=r(D)+r(A-BD^{-1}C) \tag{12}$$

当$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$是方阵，且A与D均非异(未必同阶)，则由 (5) 式与(12)式显然可得：

定理5 设 A 与 D 分别是 r 阶与 s 阶非异阵，B 与 C 分别是 $r\times s$ 阵与 $s\times r$ 阵，则

$$r(D-CA^{-1}B)=r(D)-r(A)+r(A-BD^{-1}C) \tag{13}$$

本定理称为**秩的第二降阶定理**。

与行列式的降阶定理一样，矩阵秩的两个降阶定理也有广泛的应用，这里就不再展开讨论了(§3、4还要用它们)，请读者自已举一反三之。这里仅举一例。

例5 对 $s\times n$ 阵，由秩的第二降阶定理，

$$r(I_s-AI_n^{-1}\overline{A'})=s-n+r(I_n-\overline{A'}I_s^{-1}A)$$

也即：$$r(I_s-A\overline{A'})+n=r(I_n-\overline{A'}A)+s。$$

§3 满秩分解

定理6 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 阵，则

(i) $$A=HL \tag{14}$$

其中 H 是 $m\times r$ 列满秩阵，L 是 $r\times n$ 行满秩阵。

(ii)如果 $A=HL=H_1L_1$，其中 H 与 H_1 都是 $m\times r$ 列满秩阵，L 与 L_1 都是行满秩阵，则必存在 r 阶非异阵 P，使

$$H=H_1P,\qquad L=P^{-1}L_1 \tag{15}$$

证 由第三章定理 3，存在 m 阶非异阵 P 与 n 阶非异阵 Q，使

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}, \tag{16}$$

将 P^{-1} 与 Q^{-1} 如下分块：

$$P^{-1}=m\overset{\quad r\qquad n-r}{(H,\ H_1)},\qquad Q^{-1}=\begin{array}{c}r\\ n-r\end{array}\!\!\overset{n}{\begin{pmatrix}L\\ L_1\end{pmatrix}}$$

代入（16）式即得

$$A=(H,0)\begin{pmatrix}L\\ L_1\end{pmatrix}=HL$$

由于 P^{-1} 与 Q^{-1} 均非异，故 P^{-1} 的前 r 列与 Q^{-1} 的前 r 行显然分别线性无关，所以，$r(H)=r(L)=r$。这证明了(i)。

再证(ii)，对 $r\times n$ 行满秩阵 L，由定理2，存在 $n\times r$ 列满秩阵 N，使 $LN=I_r$，故得

$$H=HI_r=H(LN)=H_1(L_1N) \tag{17}$$

记 $L_1N=P$，则（17）式化为

$$H=H_1P \tag{18}$$

由于 H 是 $m\times r$ 列满秩阵，故由定理2，存在 $r\times n$ 行满秩阵 M，使 $MH=I_r$，在（18）式两边左乘 M，得到 $I_r=(MH_1)P$，这说明 P 是

r 阶非异阵，且 $P^{-1}=MH_1$，于是

$$L=(MH)L=(MH_1)L_1=P^{-1}L_1。$$

(14) 式被称为矩阵 A 的**满秩分解**。为求A的满秩分解，我们先引进下面的引理。

引理 设 A 是 r 阶非异阵，则 $m\times n$ 阵$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$的秩为 r 的充要条件是，$D-CA^{-1}B=0$。

这由秩的第一降阶定理立刻可以看出。

当 $m\times n$ 阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$与它的 r 阶顺序主子阵 A 有相同的秩 r 时，由引理可得

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

故由上式即得$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$的两种满秩分解：

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r\\ CA^{-1}\end{pmatrix}(A,B)=H_1L_1 \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}(I_r,A^{-1}B)=HL \tag{20}$$

易知，$H=\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r\\ CA^{-1}\end{pmatrix}A=H_1A$，$L=(I_r,A^{-1}B)=A^{-1}(A,B)=A^{-1}L_1$

例1 下列 3 阶阵与它的 2 阶顺序主子阵的秩均为 2，故由 (19)、(20) 两式，该方阵的满秩分解是：

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \multicolumn{2}{c}{(0,1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

对一般的 $m\times n$ 阵，先求出它的秩 r，找出它的一个 r 阶非异子矩阵 $A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_r \\ j_1 j_2 \cdots j_r \end{pmatrix}$，然后用初等变换将此子矩阵调到左上角，再用上法即可。

矩阵的满秩分解有广泛的应用，今先举三例于下。

例2 秩为1的方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 必满足：$A^2=\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)A$。

证 当 $r(A)=1$ 时，A 的满秩分解应是，

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

其中 a_i 与 b_i 不全为0，且 $a_{ii}=a_ib_i$；$i=1,2,\cdots,n$。于是

$$A^2=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\left[(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right](b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)A。$$

例3 证明：n 阶阵 A 是幂等阵的充要条件是：

$$r(A)+r(I_n-A)=n$$

证 必要性之证明已见之于§1例1或§2例3。今证充分性。设 $r(A)=r$，$A=HL$ 是 A 的满秩分解，其中 H 与 L 分别是 $n\times r$ 列满秩阵与 $r\times n$ 行满秩阵。由秩的第二降阶定理，

$$r(I_n-A)=r(I_n-HL)=n-r+r(I_r-LH)$$

由上式及充分条件的假设可得

$$r(I_r-LH)=r(I_n-A)+r(A)-n=0$$

故得 $LH=I_r$，于是

$$A^2=HLHL=HI_rL=HL=A$$

若将充分性的证明过程倒推回去，则显然又可证得必要性。由此例还可看出，若不用秩的第二降阶定理以及满秩分解，充分性的证明就比较麻烦。

例4 设 A 是秩为 r 的 n 阶实对称阵，则

(i) A 的满秩分解是，$A=HSH'$，其中 H 是 $n\times r$ 列满秩阵，S 是 r 阶非异实对称阵。

(ii) 对任何 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n$；$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n$ 恒有

$$\left|A\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_r\\ j_1j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right|^2=\left|A\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_r\\ i_1i_2\cdots i_r\end{pmatrix}\right|\cdot\left|A\begin{pmatrix}j_1j_2\cdots j_r\\ j_1j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right| \qquad (22)$$

证 由第3章定理3，存在非异阵 P 与 Q，使 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，记 $Q^{-1}P'=\begin{pmatrix}S & T\\ U & V\end{pmatrix}$，则

$$PAP'=(PAQ)(Q^{-1}P')=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S & T\\ U & V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S & T\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (23)$$

因 A 是实对称阵，即 $A=A'$，故 $(PAP')'=PA'P'=PAP'$，即 PAP' 也是实对称阵，故由（23）式，$S=S'$，$T=0$，于是（23）式化为

$$PAP'=\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (24)$$

且 S 是 r 阶实对称阵，又因 $r=r(A)=r(PAP')=r(S)$，故 S 是非异阵。今记 $P^{-1}=n(\overset{r}{H},H_1)$，则（24）式可化为，

$$A=(H,H_1)\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H'\\ H_1'\end{pmatrix}=HSH'$$

再证(ii)，应用第一章的（25）式：

$$A\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_r\\ j_1j_2\cdots j_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}_{i_1}'\\ \mathrm{e}_{i_2}'\\ \vdots\\ \mathrm{e}_{i_r}'\end{pmatrix}A(\mathrm{e}_{j_1},\mathrm{e}_{j_2},\cdots,\mathrm{e}_{j_r})$$

再由 $A=HSH'$ 及上式，可得

$$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ j_1 j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}e'_{i_1}\\ e'_{i_2}\\ \vdots\\ e'_{i_r}\end{pmatrix}HSH'(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_r})\right|$$

$$=\left|H\begin{pmatrix}i_1\ i_2\ \cdots i_r\\ 1\ \ 2\ \cdots r\end{pmatrix}SH'\begin{pmatrix}1\ \ 2\ \cdots r\\ j_1\ j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right|$$

再应用第一章的（32）式以及行列式乘法规则，得到

$$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ j_1 j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right| = \left|H\begin{pmatrix}i_1\ i_2\cdots i_r\\ 1\ \ 2\ \cdots r\end{pmatrix}\right|\cdot|S|\cdot\left|\left(H\begin{pmatrix}j_1\ j_2\cdots j_r\\ 1\ \ 2\ \cdots r\end{pmatrix}\right)'\right|$$

$$=\left|H\begin{pmatrix}i_1\ i_2\cdots i_r\\ 1\ \ 2\ \cdots r\end{pmatrix}\right|\cdot|S|\cdot\left|H\begin{pmatrix}j_1\ j_2\cdots j_r\\ 1\ \ 2\ \cdots r\end{pmatrix}\right| \qquad (25)$$

在（25）式中特别取 $i_1=j_1,\ i_2=j_2,\ \cdots,\ i_r=j_r$，则

$$\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ i_1 i_2\cdots i_r\end{pmatrix}\right| = \left|H\begin{pmatrix}i_1\ i_2\cdots i_r\\ 1\ \ 2\ \cdots r\end{pmatrix}\right|^2\cdot|S|$$

$$\left|A\begin{pmatrix}j_1 j_2\cdots j_r\\ j_1 j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\right| = \left|H\begin{pmatrix}j_1\ j_2\cdots j_r\\ 1\ \ 2\ \cdots r\end{pmatrix}\right|^2\cdot|S|$$

由上式与（25）式就得到（22）式。

（22）式是研究实对称阵子式间相互关系的基础结论。

§4　广义逆矩阵

为了充分运用§2与§3中的结论与方法，也为了介绍对应用数学有用的较新的工具，本节将用预备知识最少、处理最简捷的方法引进广义逆矩阵的若干基本结论。

本节讨论的矩阵都是实的（复矩阵可仿此讨论），以下不再另作说明。

定义　设 A 是 $m\times n$ 阵，如果存在 $n\times m$ 阵 B，使满足：

（$\mathbf{P}_1$）AB 是实对称阵，

（$\mathbf{P}_2$）BA 是实对称阵，

（$\mathbf{P}_3$）$ABA=A$，

（$\mathbf{P}_4$）$BAB=B$，

则称 B 是（A 的）**广义逆矩阵**。

显然，当 A 是非异阵时，取 $B=A^{-1}$，则 B 满足 $(P_1)\sim(P_4)$，故广义逆矩阵是通常逆矩阵概念的推广。

定理7 对任何秩为 r 的 $m\times n$ 阵 A，必存在唯一的一个 $n\times m$ 阵 B，满足 $(P_1)\sim(P_4)$。

证 下面的证明是构造性的。作 A 的满秩分解

$$A=HL$$

其中 H 是 $m\times r$ 列满秩阵，L 是 $r\times n$ 行满秩阵。容易验证：$n\times r$ 阵 $L'(LL')^{-1}$ 与 $r\times m$ 阵 $(H'H)^{-1}H'$ 分别是 L 与 H 的广义逆矩阵（即满足 $(P_1)\sim(P_4)$）。作 $n\times m$ 阵

$$B=L'(LL')^{-1}(H'H)^{-1}H'$$

则易证 B 满足 $(P_1)\sim(P_4)$。

再证唯一性。设 $n\times m$ 阵 C 是 A 的另一个广义逆矩阵，则 C 也应满足 $(P_1)\sim(P_4)$。今因

$$B=BAB=B(ACA)B=B(AC)'(AB)'=B(ABAC)'=B(AC)'=BAC$$

又因

$$C=CAC=C(ABA)C=(CA)'(BA)'C=(BACA)C'=(BA)'C=BAC$$

所以 $B=C$。

由于任何秩为 r 的 $m\times n$ 阵 A 的广义逆（矩阵）存在且唯一，故今后就记 $B=A^+$，于是 $(P_1)\sim(P_4)$ 可改写成：

(P_1) AA^+ 是实对称阵。

(P_2) A^+A 是实对称阵。

(P_3) $AA^+A=A$。

(P_4) $A^+AA^+=A^+$。

由定理 7 的证明过程容易看出，如果 $A=HL$，则

$$H^+=(H'H)^{-1}H' \tag{26}$$

$$L^+=L'(LL')^{-1} \tag{27}$$

$$A^+=L^+H^+(\text{即 } HL)^+=L^+H^+) \tag{28}$$

由（26）、（27）、（28）就可算出 A 的广义逆（矩阵）A^+。

例1 由于

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&4\end{pmatrix}=HL$$

（见§3，例1中的（21）式）

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}^{+}=H^{+}=(H'H)^{-1}H'=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&-2\\-2&1&5\end{pmatrix}$$

又因

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&4\end{pmatrix}^{+}=L^{+}=L'(LL')^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\-4&17\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}17&4\\4&2\\-1&4\end{pmatrix}$$

所以

$$A^{+}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\0&1&4\end{pmatrix}^{+}=L^{+}H^{+}=\frac{1}{54}\begin{pmatrix}13&19&-7\\2&5&1\\-5&1&11\end{pmatrix}$$

推论1 对任何 $m\times n$ 阵 A，恒有：

$$r(A)=r(A^{+})=r(AA^{+})=r(A^{+}A) \tag{29}$$

证 设 $r(A)=r$，由（28）式以及 L^{+} 是列满秩阵，故

$$r(A^{+})=r(L^{+}H^{+})=r(H^{+})=r((H'H)^{-1}H')=r(H')=r(H)=r$$

又因（26）与（27）可知 $H^{+}H=I_r=LL^{+}$。故

$$r(A^{+}A)=r(L^{+}L)=r(L)=r;$$

$$r(AA^{+})=r(HH^{+})=r(H^{+})=r$$

于是（29）式得证。

推论2 对任何 $m\times n$ 阵 A，恒有

$$r(I_n-A^{+}A)=n-r(A) \tag{30}$$

证 设 $r(A)=r$，因为

$$r(I_n-A^{+}A)=r(I_n-L^{+}L)$$

故由秩的第二降阶定理得：

$$r(I_n-A^{+}A)=r(I_r-LL^{+})+n-r=n-r=n-r(A)$$

广义逆矩阵的概念是由**莫尔**（Moore）先后于1919年与1933年，

在讨论所谓“正射影变换”时引进的，他称广义逆矩阵为“伪逆阵”。现在给出的定义来自本洛斯(Penrose)（1955)。

二、用广义逆矩阵解线性方程组

今用广义逆判断 $m\times n$ 方程组是否有解，并在有解时，把任何方程组 $Ax=b$ 的任一解明确表达出来。

定理8 设 A 是 $m\times n$ 阵，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是：

$$AA^{+}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b} \tag{31}$$

当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解时，它的任一解可表为

$$\boldsymbol{x}=A^{+}\boldsymbol{b}+(I_n-A^{+}A)\delta \tag{32}$$

其中 δ 为任一 n 维列向量。

证 如果 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则由(P_3)

$$\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}=AA^{+}(A\boldsymbol{x})=AA^{+}\boldsymbol{b}$$

反之，若（31）式成立，则 $\boldsymbol{x}=A^{+}\boldsymbol{b}$ 显然是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个（特）解。

另一方面，如果 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则由解的结构定理（第三章定理7的(i)），它的通解 $\boldsymbol{x}$ 应是

$$\boldsymbol{x}=A^{+}\boldsymbol{b}+\xi \tag{33}$$

此处 ξ 是齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解，由(P_3)可知

$$A(I_n-A^{+}A)=0$$

由定理1的推论2，$I_n-A^{+}A$ 中有 $n-r(A)$ 个列构成 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解可写成这 $n-r(A)$ 个列的线性组合，它也可写成下面的形状：

$$\xi=(I_n-A^{+}A)\delta \tag{34}$$

而 δ 是任一 n 维列向量，将（34）代入（33）即得（32）。

习　题

1．设 A 是 n 阶对合阵(即 $A^2=I_n$)，I_n+A 的秩为 r，证明：

(i) 存在非异阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

(ii) $r(I_n-A)+r(I_n+A)=n$

(iii) 当 A 是实对合阵时，A 可表为两个实对称阵的乘积。(提示：对(i)完全仿§1 例 1 之证法，或者设法应用例 1 之结论：作方阵 $B=\dfrac{I_n+A}{2}$，证明 B 是幂等阵)。

2. 如果 n 阶阵 A 满足条件：$r(I_n-A)+r(I_n+A)=n$。证明 A 是对合阵。

(提示，同第 1 题提示，设法应用 §2 例 3 的结论。)

3. (i)设 A 是秩为 r 的 n 阶阵，且 $A^2=kA, k\neq 0$，证明必存在非异阵P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} kI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

(ii) 设 A 与 B 是如下的 n 阶阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

证明：必存在非异阵P，使 $P^{-1}AP=B$。

4. 用秩的第一降阶定理求下面矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 6 & 17 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

5. 设 A 是 n 阶实方阵，且 $AA'=bI_n, b>0$，证明：

$$r\left(A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}\right)=2k-n+r\left(A_C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}\right); \quad \begin{matrix} 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n \\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n \end{matrix}$$

(提示，用秩的升阶公式，并仿照第二章 §5 例 8 的证法。)

6. 设 A 是 n 阶实阵，且 $A^2=bI_n, b>0$，证明：

$$r\left(A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}\right)=2k-n+r\left(A_C\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_k \\ i_1 i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}\right); \quad \begin{matrix} 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n \\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n \end{matrix}$$

7. 设 A 是 n 阶非异阵，证明：

$$r\left((\mathrm{adj}A)\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right)=2k-n+r\left(A_C\begin{pmatrix}j_1 j_2\cdots j_k\\ i_1 i_2\cdots i_k\end{pmatrix}\right)\begin{matrix}1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n。\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n。\end{matrix}$$

8．设 A 是 $m\times n$ 阵，证明：线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是，线性方程组 $A'y=0$ 的任何解 β 都满足 $b'\beta=0$。（提示：必要性易证。充分性：可设 $r(A)=r$，由 $r(A')=r(A)=r$ 可知，存在 $A'y=0$ 的一个基础解系 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$，故由充分条件知，$\begin{pmatrix}A'\\ b'\end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})=0$，再应用 §2 例 2 中的(8)式，便得 $r\begin{pmatrix}A'\\ b'\end{pmatrix}\leqslant r$，再由 $r\begin{pmatrix}A'\\ b'\end{pmatrix}=r(A,b)\geqslant r(A)=r$，即得 $r(A,b)=r(A)$。）

9．设 A 是 $m\times n$ 阵，且 $Ax=0$ 的解也是方程的 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 解。证明 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 必是 A 的 m 个行向量的线性组合。（提示：由第 8 题便知。）

10．设 A 是 n 阶奇异阵，$n\geqslant2$，证明：

(i) $r(\mathrm{adj}A)\leqslant1$；

(ii) $\left|(\mathrm{adj}A)\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|=0$，$2\leqslant k\leqslant n$；$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$；$1<j_1<\cdots<j_k\leqslant n$。

(iii) $\left|(\mathrm{adj}A)\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|=|A|^{k-1}\left|\hat{A}_C\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_k\\ j_1 j_2\cdots j_k\end{pmatrix}\right|$。

（见第二章习题31。）

（提示：对(i)，当 $r(A)<n-1$ 时，$r(\mathrm{adj}A)=0$；当 $r(A)=n-1$ 时，应用等式 $A\cdot\mathrm{adj}A=|A|\cdot I_n$ 以及本章 §3 例 2。）

11．设 A 是 n 阶阵，$n>2$，证明：$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A)=|A|^{n-2}\cdot A$。（提示：应用第二章（26）式以及该章习题10，并用上题的(i)）。

12．设 n 阶实对称阵（或反对称实方阵）A 的 r 阶主子式 $D\neq0$，而 D 的所有 $r+1$ 阶、$r+2$ 阶加边子式全是 0，证明：$r(A)=r$。

（提示：设 $D=\left|A\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ i_1 i_2\cdots i_r\end{pmatrix}\right|$，$A_1=\begin{pmatrix}A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\ i_r\cdots i_r\end{pmatrix} & \alpha\\ \beta & a_{st}\end{pmatrix}$是包含 D 的$r+1$ 阶阵，作 $r+2$ 阶主子阵：

$$M=\begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r\\ i_r\cdots i_r\end{pmatrix} & \alpha & \beta' \\ \alpha' & a_{tt} & a_{ts} \\ \beta & a_{ts} & a_{ss}\end{pmatrix} \qquad (a_{st}=a_{ts})$$

应用第 10 题的(ii)，即可证得 $|A_1|=0$，再应用第三章 §3 的命题，对反对称阵可仿此证明之。）

13．如果 n 阶实对称阵（或反对称实阵）A 的所有 $r+1$ 阶主子式、$r+2$ 阶主子式全等于零，证明：A 的任何 $r+1$ 阶子式等于零。

（提示：应用 12 题，证明 $r(A)\leqslant r$。）

14．**（巴伦汀(Ballantine)，1978）**设 A 是 n 阶奇异阵，且 $A=B_1B^2\cdots B_k$，其中 $B_1,\cdots,B_k$ 都是幂等阵，证明：$r(I_n-A)\leqslant k(n-r(A))$。（提示：先有 $I_n-A=I_n-B_1B_2\cdots B_k=(I_n-B_1)+(B_1-B_1B_2)+\cdots+(B_1\cdots B_{k-1}-B_1\cdots B_{k-1}B_k)$，然后应用本章（4）式、第三章 §2 例 1 以及第三章定理 2。）

15.(i) 设 A 是 n 阶非异阵，α 与 β 是 n 维列向量，证明：

$r(A+\alpha\beta')\geqslant n-1$，而 $r(A+\alpha\beta')=n\Longleftrightarrow\beta'A^{-1}\alpha\neq-1$。

(ii) 设 $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\neq 0, n\geqslant 2$，证明

$$r\begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2\cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 \quad\cdots & a_2+a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2\cdots & 0\end{pmatrix}\geqslant n-2$$

16.(i) 设 $m\times n$ 阵 A 的 k 阶"顺序主子式" $\left|A\begin{pmatrix}1&2&\cdots k\\1&2&\cdots k\end{pmatrix}\right|\neq 0$ 记 $s_{ij}=\left|A\begin{pmatrix}1&2&\cdots k&i\\1&2&\cdots k&j\end{pmatrix}\right|$；$i=k+1,\cdots,m$；$j=k+1,\cdots,n$。称 $(m-k)\times(n-k)$ 阵

$$S=\begin{pmatrix} s_{k+1,k+1}\cdots s_{k+1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{m,k+1}\cdots\cdots s_{mn}\end{pmatrix}$$

为**西尔维斯脱矩阵**（参阅第二章习题32）证明：

$$r(A)=k+r(S),$$

称上式为**秩的第三降阶定理**。

(ii) 若 $a_{11}\neq 0$，证明

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nn}\end{pmatrix}=1+r\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11}a_{13}\\ a_{21}a_{23}\end{vmatrix} & \cdots\cdots & \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n}\\ a_{21}a_{2n}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{31}a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11}a_{13}\\ a_{31}a_{33}\end{vmatrix} & \cdots\cdots & \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n}\\ a_{31}a_{3n}\end{vmatrix}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{n1}a_{n2}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11}a_{13}\\ a_{n1}a_{n3}\end{vmatrix} & \cdots\cdots & \begin{vmatrix} a_{11}a_{1n}\\ a_{n1}a_{nn}\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

（提示：对(i)，应用秩的第一降阶定理与行列式的第一降阶定理，并仿照行列式第三降阶定理的证法（见第二章习题 32）。由 (i) 显然可得(ii)）。

17．求下列矩阵的满秩分解：

$$A=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3 & 1\\ 4 & -2 & 6 & 0\\ 2 & 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

18．设 A 与 B 均为 $m\times n$ 阵，试用 A 与 B 的满秩分解证明：

$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$。

（提示：用“和化积”的想法）。

19．**（弗罗本尼乌斯）**证明西尔维斯脱不等式的推广定理：

$r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B)$。

（提示，作 B 的满秩分解，再应用西尔维斯脱不等式。）

20．设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是 n 阶阵，且 $A_1+A_2+\cdots+A_s=I_n$，又设 A_i 的秩为 n_i；$i=1,2,\cdots,s$，证明：

(i) 如果 $A_iA_j=0$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots,s$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是幂等阵，且 $\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$。

(ii) 如果 $\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$，则 $A_iA_j=\delta_{ij}A_j$；$i,j=1,2,\cdots,s$。

（提示，作 A_i 的满秩分解：$A_i=H_iL_i$，其中 H_i 与 L_i 分别是 $n\times n_i$ 列

满秩阵与 $n_i\times n$ 行满秩阵，$i=1,2,\cdots,s$。由假设 $\sum_{i=1}^{s} A_i=I_n$ 及 $A_iA_j=0$，$i\neq j$，即可证得 $A_iA_j=\delta_{ij}A_j$，由此可证：$L_iH_j^{*}=\delta_{ij}I_{nj}$，然后即可推导出 $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$，这证明了(i)。反之，由 $\sum_{i=1}^{s}A_i=I_n$ 可证

$$(H_1,H_2,\cdots,H_s)\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\cdots\\L_s\end{pmatrix}=I_n,$$

再由假设 $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$，进一步可证 $(H_1,H_2,\cdots,H_s)$ 是 n 阶非异阵，由此可证得 $L_iH_j=\delta_{ij}I_{nj}$，故 $A_iA_j=\delta_{ij}A_j$；$i,j=1,2,\cdots,s$。)

21．由本章 §3 例 4 中的（22)式证明：

(i) 秩为 r 的 n 阶实对称阵 A 至少有一个 r 阶主子式不等于零。

(ii) 如果秩为 r 的 n 阶实对称阵 A 至少有一个 r 阶主子式等于零，则 A 至少有 C_n^r-1 个 r 阶子式等于零。

(iii) 如果秩为 r 的 n 阶实对称阵 A 的所有 r 阶主子式全不等于零，则 A 的所有 r 阶子式都不等于零。

22．证明下列诸结论：

(i) $\begin{pmatrix}I & I\\I & I\end{pmatrix}^{+}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}I & I\\I & I\end{pmatrix}$，　($I$是单位阵。)

(ii) $(\alpha\beta')^{+}=\frac{\beta\alpha'}{(\alpha'\alpha)(\beta'\beta)}$($\alpha$ 与 β 是 n 维非零实列向量。)

(iii) 若$r\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=1$，则

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^{+}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}。$$

(iv) 若 $m\times n$ 阵 A 的元素全是 1，则

$$A^{+}=\frac{1}{mn}A'。$$

第五章　方阵的特征值与方阵的相似

本章讨论的方阵指的都是复阵，即其元素都是复数，以下不再另作说明。

§1　基本概念与基本结论

本章的主要概念有三，它们是：方阵的特征值与特征向量；方阵的特征多项式；方阵的相似。另外，方阵的最小多项式的概念也是基本的。

定义　设 A 是 n 阶阵，如存在数 λ 以及 n 维非零列向量 x，使得

$$Ax=\lambda x \tag{1}$$

也即

$$(A-\lambda I_n)x=0,(\text{或}(\lambda I_n-A)x=0) \tag{2}$$

则称 λ 为 A 的**特征值**，而称 $x\,(\neq 0)$ 为 A 的属于 λ 的**特征向量**。

由（2）式及齐次线性方程组的理论知，λ 必是 $|\lambda I_n-A|$ 的根，故 λ 也称为 A 的**特征根**，称 $|\lambda I_n-A|$ 为 A 的**特征多项式**。

当 λ 求出后，特征向量即可由（2）式解得。

定义　设 A 与 B 都是 n 阶阵，如存在 n 阶非异阵 P，使 $P^{-1}AP=B$ 则称 A 与 B **相似**，或称 A **相似于** B。

相似的"几何"意义将在第十章说明。相似的作用在第四章§1例1中已可略见其一二。以下将进一步显示其作用。

本章的基本结论有六个，一个写在§2中，一个在§3中，另外四个结论写成如下四个定理：

定理1　设 A 是 n 阶阵：$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$|\lambda I_n-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda+(-1)^n a_n \tag{3}$$

而a_i是A的所有i阶主子式之和，即

$$a_i = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le n}\left|A\begin{pmatrix}j_1j_2\cdots j_i\\ j_1j_2\cdots j_i\end{pmatrix}\right|,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

（参阅第二章§6中的（79）式），称（3）为**特征多项式的展开式**。

（4）中的a_1与a_n最为重要，若记$a_1=\mathrm{tr}A$，则

$$\mathrm{tr}A=a_1=\sum_{j_1=1}^{n}\left|A\begin{pmatrix}j_1\\ j_1\end{pmatrix}\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|A\begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}\right|=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \tag{5}$$

$$a_n=|A| \tag{6}$$

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$|\lambda I_n-A|=0$的$n$个根，则由**维叶搭**（Vieta）公式得，$a_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i, a_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，它们与（5）式、（6）式合起来，即得关系式：

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{7}$$

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{8}$$

称$\mathrm{tr}A$为A的**迹**，它是解决矩阵问题的一个有力工具。

定理2 $f(\lambda)=|\lambda I_n-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda+(-1)^n a_n$，则

$$f(A)=A^n-a_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}A+(-1)^n a_nI_n=0 \tag{9}$$

称定理2为**汉密尔顿-凯莱（Hamilton-Cayley）定理**。

定理3 相似矩阵有相同的特征多项式，（因而有相同的特征值、相同的行列式等等）。

定理4 n阶阵A相似于对角阵的充要条件是，A有n个线性无关的特征向量。

用得较多的是定理4的一个推论，即下面的

推论 如果n阶阵A的n个特征值全不相同，则A必相似于对角阵。

关于方阵的最小多项式概念及其初等性质有如下所述。

定义 设$g(\lambda)$是s次多项式，A是方阵，若$g(A)=0$，则称$g(\lambda)$为A的**化零多项式**（其存在性，由定理2知，是明显的）。称A的所有化零多项式中其次数最小者为**A的最小多项式**。

命题 最小多项式有如下初等性质：

(i) 方阵 A 的最小多项式必整除 A 的特征多项式。

(ii) 方阵 A 的最小多项式是唯一的。

(iii) 相似矩阵有相同的最小多项式。

(iv) 设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

是分块对角阵，A 的最小多项式为 $m(\lambda)$，A_i 的最小多项式为 $m_i(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,s$，则 $m(\lambda)$ 是 $m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)$ 的最小公倍式。

§2 特征多项式的降阶定理

本章的另一有用结论是下面的“特征多项式的降阶定理”，即

定理5 设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $n\times m$ 阵，$m\geqslant n$，则

$$|\lambda I_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I_n-BA| \tag{10}$$

证 设 A 的秩为 r，由第三章定理 3，存在 m 阶非异阵 P 与 n 阶非异阵 Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令

$$Q^{-1}BP^{-1}=\begin{pmatrix} B_1 B_2 \\ B_3 B_4 \end{pmatrix} \text{（其中 } B_1 \text{ 为 } r\times r \text{ 阵）}$$

则

$$PABP^{-1}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1}BAQ=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}$$

由定理 3，

$$|\lambda I_m-AB|=\begin{vmatrix} \lambda I_r-B_1 & -B_2 \\ 0 & \lambda I_{m-r} \end{vmatrix}=\lambda^{m-r}|\lambda I_r-B_1|$$

$$|\lambda I_n-BA|=\begin{vmatrix} \lambda I_r-B_1 & 0 \\ -B_3 & \lambda I_n-r \end{vmatrix}=\lambda^{n-r}|\lambda I_r-B_1|$$

由上两式显然可得（10）式。

在（10）式中取 $m=n$，即得

推论1 设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 阵与 $n\times m$ 阵，则 AB 与 BA 的非零特征值相同。

推论2 设 A 与 B 是同阶方阵，则 AB 与 BA 有相同的特征多项式，因而必有

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA) \tag{11}$$

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}A \tag{12}$$

（11）是明显的，由 $P^{-1}AP=P^{-1}(AP)$，并应用(11)式即得（12）式，当然，由于 A 与 $P^{-1}AP$ 相似，故由定理3，它们有相同的迹，也可得到（12）式。

特征多项式降阶定理的主要作用也是将高阶多项式化为低阶多项式处理，其思想与行列式、秩的降阶定理一脉相承。

例1 设 A 是 n 阶非异阵，α 与 β 是 n 维非零列向量，证明 $|\lambda A-\alpha\beta'|$ 有一个根是 $\beta'A^{-1}\alpha$，而其他根全是 0。

证 由行列式乘法规则以及特征多项式降阶定理，

$$|\lambda A-\alpha\beta'|=|A|\,|\lambda I_n-(A^{-1}\alpha)\beta'|=|A|\cdot\lambda^{n-1}(\lambda-\beta'A^{-1}\alpha)$$

因 A 非异，$|A|\neq 0$，故 $|\lambda A-\alpha\beta'|$ 有 $n-1$ 个零根，另一根为 $\beta'A^{-1}\alpha$。

在例 1 中取 $A=I_n$，则可知 $\alpha\beta'$ 有 $n-1$ 个特征值是 0，另一个特征值是 $\beta'\alpha$。若 $\beta=\alpha$，则 $\alpha\alpha'$ 有 $n-1$ 个特征值是 0，另一个是 $\alpha'\alpha$。例如 n 阶阵：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\\1\end{pmatrix}(1,1,\cdots,1)$$

故 A 的 $n-1$ 个特征值是 0，另一个特征值是 $(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=n$。

例2 求下列 n 阶实对称阵 A 的特征值及行列式，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}。$$

解 因为

$$|\lambda I_n-A|=\left[(\lambda+1)I_n-\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\right]$$

记 $\mu=\lambda+1$，$a=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$，则上式右端便是 $|\mu I_n-aa'|$，故由例 1 的说明，aa' 的特征值 μ 中有 $n-1$ 个 0，一个是 $a'a=n$，故 A 的特征值 λ 中，有 $n-1$ 个满足 $0=\mu=\lambda+1$，即有 $n-1$ 个 $\lambda=-1$；另一个满足 $\lambda+1=n$，即 $\lambda=n-1$。又因 (8) 式，

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n=(-1)^{n-1}(n-1)。$$

对秩为 r 的奇异阵（降秩阵）A，设 $A=HL$ 是它的满秩分解，其中 H 与 L 分别是 $n\times r$ 列满秩阵与 $r\times n$ 行满秩阵，由特征多项式的降阶定理，

$$|\lambda I_n-A|=|\lambda I_n-HL|=\lambda^{n-r}|\lambda I_r-LH| \tag{13}$$

常可用此法求某些低秩奇异阵的特征多项式，对某些非异阵也可经过改写后运用此法，如例 2 便是。

例3 设 C 是 n 阶阵，如果“矩阵方程” $AX-XA=C$ 有解，则必有：$\mathrm{tr}C=0$（故 $AX-XA=I$ 必无解）。

证 因为易证，$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$，故若存在 $X=B$，使 $AB-BA=C$，则 $\mathrm{tr}C=\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)$，由(11) 式即得 $\mathrm{tr}C=0$。

例 3 之逆也正确（见本章习题 6）。

特征多项式是一种特殊的行列式，在用特征多项式展开式以及特征多项式的降阶定理有困难时，还需借助行列式的其他方法，下例便是。

例4 设 a,b,c,d 是实数，求 4 阶阵

$$A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

的特征值。

解 因为

$$|\lambda I_4-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & b & c & d \\ -b & \lambda-a & d & -c \\ -c & -d & \lambda-a & b \\ -d & c & -b & \lambda-a \end{vmatrix}$$

故由第二章 §5 例 2 即得

$$|\lambda I_4-A|=\{(\lambda-a)^2+b^2+c^2+d^2\}^2$$

故 A 的 4 个特征值是，

$$\lambda_1=\lambda_2=a+i\sqrt{b^2+c^2+d^2},\quad \lambda_3=\lambda_4=a-i\sqrt{b^2+c^2+d^2}$$

$(i=\sqrt{-1})$。

请读者举一反三，将第二章计算行列式的方法与技巧充分用于特征值的计算（参阅习题10、11两题）。

§3 方阵的相似，特征值方法的(初步)运用

一、方阵相似于上三角阵

由定理 4，不难举出方阵不相似于对角阵的反例，但我们有

推理6 任何 n 阶复阵必相似于上三角阵，即存在 n 阶非异阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（显然）是 A 的特征值（由定理3）。

证 下列证法是常见的有用方法。对 n 用归纳法。当 $n=1$，定

理 6 显然正确。今就任意 n 证明之。取 A 的一个特征值 λ_1，设 $\alpha_1\neq 0$ 是 A 的属于 λ_1 的特征向量，则

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1 \tag{15}$$

因 α_1 线性无关，故由第四章定理 1，必存在 n 维列向量 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$，使 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是非异阵，由标准单位向量的结论知，$\alpha_1=P_1\mathbf{e}_1$，将它代入（15）式，便得 $AP_1\mathbf{e}_1=\lambda_1P_1\mathbf{e}_1$，也即 $(P_1^{-1}AP_1)\mathbf{e}_1=\lambda_1\mathbf{e}_1$，这正好说明 $P_1^{-1}AP_1$ 的第 1 列是 $\lambda_1\mathbf{e}_1$，于是

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ 0 & & \\ \vdots & & A_1\\ 0 & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix} \tag{16}$$

其中 A_1 是 $n-1$ 阶阵。因此，由归纳法假设，存在 $n-1$ 阶非异阵 P_2，使

$$P_2^{-1}A_1P_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

记 $P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}$，则 P 是 n 阶非异阵，且由（16）式即得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & P_2^{-1}A_1P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

例1 设 A 是 n 阶阵，λ_1 是 $|\lambda I_n-A|$ 的 k 重根，则 $r(\lambda_1I_n-A)\geqslant n-k$。

证 设 $|\lambda I_n-A|$ 的其他根为 $\lambda_{k+1},\cdots,\lambda_n(\neq\lambda_1)$，由定理6

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & *\\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_{k+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

于是

$$P^{-1}(\lambda_1I_n-A)P=\begin{pmatrix}0 & & & & *\\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_1-\lambda_{k+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_1-\lambda_n\end{pmatrix},$$

由第三章定理 4，上式右端矩阵的秩至少是 $n-k$，所以 $r(\lambda_1 I_n - A) = r(P^{-1}(\lambda_1 I_n - A)P) \geqslant n-k$。

由例 1 可知，$(\lambda_1 I_n - A)\ x = 0$ 的基础解系所含向量个数应 $\leqslant n-(n-k)=k$，这说明，A 的属于 λ_1 的极大线性无关的特征向量个数（称为**几何重数**）不会超过 λ_1 的重数（称为**代数重数**）。

例 2 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶阵 A 的特征值，$f(\lambda) = a_s\lambda^s + a_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$，证明：$f(A)$ 的 n 个特征值恰好是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$

证 由假设，成立 (14) 式，故对任何非负整数 k，

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & * \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

于是

$$P^{-1}f(A)P = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{s} a_k A^k\right)P = \sum_{k=0}^{s} a_k (P^{-1}A^kP)$$

$$= \sum_{k=0}^{s} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & * \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & * \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

故由定理 3 知，$f(A)$ 的 n 个特征值恰好是 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$。

二、特征值方法之初步运用

运用方阵特征值的方法是矩阵理论中的六大方法之一，用它解决有关矩阵与行列式的问题，其主要途径无非是这么两条：(i) 用方阵的相似作过渡，即将 A 相似于一个形状简单的矩阵 B，如定理 6 的上三角阵或其他形状更简单的方阵 C（参阅第二部分方阵的标准形理论），然后就 B 或 C 的特征值进行讨论（如本章第一段的两例便是这样）。(ii) 用定理 3，且主要是应用“相似阵有相同的特征值”这一结论以及与特征值相关联的一些等式（例如 (7) 式与 (8) 式以及其他等式）与不等式（参阅第七、八、九三章以及附录），在上节例 2 中便用了等式 (8)、例 3 中用了等式(7)（取方阵的迹）今再举数例。

例3 设 n 阶实阵 A 的主对角元全是 1，且其特征值全是非负数，证明：$|A| \leqslant 1$。

证 设 A 的 n 个特征值与 n 个主对角元分别是 λ_i 与 a_{ii}；$i=1,2,\cdots,n$。由假设以及（7)式可知，

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=n \tag{17}$$

根据一个算术公式："n 个非负数的几何平均值不大于它们的算术平均值"，即

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\quad (a_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n)$$

（此式称为**柯希不等式**），并应用（8)式与（15）式即得

$$|A|=\left((\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{n}}\right)^n\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}\right)^n=1^n=1。$$

例4 设 n 阶实方阵 A 的特征值全是实数，且 A 的所有 1 阶主子式之和、所有 2 阶主子式之和全是 0，证明：$A^n=0$。

证 由假设，A 的特征多项式展开式(3)中的 $a_1=a_2=0$，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，则由维叶搭公式：$a_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i,a_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j$，所以，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2-2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j=a_1-2a_2=0$，但 λ_i 全是实数，故 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$。又由定理 6 知，

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}0 & & *\\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}P$$

故

$$A^n=P\begin{pmatrix}0 & & *\\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}^nP^{-1}=P\cdot 0\cdot P^{-1}=0$$

例4 用了前述的两条途径，而例 3 实际上用了途径(i)

例5 设 A 是 n 阶实阵，若对任何 n 维实列向量 x，恒有 $x'Ax>0$，证明 $|A|>0$（参阅第三章习题3)。

证 今用纯代数的方法证明之，(若用第三章之方法，则有一步要用到数学分析工具），先证：A 的任一特征值 $\lambda=a+b\sqrt{-1}$ 的实部

$a>0$. 令 α 是 A 的属于 λ 的特征向量，则

$$A\alpha=\lambda\alpha, \quad (\alpha\neq 0) \tag{18}$$

将 α 改写成：

$$\alpha=\begin{pmatrix} b_1 + \sqrt{-1}\, d_1 \\ b_2 + \sqrt{-1}\, d_2 \\ \vdots \\ b_n + \sqrt{-1}\, d_n \end{pmatrix}=\beta+\sqrt{-1}\,\delta$$

其中 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 与 $\delta=(d_1,d_2,\cdots,d_n)'$ 是实列向量。于是(18)式化为：

$$A(\beta+\sqrt{-1}\,\delta)=(a+b\sqrt{-1})(\beta+\sqrt{-1}\,\delta)$$

比较上式之虚部与实部，得到

$$A\beta=a\beta-b\delta \tag{19}$$

$$A\delta=a\delta+b\beta \tag{20}$$

以 β' 与 δ' 分别左乘（18）式与（19）式两边，得到

$$\beta'A\beta=a\beta'\beta-b\beta'\delta=a\beta'\beta-b\delta'\beta$$

$$\delta'A\delta=a\delta'\delta+b\delta'\beta$$

上两式相加，得到

$$\beta'A\beta+\delta'A\delta=a(\beta'\beta+\delta'\delta) \tag{21}$$

由假设知，$\beta'A\beta>0$，$\delta'A\delta>0$，又因 $\alpha\neq 0$，故 β 与 δ 至少有一非零，于是 $\beta'\beta+\delta'\delta>0$，，由（21）式即得 $a>0$。

又因 $|\lambda I_n-A|$ 是实系数多项式，故A若有一特征值 $\lambda_1=a+b\sqrt{-1}$，则 A 必有一特征值为 $\overline{\lambda_1}=a-b\sqrt{-1}$，而 $\lambda_1\overline{\lambda_1}=a^2+b^2>0$（因上面已证 $a>0$）。由（8)式，$|A|$ 是 A 的 n 个特征值的乘积，A 的纯实根全大于 0，而复根成对出现，其乘积大于 0，故 $|A|>0$。

上述证明的想法是，先找出满足假设条件的 A 的特征值的某些特性（对本例 5，其实部大于 0）作为出发点，然后用（8）式或（7）式等解决问题。一般说来，凡要证明特征值具有某一特性的，从(18)式开始证明常是方便的，例 5 是这样，下面命题的证明也是这样的，它的整个证明过程有一定的代表性。

命题 n 阶实对称阵 A 的特征值全是实数。

证 设λ是A的任一特征值，$\alpha\neq 0$是A的属于λ的特征向量，则成立下式（即（18）式）：

$$A\alpha=\lambda\alpha \tag{22}$$

上式两边转置、取共轭，得到

$$\overline{\alpha}'\overline{A}'=\overline{\lambda}\overline{\alpha}' \tag{28}$$

以$\overline{\alpha}$左乘（22）式两边，以α右乘（23）式两边，得到

$$\overline{\alpha}'A\alpha=\lambda\overline{\alpha}'\alpha$$

$$\overline{\alpha}'\overline{A}'\alpha=\overline{\lambda}\overline{\alpha}'\alpha$$

上两式相减，$\overline{\alpha}'(A-\overline{A}')\alpha=(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\alpha}'\alpha$，因A实对称，$\overline{A'}=A$，故得$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\alpha}'\alpha=0$，又因$\alpha\neq 0$，故$\overline{\alpha}'\alpha\neq 0$，于是$\lambda-\overline{\lambda}=0$，即λ是实数。

注意 上述证明步骤也可用以证明例5。

§4 汉密尔顿-凯莱定理的应用

汉密尔顿-凯莱定理在理论上与计算方法上的作用从下列四例中可以看出。

例1 设$A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & \omega & c\\ 0 & 0 & \omega^2\end{pmatrix}$，其中$a$、$b$、$c$是任意复数，而$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$求$A^{100}$及$A^{-1}$。

解 易知A的特征多项式是$(\lambda-1)(\lambda-\omega)(\lambda-\omega^2)=\lambda^3-1$，由汉密尔顿-凯莱定理，$A^3-I_3=0$，即$A^3=I_3$，故$A^{-1}=A^2$。又$A^{100}$可写成：$A^{100}=(A^3)^{33}\cdot A=A$。

例1说明A的高次幂与A^{-1}均可表为A的低次幂，事实上有下述一般性结论（见例2）：

例2 任何n阶阵A的高次幂$A^s(s\geqslant n)$必可表为A的$n-1$次多项式。当A是非异阵时，A^{-1}亦然。

证 设$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda+(-1)^n a_n$，由汉密尔顿-凯莱定理，

$$A^n-a_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}A+(-1)^n a_n I_n=0, \tag{24}$$

于是，$A^n=a_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_{n-1}A+(-1)^{n+1}a_nI_n$，即 A^n 可表为 A 的某一个 $n-1$ 次多项式。将 A 右乘(24)式两边，并以 A^n 的表达式代入，可知 A^{n+1} 也可表为 A 的某一个 $n-1$ 次多项式，用此法逐次递推下去，便知 $A^s(s\geqslant n)$ 确是 A 的一个 $n-1$ 次多项式：

$$A^s=\alpha_0(s)A^{n-1}+a_1(s)A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(s)A+a_n(s)I_n \tag{25}$$

当 A 是非异阵时，$a_n=|A|\neq 0$，此时（24）式可改写为

$$\frac{(-1)^{n-1}}{a_n}(A^{n-1}-a_1A^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}I_n)\cdot A=I_n$$

故 $A^{-1}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{a_n}(A^{n-1}-a_1A^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}I_n)$。

注 求(25)式中的 $a_0(s),\cdots,a_n(s)$ 是一个很实用的问题。但要建立这些系数的一般算式需要用到所谓"对称群的特征标"的有关结论，在此就不作介绍了。

例3 如果 n 阶阵 A 的特征值全是 0，则 $A^n=0$

证 我们可以象§3 例 4 那样应用定理6，但对本例来说，用汉密尔顿-凯莱定理更方便。因为在所设条件下，A 的特征多项式是λ^n，所以 $A^n=\mathbf{0}$。

例4 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，记

$$g(\lambda)=\frac{1}{2}(|\lambda I_n+A|-|\lambda I_n-A|), \tag{26}$$

若 $g(A)$ 非异，证明 n^2 阶阵：

$$G=\begin{pmatrix} A+a_{11}I_n & a_{12}I_n & \cdots & a_{1n}I_n \\ a_{21}I_n & A+a_{22}I_n & \cdots & a_{2n}I_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}I_n & a_{n2}I_n & \cdots & A+a_{nn}I_n \end{pmatrix}$$

也是非异阵。

证 设 $|\lambda I_n+A|$的元素 $\lambda\delta_{ij}+a_{ij}$ 的代数余子式是 $f_{ij}(\lambda)$，记 $f(\lambda)=|\lambda I_n+A|$，则由第二章§3 中的（22）式知，

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda\delta_{ij}+a_{ij})f_{ik}(\lambda)=\delta_{jk}f(\lambda),\quad j,k=1,2,\cdots,n$$

由于当 $l(\lambda)=g_1(\lambda)g_2(\lambda)$ 时恒有 $l(A)=g_1(A)g_2(A)$，当 $t(\lambda)=h_1(\lambda)$

$+h_2(\lambda)$ 时恒有 $t(A)=h_1(A)+h_2(A)$，故得

$$\sum_{i=1}^{n}(A\delta_{ij}+a_{ij}I_n)f_{ik}(A)=\delta_{jk}f(A);j,\ k=1,2,\cdots,n$$

将上式写成分块阵恒等式，即

$$\begin{pmatrix} f_{11}(A) & f_{21}(A) & \cdots & f_{n1}(A) \\ f_{12}(A) & f_{22}(A) & \cdots & f_{n2}(A) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{1n}(A) & f_{2n}(A) & \cdots & f_{nn}(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+a_{11}I_n & a_{12}I_n & \cdots & a_{1n}I_n \\ a_{21}I_n & A+a_{22}I_n & \cdots & a_{2n}I_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}I_n & a_{n2}I_n & \cdots & A+a_{nn}I_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f(A) & & \\ & f(A) & \\ & & \ddots \\ & & & f(A) \end{pmatrix}$$

故得

$$(f_{ij}(A))_{n\times n}\cdot G=\begin{pmatrix} f(A) & & \\ & \ddots & \\ & & f(A) \end{pmatrix} \tag{27}$$

于是，$\det(f_{ij}(A))_{n\times n}\cdot\det G=(\det f(A))^n$，因此，若能证：$f(A)$非异，则 G 也非异。

记 $h(\lambda)=|\lambda I_n-A|$，由汉密尔顿-凯莱定理，$h(A)=0$。又 (26) 式可改写为：$f(\lambda)=2g(\lambda)+h(\lambda)$，于是 $f(A)=2g(A)+h(A)=2g(A)$，但由假设，$g(A)$是非异阵，故$f(A)$也非异。

习　题

1．求 n 阶实镜象阵 I_n-2uu' 的 n 个特征值及它的迹和行列式，其中 $u'u=1$。

2．设 A 与 B 是同阶方阵，证明：

(i) $AB+B$与$BA+B$ 有相同的特征值。

(ii) 如果 $AB=(B-A')A$，则 $A=0$。

(提示：对(i)应用 CD 与 DC 有相同的特征多项式这一结论。对(ii)，在等式两边取迹。)

3．求 n 阶实对称阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

的全部特征值，并由此求 $|A|$。

（提示：用特征多项式的降阶定理。）

4．设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 阵，B 与 C 都是 $n\times m$ 阵，且 $m\geqslant n$，证明 AB 与 CA 至少有 $n-r$ 个公共的零特征值。

（提示：仿特征多项式降阶定理的证法。）

5．设 A 与 B 分别是 m 阶阵与 n 阶阵，C 是秩为 r 的 $m\times n$ 阵，$m<n$，且 $AC=CB$，证明：A 与 B 至少有 r 个公共的特征值。因而证明 (i) 当 A 与 B 的特征多项式互素时，则 $C=0$．(ii) 当 C 为列满秩阵时，则 B 的特征值全是 A 的特征值。

（提示：同第4题的提示。）

6．设 C 为 n 阶阵，且 $\mathrm{tr}C=0$，证明：

(i) C 必可相似于一个主对角元全是 0 的方阵。

(ii) 必存在 n 阶阵 A 与 B，使 $AB-BA=C$。

（提示：对 (i)，用归纳法。对 (ii)，由 (i) 设 $P^{-1}CP=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ * & & 0 \end{pmatrix}$，先证满足 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)-(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)=P^{-1}CP$ 的这种 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 是存在的。这只要取 $A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$，$\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j$；$B=P(b_{ij})_{n\times n}P^{-1}$，其中 $b_{ij}=\dfrac{c_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}$，$i\neq j$，而 c_{ij} 是 $P^{-1}CP$ 的非主对角元 $(i\neq j)$。）

7．若 n 阶非异阵 A 的 n 个特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值。

8．证明：

(i) 反对称实方阵的特征值是纯虚数或零。

(ii) 正交阵的特征值的模（绝对值）等于1。

(iii) 对称、正交阵的特征值是1或 -1.

(iv) 如果A与B是同阶实对称阵，则 $AB-BA$ 的特征值是纯虚数或零。

（提示：(i)与(ii)仿§3的命题的证法，且由该命题及(ii)即得(iii)，而(iv)由(i)即得。）

9.求 n 阶循环阵：

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

的全部特征值。

（提示：将 C 表为 $C=\sum_{k=0}^{n-1} c_k\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$，证明 $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于以 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 为主对角元的对角阵，此处 $\zeta_i^n=1$；$i=1,2,\cdots,n$。参阅第一章例9与例10。）

10．求下列**费波纳西**(Fibonacci)阵的全部特征值：

$$F_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

（此矩阵在最优化理论中有用。它的行列式是古老的（十三世纪）**费波纳契数**：$|F_1|=1$，$|F_2|=2$，$|F_3|=3$，$|F_4|=5$，$\cdots$，$|F_{n+1}|=|F_n|+|F_{n-1}|$）。

（提示：记 $\Delta_n(\lambda)=|\lambda I_n-F_n|$，因为 $\Delta_n(\lambda)$ 是三对角行列式，故用升阶法，或用递推关系式证得：$\Delta_n(\lambda)=(\lambda+1)\Delta_{n-1}(\lambda)+\Delta_{n-2}(\lambda)$，令 $\lambda+1=a+b$，$ab=-1$，先证 $a\neq b$，然后用第二章§4例5的结论得：

$\Delta_n(\lambda)=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$，再由 $\Delta_n(\lambda)=0$，即 $a^{n+1}=b^{n+1}$ 以及 $ab=-1$ 解出 a 与 b，于是 $\lambda=a+b-1$）。

11．求下列 n 阶阵 A 的全部特征值：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12．求下列 4 阶阵的特征值：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

（提示：仿§2 例 4 的证法，并参阅第二章§5 例 1。）

13．设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是复方阵，记 $R_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$，称$G_i$：$|z-a_{ii}|=R_i$ 为盖尔许戈林（Герштолин）圆，简称为盖尔圆。证明：A 的任一特征值落在某个盖尔圆的内部或边界上。

（提示：设 λ 是 A 的任一特征值，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\neq 0$ 是 A 的属于 λ 的特征向量，将 $(\lambda I_n-A)x=0$ 写成 $\sum\limits_{j=1}^{n}(\lambda\delta_{ij}-a_{ij})x_j=0$；$i=1,2,\cdots,n$。接下去可完全仿照第三章§2 例 3 的证法。）

14．设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶实阵，且 $a_{ii}>\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=R_i$；$i=1,2,\cdots,n$，试用纯代数方法证明：$|A|>0$。（参阅第三章§2 例 3。）

（提示：应用第 13 题的结论以及假设 $a_{ii}>R_i$；$i=1,2,\cdots,n$，；先证 $\lambda=a+b\sqrt{-1}$ 的实部 $a>0$，再证$|A|>0$。）

15．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，证明：$A^n=A^{n-2}+A^2-I_3\ (n\geqslant 3)$。

16．用汉密尔顿-凯莱定理证明：若 n 阶阵 A 的所有不同特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，它们的重数分别是 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，则 $\prod\limits_{i=1}^{s}(A-\lambda_iI_n)^{k_i}=\mathbf{0}$.

17．证明下述求特征多项式的**克雷洛夫**（Крылов）**方法**：

设 n 阶阵 A 的特征多项式是：$|\lambda I_n-A|=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$，若存在 n 维列向量 α，使 $(A^{n-1}\alpha,A^{n-2}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha)$ 是非异阵，则

$$(b_1,b_2,\cdots,b_n)'=-(A^{n-1}\alpha,A^{n-2}\alpha,\cdots,A\alpha,\alpha)^{-1}(A^n\alpha)$$

（提示：应用汉密尔顿-凯莱定理，并解一个线性方程组即得证）。

18．设 $m(\lambda)$ 是方阵 A 的最小多项式，$g(\lambda)$ 是一多项式，

(i) 令 $d(\lambda)$ 是 $m(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的最高公因式，其首项系数是 1，证明：$r(d(A))=r(g(A))$。

(ii) 证明：$g(A)$ 非异 $\Longleftrightarrow g(\lambda)$ 与 $m(\lambda)$ 互素。

（提示：由多项式理论知，存在 $u(\lambda),v(\lambda)$，使 $u(\lambda)m(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=d(\lambda)$，由此证得：$r(d(A))\leqslant r(g(A))$，再由 $d(\lambda)|g(\lambda)$（$d(\lambda)$ 整除 $g(\lambda)$）证得 $r(g(A))\leqslant r(d(A))$，即得(i)，由(i)即得(ii)。）

第六章　方阵的相似标准形

本章讨论的方阵A，其元素都取自某一数域K，今后就称A为数域K上的方阵。所谓数域K，指的是这样一个"代数体系"：它包括一个由数组成的集合K，以及定义在K上的两个运算：加法与乘法，使得K中任意两个数的和、差（减法作为加法的逆运算）、积、商（分母不为0，除法作为乘法的逆运算）仍是K中的数。例如，复数集（所有的复数）及其四则运算（加、乘及其逆运算减、除）可称为**复数域**；实数集（全部实数）及其四则运算可称为**实数域**；有理数集（有理数全体）及其四则运算可称为**有理数域**，如此等等。

第五章讨论的方阵都是复数域上的方阵。本章讨论任意数域上方阵的相似标准形问题，故相似概念应拓广如下：

定义　设A与B都是数域K上的n阶阵，如果存在K上的n阶阵P，使$P^{-1}AP=B$，则称A与B（在K上）相似，或称A相似于B，以记号$A\sim B$记之。

上一章已得出复方阵(即复数域上的方阵)可相似于一个上三角阵（第五章定理6），本章主要解决这么两个问题：(i) 任意数域上的方阵A应相似于何种简单形状的方阵？(ii)复方阵是否可以相似于（比第五章（12）式）形状更为简单的方阵？本章将回答这两个问题，并给出方阵的相似标准形及其应用。

§1　基本概念与基本结论

本章的基本概念是：λ-阵$A(\lambda)$（或称为**多项式矩阵**，即以数域K上的多项式$f_{ij}(\lambda)$为元素的矩阵）的相抵以及与此相关联的$A(\lambda)$的行列式因子与不变因子、$A(\lambda)$的初等因子、$A(\lambda)$的初等变换。

λ-阵的第一、二种初等变换与数字矩阵的第一、二种初等变换相同，相应的初等阵也就是 $P_{ij}, D_i(c)(c\neq 0)$；λ-阵的第三种初等变换是以多项式 $\varphi(\lambda)$ 乘 $A(\lambda)$ 的某一行(列)加到 $A(\lambda)$的另一行(列)上去，其相应的初等 λ-阵是 $T_{ij}(\varphi(\lambda))$，与数字阵的第三种初等变换（初等阵)不同的仅是将数K换成$\varphi(\lambda)$(参阅第一章§3 第一段)，λ-阵的初等变换与初等 λ-阵间仍然成立“八字规则”(见第一章§3)。

此外，设 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$分别是 $m\times n$ λ-阵，若存在 m 阶非异 λ-阵 $P(\lambda)$，n 阶非异 λ-阵 $Q(\lambda)$，使 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$与 $B(\lambda)$**相抵**，以$A(\lambda)\cong B(\lambda)$ 记之。所谓**非异 λ-阵**，指的是可以表为有限个初等 λ-阵之积的 λ-阵。

本章的核心结论是下面的定理 1。

定理1 $A\sim B\Longleftrightarrow \lambda I-A\cong \lambda I-B$。

这样一来，A 与 B 的相似问题转化为它们的特征矩阵 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 的相抵问题，而后者有更多的回旋余地。

实现上述基本思想的关键结论是下面的定理 2。

定理2 设 A 是数域 K 上的 n 阶阵，则

$$\lambda I_n-A\cong\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&d_{k+1}(\lambda)&&&\\&&&&d_{k+2}(\lambda)&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&d_n(\lambda)\end{pmatrix}\tag{1}$$

其中 $d_{k+1}(\lambda), d_{k+2}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$都是 K 上的**首一多项式**(即首项系数为 1 的多项式)，并且：

(i) $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$(即 $d_i(\lambda)$整除 $d_{i+1}(\lambda)$)；$i=k,k+1,\cdots,n-1$。(2)

(ii) (1)式右端的主对角元由 A 唯一确定，且$1,\cdots,1, d_{k+1}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 就是 λI_n-A 的**不变因子**（组)，（今后就简称为 **A 的不变因子**（组)），其中 $d_{k+1}(\lambda)\neq 1$，$d_{k+1}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 称为 **A 的非常数不变因子**。

(1) 式右端的 λ-阵称为 λI_n-A 的**法式**。

具体解决本章开头提出的两个问题的基本结论是下述四个定理。

定理 3　$A\sim B\Longleftrightarrow A$ 与 B 有相同的**行列式因子**，或者 A 与 B 有相同的**不变因子**（A 的行列式因子指的就是 λI_n-A 的行列式因子）。

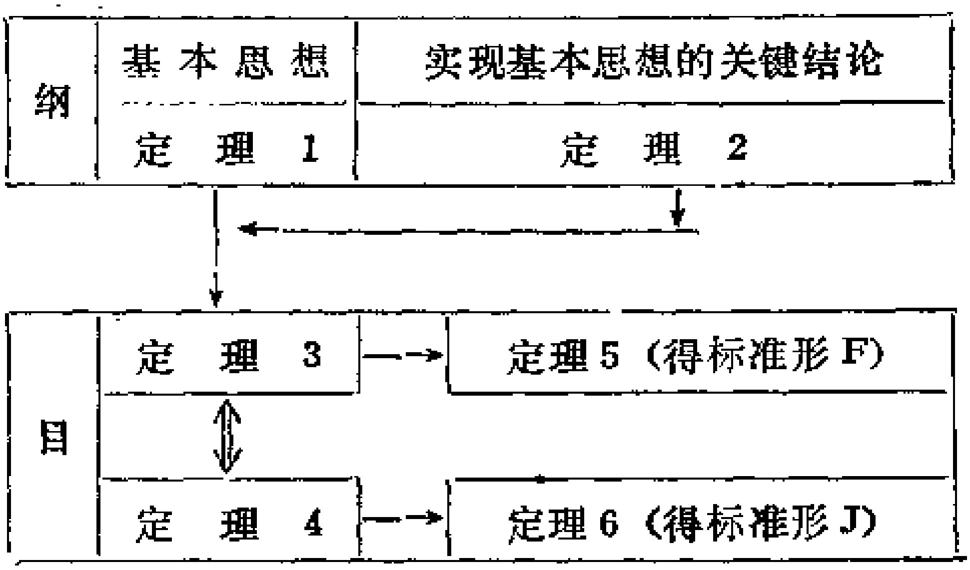
定理 4　$A\sim B\Longleftrightarrow A$ 与 B 有相同的**初等因子**（所谓 A 的初等因子指的就是 λI_n-A 的初等因子。）

由定理 3 与定理 4 可分别推得定理 5 和定理 6。

定理 5　数域 K 上任何方阵必可相似于它的弗罗本尼乌斯标准形 F（详见本章 § 2。）

定理 6　任何复方阵（复数域上的方阵）必相似于它的若当（Jordan）标准形 J（见 §3。）

将上述六个定理串联起来，可列成下表



§2　弗罗本尼乌斯标准形及其应用

一、弗罗本尼乌斯标准形

设 $1,\cdots,1,d_{k+1}(\lambda)\neq 1$，$d_{k+2}(\lambda)$，$\cdots$，$d_n(\lambda)$ 是 n 阶阵 A 的不变因子，并设

$$d_{k+i}(\lambda)=\lambda^{r_i}+a_{i1}\lambda^{r_i-1}+\cdots+a_{i,r_i-1}\lambda+a_{ir_i};\quad i=1,2,\cdots,n-k,\qquad(3)$$

（由（2）式可知，$r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_{n-k}$，$\sum\limits_{i=1}^{n-k}r_i=n$）作 r_i 阶弗罗本尼乌斯

阵

$$F_i=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{i,r_i}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{i,r_i-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{i,r_i-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{i1}\end{vmatrix};i=1,2,\cdots,n-k \tag{4}$$

称 F_i 为 $d_{k+i}(\lambda)$的**友阵**，也称 F_i 为**弗罗本尼乌斯块**。

定义 称 $n-k$ 阶分块对角阵（它也是 n 阶数字阵）：

$$F=\begin{pmatrix}F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{n-k}\end{pmatrix}$$

为 A 的（在 K 上的）**弗罗本尼乌斯标准形**，或称 F 为 A 的**有理标准形**。

由于 λI_n-A 的法式总可由 λI_n-A 经过其元素的加、减、乘、除（只能以非零数除之）的运算而得出（这亦是有理标准形 取 名 的 由来），故对任何 A，必能求得 F。

例1 求 3 阶阵 A 在有理数域上的弗罗本尼乌斯标准形，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

解 用λ-阵的初等变换，可求出 λI_3-A 的法式为：

$$(\lambda I_3-A)\cong\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^3+3\lambda^2-2\lambda-2\end{pmatrix}$$

故 A 的不变因子是 $1,1,\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda-2$，于是 A 的弗罗本尼乌斯标准形由一个块组成：

$$F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

今证定理5。对任一i，$1\leqslant i\leqslant n-k$，容易算得，$F_i$ 的第 r_i 个行列式因子$D_{r_i}(\lambda)=|\lambda I_{r_i}-F_i|=d_{k+i}(\lambda)$。又 F_i 的第 r_i-1 个行列式因子必是1，

这是因为 $\lambda I_{r_i}-F_i$ 有如下 r_i-1 阶子式:

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & & & \\ & -1 & \lambda & & * \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{r_i-1},$$

而 $D_{r_i-1}(\lambda)$ 是 $\lambda I_{r_i}-F_i$ 的所有 r_i-1 阶子式的最高公因式，今已有一个 r_i-1 阶子式是 $(-1)^{r_i-1}$，而 $D_{r_i-1}(\lambda)$ 是首一多项式，故它只能是 1. 又因 $D_i(\lambda)\,|\,D_{i+1}(\lambda)$，故 F_i 的前 r_i-1 个行列式因子必须全是 1，所以 $\lambda I_{r_i}-F_i$(即 F_i)的不变因子是：$1,\cdots,1,d_{r_i}(\lambda)$；$i=1,2,\cdots,n-k$。故由定理 1，

$$\lambda I_{r_i}-F_i\cong\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & d_{k+i}(\lambda)\end{pmatrix};\quad i=1,2,\cdots,n-k,$$

由上列诸式可知，

$$\lambda I_n-F=\begin{pmatrix}\lambda I_{r_1}-F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda I_{r_{n-k}}-F_{n-k}\end{pmatrix}$$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & d_{k+1}(\lambda) & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_{k+1}(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix}$$

这说明 $1,\cdots,1,d_{k+1}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 也是 F 的不变因子，故由定理 3，$A\sim F$。定理 5 证毕。

例2 由例 1 及定理 5 知，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

二、弗罗本尼乌斯标准形的应用

$A\sim F$ 的作用是，将 A（在相似意义下）经降阶后处理有关 A 的问题。当 A 相似于分块对角阵 F 后，由于每一 F_i 的阶数比 A 的阶低（除非 $n-k=1$），且 F_i 具有良好的性质（在第一章中已可略窥其一、二）：例如 F_i 的特征多项式展开式中的 λ^{r_i-k} 的系数就是 F_i 的最后一列的第 r_i-k+1 行的元素取负号（因 $|\lambda I_{r_i}-F_i|=\lambda^{r_i}+a_{i_1}\lambda^{r_i-1}+\cdots+a_{i,r_i-1}\lambda+a_{i,r_i}$），故 F_i 的行列式、F_i 的非异性等都是容易看出的；又如 F_i 的幂、F_i 的逆（当 F_i 非异时）也容易求得，如此等等。正因为 F_i 具有如此良好的性质，故用 F_i 作为"过渡"，从而达到解决方阵 A 本身问题的目的，就显得自然而必要了。作为矩阵六大方法之一：运用各种标准形的方法，正是基于这种想法提出来的，今先用这一想法—通过 F 作过渡，来证明著名的：

弗罗本尼乌斯定理 设 A 是数域 K 上的 n 阶阵，$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|$ 与 $m(\lambda)$ 分别是 A 的特征多项式与最小多项式，则

(i) $$m(\lambda)=d_n(\lambda)\left(=\frac{f(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}\right) \tag{5}$$

于是 A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$ 就是 A 的最小多项式。

(ii) $f(\lambda)$（在 K 上）的任一不可约因式都是$m(\lambda)$的因式。

证 先证(i)，由定理5，

$$A\sim F=\begin{pmatrix}F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_{n-k}\end{pmatrix}$$

因为相似矩阵有相同的最小多项式。故 F 的最小多项式也是 $m(\lambda)$，又 F 的最小多项式 $m(\lambda)$就是 F_1、F_2、…、F_{n-k} 的最小多项式 $m_1(\lambda)$、$m_2(\lambda)$…、$m_{n-k}(\lambda)$的最小公倍式，今求 $m_i(\lambda)$；$i=1,2,\cdots,n-k$，在第一章§4 例 8 中已证，不存在小于 r_i 的 s，使

$$b_sF_i^s+b_{s-1}F_i^{s-1}+\cdots+b_1F_i+b_0I_{r_i}=0$$

$(b_s,\cdots,b_0$ 不全为0)，换言之，只能是，$m_i(\lambda)=|\lambda I_{r_i}-F_i|$，但$|\lambda I_{r_i}-F_i|=d_{n+i}(\lambda)$，故 $m_i(\lambda)=d_{k+i}(\lambda)$；$i=1,2,\cdots,n-k$，又因$d_{k+i}(\lambda)$整除 $d_{k+i+1}(\lambda)$，故 $m_1(\lambda),m_2(\lambda),\cdots,m_{n-k}(\lambda)$ 的最小公倍式，即$d_{k+1}(\lambda),d_{k+2}(\lambda)$。

$\cdots, d_n(\lambda)$的最小公倍式只能是$d_n(\lambda)$。因此$m(\lambda)=d_n(\lambda)$。

又因 $d_n(\lambda)=\dfrac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=\dfrac{|\lambda I_n-A|}{D_{n-1}(\lambda)}=\dfrac{f(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}$故得(5)式。

再证(ii)。设$f(\lambda)$（在K上）的标准分解式是，

$$f(\lambda)=p_1(\lambda)^{r_1}p_2(\lambda)^{r_2}\cdots p_s(\lambda)^{r_s}。 \qquad (6)$$

其中$p_i(\lambda)$都是（对K的）不可约多项式（即$p_i(\lambda)$不能分解为K上的两个次数比$p_i(\lambda)$次数低的多项式），但由（1）式，

$$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|=d_{k+1}(\lambda)\cdots d_n(\lambda) \qquad (7)$$

（因由$|P(\lambda)||\lambda I_n-A||Q(\lambda)|=d_{k+1}(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$，以及$|\lambda I_n-A|, d_i(\lambda)$均为首一多项式，故$|P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)|=k$(一个数)$=1$。）由(6)与(7)式，$P_i(\lambda)$至少要整除某一$d_{k+t}(\lambda)$，但$d_{k+t}(\lambda)\,|d_n(\lambda)$ 所以$P_i(\lambda)|\,d_n(\lambda)$，再由(i)知，$P_i(\lambda)\,|m(\lambda)$；$i=1,2,\cdots,s$。

由弗罗本尼乌斯定理显然可得下面三个有用推论。

推论1 $|\lambda I_n-A|=m(\lambda)\Longleftrightarrow D_{n-1}(\lambda)=1$。

推论2 A的任一特征值必是$m(\lambda)$的复根。

这是因为，$f(\lambda)$复数域上的不可约因式必是一次式：$\lambda-\lambda_i$，由弗罗本尼乌斯定理的(ii)，$(\lambda-\lambda_i)\,|m(\lambda)$，故$m(\lambda_i)=0$；$i=1,2,\cdots,n$。

推论2可将$|\lambda I_n-A|$与$m(\lambda)$在复数域上的分解式清楚地表达出来，即若

$$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}, \sum_{i=1}^{s}r_i=n \qquad (8)$$

则

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}, \qquad (9)$$

并且$r_i\geqslant t_i$（由(i)），$t_i\geqslant1$（由(ii)）

（8）式与（9）式对讨论特征多项式与最小多项式的关系是有帮助的。

推论3 如果n阶阵A的n个特征值全不相同，则A的特征多项式与最小多项式必相等。

例3 设n阶阵A有2个不同的特征值：$\lambda=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega$，

ω^2，且 A 的最小多项式的次数是 2，证明 I_n+A 是非异阵，并求 $(I_n+A)^{-1}$。

证 由假设及弗罗本尼乌斯定理的（ii），$m(\lambda)=(\lambda-\omega)(\lambda-\omega^2)=\lambda^2+\lambda+1$，于是 $0=m(A)=A^2+A+I_n$ 也即 $(I_n+A)(-A)=I_n$，所以 I_n+A 非异，且 $(I_n+A)^{-1}=-A$。

给定 A 后，弗罗本尼乌斯标准形 F 总可求出，再加上 F 的性质良好，因此用它解决一些复杂的矩阵问题，常是有效的。为节省篇幅，我们仅再举一例。

例4 设 n 阶阵 A（在数域 K 上）的不变因子是 $1,1,\cdots,1$，$f(\lambda)=|\lambda I_n-A|$，且 $AB=BA$，证明：$B=g(A)$，此处 $g(\lambda)$ 是（K 上的）一个 $n-1$ 次多项式。

证 由定理 5，存在非异阵 P，使 $P^{-1}AP=F(=F_n)$。记 $P^{-1}BP=B_1$，由假设 $AB=BA$，即得 $FB_1=B_1F$。再应用第一章（28）式可得：

$$
\begin{aligned}
B_1&=B_1(e_1,e_2,\cdots,e_n)=B_1(e_1,Fe_1,\cdots,F^{n-1}e_1)\\
&=(B_1e_1,B_1Fe_1,\cdots,B_1F^{n-1}e_1)=(B_1e_1,F(B_1e_1),\cdots,F^{n-1}(B_1e_1)),
\end{aligned}
$$

设 $B_1e_1=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则 $B_1e_1=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ie_i$，于是上式化为：

$$
\begin{aligned}
B_1&=\left[\sum_{i=1}^{n}b_ie_i,\ F\left(\sum_{i=1}^{n}b_ie_i\right),\cdots,\ F^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}b_ie_i\right)\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n}b_i(e_i,Fe_i,\cdots,F^{n-1}e_i)\\
&=\sum_{i=1}^{n}b_i(F^{i-1}e_1,F^{i-1}Fe_1,\cdots,F^{i-1}F^{n-1}e_1)\\
&=\sum_{i=1}^{n}b_iF^{i-1}(e_1,e_2,\cdots,e_n)\\
&=\sum_{i=1}^{n}b_iF^{i-1}=g(F),
\end{aligned}
$$

其中，$g(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\lambda^{i-1}$，故得

$$B=PB_1P^{-1}=Pg(F)P^{-1}=g(PFP^{-1})=g(A)$$

§3 若当标准形的应用

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是 n 阶复阵 A 的所有不同的特征值，A 的所有的初等因子（即 $\lambda I_n - A$ 的初等因子）为，

$(\lambda-\lambda_1)^{l_{11}}$，$(\lambda-\lambda_1)^{l_{21}}$，…，$(\lambda-\lambda_1)^{l_{s_1,1}}$；$(\lambda-\lambda_2)^{l_{12}}$，$(\lambda-\lambda_2)^{l_{22}}$，…，$(\lambda-\lambda_2)^{l_{s_2,2}}$，…，$(\lambda-\lambda_t)^{l_{1t}}$，$(\lambda-\lambda_t)^{l_{2t}}$，…，$(\lambda-\lambda_t)^{l_{s_t,t}}$ 对任一初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^{l_{kj}}$，相应的若当块（$l_{kj}$ 阶阵）记为：

$$J_{l_{kj}}(\lambda_j)=\begin{pmatrix}\lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \lambda_j & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j\end{pmatrix};\ k=1,2,\cdots,s_j\ ,j=1,2,\cdots,t \qquad (10)$$

又记

$$J(\lambda_j)=\begin{pmatrix}J_{l_{1j}}(\lambda_j) & & & \\ & J_{l_{2j}}(\lambda_j) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{l_{s_j j}}(\lambda_j)\end{pmatrix},\ \sum_{k=1}^{s_j} l_{kj}=n_j, \qquad (11)$$

则由定理 6

$$A\sim J=\begin{pmatrix}J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_t)\end{pmatrix},\ \sum_{j=1}^{t} n_j=n \qquad (12)$$

称 J 为 A 的**若当标准形**。

运用标准形的方法，除了用弗罗本尼乌斯标准形作“过渡”外，也常用若当标准形“过渡”。若当标准形在“矩阵方程论”、“矩阵函数论”、“矩阵分解论”以及其他矩阵问题中都有它的应用，本节举两例说明之，其他应用可参见有关的习题。

例1 （伏斯）（Voss） 数域 K 上的任何方阵必可分解为两个复对称阵的乘积，且其中至少有一个是非异阵。

所谓**复对称阵** S，指的是满足 $S=S'$ 的复方阵。

证 因为 A 可看作复数域上的方阵，故由（12）式可得：

$$A=P\begin{pmatrix}J(\lambda_1)&&&\\&J(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&J(\lambda_t)\end{pmatrix}P^{-1}=PJP^{-1}\tag{13}$$

又因为分块对角阵 $J(\lambda_j)$ 中的每一个若当块 $J_{kj}(\lambda_j)$ 必可分解为下面两个复对称阵的乘积：

$$J_{kj}(\lambda_j)=\begin{pmatrix}\lambda_j&1&&&\\&\lambda_j&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\lambda_j&1\\&&&&\lambda_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&&1&\lambda_j\\&&\iddots&\iddots&\\&1&\lambda_j&&\\1&\lambda_j&&&\\\lambda_j&&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&&1\\&\iddots&\\1&&\end{pmatrix}=Q_{kj}^{(1)}Q_{kj}^{(2)}$$

且 $Q_{ij}^{(2)}=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)$ 是非异阵（上述分解式用了标准单位向量的性质），故 J 可分解为两个复对称阵的乘积：

$$J=\begin{pmatrix}Q_{11}^{(1)}&&&&\\&\ddots&&&\\&&Q_{s1,1}^{(1)}&&\\&&&\ddots&\\&&&Q_{1t}^{(1)}&\\&&&&\ddots\\&&&&&Q_{st,t}^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11}^{(2)}&&&&\\&\ddots&&&\\&&Q_{s1,1}^{(2)}&&\\&&&\ddots&\\&&&Q_{1t}^{(2)}&\\&&&&\ddots\\&&&&&Q_{st,t}^{(2)}\end{pmatrix}=Q_1Q_2$$

且 Q_2 是非异阵，于是由（13）式，A 可分解为下面两个复对称阵的乘积：

$$A=PJP^{-1}=(PQ_1P')[(P^{-1})'Q_2P^{-1}]$$

且 $(P^{-1})'QP^{-1}$ 是非异阵。

例2 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是 n 阶复阵的所有不同的特征值，则 A 相似于对角阵的充要条件是，$r(\lambda_iI_n-A)=r[(\lambda_iI_n-A)^2]$；$i=1,2,\cdots,t$。其中 $r(B)$ 表示矩阵 B 的秩。

证 必要性。若 A 相似于对角阵：

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1I_{n_1}&&&\\&\lambda_2I_{n_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_tI_{n_t}\end{pmatrix},\quad\sum_{i=1}^{t}n_i=n$$

则对任何 i，$1\leqslant i\leqslant t$，恒有

$$P^{-1}(\lambda_i I_n - A)P$$

$$=\begin{pmatrix} (\lambda_i-\lambda_1)I_{n_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (\lambda-\lambda_{i-1})I_{n_{i-1}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & (\lambda-\lambda_{i+1})I_{n_{i+1}} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & (\lambda-\lambda_t)I_{n_t} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(\lambda_i I_n - A)^2 P$$

$$=\begin{pmatrix} (\lambda_i-\lambda_1)^2 I_{n_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (\lambda_i-\lambda_{i-1})^2 I_{n_{i-1}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & (\lambda-\lambda_{i+1})^2 I_{n_{i+1}} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & (\lambda-\lambda_t)^2 I_{n_t} \end{pmatrix}$$

因为 $\lambda_j\neq\lambda_i(j\neq i)$，于是

$$r(\lambda_i I_n - A) = r[P^{-1}(\lambda_i I_n - A)P] = n_1+\cdots+n_{i-1}+n_{i+1}+\cdots+n_t$$

$$r[(\lambda_i I_n - A)^2] = r[P^{-1}(\lambda I_n - A)^2 P] = n_1+\cdots+n_{i-1}+n_{i+1}+\cdots+n_t$$

所以 $r(\lambda_i I_n - A) = r[(\lambda_i I_n - A)^2]$；$i=1,2,\cdots,t$。

充分性。只要证，当条件满足时，A 的任何若当块都是 1 阶阵即可。用反证法，若有某一若当块 $J_{l_{kj}}(\lambda_j)$的阶数 $l_{kj}>1$；$1\leqslant k\leqslant s_j$，$1\leqslant j\leqslant t$ 则因

$$\lambda_j I_{l_{kj}} - J_{l_{kj}}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\lambda_j I_{l_{kj}} - J_{l_{kj}}(\lambda_j)]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

故得 $r(\lambda_j I_{l_{kj}}-J_{l_{kj}}(\lambda_j))=l_{kj}-1$，$r((\lambda_j I_{l_{kj}}-J_{l_{kj}}(\lambda_j)^2)=l_{kj}-2$，所以

$$r(\lambda_j I_{l_{kj}}-J_{l_{kj}}(\lambda_j))>r((\lambda_j I_{l_{kj}}-J_{l_{kj}}(\lambda_j))^2 \tag{14}$$

又由（1）式知，

$$r(\lambda_i I_{nj}-J(\lambda_j))=\sum_{i=1}^{s_j} r(\lambda_j I_{l_{ij}}-J_{l_{ij}}(\lambda_j))$$

$$r((\lambda_j I_{nj}-J(\lambda_j))^2)=\sum_{i=1}^{s_j} r((\lambda_j I_{l_{ij}}-J_{l_{ij}}(\lambda_j))^2)$$

但是 $r(\lambda_j I_{l_{ij}}-J_{l_{ij}}(\lambda_j))\geqslant r((\lambda_j I_{l_{ij}}-J_{l_{ij}}(\lambda_j))^2)$，$i=1,2,\cdots,s_j$；$i\neq j$，故由上两式及（14）式即得

$$r(\lambda_j I_{nj}-J(\lambda_j))>r((\lambda_j I_{nj}-J(\lambda_j))^2)$$

又由（12）式知，

$$r(\lambda_j I_n-A)=r(\lambda_j I_n-J)=\sum_{i=1}^{t} r(\lambda_j I_{ni}-J(\lambda_i))$$

$$r((\lambda_j I_n-A)^2)=r((\lambda_j I_n-J)^2)=\sum_{i=1}^{t} r((\lambda_j I_{ni}-J(\lambda_i))^2)$$

而 $r(\lambda_j I_{ni}-J(\lambda_i))\geqslant r((\lambda_j I_{ni}-J(\lambda_i))^2)$，$i=1,2,\cdots,t$；$i\neq j$，故由上两式及（15）式即得：

$$r(\lambda_j I_n-A)>r((\lambda_j I_n-A)^2)$$

这与假设条件：$r(\lambda_j I_n-A)=r((\lambda_j I_n-A)^2)$；$j=1,2,\cdots,t$，相矛盾。故若当块全是1阶阵，即 A 相似于对角阵。

习 题

1．设 A 与 B 是数域 K 上的 n 阶方阵，证明：λI_n-A 与 λI_n-B 相抵的充要条件是，$A=PQ$，$B=QP$。其中 P 与 Q 都是 K 上 n 阶阵，且它们中至少有一个非异。

（提示：用定理1，由 λI_n-A 与 λI_n-B 相抵得 $P^{-1}AP=B$，令 $P^{-1}A=Q$ 即可，充分性是显然的。）

2．设 A_1、A_2、B_1、B_2 都是数域 K 上的 n 阶阵，且 A_1 与 A_2 都非异，证明：λA_1-B_1 与 λA_2-B_2 相抵的充要条件是，存在 K 上 n 阶非异阵 P 与 Q，使，$PA_1Q=A_2$，$PB_1Q=B_2$。

3. 求秩为 1 的 n 阶阵 A 的第 $n-1$ 个行列式因子， 并求 λI_n-A 的法式。此处 $n\geqslant 2$。

4. 证明 $A\sim A'$，其中 A 是数域 K 上的方阵。

（提示：直接应用 $\lambda I-A$ 的法式以及定理 1。）

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是对合阵，且 $|A|=1$，又设 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，证明：

$$A\sim\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

6. 证明下列 n 阶阵 A 与 B 相似：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

（提示：先证 A 与 B 的行列式因子相同，易知 A 的 $n-1$ 阶行列式因子是 1。今取 λI_n-B 的两个特殊的 $n-1$ 阶子式：一是它的 $n-1$ 阶顺序主子式；一是它的第 n 行第 1 列元素的余子式，然后证这两个子式没有任何公因式。）

7. 设 n 阶阵 A 的特征多项式是 $(\lambda-1)^n$，证明：对任一适合 $2\leqslant l\leqslant n$ 的 l，$A^l\sim A$。

（提示：应用若当标准形，并仿照题 6 的证明思路。）

8. 求秩为 1 的 n 阶阵 A 的若当标准形。

9. 设 λ_1 是 n 阶阵 A 的 k 重特征值，则 $r((\lambda_1 I_n-A)^k)=n-k$。

10. 证明：方阵 A 相似于对角阵的充要条件是，它的初等因子都是一次式。

11. 证明：方阵 A 相似于对角阵的充要条件是，它的最小多项式无重根。

（提示：应用弗罗本尼乌斯定理以及若当标准形。）

12．设 A、B、C 分别是 m 阶阵 n 阶阵、与 $m\times n$ 阵，证明：矩阵方程 $AX+XB'=C$ 有唯一解的充要条件是：$\lambda_i+\mu_j\neq 0$；$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 A 的特征值，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 B 的特征值。

（提示：分别将 A 与 B 化为它的若当标准形，然后将 B 的若当块的每一列写成标准单位向量的线性组合，再将未知阵按它的列分块即可。）

第七章　方阵的正交相似与酉相似

定义　设 A 与 B 都是复方阵，若存在酉阵 Q（即 $\overline{Q'}=Q^{-1}$），使 $\overline{Q'}AQ=Q^{-1}AQ=B$，则称 A 与 B **酉相似**，或称 **A 酉相似于 B**。当 A 与 B 均是实阵，Q 是正交阵（$Q'=Q^{-1}$），此时若 $Q^{-1}AQ=Q'AQ=B$，则称 A 与 B **正交相似，或称 A 正交相似于 B**。

无论从理论上还是从应用上来说，方阵的正交（酉）相似比之方阵的（通常）相似用得更多。本章将介绍方阵正交相似与酉相似的初步内容以及它们的若干应用。

本章内容所用的基本方法是§1介绍的镜象变换法（或曰镜象阵方法）。

§1　镜　象　阵

一、镜象阵的概念

镜象阵，也称**初等反射阵**，或**镜酉反射阵**。这一概念是由物体在平面镜中成象的一些简单物理性质发展而来的。在通常的三维几何空间中，任一点 S（向量 α）对过原点 O 的平面（镜面）的象是镜面下的一点 S'（向量 β），根据成象的物理意义，有如下性质：

(i) α 与 β 的长度相等，即 $(\alpha'\alpha)^{1/2}=(\beta'\beta)^{1/2}$（$\alpha$ 与 β 都是三维列向量）。

(ii) 点 S' 在由过 S 面与该平面垂直的直线上，对该平面来说，S 与 S' 具有对称的位置，即 S 可以看作 S' 的镜象，由原点 O 作该平面的单位法向量 u（即 $u'u=1$），设其端点为 Z，则 $\overline{OZ}$ 平行于 $\overline{SS'}$，所以

$$\beta-\alpha=ku=uk\ (k\text{ 为实数}) \tag{1}$$

今求 k：在(1)式的两边左乘 u'，则得

$$u'(\beta-\alpha)=(u'u)k=k \tag{2}$$

又因为 $\alpha+\beta$ 位于该平面上，所以

$$u'(\alpha+\beta)=0 \tag{3}$$

(3)式减去(2)式即得 $k=-2u'u$。把它代入（1)的最后一个等式中得到：$\beta-\alpha=-2uu'\alpha$，于是

$$\beta=(I_3-2uu')\alpha \tag{4}$$

故 α 与它的（镜）象 β 可以通过（4)式中的方阵 I_3-2uu' 联系起来。因此，称 I_3-2uu' 为 3 阶实镜象阵。一般地，可引进下列定义：

定义 设 u 是 n 维实的单位列向量，(即 $u'u=1$)，则称 $H=I_n-2uu'$ 为(n 阶) **实镜象阵**，而对 n 维复的单位列向量 u(即$\bar{u}'u=1$)，则称 $K=I_n-2u^{\mathrm{l}}u'$ 为（n 阶）**复镜象阵**。

命题1，如果 H 是 n 阶实镜象阵，则 $\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & H\end{pmatrix}$也是实镜象阵。

证 因为 $H=I_n-2uu'$，而 $u'u=1$，所以

$$\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_n-2uu'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & uu'\end{pmatrix}$$

$$=I_{m+n}-2\begin{pmatrix}0\\ u\end{pmatrix}(0,u')$$

而$\begin{pmatrix}0\\ u\end{pmatrix}$显然是 $m+n$ 维单位列向量，故$\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & H\end{pmatrix}$是($m+n$ 阶)实镜象阵。

如把命题 1 中的 H 换成复镜象阵 K，则相应的结论仍然成立。

命题 2 H 是正交、对称阵，K 既是自共轭阵，(即$\overline{K'}=K$)，又是酉阵（即$\overline{K'}=K^{-1}$)。

命题 3 $|H|=-1$， $|K|=-1$。

命题 2 是明显的，命题 3 由行列式的第二降阶定理即可证得（见第二章 § 5。)

二、基本定理

三维几何空间中任意两个长度相等的向量 α 与 β，可以看作过原点而其端点分别在 S 与 S' 的两个向量，作过原点而垂直于 $\overline{SS'}$ 的二等分线的平面，则 β 可看作 α 的镜象，且由上一段的讨论可知，存在 2 阶实镜象阵 H，把 α “变成” β，即 $H\alpha=\beta$。而由命题 2 可得，$H\beta=$

α，亦即 α 可看作 β 的镜象。对于"长度"相等的两个 n 维复（实）列向量 α 与 β 是否也存在 n 阶复（实）镜象阵 H，使 $H\alpha=\beta$ 呢？为回答这一问题，需要先引进 n 维列向量 α 的长度的概念。

定义 设 α 是 n 维复列向量，称 $\|\alpha\|=\sqrt{\bar{\alpha}'\alpha}$ 为 α 的长度。

当 α 是实向量时，则 $\|\alpha\|=(\alpha'\alpha)^{1/2}$。今证镜象阵理论中的基本定理：

定理1. 设 α、β 是两个 n 维复列向量，$\alpha\neq\beta$，如果 $\bar{\alpha}'\beta$ 是实数，则必存在 n 阶复镜象阵 K，使 $K\alpha=\beta$。

证 作单位向量

$$u=\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}$$

则

$$\beta-\alpha=-u\|\alpha-\beta\| \tag{5}$$

但是

$$\|\alpha-\beta\|^2=\overline{(\alpha-\beta)'}(\alpha-\beta)=\bar{\alpha}'\alpha+\bar{\beta}'\beta-\bar{\beta}'\alpha-\bar{\alpha}'\beta \tag{6}$$

由假设，$\bar{\alpha}'\alpha=\bar{\beta}'\beta$，$\bar{\alpha}'\beta=(\overline{\bar{\alpha}'\beta})=\bar{\beta}'\alpha$，故（6）式可写成

$$\|\alpha-\beta\|^2=2\,\overline{(\alpha-\beta)'}\alpha$$

亦即

$$\|\alpha-\beta\|=2\overline{\left(\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}\right)}'\alpha=2\bar{u}'\alpha$$

把上式代入（5），即得

$$\beta=(I_n-2u\bar{u}')\alpha=K\alpha$$

例 1. 设 $\alpha=(1-\sqrt{-1},1+\sqrt{-1})'$，$\beta=(\sqrt{2},\sqrt{2})'$，求 2 阶复镜象阵 K，使 $K\alpha=\beta$。

解 因为 $\|\alpha\|=\|\beta\|=2$，并且

$$\bar{\alpha}'\beta=(1+\sqrt{-1})\sqrt{2}+(1-\sqrt{-1})\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

是实数。故符合定理 1 的条件。作单位向量

$$u=\frac{\alpha-\beta}{\|\alpha-\beta\|}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}-\sqrt{-1},1-\sqrt{2}+\sqrt{-1})'$$

于是

$$K=I_2-2uu'=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}2-\sqrt{2} & (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{-1})\\(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{-1}) & 2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{-1})\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{-1}) & 0\end{pmatrix}$$

容易验证：$K\alpha=\beta$。

当 α 与 β 是实向量，则条件 $\bar{\alpha}'\beta$ 自然被满足，故得

定理 2．设 α 与 β 是不同的 n 维实列向量，如果 $\|\alpha\|=\|\beta\|$，则必存在 n 阶实镜象阵 H，使 $H\alpha=\beta$。

三、任意方阵的 QR 分解

定理 3．设 A 是任意 n 阶实阵，则必有分解式：

$$A=QR \tag{7}$$

其中 Q 为正交阵，R 为主对角元全是非负数的三角阵，称（7）式为 A 的 **QR 分解**。

证 把 A 按它的列分块：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{n1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&&\cdots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

当 $n=1$ 时，因为

$$a_{11}=\begin{cases}1\cdot a_{11}, & \text{当 } a_{11}>0\\(-1)(-a_{11}), & \text{当 } a_{11}<0\end{cases}$$

故定理对 $n=1$ 是成立的，设定理对 $n-1$ 成立，今证定理对 n 也成

立。

(i) 如果 $\alpha_1=0$，则

$$A=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

其中 A_1 是 $n-1$ 阶阵，故由归纳法假设

$$A_1=Q_1R_1$$

其中 Q_1 是 $n-1$ 阶正交阵，R_1 是上三角阵，且它的主对角元全是非负数，于是

$$A=\begin{pmatrix}0 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & *\\ 0 & R_1\end{pmatrix}=QR$$

易知

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_1\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}0 & *\\ 0 & R_1\end{pmatrix}$$

分别是正交阵与主对角元都是非负数的上三角阵。

(ii) 当 $\alpha_1\neq 0$，则令

$$\beta_1=(\|\alpha_1\|,0,\cdots,0)'$$

显然 $\|\beta_1\|=\|\alpha_1\|$，故由定理2，存在实镜象阵 H，使 $H\alpha_1=\beta_1$，所以

$$HA=(H\alpha_1,H\alpha_2,\cdots,H\alpha_n)=(\beta_1,H\alpha_2,\cdots,H\alpha_n)=\begin{pmatrix}\|\alpha_1\| & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\quad(8)$$

且 $\|\alpha_1\|>0$，A_1 是 $n-1$ 阶阵，由归纳法假设 $A_1=Q_1R_1$，其中 Q_1 与 R_1 分别是 $n-1$ 阶正交阵与主对角元全是非负数的上三角阵。又因 $H^{-1}=H$（命题2），于是，(8) 式化为

$$A=H\begin{pmatrix}\|\alpha_1\| & *\\ 0 & Q_1R_1\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|\alpha_1\| & *\\ 0 & R_1\end{pmatrix}=QR$$

易知

$$Q=H\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_1\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\|\alpha_1\| & *\\ 0 & R_1\end{pmatrix}$$

分别是正交阵与主对角元全是非负数的上三角阵。

不难看出，定理3的证明是构造性的。

当 A 是非异阵时，A 的 QR 分解中的 R 显然也是非异阵，故得

推论1 设 A 是非异阵，则 $A=QR$，而 Q 是正交阵，R 是主对角元全是正数的上三角阵，并且这种分解是唯一的。

证 本推论的第一部分已显然可得。今证分解的唯一性，设

$$A=QR=Q_1R_1 \tag{9}$$

是 A 的任意两种 QR 分解：其中 Q、Q_1 都是正交阵，R、R_1 是主对角元全大于零的(非异）上三角阵，于是（9）式可改写为：

$$Q_1^{-1}Q=R_1R^{-1} \tag{10}$$

由于 $Q_1^{-1}Q$ 仍是正交阵，故 R_1R^{-1} 是正交阵，也是主对角元全大于零的上三角阵，而正交的上三角阵只能是对角阵，且其主对角元是 1 或 -1（这是容易证明的），但 R_1R^{-1} 的主对角元全是正数，故 R_1R^{-1} 只能是单位阵：$R_1R^{-1}=I_n$，故 $R_1=R$，再由（10）式，又得 $Q=Q_1$。

推论 2 任何正交阵 A 必可分解为有限个实镜象阵的乘积。

证，由定理3的证明过程容易看出，必存在有限个实镜象阵 H_1、H_2、…、$H_s(s\leqslant n)$ 使

$$H_s\cdots H_2H_1A=\begin{pmatrix} \|\alpha_1\| & & & * \\ & \|\delta\| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|\eta\| \end{pmatrix}=R \tag{11}$$

此处 R 是主对角元全大于零的上三角阵。

由假设 A 是正交阵，由 $H_s\cdots H_2H_1$ 仍是正交阵，故由（11）式，R 是正交的上三角阵，且其主对角元全是正数，于是由推论 1 证明中的说明可知 $R=I_n$，所以（11)式化为

$$H_s\cdots H_2H_1A=I_n$$

由 $H_i^2=I_n$，$i=1,2,\cdots,s$ 即知

$$A=H_1H_2\cdots H_s$$

因为有限个实镜象阵的乘积自然是正交阵，这个结论与推论 2 合并，即得

推论 3 A 是正交阵的充要条件是它可分解为有限个实镜象阵的乘积。

由于镜象阵有良好的性质，且容易找到，故由推论 3 可知，要找满足某种条件的正交阵，只要找满足某种要求的有限个实镜象阵就可以了。以下将会反复运用这一有用的想法。

定理 4 任何复方阵 A 必可分解为一个酉阵 U 与一个上三角阵 R 的乘积：

$$A = UR \tag{12}$$

证 把 A 按它的列分块：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

(1) 如果 $a_{11} \neq 0$，把复数 a_{11} 写成：

$$a_{11} = a_1 + b_1\sqrt{-1} = |a_{11}| e^{\sqrt{-1}\varphi_1} (a_1\text{、}b_1 \text{ 是实数})$$

此处 $|a_{11}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ 是 a_{11} 的长度，φ_1 是 a_{11} 的幅角，即 $\cos\varphi_1 = \dfrac{a_{11}}{|a_{11}|}$，令

$$\beta_1 = (\|\alpha_1\| e^{\sqrt{-1}\varphi_1}, 0, \cdots, 0)'$$

此处

$$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$$

则 $\|\alpha_1\| = \|\beta_1\|$，并且

$$\bar{\alpha}'_1\beta_1 = |a_{11}| \cdot \|\alpha_1\|$$

是实数，故由定理 1，必存在复镜象阵 K_1，使 $K_1\alpha_1 = \beta_1$，于是

$$K_1A = (\beta_1, K_1\alpha_2, \cdots, K_1\alpha_n) = \begin{pmatrix} \|\alpha_1\| e^{\sqrt{-1}\varphi_1} & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

至此，以下的证明与实方阵的证明相同，故不再重复。

(2) 如果 $a_{11} = 0$，则取

$$\beta_1 = (\|\alpha_1\|, 0, \cdots, 0)'$$

这时，$\|\alpha_1\| = \|\beta_1\|$，并且 $\bar{\alpha}'_1\beta_1 = 0$（自然是实数），所以同(i)，可找到复镜象阵 M_1，使

$$M_1A = \begin{pmatrix} \|\alpha_1\| & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

于是用归纳法，即可证得本定理。

称（12）式为 A 的 **UR 分解**。

§2 实对称阵正交相似的标准形

定理 5 设 A 是实对称阵，则必可找到正交阵 Q，使

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{13}$$

证 取 A 的属于 λ_1 的一个特征向量 α_1，则

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1 \tag{14}$$

由于 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$，于是（14）式可改写为：

$$A\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\lambda_1\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} \tag{15}$$

对列向量 $\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$ 与 $\mathbf{e}_1=(1,0,\cdots,0)'$，由定理 2，可找到实镜象阵 H_1，使

$$H_1\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\mathbf{e}_1 \tag{16}$$

把（15）式两边左乘 $H_1(=H'_1)$，并改写成

$$(H'_1AH_1)\left(H_1\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}\right)=\lambda_1H_1\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$$

由（16）式即得

$$(H'_1AH_1)\mathbf{e}_1=\lambda_1\mathbf{e}_1$$

故

$$H'AH_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix} \tag{17}$$

由于 $A=A'$，故 $H'_1AH_1=(H'AH_1)'$，即（17）式右端仍是实对称阵，故 $*=\mathbf{0}$，$A_1=A'_1$，即 A_1 是 $n-1$ 阶实对称阵。

再由于相似矩阵有相同的特征值，故由（17）式可知，A_1 的特征值是 $\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$。再对 $n-1$ 阶实对称阵 A_1 用归纳法：存在 $n-1$ 阶正交阵 Q_1，它是有限个 $n-1$ 阶实镜象阵的乘积，使

$$Q_1'AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{18}$$

记 $Q=H_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_1\end{pmatrix}$，则 Q 仍是正交阵，且由（17）、（18）即得（13）式。

用正交阵 Q 将实对称阵 A 正交相似于对角阵（定理 5）的理论与方法都是十分重要的（因为它在理论与实际问题上有多方面应用），它是线性代数中最基本的一个结论。

另外，定理 5 的证明是构造性的，只要能求出 A 的特征值，则 Q 也可求得。

例 1．设

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

求以有理数为元素的正交阵，使 $Q'AQ$ 为对角阵。

解 由特征多项式的降阶定理（见第五章§2）知

$$|\lambda I_4-A|=|(\lambda-1)I_4+\alpha\alpha'|=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

其中 $\alpha=(1,-1,-1,1)'$。故 A 的特征值是 $1,1,1,-3$。

由于 A 与 $\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3\end{pmatrix}$ 都是有理数域上的矩阵，故按题意要求，它们要在有理数域上正交相似，因而每个镜象阵的元素最好是有理数，才有可能达到此目的，也就是每个镜象阵的单位（法）向量最好选取以有理数为分量的“有理列向量”。今对 $\lambda_1=1$，解特征方程 $(I_4-A)x=0$，可选出一个“有理列向量”解：$\alpha_1=(1,1,1,1)'$，且单位向量：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)'$$

也是“有理列向量”，对$\beta_1-e_1=(1,0,0,0)'$，作单位（法）向量：

$$u=\frac{\beta_1-e_1}{\|\beta_1-e_1\|}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)'$$

它仍是“有理列向量”，故得到了有理数域上的镜象阵：

$$H_1=I_4-2uu'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

且容易算得：$H_1AH_1=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}$。

本例只找一次实镜象阵就得到了所要的结果，另外，若用教科书上常见的方法，则可找到

$$Q_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

也使$Q_1'AQ_1=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix}$，但$Q_1$不符合本例的要求，还需进一步作变换才能求出。

上例表明，用镜象阵的方法处理这些问题，在某些时候可以收到事半功倍的效果，但须注意，不是任何实对称阵都可以只经过一次镜象阵就化为对角阵，故教科书上常用的方法还是需要的。

现举一例，说明定理5在理论推导中的作用。

例2. 设$\lambda=a+b\sqrt{-1}$是n阶实方阵A的任一特征值，a与b分别是λ的实部与虚部。如果$A+A'$的n个特征值是$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，则

必有

$$\frac{1}{2}\min_{1\leq i\leq n}\mu_i\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\leq i\leq n}\mu_i \tag{19}$$

证 因为 $A+A'$ 是对称阵，故由定理 5，存在正交阵 Q,使

$$Q'(A+A')Q=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix} \tag{20}$$

设 x 是 A 的属于 λ 的特征向量，则

$$Ax=\lambda x \tag{21}$$

对（21）式两边转置、共轭，得到

$$\bar{x}'A'=\overline{\lambda x}' \tag{22}$$

由（21）式、（22）式即得： $\bar{x}'Ax=\lambda\bar{x}'x$

$$\bar{x}'Ax=\overline{\lambda x}'x$$

于是

$$\bar{x}'(A+A')x=(\lambda+\bar{\lambda})\bar{x}'x=2a\bar{x}'x \tag{23}$$

令 $x=Qy$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 是复向量。由（20）式，（23）式可化为

$$\bar{y}'\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}y=2a\bar{y}'y,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\bar{y}_iy_i=2a\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_iy_i$$

由上式可知，

$$(\min_{1\leq i\leq n}\mu_i)\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant 2a\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant(\max_{1\leq i\leq n}\mu_i)\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2 \tag{24}$$

因为 $x\neq 0$，Q 是非异阵，故 $y\neq 0$，于是 $\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\neq 0$，故由（24）式即得（19）式。

§3 许尔定理

复方阵酉相似的基本结论是下面的

定理 6 （许尔定理）任意复方阵 A 必可酉相似于上三角阵，即存在 n 阶酉阵 U，使

$$\overline{U}'AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & C_{11} & C_{13} & \cdots & C_{1n}\\ & \lambda_2 & C_{23} & \cdots & C_{2n}\\ & & \lambda_3 & \cdots & C_{3n}\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\tag{25}$$

证 由第五章定理 6，存在非异复阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \ddots\\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\tag{26}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（显然）是 A 的特征值。由本章定理 4，设 $P=UR$，其中 U 是酉阵，R 是上三角阵，且非异（因 P 非异），代入（26）式即得

$$R^{-1}(\overline{U}'AU)R=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \ddots\\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\overline{U}'AU=R\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \ddots\\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}R^{-1}\tag{27}$$

因为上三角阵的逆阵仍是上三角阵，两个上三角阵之乘积仍是上三角阵，故（27）右端方阵仍是上三角阵，且主对角元就是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，于是（27）式化为（25）式。

许尔定理有广泛的应用，有些结论几乎可由许尔定理立即看出，如下例 1 所示。

例 1　证明：实对称阵的特征值全是实数(见第五章 §3 的命题)。一般地，**自共轭阵** A（即满足 $\overline{A'}=A$ 的复方阵)的特征值全是实数。

证　因为实对称阵是自共轭阵的特例，故仅需证明后者即可。由许尔定理，存在酉阵 U，使

$$\overline{U'}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{28}$$

故得

$$\overline{U'}\overline{A'}U=(\overline{\overline{U'}AU})'=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ \bar{*} & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix} \tag{29}$$

因为 $\overline{A'}=A$，故 (28) 与 (29) 的右端方阵相等，比较其主对角元，得到 $\lambda_i=\bar{\lambda}_i$，故 λ_i 全是实数，$i=1,2,\cdots,n$。

若比较 (28) 与 (29) 右端方阵的非主对角元，则打 $*$ 处的元素全是 0，即 (28) 右端方阵是对角阵，故进一步得到：

自共轭阵必酉相似于实对角阵。

例 2　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是复阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值，则

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\operatorname{tr}(A\overline{A'})。\tag{30}$$

称 (30) 式为**许尔不等式**。

证　由许尔定理，成立 (25) 式，于是

$$\overline{U'}\overline{A'}U=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ \overline{C}_{12} & \bar{\lambda}_2 & & \\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \bar{\lambda}_3 & \\ \cdots\cdots & & & \ddots \\ \overline{C}_{1n} & \overline{C}_{2n} & \overline{C}_{3n} & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix} \tag{31}$$

由（25）式与（31）式得到

$$\overline{U'}A\,\overline{A'}U=(\overline{U'}AU)(\overline{U'}\,\overline{A'}U)=$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda_1|^2+\sum\limits_{j=2}^{n}|C_{1j}|^2 & & & & \\ & |\lambda_2|^2+\sum\limits_{j=3}^{n}|C_{2j}|^2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & * & & |\lambda_{n-1}|^2+|C_{n-1,n}|^2 & \\ & & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix},$$

上式两边取迹，因为相似阵有相同的迹，故得

$$\operatorname{tr}(A\overline{A'})=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|C_{ij}|^2,$$

也即

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|C_{ij}|^2 \tag{32}$$

由于 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|C_{ij}|^2\geqslant 0$，故由（32）式即得许尔不等式（30）。

称(32)式为**许尔恒等式**。许尔恒等式与拉格朗日恒等式以及柯希—许瓦尔兹不等式与许尔不等式都是线性代数中重要的等式与不等式。

许尔定理的多方面应用，除见之于本章习题中外，还将在第九章中再次出现。

习　题

1．证明：任何非异实方阵 A 必有唯一分解式，$A=QL$，其中 Q 是正交阵，L 是主对角元全大于零的下三角阵。（提示：将 A 分块：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，并仿定理 3 的证法，用镜象阵将$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$化为下三角阵，可先将 α_n 化为$(0,\cdots,0,l_n)'$。）

2．证明：任何非异实方阵 A 必有唯一分解式，

$$A=L_1Q_1=R_1Q_2$$

其中 Q_1、Q_2 是正交阵，L_1 与 R_1 分别是主对角元全大于零的下三角阵

与上三角阵。

（提示：对 A' 应用定理 3 及题 1 的结论。）

3．如果 n 阶阵 A 的特征值全是实数，证明 A 必可正交相似于上三角阵。

（提示：完全仿定理 5 的证法。）

4．对下列实对称阵，找正交阵 Q，使 $Q'AQ$ 为对角阵。

(i) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 17 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

5．设 A 与 B 都是 n 阶实对称阵，且 $AB=BA$，证明：必存在正交阵 Q，使

$$Q'AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad Q'BQ=\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

此处 λ_i 与 μ_i 分别是 A 与 B 的特征值；$i=1,2,\cdots,n$。

（提示：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 全不相同，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 n_1 个 λ_1，n_2 个 $\lambda_2,\cdots,n_s$ 个 λ_s，$\sum\limits_{i=1}^{s} n_i=n$。由定理 5，存在正交阵 P，使

$$P'AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

然后应用假设条件：$AB=BA$，证明 $P'BP$ 是分块对角阵，其主对角块全是实对称阵，再对这些实对称阵应用定理 5。）

6．设有理数域上 n 阶对称阵 A 的特征值全是实数，且它的所有的不同特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$。又已知 $\lambda_i I_n-A$ 的秩为 r_i；$i=1,2,\cdots s$，

试求 $\lambda I_n - A$ 的第 $n-1$ 个行列式因子。

（提示：应用定理 5 以及第六章的弗罗本尼乌斯定理。）

7．用许尔定理（本章定理 6）证明：反对称实方阵的特征值的实部等于零。

8．应用许尔定理证明：正交阵、酉阵的任一特征值的模长（绝对值）等于 1。

9．设 A 是复方阵，若 $A\overline{A'}=\overline{A'}A$，则称 A 为**复正规阵**。证明：复方阵 A 酉相似于对角阵的充要条件是 A 为复正规阵。

（提示：必要性显然。证明充分性，可用本章（25）式得（31）式，由（25）式与（31）式分别算出 $\overline{U'}A\overline{A'}U$ 与 $\overline{U'}\overline{A'}AU$，再由假设条件 $A\overline{A'}=\overline{A'}A$ 可证所有 $C_{ij}=0, 1\leqslant i<j\leqslant n$。）

10．设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是复阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值，证明：A 是复正规阵的充要条件是，$\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$。

（应用题 9 及本章的许尔恒等式：（32）式）。）

11．（i）设 $\lambda=a+b\sqrt{-1}$ 是实方阵 A 的任一特征值，a 与 b 分别是 λ 的实部与虚部，且 $b\neq0$。又设 $\delta=\alpha+\sqrt{-1}\beta$ 是 A 的属于 λ 的特征向量，其中 α 与 β 是实列向量，证明 α 与 β 线性无关。

（ii）设 $2s$ 阶实方阵 A 的特征值是 $\lambda_i=a_i\pm\sqrt{-1}b_i$，$a_i$ 与 b_i 是 λ_i 的实部与虚部，且 $b_i\neq0$；$i=1,2,\cdots,s$（即 A 中没有实特征值），证明：必存在正交阵 Q，使

$$Q'AQ=\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 A_i 都是 2 阶阵，它的特征值就是 $a_i\pm b_i\sqrt{-1}$；$i=1,2,\cdots,s$。

（提示：对(ii) 仿第五章定理 6 的证明思路，再应用本章定理 4。）

12．如果实方阵 A 满足，$AA'=A'A$，则称 A 为**实正规阵**。设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 n 阶实正规阵 A 的实特征值，$a_i\pm\sqrt{-1}b_i$ 是 A 的复特征值（即 $b_i\neq0$）；$i=1,2,\cdots,s$，且 $r+2s=n$，则必存在

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s\end{pmatrix} \qquad (*)$$

而$A_i=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ -b_i & a_i\end{pmatrix}$;$i=1,2,\cdots,s$。称(*)式为实正规阵的正交相似标准形。(提示:应用镜象阵的基本定理2以及11题的(ii),其中要证:当$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$是实正规阵时,$A$与$C$均实正规,且$B=0$。)

13．证明后述有趣结论:相似的实正规阵必正交相似(提示:应用12题的(*)式以及"相似阵有相同的特征值"的结论。)

14．设A是n阶正交阵,证明

(i) A必是实正规阵;

(ii) 必存在正交阵Q,使

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}I_l & & & & \\ & -I_t & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_s\end{pmatrix}$$

其中$A_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}$;$i=1,2,\cdots,s$。称上式为正交阵的**正交相似标准形**。

(iii) $|A|=-1 \Longleftrightarrow A$有奇数个特征值是$-1$。

(提示:对(ii)用12题(*)式。)

15．(i)证明反对称实方阵A必是实正规阵,且存在正交阵Q,使

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \begin{pmatrix}0 & b_1\\ -b_1 & 0\end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix}0 & b_s\\ -b_s & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

其中b_i是实数,$i=1,2,\cdots s$。称上式为反对称阵的正交相似标准形。

(ii) $|A|\geqslant 0$,当A是奇数阶阵时,$|A|=0$。

(提示:对(i)应用12题(*)式。)

第八章　方阵的合同与二次型

§1　基本概念与基本结论

本章的基本概念有三：合同；惯性指数；正定（半正定）阵与正定（半正定）二次型。

本章要解决的中心问题之一是用非异实坐标变换：

$$x = Py \quad (\text{即 } x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j;\ i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

将实二次型（或称为 n 个实变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数）：

$$x'Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{2}$$

化为平方和

$$x'Ax = \sum_{j=1}^{n} d_jy_j^2 = y'\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}y \tag{3}$$

（上述过程称为**化实二次型为平方和**），其中，$P = (p_{ij})_{n\times n}$ 是非异实阵，$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称阵，称为 $x'Ax$ 的系数矩阵，而 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 与 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ 都是实向量；$d_1, d_2, \cdots, d_n$ 全是实数。

将（1）式代入 $x'Ax$ 得：$x'Ax = y'(P'AP)y$，故若能找到非异阵 P，使

$$P'AP = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

则（3）式也就随之而得，这就是说，实二次型化为平方和的问题可归结为上述（4）式的矩阵问题，如下面将定义的那样，是"将实对称阵 A 合同于一个实对角阵"的问题，故本章第一个基本概念是如

下定义的合同的概念。

定义 设 A 与 B 都是实方阵，若存在非异阵 P，使得 $B=P'AP$，则称 A 与 B **合同**，或称 **A 合同于 B**。

实方阵的正交相似：$P^{-1}AP=P'AP=B$ 自然也是方阵的合同（或称**正交合同**）。由第七章定理 5 知，实对称阵 A 必（正交）合同于实对角阵。

$$P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}, \quad (P'=P^{-1}) \tag{5}$$

故得本章最重要的基本结论：

定理 1 必存在正交坐标变换：$x=Py$（P 是正交阵）将二次型 $x'Ax$ 化为平方和：

$$x'Ax=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2 \tag{6}$$

称这个结论为**"将二次型化到主轴上去"**。

对实对称阵 A 来说，不用（5）式或（6）式，还可得

定理 2 对秩为 r 的 n 阶实对称阵 A，必存在 n 阶非异实阵 P，使

$$P'AP=\begin{pmatrix}I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0\end{pmatrix} \tag{7}$$

用二次型的语言表达：必存在非异坐标变换 $x=Py$，将实二次型 $x'Ax$ 化为平方和：

$$x'Ax=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \tag{8}$$

称（7）的右端矩阵为 A 的**规范形**，（8）式为 $x'Ax$ 的规范形，称 p 与 $r-p$ 为 A（或 $x'Ax$）的**正惯性指数与负惯性指数**，也称 r 为 $x'Ax$ 的秩。

定理 3 （惯性定律）不论用何种非异实坐标变换（或非异阵）将实二次型 $x'Ax$（或实对称阵 A）化为规范形，其正惯性指数 p 不变（因而负惯性指数 $r-p$ 也不变）。

由惯性定律，可将实二次型（或实对称阵）分类，其中最重要的

类型如下面所定义。

定义 实对称阵的规范形是：$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，即 $p=r\leqslant n$，

$$P'AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

或者 $x'Ax$ 的规范形是，

$$x'Ax=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2 \tag{10}$$

则称 A 为**半正定阵**，称 $x'Ax$ 为**半正定二次型**。

定义 若实对称阵的规范形是 I_n，即 $p=r=n$，

$$P'AP=I_n \tag{11}$$

或者 $x'Ax$ 的规范形是，

$$x'Ax=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2, \tag{12}$$

则称 A 为**正定阵**。称 $x'Ax$ 为**正定二次型**

关于正定阵与正定二次型，半正定阵与半正定二次型。有如下的主要基本结论：

定理 4 设 A 是 n 阶实对称阵，则下列七个命题等价。

(i) A 是正定阵（或 $x'Ax$ 是正定二次型）。

(ii) $A=B'B$，B 是 $m\times n$ 列满秩阵。 (13)

(iii) $A=Q'Q$，Q 是非异阵。 (14)

(iv) $A=R'R$，R 是主对角元全大于零的上三角阵， (15)

称（15）式为 A 的**乔利斯基(Cholesky)分解**。

(v) 对所有 n 维非零实列向量 x，$x'Ax>0$。

(vi) A 的所有顺序主子式全大于零。

(vii) A 的所有特征值全大于零。

定理 5 设 A 是 n 阶实对称阵，则下列五个命题等价。

(i) A 是半正定阵（或 $x'Ax$ 是半正定二次型）。

(ii) $A=B'B$，B 是 $r\times n$ 行满秩阵，$r=r(A)$。 (16)

(iii) 对所有 n 维列向量 x，$x'Ax\geqslant 0$。

(iv) A 的所有主子式全是非负数。

(v) A 的所有特征值全是非负数。

§2 化实二次型为平方和的方法

通常，可用配（平）方法化实二次型为平方和。然而此法最大的缺点是不能同时找出 $x = Py$ 的 P，而要求出很多矩阵的逆阵，然后再相乘后才能得到 P（参阅教科书）。故一般说来，还是用初等变换较为妥当，且由下面的引理，使我们可以用最快的（初等变换）方法，同时求出与实对称阵 A 合同的对角阵以及非异阵 P。

引理 设 A 是 n 阶实对称阵，如果 P' 是有限个第三种初等阵 $T_{i1}(k), i>1$，的乘积，且使

$$P'A = \begin{pmatrix} d_1 & \delta \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 δ 是 $n-1$ 维行向量，A_1 是 $n-1$ 阶阵，则必有

$$P'AP = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

证 由假设，P' 是 $T_{i1}(k)$ 的乘积，$i>1$，故 P 是 $T_{1i}(k)$的乘积，$i>1$。由于 $i>1$，故 $P'A$ 左乘 P 时，根据八字规则，对 $P'A$ 的第 1 列元素没有影响（即它们都不变动，而变动的只是 δ 的元素，故得

$$P'AP = \begin{pmatrix} d_1 & \beta \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

但 A 是实对称阵，故 $P'AP$ 也是实对称阵。所以 $\beta = 0$。

由上述引理，只要找 P'，使

$$P'(A,I) = (P'A, P') = \left(\begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & * & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad P' \right) \tag{17}$$

则这个 P' 的转置阵就是要找的非异阵 P，它使 $P'AP$ 为对角阵。换言之，只要对(A,I)作有限次第三种初等变换 $T_{ij}(k)$，$i>j$，则当把 A 变换成上三角阵时，(A,I)的 I 就同时化为 P'，且使

$$P'AP=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

例 1 求非异阵 P，使 $P'AP$ 为对角阵。其中

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解 逐次用第三种初等行变换 $T_{ij}(k), i>j$，将 (A, I_3) 化成（17）式的形状：

$$(A, I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行加到第 2 行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第1行的}(-2)\text{倍加第3行}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第2行加到第3行上}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

故由引理可知，

$$P'AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$P=(P')'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 2 将实二次型 $2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 化为平方和。

解 由于这个二次型的系数矩阵是，

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

而A的主对角元全是0，所以不能立即引用引理，需先对A作初等行变换及其转置（列）变换。使经过如此变换后得到的新的合同阵的主对角元有非零数，然后对这个矩阵用引理，整个过程如下：

$$(A,I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第2行加到第1行上去}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第2列加到第1列上}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\text{（此步不影响竖线右方的矩阵）}$$

$$\xrightarrow{\text{第1行的}(-\frac{1}{2})\text{加到第2行上}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

$$\xrightarrow{\text{第1行加到第3行上}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第2行的}(-4)\text{倍加到第3行上}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & -1 & 1\end{array}\right)$$

所以

$$P=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

且

$$P'AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 6\end{pmatrix}$$

故 $(x_1,x_2,x_3)'=P(y_1,y_2,y_3)'$ 将原二次型化为平方和：

$$2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3=2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+6y_2^3$$

注意： 上述 P' 只是第三种初等阵 $T_{ij}(k)$ 的乘积，但未必有 $i>j$。因为一开始已作了 $T_{12}(1)$的行变换。

用初等变换把二次型$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ 化为平方和的最大优点在于，化A为实对角阵的同时就求出了 P。

§3 正定二次型与正定阵的应用

方阵中最主要的两个方阵是：正交阵与实对称阵（以及它们的推广：酉阵与自共轭阵），而实对称阵中最有用的当推正定阵。这是因为正定阵在基础理论与技术科学中都有着广泛的应用。本节将举一系列例子说明正定阵在理论推导中的作用。

例 1 设 A 是正定阵，P 是非异阵，则 $P'AP$ 也是正定阵。

证 $P'AP$ 是对称阵，又由定理 4 的(iii)，$A=Q'Q$，Q 非异，故 $P'AP=(PQ)'(PQ)$，再由定理 4 的 (iii)的充分性，$P'AP$ 是正定阵。

例 2 设 A 与 B 都是 n 阶正定阵，则 $A+B$ 亦正定。又若在 A 与 B 中有一个正定，另一个半正定，则 $A+B$ 仍是正定阵。

证 显然，$A+B$ 是对称阵。以下给出两种证法。

(i) 直接用矩阵的方法。

不妨设 A 正定，B 半正定（或正定），则由（14）式与（16）式可得：$A=Q_1'Q_1$，$B=Q_2'Q_2$，其中 Q_1 是 n 阶非异阵，Q_2 是 $r\times n$ 行满秩阵，当 B 正定时，$r=n$。应用"和化积"的想法，

$$A+B=Q_1'Q_1+Q_2'Q_2=(Q_1',Q_2')\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$$

因为$\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$是$(n+r)\times n$ 列满秩阵（当 B 正定时，$\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$ 是 $2n\times n$ 列满秩阵），故由定理 4 的(iii)的充分性，$A+B$ 是正定阵。

(ii) 借用二次型"过渡"的方法。

不妨设 A 正定，B 半正定（或正定），则由定理 4 的(v) 的必要性以及定理 5 的(iii)的必要性可知，对任何 n 维非零实列向量 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}'A\mathbf{x}>0$，$\mathbf{x}'B\mathbf{x}\geqslant0$（当 B 正定时取不等号）故

$$\mathbf{x}'(A+B)\mathbf{x}=\mathbf{x}'A\mathbf{x}+\mathbf{x}'B\mathbf{x}>0$$

再由定理 4 的(v)的充分性知，$A+B$ 是正定阵。

例 3 正定阵 A 的任何 k 阶主子式$\left|A\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_k\\i_1i_2\cdots i_k\end{pmatrix}\right|>0,1\leqslant k\leqslant n$

证 因为必可找到 n 阶排列阵 $P_{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_n}=T$，使 $T'AT$ 的 k 阶顺序主子阵恰好是 $A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\i_1\cdots i_k\end{pmatrix}$，但由例 1，$T'AT$ 是正定阵，故由定理 4 的 (vi)，$\left|A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\i_1\cdots i_k\end{pmatrix}\right|>0$。

例 4 正定阵的任何主子阵也是正定阵。

证 设 $A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\i_1\cdots i_k\end{pmatrix}$是 n 阶正定阵（它自然是实对称阵）A 的主子阵，则 $A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\i_1\cdots i_k\end{pmatrix}$也是实对称阵，又因 $A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\i_1\cdots i_k\end{pmatrix}$的 k 个顺序主子式也是 A 的 k 个主子式，由例 3，它们全大于 0，故由定理 4 (vi)的充分性，$A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\i_1\cdots i_k\end{pmatrix}$是正定阵。

例 5 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是正定阵，实向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'$ 是二次实变实值函数：

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$$

的极值点，则 α 必是 $f(\mathbf{x})$ 的极小点， 且$\alpha = A^{-1}\mathbf{b}(\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)')$并求出极小值$f(\alpha)$。

证 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，则 $f(\mathbf{x})$可写成：

$$f(\mathbf{x}) = x'Ax - 2\mathbf{b}'x = (x - A^{-1}\mathbf{b})'A(x - A^{-1}\mathbf{b}) - \mathbf{b}'A^{-1}\mathbf{b},$$

因 A 正定，故$(x - A^{-1}\mathbf{b})'A(x - A^{-1}\mathbf{b}) \geqslant 0$，当且仅当 $x - A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{0}$时等号才成立，故 $f(\mathbf{x})$ 当 $x = \alpha = A^{-1}\mathbf{b}$ 时取极小，且 $f(\alpha) = -\mathbf{b}'A^{-1}\mathbf{b}$

例 6 设 $a_i > 0$，且 a_i 全不相同；$i = 1, 2, \cdots, n$，证明，方阵 $A = \left(\frac{1}{a_i + a_j}\right)_{n \times n}$ 是正定阵。

证 A 显然是实对称阵，又 A 的任一 k 阶顺序主子式

$$\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 \cdots k\\ 1 & 2 \cdots k\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}\frac{1}{a_1 + a_1} \cdots \frac{1}{a_1 + a_k}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{a_k + a_1} \cdots \frac{1}{a_k + a_k}\end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

是一种柯希行列式（见第二章习题13），可算出其值为：

$$\left|A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots k\\ 1 & 2 & \cdots k\end{pmatrix}\right| = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (a_j - a_i)^2}{\prod\limits_{i,j=1}^{k} (a_i + a_j)} > 0; k = 1, 2, \cdots, n,$$

故由定理 4 的 (vi)，A 是正定阵。

例 7 设 A 是 n 阶正定阵，B 是非零半正定阵（或正定阵），则

$$|A + B| > |A| + |B| \tag{18}$$

证 因为正定阵也是非零半正定阵，故就 B 是非零半正定阵证明之。因 A 正定，故存在非异阵 P，使 $P'AP = I_n$，应用行列式乘法规则，得到

$$|P'| \cdot |A + B| \cdot |P| = |I_n + P'BP| \tag{19}$$

设 $P'BP = (b_{ij})_{n \times n}$，因 $B \neq 0$，P 非异，故 b_{ij} 不全为0。由于 B 半正定，故易证 $P'BP$ 也半正定，因而 $P'BP$ 的主对角元不全为 0，因若 $b_{ii} = 0$；$i = 1, 2, \cdots, n$，则因 b_{ij} 不全为 0，故必有 $b_{ij} \neq 0, i \neq j$，于是

$$\begin{vmatrix}0 & b_{ij}\\ b_{ij} & 0\end{vmatrix} = -b_{ij}^2 < 0$$

此与 $P'BP$ 的半正定性相矛盾（见定理 5 的（iv）），所以

$$\operatorname{tr}(P'BP)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}>0, \tag{20}$$

又由第二章的（79）式（或用特征多项式的展开式），

$$|I_n+P'BP|=1^n+b_1 1^{n-1}+b_2 1^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\cdot 1+|P'BP| \tag{21}$$

其中 b_i 是 $P'BP$ 的所有 i 阶主子式之和；$i=1,2,\cdots,n$。由于 $P'BP$ 半正定，它的所有各阶主子式全是非负数（定理 5 的（iv）），故 $b_i\geqslant 0$；$i=1,2,\cdots,n$，特别，$b_1=\operatorname{tr}(P'BP)>0$。（见（20）式），故由（21）式，

$$\begin{aligned}|I_n+P'BP|&>1+|P'BP|=|I_n|+|P'BP|\\&=|P'AP|+|P'BP|=|P'|(|A|+|B|)|P|\end{aligned}$$

由上述不等式以及（19）式得到

$$|P'|\cdot|A+B||P|>|P'|(|A|+|B|)|P|$$

从上面不等式中消去非零正数 $|P'|\cdot|P|=|P|^2$ 即得（18）式。

上述证明中的一个想法就是用了正定阵的合同标准形作“过渡”（即运用标准形的方法），从而达到欲证结论之目的。

例 8 设 A 是 n 阶正定阵，S 是 n 阶非零反对称实阵，证明，$|A+S|>0$。（当 $S=0$，前式自然成立。）

证 下面给出五种证法。

证法一 应用结论：“设 A 是 n 阶实阵，若对任何 n 维非零实列向量 x，恒有 $x'Ax>0$，则 $|A|>0$.（见第五章 § 3 例5）今对任何 $x\neq 0$，

$$x'(A+S')x=x'Ax+x'Sx=x'Ax$$

因 A 正定，故由定理 4 的（v），$x'Ax>0$，所以 $x'(A+S)x>0$，又因 $A+S$ 是实方阵，故由上述结论，$|A+S|>0$。

证法二 先证 $A+S$ 的持征值的实部大于零。设 $\lambda=a+b\sqrt{-1}$ 是 A 的任一特征值，a 是 λ 的实部，则存在 n 维特征向量 x，使

$$(A+S)x=\lambda x \qquad (x\neq 0) \tag{22}$$

于是 $\bar{x}(\overline{A'}+\overline{S'})=\overline{\lambda}\overline{x}'$，因 A 正定，A 自然是实对称阵，即 $\overline{A'}=A'=$

A，又因 S 是反对称实阵，即 $\overline{S'}=S'=-S$，故得

$$\bar{x}'(A-S)=\bar{\lambda}\bar{x}' \tag{23}$$

以 $\bar{x}'$ 左乘（22）的两边、以 x 右乘(23)的两边，得到

$$\bar{x}'(A+S)x=\lambda\bar{x}'x \tag{24}$$

$$\bar{x}'(A-S)x=\bar{\lambda}\bar{x}'x \tag{25}$$

（24）式与（25)式相加，得到 $\bar{x}'Ax=a\bar{x}'x$，记 $x=y+\sqrt{-1}\,z$，其中 y 与 z 分别是 x 的实部向量与虚部向量（即 y 与 z 都是 n 维实列向量），故得

$$(y'-\sqrt{-1}\,z')A(y+\sqrt{-1}\,z)=a\bar{x}'x$$

比较上式两边的实部，即得

$$y'Ay+z'Az=a\bar{x}'x \tag{26}$$

由于 $x\neq 0$，故 $\bar{x}'x>0$，又由于 $x\neq 0$，故 y 与 z 不全为 $\mathbf{0}$，而 A 是正定阵，故由定理 4 的（Ⅴ），$y'Ay+z'Az>0$，所以由（26）式，$a>0$。

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 $A+S$ 的实特征值；$a_i\pm\sqrt{-1}\,b_i$ 是 $A+S$ 的复特征值，$b_i\neq 0$；$i=r+1,\cdots,n$，则

$$|A+S|=\lambda_1\cdots\lambda_r(a_{r+1}^2+b_{r+1}^2)\cdots(a_n^2+b_n^2),$$

由上面第一部分证明知，$\lambda_i>0$；$i=1,2,\cdots,r$，$a_j>0$；$j=r+1,\cdots,n$ 故 $|A+S|>0$。

证法三 先证 $|A+S|\neq 0$。用反证法。若 $|A+S|=0$，则存在 n 维非零实列向量 x，使 $(A+S)x=0$，故

$$0=x'(A+S)x=x'Ax+x'Sx=x'Ax$$

但 A 正定，故 $x'Ax>0$，此为矛盾。故必 $|A+S|\neq 0$。

作 $[0,1]$ 上的连续函数：$f(x)=|A+xS|$，由于对任何实数 x，xS 仍是反对称实方阵，故由刚才的证明知，对任何 $x\in[0,1]$，$f(x)\neq 0$。今 A 正定，故 $f(0)=|A|>0$，若 $|A+S|=f(1)<0$，则由魏尔斯特拉斯定理，必存在 ξ，$0<\xi<1$，使 $f(\xi)=0$，此为矛盾，故必 $|A+S|=$

$f(1)>0$。

证法四 同例7，必存在非异实方阵 P，使 $P'AP=I_n$，故得：

$$|P'|\cdot|A+S|\cdot|P|=|I_n+P'SP|$$
$$=1^n+s_1 1^{n-1}+s_2 1^{n-2}+\cdots+s_{n-1}1+|P'SP| \qquad (27)$$

其中 s_i 是 $P'SP$ 的所有 i 阶主子式之和，$i=1,2,\cdots,n$.因 S 反对称，故 $P'SP$ 也反对称，又因奇数反对称行列式等于 0，偶数阶反对称行列式是非负数（见第七章习题（15）的(ii)），故（27）式可化为

$$|P'|\cdot|A+S|\cdot|P|=1+s_2+s_4+\cdots+|P'SP|$$
$$(s_{2k}\geqslant 0) \qquad (28)$$

因为 $S\neq 0$，故 $P'SP\neq 0$，但由 $P'SP$ 的主对角元全是 0（因 $P'SP$ 反对称），故 $P'SP$ 至少有一个非主对角元 $s_{ij}\neq 0$；$i\neq j$，于是

$$\begin{vmatrix} 0 & s_{ij} \\ -s_{ij} & 0 \end{vmatrix}=s_{ij}^2>0$$

所以 $s_2>0$，因此（28）式化为

$$|P'|\cdot|A+S|\cdot|P|>1+|P'SP|=|P'AP|+|P'SP|$$
$$=|P'|(|A|+|S|)|P|$$

上式两端消去 $|P'P|=|P|^2(>0)$，即得

$$|A+S|>|A|+|S|\geqslant|A| \qquad (29)$$

（称（29）式为塔斯基(Taussky)不等式），因 A 正定，故 $|A|>0$，于是由（29）式即得 $|A+S|>0$。

证法五 同证法四，存在非异阵 P，使 $P'AP=I_n$，故

$$P'(A+S)P=I_n+P'SP \qquad (30)$$

今因 $P'SP$ 是非零反对称实方阵，应用 $P'SP$ 的正交相似标准形定理（见第七章习题 15 的(i)），存在正交阵 Q，使

$$Q'(P'SP)Q=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & b_s \\ -b_s & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

且因 $P'SP\neq 0$，故 b_i 不全为 0；$i=1,2,\cdots,s$，将上式代入（30）式得到

$$(PQ)'(A+S)(PQ)=I_n+Q'(P'SP)Q$$

$$=\begin{pmatrix} I_t & & & \\ & \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 1 & b_s \\ -b_s & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix},\quad t+2s=n$$

又因 $|Q'Q|=|I_n|=1$，故由上式即得

$$|P'||A+S||P|=|(PQ)'|\cdot|A+S|\cdot|PQ|$$
$$=|I_s|\cdot(1+b_1^2)\cdots(1+b_s^2)=(1+b_1^2)\cdots(1+b_s^2)$$

因为 b_i 不全为 0，故由上式可得

$$|P'|\cdot|A+S|\cdot|P|>1=|I_n|=|P'AP|=|P'|\cdot|A||P|$$

由上式又得塔斯基不等式 $|A+S|>|A|$，由 A 的正定性，便得 $|A+S|>|A|>0$。

另外，还有三种证法，即（i）"直接"用两个方阵之和的行列式，（ii）将 S 看作复方阵，将它酉相似于对角阵（见第七章习题 9），再仿证法四或证法五，（iii）用行列式的第一降阶定理。但是这三种证法比之上述诸证法要麻烦一点，故不再叙述它们。

以例 8 为典型例子，我们将行列式理论、线性方程组解的理论、合同标准形理论、相似标准形理论、特征值理论中的一些典型方法全用上去了。

例 9 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11}A_{12}\cdots A_{1s} \\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{s1}A_{s2}\cdots A_{ss} \end{pmatrix}$$

是 n 阶正定阵，A_{ii} 是 n_i 阶主子阵，$i=1,2,\cdots,s$，则必有

$$|A|\leqslant|A_{11}|\cdot|A_{22}|\cdots|A_{ss}| \tag{31}$$

而等号成立的充要条件是，$A_{ij}=0, i\neq j; i,j=1,2,\cdots s$。

证 对 s 用归纳法。当 $s=1$．结论显然正确，今将 A 重新分块为：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & B \\ B' & D \end{pmatrix}$$

其中，

$$D=\begin{pmatrix}A_{22}\cdots A_{2s}\\ \cdots\cdots\cdots\\ A_{s2}\cdots A_{ss}\end{pmatrix},\quad B=(A_{12},A_{13},\cdots,A_{1s})$$

因 A_{11} 是 A 的顺序主子阵。故它是正定阵（自然是非异阵），今取 $P'=\begin{pmatrix}I_{n_1} & 0\\ -BA_{11}^{-1} & I_{n-n_1}\end{pmatrix}$，则经过简单计算得到

$$P'AP=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & D-B'A_{11}^{-1}B\end{pmatrix}$$

因为 $D-B'A_{11}^{-1}B$ 是正定阵 $P'AP$ 的主子阵，故由例 4 知，它也是正定阵。又 A_{11}^{-1} 是正定阵，故当 $B\neq 0$ 时，易证 $B'A_{11}^{-1}B$ 是半正定阵，于是当 $B\neq 0$ 时，由例 7 知，

$$|D|=|(D-B'A_{11}^{-1}B)+B'A_{11}^{-1}B|>|D-B'A_{11}^{-1}B|+|B'A_{11}^{-1}B|$$

故得 $|D|>|D-B'A_{11}^{-1}B|$ （因 $|B'A_{11}^{-1}B|\geqslant 0$）。于是对任意的 B，由行列式第一降阶定理即得

$$|A|=|A_{11}|\cdot|D-B'A_{11}^{-1}B|\leqslant|A_{11}|\cdot|D| \tag{32}$$

而等号成立的充要条件是，$B=(A_{12},\cdots,A_{1s})=0$。又由归纳法假设，

$$|D|\leqslant|A_{22}|\cdot|A_{33}|\cdots|A_{ss}| \tag{33}$$

而等号成立的充要条件是，$A_{ij}=0,i\neq j,i,j=2,3,\cdots,s$。所以由(32)式以及（33）式即得（31）式。

作为例 9 的一个特例．显然可得下列著名结论：

对任何正定阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，必有

$$|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{34}$$

而等号成立的充要条件是，A 为对角阵。

由（34）式便可得在下例中的一个著名结论。

例 10 设 A 是任意 n 阶实阵，则

$$|\det A|\leqslant\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2} \tag{35}$$

$$|\det A|\leqslant\sqrt{\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2} \tag{36}$$

称（35）式与（36）式为阿达马(Hadamard)不等式。

证 如果证得（35）式，则应用 $\det A=\det A'$，即得（36）式，故仅需证（35）式即可。

当 A 是奇异阵时，$|A|=0$，（35）式自然成立。故就 A 是非异阵的情形证明之。因为 A 非异，故由定理 4 的(iii)，$A'A$ 是正定阵，设 $AA'=B=(b_{ij})_{n\times n}$，则由（34）式，

$$|\det A|^2=(\det A)^2=\det A'\cdot\det A=\det(A'A)$$
$$=\det B\leqslant b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}=\prod_{i=1}^{n}b_{ii}$$

但 $b_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$，将它代入上式即得（35）式。

在应用阿达马不等式时，也可将（35）与（36）式合起来，写成

$$|\det A|\leqslant\min\left\{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2},\ \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2}\right\}$$

注 阿达马不等式对任意 n 阶复方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 仍然成立，此时不等式写成：

$$|\det A|\leqslant\min\left\{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2},\ \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2}\right\}$$

（证明不再叙述）。

习　题

1．用初等变换的方法化下列二次型为平方和：

(i) $2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$；　　(ii) $\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$。

2．(i)证明任何 n 阶非异阵 A 必有分解式：$A=BD_n(|A|)$，其中 B 是有限个第三种初等阵的乘积，$D_n(|A|)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&|A|\end{pmatrix}$。

(ii) 由(i)及定理 2 证明：必可全用第三种初等变换，将实对称阵合同于对角阵。

（提示：对(i)，用第三种初等变换，先将 A 化为上三角阵，再用第

三种初等变换化这个上三角阵为对角阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \mu \end{pmatrix} = D_n(\mu)$$

再用八字规则及行列式乘法规则证明 $\mu = |A|$。）

3．设 A 是 n 阶正定阵，证明下列方阵全是正定阵：

(i) $\mathrm{adj}A$，(ii) A^k，k 是整数，(iii) $lA(l>0)$。

4．设 B 是 $n\times m$ 阵，A 是 n 阶正定阵，证明 $r(B'AB)=r(A)$。（提示：应用定理 4 的(iii)及 $r(A'A)=r(A)$ 即可。）

5．证明：严格对角占优的实对称阵必是正定阵。（提示，应用第三章例 3 的结论。）

6．以 $A>0$ 与 $A\geqslant 0$ 分别表示 A 是正定阵与半正定阵，$A>B>0$ 与 $A\geqslant B>0$ 分别表示 A、B、$A-B$ 均正定与 A、B 均正定，但 $A-B$ 是半正定阵，证明：

(i) 如 $A>0$，则 $A+A^{-1}\geqslant 2I(>0)$（与数的不等式 $a+a^{-1}\geqslant 2$ 相比较。）

(ii) 如 $A>0, B>0$，则 $|A+B|>2|A|^{1/2}|B|^{1/2}$。

（提示：对(i)，应用第七章定理 5 以及本章定理 4 的(vii)，对(ii)，应用本章 §3 例 7 的结论。）

7．设 A 是 n 阶实阵，证明：

(i) 若 $A+A'$ 正定，则 $2^n|A|>|A+A'|$。

(ii) 决不存在奇异阵 A，使 $A+A'$ 是正定阵。

（提示：对(i)，将 A 拆成：$A=\left(\dfrac{A+A'}{2}\right)+\left(\dfrac{A-A'}{2}\right)$，然后应用 §3例 8 中的塔斯基不等式，对(ii)，应用(i)便得 (ii)）。

8．设 $A=(B,C)$ 是 $m\times n$ 实矩阵的任一分块，证明：

$$|A'A|\leqslant|B'B|\,|C'C|$$

（提示：应用 § 3 例 9 之结论。）

9．设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实矩阵，证明阿达马不等式之推广：

$$|A'A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2。$$

（提示：应用第 8 题即可）

10. 设 A 是正定阵，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维实列向量，证明：二次函数 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{x}+c$ 的极小值是 $c-\boldsymbol{b}'A^{-1}\boldsymbol{b}$。

第九章　正定阵及其应用

本章继续正定阵理论的讨论，其目的是为了串联性地运用前面的基本结论，特别是运用“正定阵正交相似于主对角元全大于零的对角阵”这一核心结论。本章的结论在理论上、特别在应用上是需要的。

§1　两个实二次型同时化为平方和

这个问题来自应用数学中，下面是其基本结论。

定理 1　设 A 是 n 阶正定阵，B 是 n 阶实对称阵，则必存在 n 阶非异阵 P，使

$$P'AP=I_n,\qquad P'BP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\tag{1}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $|\mu A-B|=0$ 的 n 个实根。

证　因 A 正定，故存在非异实阵 Q，使 $Q'AQ=I_n$，又因 B 实对称，故 $Q'BQ$ 也实对称，因而存在正交阵 U，使

$$U'Q'BQU=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix},\tag{2}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $Q'BQ$ 的实特征值，又因

$$U'Q'AQU=U'I_nU=I_n\tag{3}$$

记 $P=QU$，则 P 是非异阵，且由（2）与（3）即得（1）。又由(i)得

$$P'(\mu A-B)P=\begin{pmatrix}\mu-\mu_1 & & & \\ & \mu-\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu-\mu_n\end{pmatrix}$$

于是 $|P|^2|\mu A-B|=(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)\cdots(\mu-\mu_n)$，故 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是

$|\mu A-B|$ 的根。

将定理 1 用二次型的语言来描述，即得

定理 1′ 必存在实的非异坐标变换：$x=Py$，将正定二次型 $x'Ax$ 与二次型 $x'Bx$ 同时化为平方和：

$$x'Ax=y'y=\sum_{i=1}^{n}y_i^2,\qquad x'Bx=\sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i^2 \tag{4}$$

定理 1 对微振动理论有用，它在理论推导中的作用由下列两例中可以看出。

例 1 设 A 是正定阵，AB 是实对称阵，则 AB 是正定阵的充要条件是，B 的特征值全大于零。

证 由定理 1，存在非异阵 P，使

$$P'AP=I_n \tag{5}$$

$$P'ABP=(P'AP)(P^{-1}BP)=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix} \tag{6}$$

将 (5) 式代入 (6) 式，得到

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

这说明 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 B 的特征值，故当 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 全大于 0 时，由(6)式可知 $P'ABP$ 是正定阵，故 $AB=(P')^{-1}(P'ABP)P^{-1}$ 也正定。

反之，若 AB 正定，则由 (6) 式，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 全大于 0。

例 1 常称为**樊(Fan)–塔斯基定理**。

例 2 设 A 是 n 阶实阵，C 是 n 阶正定阵，若存在正定阵 B，使

$$AB+BA'=-C \tag{7}$$

则，A 的特征值的实部必定全小于零。

证 因 B 正定，C 实对称，故由定理 1，存在非异阵 P，使得

$$P'BP=I_n,\quad P'CP=\begin{pmatrix}c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n\end{pmatrix} \tag{8}$$

因 C 正定，故 $P'CP$ 正定，因而 $c_i>0$；$i=1,2,\cdots,n$。又 (7) 式改写为：

$$(P'AP'^{-1})(P'BP)+(P'BP)(P'A'P'^{-1})'=-P'CP$$

将 (8) 式代入上式即得，

$$P'AP'^{-1}+(P'AP'^{-1})'=\begin{pmatrix}-c_1 & & & \\ & -c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -c_n\end{pmatrix}$$

但由第七章 § 2 例 2 知，$P'AP'^{-1}$ 的任一特征值，即 A 的特征值 $\lambda=a+b\sqrt{-1}$ 的实部 a 与 $P'AP'^{-1}+(P'AP'^{-1})'$ 的特征值 $-c_1,-c_2,\cdots,-c_n$ 间满足：

$$-\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant n} c_i\geqslant a\geqslant-\frac{1}{2}\max_{1\leqslant i\leqslant n} c_i$$

因 c_i 全大于 0。故由上式知，$a<0$。

常称本例之结论为**略普诺夫(Ляпунов)定理**。本例之证法由**哈恩**(**Hahn**)在 1955 年给出。

§ 2　半正定阵(或正定阵)的平方根

设 A 是 n 阶半正定阵（或正定阵），则由第七章定理 5，存在 n 阶正交阵 P，使

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P' \tag{9}$$

且由第八章定理 5（或定理 4）知，$\lambda_i\geqslant0$(或$\lambda_i>0$)，于是

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}P'\cdot P\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}P'=B^2 \tag{10}$$

其中

$$B=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}P' \tag{11}$$

记 $B=A^{1/2}$，称 B 为 A 的**平方根（矩阵）**，由于（9）中的 P 不是唯一的（参阅第七章 § 2 例 1），故还存在正交阵 $Q\neq P$，使

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q'$$

于是方阵

$$C=Q\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}Q'$$

也使 $C^2=A$，按照刚才的定义，$C=A^{1/2}$，故必须证明 $B=C$，$A^{1/2}$ 才有明确的意义，这由下列命题 1 即可解决。

命题 1 设 A 是 n 阶半正定阵（或正定阵），$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，则对任何满足（9）式的正交阵 P，恒有

$$P\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}P'=f(A)$$

其中 $f(\lambda)$ 是一个（与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 有关的）实系数多项式。

证 为简便计，不妨设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的所有不同的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，则 $\lambda_1^{1/2},\lambda_2^{1/2},\cdots,\lambda_n^{1/2}$ 中有且只有 s 个不同的特征值 $\lambda_1^{1/2},\lambda_2^{1/2},\cdots,\lambda_s^{1/2}$，且 λ_i 与 $\lambda_i^{1/2}$ 的重数也相同，$i=1,2,\cdots,s$，作“**拉格朗日内插多项式**”：

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\frac{(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})(\lambda-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda-\lambda_s)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_s)}\lambda_i^{1/2}$$

则 $f(\lambda)$ 是 $s-1$ 次多项式，且 $\lambda_i^{1/2}=f(\lambda_i)$；$i=1,2,\cdots,s$，故得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n)\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)$$

于是对任何满足(9)式的正交阵 P，恒有

$$P\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}P'=Pf\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)P'$$

$$=Pf\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)P^{-1}=f\left(P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}\right)=f(A)$$

由命题1知，对满足（9）式的不同的正交阵 P 与 Q，恒有

$$P\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}P'=f(A)=Q\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{1/2}\end{pmatrix}Q'$$

故 $B=C$。即 $A^{1/2}$ 实际上与 P 的各种取法无关，所以 $A^{1/2}$ 有意义，且显然 $A^{1/2}$ 是半正定阵（或正定阵）。

命题 2 设 A 是 n 阶半正定阵（或正定阵），则必存在唯一的半正定阵（或正定阵）B，使 $B^2=A$。

证 由（10）式与（11）式，半正定阵（或正定阵）的存在性是显然的。今证唯一性。设 B 是满足 $B^2=A$ 的 n 阶半正定阵（或正定阵），且 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 B 的特征值，则 $\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_n^2$ 就是 $B^2=A$ 的全部特征值（见第五章§3例 2），但假设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，故为简便计，不妨设 $\lambda_i=\mu_i^2$，于是 $\mu_i=\lambda_i^{1/2}$；$i=1,2,\cdots,n$。因为 B 半正定（或正定），故存在正交阵 P，使成立(11)式。而由假设，$B^2=A$，故得到（9）式，应用命题 1，应有 $B=f(A)$，这就证明了，满足 $B^2=A$ 任何半正定阵（或正定阵）B 都等于 $f(A)$，所以 B 是唯一的。

由命题 2，对任何半正定阵（或正定阵）A，恒有

$$(A^{1/2})^2=A \tag{12}$$

且由命题 1，

$$A^{1/2}=f(A) \tag{13}$$

如果 A 是正定阵，则 $A^{1/2}$ 也正定，故$(A^{1/2})^{-1}$ 也正定。为方便起见，记$(A^{1/2})^{-1}=A^{-1/2}$，则易知，对正定阵 A 来说，恒有

$$A^{-1/2}A^{1/2}=A^{1/2}A^{-1/2}=I,\ (A^{-1/2})^2=A^{-1} \tag{14}$$

（12）、（13）、（14）三个式子对讨论有关半正定阵（正定阵）时将带来很多方便。

例 1 设 A 是实对称阵，B 是正定阵，则 AB 的特征值全是实数。（注意，即使 A 与 B 均为实对称阵，AB 也未必是实对称阵，故不能

应用“实对称阵的特征值全是实数”这一结论。)

证 由假设 B 是正定阵，故 $B^{-1/2}$ 有意义，又因

$$AB = B^{-1/2}(B^{1/2}AB^{1/2})B^{1/2} = (B^{1/2})^{-1}(B'^{1/2}AB^{1/2})B^{1/2} \tag{15}$$

因为 $B'^{1/2}AB^{1/2} = (B'^{1/2}AB^{1/2})'$（因 $A' = A$），故 $B'^{1/2}AB^{1/2}$ 是实对称阵，又由（15）式，AB 与 $B'^{1/2}AB^{1/2}$ 相似，故 AB 的特征值全是实数。

例 2 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$ 与 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$ 都是实向量，A 是任一 n 阶正定阵，证明：$(\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}'A\mathbf{x})(\mathbf{y}'A^{-1}\mathbf{y})$。

证 应用柯希—许瓦尔兹不等式：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$，也即：$(\alpha'\beta)^2 \leqslant (\alpha'\alpha)(\beta'\beta)$，此处实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$，$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$，，（见第二章§6中的（71）式）即得

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 &= (\mathbf{x}'I_n\mathbf{y})^2 = \{(\mathbf{x}'A^{1/2})(A^{-1/2}\mathbf{y})\}^2 = \{(A^{1/2}\mathbf{x})'(A^{-1/2}\mathbf{y})\}^2 \\ &\leqslant \{(A^{1/2}\mathbf{x})'(A^{1/2}\mathbf{x})\}\{(A^{-1/2}\mathbf{y})'(A^{-1/2}\mathbf{y})\} \\ &= (\mathbf{x}'A^{1/2}A^{1/2}\mathbf{x})(\mathbf{y}'A^{-1/2}A^{-1/2}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}'A\mathbf{x})(\mathbf{y}'A^{-1}\mathbf{y})\end{aligned}$$

在运算过程中用了 $(A^{1/2})' = A^{1/2}$，$(A^{-1/2})' = A^{-1/2}$ 这一明显结论。

§3 奇异值分解与极因子分解

引理 设 A 是 n 阶非异实阵，则必存在正交阵 P 与 Q，使得

$$P'AQ = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, \tag{16}$$

而 $a_i > 0$，并且 a_i^2 是 $A'A$ 的特征值；$i = 1, 2, \cdots, n$。

证 因 A 非异，故 $A'A$ 正定。设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $A'A$ 的特征值，则它们全大于零，且存在正交阵 Q，使得

$$Q'A'AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{17}$$

令 $a_i = \lambda_i^{1/2}$，则 $a_i > 0$，且 $\lambda_i = a_i^2$；$i = 1, 2, \cdots, n$。于是(17) 式可化为：

$$Q'A'AQ=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}^2 \tag{18}$$

记

$$P'=\begin{pmatrix}a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1}\end{pmatrix}Q'A'$$

则由（18）式显然可得（16）式，且由

$$P'P=\begin{pmatrix}a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1}\end{pmatrix}(Q'A'AQ)\begin{pmatrix}a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1}\end{pmatrix}=I_n$$

可知 P 是正交阵。

定理 2 秩为 r 的 $m\times n$ 实矩阵 A 必有分解式：

$$A=U\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_r\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}V' \tag{19}$$

其中 U 与 V 都是正交阵，且 $a_i>0; i=1,2,\cdots,n$。

证 必存在 m 阶非异阵 G 与 n 阶非异阵 H，使

$$A=G\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}H \tag{20}$$

应用第七章定理 3，作 G 与 H' 的 QR 分解：$G=P_1R, H'=Q_1L'$，其中 P_1 与 Q_1 分别是 m 阶正交阵与 n 阶正交阵，R 与 L 分别是非异上三角阵与非异下三角阵，于是（20）式化为

$$A=P_1\begin{pmatrix}R_1 & R_2\\ 0 & R_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1 & 0\\ L_2 & L_3\end{pmatrix}Q_1'=P_1\begin{pmatrix}R_1L_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1' \tag{21}$$

其中 R_1 是 R 的 r 阶顺序主子阵，它是非异上三角阵，L_1 是 L 的非异下三角顺序主子阵。因为 R_1L_1 是 r 阶非异阵，故由引理知，存在 r 阶正交阵 P_2 与 Q_2，使得

$$P_2(R_1L_1)Q_2'=\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_r\end{pmatrix}$$

且 $a_i>0$；$i=1,2,\cdots,r$。将上式代入（21）式，并记 $U=P_1\begin{pmatrix}P_2 & 0\\ 0 & I_{m-r}\end{pmatrix}$，$V=Q_1\begin{pmatrix}Q_2 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$，则 U 与 V 都是正交阵，且（21）式化为（19）式。

称（19）式为 A 的**奇异值分解**，称 $a_1,a_2,\cdots a_r$ 为 A 的**奇异值**，称（19）式右端的 $m\times n$ 阵为 A 的**正交相抵标准形**。

由于

$$A'A=V\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r^2\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V' \tag{22}$$

$$AA'=U\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r^2\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U' \tag{23}$$

故知奇异值就是 $A'A$（也是 AA'）的非零特征值的平方根。

定理 3 任何 n 阶实阵 A 必有分解式：

$$A=(AA')^{1/2}Q=Q(A'A)^{1/2} \tag{24}$$

其中 Q 是正交阵，当 A 是非异阵时，Q 是唯一的。

证 由（22）与（23）式以及半正定阵平方根的定义即得

$$(A'A)^{1/2}=V\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V' \tag{25}$$

$$(AA')^{1/2}=U\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U' \tag{26}$$

又（19）式可分别改写成：

$$A=U\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U'\cdot(UV') \tag{27}$$

$$A=(UV')\cdot V\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_r\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V' \tag{28}$$

记 $Q=UV'$，则 Q 是正交阵，且由（26）与（27）式，（25）与（28）式即得（24）式。

又由§2知，A 唯一确定 $(A'A)^{1/2}$、$(AA')^{1/2}$，而当 A 是非异阵时，$Q=(AA')^{-1/2}A$（或 $Q=A(A'A)^{-1/2}$），故 Q 由 A 唯一决定。

称（24）式为 A 的**极因子分解**。

例 1 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 阵，证明：必存在秩为 r 的 $n\times m$ 实矩阵 A^+，使 AA^+ 与 A^+A 都是实对称阵，且 $AA^+A=A$，$A^+AA^+=A$（参阅第四章§4）

证 对任何 A，成立（19）式。由于 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 全是非零数，故取

$$A^+=V\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_r^{-1}\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U', \tag{29}$$

易证这个 A^+ 满足本例要证之诸结论。

例 2 设 A 与 B 是任意 n 阶实阵，且 $A'A=B'B$，证明：$B=QA$，而 Q 是正交阵。

证 因为 $A'A=B'B$，故 $(A'A)^{1/2}=(B'B)^{1/2}$，于是由（24）式即得：

$$B=Q_1(B'B)^{1/2}=Q_1(A'A)^{1/2}=Q_1Q_2^{-1}A=QA.$$

而 $Q=Q_1Q_2^{-1}=Q_1Q_2'$ 仍是正交阵。

注 当 A 是非异阵时，例 2 极易证得，因为由 $A'A=B'B$ 即得

$$(BA^{-1})'(BA^{-1})=(A^{-1})'B'BA^{-1}=I$$

这说明 $Q=BA^{-1}$ 是正交阵，由此即得 $B=QA$。

§4 许尔定理

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，记 $A*B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n}$。

定理 4 设 A 与 B 都是 n 阶半正定阵，则 $A*B$ 也是半正定阵；当 A 与 B 都是正定阵时，$A*B$ 也是正定阵。

证 设 B 的秩为 r，由第八章定理 5 的（ii），存在 $r\times n$ 行满秩

阵 G，使 $B=G'G$。记 $G'=(g_{ij})_{n\times r}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{r}g_{ik}g_{jk}$；$i,j=1,2,\cdots,n$。设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，则实二次型：

$$
\begin{aligned}
x'(A*B)x &= \sum_{i,j=1}^{n}x_i a_{ij}b_{ij}x_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}x_i a_{ij}g_{ik}g_{jk}x_j \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_i g_{ik})(x_j g_{jk}) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

若记

$$y_i^{(k)}=x_i g_{ik}, i=1,2,\cdots,n; k=1,2,\cdots,r \qquad (31)$$

则（30）式可化为：

$$
\begin{aligned}
x'(A*B)x &= \sum_{k=1}^{r}(y_1^{(k)},y_2^{(k)},\cdots,y_n^{(k)})A(y_1^{(k)},y_2^{(k)},\cdots,y_n^{(k)})' \\
&= \sum_{k=1}^{r}y'_k A y_k \qquad (32)
\end{aligned}
$$

其中

$$y_k=(y_1^{(k)},y_2^{(k)},\cdots,y_n^{(k)})', k=1,2,\cdots r, \qquad (33)$$

由于 A 是半正定阵，故由第八章定理 5 的 (iii)，$Y'_k A Y_k\geqslant 0$；$k=1,2,\cdots,r$，再由（32）知，$x'(A*B)x\geqslant 0$。又 $A*B$ 显然是实对称阵，故再由第八章定理 5 的(iii)的充分性知，$A*B$ 是半正定阵。

当 A 与 B 都是正定阵时，由 B 的正定性可知，$r=n$，故（32）式应改写为：

$$x'(A*B)x=\sum_{i=1}^{n}y'_k A y_k \qquad (34)$$

又由（31）式与（33）式可得

$$
\begin{aligned}
(y'_1,y'_2,\cdots,y'_n) &= \begin{pmatrix} x_1g_{11} & x_1g_{12} & \cdots & x_1g_{1n} \\ x_2g_{21} & x_2g_{22} & \cdots & x_2g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ng_{n1} & x_ng_{n2} & \cdots & x_ng_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix}G' \qquad (35)
\end{aligned}
$$

因为G'是非异阵，故由（35）式显然可知，当$x\neq 0$时，$(y'_1, y'_2, \cdots, y'_n)$中至少有某一列。例如$y'_s$，不等于零，$1\leqslant s\leqslant n$。又由假设$A$是正定阵，故$y'_s A y_s>0$，所以由（34）式知，$\mathbf{x}'(A*B)\mathbf{x}>0$，再由第八章定理4的(Ⅴ)的充分性知，$A*B$是正定阵。

称定理4为**许尔定理**。称$A*B$为A与B的**阿达马乘积**，或**许尔乘积**。它在一些应用数学部门有用。它在理论推导上也是一个有用工具。

推论（华罗庚） 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定阵，则对任何正整数k，n阶阵

$$(a_{ij}^k)_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & \cdots & a_{1n}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \cdots & a_{2n}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^k & a_{n2}^k & \cdots & a_{nn}^k \end{pmatrix}$$

是正定阵。

证 因为$(a_{ij}^k)_{n\times n}=\overbrace{A*A*\cdots*A}^{k\text{个}}$，故由许尔定理及归纳法即得证。

例1 因为$\left(\dfrac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$是正定阵（由第八章§3例6，取$a_i=i$），所以由推论知，方阵

$$\left(\frac{1}{(i+j)^5}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2^5} & \frac{1}{3^5} & \cdots & \frac{1}{(n+1)^5} \\ \frac{1}{3^5} & \frac{1}{4^5} & \cdots & \frac{1}{(n+2)^5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(n+1)^5} & \frac{1}{(n+2)^5} & \cdots & \frac{1}{(2n)^5} \end{pmatrix}$$

是正定阵。

例2 设n阶实阵A的n个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是全不相同的负实数，$C$是$n$阶正定阵，证明：必存在$n$阶正定阵$B$，使$AB+BA'=-C$。

证 由假设 $\lambda_i<0, i=1,2,\cdots,n$，故 $\lambda_i+\lambda_j\neq 0, i, j=1,2\cdots,n$，于是由第六章习题 12 知，必存在唯一的 n 阶实阵 B，使 $AB+BA'=-C$，又因 $(AB+BA')'=-C'$，也即 $AB'+B'A'=-C$，故由唯一性知 $B=B'$，即 B 是实对称阵，今进一步证 B 是正定阵。

由假设 $\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j$，故由第五章定理4的推论，存在非异阵 P，使

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

又 $AB+BA'=-C$ 可写成：$(PAP^{-1})(PBP')+(PBP')(PAP^{-1})'=-PCP'$，故得

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}(PBP')+(PBP')\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=-PCP' \tag{36}$$

记 $PBP'=B_1=(b_{ij})_{n\times n}, PCP'=C_1=(c_{ij})_{n\times n}$，则 (36) 式可化为

$$((\lambda_i+\lambda_j)b_{ij})_{n\times n}=(-c_{ij})_{n\times n}$$

由上式即得

$$b_{ij}=\frac{-c_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}=\frac{c_{ij}}{(-\lambda_i)+(-\lambda_j)};i,j=1,2,\cdots,n, \tag{37}$$

又由假设 C 是正定阵，故 C_1 也是正定阵，若记

$$F=\left(\frac{1}{(-\lambda_i)+(-\lambda_j)}\right)_{n\times n}$$

则因 $\lambda_i<0$，故 $-\lambda_i>0; i=1,2,\cdots,n$。又 $\lambda_i\neq\lambda_j; i\neq j$，故由第八章 §3 例 6 可知，$F$ 是正定阵。又 (37) 式可写成：$B_1=C*F$，故由许尔定理，B_1 是正定阵，从而 $B=P^{-1}B_1(P^{-1})'$ 也是正定阵。

本例之证明也由哈恩给出，(参阅例2。)

习　题

1\. 设 A 是半正定阵（或正定阵），且 $AB=BA$，则 $A^{1/2}B=BA^{1/2}$。（提示：应用本章 (13)式。）

2. 设A是半正定阵，B是正定阵，证明

(i) AB的特征值全是非负数。当A是正定阵时，AB的特征值全大于零。

(ii) AB半正定（正定）$\Longleftrightarrow AB=BA$。

3. 设A与B是同阶非异实对称阵，证明：A是正定阵的充要条件是，对所有正定阵B，恒有$\mathrm{tr}(AB)>0$。

（提示：必要性由习题3的(i)便得。证明充分性时，可设法找特殊的B，使A的特征值全大于零）。

4. 设A与B分别是正定阵与半正定阵，如果$|(1-\mu)A+B|$的根μ全大于1，证明B必是正定阵。

（提示：应用定理1。）

5. 设A与B分别为正定阵与秩为r的实对称阵，且$|A-\lambda B|$的根λ全小于1，求实二次型$x'(A-B)x$的正惯性指数。

6. 设A是n阶实镜象阵，求实二次型$x'Ax$的正惯性指数。

（提示：因$A=I_n-2uu'$，且$u'u=1$，再对I_n与$2uu'$应用定理1。）

7. 设A是n阶实对称阵，B是n阶实阵，且$BA+AB'$的特征值全大于零，证明A是非异阵。

（提示：先证$BA+AB'$是实对称阵，于是$BA+AB'$是正定阵，然后对A与$BA+AB'$用定理1，可仿§1例2之证明思路。）

8. 证明：任何实方阵必可分解成为一个半正定阵与两个对称、正交阵的乘积。

（提示：应用极因子分解（24）式，再应用第七章习题14，将正交阵分解为两个对称、正交阵的乘积，分解的方法可模仿第六章§3例1的证明思路。）

9. 设A是实正规阵（即A是满足$AA'=A'A$的实阵），B也是实正规阵，P是非异阵，且$B=P^{-1}AP$，证明：

(i) $(PP')^{1/2}A=A(PP')^{1/2}$。

(ii) 如果$P=(PP')^{1/2}Q$是P的极因子分解，则必有：$B=Q^{-1}AQ=Q'AQ$，即相似的实正规阵必正交相似。（参阅第七章13题，在那里，是用实正规阵的正交相似标准形解决问题的。）

（提示：对实正规阵 A 与 B 来说，先证存在多项式 $f(\lambda)$，使 $A'=f(A)$，$B'=f(B)$，然后证 $(P'P)A=A(PP')$，再用第1题便得(i)，由(i)便得(ii)。）

10. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全不相同的正实数，证明：

$$\left(\frac{1}{(i+j)(a_i+a_j)^2}\right)_{n\times n}$$

是正定阵。

（提示：应用许尔定理及其推论。）

第二部分　线性代数的“几何理论”

第十章　线性空间与欧氏空间

§1　基本概念与基本结论

本章的基本概念有三：一是线性空间的概念以及与之有关的概念：基、维数、坐标等；二是线性子空间的概念以及与之有关的概念：和空间与交空间、线性包、子空间的直（接）和等；三是欧氏空间（带有内积的实线性空间）的概念以及与之有关的一些概念：内积、长度、交角等。

本章的基本结论，有关线性空间的，有如下四个：

定理1　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$ 是数域 K 上任一线性空间 V 中的两组向量，如果：(i)每一 β_j 都是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 的线性组合；$j=1,2,\cdots,q$,(ii)$q>p$,则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$ 必线性相关。

定理2　数域 K 上的线性空间 V 是（有限)n维线性空间的充要条件是：(i)V 中有 n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，(ii)V 中任一向量都是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合。

定理3　对数域 K 上的 n 维线性空间中任意 r 个线性无关向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$;$1\leqslant r\leqslant n$,必存在$V$中向量,$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,使$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$是 V 的一个基。

（**注意**：基是个整体概念，它由基向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 组成。）

定理4　设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$是数域 K 上 n 维线性空间 V 的两个基，又 $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}\alpha_j$,则由基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$到基$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$的过渡矩阵：

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{21}\cdots p_{n1}\\ p_{12} & p_{22}\cdots p_{n2}\\ \cdots\cdots & \\ p_{1n} & p_{2n}\cdots p_{nn}\end{pmatrix}$$

必是非异阵。

关于线性子空间的基本结论有如下四个：

定理5 数域 K 上的线性空间 V 的非空子集 S 是（线性）子空间的充要条件是：(i)$\alpha+\beta\in S,\forall\alpha,\beta\in S$,(ii)$k\alpha\in S$, $\forall\alpha\in S$, $\forall k\in K$。或者，等价地：$k\alpha+l\beta\in S,\forall k,l\in K,\forall\alpha,\beta\in S$。（此处记号 $\forall$ 表示："对所有的"）。

定理6 设 V_1 与 V_2 是数域 K 上任一线性空间 V 的两个子空间；则下列两个（非空）子集都是 V 的子空间：

$V_1+V_2=\{\alpha_1+\alpha_2,\forall\alpha_1\in V_1,\forall\alpha_2\in V_2\}$.（称 V_1+V_2 为**和空间**），

$V_1\cap V_2=\{\alpha|\alpha\in V_1,\alpha\in V_2\}$。（称 $V_1\cap V_2$ **为交空间**），

并且，当 V_1 与 V_2 都是有限维子空间时，则成立"维数公式"：

$$d(V_1)+d(V_2)=d(V_1+V_2)+d(V_1\cap V_2) \tag{1}$$

其中 $d(W)$表示有限维线性空间 W 的维数。

定理7 设 V_1 与 V_2 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间，则

(i)和空间 V_1+V_2 是直接和：$V_1\oplus V_2$ 的充要条件是 V_1+V_2 的零向量 θ（也是 V 的零向量）的表示法是唯一的。

(ii)当 V_1 与 V_2 都是有限维子空间时，则 V_1+V_2 是直接和 $V_1\oplus V_2$ 的充要条件是：$d(V_1+V_2)=d(V_1)+d(V_2)$。

此处直接和 $V_1\oplus V_2$ 之定义是：V_1+V_2 是和空间，且 $V_1\cap V_2=\{\theta\}$。

定理8 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是数域 K 上的线性空间 V 的任意 s 个向量，则下列被称为**"线性包"**的非空子集：

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\left\{\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i,\forall k_i\in K;i=1,2,\cdots,s\right\} \tag{2}$$

必是 V 的子空间，且其维数是**"生成向量组"**$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的极大线性无关组中的向量个数。

有时亦称 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$是由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成(张成)的子空间。

关于欧氏空间的基本结论先有如下三个：

定理9 设α与β是欧氏空间中任意两个向量，则

$$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta) \tag{3}$$

而等号成立的充要条件是，α与β线性相关（此处(α,β)表示α与β的内积）。

称（3）式为**柯希—许瓦尔兹不等式**，或**柯希—布涅雅可夫斯基(Буняковский)不等式**。

推论 对欧氏空间的任意两个向量α,β，成立"三角形不等式"：

$$\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|, \tag{4}$$

而等号成立（此时称等式（4）为**商高定理**）的充要条件是α与β正交（即$(\alpha,\beta)=0$）。其中$\|\alpha\|$表示向量α的"长度"，即$\|\alpha\|=(\alpha,\alpha)^{1/2}$。

定理10 n维欧氏空间V的任意两个向量α与β在V的任意一个基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下（即$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=\alpha$，$\beta=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\alpha_j$），其内积是一个双线性型：$(\alpha,\beta)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_j)x_iy_j$，且"**度量矩阵**"：

$$((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)\cdots(\alpha_1,\alpha_n)\\ \cdots\cdots\\ (\alpha_n,\alpha_1)\cdots(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$$

是正定阵

定理11 有限n维欧氏空间必存在"**标准正交基**"：$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$即$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$；$i,j=1,2,\cdots,n$。

欧氏空间理论的另外三个结论将在§3与§4中叙述。

注 本章中另外两个重要的概念：线性空间的同构与欧氏空间的同构将在下一章提及。

§2 线性空间的性质，基与维数的求法

一、线性空间的公理系统的讨论与运用

线性空间是在考察了几何、代数、分析等具体数学对象及其运算

所具有的共同性质的基础上，抽掉这些对象的具体属性，取出它们的共性而形成这个“抽象”概念的，它的确切意义如下：

定义 设 V 是一些元素（称为“向量”）的非空集合，K 是数域，如果对 V 中任意两个元素 α 与 β，定义某种加法：“+”，记为 $\alpha+\beta$，使满足：

(A_0)：$\alpha+\beta\in V$，$\forall\alpha,\beta\in V$，且 $\alpha+\beta$ 由 α 与 β 唯一确定。换言之，加法运算是“封闭的”与“单值的”。

(A_1)：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$。换言之，加法运算满足结合律。

(A_2)：至少存在一个元素 θ，使得

$$\alpha+\theta=\alpha=\theta+\alpha,\forall\alpha\in V。$$

换言之，θ 对 V 的加法运算与数 0 对数的加法起同样的作用，称 θ 为**零向量**。

(A_3)：对任何 $\alpha\in V$，至少存在一个 $\delta\in V$，使

$$\alpha+\delta=\theta=\delta+\alpha,$$

换言之，对 V 的加法运算来说，δ 起着数的加法中一个数的负数相同的作用，称 δ 为 α 的**负向量**，

(A_4)：对 V 中任何两个元素 α 与 β，恒有：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\forall\alpha,\beta\in V$$

换言之，加法运算满足交换律。

又若对 K 中任一数 k 以及 V 中任一元素 α，定义某种乘法：“·”，称为数（量）乘（法），记为 $k\alpha=k\cdot\alpha$，使满足：

(M_0)：$k\alpha=\alpha k$ 是 V 中元素，且 $k\alpha$ 由 k 与 α 唯一确定。换言之，数乘是“封闭的”与“单值的”。

(M_1)：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，$\forall k\in K$，$\forall\alpha,\beta\in V$。换言之，数乘满足“向量分配律”。

(M_2)：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$，$\forall k,l\in K$，$\forall\alpha\in V$。换言之，数乘满足“数量分配律”。

(M_3)：$k(l\alpha)=(kl)\alpha$，$\forall k,l\in k$，$\forall\alpha\in V$。换言之，数乘满足“数量结合律”。

(M_4): $1 \cdot \alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$。

则称 V 为 K **上的线性空间（或向量空间）**。称 K 为**基域**。

当 K 是实数域 R，称 R 上的线性空间为**实空间**。又称复数域 C 上的线性空间为**复空间**。

严格地说，线性空间应如此定义："线性空间是这样一个'代数系统'（或体系），它包括一个非空集合 V 与一个数域 K 以及两个运算：满足公理 $(A_0)\sim(A_4)$ 的 V 的加法运算与满足公理 $(M_0)\sim(M_4)$ 的 V 与 K 的数量乘法运算"。由于我们讨论的重点是 V，故也称 V 为数域 K 上的线性空间，有时在没有混淆的情形下，将"数域 K 上"四字也省略掉。

为以后讨论方便起见，我们将常见的线性空间罗列如下：

例1 数域 K 上的 n 维列向量集合，记为 $K^{(n)}$，对通常的向量加法以及 K 的数与向量的乘法，是 K 上的线性空间，称 $K^{(n)}$ 为**列向量空间**。若 $K=R$，称 $R^{(n)}$ 为**实列向量空间**。

例2 数域 K 上 $m\times n$ 阵集合，记为 $M_{mn}(K)$，对矩阵通常的加法与数量乘法，是 K 上的线性空间，称 $M_{mn}(K)$ 为**矩阵空间**。当 $m=n$ 时，记为 $M_n(K)$，称 $M_n(K)$ 为**方阵空间**。

例3 数域 K 上的次数不大于 n 的多项式集合添上零多项式0，记为 $K_n[x]$，对多项式通常的加法与数乘，称 $K_n[x]$ 为**多项式空间**。

例4 实闭区间 $[a,b]$ 上的连续实值函数集合，记为 $R[a,b]$，对函数通常的加法与数乘：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \forall f,g\in R[a,b], \forall x\in[a,b],$$

$$(kf)(x)=kf(x), \forall k\in R, \forall f\in R[a,b], \forall x\in[a,b].$$

称 $R[a,b]$ 为**连续函数空间**。

例5 复数域 C 是实数域 R 上的线性空间，其加法运算是复数的加法，数量乘法是实数与复数的乘法。

例6 实数域 R 是有理数域 Q 上的线性空间，其加法运算是实数的加法，数量乘法是有理数与实数的乘法。

抽象线性空间的作用在于，由它得出的一切结论对诸如上述各例中具体的、各别的线性空间均正确。因此在很大程度上，它可以代替这些具体线性空间的研究，这体现了由一般指导具体的优越性。

由于线性空间是满足$(A_0)\sim(A_4)$以及$(M_0)\sim(M_4)$ 这十条公理的代数系统，故讨论线性空间的性质时，只能以这十条公理以及由这些公理推导出来的结论为依据，这就要求我们十分注意推理过程的逻辑性与严密性，为说明这一点，今举数例于下：

例7 证明：线性空间 V 的零向量以及 V 中任一向量的负向量是唯一的。

证 先证零向量的唯一性，设 θ 与 θ' 都是 V 的零向量，则由公理 (A_2) 知，$\theta=\theta+\theta'=\theta'$，故零向量只有一个。

再证负向量的唯一性，设 δ 与 δ' 都是 $\alpha\in V$ 的负向量，则

$$\begin{aligned}\delta'&=\theta+\delta' &&(\text{由公理}(A_2))\\&=(\delta+\alpha)+\delta' &&(\text{由公理}(A_3))\\&=\delta+(\alpha+\delta') &&(\text{由公理}(A_1))\\&=\delta+\theta &&(\text{由公理}(A_3))\\&=\delta &&(\text{由公理}(A_2))\end{aligned}$$

例7 的证明过程说明，在证明某一结论时，每一步都要有根有据。

由于 α 的负向量 δ 是唯一的，故今后记 $\delta=-\alpha$。

例8 证明：$k\theta=\theta,\forall k\in K$。

证 因为

$$\begin{aligned}k\alpha+k\theta&=k(\alpha+\theta) &&(\text{由公理}(M_1))\\&=k\alpha &&(\text{由公理}(A_2))\end{aligned}$$

故由公理(A_0)可知，

$$(-k\alpha)+(k\alpha+k\theta)=(-k\alpha)+k\alpha \tag{5}$$

所以

$$\begin{aligned}\theta&=(-k\alpha)+k\alpha &&(\text{由公理}(A_3))\\&=(-k\alpha)+(k\alpha+k\theta) &&(\text{由(5)式})\\&=((-k\alpha)+k\alpha)+k\theta &&(\text{由公理}(A_1))\\&=\theta+k\theta &&(\text{由公理}(A_3))\\&=k\theta &&(\text{由公理}(A_2))\end{aligned}$$

例9 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间 V 中任意 s 个向量，$s\geqslant3$，定义：

$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1})+\alpha_s$，则对任何满足：$1\leqslant k\leqslant s-1$ 的 k，都有

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)+(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_s),\qquad (6)$$

也就是说，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 是 V 中唯一确定的向量，它并不依赖在运算过程中所加括号的方法。

证 对 s 用归纳法，当 $s=3$时，就是公理(A_1)，设(6) 式对$s-1$成立，则对 $1\leqslant k\leqslant s-2$，恒有

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s&=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1})+\alpha_s &&\text{(由定义)}\\&=((\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+(\alpha_{k+1}\\&\quad+\cdots+\alpha_{s-1}))+\alpha_s &&\text{(由归纳法假设)}\\&=(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+((\alpha_{k+1}\\&\quad+\cdots+\alpha_{s-1})+\alpha_s) &&\text{(由公理}(A_1))\\&=(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)+(\alpha_{k+1}+\cdots\\&\quad+\alpha_{s-1}+\alpha_s) &&\text{(由归纳法假设)}\end{aligned}$$

当 $k=s-1$时，就是定义所述，故对 $1\leqslant k\leqslant s-1$ 的 k，恒有 (6) 式。

例10 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间 V 的线性相关向量，则对 V 中任何向量 $\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$ 仍线性相关。

证 由假设，存在 K 中不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使成立：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$。由例 8 知，$0\cdot\alpha_i=\theta$；$i=s+1,\cdots,n$。故由$(A_0)$，$(A_2)$以及 (6) 式可得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+0\alpha_{s+1}+\cdots+0\alpha_n=\theta+\cdots+\theta=\theta,$$

而 $k_1,\cdots,k_s,0,\cdots,0$ 仍然不全为 0，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$ 线性相关。

今后，在推理过程中只要有根有据，就不再一步步地详述其依据所在。

线性空间的公理系统本身有一个问题也是值得注意的，即在这些公理中，是否有某些公理可以由其他公理推导出来，这便是所谓公理的“独立性”问题，下面将证，加法交换律(A_4)是不独立的，它可由其他公理推导出来，这就是下面的

命题 如果非空集合 V 上定义的加法运算满足公理$(A_0)\sim(A_3)$，

V 与数域 K 的数量乘法满足公理 $(M_0)\sim(M_4)$，则 V 是 K 上的线性空间。

证 只要由假设的诸公理推导出加法交换律即可，任取 $\alpha,\beta\in V$，考虑 V 中元素 $(1+1)\cdot(\alpha+\beta)$，依次用公理 (M_2)、(M_1)、(M_4) 与 (6) 式，即得

$$\begin{aligned}(1+1)(\alpha+\beta)&=1\cdot(\alpha+\beta)+1\cdot(\alpha+\beta)\\&=(1\cdot\alpha+1\cdot\beta)+(1\cdot\alpha+1\cdot\beta)\\&=(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)\\&=\alpha+\beta+\alpha+\beta\end{aligned}$$

又由公理 (M_1)、(M_2)、(M_4) 与 (6) 式得到

$$\begin{aligned}(1+1)\cdot(\alpha+\beta)&=(1+1)\cdot\alpha+(1+1)\cdot\beta\\&=(1\cdot\alpha+1\cdot\alpha)+(1\cdot\beta+1\cdot\beta)\\&=(\alpha+\alpha)+(\beta+\beta)\\&=\alpha+\alpha+\beta+\beta\end{aligned}$$

故由公理 (A_0) 与 (M_0) 得到

$$\alpha+\beta+\alpha+\beta=\alpha+\alpha+\beta+\beta$$

再由公理 (A_0)、(A_1) 与 (6) 式，

$$\begin{aligned}&(-\alpha+\alpha)+(\beta+\alpha)+(\beta+(-\beta))\\&\quad=(-\alpha+\alpha)+(\alpha+\beta)+(\beta+(-\beta))\end{aligned}$$

所以由公理 (A_3) 与 (A_2) 就得到：

$$\beta+\alpha=\alpha+\beta$$

除了公理 (A_4) 外，其他九条公理是否还有不独立的公理？另外，线性空间十条公理中是否有不是 (A_4) 的其他不独立的公理？ 这些问题将在习题中回答其一、二（见第 1 题与第 2 题）。

对本段说的两个问题：严格的逻辑性问题以及适当注意公理系统的独立性问题，初学者一开始就要予以重视。

二、基与维数的求法

先回顾一下基与维数的定义。

定义 设 V 是数域 K 上的线性空间，如果(i) V 中至少有 n 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，(ii) V 的任何 $n+1$ 个向量都线性相关，则

称 V 为（有限）n **维线性空间**。称 n 为 V 的**维数**，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 的全体：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为 V 的一个**基**，而称 α_i 为**基向量**；$i=1,2,\cdots,n$。如果线性空间 V 有任意多个线性无关向量，则称 V 为**无限维线性空间。**

给定一个线性空间后，先要判断它是否有限维线性空间，在判断过程中，可以求出有限维空间的基与维数。一般说来，解决上述问题并不都是容易的，要根据具体的线性空间找出具体的解决办法，如下列数例所示。

例11 $K^{(n)}$ 是数域 K 上的 n 维线性空间。

这是因为，n 维标准单位向量$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关，且 $K^{(n)}$ 中任一向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$都是 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性组合：$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$，故由定理 2，$d(K^{(n)})=n$。

例12 $d(M_{mn}(K))=mn$，$d(M_n(K))=n^2$。

这是因为，任何 $m\times n$ 阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 必可表为 E_{ij} 的线性组合：$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$。其中 E_{ij} 是 i 行 j 列元为 1。其余元素为 0 的 $m\times n$ 阵，易知 E_{ij} 线性无关；$i=1,2,\cdots m,j=1,2,\cdots n$。

例13 $d(K_n[x])=n+1$。

这是因为 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 是$K_n[x]$的一个基。

例14 数域 K 上所有多项式的集合，记为 $K[x]$，对多项式通常的加法与数乘成为 K 上的线性空间，且是无限维线性空间。因为，对任何正整数 n，$1,x,\cdots,x^n$ 线性无关。

例15 复数域 C 是实数域 R 上的二维线性空间。

这因为，$1,\sqrt{-1}$ 对 R 线性无关，而任一复数 z 是 $1,\sqrt{-1}$ 的线性组合：$z=a+b\sqrt{-1}$（a 与 b 是实数。）

例16 实数域 R 是有理数域 Q上的无限维线性空间。

这要用到**埃尔密脱**(Hermite)的一个结论："$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是超越数"。所谓**超越数** t，即 t 决不是任何有理系数多项式的根。换言之，对任何正整数n，以及有理数 $q_0,q_1,\cdots,q_n$，如果，$q_0+q_1t+\cdots+q_nt^n=0$，则必 $q_0=q_1=\cdots=q_n=0$，也即 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 对 Q 线性无关。由此定义，

对任何正整数n,应用埃尔密脱的结论知，$1, e, e^2, \cdots, e^n$ 对 Q 线性无关，即 R 中有任意多个对 Q 线性无关的向量 $1, e, \cdots, e^n$，故 R 是 Q 上无限维线性空间。

例17 设 Q 是有理数域，记 $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \forall a,b,c,d \in Q\}$,易证 Q 是一数域，故它是 Q 上的线性空间。今证：$d(Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})) = 4$。事实上，只要证$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ 线性无关即可(因为由$Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$的定义,它的每个元素就是$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$的线性组合)。

先证$1, \sqrt{2}$对 Q 线性无关，因为由 $k_1 + k_2\sqrt{2} = 0$ 可知必有 $k_2 = 0$，否则$\sqrt{2} = -\frac{k_1}{k_2}$,而$\sqrt{2}$是无理数,此为矛盾,故 $k_2 = 0$,因而$k_1 = 0$。

再证$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$对 Q 线性无关，因为由$k_1 + k_2\sqrt{2} + k_3\sqrt{3} = 0$, $k_1, k_2, k_3, \in Q$, 可得 $k_1 + k_2\sqrt{2} = -k_3\sqrt{3}$，两边平方后得

$$(k_1^2 + 2k_2^2 - 3k_3^2) + 2k_1k_2\sqrt{2} = 0$$

因为$1, \sqrt{2}$对 Q 线性无关，故 $k_1k_2 = 0, k_1^2 + 2k_2^2 - 3k_3^2 = 0$。如果$k_1 \neq 0$，则 $k_2 = 0$,且还有$k_1^2 - 3k_3^2 = 0$。而这是不可能成立的，因为$\sqrt{3}$也是无理数。同理可证 $k_2 \neq 0$ 也不可能，所以$k_1 = k_2 = 0$，于是 $k_3 = 0$，即$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$对 Q线性无关。

最后证$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$对 Q 线性无关，因为由 $k_1 + k_2\sqrt{2} + k_3\sqrt{3} + k_4\sqrt{6} = 0$ 可得 $k_1 + k_2\sqrt{2} = -\sqrt{3}(k_3 + k_4\sqrt{2})$ ($k_1, k_2, k_3, k_4 \in Q$),如果 k_3 与 k_4 中有一不为 0，则可得

$$\frac{k_1 + k_2\sqrt{2}}{k_3 + k_4\sqrt{2}} = -\sqrt{3}$$

经分母有理化后可得：$l + m\sqrt{2} = -\sqrt{3}$，其中 l 与 m 是有理数，这说明$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$线性相关（对Q），此为矛盾，故 $k_3 = 0, k_4 = 0$，从而 $k_1 = k_2 = 0$。于是$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$对 Q 线性无关。

例18 $R[a,b]$是实数域 R 上的无限维线性空间。

这因为，对任何正整数n，我们可证定义在$[a,b]$上的连续函数$1, x, x^2, \cdots, x^n$ 线性无关。事实上，可取 $x = x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$，而 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} < b$,则由 $k_0 + k_1x + \cdots + k_nx^n = 0$ 可得

$$k_0+k_1x_1+k_2x_1^2+\cdots+k_nx_1^n=0$$

$$k_0+k_1x_2+k_1x_2^2+\cdots+k_nx_2^n=0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$k_0+k_1x_{n+1}+k_2x_{n+1}^2+\cdots+k_nx_{n+1}^n=0$$

因为 $x_i\neq x_j, i\neq j$，故上列齐次方程组的系数行列式是非零范德蒙行列式，所以 $k_0=k_1=\cdots=k_n=0$。

§3 子空间的直接和与正交补空间

将线性空间分解为两个子空间的直接和，或者分解为多个子空间的直接和（其定义及有关结论见习题5），是解决有关线性空间问题的方法之一。本节仅讨论前者。

设 V 是数域 K 上的线性空间，V_1 与 V_2 是 V 的子空间，一般说来，要证 $V=V_1\oplus V_2$，常分成两步：先证 $V=V_1+V_2$，再证 $V_1\cap V_2=\{\theta\}$，或者在 V 是有限维空间时，改证 $d(V)=d(V_1)+d(V_2)$（由定理7）以代替 $V_1\cap V_2=\{\theta\}$的证明：

由于恒有 $V\supseteq V_1+V_2$，故只要证 $V\subseteq V_1+V_2$，也即要证 V 中任一向量可以表成 V_1 中一个向量与 V_2 中一个向量的和，便得 $V=V_1+V_2$。但证明这一步并不都是容易的，如下面例 2 所示。

例1 设 $K^{(n)}$ 是数域 K 上的 n 维列向量空间，A 是 K 上的 n 阶阵，记

$$V_1=\{Ax,\forall x\in K^{(n)}\}, V_2=\{x\mid Ax=0, x\in K^{(n)}\}$$

证明：V_1 与 V_2 是 $K^{(n)}$ 的子空间，当 A 是幂等阵（即 $A^2=A$）时，则 $K^{(n)}=V_1\oplus V_2$。

证 容易看出，V_1 与 V_2 都是 $K^{(n)}$ 的非空子集，因为

$$kAx+lAy=A(kx+ly)\in V_1, \forall k,l\in k, \forall x,y\in K^{(n)},$$

故由定理 5，V_1 是 V 的子空间，又任取 $\xi,\eta\in V_2$，则 $A\xi=0, A\eta=0$，由于

$$A(k\xi+l\eta)=kA\xi+lA\eta=0, \forall k,l\in K$$

故 $k\xi+l\eta\in V_2$，即 V_2 是 V 的子空间。

当 A 是幂等阵、即 $A^2=A$ 时，由于 $K^{(n)}$ 中任一向量可表成：$x=Ax+(x-Ax)$，而 $Ax\in V_1$，又因 $A(x-Ax)=Ax-A^2x=0$，故 $(x-Ax)\in V_2$，于是 $V\subseteq V_1+V_2$，因而 $V=V_1+V_2$。

设 ξ 是 $V_1\cap V_2$ 中任一向量，则 $\xi\in V_1$，于是存在 $\eta\in K^{(n)}$ 使 $\xi=A\eta$，又因 $\xi\in V_2$，故 $A\xi=0$。于是 $\xi=A\eta=A^2\eta=A(A\eta)=A\xi=0$，故 $V_1\cap V_2=\{0\}$，所以 $K^{(n)}=V_1\oplus V_2$。

例2 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)'\in K^{(n)}$，且$\sum\limits_{i=1}^n a_i\neq 0$，证明：

$V_1=\{x\mid\alpha'x=0,x\in K^{(n)}\}$，$V_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\mid x_1=x_2=\cdots=x_n,x\in K^{(n)}\}$都是 $K^{(n)}$ 的子空间，且 $K^{(n)}=V_1\oplus V_2$。

证 易证 V_1 与 V_2 是 $K^{(n)}$ 的子空间（证明略）。又因任一 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'\in K^{(n)}$ 恒可表成：

$$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\\ b_2-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\\ \cdots\\ b_n-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\\ \cdots\\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\end{pmatrix}=\beta_1+\beta_2 \tag{7}$$

其中$\beta_2=\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i},\cdots,\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^n a_i}\right)'$显然是 V_2 的向量，又因

$$\alpha'\beta_1=\sum_{i=1}^n a_i\left(b_i-\frac{\sum\limits_{j=1}^n a_jb_j}{\sum\limits_{j=1}^n a_j}\right)=\sum_{i=1}^n a_ib_i-\left(\sum_{j=1}^n a_jb_j\right)\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{\sum\limits_{j=1}^n a_j}$$

$$=\sum_{i=1}^n a_ib_i-\sum_{j=1}^n a_jb_j=0$$

故 $\beta_1\in V_1$，因此 $K^{(n)}\subseteq V_1+V_2$，于是 $K^{(n)}=V_1+V_2$。

又由假设$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$，故$a_i$不全为0，故$\alpha'\neq\mathbf{0}$，$r(\alpha')=1$，于是$\alpha'\mathbf{x}=\mathbf{0}$的基础解系有$n-1$个线性无关的解向量，所以$d(V_1)=n-1$。又显然知$d(V_2)=1$，故$d(K^{(n)})=d(V_1)+d(V_2)$，所以$K^{(n)}=V_1\oplus V_2$。

必须说明，(7)式虽然可以硬凑出来，然而并不容易。事实上，(7)式是有来源的，其来源不仅很自然，且其想法还可作为其他空间分解之借鉴。下面细述其来源。

因为V_1中向量$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$恒满足，

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0 \tag{8}$$

由假设$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$，故至少有一个$a_i\neq 0$，为简便计，设$a_1\neq 0$，于是齐次方程组(8)的基础解系为

$$\begin{pmatrix} -a_1^{-1}(a_2,\cdots,a_n) \\ I_{n-1} \end{pmatrix}$$

的$n-1$个列向量：

$$\boldsymbol{\delta}_1=\begin{pmatrix} -a_1^{-1}a_2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\delta}_2=\begin{pmatrix} -a_1^{-1}a_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\delta}_{n-1}=\begin{pmatrix} -a_1^{-1}a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

它们可作为V_1的一个基，也即$V_1=L(\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_{n-1})$。

又因V_2中任一向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$均满足$x_1=x_2=\cdots=x_n$，故

$$\boldsymbol{\delta}_n=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可作为V_2的基，又由行列式的第一降阶定理知，

$$|\boldsymbol{\delta}_n,\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_{n-1}|=\begin{vmatrix} 1 & -a_1^{-1}(a_2,\cdots,a_n) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & I_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=|I_{n-1}|\left(1+a_1^{-1}(a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

$$=a_1^{-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\neq 0$$

故 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 线性无关，因而它们可作为 $K^{(n)}$ 的一个基，（且由此显然可看出：$V_1\cap V_2=\{0\}$），故 $K^{(n)}$ 中任一向量 β 必可表成 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 的线性组合：

$$\beta=k_1\delta_1+k_2\delta_2+\cdots+k_{n-1}\delta_{n-1}+k_n\delta_n \tag{9}$$

也即

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-a_1^{-1}a_2\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-a_1^{-1}a_3\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix}-a_1^{-1}a_n\\ 0\\ 0\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}+k_n\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \tag{10}$$

故只要求出 k_n，则由(9)式便可求得 $k_1\delta_1+k_2\delta_2+\cdots+k_{n-1}\delta_{n-1}$。由(10)式可得

$$\begin{aligned}
&b_1=k_1(-a_1^{-1}a_2)+k_2(-a_1^{-1}a_3)+\cdots+k_{n-1}(-a_1^{-1}a_n)+k_n\\
&b_2=k_1+k_n\\
&b_3=k_2+k_n\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&b_n=k_{n-1}+k_n
\end{aligned} \tag{11}$$

依次以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 乘（11）的各式并相加，即得：$\sum_{i=1}^n a_ib_i=k_n\sum_{i=1}^n a_i$，

所以，$k_n=\dfrac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$，于是由(9)式即得

$$k_1\delta_1+k_2\delta_2+\cdots+k_{n-1}\delta_{n-1}=\begin{pmatrix} b_1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i} \\ \vdots \\ b_n-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\end{pmatrix}=\beta_1$$

显然，$\beta_1\in V_1$，这样就导出了（7）式。

将空间 V 分解为两个子空间的直接和的应用很多。特别当 V 是欧氏空间时，将在下面给出一个特别有用的分解式。为此先回顾一下正交补空间的定义。设 W 是欧氏空间的非平凡子空间（即 $W\neq\{\theta\}$，$W\neq V$），$\alpha\in V$，如果对任何 $w\in W$，恒有 $(\alpha,w)=0$，则称 α **垂直（或正交）于** W，以 $\alpha\perp W$ 记之。又记 $W^{\perp}=\{\alpha|\alpha\perp W,\alpha\in V\}$，则易证 $W^{\perp}$ 也是 V 的子空间，称 $W^{\perp}$ 为 W 的**正交补空间**。

定理12 对欧氏空间 V 的任何非平凡子空间 W，必存在 W 的唯一一个正交补空间 $W^{\perp}$，使

$$V=W\oplus W^{\perp} \tag{12}$$

证：设 $d(W)=k$。因 W 也是欧氏空间，故由定理 11，可设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_k$ 是 W 的标准正交基，任取 $\alpha\in V$，作向量：

$$\beta=\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\varepsilon_i)\varepsilon_i$$

令

$$\delta=\alpha-\beta=\alpha-\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\varepsilon_i)\varepsilon_i, \tag{13}$$

则因

$$(\delta,\varepsilon_j)=(\alpha-\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\varepsilon_i)\varepsilon_i,\varepsilon_j)=(\alpha,\varepsilon_j)-\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\varepsilon_i)(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$$

$$=(\alpha,\varepsilon_j)-\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\varepsilon_i)\delta_{ij}=0;\qquad j=1,2,\cdots,k$$

故 $\delta\perp W$，即 $\delta\in W^{\perp}$，由（13）式，$\alpha=\beta+\delta$，故 $V=W+W^{\perp}$。

又任取 $\alpha\in W\cap W^{\perp}$，则 $\alpha\in W$。$\alpha\in W^{\perp}$，故 $(\alpha,\alpha)=0$。由内积定义知，必有 $\alpha=\theta$，故 $W\cap W^{\perp}=\theta$。所以 $V=W\oplus W^{\perp}$。又唯一性是易知的。

当 V 是有限维欧氏空间时，由定理12，$V=W^{\perp}\oplus(W^{\perp})^{\perp}$，再由分解唯一性知，$(W^{\perp})^{\perp}=W$，故 W 与 $W^{\perp}$ 互为正交补。

下面叙述定理12的作用。一些实际问题与理论问题常归结为：对欧氏空间 V 的向量 α，要找 V 的有限维非平凡子空间 W 中向量 β，使 $\|\alpha-\beta\|^2$ 最小。这个问题称为**最小平方偏差问题**。由定理 12，这个 β 十分容易得出，因为由(12)式可知，V 中任一向量 α 必有唯一表示式：$\alpha=\alpha_W+\alpha_{W^{\perp}}$，其中 $\alpha_W\in W$，$\alpha_{W^{\perp}}\in W^{\perp}$，且 $(\alpha-\alpha_W)\perp W$，今证：

定理13 设 W 是欧氏空间 V 的有限维非平凡子空间，对任一 $\alpha\in V$，必存在唯一一个 $\alpha_W\in W$，使 $\|\alpha-\alpha_W\|$ 是"点" α 到子空间 W 的"最短距离"，也即，对 W 中任一不等于 α_W 的向量 β，恒有

$$\|\alpha-\alpha_W\|<\|\alpha-\beta\|$$

证 因为 $\beta\neq\alpha_W$，故，$\alpha_W-\beta\neq\theta$。又 $\alpha_W-\beta\in W$，故 $\alpha_W-\beta$ 与 $\alpha-\alpha_W$ 正交，于是由商高定理（定理 9 的推论）知，

$$\|\alpha-\beta\|^2=\|(\alpha-\alpha_W)+(\alpha_W-\beta)\|^2=\|\alpha-\alpha_W\|^2+\|\alpha_W-\beta\|^2$$
$$>\|\alpha-\alpha_W\|^2,（因 \alpha_W-\beta\neq\theta，故 \|\alpha_W-\beta\|^2>0）$$

故 $\|\alpha-\alpha_W\|<\|\alpha-\beta\|$。

就三维空间而言，要找的 α_W 就是原点到 α 的垂足的向量。因为一点 α 到平面的距离以垂线之长最短。

下述结论告诉我们应用定理13的具体方法。

定理14 设 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 是欧氏空间 V 的非平凡子空间，则 $\alpha_W=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_k\alpha_k$ 的充要条件是，$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_k)'$ 是 k 阶线性方程组：

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\mathbf{x}=((\alpha,\alpha_1),(\alpha,\alpha_2),\cdots,(\alpha,\alpha_k))' \qquad (14)$$

的解，其中

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=((\alpha_i,\alpha_j))_{k\times k}=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)(\alpha_1,\alpha_2)\cdots(\alpha_1,\alpha_k)\\(\alpha_2,\alpha_1)(\alpha_2,\alpha_2)\cdots(\alpha_2,\alpha_k)\\\cdots\cdots\cdots\\(\alpha_k,\alpha_1)(\alpha_k,\alpha_2)\cdots(\alpha_k,\alpha_k)\end{pmatrix}$$

称 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的**格兰姆**(Gram)**矩阵**。

证 如果 $\alpha_W=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_k\alpha_k$，则由 $(\alpha-\alpha_W)\perp W$ 可知，对

任一 i；$1\leqslant i\leqslant k$，恒有 $(\alpha-\alpha_W,\alpha_i)=0$；$i=1,2,\cdots k$，也即

$$0=(\alpha-\sum_{j=1}^{k}x_j\alpha_j,\alpha_i)=(\alpha,\alpha_i)-\sum_{j=1}^{k}x_j(\alpha_i,\alpha_j)$$

故得

$$\sum_{j=1}^{k}(\alpha_i,\alpha_j)x_j=(\alpha,\alpha_i);\ i=1,2,\cdots,k \tag{15}$$

上式写成矩阵等式就是（14）式。

反之，若 x 是（14）的解，则可得（15）式，于是将上述必要性过程倒推回去，并应用定理 12 知，对(14)的任一解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，恒有 $\alpha_W=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_k\alpha_k$。

注意　当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关时，$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 就是欧氏空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$的度量阵，故由定理10，$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$是正定阵，所以 $|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)|\neq0$，故(14)的解 x 是唯一的，当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k$ 线性相关时，（14）的解可能不止一个，例如 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $x=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 都是（14）的解，则由定理12，恒有 $\sum_{i=1}^{k}x_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{k}y_i\alpha_i$ $(=\alpha_W)$。当 $\alpha_1=\varepsilon_1,\alpha_2=\varepsilon_2,\cdots,\alpha_k=\varepsilon_k$ 是标准正交向量组时，则（15）式化为：

$$x_i=(\alpha,\varepsilon_i),\quad i=1,2,\cdots,k$$

即 x_i 是 α_W 在 ε_i 上的坐标，此时

$$\alpha_W=\sum_{i=1}^{k}(\alpha,\varepsilon_i)\varepsilon_i$$

上式给了定理12的证明过程以更明确的几何意义与证明思路。

定理14在实际问题与理论问题上的应用如下：

(i) 最小二乘法

生产实践与科学试验中遇到的某些问题，所归结出来的数学模型常常是一个没有解的 m 个方程、n 个未知数的线性方程组（称为**矛盾方程组**）：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\cdots,m \tag{16}$$

或者

$$Ax=b \tag{17}$$

其中，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)'$。

方程组（16）是在对（由实验或观测推断出来的）线性关系式 $b=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n$ 的 $b,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 作了 m 次测量或试验后得出的，由于人们对该问题的规律性认识的局限性以及测试中出现的误差，故（16）只能是些近似等式，或者说它是矛盾方程组。现在的问题是，要找 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 的"最佳近似值"，使总的误差：

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right)^2 \tag{18}$$

最小（根据测量的误差估计理论应取平方和），或者，等价地，要找 x，使

$$\|b-Ax\|^2 \tag{19}$$

最小。如果将A按它的列分块：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都是 m 维列向量，则上述问题归结为找 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，使 $\|\mathbf{b}-(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n)\|^2$ 最小，也就是要找 $\mathbf{b}_W=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$ 的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。由定理14，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可由下列方程组解出：

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)x=\begin{pmatrix}(\alpha_1,b)\\(\alpha_2,b)\\\vdots\\(\alpha_n,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1'b\\\alpha_2'b\\\vdots\\\alpha_n'b\end{pmatrix}=A'b$$

（对本问题来说，$V=R^{(n)}$，内积为 $(\alpha,\beta)=\alpha'\beta$，$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$），而

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha'_1\alpha_1 & \alpha'_1\alpha_2 & \cdots & \alpha_1'\alpha_n\\ \alpha_2'\alpha_1 & \alpha_2'\alpha_2 & \cdots & \alpha_2'\alpha_n\\ \cdots\cdots & & & \\ \alpha_n'\alpha_1 & \alpha_n'\alpha_2 & \cdots & \alpha_n'\alpha_n\end{pmatrix}=A'A$$

于是（14）式化为：

$$A'A\mathbf{x}=A'\mathbf{b} \tag{20}$$

也就是说，由（20）解出的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 就使 $\mathbf{b}_W=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，（(20) 是有解的，因为 $r(A'A)=r(A'A,A'x)$）。

上述方法就称为**最小二乘法**。称(20)式解出的 x 为矛盾方程组 Ax

$=b$ 的**最小二乘解**。

一般来说，上述的 m 大于 n，即测试次数多于未知数的个数，这样可以提高 x 的精度（如我国在1978年搞的一个"大地测量"问题，就归结为一个有($m=$)17万个方程、($n=$)13万个未知数的矛盾方程组）。

当 A 是 $m\times n$ 列满秩阵时，则 $A'A$ 是非异阵，此时（20）只有一个解：

$$\mathbf{x}=(A'A)^{-1}A'\mathbf{b} \tag{21}$$

例3 求矛盾方程组

$$2x_1-x_2=3$$
$$3x_1+x_2=4$$
$$x_1+2x_2=2$$

的最小二乘解。

解 由于 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\\1&2\end{pmatrix}$ 是列满秩阵，故由（21）式得

$$\boldsymbol{x}=(A'A)^{-1}(A'\mathbf{b})=\begin{pmatrix}14&3\\3&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}20\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/5\\2/15\end{pmatrix}$$

***注** 当 A 是列满秩阵时，记 $A^+=(A'A)^{-1}A'$，则易证 AA^+ 与 A^+A 都是实对称阵，且 $A^+AA^+=A^+$，$AA^+A=A$，故 $(A'A)^{-1}A'$ 是 A 的广义逆（参阅第四章§4。）且由（21）式，$Ax=\mathbf{b}$ 的最小二乘解是，$x=A^+b$。由此可见，广义逆与 α_W 有关。事实上，广义逆矩阵是由莫尔（Moore）研究与 α_W 有关的几何问题时引进的。

(ii) 函数的逼近问题

设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续实变实值函数，在某些理论问题中，要求某一"三角多项式"：

$$p(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots+a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

使 $\int_0^{2\pi}(f(x)-p(x))^2dx$ 最小。其中 $a_0,a_1,b_1,\cdots,a_k,b_k$ 是待定的实数。

今设法将上述问题化为一个最小平方偏差问题。对实数域 R 上的连续函数空间 $R[0,2\pi]$，定义内积：$(f,g)=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx$，则 $R[0,$

$2\pi]$ 是一个无限维欧氏空间，作子空间 $W=L(1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos kx,\sin kx)$，容易证明，对任何 $l\neq t$，

$$\int_0^{2\pi}\cos lx\cdot\sin tx dx=0,\ \int_0^{2\pi}1\cdot\cos lx dx=0,\ \int_0^{2\pi}1\cdot\sin tx dx=0$$

对任何 $l\neq t$，的 l,t。还有：

$$\int_0^{2\pi}\cos lx\cdot\cos tx dx=0,\ \int_0^{2\pi}\sin lx\cdot\sin tx dx=0$$

这说明 $f_0=1,f_1=\cos x,f_2=\sin x,f_3=\cos 2x,f_4=\sin 2x,\cdots,f_{2k-1}=\cos kx$，$f_{2k}=\sin kx$ 是 W 的正交基，（因正交向量组必线性无关），于是问题归结为：求"点" $f(x)$ 到子空间 W 的"最短距离"，即要求出 $(f(x))_W=x_0+x_1\cos x+x_2\sin x+\cdots+x_{2k-1}\cos kx+x_{2k}\sin kx$ 的系数 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{2k}$。由（14）式，或者（15）式知，这些 x_j 可由解

$$\sum_{j=0}^{2k}(f_i,f_j)x_j=(f,f_i);\ i=0,1,\cdots,2k$$

得出。但上面已证 $(f_i,f_j)\neq 0$，当 $i\neq j$，故上方程组化为

$$(f_i,f_i)x_i=(f,f_i);i=0,1,\cdots,2k \tag{22}$$

于是由（22）式即得：

$$x_0=\frac{(f,1)}{(1,1)}=\frac{\int_0^{2\pi}f(x)dx}{\int_0^{2\pi}1^2dx}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$$

$$x_{2t-1}=\frac{(f,f_{2t-1})}{(f_{2t-1},f_{2t-1})}=\frac{1}{\int_0^{2\pi}\cos^2 tx dx}\int_0^{2\pi}f(x)\cos tx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos tx dx,$$

$$x_{2t}=\frac{(f,f_{2t})}{(f_{2t},f_{2t})}=\frac{1}{\int_0^{2\pi}\sin^2 tx dx}\int_0^{2\pi}f(x)\sin tx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin tx dx,$$

按题意要求：$a_0=2x_0,a_t=x_{2t-1},b_t=x_{2t}$，故得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx,\quad a_t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos tx dx$$

$$b_t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin txdx \tag{23}$$

所以由（23）式确定的 a_i, b_j 所得到的下列**“三角多项式”**：

$$(f(x))_W = \frac{a_0}{2} + \sum_{t=1}^{k}(a_t\cos tx + b_t\sin tx) = p(x)$$

必使 $\int_0^{2\pi}\Big(f(x) - p(x)\Big)^2 dx$ 最小。称(23)的 $a_0, a_1, b_1, \cdots, a_k, b_k$ 为 $f(x)$ 的富里埃(Fourier)系数。

§4 格兰姆矩阵，广义阿达马不等式

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是欧氏空间 V 中任意 s 个向量，上面已定义下述 s 阶阵

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & & (\alpha_1,\alpha_s) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & & (\alpha_2,\alpha_s) \\ \cdots\cdots & & & \\ (\alpha_s,\alpha_1) & (\alpha_s,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_s,\alpha_s) \end{pmatrix}$$

为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的**格兰姆矩阵**。称 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)|$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的**格兰姆行列式**。

格兰姆矩阵是个有广泛应用的矩阵，它有如下的基本结论：

定理15 欧氏空间 V 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的格兰姆矩阵 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 必是半正定阵，而 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是正定阵的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。

证 当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关时，作线性包 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，则它对 V 的内积来说仍是一个欧氏空间，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 的基，故 $G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是度量矩阵，因而由定理10，$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是正定阵。故 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)| > 0$。

当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，例如 α_s 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}$ 的线性组合：$\alpha_s = \sum_{i=1}^{s-1} k_i\alpha_i$，将 $|G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)|$ 的第 s 列减去第 1 列的 k_1 倍、第 2 列的 k_2 倍、…，第 $s-1$ 列的 k_{s-1} 倍，并应用内积的线性性质可得

$$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|=\begin{vmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_{s-1}) & (\alpha_1,\theta)\\(\alpha_2,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_{s-1}) & (\alpha_2,\theta)\\\cdots\cdots\cdots & & & \\(\alpha_s,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_s,\alpha_{s-1}) & (\alpha_s,\theta)\end{vmatrix}=0$$

(因 $(\alpha_i,\theta)=0$; $i=1,2,\cdots,s$)。

根据上述两点，对任意 s 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，恒有：$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|\geqslant 0$。但因 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的任何 k 阶主子阵显然也是格兰姆矩阵，故它的行列式不小于零，所以 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 是半正定阵。再由上述两点知，$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 是正定阵的充要条件是，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

由定理15的证明过程，可得：

推论1 欧氏空间 V 的任意 s 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的格兰姆行列式 $|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|\geqslant 0$，而等号成立的充要条件是，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关。

由于格兰姆矩阵的半正定（正定性），使我们可以充分运用半正定阵与正定阵的理论去得到更多有用的结论。例如，由正定阵行列式的不等式估计式显然可得：

推论2 **（广义阿达马不等式）** 对欧氏空间中任意 s 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，必有

$$|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)|\leqslant\prod_{i=1}^{s}(\alpha_i,\alpha_i) \tag{24}$$

而等号成立的充要条件是：$(\alpha_i,\alpha_j)=0, i\neq j; i,j=1,2,\cdots,s$。也即 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 两两正交。

之所以称（24）式为广义阿达马不等式，是因为 n 阶实方阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的 n 个列可以看作带有内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$ 的实数域 R 上的 n 维列向量 $R^{(n)}$（即欧氏空间 $R^{(n)}$）中的 n 个列向量，而 $G(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=A'A$，故得 $|A|^2=|A'A|=|G(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)|\leqslant\prod_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=\prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i'\boldsymbol{\alpha}_i$ $=\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}^2$ （其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})'$），这就是通常的阿达马不等式。

又如，由格兰姆矩阵的半正定性及关于正定阵的阿达马乘积的许

尔定理显然可得

推论 3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是欧氏空间的任意向量，则对任何正整数 k，方阵

$$A(k)=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1)^k & (\alpha_1,\alpha_2)^k & (\alpha_1,\alpha_s)^k \\ (\alpha_2,\alpha_1)^k & (\alpha_2,\alpha_2)^k & (\alpha_2,\alpha_s)^k \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ (\alpha_s,\alpha_1)^k & (\alpha_s,\alpha_2)^k & (\alpha_s,\alpha_s)^k \end{pmatrix}$$

必是半正定阵。当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关时，则 $A(k)$ 必是正定阵。

读者不难举一反三，得出其他相应的结论。

例1 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续实值函数，k 是任一正整数，则

$$\begin{vmatrix} \left(\int_a^b f_1(x)^2dx\right)^k & \left(\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right)^k & \cdots & \left(\int_a^b f_1(x)f_s(x)dx\right)^k \\ \left(\int_a^b f_2(x)f_1(x)dx\right)^k & \left(\int_a^b f_2(x)^2dx\right)^k & \cdots & \left(\int_a^b f_2(x)f_s(x)dx\right)^k \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \left(\int_a^b f_s(x)f_1(x)dx\right)^k & \left(\int_a^b f_s(x)f_2(x)dx\right)^k & \cdots & \left(\int_a^b f_s(x)^2dx\right)^k \end{vmatrix}$$

$$\leqslant\prod_{i=1}^s\left(\int_a^b f_i(x)^2dx\right)^k.$$

这由推论 2 与推论 3 便知。

例2 证明

$$\begin{vmatrix} \int_0^{2\pi} e^{2x^2}dx & \int_0^{2\pi} e^{x^2}\cdot 2^x dx & \int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin x dx \\ \int_0^{2\pi} 2^x e^{x^2}dx & \int_0^{2\pi} 2^{2x}dx & \int_0^{2\pi} 2^x\sin x dx \\ \int_0^{2\pi} \sin x\cdot e^{x^2}dx & \int_0^{2\pi} \sin x\cdot 2^x dx & \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \end{vmatrix}>0$$

证 设原行列式为△，将 $e^{x^2},2^x,\sin x$ 看作欧氏空间 $R[0,2\pi]$ 中的向量，内积是 $(f,g)=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx$。则 $e^{x^2},2^x$，$\sin x$ 必线性无关，这是因为，由

$$k_1e^{x^2}+k_22^x+k_3\sin x=0,\forall x\in[0,2\pi]$$

可先取 $x=0$，再取 $x=\pi$，得到：$k_1+k_2=0$，$k_1e^{\pi^2}+k_22^\pi=0$，由这两个方程解得 $k_1=k_2=0$，于是 $k_3\sin x=0$，再取 $x=\frac{\pi}{2}$，即得$k_3=0$，所以 $e^{x^2},2^x,\sin x$ 线性无关，由推论 1，它的格兰姆行列式：$|G(e^{x^2},2^x,\sin x)|=\triangle>0$。

例3 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots f_s(x)$是欧氏空间 $R[a,b]$ 中的线性无关向量，$R[a,b]$ 中任意两个向量的内积是，$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$，

证明：

$$\max_{1\leqslant i\leqslant s}\int_a^b f_i^2(x)dx\geqslant\left|\int_a^b f_j(x)f_k(x)dx\right|,j\neq k;j,k=1,2,\cdots,s \qquad (25)$$

证 先证，正定阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素，其绝对值最大者必是主对角元。事实上，设$|a_{jk}|$最大，$j\neq k$，则 $|a_{jk}|^2>a_{jj}a_{kk}$ 也即

$\begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{jk} & a_{kk}\end{vmatrix}=a_{jj}a_{kk}-|a_{jk}|^2<0$，此与 A 的正定性相矛盾，故 $|a_{jk}|\leqslant a_{tt}\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii}$，$j\neq k$；$j,k=1,2,\cdots n$。

今由假设及定理 15 可知，$G(f_1,f_2,\cdots,f_s)$是正定阵，故（25）式正确。

例4 证明不等式

$$\triangle=\begin{vmatrix} \int_{-1}^2 x^{2n-2}(x^2+1)dx & \int_{-1}^2 x^{2n-3}(x^2+1)dx & \cdots & \int_{-1}^2 x^{n-1}(x^2+1)dx \\ \int_{-1}^2 x^{2n-3}(x^2+1)dx & \int_{-1}^2 x^{2n-4}(x^2+1)dx & \cdots & \int_{-1}^2 x^{n-2}(x^2+1)dx \\ \cdots\cdots\cdots \\ \int_{-1}^2 x^{n-1}(x^2+1)dx & \int_{-1}^2 x^{n-2}(x^2+1)dx & \cdots & \int_{-1}^2 (x^2+1)dx \end{vmatrix}$$

$$>\begin{vmatrix} \int_{-1}^2 x^{2n}dx & \int_{-1}^2 x^{2n-1}dx & \cdots & \int_{-1}^2 x^{n+1}dx \\ \int_{-1}^2 x^{2n-1}dx & \int_{-1}^2 x^{2n-2}dx & \cdots & \int_{-1}^2 x^{n}dx \\ \cdots\cdots\cdots \\ \int_{-1}^2 x^{n+1}dx & \int_{-1}^2 x^{n}dx & \cdots & \int_{-1}^2 x^{2}dx \end{vmatrix} \qquad (26)$$

证 考虑欧氏空间 $R[-1,2]$，内积为 $(f,g)=\int_{-1}^2 f(x)g(x)dx$，则

易证：$x^n,x^{n-1},\cdots,x$ 与 $x^{n-1},x^{n-2},\cdots,x,1$ 都是 $R[-1,2]$ 中的线性无关向量，故由定理 15，$G(x^n,x^{n-1},\cdots,x^2,x)$ 与 $G(x^{n-1},x^{n-2},\cdots,x,1)$ 都是正定阵，但（26）式左端行列式 $\triangle=|G(x^n,x^{n-1},\cdots,x^2,x)+G(x^{n-1},x^{n-2},\cdots,x,1)|$，而任意两个正定阵 A 与 B 之和的行列式恒有：

$$|A+B|>|A|+|B|$$

（参阅第八章例7），故得

$$\Delta=|G(x^n,x^{n-1},\cdots,x^2,x)+G(x^{n-1},x^{n-2},\cdots,x,1)|$$
$$>|G(x^n,x^{n-1},\cdots,x,1)|$$

上不等式就是（26）式。

从以上四例已可初步看到"抽象"理论的作用了。

习　　题

1. 如果非空集合 V 上定义的加法运算："+"满足公理(A_0)、(A_1)以及下述公理：

(A'_2)：必存在 $\theta\in V$，使对任何 $\alpha\in V$，恒有：

$$\alpha+\theta=\alpha$$

(A'_3)：对任何 $\alpha\in V$，必存在 $\delta\in V$，使

$$\alpha+\delta=\theta$$

则公理(A_2)与(A_3)也成立。

（提示：对 $\delta\in V$，由(A'_3)，必存在 $\delta'\in V$，使 $\delta+\delta'=\theta$，由此式以及(A_1)、(A'_2)、(A'_3)，先证出：$\delta+\alpha=\theta$，再证：$\theta+\alpha=\alpha,\forall\alpha\in V$）

2. 下述证明是否正确？

在公理$(A_0)\sim(A_4)$与$(M_0)\sim(M_4)$中，公理(A_3)是多余的，它可由其他九条公理推出。证明如下：因为 $-1\in K$，所以由(M_0)，对任何 $\alpha\in V$，都有$(-1)\alpha\in V$，故由(M_2)与(M_4)得到

$$\alpha+(-1)\alpha=(1-1)\alpha=0\cdot\alpha\in V$$

以及

$$\alpha+0\cdot\alpha=(1+0)\alpha=1\cdot\alpha=\alpha$$

这说明 $0\cdot\alpha$ 是零向量，因而$(-1)\alpha$ 是 α 的负向量，所以(A_3) 可由其

他公理推出。

（提示：要回答证明之正确与否，先要解决："对任何$\beta\in V,\beta\neq\alpha$，均有$\beta+0\cdot\alpha=\beta$"这一结论的证明。）

3. 设$M_n(K)$是K上的方阵空间，试找$M_n(K)$的两个非平凡子空间V_1与V_2，使得$M_n(K)=V_1\oplus V_2$。

4. (i)设V_1,V_2,V_3是线性空间V的非平凡子空间，证明：

$$(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$$

(ii)设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是线性空间V的非平凡子空间，$s\geqslant3$，定义：$V_1+V_2+\cdots+V_s=(V_1+V_2+\cdots+V_{s-1})+V_s$，证明：对任何满足：$1\leqslant k\leqslant s-1$的$k$，恒有：

$$V_1+V_2+\cdots+V_s=(V_1+V_2+\cdots+V_k)+(V_{k+1}+\cdots+V_s)。$$

（提示：对(ii)，应用(i)的结论，并仿照§2例9之证明。）

5. 设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是V的非平凡子空间，$s\geqslant2$，如果：

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_s)=\theta, i=1,2,\cdots,s,$$

则称$V_1+V_2+\cdots+V_s$是$V_1,V_2,\cdots,V_s$的直接和，并记为$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\cdots\oplus V_s$，当$V_1,V_2,\cdots,V_s$是$V$的有限维非平凡子空间时，则以下四个条件是等价的：

(i) $V_1+V_2+\cdots+V_s$是$V_1,V_2,\cdots,V_s$的直接和。

(ii) $(V_1+\cdots+V_{i-1})\cap V_i=\theta$, $i=2,3,\cdots,s$。

(iii) $V_1+V_2+\cdots+V_s$中任一向量α可唯一表成：

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s, \alpha_i\in V_i; i=1,2,\cdots,s。$$

(iv) $d(V_1+V_2+\cdots+V_s)=d(V_1)+d(V_2)+\cdots+d(V_s)$。

（提示：采用"圆圈"证法，即(i)→(ii)由(i)证出(ii)),(ii)→(iii),(iii)→(iv),(iv)→(i)。每一个证明都是容易的。）

6. 设V是有限维线性空间，且$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$，其中，$V_i=V_{i1}\oplus V_{i2}\oplus\cdots\oplus V_{in_i}$，$i=1,2,\cdots,s$，而$V_i$是$V$的非平凡子空间，$V_{ij}$是$V_i$的非平凡子空间；$i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,n_i$。

证明：$V=V_{11}\oplus\cdots\oplus V_{1n_1}\oplus V_{21}\oplus\cdots\oplus V_{2n_2}\oplus\cdots\oplus V_{s1}\oplus V_{s2}\oplus\cdots\oplus V_{sn_s}$。

（提示：应用第5题。）

7. 设δ是欧氏空间V的非零向量，证明：对任何$\alpha\in V$，恒有：

$$\alpha_{L(\delta)}=\frac{(\alpha,\sigma)}{\|\delta\|^2}\delta。$$

（提示：记 $W=L(\delta)$，则 W 是 V 的一维非平凡子空间，再应用定理12。）

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是欧氏空间 V 的正交向量组，即 $(\alpha_i,\alpha_j)=0$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots,s$，证明：

(i) 成立下面的**倍塞尔-派塞凡尔**(Bessel–Parsseval)不等式：

$$\|\alpha\|^2\geqslant\sum_{i=1}^{s}\|\alpha_{L(\alpha_i)}\|^2$$

(ii) 当 $\alpha_i=\varepsilon_i$，$i=1,2,\cdots,s$，而 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$；$i,j=1,2,\cdots,s$，则 ε_1，$\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s$ 是标准正交向量组，则

$$\|\alpha\|^2\geqslant\sum_{i=1}^{s}(\alpha,\varepsilon_i)^2 \qquad (☆)$$

(iii) 当 V 是有限维空间时，则（☆）式是等式（此时变为推广的**商高定理**）的充要条件是，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s$ 是 V 的标准正交基（因而 $d(V)=s$）。

（提示：对 (i)，应用定理12，作线性包 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=W$，则 $\alpha=\alpha_W+\alpha_{W^\perp}$，应用三角形不等式得：$\|\alpha\|^2\geqslant\|\alpha_W\|^2+\|\alpha_{W^\perp}\|^2$，再对 $\alpha_W=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 应用第7题、商高定理以及归纳法，又 (ii) 及 (iii) 由 (i) 易得。）

9. 证明：

$$\begin{vmatrix}\int_0^1 x^2dx & \int_0^1 x^3dx & \int_0^1 x^4dx & \int_0^1 xe^xdx\\ \int_0^1 x^3dx & \int_0^1 x^4dx & \int_0^1 x^5dx & \int_0^1 x^2e^xdx\\ \int_0^1 x^4dx & \int_0^1 x^5dx & \int_0^1 x^6dx & \int_0^1 x^3e^xdx\\ \int_0^1 xe^xdx & \int_0^1 x^2e^xdx & \int_0^1 x^3e^xdx & \int_0^1 e^{2x}dx\end{vmatrix}<\frac{e^2-1}{210}$$

10. 证明：

$$\begin{vmatrix}\int_{-1}^1 x^2dx & \int_{-1}^1 (x^3+2x^3\sin x)dx & \int_{-1}^1 (x^4+2x^4\sin^2x)dx\\ \int_{-1}^1 (x^3-2x^3\sin x)dx & \int_{-1}^1 x^4dx & \int_{-1}^1 (x^5+2x^5\sin^3x)dx\\ \int_{-1}^1 (x^4-2x^4\sin^2x)dx & \int_{-1}^1 (x^5-2x^5\sin^3x)dx & \int_{-1}^1 x^6dx\end{vmatrix}>\frac{32}{2625}$$

（提示：将原行列式Δ所在的矩阵B拆成一个正定阵A与一个反对称阵S之和：$B=A+S$（注意，应证A是正定阵），于是应用第八章的塔斯基不等式（29）式，得到，$\Delta=|B|=|A+S|>|A|=32/2625$。）

第十一章　线性空间上的线性映射

§1　基本概念与基本结论

本章的基本概念有四个：一是有关映射与变换的概念；二是有关线性映射与线性变换的概念，同构映射的概念；三是线性映射与线性变换的矩阵表示的概念；四是与线性映射及线性变换相联系的线性空间的一些子空间，如像空间与核空间、不变子空间、特征子空间等概念。

一、映射与变换的概念

定义　设S与T是任意两个集合，如果存在某种对应关系，记为σ，使得对S中任一元素s，在T中必存在唯一的元素t与s相对应，则称σ是S**映入**T的（**单值**）**映射**，记为σ：$s\to t$，或$t=\sigma(s)$。称t为s（在σ下）的像，s为t的一个原像．S映入S自身的映射又称为S**上的变换**。

S映入T的映射σ有三种类型：(i) 如果T中任一元素t（在σ下）至少有一个原像s，则称σ是S**映到**T**上的满射**。(ii) 如果S中任意两个不同的元素s_1,s_2在T中的像$\sigma(s_1)$与$\sigma(s_2)$也不同，或者说，如果$\sigma(s_1)=\sigma(s_2)$，就有$s_1=s_2$，$\forall s_1,s_2\in S$，则称σ是S**映入**T的**单射**。(iii) 如果σ既是满射，又是单射，则称σ是S**映到**T**上**的**双射**，或**一一对应**。

二、线性映射与同构映射的概念及基本结论

定义　设σ是数域K上线性空间V映入K上线性空间V'的映射，σ：$\alpha\to\sigma(\alpha)$ $(\in V')$，$\forall\alpha\in V$，如果σ满足：

(i) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$；

(ii) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，$\forall k\in k$，$\forall\alpha\in V$，

则称 σ 是 V 映入 V' 的**线性映射**，或称 σ 为**线性算子**，也称 σ 为 **K-同态**。

特别，当 $V'=V$，则称 σ 是 V 上的**线性变换**，或**K-自同态**。当 $V'=K$，则称 σ 为 V 上的**线性函数**（或**线性泛函**）。

定义 设 σ 是数域 K 上线性空间 V 映入数域 K 上线性空间 V' 的线性映射，如果 σ 是双射，则称 σ 是 V 映到 V' 上的**同构映射**，或称 σ 为 K-**同构**。如果 V 与 V' 间至少存在一个同构映射 σ，则称 V 与 V' 是**同构**的，记为 $V\overset{\sigma}{\cong}V'$，在不易混淆或者并不需要关心 σ 的具体形状的情形下，可简记为 $V\cong V'$。

定义 如果 σ 是欧氏空间 V 映到欧氏空间 V' 上的同构映射，且满足：

$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta),\quad \forall\alpha,\ \beta\in V$$

则称 σ 是 V 映到 V' 上的（**欧氏空间的**）**同构映射**。如果 V 与 V' 间至少存在一个同构映射，则称欧氏空间 V 与 V' 是**同构的**，记为 $V\overset{\sigma}{\cong}V'$（或 $V\cong V'$）。

同构映射的基本结论有下列两个：

定理 1 (i) 数域 K 上的有限维线性空间 V 与 V' 同构的充要条件是，它们的维数相等，(ii) 有限维欧氏空间 V 与 V' 同构的充要条件是，它们的维数相等。

定理 2 (i) 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，取定 V 的一个基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，则映射：

$$\rho_n:\ \alpha\xrightarrow{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'=x\ \ (\text{或 } \rho_n:\ \alpha\longrightarrow x) \tag{1}$$

是同构映射，它使 $V\cong K^{(n)}$. 其中 x 是 α 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标向量，即 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 α 在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标。

(ii) 设 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是 n 维欧氏空间 V 的标准正交基，则映射：

$$\xi_n:\ \alpha\xrightarrow{\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'=x \tag{2}$$

是同构映射，它使 $V\cong R^{(n)}$。其中实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 α 在基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\ \varepsilon_n\}$ 下的坐标。

三、线性映射（或变换）的矩阵表示及其基本结论

设 V 与 V' 分别是数域 K 上的 n 维线性空间与 m 维线性空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与$\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'\}$分别是 V 的基与 V' 的基，σ 是 V 映入V'的线性映射，于是

$$
\begin{aligned}
\sigma(\alpha_1)&=a_{11}\alpha_1'+a_{12}\alpha_2'+\cdots+a_{1m}\alpha_m'\\
\sigma(\alpha_2)&=a_{21}\alpha_1'+a_{22}\alpha_2'+\cdots+a_{2m}\alpha_m'\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\sigma(\alpha_n)&=a_{n1}\alpha_1'+a_{22}\alpha_2'+\cdots+a_{nm}\alpha_m'
\end{aligned}
\tag{3}
$$

记

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}
\tag{4}
$$

定义 称 $m\times n$ 阵 A 为 σ **在（V 的）基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与（$V'$ 的）基$\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'\}$下的矩阵（表示）。**

当 $V'=V$，$m=n$，$\alpha_i'=\alpha_i$；$i=1,2,\cdots,n$，此时（3）式化为：

$$
\sigma(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j;\quad i=1,2,\cdots,n
\tag{5}
$$

称 n 阶阵

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}
$$

为线性变换 σ 在（V 的）基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下的矩阵（表示）。

关于线性映射与线性变换的矩阵的基本结论有如下六个：

定理3 设 σ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 映入 K 上 m 维线性空间 V' 线性映射，A 是 σ 在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与基$\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'\}$下的矩阵。在同构映射（1）的意义下，若

$$
\rho_n:\quad \alpha\xrightarrow{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'=x
\tag{7}
$$

则：

$$
\rho_m:\quad \sigma(\alpha)\xrightarrow{\alpha_1',\ \cdots,\ \alpha_m'}Ax
\tag{8}
$$

特别，当$V'=V$，$m=n$，$\alpha'_i=\alpha_i$；$i=1,2,\cdots,n$，即σ是V上的线性变换，则由

$$\rho_n: \quad \alpha \longrightarrow x \tag{9}$$

必得：

$$\rho_n: \quad \sigma(\alpha) \longrightarrow Ax \tag{10}$$

定理4 设V与V'分别是数域K上的n维线性空间与m维线性空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与$\{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_m\}$分别是$V$的基与$V'$的基，则对$K$上形如（4）式的$m\times n$阵$A$，必存在$V$映入$V'$的唯一的线性映射$\sigma$，使成立（3）式。也即，使$\sigma$在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与基$\{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_m\}$下的矩阵恰好就是这个$A$。

于是，若设$L(V,V')$是n维线性空间V映入m维线性空间V'的线性映射集合，则由（3）式定义的映射：

$$\eta_{(n,m)}: \quad \sigma \longrightarrow A$$

是$L(V,V')$到$m\times n$阵集合$M_{mn}(K)$上的双射。

特别，当$V'=V$，$m=n$，$\alpha'_i=\alpha_i$；$i=1,2,\cdots,n$，则V上线性变换集合$L(V,V)$与K上n阶阵集合$M_n(K)$在由（5）式定义的映射：

$$\eta_{(n)}: \quad \sigma \longrightarrow A$$

下，是一一对应的。

定理5 设σ是n维线性空间V映入m维线性空间V'的线性映射，σ在V的基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与$V'$的基$\{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_m\}$下的矩阵为$m\times n$阵$A$，$\sigma$在$V$的基$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$与$V'$的基$\{\beta'_1,\beta'_2,\cdots,\beta'_m\}$下的矩阵为$m\times n$阵$B$。又设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$到$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$的"过渡矩阵"是$n$阶（非异）阵$P$，即$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ji}\alpha_j$；$i=1,2,\cdots,n$，$P=(p_{ij})_{m\times n}$；$\{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_m\}$到$\{\beta'_1,\beta'_2,\cdots,\beta'_m\}$的过渡矩阵是$m$阶（非异）阵$Q$，则$B=Q^{-1}AP$。换言之，$\sigma$在$V$与$V'$的不同的两对基下的矩阵是**相抵的**。

特别，当$V'=V$，$m=n$，$\alpha'_i=\alpha_i$，$\beta'_i=\beta_i$；$i=1,2,\cdots,n$，则$Q=P$，$B=P^{-1}AP$。故得：

推论 n维线性空间V上线性变换σ在V的不同基下的方阵是

相似的。

在n维欧氏空间中，取定V的一个标准正交基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$，设$V$上线性变换$\sigma$在$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$下的方阵为$n$阶阵$\boldsymbol{A}$，由定理4，对$\boldsymbol{A}$的转置阵$\boldsymbol{A}'$，必存在$V$上的唯一的线性变换，记为$\sigma'$，使$\sigma'$在$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$下的方阵恰好就是$\boldsymbol{A}'$。

定义 称σ'为σ的**共轭变换**，如果$\sigma'=\sigma$，则称σ为**自共轭变换**，或称σ为**对称变换**，如果σ是非异线性变换（即存在线性变换τ，使$\sigma\tau=\tau\sigma=1^*$，$1^*$为单位线性变换。记$\tau=\sigma^{-1}$，易证$\sigma^{-1}$也是线性变换，且非异），若$\sigma^{-1}=\sigma'$，则称$\sigma$为**正交变换**。

定理6 设V是n维欧氏空间，σ'是V上线性变换σ的共轭变换，则

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma'(\beta)),\forall\alpha,\beta\in V \tag{11}$$

反之，如果线性变换τ使

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\tau(\beta)),\ \forall\alpha,\beta\in V$$

则必$\tau=\sigma'$。

定理7 n维欧氏空间V上线性变换σ是自共轭变换的充要条件是下列两条之一成立：

(i) σ在V的任一标准正交基下的方阵是实对称阵。

(ii) $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$，$\forall\alpha,\beta\in V$。

定理8 设σ是n维欧氏空间V上的线性变换，则下列五条等价：

(i) σ是正交变换。

(ii) σ是V映到自身上的（欧氏空间的）同构映射，即σ保持V的任意两个向量的内积不变：$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$。

(iii) σ保持向量的长度不变。

(iV) σ把标准正交基变为标准正交基。

(V) σ在V的任何标准正交基下的方阵为正交阵。

四、线性空间的关于线性映射与线性变换的子空间

线性空间V与V'关于线性映射的子空间将在§4中叙述，线性空间V的关于V上线性变换σ的子空间，最重要的，是下面定义的不

变子空间。

定义 设 W 是数域 K 上线性空间 V 的子空间，σ 是 V 上的线性变换，如果 $\sigma(W)=\{\sigma(w),\ \forall w\in W\}\subseteq W$，则称 W 是 V 的关于 σ 的**不变子空间**，或称 W 为 **σ–不变子空间**

定理 9 如果 W 是 n 维线性空间 V 的非平凡 σ– 不变子空间（即 $0<d(W)<n$），则可"适当"选取 V 的基，也即以 W 的基作为 V 的这个基的一部分基向量，使 σ 在 V 的这个基下的方阵为：

$$M=\begin{array}{c c}& r \\ \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\end{array} \tag{12}$$

其中 r 为 W 的维数。

反之，如果 n 维线性空间 V 上的线性变换 σ 在 V 的某个基下的方阵是形如（12）的分块上三角阵，则 V 必有非平凡的 σ–不变子空间 W，且 W 的维数就是 A 的阶数。

线性空间 V 的另外两个有用的具体的 σ–不变子空间将在 §3 中叙述。

§2 线性映射空间，全线性变换环

本节介绍线性映射集合与线性变换集合的应用。

设 V 与 V' 是数域 K 上的（任意）线性空间，仍以 $L(V,V')$ 表示 V 映入 V' 的线性映射集合。今定义 $L(V,V')$ 的"**加法**"与"**数乘**"如下：

$$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha),\ \forall\alpha\in V,\ \sigma,\tau\in L(V,V') \tag{13}$$

$$(k\sigma)(\alpha)=k\sigma(\alpha),\ \forall\alpha\in V,\ \forall k\in k,\ \sigma\in L(V,V') \tag{14}$$

易证 $\sigma+\tau$ 与 $k\sigma$ 都是 V 映入 V' 的线性映射，进一步还可证明：$L(V,V')$ 的加法满足公理 $(A_1)\sim(A_4)$；数乘满足公理 $(M_1)\sim(M_4)$，故 $L(V,V')$ 关于上述映射的加法与数乘是线性空间，称为**线性映射空间**，称 $L(V,V)$ 为**线性变换空间**，称 $V^*=L(V,K)$ 为 V 的**共轭空间**或**对偶空间**。

定理 10 设 V 与 V' 分别是数域 K 上的 n 维线性空间与 m 维线性空间，$L(V,V')$ 是线性映射空间，$M_{mn}(K)$ 是矩阵空间，则由（3）式定义的 $L(V,V')$ 映到 $M_{mn}(K)$ 上的双射：

$$\eta_{(n,m)}:\quad \sigma \longrightarrow A$$

必使 $L(V,V')$ 同构于 $M_{mn}(K)$，即 $L(V,V')\cong M_{mn}(K)$。

证 易知由(3)式定义的这种映射 $\eta_{(n,m)}$ 必成立：当 $\eta_{(n,m)}:\sigma\to A$，$\eta_{(n,m)}:\ \tau\to B$ 时，恒有：

$$\eta_{(n,m)}:\ \sigma+\tau\to A+B \tag{15}$$

$$\eta_{(n,m)}:\ k\sigma\to kA,\ \forall k\in K \tag{16}$$

所以 $L(V,V')\cong M_{mn}(K)$。

由定理 10 即得 $L(V,V)\cong M_n(K)$，$V^*=L(V,\ K)\cong K_{(n)}$，其中 $K_{(n)}$ 是 K 上 n 维行向量集合对行向量通常的加法与数乘所成的 n 维行向量空间。于是由定理 1 $d(L(V,V))=n^2$，$d(V^*)=n=d(V)$。

设 V 是数域 K 上任一线性空间，$L(V,V)$ 是 V 上线性变换集合，任取 $\sigma,\tau\in L(V,V')$，定义 σ 与 τ 的**“乘积”**：

$$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha)),\ \forall\alpha\in V \tag{17}$$

则易证 $\sigma\tau$ 是 V 上线性变换，且 $L(V,V)$ 关于这个乘法（乘积）与线性变换的加法（见（13）式）满足“结合律”与“分配律”：

$$(\sigma\tau)\rho=\sigma(\tau\rho),\ \forall\sigma,\tau,\rho\in L(V,V).$$

$$(\sigma+\tau)\rho=\sigma\rho+\tau\rho,\ \rho(\sigma+\tau)=\rho\sigma+\rho\tau,\ \forall\sigma,\tau,\rho\in L(V,V).$$

称带有上述加法与乘法（乘积）的线性变换集合 $L(V,V)$ 为 V 上的**全线性变换环。**

称带有矩阵通常的加法与乘法的数域 K 上的 n 阶阵集合，仍以 $M_n(K)$ 记之，为**全矩阵环。**

定理 11 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间，$L(V,V)$ 是(V 上的)全线性变换环，又设 $M_n(K)$ 是全矩阵环，$\eta_{(n)}:\ \sigma\to A$ 是由（5）式定义的 $L(V,V)$ 映到 $M_n(K)$ 上的双射，若 $\eta_{(n)}:\ \tau\to B$，则必

$$\eta_{(n)}:\ \sigma+\tau\to A+B \tag{18}$$

$$\eta_{(n)}:\ \sigma\tau\to AB \tag{19}$$

称这个 $\eta_{(n)}$ 使（n 维空间 V 上的）全线性变换环 $L(V,V)$ 与全矩阵环

$M_n(K)$**同构**，记为 $L(V,V)\cong M_n(K)$。

这个定理的证明是容易的，因为（18）式是（15）式之特例，而（19）式只要由定义（17）式以及（5）式立刻可以推导出来。

定理10与定理11的意义在于，凡只涉及加法、数乘与(变换的)乘法的有限维线性空间的线性映射或线性变换问题以及与之有关的问题，均可"化为"（对应为）矩阵问题，用矩阵的工具予以解决，这就是所谓用线代数的"解析理论"解决线代数的"几何理论"问题。反之，凡属只涉及矩阵的加法、数乘与乘法的有关矩阵问题均可化为有限维线性空间的线性映射或线性变换以及与之有关的问题，用线性映射的一套理论予以解决，这就是所谓用线代数的"几何"理论解决线代数的解析理论问题、即矩阵论的问题。这是个十分重要的思维方法。从这里开始，在本章及下一章中，将寻找各种"手段"，反复运用这一方法去解决线性代数的各类问题。今先举四例于下。

例1 设 V^* 是数域 K 上线性空间 V 的共轭空间（对偶空间），如果 $d(V)=n$，则 $(V^*)^*\cong V$。

证 上面已证：$d(V^*)=d(V)=n$，故 $d((V^*)^*)=d(V^*)=n$，这说明 $(V^*)^*$ 与 V 有相同的维数，故由定理1的充分性知，$(V^*)^*\cong V$。

本例用了定理10得出的推论：$V^*\cong K_{(n)}$，而 n 维行向量空间 $K_{(n)}$ 的维数为 n 是十分明显的。

注意 如果 V 是无限维线性空间，则在由某种方法定义的维数的意义下，$d(V^*)$ 不等于 $d(V)$，所以无限维空间与有限维空间有本质的差别。

例2 设 V^* 是数域 K 上线性空间 V 的对偶空间，则必存在 V^* 的基 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$；V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，使

$$f_i(\alpha_j)=\delta_{ij};\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{20}$$

称 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 与 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 为**对偶基**或**双标准正交基**。

证 取 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 以及 K 的基 $\{1\}$，则对任一 n 维标准单位行向量 e'_i，$i=1,2,\cdots,n$，由定理4，必存在 V 映入 K 的唯一线性函数 f_i，使 f_i 在这对基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$、$\{1\}$ 下的 $1\times n$ 矩阵恰好是 e'_i，也即：

$$f_i: \quad \begin{array}{l} \alpha_1 \to 0 \\ \cdots \\ \alpha_{i-1} \to 0 \\ \alpha_i \to 1 \\ \alpha_{i+1} \to 0 \\ \cdots \\ \alpha_n \to 0 \end{array} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

今分别取 $i=1,2,\cdots,n$，即得 $f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$；$i, j=1,2,\cdots,n$。

再证：$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$是 V^* 的基，由定理 10（取 $m=1$），在同构映射 $\eta_{(n,1)}$：$f\to(a_1,a_2,\cdots,a_n)$下，可得

$$\eta_{(n,1)}: \qquad f_i \to e'_i, \quad i=1,2,\cdots,n$$

故由（15）式与（16）式得到：

$$\eta_{(n,1)}: \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i f_i \to \sum_{i=1}^{n} k_i e'_i,$$

又对零函数 $\mathbf{0}^*$（即$\mathbf{0}^*(\alpha)=\mathbf{0}$，$\forall \alpha\in V$），恒有：

$$\eta_{(n,1)} \qquad \mathbf{0}^* \to \mathbf{0}, \quad (\mathbf{0}\text{是零行向量})$$

今若$\sum\limits_{i=1}^{n} k_i f_i=0$，则由 $\eta_{(n,1)}$ 的单值性知，$\sum\limits_{i=1}^{n} k_i e'_i=\mathbf{0}$，但 $e'_1, e'_2,\cdots,e'_n$ 显然线性无关，故 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，这说明 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关，但 $d(V^*)=n$，故$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$是 V^* 的基。

回顾一下非异(或可逆)变换的定义：对变换 σ，若存在变换 τ，使 $\sigma\tau=\tau\sigma=1^*$，则称 σ 为非异变换，τ 为 σ 的逆变换，且记为：$\tau=\sigma^{-1}$。今若 σ 是数域 K 上线性空间 V 上的非异线性变换，则易证其逆变换 $\tau=\sigma^{-1}$ 也是线性变换。

例 3 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，若存在 V 上线性变换 τ，使 $\sigma\tau=1^*$，则 σ 必是 V 上非异线性变换。

证 只要证：由 $\sigma\tau=1^*$ 可推导出 $\tau\sigma=1^*$ 即可。由定理 11，当双射 $\eta_{(n)}$ 使 $\eta_{(n)}$：$\sigma\to A$，$\eta_{(n)}$：$\tau\to B$ 时，

$$\eta_{(n)}: \quad \sigma\tau \to AB \tag{21}$$

$$\eta_{(n)}: \quad \tau\sigma \to BA \tag{22}$$

又

$$\eta_{(n)}: \quad 1^* \to I_n \tag{23}$$

今由假设，$\sigma\tau=1^*$，而 $\eta_{(n)}$ 是单值映射，但由（21）式与(23)式得：

$AB=I_n$，故由第一章§3例3知，$BA=I_n$，又 $\eta_{(n)}$ 是单射，故由（22）式与（23）式即得 $\tau\sigma=1^*$，即 σ 是非异线性变换。

注意 当 V 是无限维线性空间时，由 $\sigma\tau=1^*$，未必能推出 $\tau\sigma=1^*$，即 σ 未必是非异线性变换。例如：

设 $K[x]$ 是数域 K 上任意次数的多项式集合以及零多项式对多项式通常的加法与数乘所组成的无限维线性空间，对 $K[x]$ 中任一多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，定义 $K[x]$ 上的两个变换：

$$\sigma(f(x))=a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1$$

$$\tau(f(x))=a_nx^{n+1}+a_{n-1}x^n+\cdots+a_2x^3+a_1x^2+a_0x$$

则易证 σ 与 τ 都是 $K[x]$ 上的线性变换，且 $\sigma\tau=1^*$，但 $\tau\sigma\neq1^*$。

例4 证明：对数域 K 上 n 维线性空间 V 上任一线性变换 σ，必存在 K 上次数不大于 n 的多项式 $m(\lambda)$，使

$$m(\sigma)=\sigma^s+a_1\sigma^{s-1}+\cdots+a_{s-1}\sigma+a_s1^*=0^*,\ s\leqslant n \tag{24}$$

证 对双射 $\eta_{(n)}$：$\sigma\to A$，由（16）式与（19）式可得：

$$\eta_{(n)}:\quad a_i\sigma^i\to a_iA^i,\ \forall a_i\in K,\ A_i \tag{25}$$

设 $m(\lambda)=\lambda^s+a_1\lambda^{s-1}+\cdots+a_{s-1}\lambda+a_s$ 是 A 的最小多项式，则 $m(A)=A^{s-1}+a_1A^{s-1}+\cdots+a_{s-1}A+a_sI_n=0$，故由（25）式及（18）式可得

$$\eta_{(n)}:\quad \sigma^s+a_{s-1}\sigma^{s-1}+\cdots+a_{s-1}\sigma+a_s1^*\to A^s+a_1A^{s-1}+\cdots+a_{s-1}A+a_sI_n=0$$

但 $\eta_{(n)}$：$0^*\to0$，故由 $\eta_{(n)}$ 之单射性即知（25）式是正确的。

例1、例2用了定理10，例3用了定理11，而例4同时用了定理10与定理11。

§3 线性变换的一维不变子空间与特征子空间

线性空间 V 的关于 V 上线性变换 σ 的一维不变子空间在不变子空间理论中占有重要位置，关于 σ 的一维不变于空间是否存在的问题，由下列结论予以回答。

定理12 设 σ 是数域 K 上线性空间 V 上的线性变换，则 V 有关

于 σ 的一维不变子空间的充要条件是，存在数 $\lambda\in K$ 以及非零向量 $\alpha\in V$，使得

$$\sigma(\alpha)=\lambda\alpha, \tag{26}$$

此时，$W=L(\alpha)$ 就是 V 的关于 σ 的一维不变子空间。

证 设 W 是 V 的关于 σ 的一维不变子空间，则 $W=L(\alpha)$，$\theta\neq\alpha\in V$。且 $\sigma(\alpha)\in W$，故 $\sigma(\alpha)=\lambda\alpha$。

反之，若存在 $\theta\neq\alpha\in V$，使成立（26）式，则 $W=L(\alpha)$ 是 V 的一维子空间，且任一 $\beta\in W$ 可写成 $\beta=k\alpha$，故 $\sigma(\beta)=k\sigma(\alpha)=k\lambda\alpha\in L(\alpha)$，故 $W=L(\alpha)$ 就是 V 的关于 σ 的不变子空间。

定义 称（26）式的数 $\lambda\in K$ 为线性变换 σ 的**特征值**，称 α 为 σ 的属于 λ 的**特征向量**。

例1 设 $\Omega[a,b]$ 是实闭区间 $[a,b]$ 上任意次可微实值函数按函数通常的加法与数乘所成的实（数域 R 上的）线性空间，试求出 $\Omega[a,b]$ 的关于微分算子 D：$f(x)\to f'(x)$ 的所有一维不变子空间。其中 $f'(x)=\dfrac{d((fx))}{dx}$ 是 $f(x)$ 的一阶导函数。

解 由假设以及定理12，要找 $\lambda\in R$，$0\neq f(x)\in\Omega[a,b]$，使

$$f'(x)=D(f(x))=\lambda f(x). \tag{27}$$

易知，$\lambda=0$ 以及 $f(x)=k$，K 是任一实数，满足(27)式，故 $\lambda=0$ 是 D 的特征值，任一非零实数 k 都是 D 的属于 $\lambda=0$ 的特征向量。故 $\Omega[a,b]$ 的关于 D 的一维不变子空间是 $L(k)=R$，即基域 R 是 $\Omega[a,b]$ 的关于 D 的一个一维不变子空间。

又对任一非零实数 λ，若（27）式成立，则由它可得：

$\dfrac{d(f(x))}{dx}=\lambda f(x)$，两边积分之，即得：$lnf(x)=\lambda x+c$，或者

$$f(x)=e^{\lambda x}e^{c}=ke^{\lambda x} \tag{28}$$

故 $f(x)$ 必须是（28）式的形状。反之，易证形如(28)式的非零 $f(x)$ 满足（27）式，这说明任一非零实数 λ 都是 D 的特征值，而 $ke^{\lambda x}$ 是 D 的属于 λ 的特征向量 $(k\neq0)$，D 的一维不变子空间是 $L(e^{\lambda x})$。

综合上面两点知，$L(e^{\lambda x})$ 是 D 的所有一维不变子空间，其中 λ 是任一实数，它全是 D 的特征值（因而 D 有无限多特征值），D 的属

于λ的特征向量是$ke^{\lambda x}$，$k\neq 0$。

例 2 实线性空间$\Omega[a,b]$没有关于线性变换：

$$I: \quad f(x)\to\int_a^x f(t)dt$$

的一维不变子空间。

证 若存在$\lambda\in R$与$0\neq f(x)\in\Omega[a,b]$，使

$$I(f(x))=\int_a^x f(t)dt=\lambda f(x) \tag{29}$$

则$\lambda\neq 0$（否则，由(29)式知，$f(x)=0$，此为矛盾），在(29)式中，令$x=a$，则$0=\lambda f(a)$，因$\lambda\neq 0$，故$f(a)=0$。今在(29)式两边关于x求导，得到$f(x)=\lambda f'(x)$，或者$f'(x)=\frac{1}{\lambda}f(x)$，由例1知，$f(x)=ke^{\frac{x}{\lambda}}$，$k\neq 0$。于是$0=f(a)=ke^{\frac{1}{\lambda}a}$，但$k\neq 0, e^{\frac{1}{\lambda}a}\neq 0$，此为矛盾，因而这种$\lambda\in R$不存在，这种非零$f(x)$不存在，也即$\Omega[a,b]$没有关于$I$的一维不变子空间。

例1与例2说明，同一线性空间V上的线性变换，有的有V的关于该线性变换的无限多个一维不变子空间，有的则一个也没有，对有的线性变换来说，甚至无法判断它有否一维不变子空间，或者很难判断，要解决这些问题，就要用到其他数学工具，例如“积分方程论”的知识等等。即使对有限维线性空间V来说，也未必都有关于V上任何线性变换的一维不变子空间，下面给出一个充要条件。

定理 13 设数域K上n阶阵A是K上n维线性空间V上线性变换σ在某个基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下的方阵，则数$\lambda_0\in K$是$\sigma$的特征值的充要条件是，$\lambda_0$是$A$（在$K$上）的特征值。

证 由定理2，映射

$$\rho_n: \quad \alpha\to x \tag{30}$$

使$V\cong K^{(n)}$，再由定理2的（10）式可得：

$$\rho_n: \quad \sigma(\alpha)\to Ax \tag{31}$$

由（30）式映射ρ_n的作法，易证：

$$\rho_n: \quad \lambda_0\alpha\to\lambda_0 x \tag{32}$$

由于ρ_n是双射，故由（30）式与（32）式知，$\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$的充要条件是$A\mathbf{x}=\lambda_0\mathbf{x}$，再由定理12就证得了定理13。

由于复方阵必有复特征值，故由定理 13 即得。

推论 n 维复线性空间 V 必有关于 V 上任何线性变换的一维不变子空间。因而，任何复方阵必相似于复上三角阵（参阅第五章定理 6 。）

证 推论中的前半段结论是明显的，今证后半段结论，设 n 阶复阵 A 在 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下所对应的线性变换是 σ，由于 V 恒有关于 σ 的一维不变子空间 $L(\beta_1)$，故 σ 在 V 的基 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 下的方阵 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$，其中 B_1 是 $n-1$ 阶阵。于是由定理 5，存在非异阵 P_1（P_1 是 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 到 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 的过渡矩阵），使 $P_1^{-1}AP_1=B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$，再由归纳法即得推论的后半段结论。

推论的后半段结论给出了用线性变换的理论解决矩阵问题的一个例子。

下面介绍另一个有用的不变子空间，先分析(26)式，如果 $\alpha,\beta\in V$ 都是 σ 的属于 λ 的特征向量，则 $\sigma(\alpha)=\lambda\alpha,\sigma(\beta)=\lambda\beta$，故对任何 $k,l\in K$，恒有：

$$\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta)=\lambda(k\alpha+l\beta)$$

另外，零向量 θ 虽然不是特征向量，但也满足（26）式，这证得了集合：

$$V_\lambda=\{\alpha\,|\,\sigma(\alpha)=\lambda\alpha,\alpha\in V\} \tag{33}$$

是 V 的子空间。称 V_λ 为**特征子空间**，由 V_λ 的定义显然可知，V_λ 是 V 的关于 σ 的不变子空间。

例 3 复数域 C 是有理数域 Q 上的无限维线性空间（因对任何正整数 $n,1,e,\cdots,e^n$ 对 Q 线性无关，参阅第十章§2例 6 ）。求 C 的关于 C 上线性变换 $\sigma:z\to\bar{z}$ 的所有一维不变子空间以及 C 的（关于 σ 的）所有特征子空间。

解 设 $\lambda\in Q$，$0\neq z=a+b\sqrt{-1}$ 满足（26）式，即 $\bar{z}=\lambda z$，也即

$$a-b\sqrt{-1}=\lambda(a+b\sqrt{-1});\ a,b\in R\ （实数域） \tag{34}$$

由 $z\neq 0$ 知，$\lambda\neq 0$，于是由（34）式可以看出，有且只能有下列两种情形：

(i) $\lambda=1$，$b=0$。此时任意非零实数 a 都是 σ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量。$L(a)$ 就是 C 的关于 σ 的一维不变子空间，$\forall\ 0\neq a\in R$。

(ii) $\lambda=-1$，$a=0$。此时，任意非零纯虚数 $b\sqrt{-1}$ 都是 σ 的属于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量，$L(b\sqrt{-1})$ 都是 C 的关于 σ 的一维不变子空间，$\forall 0\neq b\in R$。

于是 C 有且只有两个特征子空间如下：

$$V_1=\{z\mid\bar{z}=z,\ z\in C\}=R$$

$$V_{-1}=\{z\mid\bar{z}=-z,\ z\in C\}=\{b\sqrt{-1},\ \forall b\in R\}$$

它们都是 Q 上的无限维线性空间。

由上例还附带得到：$V_1\cap V_{-1}=0$，$C=V_1+V_{-1}$，故得：$C=V_1\oplus V_{-1}$.

特征子空间的应用将在下一章中介绍。

§4 线性映射的像空间与核空间

本节简略复习一下像空间与核空间的概念，并给出它们在线性方程组理论上的一个应用，其他详细的应用将在下一章中介绍。

设 σ 是数域 K 上线性空间 V 映入 K 上线性空间 V' 的线性映射，记

$$\sigma(V)=\{\sigma(\alpha),\ \forall\alpha\in V\} \tag{35}$$

$$\sigma^{-1}(\theta')=\{\alpha\mid\sigma(\alpha)=\theta',\alpha\in V\} \tag{36}$$

其中 θ' 是 V' 的零向量，**注意**，这里 $\sigma^{-1}(\theta')$ 是个完整的记号，并不是说 σ 是“可逆映射”。

易证：$\sigma(V)$ 是 V' 的子空间，$\sigma^{-1}(\theta')$ 是 V 的子空间，当 $V'=V$（此时 $\theta'=\theta$），$\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(\theta)$ 都是 V 的关于 σ 的不变子空间。

定义 称 $\sigma(V)$ 为线性映射 σ 的**像空间**、或**秩空间**、或值域，称 $\sigma^{-1}(\theta')$ 为 σ 的**核空间**、或**核**。

当 V 与 V' 分别是 n 维线性空间与 m 维线性空间时，有下列重要结论 。

定理 14 设 σ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 映入 K 上 m 维线性空间 V' 的线性映射，则

$$d(\sigma(V))+d(\sigma^{-1}(\theta'))=d(V) \tag{37}$$

当 $V'=V$ 时，在证明定理 14 的过程中还附带得到：

推论 设 σ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 σ 是单射的充要条件是，σ 是满射。换言之，对有限维线性空间 V 上的线性变换来说，单射、满射、双射是一回事。

注意 上面的推论对 $V'\neq V$ 的 V 映入 V' 的线性映射未必成立。例如，$V=M_n(K)$，$V'=K^{(n)}$，任取 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in M_n(K)$，映射 σ：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\to\alpha_1$ 是 $M_{(n)}(K)$ 映入 $K(^n)$ 的线性映射，且 σ 是满射，但 σ 不是单射。

例 1 设 σ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，且 $\sigma(V)=V$，证明：必存在 $g(\sigma)=a_s\sigma^s+a_{s-1}\sigma^{s-1}+\cdots+a_1\sigma+a_0 1^*$，使 $\sigma g(\sigma)=1^*$

证 由假设 $\sigma(V)=V$ 知，σ 是满射，故由推论知，σ 是 V 上的非异线性变换（因双射必有逆）。取 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，则由(19)式，双射 $\eta_{(n)}$：$\sigma^{-1}\to A$ 必使 $\eta_{(n)}$：$\sigma^{-1}\to A^{-1}$，由第五章汉密尔顿—凯莱定理知，$A^{-1}=g(A)$，也即 $Ag(A)=I_n$，但由定理 10 与定理 11，$\eta_{(n)}$：$g(\sigma)\to g(A)$，故得 $\eta_{(n)}$：$\sigma g(\sigma)\to Ag(A)=I_n$，但 $\eta_{(n)}$：$1^*\to I_n$，故 $\sigma g(\sigma)=1^*$。

在第三章中，我们用矩阵的方法得出关于齐次线性方程组存在基础解系的定理。今用线性映射的理论，具体说，就是（37）式来重证这一定理。

由于数域 K 上任一 $m\times n$ 阵 A 可以看作 K 上 n 维列向量空间 $K^{(n)}$ 映入 $K^{(m)}$ 的线性映射：A：$\mathbf{x}\to A\mathbf{x}(\in K^{(m)})$。故对任一 $A\in M_{mn}(K)$，可以分别作出其像空间与核空间如下：

$$W=\{A\mathbf{x},\forall\mathbf{x}\in K^{(n)}\},\quad N=\{\mathbf{x}\mid A\mathbf{x}=0,\mathbf{x}\in K^{(n)}\}$$

称 W 为 A 的**秩空间**，N 为 A 的**解空间**（也是 A 的核空间）。由（37）式可知

$$d(W)+d(N)=d(K^{(n)})=n$$

故得

$$d(N)=n-d(W) \tag{38}$$

设 A 的秩为 r，且 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 A 的 n 个列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大线性无关组($A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$)，则

$$W=\{Ax,\forall x\in K^{(n)}\}=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,{}_{i_r})$$

故 $d(W)=r$，所以由（38）式即得 $d(N)=n-r$。这说明解空间 N 的维数为 $n-r$，任取 N 的一个基$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}\}$，由 N 的定义

$$A\beta_i=0,\ i=1,2,\cdots,n-r$$

且因 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$ 是 N 的一个基，故 N 中任一向量，即 $Ax=0$ 的解向量 β 必是 β_1、β_2，$\cdots$，β_{n-r} 的线性组合，所以 $Ax=0$ 存在基础解系 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}\}$。

事实上，我们可用线性映射的理论建立起整套的线性方程组的理论，请读者仿上想法举一反三地证明之。

习　题

1．设 σ 是数域 K 上线性空间 V 上的线性变换，如果 $\sigma=k1^*$，$k\in K$，则称 σ 为**纯量变换**。证明：当 V 是有限维线性空间时，V 上某一线性变换 σ 是纯量变换的充要条件是，σ 与 V 上任何非异线性变换可交换。即 $\sigma\tau=\tau\sigma$，$\forall\tau\in L(V,V)$。(提示：必要性显然。充分性，先取 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，再应用定理 11 以及“与任何非异阵可交换之阵必为纯量阵”这一结论。)

2．设 σ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，证明：σ 是纯量变换的充要条件是(i)，σ 在 V 的任何基下的方阵全相同。或者，(ii) 存在 $\lambda\in K$，使 $V=V_\lambda$。

(提示：必要性易证。充分性，应用定理 5 的推论及第 1 题的结论。)

3．设 σ 是数域 K 上线性空间 V 上的线性变换，且 σ 有两个不同的特征值 λ_1,λ_2，使$(\sigma-\lambda_1 1^*)(\sigma-\lambda_2 1^*)=0^*$。又设 W 是 V 的关于σ的不变子空间，（于是可）将 σ 看作 W 上的线性变换，记为 σ_W，如果至少有一个 W 上的非异线性变换 τ，使 $\sigma_W\tau\neq\tau\sigma_W$，则 $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}$。(提示：先由假设条件，$\sigma_W\tau\neq\tau\sigma_W$ 以及第 1 题，证明 σ 决不是 V 上的纯量变换，因而 $\sigma\neq\lambda_1 1^*$，$\sigma\neq\lambda_2 1^*$。于是 V 中任一向量 α 可分解为：

$$\alpha=1^*(\alpha)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(-\lambda_2 1^*+\lambda_1 1^*)(\alpha)$$

$$=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\sigma-\lambda_2 1^*)(\alpha)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\sigma-\lambda_1 1^*)(-\alpha)\in V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}$$

又易证：$V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{\theta\}$。)

4．设 $R[x]$是任意次实系数多项式集合以及零多项式对多项式通常的加法与数乘所成的 R 上的无限维线性空间，求 $R[x]$ 关于微分算示 $D: P(x)\to P'(x)$的所有一维不变子空间以及(D 的)特征子空间。

5．有理数域 Q 上的无限维线性空间：复数域 C，求 C 上线性变换 $\sigma: z\to R(z)$的所有一维不变子空间以及（σ 的）特征子空间。

6．证明：有限维线性空间 V 的任一非平凡子空间 N 必可作为 V 上某个线性变换的核空间。

（提示：应用定理 2 、定理 3 以及齐次方程组基础解系的理论：先将 N 的基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r\}$在双射 ρ_n 下对应成 $K^{(n)}$ 的 r 个线性无关向量 x_1, $x_2,\cdots x_r$，再考虑齐次线性方程组：$\begin{pmatrix}x'_1\\ \cdots\\ x'_r\end{pmatrix}x=0$的基础解系$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n-r}$，作 n 阶阵$(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n-r},\ 0,\cdots;0)=B$，设 B 在 V 的基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$下所对应的线性变换为 σ，则 $N=\sigma^{-1}(\theta)$。)

第十二章　线性代数的“几何”理论中的基本方法

§1　六个基本方法简述

以第十、第十一两章中的基本内容作为讨论的范围，在这个前提下，处理有关线性代数“几何”理论的问题所用的基本方法有如下六个：

第一，运用同构的方法。

第二，运用线性包的方法。

第三，运用线性变换（或线性映射）的各种特殊子空间的方法，

第四，运用正交化的方法。

第五，运用空间分解为子空间的直接和、特别是分解为某个线性变换的不变子空间的直接和的方法。

第六，选取适当基的方法（在欧氏空间中，则是选取正交基的方法）。

关于第五个方法，在第十章§3中已可略窥其一、二，在那一节的第二段里，我们将无限维欧氏空间分解为它的某个有限维子空间与其正交补空间的直接和，从而解决了某些应用问题与理论问题。对有限维线性空间 V 来说，将 V 分解为一些子空间的直接和，或者分解为关于某一线性变换的不变子空间的直接和，其主要目的是为了解决方阵的标准形问题，例如，在第十章§3例1中，我们证得：数域 K 上 n 维列向量空间 $K^{(n)}$ 必有分解式：

$$K^{(n)}=W\oplus N \tag{1}$$

其中，$W=\{Ax,\forall x\in K^{(n)}\}$，$N=\{x\mid Ax=0,x\in K^{(n)}\}$，而 A 是幂等阵。如果将 n 阶阵 A 看作 $K^{(n)}$ 上的线性变换，则 W 与 N 分别是 $K^{(n)}$ 的

关于$\mathbf{A}$的像空间（它是不变子空间）与核空间（它也是不变子空间）。（注意，一般n维线性空间V上的线性变换的像空间与核空间未必恰好是V关于这两个子空间的直和分解，它们间仅能有维数关系式；即第十一章中的（37)式）。由于方阵A可以写成：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(a_{ij})_{n\times n}$，其中$\alpha_i$是$A$的第$i$列，$\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})'$。又因

$$
\begin{aligned}
&A\mathbf{e}_1=\alpha_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\cdots+a_{n1}e_n\\
&A\mathbf{e}_2=\alpha_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{n2}e_n\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&A\mathbf{e}_n=\alpha_n=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\cdots+a_{nn}e_n
\end{aligned}
$$

故n阶阵A恰好是$K^{(n)}$上线性变换$\mathbf{A}$在$K^{(n)}$的基$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$（它们都是标准单位向量）下的方阵，今由分解式(1)，取W的基$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$与$N$的基$\{\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$，则由$W$与$N$的定义知，$\beta_i=\mathbf{A}\delta_i$，$\delta_i\in K^{(n)}$；$i=1,2,\cdots,r$以及$\mathbf{A}\beta_j=0$；$j=r+1,\cdots,n$。对线性变换$\mathbf{A}$来说，可得下列各式：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\beta_1=\mathbf{A}(\mathbf{A}\delta_1)=\mathbf{A}\delta_1=\beta_1\ \ (\text{因 } \mathbf{A}^2=\mathbf{A})\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\mathbf{A}\beta_r=\mathbf{A}(\mathbf{A}\delta_r)=\mathbf{A}\delta_r=\beta_r\\
&\mathbf{A}\beta_{r+1}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\mathbf{A}\beta_n=0
\end{aligned}
$$

故线性变换$\mathbf{A}$在$K^{(n)}$的基$\{\beta_1,\beta_2,\cdots;\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$下的方阵$B$是：$B=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$，故由第十一章定理5的推论，线性变换$\mathbf{A}$在$K^{(n)}$的不同基$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$下的方阵$A$与$B$应相似：

$$
P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\tag{2}
$$

（参阅第四章§1例1，在那里，用纯矩阵方法证出（2）式。）其中P是基$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$到基$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$的过渡阵，也即$P=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，故只要找出$W$的一个基与$N$的一个基，并将它们的基向量排成$n$阶阵$P$，就使（2）式成立。这个例子告诉我们如何用线性变换的理论

求任一方阵 A 的标准形的具体过程：

第一步，取 n 维线性空间 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，对 n 阶阵 A，由这个基可得唯一的一个线性变换 σ，(对上例来说，$\alpha_i=e_i$；$i=1,2,\cdots,n$，$\sigma=A$)。

第二步，设法将 V 分解为 V 的关于 σ 的有限个非平凡不变子空间的直接和[注]：

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s \tag{3}$$

其中 $V_1,\cdots,V_s$ 对 σ 不变，(对上例来说，$s=2$，即(1)式)，取 V_i 的基：$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}$；$i=1,2,\cdots,s$，(于是 $\sum\limits_{i=1}^{s}n_i=n$)，则 σ 在 V 的基 $\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n_1},\cdots,\alpha_{s1},\alpha_{s2},\cdots,\alpha_{sn_s}$ 下的矩阵就是下列分块对角阵：

$$B=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 n_i 阶阵：$i=1,2,\cdots,s$（见十一章定理9）。设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{sn_s}$ 的过渡矩阵为 P，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix} \tag{4}$$

不言而喻，s 愈大，即 V_i 的维数愈小，则（4）的每个 A_i 的阶数愈小（像上例的幂等阵 A，$K^{(n)}$ 实际上可分解为 n 个一维不变子空间的直和，即比（1）式分解得更细。）

以上两步就是所谓用线性变换的理论解决方阵的标准形问题的思维方法与具体过程。由于我们已用解析方法（即矩阵方法）更快地解决了方阵的标准形问题，故不再展开对这一方法的详细讨论。不过，这个思维方法还是需要掌握的。

[注] 有限个子空间的直接和的定义见第十章习题第5题。

这里提请读者特别注意，切不可认为线性变换的理论(更有甚者，认为线性代数的“几何”理论)就是为了解决方阵的标准形问题，这样理解是不全面的。因为，这一点虽然是第二部分的一个重点，但只是一个方面，本部分抽象概念的引进正是为了：由它既可以解决包括方阵标准形在内的代数问题，也可用它解决某些分析问题与几何问题。

关于第六个方法，即选取适当基的方法，在第十章§3、§4以及第十一章已多次运用过，事实上，运用第五个方法时，就是要选取适当的使方阵具有最简单形状的基。这个方法经常贯穿在其他方法的运用过程中，故这里仅提出这一想法，而不再作详细之讨论。

以下将分四节叙述其他四个方法。

§2 运用同构的方法

第十一章的定理1与定理2、定理10、定理11给出三种同构映射，本节将进一步说明它的应用。

定理1指出，在同构映射ρ_n：$\alpha\to(x_1,\cdots,x_n)'=x$下，数域$K$上$n$维线性空间$V$与$K$上$n$维列向量空间$K^{(n)}$同构，即$V\cong K^{(n)}$。其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$\alpha$在$V$的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$下的坐标，即$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$。既然$n$维抽象空间$V$同构于具体的$n$维列向量空间，因此容易设想，$K^{(n)}$有什么结论（只涉及加法与数乘两种运算），在$V$中也应有相同的结论。不仅如此，$V$中的结论还可用这个同构映射$\rho_n$予以证明，下面例2、3便是，在举例之前，先提一下以下常要用到的命题1。

命题1 设P是数域K上线性空间V映到K上线性空间V'的同构映射，则V中向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关的充要条件是，它们的像向量$\rho(\alpha_1)=\alpha_1',\cdots,\rho(\alpha_n)=\alpha_n'$线性无关。

证明是容易的，请读者自己完成之。

例1 数域K上n维线性空间V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵$P$必是非异阵，试证之。

证 这几乎是显然的。因由假设：

$$\beta_i=p_{1i}\alpha_1+p_{2i}\alpha_2+\cdots+p_{ni}\alpha_n;\quad i=1,2,\cdots,n$$

故在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下，同构映射 ρ_n 使得

$$\rho_n:\quad \beta_i\to(p_{1i},p_{2i},\cdots,p_{ni})'=p_i;\ \ i=1,2,\cdots,n$$

因 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关，故由命题1，n 个列向量 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 也线性无关，所以 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是非异阵。

例 2 证明：对数域 K 上 n 维线性空间 V 中任意 r 个线性无关向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，$1\leqslant r<n$，必存在 V 的另外 $n-r$ 个向量 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$，使 $\{\beta_1,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$ 构成 V 的一个基。

证 在 V 映到 $K^{(n)}$ 上的同构映射 ρ_n：$\alpha\to\mathbf{x}$ 下，设

$$\rho_n:\quad \beta_i\to\mathbf{x}_i;\ \ i=1,2,\cdots,r$$

因为 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关，故由命题1，$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_r$ 也线性无关，于是由第四章定理1，存在另外 $n-r$ 个 n 维列向量 $\mathbf{x}_{r+1},\cdots,\mathbf{x}_n$，使 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_r,\mathbf{x}_{r+1},\cdots,\mathbf{x}_n$ 线性无关。设 $\mathbf{x}_{r+1},\cdots,\mathbf{x}_n$ 在 ρ_n 下的原像是 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n$ 在 ρ_n 下的原像，再由命题1，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关，故 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 即为所求之向量，使 $\{\beta_1,\cdots\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n\}$ 构成 V 的一个基。

例1、例2都是直接应用 V 与 $K^{(n)}$ 的同构映射 ρ_n，下面要与 V 上线性变换相联系，进一步运用这个 ρ_n，也就是要联合运用第十一章的定理1与定理2，这在该章定理13的证明中已用过一次了，今再举一例。

例 3 证明：n 维欧氏空间 V 上的自共轭变换 σ 必有 n 个标准正交的特征向量，并且 σ 的特征值全是实数。

证 取 V 的标准正交基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n\}$，则由第十一章定理7，$\sigma$ 在这个基下的方阵 A 必是实对称阵。故存在 n 阶正交阵 Q，使

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\tag{5}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，将 Q 按它的列分块：$Q=(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_n)$，则因 Q 是正交阵，故 $(\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j)=\delta_{ij}$；$i,j=1,2,\cdots,n$，并且（5）式可化为

$$(Aq_1, A\mathbf{q}_2, \cdots, A\mathbf{q}_n) = (\lambda_1\mathbf{q}_1, \lambda_2\mathbf{q}_2, \cdots, \lambda_n\mathbf{q}_n)$$

故得

$$A\mathbf{q}_i = \lambda_i\mathbf{q}_i; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

又在基$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$下，由定理1与2，$\zeta_n$：$\alpha \to x$ 使 V 与 R 上 n 维列向量欧氏空间 $R^{(n)}$（内积是：$(x, y) = x'y, \forall x, y \in R^{(n)}$）同构，故得

$$\zeta_n: \quad \alpha_i \to \mathbf{q}_i; \quad i = 1, 2, \cdots n$$

$$\zeta_n: \quad \sigma(\alpha_i) \to A\mathbf{q}_i; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

其中 α_i 是 $\mathbf{q}_i$ 在 ζ_n 下的原像，又显然可得：

$$\zeta_n: \quad \lambda_i\alpha_i \to \lambda_i\mathbf{q}_i; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

因为 ζ_n 是双射，故由（6）、（7）与（8）式可得

$$\sigma(\alpha_i) = \lambda_i\alpha_i; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

且因 ζ_n 是使 V 同构于 $R^{(n)}$ 的欧氏空间的同构，故得

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \delta_{ij}; \quad i, \ j = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

(9) 与(10)说明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 σ 的特征向量，且它们标准正交，而 λ_i 是 σ 的实特征值。

例 3 是用线性代数的解析理论（即矩阵论）中关于实对称阵的具体结论来推导抽象的 n 维欧氏空间上的自共轭变换的一般结论的，这样做的好处在于，这个一般结论不仅可用于代数上，且可用于某些分析问题以及几何问题上，请看下例：

***例 4** 未知连续函数$p(x)$在积分号里面的如下方程：

$$2x\int_a^b p(x)dx = \lambda p(x) \tag{11}$$

称为**"线性积分方程"**。设 $R_n[x]$是次数不超过 n 的实系数多项式集合以及零多项式对多项式通常的加法与数乘所成的 R 上的线性空间，今定义内积：$(p, q) = \int_n^b p(x)q(x)dx, \forall p(x), q(x) \in R_n[x]$，则 $R_n[x]$ 是一欧氏空间。证明：线性积分方程（11）在 $R_n(x)$中有$n+1$个非零解：$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_{n+1}(x)$，使它们构成$R_n[x]$的一个标准正交基，并且 λ 必是实数。

证 任取$f(x) \in R_n[x]$，记

$$\sigma(f)=2x\int_a^b yf(y)dy=\int_a^b (xy+yx)f(y)dy$$

则易证 σ 是 $R_n[x]$ 上的线性变换。今证 σ 是自共轭变换，因为

$$(\sigma(p),q)=\int_a^b \left(\int_a^b (xy+yx)p(y)dy\right)q(x)dx$$

$$=\int_a^b \int_a^b (xy+yx)p(y)q(x)dydx$$

$$=\int_a^b \int_a^b (xy+yx)p(x)q(y)dxdy$$

$$(p,\sigma(q))=\int_a^b p(x)\left(\int_a^b (xy+yx)q(y)dy\right)dx$$

$$=\int_a^b \int_a^b (xy+yx)p(x)q(y)dxdy$$

所以 $(\sigma(p),q)=(p,\sigma(q))$，$\forall p(x),q(x)\in R_n[x]$，于是由第十一章定理 7 知，$\sigma$ 确是 $R_n[x]$ 上的自共轭变换。于是由例 3，σ 存在 $n+1$ 个实特征值λ_i 以及特征向量 $p_1(x),p_2(x),\cdots p_{n+1}(x)$，使 $\sigma(p_i)=\lambda_i p_i$ 也即：

$$2x\int_a^b yp_i(y)dy=\lambda_i p_i(x);\quad i=1,2,\cdots,n+1$$

并且

$$\int_a^b p_i(x)p_j(x)dx=(p_i,p_j)=\delta_{ij};\quad i,j=1,2,\cdots n+1$$

这证明了例 3 要证之结论。

不难看出，线性积分方程 $2x\int_a^b yp(y)dy=\lambda p(x)$ 一定有一个非零实特征值是：$\lambda_1=2\int_a^b y^2dy=\frac{2}{3}(b^3-a^3)$，而属于 λ_1 的特征向量是：$p_1(x)=kx$，$k\neq 0$。而其他 n 个特征值全是零。

由例 3 与例 4 可见，先用线性代数解析理论中的具体结论推导出线性代数“几何”理论中的一般性结论，再由这个“抽象”的一般性结论，去得出代数、几何、分析等方面的其他一些具体结论，乃是有用的想法。由此也可体会到抽象结论的重要性。

关于线性映射空间与矩阵空间的同构以及全线性变换环与全矩阵环的同构的运用，已在第十一章§2中讨论过，今再举一个联合运用这

两个同构映射的例子。

例 5 设 $L(V,V)$ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换空间，证明 $L(V,V)$ 必有下列直和分解：

$$L(V,V)=L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_n \tag{12}$$

其中 L_i 都是 $L(V,V)$ 的子空间；$i=1,2,\cdots,n$。并且，L_i 中必存在向量 ε_i，使 L_i 中任一向量 σ_i 必可表成：

$$\sigma_i=\sigma\varepsilon_i\ ;\ i=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

其中 σ 是 $L(V,V)$ 中某一向量（注意，$\sigma,\sigma_i,\varepsilon_i$ 都是 V 上的线性变换；$i=1,2,\cdots,n$）

证 取 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，设 $\eta_{(n)}:\sigma\to A$ 使 $L(V,V)$ 同构于 $M_n(K)$ 将 A 按它的列分块：$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，作 n 阶阵集合：

$M_n^{(i)}(K)=\{(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0),\ \forall\boldsymbol{\alpha}_i\in K^{(n)}\}$；$i=1,2,\cdots,n$.

则易证 $M_n^{(i)}(K)$ 是 $M_n(K)$ 的子空间，且由于 $d(M_n^{(i)}(K))=n$；$i=1,2,\cdots,n$，故得

$$M_n(K)=M_n^{(1)}(K)\oplus M_n^{(2)}(K)\oplus\cdots\oplus M_n^{(n)}(K)$$

（参阅第十章习题第 5 题。）又设 $(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0)$ 在 $\eta_{(n)}$ 下的原像是 σ_i，即

$$\eta_{(n)}:\ \sigma_i\to(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0);\ i=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

作集合：$L_i=\{\sigma_i\,|\,\eta_{(n)}:\ \sigma_i\to(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0),\forall\boldsymbol{\alpha}_i\in K^{(n)}\}$，则 L_i 是 $M_n^{(i)}(K)$ 的原像集合，$i=1,2,\cdots,n$. 若

$$\eta_{(n)}:\tau_i\longrightarrow(0,\cdots,0,\boldsymbol{\beta}_i,0,\cdots,0)$$

则

$$\eta_{(n)}:\sigma_i+\tau_i\to(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i,0,\cdots,0)=(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0)+(0,\cdots,0,\boldsymbol{\beta}_i,0,\cdots,0),$$

$$\eta_{(n)}:\qquad k\sigma_i\to(0,\cdots,0,k\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0)=k(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0)$$

故 L_i 是 $L(V,V)$ 的子空间，且 $L_i\cong M_n^{(i)}(K)$。又对任一 $\sigma\in L(V,V)$，

$$\eta_{(n)}:\sigma\to A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\sum_{i=1}^{n}(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0)$$

但由 (14) 式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\to\sum_{i=1}^{n}(0,\cdots,0,\boldsymbol{\alpha}_i,0,\cdots,0),$$

故由 $\eta_{(n)}$ 的单射性知：$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$，所以

$$L(V,V)=L_1+L_2+\cdots+L_n \tag{15}$$

又由 $d(L_i)=d(M_n^{(i)}(K))=n$；$i=1,2,\cdots,n$，而 $d(L(V,V))=n^2$，故得：$d(L(V,V))=\sum_{i=1}^{n}d(L_i)$，于是（15）式的和是直接和，这证明了（12）式。又记

$$E_{ii}=(0,\cdots,0,e_i^i,0,\cdots,0);\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中 e_i 为 n 维标准单位列向量。设 E_{ii} 在 $\eta_{(n)}$ 下的原像为 ε_i，则

$$\eta_{(n)}:\quad e_i\to E_{ii};\quad i=1,2,\cdots,n$$

故由定理 11 得到

$$\eta_{(n)}:\ \sigma\varepsilon_i\to AE_{ii}=(0,\cdots0,\alpha_i,0,\cdots,0)$$

再由（14）式以及 $\eta_{(n)}$ 的单射性知，$\sigma_i=\sigma\varepsilon_i$；$i=1,2,\cdots,n$。

§3 运用线性包的方法

第十、十一两章中不少结论的证明几乎经常用到向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的线性包 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，线性包之所以成为不可少的工具，其原因无非是：一、有限维线性空间的任何子空间都可表为某些向量的线性包；二、线性空间（不论有限维还是无限维）中只涉及有限个向量的问题可归结为这些向量生成的“最小”子空间（即它们的线性包）进行讨论。例如，在证明格兰姆矩阵的半正定性时，就是将无限维欧氏空间的有限个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 归结为它们的线性包 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$进行讨论的；而 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$是有限维欧氏子空间，于是可用有限维空间的一套理论去解决（见第十章§4。）又如在第十章§3中我们还用了与上述相同的方法解决了最小平方偏差问题中的一个理论问题与一个应用问题。所以，线性包的定义及有关结论虽然是简单的，然而其本身却是不可少的“过渡”工具。特别地，当与同构等方法联合运用时，就更能显示它的作用，如下面两例所示。

例 1 设 α 与 β 是欧氏空间 V 中任意两个向量，试用欧氏空间同构的观点证明柯希—布涅雅可夫斯基不等式：

$$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta) \tag{16}$$

证 如果α与β线性相关，则等式（16）显然成立，故可设α与β线性无关，作线性包$L(\alpha,\beta)$，则$L(\alpha,\beta)$是V的2维欧氏子空间，由第十一章定理1，$L(\alpha,\beta)$应同构于通常的2维几何空间，设使得这两个欧氏空间同构的同构映射是$\zeta_{(2)}$，且$\zeta_{(2)}$：$\alpha\to\mathbf{x}$，ζ_2：$\beta\to\mathbf{y}$，故得

$$(\alpha,\beta)=(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ (\alpha,\alpha)=(\mathbf{x},\mathbf{x}),\ (\beta,\beta)=(\mathbf{y},\mathbf{y}) \tag{17}$$

但在2维几何空间中，自然成立不等式：$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2<(\mathbf{x},\mathbf{x})\ (\mathbf{y},\mathbf{y})$，以(17)诸式代入即得：$(\alpha,\beta)^2<(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$。故对任何$\alpha,\beta$，成立(16)式。

按照上例的证明思路，对无限维欧氏空间V中任意三个向量α，β，γ．欧氏子空间$L(\alpha,\beta,\gamma)$必同构于通常的3维几何空间或其子空间，因此，通常3维几何空间的三个向量有那些几何结论，相应地对$L(\alpha,\beta,\gamma)$中向量α,β,γ也应有这些结论。根据这一（欧氏空间的）同构观点，对带有内积：$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$的欧氏空间$R[a,b]$，下列不等式就是显然的了：

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx}\leqslant\sqrt{\int_a^b f(x)^2dx}+\sqrt{\int_a^b g(x)^2\,dx}$$

$$\forall f(x),g(x)\in R[a,b]。$$

这是因为，三角形的两边之和恒大于等于第三边。

例2 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是数域$K$上$m$维线性空间$V$的基，$A=(a_{ij})_{m\times n}$是$K$上$m\times n$阵，又

$$\begin{aligned}\beta_1&=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{m1}\alpha_m\\ \beta_2&=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{m2}\alpha_m\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n&=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_m\end{aligned} \tag{18}$$

证明：

$$d(L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n))=r(A) \tag{19}$$

证 因为同构映射ρ_m：$\alpha\to x$使$V\cong\mathrm{K}^{(m)}$，由（18）式可得：

$$\rho_m:\beta_i\to(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})'=\mathbf{x}_i;\ \ i=1,2,\cdots n$$

设$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$是$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的极大线性无关组，则由命题1，易

知 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r}$ 也是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的极大线性无关组。即 A 的列向量组的极大线性无关组，故得 $r(A)=r$。又由第十章定理 7 知，线性包 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 的维数应是 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 的个数 r，故(19)式是正确的。

下面是一个直接运用线性包之例。

例 3 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是数域 K 上线性空间 V 的任意 s 个非平凡子空间，则当 V 是无限维线性空间时，V 中必有无限多个线性无关的向量，它们全不在这 s 个空间中；当 V 是 n 维线性空间时，必存在 V 的一个基，使这个基的 n 个基向量全不在 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中。

（注，本例之几何意义是明确的，以过原点的平面 V 为例，它是 2 维线性空间，而平面上过原点的任意有限 s 条直线 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是 V 的非平凡子空间，十分明显，平面上必有无限多个点全不在这 S 条直线上，且其中有两个点是“线性无关”的。）

证 若能证明：“对任何 s，恒有 $\delta\in V$，使 $\delta\overline{\in}V_1$，$\delta\overline{\in}V_2,\cdots$，$\delta\overline{\in}V_s$”（称为结论 I），则即可证得例 3 的结论，因为由结论 I，存在 $0\neq\alpha_1\in V$，使 $\alpha_1\overline{\in}V_1$，$\alpha_1\overline{\in}V_2$，$\cdots$，$\alpha_1\overline{\in}V_s$，再考虑 V 的非平凡子空间：$V_1,V_2,\cdots,V_s,L(\alpha_1)$，再由结论 I 知，存在 $\alpha_2\in V$，使 $\alpha_2\overline{\in}V_1$，$\alpha_2\overline{\in}V_2,\cdots,\alpha_2\overline{\in}V_s$，$\alpha_2\overline{\in}L(\alpha_1)$，而由 $\alpha_2\overline{\in}L(\alpha_1)$ 即可知 α_1 与 α_2 线性无关，于是，必存在 $\alpha_3\in V$，使 $\alpha_3\overline{\in}V_1$，$\alpha_3\overline{\in}V_2,\cdots,\alpha_3\overline{\in}V_s,\alpha_3\overline{\in}L(\alpha_1,\alpha_2)$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。因若它们线性相关，而 α_1,α_2 是无关的，故 α_3 必是 α_1,α_2 的线性组合，此与 $\alpha_3\overline{\in}L(\alpha_1,\alpha_2)$ 相矛盾，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 全不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 设经过上述证法 $n-1$ 次后，得到 V 的线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$，使它们全不在 $V_1,V_2,\cdots$，V_s 中，于是再由结论 I，存在 $\alpha_n\in V$，使 $\alpha_n\overline{\in}V_1,\cdots,\alpha_n\overline{\in}V_s,\alpha_n\overline{\in}L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。当 V 是 n 维空间时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是 V 的基，它们全不在 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中；当 V 是无限维空间时，由于对任意 n，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均线性无关，且它们全不在 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中，所以这种 α_i 有无限多个，故下面只要证结论 I 即可。

对 s 用归纳法：当 $s=2$ 时，如果 $V_1\subset V_2$，则因 V_2 是 V 的非平凡子空间，故必存在 $\alpha\in V$，但 $\alpha\overline{\in}V_2$，自然也有 $\alpha\overline{\in}V_1$（否则 $\alpha\in V_1\subset V_2$ 了。）同理，当 $V_2\subset V_1$ 时，结论 I 也正确。又当 $V_1\not\subset V_2,V_2\not\subset V_1$ 时，则

必存在：$\alpha_1\in V_1$，但$\alpha_1\overline{\in}V_2$；$\alpha_2\in V_2$，但$\alpha_2\overline{\in}V_1$，故取$\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V$，则$\alpha\overline{\in}V_1$，因若$\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V_1$，则$\alpha_2=(\alpha_1+\alpha_2)-\alpha_1\in V_1$，此与$\alpha_2$的取法相矛盾，故$\alpha\overline{\in}V_1$，同理可证$\alpha\overline{\in}V_2$，故结论$I$当$s=2$时成立。设结论$I$对$s-1$也正确．即存在$\delta\in V$，使

$$\delta\overline{\in}V_1,\ \delta\overline{\in}V_2,\ \cdots,\ \delta\overline{\in}V_{s-1} \tag{20}$$

此时，如果$\delta\overline{\in}V_s$，则结论I已证得。如果

$$\delta\in V_s \tag{21}$$

则因V_s是非平凡子空间，故必存在$\beta\in V$，但$\beta\overline{\in}V_s$，所以

$$k\beta\overline{\in}V_s,\ \forall 0\neq k\in K \tag{22}$$

由（22）与（21）即得：

$$\delta+k\beta\overline{\in}V_s,\ \forall 0\neq k\in K \tag{23}$$

今考察β是否属于$V_1,V_2,\cdots,V_{s-1}$?

(i)如果$\beta\in V_i$；$i=1,2,\cdots,s-1$，则

$$k\beta\in V_1,k\beta\in V_2,\cdots,k\beta\in V_{s-1},\ \forall 0\neq k\in K, \tag{24}$$

于是由（24）与（20）即得

$$\delta+k\beta\overline{\in}V_1,\delta+k\beta\overline{\in}V_2,\cdots,\delta+k\beta\overline{\in}V_{s-1},\ \forall 0\neq k\in K, \tag{25}$$

故只要取$\alpha=\delta+k\beta$，由（23）与（25）便知结论I正确。

(ii) 如果$\beta\in$某些V_j，例如，设$\beta\overline{\in}V_{j_1},V_{j_2},\cdots,V_{j_t}$；$1\leqslant j_p\leqslant s-1$，$p=1,2,\cdots,t$。则可断定，对$V_{j_p}$来说，$K$中最多只有一个数$k$（或者一个也没有）使$\delta+k\beta\in V_{j_p}$，因若

$$\delta+k_1\beta\in V_{j_p},\ \delta+k_2\beta\in V_{j_p},\ k_1\neq k_2$$

则因V_{j_p}是子空间，故由上式可得$(k_1-k_2)\beta\in V_{j_p}$，但$k_1-k_2\neq o$，故得$\beta\in V_{j_p}$，这与假设$\beta\overline{\in}V_{j_p}$相矛盾，故最多只有一个$k$，使$\delta+k\beta\in V_{j_p}$，对$V_{j_1},V_{j_2},\cdots V_{j_t}$来说，最多只有$t$个$k_p\in K$，使

$$\delta+kp\beta\in V_{j_p};\ p=1,2,\cdots,t,$$

但数域K有无限多个数，故除去这t个数，或充其量除去S个数，必有数$k_0\in k$（事实上，这种k_0有无限多个），使

$$\delta+k_0\beta\overline{\in}V_{j_1},\delta+k_0\beta\overline{\in}V_{j_2},\cdots,\delta+k_0\beta\in V_{j_t} \tag{26}$$

而对$\beta\in V_i$的这些V_i来说，仿(i)的证明，可得

$$\delta+k_0\beta\overline{\in}V_i;\ i\neq j_1,j_2,\cdots,j_t 1,_t\leqslant is-1 \tag{27}$$

合并（26）与（27）知，$\alpha=\delta+k_0\beta\in V$ 必使

$$\overline{\alpha\in}V_1, \overline{\alpha\in}V_2, \cdots, \overline{\alpha\in}V_s$$

这证明了结论 I。

§4 运用各种特殊子空间的方法

本节方法是涉及面较广（指应用的涉及面）、用得较多、解决问题较深入的一种方法。此法主要用于解决有限维线性空间中的某些问题，解决问题的途径是，用线性变换（或线性映射）的某些子空间（如像空间与核空间）、特征子空间以及其他不变子空间等以及与这些相联系的结论作为“过渡”工具，以达到解决问题的目的，其中以像空间与核空间用得最多。在运用像空间与核空间“过渡”时，常要用维数公式：

$$d(\sigma(V))+d(\sigma^{-1}(\theta'))=d(V) \tag{28}$$

（见第十一章§4中的（37）式），还要用到下列命题。

命题2 设 σ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 映入 K 上 m 维线性空间 V' 的线性映射，σ 在 V 的基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$与 V' 的基$\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'\}$下的矩阵为 $m\times n$ 阵 A，则

$$d(\sigma(V))=r(A) \tag{29}$$

证 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，可得

$$\sigma(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\alpha'_j;\ i=1,2,\cdots,n$$

故由§3例2的（18）式与（19）式知，

$$d(L(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)))=r(A) \tag{30}$$

但 $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，故易知 $\sigma(V)=L(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n))$，由此式及（30）式即得（29）式。

由命题2，矩阵的求秩问题化为求像空间的维数问题。反之，求像空间的维数问题也可化为矩阵的求秩问题。从而可充分运用秩的一套理论解决问题，下面先举两个运用像空间与核空间的例子。

例1 设 σ 与 τ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，θ 是

V 的零向量。

(i) 证明成立下式：

$$d((\sigma\tau)^{-1}(\theta))\leqslant d(\sigma^{-1}(\theta))+d(\tau^{-1}(\theta)), \tag{31}$$

(ii) 如果 $\sigma=f(\rho)=a_s\rho^s+\cdots+a_1\rho+a_0 1^*$，$\tau=g(\rho)=b_t\rho^t+\cdots+b_1\rho+b_0 1^*$，其中 ρ 是 V 上线性变换，$f(x)$，$g(x)$是数域 K 上多项式，并且 $f(x)$与$g(x)$互素，则

$$(\sigma\tau)^{-1}(\theta)=\sigma^{-1}(\theta)\oplus\tau^{-1}(\theta) \tag{32}$$

因此在 (ii) 的假设条件下，(31) 式的等号成立。

证 先证(i)，设 σ 与 τ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的方阵分别是 A 与 B，则由 (29) 式，$d(\sigma(V))=r(A)$，$d(\tau(V))=r(B)$，且由(29)式与第十一章定理 11 知，$d(\sigma\tau(V))=r(AB)$。由西尔维斯脱不等式（第四章定理 4 中的（7）式）：$r(AB)\geqslant r(A)+r(B)-n$ 可得

$$d(\sigma\tau(V))\geqslant d(\sigma(V))+d(\tau(V))-n$$

由上式及维数公式 (28) 式可得

$$n-d((\sigma\tau)^{-1}(\theta))\geqslant n-d(\sigma^{-1}(\theta))-d(\tau^{-1}(\theta)),$$

上不等式经整理后即得 (31) 式。

再证 (ii)，因为 $f(\rho)g(\rho)=g(\rho)f(\rho)$，故 $\sigma\tau=\tau\sigma$。今对任一 $\beta\in\sigma^{-1}(\theta)$，则 $\sigma(\beta)=\theta$，又由于 τ 是线性变换，故 $\tau(\theta)=\theta$，于是

$$(\sigma\tau)(\beta)=(\tau\sigma)(\beta)=\tau(\sigma(\beta))=\tau(\theta)=\theta$$

这说明 $\beta\in(\sigma\tau)^{-1}(\theta)$，故 $\sigma^{-1}(\theta)$ 是$(\sigma\tau)^{-1}(\theta)$ 的子空间。同理可证 $\tau^{-1}(\theta)$也是$(\sigma\tau)^{-1}(\theta)$的子空间，所以

$$(\sigma\tau)^{-1}(\theta)\supseteq\sigma^{-1}(\theta)+\tau^{-1}(\theta)。 \tag{33}$$

另一方面，由假设：$f(x)$与 $g(x)$互素，故存在 K 上多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，故得

$$u(\rho)f(\rho)+v(\rho)g(\rho)=1^*$$

也即

$$u(\rho)\sigma+v(\rho)\tau=1^* \tag{34}$$

今任取 $\alpha\in(\sigma\tau)^{-1}(\theta)$，则 $\sigma(\tau(\alpha))=\theta$，$\tau(\sigma(\alpha))=(\tau\sigma)(\alpha)=(\sigma\tau)(\alpha)=\theta$。又因 $v(\rho)\tau=\tau v(\rho)$，$u(\rho)\sigma=\sigma u(\rho)$，故得$\sigma(v(\rho)\tau(\alpha))=v(\rho)(\theta)=\theta$，$\tau(u(\rho)\sigma(\alpha))=u(\rho)(\theta)=\theta$，因而

$$(u(\rho)\sigma)(\alpha)\in\tau^{-1}(\theta),\ (v(\rho)\tau)(\alpha)\in\sigma^{-1}(\theta) \tag{35}$$

又由（34）式可得

$$(u(\rho)\sigma)(\alpha)+(v(\rho)\tau)(\alpha)=1^*(\alpha)=\alpha$$

由上式及（35）式知，

$$(\sigma\tau)^{-1}(\theta)\subseteq\sigma^{-1}(\theta)+\tau^{-1}(\theta)$$

上式与（33）式合起来即得

$$(\sigma\tau)^{-1}(\theta)=\sigma^{-1}(\theta)+\tau^{-1}(\theta) \tag{36}$$

又任取 $\delta\in\sigma^{-1}(\theta)\cap\tau^{-1}(\theta)$，则 $\sigma(\delta)=\theta$，$\tau(\delta)=\theta$，故由（34）式得

$$\delta=1^*(\delta)=u(\rho)(\sigma(\delta))+v(\rho)(\tau(\sigma))=\theta$$

所以 $\sigma^{-1}(\theta)\cap\tau^{-1}(\theta)=\{\theta\}$，由此式及（36）式即得（32）式。

例 2 设 A 是秩为 r 的 n 阶半正定阵，$R^{(n)}$ 是 n 维实列向量空间，证明：$L=\{\alpha|\alpha'A\alpha=0,\ \alpha\in R^{(n)}\}$ 是 $R^{(n)}$ 的 $n-r$ 维子空间。

证 由 A 是秩为 r 的半正定阵的假设，可得 $A=B'B$，其中 B 是 $r\times n$ 行满秩阵。又因 B 是实阵，α 是实向量，故得

$$\alpha'A\alpha=\alpha'B'B\alpha=(B\alpha)'(B\alpha)=0\Longleftrightarrow B\alpha=0$$

今先证 L 是 $R^{(n)}$ 的子空间，任取 $\alpha,\beta\in L$，则由 $\alpha'A\alpha=0$ 可得 $B\alpha=0$，由 $\beta'A\beta=0$ 可得 $B\beta=0$，于是 $B(k\alpha+l\beta)=0$，因而 $(k\alpha+l\beta)'A\cdot(k\alpha+l\beta)=0$，所以 $k\alpha+l\beta\in L$，$\forall k,l\in L$，故 L 是 $R^{(n)}$ 的子空间。

再证 $d(L)=n-r$。因为 $\alpha'A\alpha=0\Longleftrightarrow B\alpha=0$，故 L 可改写为：

$$L=\{\alpha|\alpha'A\alpha=0,\alpha\in R^{(n)}\}=\{\alpha|B\alpha=0,\alpha\in R^{(n)}\}=B^{-1}(0),$$

即 L 可看作 $R^{(n)}$ 映入 $R^{(r)}$ 的线性映射 B 的核空间，故由维数公式（28）式以及（29）式即得

$$d(L)=d(B^{-1}(0))=d(R^{(n)})-d(B(R^{(n)}))=n-r(B)=n-r.$$

下面讨论用线性变换借助于它的不变子空间、特征子空间；像空间与核空间作“过渡”，来解决“**矩阵偶**”的化简问题。设 A 与 B 都是 n 阶阵，我们希望能找到一个非异 n 阶阵 P，使 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 是形状简单的矩阵，这就是所谓矩阵偶同时简化的问题，它在理论上与应用上都是必需的。在第二部分，我们已证得对于两个可交换的实对称阵 A 与 B，必可用同一个正交阵，使 A 与 B 同时正交相似于实对角阵。那么，对任意两个可交换的方阵，进而对两个任意方阵，是否也

有相仿的结论呢？下面两例将分别回答这两个问题。

例 3 设 A 与 B 是复数域 K 上的 n 阶阵，且 $AB=BA$，也即 $r(AB-BA)=0$，则必存在 n 阶复阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix} \tag{37}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 与 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$（显然）分别是 A 与 B 的特征值。

证 取 n 维复空间 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，设 A 与 B 在同构映射 $\eta_{(\alpha)}$ 下的原像分别是 V 上的线性变换 σ 与 τ，应用定理 11，由 $AB=BA$ 可得 $\sigma\tau=\tau\sigma$。今证 σ 与 τ 有公共的一维不变子空间。因为，由第十一章定理 13 及定理 2，σ 必有复特征值 λ_1，考虑（σ 的）特征子空间：

$$V_{\lambda_1}=\{\alpha\,|\,\sigma(\alpha)=\lambda_1\alpha,\alpha\in V\},$$

V_{λ_1} 显然是 σ 的不变子空间，今证 V_{λ_1} 也是 τ 的不变子空间，这因为，任取 $\alpha\in V_{\lambda_1}$，则由

$$\begin{aligned}\sigma(\tau(\alpha))&=(\sigma\tau)(\alpha)=(\tau\sigma)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha))\\&=\tau(\lambda_1(\alpha))=\lambda_1\tau(\alpha)\end{aligned}$$

故 $\tau(\alpha)\in V_{\lambda_1}$。这说明 V_{λ_1} 确是 τ 的不变子空间，于是 τ 可看作复空间 V_{λ_1} 上的线性变换，再由第十一章定理 13 与定理 2，τ 必存在复特征值 μ_1，以及属于 μ_1 的特征向量：$\theta\neq\beta_1\in V_{\lambda_1}$，也即

$$\tau(\beta_1)=\mu_1\beta_1$$

又因 $\beta_1\in V_{\lambda_1}$，故自然有：

$$\sigma(\beta_1)=\lambda_1\beta_1$$

故 σ 与 τ 有公共的一维不变子空间 $L(\beta_1)$（注意，证明过程中借用了 σ 的特征子空间作"过渡。"）所以在 V 的基 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 下，σ 与 τ 的方阵分别是：$\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\mu_1 & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix}$，其中 A_1 与 B_1 都是 $n-1$ 阶阵。设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 P_1，则由第十一章定理 5 的推论知，

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix},\qquad P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}\mu_1 & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix} \tag{38}$$

再由 $AB=BA$ 的假设以及（38）式容易算得 $A_1B_1=B_1A_1$，于是对可交换的 $n-1$ 阶阵 A_1 与 B_1，用归纳法，必存在 $n-1$ 阶非异复阵 P_2，使

$$P_2^{-1}A_1P_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad P_2^{-1}B_1P_2=\begin{pmatrix}\mu_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix} \tag{39}$$

令 $P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}$，则由（38）式与（39）式即可得（37）式。

当 $AB\neq BA$ 时，A 与 B 是否可找到复阵 P，使 A 与 B 同时相似于上三角复方阵（以下简称为"同时复上三角化"）？这个问题已由拉费(Laffey)所解决。拉费在1978年证明了：当 $r(AB-BA)=1$ 时，A 与 B 必可同时复上三角化，他并且举出反例说明：当 $r(AB-BA)>1$ 时，A 与 B 未必能复上三角化，我们将拉费的结论写成下面的

例 4（拉费（1978）-乔（1981））设 A 与 B 是 n 阶阵，且 $r(AB-BA)\leqslant 1$，则 A 与 B 必可同时复上三角化。

证 取 n 维复空间 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，设 A 与 B 在同构映射 $\eta_{(n)}$ 下的原像分别是 V 上的线性变换 σ 与 τ，则由第十一章定理11知，$AB-BA$ 在 $\eta_{(n)}$ 下的原像是 $\sigma\tau-\tau\sigma$，再由（29）式以及假设即得

$$d((\sigma\tau-\tau\sigma)V)=r(AB-BA)=1 \tag{40}$$

今证 σ 的像空间 $\sigma(V)$ 以及 σ 的核空间中必有一个是 σ 与 τ 的公共的不变子空间。这因为，若 $\sigma^{-1}(\theta)$ 已是 τ 的不变子空间，则由于 $\sigma^{-1}(\theta)$ 自然是 σ 的不变子空间，故 $\sigma^{-1}(\theta)$ 就是 σ 与 τ 的不变子空间；若 $\sigma^{-1}(\theta)$ 不是 τ 的不变子空间，也即 $\tau(\sigma^{-1}(\theta))\nsubseteq\sigma^{-1}(\theta)$，则必有 $\{\theta\}\subseteq\sigma^{-1}(\theta)\subseteq V$，于是存在一个 $\theta\neq\alpha\in\sigma^{-1}(\theta)$，使 $\tau(\alpha)\overline{\in}\sigma^{-1}(\theta)$，即 $\sigma(\tau(\alpha))\neq\theta$，因此

$$(\sigma\tau-\tau\sigma)(\alpha)=(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))\neq\theta,\quad（因\ \sigma(\alpha)=\theta） \tag{41}$$

又由（40）式与（41）式知：

$$(\sigma\tau-\tau\sigma)(V)=L((\sigma\tau-\tau\sigma)(\alpha))=L(\sigma(\tau(\alpha))) \tag{42}$$

但是

$$(\sigma\tau-\tau\sigma)(V)=\{(\sigma\tau-\tau\sigma)(\beta),\ \forall\beta\in V\}$$

故对任一$\beta\in V$，由上式及（42）式即可得

$$(\sigma\tau-\tau\sigma)(\beta)=\lambda_\beta\sigma(\tau(\alpha)) \tag{43}$$

其中λ_β是随β变动而变动的复数，将（43）式改写为：

$$\begin{aligned}\tau(\sigma(\beta))&=\sigma(\tau(\beta))-\lambda_\beta\sigma(\tau(\alpha))\\&=\sigma(\tau(\beta-\lambda_\beta\alpha))\in\sigma(V),\ \forall\beta\in V\end{aligned}$$

这说明$\sigma(V)$是τ的不变子空间。又$\sigma(V)$当然是σ的不变子空间，故当$\sigma^{-1}(\theta)$不是τ的不变子空间时，$\sigma(V)$必是σ与τ的公共的不变子空间，总之，在假设条件下，σ与τ恒有公共的不变子空间W（$W=\sigma^{-1}(\theta)$或$W=\sigma(V)$）。于是：

(i)如果W是非平凡的不变子空间，它的基为$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$，则$\sigma$与$\tau$在$V$的基$\{\beta_1,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n\}$下的方阵应分别是：$\begin{pmatrix}A_{11}&*\\0&A_1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}B_{11}&*\\0&B_1\end{pmatrix}$。其中$A_{11}$与$B_{11}$均为$s$阶阵。设基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$到基$\{\beta_1,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n\}$的过渡矩阵为$P_1$，则由第十一章定理5的推论知，必有

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}A_{11}&*\\0&A_1\end{pmatrix},\qquad P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}B_{11}&*\\0&B_1\end{pmatrix} \tag{44}$$

于是可算得

$$P_1^{-1}(AB-BA)P_1=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}-B_{11}A_{11}&*\\0&A_1B_1-B_1A_1\end{pmatrix} \tag{45}$$

由于$r(AB-BA)=1$，故由（45）式知，

$$1\geqslant r(A_{11}B_{11}-B_{11}A_{11})+r(A_1B_1-B_1A_1)$$

所以上不等式右边两式至少有一个是0，例如（不妨设）第一个式子是0：$r(A_{11}B_{11}-B_{11}A_{11})=0$，则$r(A_1B_1-B_1A_1)\leqslant1$，于是由例3知，必存在$s$阶非异阵$P_2$，使

$$P_2^{-1}A_{11}P_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&*\\&\ddots&\\&&\lambda_s\end{pmatrix},\qquad P_2^{-1}B_{11}P_2=\begin{pmatrix}\mu_1&&*\\&\ddots&\\&&\mu_s\end{pmatrix} \tag{46}$$

又对不等式$r(A_1B_1-B_1A_1)\leqslant1$，如果$r(A_1B_1-B_1A_1)=0$，则由例3知，$A_1$与$B_1$可同时复上三角化；如果$r(A_1B_1-B_1A_1)=1$，则用归纳

法，A_1 与 B_1 也可同时复上三角化。因此，总可找到 $n-s$ 阶复阵 P_3，使

$$P_3^{-1}A_1P_3=\begin{pmatrix}\lambda_{s+1} & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad P_3^{-1}B_1P_3=\begin{pmatrix}\mu_{s+1} & & *\\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}\tag{47}$$

记 $P=P_1\begin{pmatrix}P_2 & 0\\ 0 & P_3\end{pmatrix}$，则 P 是 n 阶非异阵，且由（44）、（46）与(47)三式即得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & * & \\ & & & \lambda_{s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_s & & * & \\ & & & \mu_{s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

(ii) 如果 W 是平凡的：$W=V$ 或 $W=\{\theta\}$。由于 $W=\sigma^{-1}(\theta)$或 $W=\sigma(V)$故只有四种可能：$\sigma^{-1}(\theta)=V$；$\sigma(V)=\{\theta\}$；$\sigma^{-1}(\theta)=\{\theta\}$；$\sigma(V)=V$，而前两式事实上是一样的：$\sigma(V)=\{\theta\}$，即 $\sigma=0^*$，第三式表示 σ 是单射，第四式表示 σ 是满射，而对有限维线性空间 V上的线性变换来说，单射、满射、双射三者是一回事，故后两者说明 σ是可逆变换。综上所述，σ 只能是零变换或可逆变换。当 $\sigma=0^*$，则它在 $\eta_{(e)}$ 下像 $A=0$，此时例 4 的结论当然成立，但意义不大；当 σ 是可逆变换，必存在复数 c，使 $\sigma-c1^*$ 不可逆，即它既不是单射，也不是满射（这是容易证明的，作为练习，见本章习题第 1 题），于是由

$$r(\sigma\tau-\tau\sigma)=r((\sigma-c1^*)\tau-\tau(\sigma-c1^*))=1$$

以及上面的讨论知：$\sigma-c1^*$ 与 τ 的公共不变子空间必是非平凡的，故由(i)知，存在非异复阵 Q，使

$$Q^{-1}(A-cI_n)Q=\begin{pmatrix}\gamma_1 & & & \\ & \gamma_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n\end{pmatrix},\qquad Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}\tag{48}$$

(因 $\sigma - c1^*$ 在 $\eta_{(n)}$ 下的像为 $A - cI_n$)，显然，(48) 式可化为：

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i = \nu_i + c$; $i = 1, 2, \cdots, n$。

例 5 之证明，由乔等三人在 1981 年完成，它简化了拉费的原证。

§5 运用正交化的方法

将某些与有限个向量有关的问题，看作欧氏空间中的问题，将这有限个向量正交化，然后由此解决原来的问题，这就是运用正交化方法的过程。从涉及矩阵的问题来说，正交化必定与正交阵以及与正交阵有关的问题相联系。这是容易猜测的。对无限维欧氏空间来说，它的有限个向量的正交化也可用来解决某些分析问题。本节仅讨论正交化方法在矩阵论中的应用。

所谓正交化方法，或称**格兰姆-许密脱(Schmidt)方法**，就是：对欧氏空间任意 s 个线性无关的向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，必可以作出下列正交向量组：

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \beta_1 \\ &\alpha_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_i = \beta_i - \frac{(\beta_i, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 - \cdots - \frac{(\beta_i, \alpha_{i-1})}{(\alpha_{i-1}, \alpha_{j-1})} \alpha_{i-1} \qquad (49) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_s = \beta_s - \frac{(\beta_s, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 - \cdots - \frac{(\beta_s, \alpha_{s-1})}{(\alpha_{s-1}, \alpha_{s-1})} \alpha_{s-1} \end{aligned}$$

即 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \cdots, s$。(读者若将过原点的平面上两个向量不共线化为正交向量，将 3 维几何空间中三个不共面的向量化为正交向量，便可清楚地看出 (49) 式作法的思想来源。)

正交化方法的一个重要应用是，化实对称阵 A 为对角阵的正交阵 P，可通过将 A 的属于所有不同的特征值中的每一个特征值的极大线性无关向量组正交化，再并起来便得到 P。下面再讨论正交化方法的其他应用。

定义 设 $n\times r$ 实矩阵 $Q=(q_1,q_2,\cdots,q_r)$ 的列向量满足：
$q'_iq_j=\delta_{ij}$；$i,j=1,2,\cdots,r$，$(1\leqslant r<n)$ 也即 $Q'Q=I_r$，则称 Q 为**列正交阵** (49) 式的一个直接应用是下面的

例1 证明：任何 $n\times r$ 列满秩阵 A 必有分解式：

$$A=QR \tag{50}$$

其中 Q 是 $n\times r$ 列正交阵，R 是 r 阶非异上三角阵。

证 将 A 按它的列分块：$A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)$，将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 看作 n 维欧氏空间 $R^{(n)}$（内积为 $(\alpha,\beta)=\alpha'\beta$）的向量，按假设，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关，将它们正交化为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，并记 $\varepsilon_i=\dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$，$i=1,2,\cdots,r$，则由 (49) 式可得

$$\begin{aligned}
\beta_1&=\alpha_1=\|\alpha_1\|\varepsilon_1\\
\beta_2&=k_{12}\varepsilon_1+\|\alpha_2\|\varepsilon_2\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\beta_r&=k_{1r}\varepsilon_1+k_{2r}\varepsilon_2+\cdots+k_{r-1,r}\varepsilon_{r-1}+\|\alpha_r\|\cdot\varepsilon_r
\end{aligned}$$

将上列诸式写成矩阵等式即得：

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)\begin{pmatrix}\|\alpha_1\| & k_{12} & \cdots & k_{1r}\\ & \|\alpha_2\| & \cdots & k_{2r}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \|\alpha_r\|\end{pmatrix}=QR$$

易知 $Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)$ 是列正交阵，而

$$R=\begin{pmatrix}\|\alpha_1\| & k_{12} & \cdots & k_{1r}\\ & \|\alpha_2\| & \cdots & k_{2r}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \|\alpha_r\|\end{pmatrix}$$

是 r 阶非异上三角阵。

(50) 式是非异实方阵 A 的 QR 分解的推广。由于 (50) 式处理的是长方阵的问题，因而它具有更大的灵活性，这由下例也可看到这点。

例 2 证明：秩为 r 的 n 阶阵 A 必有分解式：

$$A=(Q,\ 0\ )T \tag{51}$$

其中 Q 是 $n\times r$ 列正交阵，T 是 n 阶非异阵。

证 设 A 的 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 列线性无关，用排列阵 P 将这 r 个列调到 A 的前 r 列位置上，得到

$$AP=(A_1,0) \tag{52}$$

其中 $A_1=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})$。由于 A_1 是 $n\times r$ 列满秩阵，故由(50)式，$A_1=QR_1$，其中 Q 是 $n\times r$ 列正交阵，R_1 是 r 阶非异上三角阵，于是 (52) 式化为：

$$AP=(QR_1,0)$$

以 $\begin{pmatrix} R_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$ 右乘上式两边，得到

$$A\left(P\begin{pmatrix} R_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}\right)=(Q,0)$$

记 $\left(P\begin{pmatrix} R_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}\right)^{-1}=T$，则由上式即得 (51) 式。

下面的例子需要用到命题 3。

命题 3 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\ \varepsilon_r\ (1\leqslant r<n)$ 是 n 维欧氏空间 V 的标准正交向量组，即 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$；$i,j=1,2,\cdots,r$，则必存在 V 中另外 $n-r$ 个向量 $\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$，使 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基。

证 因为正交向量组必线性无关，故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 线性无关，于是由第十章定理 3，V 中必存在 $\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$，使 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 是 V 的一个基，今将这 n 个向量如下正交化：

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_r=\varepsilon_r$$

$$\alpha_{r+1}=\beta_{r+1}-(\beta_{r+1},\varepsilon_1)\varepsilon_1-\cdots-(\beta_{r+1},\varepsilon_r)\varepsilon_r$$

....

$$\alpha_n=\beta_n-\beta_n,\varepsilon_1)\varepsilon_1-(\beta_n,\varepsilon_2)\varepsilon_2-\cdots-(\beta_n,\varepsilon_r)\varepsilon_r-$$

$$-\frac{(\beta_n,\alpha_{r+1})}{(\alpha_{r+1},\alpha_{r+1})}\alpha_{r+1}-\cdots-\frac{(\beta_n,\alpha_{n-1})}{(\alpha_{n-1},\alpha_{n-1})}\alpha_{n-1}$$

则仿正交化方法之证明，可证得$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$是正交向量组，再令$\varepsilon_{r+1}=\frac{\alpha_{r+1}}{\|\alpha_{r+1}\|},\cdots,\varepsilon_n=\frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}$，则$\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$就是所要求的向量组，它使$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$；$i,j=,2,\cdots,n$。

例 3 设$\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})'$是实列向量，且$\alpha'_i\alpha_j=\delta_{ij}$；$i,j=1,2,\cdots r$。则对任何$i$，$1\leqslant i\leqslant n$以及任何$r$，$1\leqslant r\leqslant n$，恒有

$$a_{i_1}^2+a_{i_2}^2+\cdots+a_{ir}^2\leqslant 1. \tag{53}$$

证 将$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$看作$n$维欧氏空间$R^{(n)}$（内积为$(\alpha,\beta)=\alpha'\beta$）的标准正交向量组，由命题3，必存在$R^{(n)}$中向量$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，使$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$是$R^{(n)}$的标准正交基，也即对列正交阵$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，必存在$n\times(n-r)$列正交阵$(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$，使$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$是正交阵。故由正交阵定义知，对任何$i,1\leqslant i\leqslant n$，恒有

$$a_{i1}^2+\cdots+a_{ir}^2+a_{i,r+1}^2+\cdots+a_{in}^2=1$$

由上式即得不等式（53）。

例 4 将n阶实对称阵的n个实特征值按其大小排列，设它们是：$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，则

$$\lambda_1+\lambda_2=\max_{Q_2}(\operatorname{tr}(Q'_2AQ_2)) \tag{54}$$

其中$\max\limits_{Q_2}(\operatorname{tr}(Q'_2AQ_2)$表示所有$n\times 2$列正交阵$Q_2$相应的$\operatorname{tr}(Q'_2AQ_2)$的最大值。

证 因A实对称，故存在正交阵P，使

$$P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix} \tag{55}$$

将 P 分块为：$P=(P_2,P_{n-2})$，其中 P_2 为 $n\times 2$ 列正交阵，P_{n-2} 为 $n\times(n-2)$ 列正交阵。于是由（55）式易知：

$$P'_2AP_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \tag{56}$$

故由（56）式即得

$$\lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}(P'_2AP_2)\leqslant\max_{Q_2}(\mathrm{tr}(Q'_2AQ_2)) \tag{57}$$

另一方面，对任何 $n\times 2$ 列正交阵 $Q_2=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，而 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}=1$，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}=0$，若记 $\boldsymbol{z}=Q'\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{u}=Q'\boldsymbol{y}$，并记 $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)'$，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)'$，则应用（55）式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(Q'_2AQ_2)&=\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}'(Q'AQ)\boldsymbol{z}+\boldsymbol{u}'(Q'AQ)\boldsymbol{u}\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iz_i^2+\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i^2\\&=\lambda_1(z_1^2+u_1^2)+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i(z_i^2+u_i^2)\end{aligned} \tag{58}$$

又因 $\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2=\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}=1$，$\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}=0$ 即 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})$ 是列正交阵，且由假设 $\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，故（58）式可化为：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(Q'_2AQ_2)&\leqslant\lambda_1(z_1^2+u_1^2)+\lambda_2\sum_{i=2}^{n}(z_i^2+u_i^2)\\&=\lambda_1(z_1^2+u_1^2)+\lambda_2(1-u_1^2+1-z_1^2)\\&=(\lambda_1-\lambda_2)(z_1^2+u_1^2)+2\lambda_2\end{aligned} \tag{59}$$

但 $(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})$ 是 $n\times 2$ 列正交阵，故由例 3 的（53）式（取 $r=2,i=1$）可知：$z_1^2+u_1^2\leqslant 1$，故（59）式化为

$$\mathrm{tr}(Q'_2AQ_2)\leqslant\lambda_1+\lambda_2 \tag{60}$$

因为（60）式对任何 $n\times 2$ 列正交阵成立，故得

$$\max_{Q_2}(\mathrm{tr}(Q'_2AQ_2))\leqslant\lambda_1+\lambda_2$$

上不等式与不等式（57）合并，就得到（54）式。

从本章处理问题的过程可以看出：有的是应用线性代数的解析理论解决线性代数的“几何”理论问题；有的是应用线性代数的“几何”理论解决线性代数的解析理论、即矩阵论的问题；有的则是两者

的混合运用。所以，这两个处理问题的想法均需掌握好，而不可偏废其中的任何一个。

习　题

1．证明：对 n 维复空间 V 上任何线性变换 σ，必存在复数 c，使 $\sigma-c1^*$ 是奇异（即不可逆）线性变换。

（提示：应用同构映射 $\sigma\to A$ 以及代数基本定理："复系数多项式必有复根。）

2．设 σ 是 n 维复空间 V 上的线性变换，且 V 的零向量 θ 在 σ 下的原象只有一个。又设 σ 至少有三个不同的特征值，且 W 是(V 的关于) σ 的不变子空间，证明：必存在次数不小于 2 的复系数多项式 $g(\lambda)$，使 W 是 $g(\sigma)$的不变于空间。

（提示：先证 σ 可逆，则在同构映射 $\sigma\to A$ 下，$\sigma^{-1}\to A^{-1}$，又由假设知 A 的最小多项式的次数至少是 3，故 $A^{-1}=g(A)$，而 $g(\lambda)$的次数不小于 2，再由 W 是 σ-不变子空间的假设，证明 W 也是 σ^{-1}-不变子空间。）

3．如果数域 K 上 n 维线性空间 V 上线性变换 σ 有 r 重复特征值 λ，证明：$d(V_\lambda)\leqslant r$。

（提示：作同构映射 $\sigma\to A$．并应用第十一章的定理 1、2 以及第五章§3例 1 的结论）

4．证明：n 维欧氏空间 V 必可分解为有限个关于 V 上正交变换 σ 的一维不变子空间与二维不变于空间的直和。

（提示：应用第七章习题 14 以及第十一章定理 8、定理 1 与定理 2，并仿照本章§1例 3 之证法。）

5．（**斯泰因尼茨（Steinitz）替换定理**）设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是线性包 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$中的线性无关向量，$t<s$，则在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中必存在 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{s-t}}$，使

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_{s-t}},\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

（提示：设 $d(L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s))=r$，应用 $V\simeq K^{(r)}$ 的结论化为 r 维列向

量空间的问题进行讨论，或直接证明也可。）

6．用欧氏空间同构的观点证明：设 α 与 β 是欧氏空间的向量，则 $\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2=\|\alpha+\beta\|^2$ 的充要条件是，α 与 β 正交。

7．设 W 是 n 维欧氏空间 V 的非平凡子空间，且 $V=W\oplus W^{\perp}$，对任一 $\alpha\in V$，$\alpha=\alpha_w+\alpha_{w^\perp}$，作对应 σ_w：$\alpha\to\alpha_w$。

(i)证明 σ_w 是 V 上线性变换、称 σ_w 为正射影变换。

(ii) 证明 σ_w 是自共轭变换，且是幂等的（即 $\sigma_w^2=\sigma_w$）。

(iii) n 维欧氏空间 V 上任何自共轭、幂等线性变换 σ 必是正射影变换，即 $\sigma=\sigma_w$，试证之。

(iv) 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 上的自共轭变换，且 σ 的秩为 r（即 $d(V))=r$），又设 σ 的非零特征值 λ_i 的重数为 r_i; $i=1,2,\cdots,s$，$\sum_{i=1}^{s}r_i=r$，则

$$\sigma=\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+\cdots+\lambda_s\omega_s$$

其中 ω_i 是秩为 r_i 的正射影变换，且 $\omega_i\omega_j=0^*$；$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,s$。（提示：(i)、(ii)、(iii) 易证，对 (iv)，设 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的实对称阵是 A，即 ζ_n：$\sigma\to A$，则由假设可得

$$A=P'\begin{pmatrix}\lambda_1I_{r_1} & & & & \\ & \lambda_2I_{r_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_sI_{rs} & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\qquad P=\sum_{i=1}^{s}P\begin{pmatrix}0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \lambda_iI_{ri} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}P'$$

又设

$$P\begin{pmatrix}0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \lambda_iI_{ri} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}P';\quad i=1,2,\cdots,s$$

在 ζ_n 下的原象为 ω_i，由 (iii)知 ω_i 是正射影变换；$i=1,2,\cdots,s$。再由第十一章定理 10 与定理 11 即得证。）

8．设 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 是 n 维线性空间 V 上非零线性变换，证明：

(i)必存在 $\alpha\in V$，使 $\sigma_i(\alpha)\neq\sigma_j(\alpha)$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots,s$。(ii)必存在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使 $\sigma_i\alpha_j\neq\theta$；$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,s$。

（提示：对(i)作$(\sigma_i-\sigma_j)^{-1}(\theta)=V_{ij}$，对(ii)作 $W_k=\sigma_k^{-1}(\theta)$，然后证 V_{ij} 或 W_k 全是 V 的非平凡子空间，再用本章§3例 3 之结论。）

9．用全线性变换环与全矩阵环同构的观点以及本章(29)式证明：$r(AB)\leqslant r(A)$，$r(AB)\leqslant r(B)$。其中 A 与 B 为同阶方阵。

10．证明：任何 $n\times r$ 列满秩阵 A 必有分解式：

$$A=Q\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 A 是 n 阶正交阵，R 是 r 阶非异上三角阵。

(i)必存在 $\alpha\in V$，使 $\sigma_i(\alpha)\neq\sigma_j(\alpha)$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots,s$。(ii)必存在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使 $\sigma_i\alpha_j\neq\theta$；$i=1,2,\cdots,s$，$j=1,2,\cdots,s$。

(提示：对(i)作 $(\sigma_i-\sigma_j)^{-1}(\theta)=V_{ij}$，对(ii)作 $W_k=\sigma_k^{-1}(\theta)$，然后证 V_{ij} 或 W_k 全是 V 的非平凡子空间，再用本章§3例 3 之结论。)

9. 用全线性变换环与全矩阵环同构的观点以及本章(29)式证明：$r(AB)\leqslant r(A)$，$r(AB)\leqslant r(B)$。其中 A 与 B 为同阶方阵。

10. 证明：任何 $n\times r$ 列满秩阵 A 必有分解式：

$$A=Q\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix}$$

其中 A 是 n 阶正交阵，R 是 r 阶非异上三角阵。