《线性代数与解析几何》部分习题解答[1]

余启帆

中国科学技术大学

2021 年 3 月 19 日

[1]闻道有先后, 解答有疏漏. 恳请读者来信批评指正: qifan@mail.ustc.edu.cn

目录

第 3 章　线性方程组

3.1　习题

3.1.1

3.1.2

3.1.2　当 a 为何值时, 下列线性方程组有解? 有解时求出它的通解:

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ x_1-x_2-2x_3=-3, \\ ax_1-2x_2+2x_3=6; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1, \\ -x_1+11x_2-x_3=3, \\ 3x_1-5x_2+7x_3=a. \end{cases}$

(1)

解 (1)　原方程组对应的增广矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-ar_1 \to r_3]{-3r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & -2+a & 2+2a & 6+3a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2-a)r_2 \to r_3]{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{24}{5}+\frac{3}{5}a & \frac{52}{5}+\frac{4}{5}a \end{pmatrix} \xrightarrow[5r_3]{5r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 24+3a & 52+4a \end{pmatrix}.$$

注意到, 当 $a=-8$ 时, r_3 对应方程 $0x_3=20$, 这是无解的; 反之, $a \neq -8$ 时, 原方程有解:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{52+4a}{24+3a} = \dfrac{4(a+13)}{3(a+8)}, \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(11-7x_3) = \dfrac{a-20}{3(a+8)}, \\ x_1 = -3+x_2+2x_3 = \dfrac{4}{a+8} \end{cases} \Longrightarrow (x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{4}{a+8}, \frac{a-20}{3(a+8)}, \frac{4(a+13)}{3(a+8)}\right) \ (a \neq -8).$$

□

说明 (1)　上述解法在处理第一列系数时, 即出现了与 a 有关的系数, 造成计算过程繁琐, 若能够把 a 变换到最后一个未知数的系数上, 则可以使计算过程变得简便. 请看下面的**解** (2).

解 (2) 作置换: 记 $\begin{cases} y_1 = x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_1. \end{cases}$ 则原方程化为:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 2, \\ -2y_1 - y_2 + y_3 = -3, \\ 2y_1 - 2y_2 + ay_3 = 6. \end{cases} \tag{3.1}$$

对应的增广矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & a & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_1 \to r_3]{2r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & a-6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[6r_2 \to r_3]{\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \dfrac{7}{3} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & a+8 & 4 \end{pmatrix}.$$

则当 $a = -8$ 时, r_3 对应的方程为 $0y_3 = 4$, 这显然是无解的; 反之, 当 $a \neq -8$ 时, 方程 (3.1) 有解:

$$\begin{cases} y_3 = \dfrac{4}{a+8}, \\ y_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3}y_3 = \dfrac{a-20}{3(a+8)}, \\ y_1 = 2 - 2y_2 - 3y_3 = \dfrac{4(a+13)}{3(a+8)} \end{cases} \implies (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{4}{a+8}, \frac{a-20}{3(a+8)}, \frac{4(a+13)}{3(a+8)} \right) \ (a \neq -8).$$

□

说明 (2) 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数矩阵不可逆;

说明 (3) 非齐次线性方程组有解的充分必要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.

第 4 章　矩阵与行列式

4.1　习题

4.1.1

4.1.2　证明: 每个方阵都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和的形式.

提示　联系: 每一个函数都可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和的形式.

分析　假设结论成立, 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$ 均为 n 阶方阵, 其中 $\boldsymbol{F}$ 是一个对称矩阵, $\boldsymbol{G}$ 是一个反对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}$, 则必有

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),\\ \boldsymbol{G}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}).\end{cases}$$

证明　对于每个 n $(n\in\mathbb{N}^*)$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 取

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),\\ \boldsymbol{G}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),\end{cases}$$

则有

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{G}=-\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}},$$

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$ 被表示成了一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和的形式.　□

4.1.3　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\1&3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\4&-1&-4\\4&3&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\\-1&-2\end{pmatrix}$. 计算 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{B}^2$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{CA}$.

解 计算得:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-18&-11&16\\30&11&-26\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}-4&8\\12&11\\-5&13\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{ABC}=\begin{pmatrix}10&-61\\12&93\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}4&-4&-6\\-12&-3&8\\8&-4&-11\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}3&0\\-15&-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\13&7&12\\1&-5&-6\end{pmatrix}.$$

□

4.1.4

4.1.5 计算 $\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.

解 记

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

其中

$$b_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j,$$

故

$$\text{原式}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^m x_ib_i=\sum_{i=1}^m x_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\right)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n x_ia_{ij}y_j.$$

□

4.1.6 举出满足下列条件的 2 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$:

(1) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; (2) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{I}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$.

解 (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a^2+bc=bc+d^2=0, \\ b(a+d)=c(a+d)=1 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} a=d, \\ b=c \end{cases} \implies a=b=c=d=0,$$

显然不合题意, 故这样的 2 阶实方阵不存在.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

说明 第 (1) 小问可以通过计算 $\det(\boldsymbol{A}^2)=-1 \implies (\det \boldsymbol{A})^2=-1$, (其中已用到 Binet-Cauchy 公式) 而实矩阵对应的行列式必为实数, 从而无解.

第 (2)(3) 小问可以考虑其几何意义. 注意到,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\theta-y\sin\theta \\ x\sin\theta+y\cos\theta \end{pmatrix},$$

即, 将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 作用于平面直角坐标系上的点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 对应将向量 $\boldsymbol{a}=(x,y)$ 逆时针旋转 θ 角, 同理可得: $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{a}$ 对应将向量 $\boldsymbol{a}$ 逆时针旋转 $n\theta$ 角. (此处矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以看作是作用于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 上的一种算子.) 从而, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ 对应将向量 $\boldsymbol{a}$ 逆时针旋转 $-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$, 故对应 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$. 同理可得, 第 (3) 小问对应 $\theta=\pm\frac{2\pi}{3}$, 从而立即得到对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

4.1.7 计算下列矩阵的 k 次方幂, $k \geqslant 1$:

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$;

(5) $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$.

解 (1) 用数学归纳法证明:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

当 $k=2$ 时,

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -2\sin\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix},$$

假设结论对 $k(\geqslant 2)$ 成立, 下面考虑 $(k+1)$ 时的情形.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k+1}&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta\\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix},\end{aligned}$$

由数学归纳法知, 对 $\forall k\in\mathbb{N}^*$, 均有

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{k}=\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\quad(k\in\mathbb{N}^*).$$

(2) 记 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(\theta\in[0,2\pi))$. 则由第 (1) 问的结论知,

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ \Longrightarrow&\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^k=\left(\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)^k=(a^2+b^2)^{\frac{k}{2}}\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\quad(k\in\mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

其中 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(\theta\in[0,2\pi))$.

(3) 将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

下面用数学归纳法证明:

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^k & k\boldsymbol{B}^{k-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^k\end{pmatrix}\quad(k\in\mathbb{N}^*,k\geqslant 2),\tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{B}^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad(n\in\mathbb{N}^*).\tag{4.2}$$

先证式 (4.1).

当 $k=2$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^2&2\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^2\end{pmatrix},$$

假设结论对 k 成立, 下面考虑 $(k+1)$ 时的情形.

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^k&k\boldsymbol{B}^{k-1}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{k+1}&(k+1)\boldsymbol{B}^k\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{k+1}\end{pmatrix},$$

由数学归纳法知, 对 $\forall k\in\mathbb{N}^*, k\geqslant 2$, 有

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^k&k\boldsymbol{B}^{k-1}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^k\end{pmatrix}.$$

再证式 (4.2)

当 $n=1$ 时, 结论显然成立;

假设结论对 n 成立, 下面考虑 $(n+1)$ 时的情形.

$$\boldsymbol{B}^{n+1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^n=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&(n+1)a\\0&1\end{pmatrix},$$

由数学归纳法知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\boldsymbol{B}^n=\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix}.$$

由式 (4.1)(4.2) 得:

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&ka&k&k(k-1)a\\0&1&0&k\\0&0&1&ka\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad(k\in\mathbb{N}^*).$$

(4) 对 k 用数学归纳法易证:

$$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}^k=\begin{pmatrix}\mathrm{C}_k^0&\mathrm{C}_k^1&\cdots&\mathrm{C}_k^k&&&&\\&\mathrm{C}_k^0&\mathrm{C}_k^1&\cdots&\mathrm{C}_k^k&&&\\&&\ddots&&&\ddots&&\\&&&\mathrm{C}_k^0&\mathrm{C}_k^1&\cdots&\mathrm{C}_k^k\\&&&&\mathrm{C}_k^0&\cdots&\mathrm{C}_k^{k-1}\\&&&&&\ddots&\vdots\\&&&&&&\mathrm{C}_k^0\end{pmatrix}\quad(k\leqslant n-1),$$

若 $k\geqslant n$, 则

$$\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}_{n\times n}^k=\begin{pmatrix}\mathrm{C}_k^0&\mathrm{C}_k^1&\cdots&\mathrm{C}_k^{n-1}\\&\mathrm{C}_k^0&\cdots&\mathrm{C}_k^{n-2}\\&&\ddots&\vdots\\&&&\mathrm{C}_k^0\end{pmatrix}$$

提示 事实上, 本题可以通过以下变换 (其中取 $\lambda = 1$)

$$\boldsymbol{J}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n} = \lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

将原矩阵表示为一个单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 与一个幂零矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的和的形式, 再利用单位矩阵与矩阵乘法可交换的性质, 有

$$\boldsymbol{J}_\lambda^k = (\lambda \boldsymbol{I} + \boldsymbol{N})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda \boldsymbol{I})^i \boldsymbol{N}^{k-i}.$$

说明 (1) 此处

$$\boldsymbol{J}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

称为 **Jordan 矩阵**, 对于求解矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{I}$$

有重要意义, 值得留意.

说明 (2) 此处

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

属于**幂零矩阵**. 我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**幂零矩阵**, 若 $\exists k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{O}$.

有了上述铺垫, 本题的计算就变得非常简便了.

另解 注意到,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \boldsymbol{I}^i \boldsymbol{N}^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \boldsymbol{N}^i,$$

由数学归纳法易得:

$$\boldsymbol{N}^i=\begin{pmatrix} 0_{11} & \cdots & \cdots & 0_{1i} & 1_{1,i+1} & & & & \\ & 0_{22} & \cdots & \cdots & 0_{2,i+1} & 1_{2,i+2} & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & 0_{n-i,n-1} & 1_{n-i,n} & \\ & & & & & & & 0_{n-i+1,n} & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & 0_{nn} & \end{pmatrix}_{n\times n},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}+\mathrm{C}_k^1\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}+\mathrm{C}_k^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}+\cdots$$

立即得到对应的结果. □

(5) 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

对 k 用数学归纳法证明:

$$\boldsymbol{A}^k=\left(\sum_{t=1}^n a_tb_t\right)^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

当 $k=1$ 时, 结论显然成立;

当 $k=2$ 时, 有

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}:=(c_{ij})_{n\times n},$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{t=1}^n a_ib_ta_tb_j=a_ib_j\sum_{t=1}^n a_tb_t,$$

故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\left(\sum_{t=1}^n a_tb_t\right)\boldsymbol{A}.$$

由数学归纳法知,

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{k-1}=\left(\sum_{t=1}^n a_tb_t\right)\boldsymbol{A}^{k-1}=\left(\sum_{t=1}^n a_tb_t\right)^2\boldsymbol{A}^{k-2}=\cdots=\left(\sum_{t=1}^n a_tb_t\right)^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

□

说明 事实上, (5) 中对于 $\boldsymbol{A}^2=\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)\boldsymbol{A}$ 还可以这样证:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\\
\Longrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}&=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}\\
&=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\boldsymbol{A}.
\end{aligned}
$$

因此, 可以不采用数学归纳法.

另证 记

$$
\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix},
$$

则由矩阵乘法的结合律, 有

$$
\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\implies
$$

$$
\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\boldsymbol{\beta}=\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\boldsymbol{A}.
$$

□

为此, 当我们在计算各行各列分别成比例的矩阵的 k 次幂时, 均可以考虑这种通过矩阵乘法结合律简化计算的方法. 例如, 在计算

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&4&8\\3&6&12\end{pmatrix}
$$

的 k 次幂时, 若注意到 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3),\boldsymbol{\beta}=(1,2,4),\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, 便可以立即得到相应的结果.

说明 (3) 对于矩阵方幂的计算, 通常按照如下顺序进行考虑:

(1) 对于各行各列分别成比例的矩阵, 考虑将其写成两个向量的乘积, 从而计算方幂时可以通过矩阵乘法的结合律交换计算次序;

(2) 考虑矩阵的对角化;

(3) 寻找规律, 考虑数学归纳法或建立递推关系.

4.1.8

4.1.9

4.1.10

4.1.11

4.1.12

4.1.13 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$, k 为正整数. 证明: $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 并求 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$.

分析 要求矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的逆, 即求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使得 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$, 为了利用条件 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$, 我们猜测 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}^k+\lambda\boldsymbol{A}^k$. 注意到, 对于多项式, 我们有

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}),$$

于是便有了下面的证明.

证明 注意到,

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3+\cdots+(-1)^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1})=\boldsymbol{I}^k+\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3+\cdots+(-1)^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

□

4.1.14 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}^3+5\boldsymbol{A}^4-6\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{O}$. 证明: $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 并求 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

分析 与习题 4.1.13相仿, 往求方阵 $\boldsymbol{X}$, 使得

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}+\lambda(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}^3+5\boldsymbol{A}^4-6\boldsymbol{A}^5)=\boldsymbol{I},$$

注意到, 若取 $\lambda=1$, 对于多项式, 我们有

$$2-2x-3x^3+4x^3+5x^4-6x^5=(1-x)(6x^4+x^3-3x^2+2),$$

于是便有了下面的证明.

证明 注意到,

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(6\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}^3+5\boldsymbol{A}^4-6\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=6\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{I}.$$

□

4.1.15

4.1.16

4.1.17

4.1.18

4.1.19 证明: 不存在 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 满足 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$.

提示 考虑矩阵的迹.

证明 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C}'$, 则

$$\begin{cases} c_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}, \\ c'_{ii}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{tr}(\boldsymbol{C})=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}, \\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}')=\sum_{i=1}^{n}c'_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}) \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})=0,$$

而 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{I})=n$, 故不存在这样的复方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$. □

4.1.20

4.1.21

4.1.22

4.1.23 计算下列行列式:

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & b_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$

解 (1) (2) (3) (4) (5) □

(6)

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1\to r_i} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+a_1 & & & \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix}, \tag{4.3}$$

注意到,

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_2 & & & & & & \\ -a_1 & & a_3 & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ -a_1 & & & & a_{k-1} & & & \\ -a_1 & & & & & 0 & & \\ -a_1 & & & & & a_{k+1} & & \\ -a_1 & & & & & & \ddots & \\ -a_1 & & & & & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{k-2} \begin{vmatrix} -a_1 & & & & & & & \\ -a_1 & a_2 & & & & & & \\ -a_1 & & a_3 & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ -a_1 & & & & a_{k-1} & & & \\ -a_1 & & & & & a_{k+1} & & \\ -a_1 & & & & & & \ddots & \\ -a_1 & & & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k-1} \prod_{i\neq k} a_i,$$

故式 (4.3)

$$= (1+a_1)\prod_{i\neq 1} a_i + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{1+k}\cdot(-1)^{k-1}\prod_{i\neq k} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i\neq k} a_i\right).$$

□

提示 (2) 运用“加边法”.

解 (2)

$$
\begin{vmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 1+a_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & & & & \\
 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
 & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
 & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
-1 & a_1 & & & \\
-1 & & a_2 & & \\
-1 & & & \ddots & \\
-1 & & & & a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{cases}
\begin{vmatrix}
1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & a_1 & & & \\
 & & a_2 & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & a_n
\end{vmatrix}, & a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n, \\
\cdots, & \exists j,\ \text{s.t. } a_j = 0, a_i \neq 0, i \neq j, \\
0, & \exists j,k,\ \text{s.t. } a_j = a_k = 0.
\end{cases}
$$

$$
= \cdots
$$

□

注意 本题运用 “加边法” 时, 应当注意对 $a_i = 0$ 时的情形单独讨论.

提示 (3) 建立递推式, 结合数学归纳法.

解 (3)

$$
\begin{vmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 1+a_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 1+a_n
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_1 & 1 & \cdots & 1 \\
 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\
 & 1 & \ddots & \vdots \\
 & 1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
1 & & & \\
1 & a_2 & & \\
\vdots & & \ddots & \\
1 & & & a_n
\end{vmatrix}
+ a_1
\begin{vmatrix}
1+a_2 & \cdots & 1 \\
1 & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix}
= \prod_{i=2}^{n} a_i + a_1
\begin{vmatrix}
1+a_2 & \cdots & 1 \\
1 & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix},
\tag{4.4}
$$

这是一个递推式, 因此, 我们有式 (4.4)

$$
= \prod_{i=2}^{n} a_i + a_1\left(\prod_{i=3}^{n} a_i + a_2\left(\prod_{i=4}^{n} a_i + \cdots + a_{n-2}(a_n + a_{n-1}(1+a_n))\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i\neq k} a_i\right) + \prod_{i=1}^{n} a_i.
$$

□

注意 上式通过数学归纳法证明将会显得更加严谨.

(7)

提示 (1) 运用数学归纳法或构造递推式.

解 (1) 对 n 用数学归纳法证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & b_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_id_i - b_ic_i), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$n = 1$ 时, 有 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1d_1 - b_1c_1$, 结论成立;

假设结论对 $n(\geqslant 1)$ 成立, 下面考虑 $(n+1)$ 时的情况.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_{n+1} & b_{n+1} & & \\ & & c_{n+1} & b_{n+1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & & & & & b_2 & \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_{n+1} & b_{n+1} & & & \\ & & c_{n+1} & b_{n+1} & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_2 & & & & & d_2 & \\ & & & & & & d_1 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+2(n+1)}b_1 \begin{vmatrix} & a_2 & & & & & b_2 \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_{n+1} & b_{n+1} & & \\ & & & c_{n+1} & b_{n+1} & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_2 & & & & & d_2 \\ c_1 & & & & & & \end{vmatrix} \\
&= a_1(-1)^{2(2n+1)}d_1 \prod_{i=2}^{n+1}(a_id_i - b_ic_i) \\
&\quad - b_1(-1)^{1+2n+1}c_1 \prod_{i=2}^{n+1}(a_id_i - b_ic_i) \\
&= (a_1d_1 - b_1c_1)\prod_{i=2}^{n+1}(a_id_i - b_ic_i) = \prod_{i=1}^{n+1}(a_id_i - b_ic_i),
\end{aligned}$$

由数学归纳法知, 结论对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 成立. 即有

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & b_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

□

提示 (2) 通过适当的初等变换, 运用矩阵的分块运算.

解 (2) 注意到,

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & b_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1 \end{vmatrix} = (-1)^{2(2n-2)} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & \\ c_1 & d_1 & & & & & & \\ & & a_2 & & & & & b_2 \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_n & b_n & & \\ & & & & c_n & b_n & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & c_2 & & & & & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & \\ c_1 & d_1 & & & & & & \\ & & a_2 & b_2 & & & & \\ & & c_2 & d_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_n & b_n \\ & & & & & & c_n & d_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - b_i c_i).$$

□

提示 (3) 运用分块矩阵的初等变换.

引理 4.1 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则 $\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$, 使得当 $0 < x < x_0$ 时, 方阵 $\boldsymbol{A} + x\boldsymbol{I}$ 可逆.

引理的证明 注意到,

$$|\boldsymbol{A} + x\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} := f(x),$$

其中 $f(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式, 至多有 n 个根, 其中 $f(0)=|\boldsymbol{A}|=0$ 是它的一个根, 故 $\exists x_0>0$, 使得当 $0<x<x_0$ 时, $f(x)\neq 0$, 从而 $\boldsymbol{A}+x\boldsymbol{I}$ 可逆. □

注意 此引理在证明一些对可逆矩阵成立的性质对于不可逆矩阵也成立时具有重要意义, 值得留意.

解 (3) 注意到, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\implies\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|,$$

记

$$\begin{pmatrix}a_1 & & & & & b_1\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & c_n & b_n & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_1 & & & & & d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{B}_{n\times n}\\ \boldsymbol{C}_{n\times n} & \boldsymbol{D}_{n\times n}\end{pmatrix},$$

则当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 有

$$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}d_n-c_na_n^{-1}b_n & & & \\ & d_{n-1}-c_{n-1}a_{n-1}^{-1}b_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_1-c_1a_1^{-1}b_1\end{pmatrix}$$

$$\implies \left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|=\prod_{i=1}^{n}(d_i-c_ia_i^{-1}b_i)$$

$$\implies\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right|=\prod_{i=1}^{n}a_i\prod_{i=1}^{n}(d_i-c_ia_i^{-1}b_i)=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$

当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时, 记 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+x\boldsymbol{I}$, 由**引理 4.1**知, $\exists x_0>0$, 使得当 $0<x<x_0$ 时, $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 可逆, 从而由上述结论知,

$$\begin{vmatrix}\tilde{\boldsymbol{A}} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(\tilde{a}_id_i-b_ic_i),$$

上式两边均为关于 x 的 n 次多项式, 其在 $0<x<x_0$ 上恒成立, 故上式对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立.

特别地, 上式对 $x=0$ 成立, 故

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$

□

(8)

解

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-c_1\to c_i} \begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & b_1-b_3 & \cdots & b_1-b_n \\ a_2-b_1 & b_1-b_2 & b_1-b_3 & \cdots & b_1-b_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n-b_1 & b_1-b_2 & b_1-b_3 & \cdots & b_1-b_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_1\to r_i} \begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-b_2 & b_1-b_3 & \cdots & b_1-b_n \\ a_2-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1-b_1, & n=1, \\ (a_1-a_2)(b_1-b_2), & n=2, \\ 0, & n\geqslant 3. \end{cases}$$

□

4.1.24　设 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶反对称复方阵, 证明: $\det(\boldsymbol{A})=0$.

证明　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 其中 n 为奇数. 注意到,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A} \implies \det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\det(-\boldsymbol{A})=(-1)^n\det\boldsymbol{A}=-\det\boldsymbol{A} \implies \det\boldsymbol{A}=0.$$

□

说明　与之类似的结论还有:

设 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶方阵, 满足 $|\boldsymbol{A}|=|-\boldsymbol{A}|$, 求证: $|\boldsymbol{A}|=0$.

4.1.25　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 证明:

$$\det(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA})=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}).$$

提示　运用分块矩阵的初等变换.

证明　注意到,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{BA}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

上式两边取行列式, 立即得到要证式. □

说明　更一般的情形, 请见引理 4.4.

4.1.26　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, λ 是数, 证明:

(1) $(\lambda\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;　(2) $(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$;　(3) $\det\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})^{n-1}$.

分析　注意到, (1)

$$(\lambda\boldsymbol{A})^*=|\lambda\boldsymbol{A}|(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\lambda^n|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

(2)

$$(\boldsymbol{AB})^*=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$$

(3)

$$\det \boldsymbol{A}^* = \det(|\boldsymbol{A}|\, \boldsymbol{A}^{-1}) = |\boldsymbol{A}|^n \det \boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^n \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}.$$

但是, 上述解法均建立在矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都可逆的前提下; 当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 不可逆时, 应当如何证明?

(1)

证明 记 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 对应的代数余子式为 A_{ij}, $\lambda\boldsymbol{A}$ 中元素 λa_{ij} 对应的代数余子式为 A'_{ij}, 则有

$$A'_{ij} = \lambda^{n-1} A_{ij}$$

$$\Longrightarrow (\lambda\boldsymbol{A})^* = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{n1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A'_{1n} & A'_{2n} & \cdots & A'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1}A_{11} & \lambda^{n-1}A_{21} & \cdots & \lambda^{n-1}A_{n1} \\ \lambda^{n-1}A_{12} & \lambda^{n-1}A_{22} & \cdots & \lambda^{n-1}A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda^{n-1}A_{1n} & \lambda^{n-1}A_{2n} & \cdots & \lambda^{n-1}A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*.$$

□

(2)

提示 (1) 先处理矩阵可逆的情形, 再对不可逆的情形运用**引理** 4.1.

证明 (1) (I) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均可逆, 则有

$$(\boldsymbol{AB})^* = |\boldsymbol{AB}|\,(\boldsymbol{AB})^{-1} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\,\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$$

(II) 若 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 不可逆, 令 $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + x\boldsymbol{I}, \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + x\boldsymbol{I}$ $(x \in \mathbb{R})$. 由**引理** 4.1知, $\exists x_0 > 0$, 使得当 $0 < x < x_0$ 时, $\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}$ 均可逆, 从而由上述讨论知,

$$(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}})^* = (\tilde{\boldsymbol{B}})^*(\tilde{\boldsymbol{A}})^*,$$

上式两边均为关于 x 的 $2n$ 次多项式, 在 $0 < x < x_0$ 上成立, 故在 $\mathbb{R}$ 上恒成立.

特别地, 令 $x = 0$, 有

$$(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$$

□

提示 (2) 运用 Binet-Cauchy 公式.

证明 (2) 记 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 中 (i,j) 元素对应的余子式为 M_{ij}, N_{ij}, L_{ij}, 代数余子式为 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, 其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 则有

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

由 Binet-Cauchy 公式得, $\boldsymbol{C}^* = (\boldsymbol{AB})^*$ 的 (i,j) 元素

$$C_{ji} = (-1)^{j+i}L_{ji} = (-1)^{j+i}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}N_{ki} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}M_{jk}(-1)^{k+i}N_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = d_{ij},$$

故

$$(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*.$$

□

(3)

证明 (1) (I) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则有

$$\det \boldsymbol{A}^* = \det(|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}) = |\boldsymbol{A}|^n \det \boldsymbol{A}^{-1} = |\boldsymbol{A}|^n \cdot \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}.$$

(II) 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则有 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 往证: $|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

注意到, $|\boldsymbol{A}| = 0 \implies$ 存在一系列初等方阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s, \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} := \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_1, \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t,$$

其中 $r \leqslant n-1, r \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 均为可逆方阵.

(i) 若 $r \leqslant n-2$, 则 $\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{O} \implies |\boldsymbol{B}^*| = 0$;

(ii) 若 $r = n-1$, 则 $\boldsymbol{B}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \implies |\boldsymbol{B}^*| = 0.$

因此, 我们总有

$$|\boldsymbol{B}^*| = |(\boldsymbol{PAQ})^*| = 0 \implies |(\boldsymbol{PAQ})^*| = |\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}^*| = |\boldsymbol{Q}^*|\,|\boldsymbol{A}^*|\,|\boldsymbol{P}^*| = 0,$$

又 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 均可逆 $\implies \boldsymbol{P}^*, \boldsymbol{Q}^*$ 均可逆 $\implies |\boldsymbol{P}^*|, |\boldsymbol{Q}^*| \neq 0 \implies |\boldsymbol{A}^*| = 0$, 此即

$$\det \boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})^{n-1} = 0.$$

□

证明 (2) (I) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则有 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 从而

$$\boldsymbol{AA}^* = \begin{pmatrix} \Delta & & & \\ & \Delta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \boldsymbol{I}_n \implies |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^n \implies |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}, \quad \Delta = |\boldsymbol{A}|.$$

(II) 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆, 则有 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 往证: $|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

用反证法. 假设 $|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 知,

$$\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{O} \implies \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \boldsymbol{O} \implies \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O},$$

矛盾. 故 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$. □

参考 高等代数.例 **2.26**.

4.1.27 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^*$.

解 注意到,

$$\left|\boldsymbol{A}\right| \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left|\boldsymbol{I}\right| = 1 \implies \left|\boldsymbol{A}\right| = \frac{1}{\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|} = \frac{1}{2},$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{\left|\boldsymbol{A}\right|} \implies \boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right| \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

□

4.1.28 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$.

解 由 $\boldsymbol{A}^* = \left|\boldsymbol{A}\right| \boldsymbol{A}^{-1}$ 得:

$$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^n \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^n \cdot \frac{1}{\left|\boldsymbol{A}\right|} = \left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1},$$

其中 n 为 $\boldsymbol{A}$ 的阶.

从而

$$\left|\boldsymbol{A}^*\right| = -8 \implies \left|\boldsymbol{A}\right| = -2 \implies \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{\left|\boldsymbol{A}\right|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

考虑方程 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ 的解.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_3, -2r_4]{-\frac{1}{2}r_1, 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故上述方程的解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

4.1.29 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行、每列元素之和都是 0, 证明: $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素都相等.

提示 (1) 只需证明 $\boldsymbol{A}^*$ 同一行中的元素、同一列中的元素均相等.

证明 (1) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

考虑 a_{ik}, a_{jk} $(i,j,k=1,2,\cdots,n)$ 对应的代数余子式 A_{ik}, A_{jk}. 不妨设 $k=n$. 则有

$$A_{in}=(-1)^{n+i}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}=(-1)^{n+i}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\sum\limits_{t\neq j} a_{t1} & -\sum\limits_{t\neq j} a_{t2} & \cdots & -\sum\limits_{t\neq j} a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{s=1,2,\cdots,n-1\\ s\neq j-1}]{r_s\to r_{j-1}}(-1)^{n+i}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}=-(-1)^{j-1-i+(n+i)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}=A_{jn},$$

同理可证,

$$A_{ik}=A_{jk},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

同理,

$$A_{ki}=A_{kj},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

$$\Longrightarrow A_{ij}=A_{sj}=A_{st},\quad i,j,s,t=1,2,\cdots,n,$$

此即, $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素都相等. $\square$

证明 (2) 先证明 $\boldsymbol{A}^*$ 同一行中的元素相等.

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 对应的代数余子式为 A_{ij}.

由**习题** 4.1.26(2) 的结论知,

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$$

$$\Longrightarrow\left(\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\right)^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}^*$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\A_{12}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

注意到,

$$|\boldsymbol{B}|=1\implies \boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{B}^{-1}\implies(\boldsymbol{B}^*)^{-1}=\boldsymbol{B},$$

故

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\A_{12}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&0&\cdots&0\end{pmatrix}(\boldsymbol{B}^*)^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}&0&\cdots&0\\A_{12}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{11}&\cdots&A_{11}\\A_{12}&A_{12}&\cdots&A_{12}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{1n}&\cdots&A_{1n}\end{pmatrix},$$

这说明, $\boldsymbol{A}^*$ 同一行中的元素相等; 同理可证同一列中的元素相等, 故 $\boldsymbol{A}^*$ 所有元素都相等. □

4.1.30

4.1.31

4.1.32

4.1.33

4.1.34

4.1.35 计算下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} & & & \boldsymbol{A}_1 \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \\ & \iddots & & \\ \boldsymbol{A}_k & & & \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_i$ 可逆;

(5) $\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$.

解 (1)

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & & & \\
-1 & -3 & -4 & -2 & & 1 & & \\
2 & -1 & 4 & 4 & & & 1 & \\
2 & 3 & -3 & 2 & & & & 1
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & & & \\
0 & -3 & -3 & -6 & 1 & 1 & & \\
0 & -1 & 2 & 12 & -2 & & 1 & \\
0 & 3 & -5 & 10 & -2 & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & & & \\
0 & -1 & 2 & 12 & -2 & & 1 & \\
0 & -3 & -3 & -6 & 1 & 1 & & \\
0 & 3 & -5 & 10 & -2 & & & 1
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & & & \\
0 & -1 & 2 & 12 & -2 & & 1 & \\
0 & 0 & -9 & -42 & 7 & 1 & -3 & \\
0 & 0 & 1 & 46 & -8 & & 3 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & & & \\
0 & -1 & 2 & 12 & -2 & & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 46 & -8 & & 3 & 1 \\
0 & 0 & -9 & -42 & 7 & 1 & -3 &
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & & & \\
0 & -1 & 2 & 12 & -2 & & 1 & \\
0 & 0 & 1 & 46 & -8 & & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 372 & -65 & 1 & 24 & 9
\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 & 1 & & & \\
0 & 1 & -2 & -12 & 2 & & -1 & \\
0 & 0 & 1 & 46 & -8 & & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{65}{372} & \frac{1}{372} & \frac{2}{31} & \frac{3}{124}
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & \frac{28}{93} & \frac{1}{93} & \frac{8}{31} & \frac{3}{31} \\
0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{3}{31} & \frac{1}{31} & -\frac{7}{31} & \frac{9}{31} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{186} & -\frac{23}{186} & \frac{1}{31} & -\frac{7}{62} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{65}{372} & \frac{1}{372} & \frac{2}{31} & \frac{3}{124}
\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{186} & \frac{25}{186} & \frac{7}{31} & \frac{13}{62} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{93} & -\frac{20}{93} & -\frac{5}{31} & \frac{2}{31} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{186} & -\frac{23}{186} & \frac{1}{31} & -\frac{7}{62} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{65}{372} & \frac{1}{372} & \frac{2}{31} & \frac{3}{124}
\end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -4 \\
-1 & -3 & -4 & -2 \\
2 & -1 & 4 & 4 \\
2 & 3 & -3 & 2
\end{pmatrix}^{-1}
=
\begin{pmatrix}
\frac{49}{186} & \frac{25}{186} & \frac{7}{31} & \frac{13}{62} \\
-\frac{2}{93} & -\frac{20}{93} & -\frac{5}{31} & \frac{2}{31} \\
\frac{7}{186} & -\frac{23}{186} & \frac{1}{31} & -\frac{7}{62} \\
-\frac{65}{372} & \frac{1}{372} & \frac{2}{31} & \frac{3}{124}
\end{pmatrix}.
$$

(2)

(3)

$$
\begin{pmatrix}
 & & & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & & 1 & & \\
 & \iddots & \iddots & \vdots & & & \ddots & \\
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & 1
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & 1 \\
 & 1 & \cdots & 1 & & & 1 & \\
 & & \ddots & \vdots & & \iddots & & \\
 & & & 1 & 1 & & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & -1 & 1 \\
 & 1 & & & & \iddots & 1 & \\
 & & \ddots & & -1 & \iddots & & \\
 & & & 1 & 1 & & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
 & & & 1 \\
 & & 1 & 1 \\
 & \iddots & \iddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{pmatrix}^{-1}
=
\begin{pmatrix}
 & & -1 & 1 \\
 & \iddots & 1 & \\
-1 & \iddots & & \\
1 & & &
\end{pmatrix}.
$$

(4) 注意到,

$$
\begin{pmatrix}
 & & & \boldsymbol{A}_1 \\
 & & \boldsymbol{A}_2 & \\
 & \iddots & & \\
\boldsymbol{A}_k & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
 & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \\
 & & \boldsymbol{A}_{k-1}^{-1} & \\
 & \iddots & & \\
\boldsymbol{A}_1^{-1} & & &
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{I}_{n_1} & & & \\
 & \boldsymbol{I}_{n_2} & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & \boldsymbol{I}_{n_k}
\end{pmatrix}
= \boldsymbol{I}
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
 & & & \boldsymbol{A}_1 \\
 & & \boldsymbol{A}_2 & \\
 & \iddots & & \\
\boldsymbol{A}_k & & &
\end{pmatrix}^{-1}
=
\begin{pmatrix}
 & & & \boldsymbol{A}_k^{-1} \\
 & & \boldsymbol{A}_{k-1}^{-1} & \\
 & \iddots & & \\
\boldsymbol{A}_1^{-1} & & &
\end{pmatrix}.
$$

□

(5)

引理 4.2 (Sherman-Morrison 公式) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量, 且 $1 + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \neq 0$. 则有

$$
(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \frac{1}{1 + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{-1}.
$$

引理的证明 计算得:

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\left(\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\right)\\
=&\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\\
=&\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\\
=&\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\\
=&\boldsymbol{I},
\end{aligned}
$$

故

$$
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}.
$$

□

参考 高等代数. **例 2.20**.

证明 当

$$
\begin{vmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 1\\
1 & \cdots & 1 & 1+a_n
\end{vmatrix}
=\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i\neq k}a_i\right)+\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0
$$

时, 原矩阵可逆.

(I) $a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

取

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
a_1 & & & \\
 & a_2 & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & a_n
\end{pmatrix},\quad
\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\quad
\begin{pmatrix}
1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\
1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 1\\
1 & \cdots & 1 & 1+a_n
\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},
$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵.

易算得:

$$
\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}
a_1^{-1} & & & \\
 & a_2^{-1} & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & a_n^{-1}
\end{pmatrix},\quad
1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1},
$$

$$
\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}
a_1^{-2} & a_1^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_1^{-1}a_n^{-1}\\
a_2^{-1}a_1^{-1} & a_2^{-2} & \cdots & a_2^{-1}a_n^{-1}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_n^{-1}a_1^{-1} & a_n^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_n^{-2}
\end{pmatrix},
$$

由引理 4.2得:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1}-\frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix} - \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{-1}} \begin{pmatrix} a_1^{-2} & a_1^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_1^{-1}a_n^{-1} \\ a_2^{-1}a_1^{-1} & a_2^{-2} & \cdots & a_2^{-1}a_n^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{-1}a_1^{-1} & a_n^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_n^{-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^{-1}-sa_1^{-2} & -sa_1^{-1}a_2^{-1} & \cdots & -sa_1^{-1}a_n^{-1} \\ -sa_2^{-1}a_1^{-1} & a_2^{-1}-sa_2^{-2} & \cdots & -sa_2^{-1}a_n^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -sa_n^{-1}a_1^{-1} & -sa_n^{-1}a_2^{-1} & \cdots & a_n^{-1}-sa_n^{-2} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

其中 $s=\dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{-1}}$.

(II) $\exists j, a_j=0, a_i\neq 0\ (i\neq j)$.

取 $a_j=\varepsilon\to 0$, 则

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}s=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}(a_i^{-1}-sa_i^{-2})=a_i^{-1}\ (i\neq j),\quad \lim_{\varepsilon\to 0}(-sa_i^{-1}a_k^{-1})=0\ (i,k\neq j),
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{s}{a_j}=1,\implies \lim_{\varepsilon\to 0}(-sa_i^{-1}a_j^{-1})=-\frac{1}{a_i}\ (i\neq j),
$$

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}(a_j^{-1}-sa_j^{-2}) \xlongequal{t=s-\frac{1}{a_j}} \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{a_j}-\frac{1}{\left(t+\frac{1}{a_j}\right)a_j^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{ta_j}{a_j(ta_j+1)}=t=1+\sum_{i\neq j}a_i^{-1}.
$$

故

$$
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & -a_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & a_{j-1}^{-1} & -a_{j-1}^{-1} & & & \\ -a_1^{-1} & \cdots & -a_{j-1}^{-1} & t & -a_{j+1}^{-1} & \cdots & -a_n^{-1} \\ & & & -a_{j+1}^{-1} & a_{j+1}^{-1} & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -a_n^{-1} & & & a_n^{-1} \end{pmatrix},\quad t=1+\sum_{i\neq j}a_i^{-1}.
$$

□

参考 高等代数. **例 2.37**.

4.1.36 计算下列矩阵的秩:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 6 \\ 0 & -4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{39}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3.$$

(2)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & -40 & -80 & 50 \\ 0 & -28 & -56 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -7 & -11 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2.$$

(3)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3.$$

□

4.1.37 对于 a, b 的各种取值, 讨论实矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&a\\3&b&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&a-6\\0&b-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&b-6&0\\0&0&a-6\end{pmatrix}:=\boldsymbol{B},$$

(I) 当 $a=b=6$ 时, $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=1$;

(II) 当 $a=6,b\neq 6$ 或 $a\neq 6,b=6$ 时, $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$;

(III) 当 $a\neq 6$ 且 $b\neq 6$ 时, $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=3$. □

4.1.38

4.1.39 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 证明: $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=\begin{cases}n, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n,\\ 1, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1,\\ 0, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant n-2.\end{cases}$

提示 考虑 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义, 即考虑 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶子式.

证明 (I) 当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$ 时, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆, 因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=n$;

(II) 当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant n-2$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的任一 $n-1$ 阶子式均为 0, 从而 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$, 因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=0$;

(III) 当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$ 时,

一方面, $\boldsymbol{A}$ 存在非零的 $n-1$ 阶子式, 因此 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}\implies\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*\geqslant 1$;

另一方面, $|\boldsymbol{A}|=0\implies\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 由 Sylvester 不等式知,

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*\leqslant n+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)=n\implies\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*\leqslant n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1,$$

因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=1$. □

另证 对于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$ 的情形, 我们还可以从齐次线性方程组解空间的维数上考虑.

注意到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{A}^*$ 的任一列向量均为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解, 而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1\implies$ 其解空间的维数 $\dim V=1\implies\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*\leqslant 1$. □

参考 高等代数. **例 3.76**, **例 3.77**.

4.1.40

4.1.41

4.1.42 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 证明:

$$m+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=n+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}).$$

证明 由分块矩阵的初等变换知,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&-\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\end{pmatrix},$$

从而

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}) = m + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}),$$

同理, 我们有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_n) = n + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}).$$

□

4.1.43

4.2 补充习题

4.2.1 计算以下行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 & \\ \vdots & & \iddots & & \\ 0 & a_{n-1} & & * & \\ a_n & & & & \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}_n$;

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\
0 & \cdots & 0 & a_2 & \\
\vdots & & \iddots & & \\
0 & a_{n-1} & & * & \\
a_n & & & &
\end{vmatrix}
&= (-1)^{1+n} a_1
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_2 \\
\vdots & & \iddots & \\
0 & a_{n-1} & & \\
a_n & & & *
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+n} a_1 \cdot (-1)^{1+n-1} a_2
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_3 \\
\vdots & & \iddots & \\
0 & a_{n-1} & & \\
a_n & & & *
\end{vmatrix} \\
&= \cdots \\
&= (-1)^{\sum\limits_{i=2}^{n+1} i} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & x & y & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x & y \\
y & 0 & \cdots & 0 & 0 & x
\end{vmatrix}_n
&= x
\begin{vmatrix}
x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & x & y & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x & y \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x
\end{vmatrix}_{(n-1)}
- y
\begin{vmatrix}
0 & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & x & y & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x & y \\
y & 0 & \cdots & 0 & 0 & x
\end{vmatrix}_{(n-1)} \\
&= x \cdot x^{n-1} - y \cdot (-1)^{1+(n-1)} y \cdot
\begin{vmatrix}
y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
x & y & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & \cdots & x & y & 0 \\
0 & \cdots & 0 & x & y
\end{vmatrix}_{(n-2)} \\
&= x^n - (-1)^n \cdot y^n = x^n - (-y)^n.
\end{aligned}
$$

(5) 由第 (3) 问的结论得:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\
\vdots & & \iddots & & & \vdots \\
n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n
\end{vmatrix}
&= (-1)^{n+n} n
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & \cdots & 2 & 0 \\
\vdots & \iddots & & \vdots \\
n-1 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix}
= (-1)^{n+n} n \cdot (-1)^{\frac{(n+3)(n-2)}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} i \\
&= (-1)^{\frac{n^2+5n-6}{2}} n!.
\end{aligned}
$$

□

4.2.2　计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

引理 4.3 (Vandermonde 行列式)

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

引理的证明　运用递推关系或数学归纳法.

参考　线性代数 (数学专业用) 3.2.**例 4**.

解

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ & \vdots & & & \vdots \\ & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=-\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & \vdots & & & \vdots \\ & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}\right),$$

由 Vandermonde 行列式知, 上式

$$
\begin{aligned}
&= 2\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j) \\
&= 2\prod_{i=1}^n x_i \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j) \\
&= 2\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\left(\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)\right) - \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j),
\end{aligned}
$$

其中 $x_0 = 1$. □

注意 解法中第一步用到的是 "**加边法**", 目的是使行列式的阶数提高, 为初等变换提供更多的可能性, 值得留意.

4.2.3 计算行列式:

$$
\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}.
$$

引理 4.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 的矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是一个 $n\times m$ 的矩阵, 则

$$
\det(x\boldsymbol{I}_m \pm \boldsymbol{AB}) = x^{m-n}\det(x\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{BA}), \quad x\neq 0,
$$

或写作

$$
x^n\det(x\boldsymbol{I}_m \pm \boldsymbol{AB}) = x^m\det(x\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{BA}), \quad x\neq 0.
$$

提示 运用分块矩阵的初等变换.

引理的证明 注意到,

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \mp\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\boldsymbol{I}_m \pm \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\boldsymbol{I}_m & \mp\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ \mp x^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \pm x^{-1}\boldsymbol{BA} \end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \det(x\boldsymbol{I}_m \pm \boldsymbol{AB}) = x^m\det\left(\frac{1}{x}(x\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{BA})\right) = x^{m-n}\det(x\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{BA}).
$$

□

证明 (1) 注意到,

$$
\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_n + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} := \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{AB},
$$

由引理 4.4得:

$$\det(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{BA})=1+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

□

提示 (2) 考虑 “加边法”, 化为 “爪型行列式”.

参考 线性代数 (数学专业用) 3.5.**例 1**.

4.2.4 (Cauchy 方阵) 设

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s_1-t_1} & \dfrac{1}{s_1-t_2} & \cdots & \dfrac{1}{s_1-t_n}\\ \dfrac{1}{s_2-t_1} & \dfrac{1}{s_2-t_2} & \cdots & \dfrac{1}{s_2-t_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{1}{s_n-t_1} & \dfrac{1}{s_n-t_2} & \cdots & \dfrac{1}{s_n-t_n}\end{pmatrix}.$$

求 $\det\boldsymbol{C}$.

提示 先将矩阵的各元素化为多项式的形式, 再考虑多项式的因式定理.

参考 (1) 线性代数 (数学专业用) 3.5.**例 4**.

参考 (2) 高等代数. **例 1.16**.

4.2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实方阵. 求证:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)\geqslant n,$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^3$.

提示 (1) 利用矩阵的秩的不等式.

证明 (1) 由矩阵的秩的不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)&\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2)\\&\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2))\\&=\operatorname{rank}\boldsymbol{I}=n.\end{aligned}$$

□

然而, 上述解法无法快速得出等号成立的条件, 因此我们考虑下面的解法.

提示 (2) 考虑分块矩阵的初等变换.

证明 (2) 由分块矩阵的初等变换,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\\ & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

到这一步, 我们已经可以得出所需的不等式了:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{I}=n,$$

然而, 这样的过程中我们无法发掘其等号成立的条件, 因此考虑进一步变换:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3 & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix},$$

因此我们得出结论:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2) &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3 & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \\ &\geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3) + n, \end{aligned}$$

当且仅当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3)=0 \iff \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$ 时等号成立. □

说明 在证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I} \iff \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$ 时, 我们也完全可以参照上述分块矩阵初等变换的方法, 而不一定要使用矩阵的秩的不等式.

4.3 挑战题

4.3.1 设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 为待定 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 为给定 n 阶方阵. 求证: 方程 $\boldsymbol{XY}-\boldsymbol{YX}=\boldsymbol{A}$ 有解, 当且仅当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$.

4.3.2 (插值问题)

4.3.3 (线性变换的几何 - 代数视角) 证明：对于一个 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射 f，下面 2 条性质等价:

(1) 对任意向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 及实数 a，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$, $f(a\boldsymbol{x})=af(\boldsymbol{x})$;

(2) 存在一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$;

(3) 当 f 是单射时, (1)(2) 等价于：

$f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，且 f 将任何直线映成直线.

当 f 不是单射时，应该怎样修改 3 的几何描述使得它与 1,2 等价？

这个问题是视频中提到的线性变换的几何 -代数两种定义的等价性，可以看成线性变换的几何视角与代数视角。与视频中不同的是，我们不要求 m=n，所以这一几何 - 代数联系是非常普遍的。

当今后我们接触到抽象线性空间之后，1 将会失去意义（你没法想象猫构成的线性空间中的直线是什么东西，或者在一些抽象线性空间中，直线其实是弯曲的），而 2 仍然保持，这是代数视角比几何视角强的地方，他能够做超越直观的事情。

证明提示：难点在于证明 1 推出 2。建议先考虑 m=n=2 或 3 的情形，从几何上把证明写出来，然后翻译成能够推广到一般维数的代数证明语言。

4.3.4 (一个从应用中来的矩阵问题) 证明: 当 n 整除 4 时, 存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 满足:
(1) $\boldsymbol{A}$ 的元素只有 ±1;
(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = n\boldsymbol{I}_n$.

4.3.5 (二阶矩阵求幂) 设 2 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^n$ 的通项公式.

提示 考虑 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

4.4 重点习题

(6)
(7)

第 5 章　线性空间

5.1　习题

5.1.1

5.1.2

5.1.3　在 F^4 中, 判断向量 $\boldsymbol{b}$ 能否写成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 的线性组合. 若能, 请写出一种表示方式.

(1) $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 3, 0, -5), \boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 7, -3), \boldsymbol{a}_3 = (-4, 1, -2, 6), \boldsymbol{b} = (8, 3, -1, -25)$;

(2) $\boldsymbol{a}_1 = (3, -5, 2, -4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2 = (-1, 7, -3, 6)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_3 = (3, 11, -5, 10)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = (2, -30, 13, -26)^{\mathrm{T}}$.

解　(1) 往求增广矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 6 & -25 \end{pmatrix}$$

对应的方程组的解.

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & 6 & -25 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 6 & -11 & 27 \\ 0 & -13 & 26 & -65 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -11 & 27 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3.$$

(2) □

5.1.4

提示　证明 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性无关, 从而构成 F^4 中的一组基即可.

5.1.5

证明

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$\iff$ $\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_4-\boldsymbol{P}_1$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{P}_i$ $(i=1,2,3,4)$ 四点共面 ($\iff$ 以其为顶点的四面体体积 $=0$). □

5.1.6

说明 更一般的结论见习题 5.1.12(4).

5.1.7

5.1.8

5.1.9

5.1.10 判断下列向量组是否线性相关:

(1) $\boldsymbol{a}_1=(1,1,1), \boldsymbol{a}_2=(1,-2,3), \boldsymbol{a}_3=(1,4,9)$;

(2) $\boldsymbol{a}_1=(3,1,2,-4), \boldsymbol{a}_2=(1,0,5,2), \boldsymbol{a}_3=(-1,2,0,3)$;

(3) $\boldsymbol{a}_1=(-2,1,0,3), \boldsymbol{a}_2=(1,-3,2,4), \boldsymbol{a}_3=(3,0,2,-1), \boldsymbol{a}_4=(2,-2,4,6)$;

(4) $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0,0), \boldsymbol{a}_2=(0,1,-1,0), \boldsymbol{a}_3=(0,0,1,-1), \boldsymbol{a}_4=(-1,0,0,1)$.

解 (1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 线性相关 $\iff$ 系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组有非零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|=0$.

而 $|\boldsymbol{A}|=-30\neq 0$, 故向量组 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ 线性无关.

(2)

(3) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 线性相关 $\iff$ 系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组有非零解 ($\iff$ $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<4$)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&3&2\\1&-3&0&-2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\-2&1&3&2\\0&2&2&4\\3&4&-1&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\0&-5&3&-2\\0&2&2&4\\0&13&-1&12\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\0&1&1&2\\0&-5&3&-2\\0&13&-1&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\0&1&1&2\\0&0&8&8\\0&0&-14&-14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\implies \boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0},$$

故向量组 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$ 线性相关.

(4) □

5.1.11

5.1.12 下列说法是否正确? 为什么?

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s\geqslant 2)$ 线性相关, 则其中每一个向量都可以表示成其他向量的线性组合;
(2) 如果向量组的任意不是它本身的子向量组都线性无关, 则该向量组也线性无关;
(3) 若向量组线性无关, 则它的任何子向量组都线性无关;
(4) F^n 的 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关;
(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 必线性无关;
(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$ 必线性相关;
(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in F^n$ 线性无关, 则它们的加长向量组也必线性无关;
(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\in F^n$ 线性相关, 则它们的加长向量组也必线性相关.

解 (1) 错误. 例如, 取 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)$, 则有

$$2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

线性相关, 但显然 α_3 无法表示成 α_1,α_2 的线性组合.

(2) 错误. 取 F^n 中的标准基与 F^n 中一个各分量均不为零的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的并构成的向量组 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$. 显然, 其任一子向量组都线性无关, 但该向量组线性相关.

例如, 在 F^3 中, 取 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1),\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)$, 显然, 其任意不是它本身的子向量组都线性无关, 但其本身线性相关.

(3) 正确. 用反证法. 若向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的子向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$ $(r\leqslant s)$ 线性相关, 即存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$, 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}=\boldsymbol{0}\implies\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+\lambda_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}+\sum_{\substack{j\neq i_k\\k=1,2,\cdots,r}}0\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0},$$

即向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 线性相关, 与条件矛盾. 故假设不成立.

(4) 正确. 设

$$\lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_{n+1} \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{0},$$

$n+1$ 个未知数, n 个方程构成的齐次线性方程组必然有非零解, 因此 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\}$ 必然线性相关.

(5) 错误. 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 但显然 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

事实上, 上述结论对于 s 为奇数时成立, 但对于 s 为偶数的情形不成立.

假设 s 为奇数, 实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 满足

$$\begin{aligned} & \lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + \cdots + \lambda_s(\boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0} \\ \Longrightarrow\ & (\lambda_s + \lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (\lambda_{s-1} + \lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关知, 使得上述方程成立的解只有

$$\lambda_s + \lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = \cdots = \lambda_{s-1} + \lambda_s = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0,$$

这说明, $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(6) 正确.

(I) 当 s 为偶数时, 直接验证有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + (\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4) + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_{s-1} + \boldsymbol{\alpha}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + (\boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5) + \cdots + (\boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1),$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

(II) 当 s 为奇数时, 假设不全为零的实数 $t_1, t_2, \cdots, t_s$ 满足

$$t_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + t_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + t_s \boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

往求不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 使得

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + \cdots + \lambda_s(\boldsymbol{\alpha}_s + \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0},$$

只需

$$\begin{cases} \lambda_s + \lambda_1 = t_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = t_2, \\ \cdots \\ \lambda_{s-1} + \lambda_s = t_s \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & t_1 \\ 1 & 1 & & & t_2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 1 & t_s \end{pmatrix}$$

对应的非齐次线性方程组有解.

由于 s 为奇数, $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_s \end{pmatrix},$$

因此增广矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$ 对应的非齐次线性方程组有解.

(7) 正确. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$, 则

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组只有零解, 而

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,s} \end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组的解必然是 $\boldsymbol{A}$ 中的解, 故其只有零解, 即加长向量组线性无关.

(8) 错误. 例如, 取 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 4)$ 线性相关, 但 $\boldsymbol{\alpha}_1' = (1, 2, 3), \boldsymbol{\alpha}_2' = (2, 4, 7)$ 线性无关. □

5.1.13 若向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in F^n$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以表示成 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合, 且表示唯一.

证明 显然 F^n 空间中的 $n+1$ 个向量必然线性相关.

事实上, 设 $\boldsymbol{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 是 F^n 中的 $n+1$ 个向量, 则

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组必然有非零解, 故向量组 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n+1}\}$ 线性相关.

故 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ 线性相关, 即存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ 使得

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n + \lambda_{n+1} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

若 $\lambda_{n+1} = 0$, 则不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 满足

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0},$$

这与 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关矛盾.

故 $\lambda_{n+1} \neq 0$, 从而

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} \boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \boldsymbol{a}_n$$

可以表示成 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合. 下证这样的表示是唯一的.

假设存在两组实数 $(t_1,t_2,\cdots,t_n),(t_1',t_2',\cdots,t_n')$ 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{b}=t_1\boldsymbol{a}_1+t_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_n\boldsymbol{a}_n,\\ \boldsymbol{b}=t_1'\boldsymbol{a}_1+t_2'\boldsymbol{a}_2+\cdots+t_n'\boldsymbol{a}_n,\end{cases} \implies (t_1-t_1')\boldsymbol{a}_1+(t_2-t_2')\boldsymbol{a}_2+\cdots+(t_n-t_n')\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关知, 满足上述条件的数只能是

$$t_1-t_1'=t_2-t_2'=\cdots=t_n-t_n'=0 \implies t_i=t_i',\quad i=1,2,\cdots,n.$$

故这样的表示唯一. □

5.1.14 证明**向量表示基本定理**: 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\in F^n$ 线性无关, 则任意向量 $\boldsymbol{b}\in F^n$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合, 且表示唯一.

证明 同习题 5.1.13. □

5.1.15 证明: 非零向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是, 每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1<i\leqslant s)$ 都不能用它前面的向量线性表示.

提示 证明必要性时, 考虑其逆否命题.

证明 (I) 若每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1<i\leqslant s)$ 都不能被它前面的向量线性表示, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,s-1)$ 线性表示 $\implies$ $\lambda_s=0$, 同理可推得:

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s=0,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关;

(II) 若存在某个 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(1<j\leqslant s)$ 可以被其前面的向量线性表示, 记为

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1},$$

其中 μ_i $(1\leqslant i\leqslant j-1)$ 是不全为零的实数, 从而

$$\mu_1\boldsymbol{\alpha}_1+\mu_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\mu_{j-1}\boldsymbol{\alpha}_{j-1}-\boldsymbol{\alpha}_j+0\boldsymbol{\alpha}_{j+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

这说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

5.1.16 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$. 如果 $\lambda_i\neq0$, 则用 $\boldsymbol{\beta}$ 代替 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 后, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明 注意到, 由于 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 线性表示, 因此

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\iff\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}\},$$

又

$$\lambda_i \neq 0 \implies \boldsymbol{\alpha}_i = \frac{1}{\lambda_i}(\boldsymbol{\beta} - (\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + \lambda_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s)),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1} \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性表示, 从而

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1} \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}\} \iff \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}\} \iff \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\},$$

又向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 线性无关, 从而立即得到向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1} \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性无关. □

更一般地, 我们有如下的 **Steinitz 替换定理**:

引理 5.1 (Steinitz 替换定理) 设向量组 $S = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性无关, 并且可以由向量组 $T = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\}$ 线性表出. 则可以用向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 替换向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 中某 s 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_s}$, 使得向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_t}\}$ 与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\}$ 等价.

引理的证明 由于向量组 S 可以由向量组 T 线性表出, 故向量组 $T = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\}$ 与向量组 $S \cup T = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\}$ 等价. 又 S 线性无关, 故存在一个 $S \cup T$ 的极大无关组包含 S,[1] 记为

$$R = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_{t'}}\},$$

显然, 我们有 $t' = |R| = \operatorname{rank}(S \cup T) = \operatorname{rank} T \leqslant |T| = t$, 其中 $|X|$ 表示向量组 X 的元素个数.

此时, 从 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 剩余向量中任意选取 $t - t'$ 个向量添加到上述极大无关组中, 构成

$$R' = \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_{t'}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_t}\},$$

则有

$$R' \iff R \iff S \cup T \iff T,$$

此即, 向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_t}\}$ 与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\}$ 等价.

特别地, 若向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\}$ 线性无关, 则 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\alpha}_{i_{s+1}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_t}\}$ 也线性无关. □

注意 上述考虑向量组的并 $S \cup T$ 的手法有时非常有用, 值得留意.

参考 高等代数.**例 3.20**.

5.1.17 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 也线性无关.

证明 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 故

$$r = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r) \leqslant r,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 也线性无关. □

5.1.18

[1] 这是 "筛选法" 求向量组的极大无关组的直接推论.

5.1.19

5.1.20

提示 初等变换后取非零行即可.

5.1.21

提示 运用线性表示的传递性.

5.1.22 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r, 则其中任何 r 个线性无关的向量构成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组.

证明 显然, r 个线性无关的向量构成一个向量个数为 r 的线性无关向量组 S, 又向量组 $T = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的秩为 r, 故其任何一个线性无关子集的向量个数不超过 r, 从而 S 构成 T 的一个极大线性无关组. □

5.1.23 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由它的 r 个向量线性表示, 则这 r 个向量构成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组.

证明 先证明这 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关.

用反证法. 若 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关, 则其中存在一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_k}$ 可以由其它的向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由其中的 $r-1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_{k-1}}, \boldsymbol{\alpha}_{i_{k+1}}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示, 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r 矛盾.

故向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关.

(事实上, 记 $M = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$, $R = \{\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$, 由于 M 可以被 R 线性表示, 从而 $r = \operatorname{rank} M \leqslant \operatorname{rank} R \leqslant |R| = r \implies \operatorname{rank} R = r$, 从而 R 线性无关.)

又由**习题** 5.1.22的结论知, 这 r 个线性无关的向量构成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组. □

5.1.24 证明:

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s).$$

证明 记 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = t$, 取向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 的一个极大线性无关组, 其中含有 t 个向量, 记为

$$\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_m}, \boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_n}\}, \quad m \leqslant r, \quad n \leqslant s, \quad m+n=t.$$

从而其子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_m}\}, \{\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_n}\}$ 分别构成两个线性无关向量组, 它们又分别是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r\}, \{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\}$ 的子集, 从而

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) \geqslant m, \quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \geqslant n \\
\implies &\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \\
&\quad \geqslant m+n=t=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s).
\end{aligned}$$

□

5.1.25

5.1.26

5.1.27

5.1.28

5.1.29 证明: $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 的极大无关组当且仅当 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \rangle = \langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r} \rangle$, 且 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关.

证明 先证明必要性.

假设 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 的极大无关组, 从而 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ 线性无关, 且 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ 与 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ 互为线性组合, 故 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \rangle = \langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r} \rangle$. 必要性得证.

再证明充分性.

假设 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \rangle = \langle \boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r} \rangle$, 且 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关, 前者说明 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ 的某个子集构成 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ 的极大无关组, 后者说明 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ 是 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ 的某个极大无关组的子集, 故 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}\}$ 构成 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ 的极大无关组. 充分性得证. □

5.1.30 证明: 线性方程组

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

有解当且仅当 $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$, 当且仅当 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle$. 其中

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

证明 我们采用 (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1) 的顺序证明以下条件等价:

(1) 线性方程组 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$ 有解;

(2) $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$;

(3) $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle$.

(1) $\implies$ (2):

方程组有解, 从而 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ 的线性组合, 故 $\boldsymbol{b}$ 在 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ 生成的子空间 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ 中, 即 $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$.

(2) $\Longrightarrow$ (3):

$\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$, 从而存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使得

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n,$$

故 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle$ 中的任一向量

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c} &= \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n + \mu_0 \boldsymbol{b} \\
&= \mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{a}_n + \mu_0 (\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n) \\
&= (\mu_1 + \mu_0 \lambda_1) \boldsymbol{a}_1 + (\mu_2 + \mu_0 \lambda_2) \boldsymbol{a}_2 + \cdots + (\mu_n + \mu_0 \lambda_n) \boldsymbol{a}_n \\
&:= \lambda_1' \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2' \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n' \boldsymbol{a}_n,
\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{c}$ 也在 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ 中, 故

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle, \tag{5.1}$$

又 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ 是 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}\}$ 的子集, 自然有

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle, \tag{5.2}$$

由式 (5.1)(5.2) 知,

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1):

对 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} \rangle$ 中的向量 $\boldsymbol{b}$, 在 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ 中存在实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使得

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n,$$

取

$$x_1 = \lambda_1, \quad x_2 = \lambda_2, \quad \cdots, \quad x_n = \lambda_n,$$

故线性方程组

$$x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

有解. □

5.1.31

5.1.32

5.1.33

5.1.34

5.1.35 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,-1,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,0,-1)$.
(1) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基;
(2) 给出标准基在该组基下的表示;
(3) 求 $\boldsymbol{\beta}=(1,3,4,-2)$ 在该组基下的表示.

解 (1) 注意到,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & 3 & 2\\ & 1 & 2 & 3\\ & & -1 & 0\\ & & 4 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & 3 & 2\\ & 1 & 2 & 3\\ & & -1 & 0\\ & & 0 & -1\end{pmatrix}\Longrightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=4,$$

向量组 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性无关, 构成 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.

(2)

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ 11 & 14 & -1 & -4\\ 2 & 3 & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ 11 & 14 & -1 & -4\\ 2 & 3 & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}41 & 53 & -4 & -14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

5.1.36 将三维几何空间中的直角坐标系 $[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 绕单位向量 $\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 逆时针旋转 θ 角, 求新坐标与原坐标之间的关系.

提示 选取一组适当的基 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 求解该线性变换在该基下的矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再通过基 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 到基 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$, 求得线性变换在基 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$.

5.1.37 设 n 元 $n-1$ 个方程的齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$, 求该齐次线性方程组的基础解系.

提示 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式.

参考 高等代数. **例 3.76**.

5.1.38

5.1.39

5.1.40 求下列齐次线性方程组的基础解系与通解:

(1)

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0, \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0, \\ -x_1+3x_2-5x_3+7x_4-4x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4-6x_5=0. \end{cases}$

解 (2) 方程组的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

其中

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成该齐次线性方程组的一个基础解系. □

5.1.41 已知 F^5 中向量 $\boldsymbol{\eta}_1 = (1,2,3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{\eta}_2 = (1,3,2,1,2)^{\mathrm{T}}$. 找一个齐次线性方程组, 使得 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为该方程组的基础解系.

解 设

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 + a_{i5}x_5 = 0$$

是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的任意一条方程, 则其满足

$$\begin{cases} a_{i1}+2a_{i2}+3a_{i3}+2a_{i4}+a_{i5}=0, \\ a_{i1}+3a_{i2}+2a_{i3}+a_{i4}+2a_{i5}=0, \end{cases}$$

将上述方程组看作关于 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i5}$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

其通解为

$$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成它的一个基础解系, 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0, \\ -4x_1+x_2+x_4=0, \\ \quad x_1-x_2+x_5=0 \end{cases}$$

的解空间维数为 $5-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是上述方程组的两个线性无关解, 因此构成该方程组的基础解系. □

5.1.42

5.1.43 判断下列集合关于规定的运算是否构成线性空间:

(1) V 是所有实数对 (x,y) 的集合, 数域 $F=\mathbb{R}$. 定义

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2), \quad \lambda(x,y)=(x,y);$$

(2) V 是所有满足 $f(-1)=0$ 的实函数的集合, 数域 $F=\mathbb{R}$. 定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法;

(3) V 是所有满足 $f(0)\neq 0$ 的实函数的集合, 数域 $F=\mathbb{R}$. 定义加法为函数的加法, 数乘为数与函数的乘法;

(4) V 是数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的全体, 加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘.

解 (1) 不构成线性空间. 不满足数乘对纯量加法的分配律:

$$(x,y)=2(x,y)=(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y),$$

显然不成立.

(2) 构成线性空间. 容易验证其满足线性空间的 8 条性质, 其中零向量为 $f(x)\equiv 0$, $f(x)$ 的负向量为 $-f(x)$.

(3) 不构成线性空间. 对加法不封闭: 取 $f_1(x)=x+1, f_2(x)=x-1$ 均在 V 中, 但 $f_1(x)+f_2(x)=2x$ 不在 V 中.

(4) 不构成线性空间. 对加法不封闭: 取 $\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{S}_{ij}\in V$, 满足 $|\boldsymbol{I}_n|=|\boldsymbol{S}_{ij}|=1$ 均可逆, 但 $|\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{S}_{ij}|=0 \implies \boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{S}_{ij}\notin V$. 其中 $\boldsymbol{S}_{ij}$ 交换 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 i,j 行后得到的方阵. □

5.1.44 设 V 是所有实函数全体在实数域上构成的线性空间, 判断 V 中下列函数组是否线性相关:

(1) $1,x,\sin x$;

(2) $1,x,\mathrm{e}^x$;

(3) $1,\cos 2x,\cos^2 x$;

(4) $1,x^2,(x-1)^3,(x+1)^3$;

(5) $\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos(nx)$.

提示 (1) 直接通过定义进行证明.

解 (1) (1) 线性无关. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 使得

$$a+bx+c\sin x=0, \tag{5.3}$$

两边求导得:

$$b+c\cos x=0, \tag{5.4}$$

再次求导得:

$$-c\sin x=0 \implies c=0, \tag{5.5}$$

代入式 (5.4) 得: $b=0$, 代入式 (5.3) 得: $a=0 \implies a=b=c=0 \implies 1,x,\sin x$ 线性无关.

(2) 线性无关. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 使得

$$a+bx+c\mathrm{e}^x=0, \tag{5.6}$$

两边求导得:

$$b+c\mathrm{e}^x=0, \tag{5.7}$$

再次求导得:

$$ce^x = 0 \implies c = 0, \tag{5.8}$$

代入式 (5.7) 得: $b = 0$, 代入式 (5.6) 得: $a = 0 \implies a = b = c = 0 \implies 1, x, e^x$ 线性无关.

(3) 线性相关:

$$1 - 2\cos^2 x + \cos 2x = 0.$$

(4) 线性相关:

$$2 + 6x^2 + (x-1)^3 - (x+1)^3 = 0.$$

(5) 线性无关. 对 n 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时, $\cos x$ 作为一个函数线性无关;

假设结论对 $n-1$ $(n \geqslant 2)$ 成立, 下面考虑 n 时的情形. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, 使得

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos(nx) = 0, \tag{5.9}$$

连续两次求导, 得:

$$-a_1 \cos x - 2^2 a_2 \cos 2x - \cdots - n^2 a_n \cos(nx) = 0, \tag{5.10}$$

(5.9) $\times n^2 +$ (5.10) 得:

$$(n^2-1)a_1 \cos x + (n^2-2^2)a_2 \cos 2x + \cdots + (n^2-(n-1)^2)a_{n-1}\cos(n-1)x = 0, \tag{5.11}$$

由归纳假设知, $\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(n-1)x$ 线性无关, 因此满足上式的数只有

$$(n^2-1)a_1 = (n^2-2^2)a_2 = \cdots = (n^2-(n-1)^2)a_{n-1} = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0,$$

代入式 (5.9) 得: $a_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \implies \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(nx)$ 线性无关, 即结论对 n 时的情况也成立.

由数学归纳法知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(nx)$ 线性无关. □

提示 (2) 通过 Wronski 行列式证明.

引理 5.2 (Wronski 行列式) 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in C^{n-1}[a,b]$, 它们的 Wronski 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

若 $\exists x_0 \in [a,b]$, 使得 $W(x_0) \neq 0$, 则 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性无关.

或写作:

若 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 线性相关, 则 $W(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$.

解 (2) 以第 (1) 问为例.

计算得: $1, x, \sin x$ 的 Wronski 行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}1 & x & \sin x\\ 0 & 1 & \cos x\\ 0 & 0 & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin x,$$

显然 $W(x)\not\equiv 0$, 故 $1, x, \sin x$ 线性无关. □

5.1.45

5.1.46

5.1.47 V 是数域 F 上 n 阶对称方阵的全体, 定义加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘. 证明: V 是线性空间, 并求 V 的一组基及维数.

证明 显然, 其满足线性空间定义的 8 条性质, 且对加法、数乘封闭, 故构成线性空间, 其中, 零向量为 $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}$ 的负向量为 $-\boldsymbol{A}$. $\{\boldsymbol{E}_{ii}\ (1\leqslant i\leqslant n); \boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}\ (1\leqslant i<j\leqslant n)\}$ 构成 V 的一组基, 因此 $\dim V=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

5.1.48 给定矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

令 V 是与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的三阶实方阵的全体. 证明: V 在矩阵加法与数乘下构成实数域上的线性空间, 并求 V 的一组基与维数.

证明 由于 V 中的元素均为 3 阶方阵, 因此满足线性空间定义的 8 条性质, 又 $\forall \boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in V$,

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{AB}=\lambda\boldsymbol{BA}=(\lambda\boldsymbol{B})\boldsymbol{A},$$

即 V 对加法、数乘封闭, 因此构成线性空间, 其中零向量为 $\boldsymbol{O}$, 对 $\forall\boldsymbol{B}\in V$, 其负向量为 $-\boldsymbol{B}$.

容易验证, $\dim V=3$, 而

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

均在 V 中, 且线性无关, 因此构成 V 的一组基. □

说明 对于证明 $\dim V=3$, 可以采用待定系数法, 假设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{3\times 3}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的三阶实方阵, 通过线性方程组证明 $\boldsymbol{B}$ 具有 3 个独立变元. 但是, 此处我们通过特征值给出另一种证法, 其思想对于研究矩阵乘法的交换具有重要意义.

另证 注意到, $\boldsymbol{A}$ 有 3 个互异的特征值, 设 $\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 乘法可交换的矩阵, 即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 由**习题 6.1.22**的结论知, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时对角化, 即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\mu_2&\\&&\mu_3\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\mu_2&\\&&\mu_3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

具有 3 个独立变元, 因此 $\dim V=3$. □

参考 高等代数.**例 6.37**.

5.1.49

5.1.50

5.1.51

5.1.52

5.1.53

5.1.54

5.1.55

5.1.56

5.1.57

5.1.58

5.1.59

5.1.60

5.1.61

5.1.62

5.1.63

5.1.64

5.2 补充习题

5.2.1 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \\ b \end{pmatrix},$$

试问: 当 a, b 满足什么条件时, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

解 方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$$

有解

$$\iff \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \tilde{\boldsymbol{A}}.$$

注意到,

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix},$$

故当 $b = 2$ 时, $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \tilde{\boldsymbol{A}}$, 此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. □

5.2.2 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix},$$

问: t 取何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法不唯一;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 (1) 当 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法唯一时, 方程

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 x_3 = \boldsymbol{\beta} \tag{5.12}$$

的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+t & 1 & 1 \\ 1 & 1+t & 1 \\ 1 & 1 & 1+t \end{pmatrix}$$

的行向量线性无关

$$\iff |\boldsymbol{A}| = t^3 + 3t^2 = t^2(t+3) \neq 0 \iff t \neq 0 \text{ and } t \neq -3.$$

(2) 当 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法不唯一时, 必有方程 (5.12) 的增广矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+t & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & 1 & t \\ 1 & 1 & 1+t & t^2 \end{pmatrix}$$

的行向量线性相关, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的行向量必然线性相关 $\implies t = 0 \text{ or } t = -3$.

(I) $t = 0$ 时, 方程 (5.12) 等价于

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

显然解不唯一;

(II) $t = -3$ 时, 方程 (5.12) 的增广矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

显然方程无解.

故当 $t = 0$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法不唯一.

(3) 由前述讨论知, $t = -3$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

综上,

(1) $t \neq 0$ and $t \neq -3$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法唯一;

(2) $t = 0$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法不唯一;

(3) $t = -3$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. □

5.2.3 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=3, \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5=5, \\ x_1-x_2-x_3-x_4+2x_5=a, \\ -3x_1+2x_2+3x_3+2x_4-5x_5=b. \end{cases}$$

问:

(1) a,b 为何值时, 方程组无解;

(2) a,b 为何值时, 方程组有解. 并求其通解.

解 方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & a \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -5 & b \end{pmatrix}.$$

注意到,

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & a \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -5 & b \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & a-3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 & b+9 \end{pmatrix} \\ \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

因此当

$$\operatorname{rank}\tilde{\boldsymbol{A}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2 \implies a=-1 \text{ and } b=1$$

时, 原方程组有解, 其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}.$$

综上所述,

(1) 当 $a \neq -1$ or $b \neq 1$ 时, 原方程组无解;

(2) 当 $a = -1$ and $b = 1$ 时, 原方程组有解, 其通解如上. □

5.2.4 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 若 a_1, a_2, a_3, a_4 互不相等, 求证该方程组无解;

(2) 设 $a_1 = a_3, a_2 = a_4, a_1 \neq a_2$, 且 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是方程组的两个解. 求该方程组的通解.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}$$

(1)

证明 方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix},$$

若 a_1, a_2, a_3, a_4 互不相等, 由**引理 4.3(Vandermonde 行列式)**知, $\boldsymbol{A}$ 的子式

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_j - a_i) \neq 0 \implies \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3,$$

同理,

$$\left|\tilde{\boldsymbol{A}}\right| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (a_j - a_i) \neq 0 \implies \operatorname{rank} \tilde{\boldsymbol{A}} = 4 \neq \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

故原方程组无解. □

(2)

解 原方程等价于

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \end{cases}$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 代入, 得:

$$\begin{cases} -1+a_i+a_i^2=a_i^3, \\ 1+a_i-a_i^2=a_i^3 \end{cases} \implies -1+a_i+a_i^2=1+a_i-a_i^2 \implies a_i=\pm 1, \quad i=1,2.$$

故该方程组化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=-1, \end{cases}$$

其增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故方程的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

5.2.5 (Special Linear Lie Algebra) 设 $\mathfrak{sl}(n,F)=\left\{\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}\middle|\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0\right\}$.

(1) 证明: $\mathfrak{sl}(n,F)$ 是 $F^{n\times n}$ 的一个子空间, 并求其维数和一组基;

(2) 举例说明存在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathfrak{sl}(n,F)$ 使得 $\boldsymbol{AB}\notin\mathfrak{sl}(n,F)$;

(3) 证明: $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathfrak{sl}(n,F)$, 有 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\in\mathfrak{sl}(n,F)$;

(4) 记 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$. 设 V 是 $\mathfrak{sl}(n,F)$ 的子空间, 且满足对 $\forall \boldsymbol{A}\in V,\boldsymbol{B}\in\mathfrak{sl}(n,F)$, 有 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\in V$, 证明: $V=\{\boldsymbol{O}\}$ 或 $V=\mathfrak{sl}(n,F)$.

证明 (1) 由矩阵的加法和数乘知, 对 $\forall \boldsymbol{AB}\in\mathfrak{sl}(n,F),\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})+\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})=0 \implies \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in\mathfrak{sl}(n,F)$$
$$\operatorname{tr}(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0 \implies \lambda\boldsymbol{A}\in\mathfrak{sl}(n,F),$$

即 $\mathfrak{sl}(n,F)$ 对加法和数乘封闭, 从而构成 $F^{n\times n}$ 的子空间. 下求其维数和基.

考虑如下 $(n-1)+n(n-1)=n^2-1$ 个 n 阶方阵:

$$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

以及 $\{\boldsymbol{E}_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j\}$, 其中

$$\boldsymbol{e}_k:\begin{cases} (\boldsymbol{e}_k)_{11}=-1, \\ (\boldsymbol{e}_k)_{kk}=1, \\ (\boldsymbol{e}_k)_{ij}=0, \qquad (i,j)\neq(1,1) \text{ and } (i,j)\neq(k,k), \end{cases} \qquad k=2,3,\cdots,n.$$

注意这里我们为了记号方便, 没有引入 $\boldsymbol{e}_1$.

往证: $M=\{\boldsymbol{e}_k|k=2,3,\cdots,n\}\cup\{\boldsymbol{E}_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j\}$ 构成 $\mathfrak{sl}(n,F)$ 的一组基.

事实上, 对 $\forall \boldsymbol{A}\in\mathfrak{sl}(n,F)$, 满足 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$, 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以被 M 中元素的线性组合所唯一表示:

$$\boldsymbol{A}=\sum_{k=2}^{n}a_{kk}\boldsymbol{e}_k+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij},$$

又 M 中元素线性无关且均在 $\mathfrak{sl}(n,F)$ 中, 故其构成 $\mathfrak{sl}(n,F)$ 的一组基, 且 $\dim(\mathfrak{sl}(n,F))=|M|=n^2-1$. 此处 $|M|$ 表示 M 中的元素个数.

(2) 考虑上述定义的 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\in\mathfrak{sl}(n,F)$, 而

$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}\implies\operatorname{tr}(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)=1\implies\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\notin\mathfrak{sl}(n,F).$$

(3) 对 $\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathfrak{sl}(n,F)$, 记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$, 则

$$\begin{aligned}c_{ii}&=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}\\ \implies\operatorname{tr}(\boldsymbol{C})&=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{ik}=0\\ \implies&\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\in\mathfrak{sl}(n,F).\end{aligned}$$

(4)

□

5.2.6 (Hamilton Quaternion) 将 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 看作一个实线性空间 ($\mathbb{R}$ 上的线性空间), 令

$$\mathbb{H}=\left\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{2\times2}\middle|\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\-\overline{z_2}&\overline{z_1}\end{pmatrix},z_1,z_2\in\mathbb{C}\right\}.$$

(1) 证明: $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{C}^{2\times2}$ 的一个子空间;

(2) 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{H}$, 证明: $|\boldsymbol{A}|\geqslant0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{H}$, 证明: $\boldsymbol{AB}\in\mathbb{H}$;

(4) 记 $\boldsymbol{1}=\boldsymbol{I}_2$. 证明: 存在 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\in\mathbb{H}$ 使得 $\boldsymbol{1},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为 $\mathbb{H}$ 的一组基, 且 $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-\boldsymbol{1}$.

证明　(1) 对 $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{H}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, 不妨设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ -\overline{z_2'} & \overline{z_1'} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} z_1+z_1' & z_2+z_2' \\ -\overline{z_2}-\overline{z_2'} & \overline{z_1}+\overline{z_1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1+z_1' & z_2+z_2' \\ -\overline{z_2+z_2'} & \overline{z_1+z_1'} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \in \mathbb{H},$$

$$\lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 & \lambda z_2 \\ -\lambda\overline{z_2} & \lambda\overline{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 & \lambda z_2 \\ -\overline{\lambda z_2} & \overline{\lambda z_1} \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda\boldsymbol{A} \in \mathbb{H},$$

即 $\mathbb{H}$ 对加法和数乘封闭, 从而构成 $\mathbb{C}^{2\times 2}$ 的一个子空间.

(2) 计算得:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{vmatrix} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \geqslant 0,$$

上式等号成立当且仅当 $|z_1| = |z_2| = 0 \iff z_1 = z_2 = 0 \iff \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

(3) 仍记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} z_1' & z_2' \\ -\overline{z_2'} & \overline{z_1'} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} z_1z_1' - z_2\overline{z_2'} & z_1z_2' + \overline{z_1'}z_2 \\ -z_1'\overline{z_2} - \overline{z_1}\overline{z_2'} & -\overline{z_2}z_2' + \overline{z_1}\overline{z_1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1z_1' - z_2\overline{z_2'} & z_1z_2' + \overline{z_1'}z_2 \\ -\overline{z_1z_2' + \overline{z_1'}z_2} & \overline{z_1z_1' - z_2\overline{z_2'}} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{AB} \in \mathbb{H}.$$

(4) 取

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \\ & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \end{pmatrix},$$

其中 i 是复数单位.

一方面, 易验算得:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}.$$

另一方面, 对 $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{H}$, 记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a+b\,\mathrm{i} & c+d\,\mathrm{i} \\ -c+d\,\mathrm{i} & a-b\,\mathrm{i} \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 被表成了 $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 的线性组合, 且这种表示是唯一的, 又 $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 线性无关且均在 $\mathbb{H}$ 中, 故其构成 $\mathbb{H}$ 的一组基. □

说明　事实上, 不难验证, $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 满足

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j},$$

这与 3 维空间直角坐标

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

有着相似之处.

5.2.7

5.2.8

5.3 重点习题

5.1.17

第 6 章　线性变换

6.1　习题

6.1.1　判断下列所定义的变换, 哪些是线性的, 哪些不是线性的:

(1) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\mathscr{A}(a,b)=(a+b,a^2)$;

(2) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $\mathscr{A}(a,b,c)=(a-b,c,a+1)$;

(3) 取定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(F)$, 对每个 $\boldsymbol{X}\in M_n(F), \mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$;

(4) 在线性空间 V 中, $\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 V 中一个固定的向量.

解　(1) 非线性. 对 $(a,b)=(1,0), k=2$,

$$\begin{cases}\mathscr{A}(2a,2b)=(2a+2b,(2a)^2)=(2,4),\\ 2\mathscr{A}(a,b)=(2a+2b,2a^2)=(2,2)\end{cases}\Longrightarrow \mathscr{A}(2a,2b)\neq 2\mathscr{A}(a,b).$$

(2) 非线性. 对 $(a,b,c)=(1,0,0), k=2$,

$$\begin{cases}\mathscr{A}(2a,2b,2c)=(2a-2b,2c,2a+1)=(2,0,3),\\ 2\mathscr{A}(a,b,c)=(2a-2b,2c,2a+2)=(2,0,4)\end{cases}\Longrightarrow \mathscr{A}(2a,2b,2c)\neq 2\mathscr{A}(a,b,c).$$

(3) 线性的. 对 $\forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in M_n(F), \forall k,l\in\mathbb{R}$,

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{X}+l\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X}+l\boldsymbol{Y})-(k\boldsymbol{X}+l\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})+l(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{B})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{X})+l\mathscr{A}(\boldsymbol{Y}),$$

因此 $\mathscr{A}$ 是线性的.

(4) (I) 当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时, $\mathscr{A}$ 是线性的: 对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}, \forall k,l\in\mathbb{R}$,

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}=k\mathscr{A}(\boldsymbol{x})+l\mathscr{A}(\boldsymbol{y});$$

(II) 当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\mathscr{A}$ 是非线性的: 对 $\forall \boldsymbol{x}, k=2$,

$$\begin{cases}\mathscr{A}(2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\alpha},\\ 2\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{\alpha}\end{cases}\Longrightarrow \mathscr{A}(2\boldsymbol{x})\neq 2\mathscr{A}(\boldsymbol{x}).$$

□

6.1.2 求下列线性变换在所指定的基下的矩阵:

(1) $\mathbb{R}^3$ 中的投影变换 $\mathscr{A}(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,0)$ 在自然基下;

(2) 在 $F_n[x]$ 中, $\mathscr{A}(P(x))=P'(x)$, 在基 $\boldsymbol{e}_0=1,\boldsymbol{e}_1=x,\cdots,\boldsymbol{e}_n=\dfrac{x^n}{n!}$ 下;

(3) 以四个线性无关的函数

$$\alpha_1=\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\quad \alpha_2=\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\quad \alpha_3=x\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\quad \alpha_4=x\mathrm{e}^{ax}\sin bx$$

为基的四维空间中, 线性变换为微分变换;

(4) 给定 2 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}$ 在基

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

下的矩阵.

解 (1)

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_0)=0,\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_{i-1},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ &0&1&\ddots&\vdots\\ &&\ddots&\ddots&0\\ &&&0&1\\ &&&&0\end{pmatrix}.$$

说明 若记 $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{x^n}{n!}$, 则这组基为 $\{\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})\}$.

(3)

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\alpha_1)=\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)=a\alpha_1-b\alpha_2,\\ \mathscr{A}(\alpha_2)=\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)=b\alpha_1+a\alpha_2,\\ \mathscr{A}(\alpha_3)=\mathrm{e}^{ax}(\cos bx+ax\cos bx-bx\sin bx)=\alpha_1+a\alpha_3-b\alpha_4,\\ \mathscr{A}(\alpha_4)=\mathrm{e}^{ax}(\sin bx+ax\sin bx+bx\cos bx)=\alpha_2+b\alpha_3+a\alpha_4,\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&1&0\\-b&a&0&1\\0&0&a&b\\0&0&-b&a\end{pmatrix}.$$

给定 2 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$, 求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XA}$ 在基

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵.

(4) 记 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = -a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{21}\boldsymbol{e}_3, \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -a_{21} & a_{11} - a_{22} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = -a_{21}\boldsymbol{e}_1 + (a_{11} - a_{22})\boldsymbol{e}_2 + a_{21}\boldsymbol{e}_4, \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} - a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix} = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + (a_{22} - a_{11})\boldsymbol{e}_3 - a_{12}\boldsymbol{e}_4, \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}\boldsymbol{e}_2 - a_{21}\boldsymbol{e}_3, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & a_{11} - a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

6.1.3 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}(x, y, z) = (x + 2y, x - 3z, 2y - z).$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵.

解

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1) = (1, 1, 0) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_2) = (2, 0, 2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3, \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{e}_3) = (0, -3, -1) = -3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

6.1.4 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 将

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$$

变换到

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 3, 5)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\mathscr{A}$ 在自然基和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵.

解 设 $\mathscr{A}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 在 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{A},\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{B}.$$

对 $\forall\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\x_{3j}\end{pmatrix}\ (j=1,2,3)$, 则

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\x_{3j}\end{pmatrix}\right)=(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3))\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\x_{3j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\x_{3j}\end{pmatrix},$$

又

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{1j}\\y_{2j}\\y_{3j}\end{pmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y},$$

其中 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{3\times3},\boldsymbol{Y}=(y_{ij})_{3\times3}$.

从而, 为了求 $\boldsymbol{A}$, 我们只需求 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$.

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-3&3\\-1&-5&5\end{pmatrix}.$$

同理, 为了求 $\boldsymbol{B}$, 记

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_{1j}\\z_{2j}\\z_{3j}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_{1j}\\w_{2j}\\w_{3j}\end{pmatrix},\quad j=1,2,3,$$

且 $\boldsymbol{Z}=(z_{ij})_{3\times3},\boldsymbol{W}=(w_{ij})_{3\times3}$. 则有

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{W}\ \Longrightarrow\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z}^{-1}=\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

$\square$

另解 事实上, 注意到自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{X},$$

我们立即得到

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

□

讨论 同一个空间 V 下的线性映射 $\mathscr{A}$ (即线性变换), 将原像和像分别用 V 中的两组不同的基 $M_1:\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$, $M_2:\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 表示, 是否也有定义: 当 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A},\tag{6.1}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 在基 M_1 和 M_2 下的矩阵?

† 上述定义是合理的, 但是本题按照**分别**求 $\mathscr{A}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 下的矩阵和在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的矩阵这两个矩阵来理解. (线性代数 B1 课本没有定义线性映射在两组不同基下的矩阵, 自然也没有定义线性变换 (原像和像在两组不同基下表示) 在两组不同基下的矩阵.)

说明 对于一个向量空间 V 上的线性变换, 我们通常取 V 的一组基, 而不取两组基, 因此通常也不定义线性变换在两组基下的矩阵.

不过, 我们不妨也计算一下式 (6.1) 中所定义的 $\mathscr{A}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 和基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的矩阵.

解 设 $\mathscr{A}$ 在自然基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 和基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{C}$, 即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{C}.$$

对 $\forall\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{1j}\\u_{2j}\\u_{3j}\end{pmatrix}$ $(j=1,2,3)$, 类似前述讨论, 我们有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{1j}\\u_{2j}\\u_{3j}\end{pmatrix}\right)=(\mathscr{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3))\begin{pmatrix}u_{1j}\\u_{2j}\\u_{3j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}u_{1j}\\u_{2j}\\u_{3j}\end{pmatrix},$$

又

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\beta}_j:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{1j}\\v_{2j}\\v_{3j}\end{pmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{CU}=\boldsymbol{V},$$

其中 $\boldsymbol{U}=(u_{ij})_{3\times3}(=\boldsymbol{X}),\boldsymbol{V}=(v_{ij})_{3\times3}(=\boldsymbol{W})$.

从而,

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{U}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{C}=\boldsymbol{VU}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\2&0&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

□

6.1.5 设 V 为 n 维线性空间, $\mathscr{A}:V\to V$ 为线性变换. 若存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使得 $\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\neq\boldsymbol{0}$, 但是 $\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$, 证明: $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\&0&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&0\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}.$$

提示 通过 $\boldsymbol{\alpha}$ 构造一组 V 的基. (可参考**习题** 6.1.2(2))

证明 往证: $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关.

设 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$, 使得

$$\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\lambda_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},$$

由于 $\mathscr{A}:V\to V$ 是线性映射, $\mathscr{A}(\boldsymbol{0})=\mathscr{A}(2\cdot\boldsymbol{0})=2\mathscr{A}(\boldsymbol{0})\implies\mathscr{A}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 将 $\mathscr{A}$ 作用于上式两边, 得:

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}(\lambda_0\boldsymbol{\alpha}+\lambda_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\lambda_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{A}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}\\ \Longrightarrow\ &\lambda_0\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_1\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\lambda_{n-1}\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}\\ \xLeftrightarrow{\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}}\ &\lambda_0\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_1\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\lambda_{n-2}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

将 $\mathscr{A}$ 连续作用, 同理可得:

$$\begin{gathered}\lambda_0\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_1\mathscr{A}^3(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\lambda_{n-3}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},\\ \lambda_0\mathscr{A}^3(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_1\mathscr{A}^4(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\lambda_{n-4}\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},\\ \cdots,\\ \lambda_0\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},\\ \lambda_0\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0},\end{gathered}$$

由最后一式及 $\mathscr{A}^n(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$ 立即得到: $\lambda_0=0$, 再依次代回上一条式, 同理可得:

$$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,$$

因此 $\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关, 又 $\dim V=n$, 故其构成 V 的一组基.

考虑 $\mathscr{A}$ 在基 $M=\left\{\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}^{n-2}(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\alpha}\right\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

注意到,

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}))=\mathbf{0},\quad \mathscr{A}(\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\alpha}))=\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\alpha}),\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ &0&1&\ddots&\vdots\\ &&\ddots&\ddots&0\\ &&&0&1\\ &&&&0\end{pmatrix}.$$

□

6.1.6

6.1.7

6.1.8

6.1.9

6.1.10

6.1.11 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 证明:

(1) 对每个正整数 k, $\boldsymbol{A}^k$ 相似于 $\boldsymbol{B}^k$;

(2) 对每个多项式 f, $f(\boldsymbol{A})$ 相似于 $f(\boldsymbol{B})$.

证明 (1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^k=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^k&=\underbrace{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\cdots\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}_{k\text{ 个 }\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})\cdots(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P},\quad \forall k\in\mathbb{N}^*,\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{B}^k$ 相似.

(2) 注意到, 若存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P},$$

则有

$$\lambda \boldsymbol{B}_1 + \mu \boldsymbol{B}_2 = \lambda \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P} + \mu \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}(\lambda \boldsymbol{A}_1 + \mu \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{P}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

故对任意多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \cdots, n,$$

由 (1) 的结论及上述讨论知, 我们有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{B}) &= a_n \boldsymbol{B}^n + a_{n-1}\boldsymbol{B}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{B} + a_0 \boldsymbol{I} \\ &= \boldsymbol{P}^{-1}(a_n \boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I})\boldsymbol{P} \\ &= \boldsymbol{P}^{-1} f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}, \end{aligned}$$

故 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $f(\boldsymbol{B})$ 相似. □

6.1.12 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值一定不为 0;

(2) 若 $\lambda(\neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, 且对应的特征向量相同.

证明 (1) 假设存在 $\boldsymbol{X}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$

即满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = 0\boldsymbol{X}$ 的向量 $\boldsymbol{X}$ 只能是 $\boldsymbol{0}$, 故 $\lambda = 0$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(2) 若 $\lambda(\neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 即存在非零向量 $\boldsymbol{X}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \implies \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} \implies \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} = \lambda^{-1}\boldsymbol{X},$$

此即 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值, 且 $\boldsymbol{X}$ 是属于 λ^{-1} 的特征向量. □

另证 (1) $|\boldsymbol{A}| = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0 \implies \lambda_i \neq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □

说明 我们还有结论: $\dfrac{1}{\lambda}|\boldsymbol{A}|$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

6.1.13

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 ± 1;

(2) 设 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 的特征值为零或纯虚数.

(1)

证明 (1) 假设非零向量 $\boldsymbol{X}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \implies \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{X}) = \lambda^2 \boldsymbol{X} \implies \lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1.$$

□

引理 6.1 若 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式, 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 λ_i 都是 $f(\lambda)$ 的根. 特别地, $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $d_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 的根.

参考 线性代数 (数学专业用) 6.7.**例 3**.

证明 (2) 记 $f(\lambda) = \lambda^2 - 1$, 则 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$, 因此 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式, 由**引理 6.1** 知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 $f(\lambda)$ 的根 ± 1. □

(2)

提示 考虑 $\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

证明 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 非零向量 $\boldsymbol{X}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \implies \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}} = \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{X}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}} = \overline{\lambda\boldsymbol{X}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}},$$

从而, 我们有

$$\begin{aligned}\lambda\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = \overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X} = -(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = -(\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = -\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ \implies \lambda = -\overline{\lambda},\end{aligned}$$

其中已用到 $\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$. 故 $\lambda = 0$ 或为纯虚数. □

说明 与 (2) 类似, 我们有实对称方阵的特征值为实数.

6.1.14 设 λ_1, λ_2 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明: $\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证明 用反证法. 假设 $\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$ 是属于特征值 λ_3 的特征向量, 由题意得:

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = \lambda_1\boldsymbol{X}_1, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 = \lambda_2\boldsymbol{X}_2\end{cases} \implies \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2) = \lambda_1\boldsymbol{X}_1 + \lambda_2\boldsymbol{X}_2 = \lambda_3(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2), \\ &\implies (\lambda_3 - \lambda_1)\boldsymbol{X}_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{0}, \qquad (6.2)\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 因此 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 线性无关, 否则若其线性相关, 不妨假设存在非零实数 k 使得 $\boldsymbol{X}_1 = k\boldsymbol{X}_2$, 则有

$$k\lambda_1\boldsymbol{X}_2 = \lambda_1\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 = k\lambda_2\boldsymbol{X}_2 \xRightarrow[k\neq 0]{\boldsymbol{X}_2\neq\boldsymbol{O}} \lambda_1 = \lambda_2,$$

这与题设矛盾, 故 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 线性无关, 从而满足方程 (6.2) 的解只能是

$$\lambda_3 - \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3,$$

这仍然是矛盾的, 故 $\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. □

6.1.15 求下列矩阵的全部特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in (0, \pi)$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解 (1)

(2)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\cos\theta \cdot \lambda + 1 = 0,$$

$$\Longrightarrow \lambda = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta, \quad \theta \in (0, \pi),$$

考虑方程 $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解. 即系数矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}\sin\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \mathrm{i}\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -\mathrm{i}\sin\theta \end{pmatrix}$$

分别对应的齐次线性方程组的解, 从而分别得到复特征向量

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

分别是属于 $\lambda_1 = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \lambda_2 = \sin\theta - \mathrm{i}\sin\theta$ $(\theta \in (0, \pi))$ 的特征向量.

(3)

(4)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda - 16 = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2),$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2,$$

考虑方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的解, 分别对应系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

易得

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是属于 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量,

$$\boldsymbol{X}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是属于 $\lambda_2 = -2$ 的特征向量. □

6.1.16 设 V 为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间, 线性变换 $\mathscr{A} : V \to V$ 满足:

$$\mathscr{A}(1) = x^2 + x + 3, \quad \mathscr{A}(x) = 2x + 1, \quad \mathscr{A}(x^2) = 2x^2 + 3.$$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量.

解 取 V 中的一组基 $M = \{1, x, x^2\}$, 则由题意知, $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

即 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 M 下的坐标 $\boldsymbol{X}$,

$$\mathscr{A} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{AX},$$

考虑 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量. 令

$$\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) = 0,$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2},$$

易求得其对应的特征向量为

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{\beta}_1 = x^2 - 3x, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = x^2 + x + \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = x^2 + x + \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

分别是 $\mathscr{A}$ 的属于 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}, \lambda_3 = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}$ 的特征向量. □

6.1.17 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的全部特征值为 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

证明 (1) 易得:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(-1)^{(j-i)+(j-i)-1}a_{ij}a_{ji}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ii}a_{jj},\\
\Longrightarrow\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)^2-2\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(-1)a_{ij}a_{ji}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ii}a_{jj}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}a_{ji}\\
&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.
\end{aligned}$$

□

提示 (2) 考虑矩阵 $\boldsymbol{A}^2$.

证明 (2) 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 知, 存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为上三角阵, 且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^2=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & ** & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix},$$

而 $\varphi_{\boldsymbol{A}^2}(\lambda)=\varphi_{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}}(\lambda)$, 因此 $\boldsymbol{A}^2$ 的全部特征值为 $\lambda_i^2\ (i=1,2,\cdots,n)$, 从而

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

□

说明 一般地, 我们有:

设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, $f(x)$ 为实系数多项式, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $f(\lambda_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$.

6.1.18 判断下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化? 若可以, 试求变换矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&1&1\\2&2&0\end{pmatrix}$; (3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\4&-2&-8\\-4&0&-1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$; (4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

解 (1)

(2)

(3) 其特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&-1\\-4&\lambda+2&8\\4&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化, 则特征值 $\lambda=1$ 的几何重数为 2 $\Longrightarrow$ 其特征子空间 V_1 的维数 $\dim V_1=2$, 但

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}-2&0&-1\\-4&3&8\\4&0&2\end{pmatrix}=2\Longrightarrow\dim V_1=3-\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

(4) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4),$$

其特征值 $\lambda=1$ 的特征向量

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$\lambda=4$ 的特征向量

$$\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 是由线性无关的向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 为列向量构成的方阵, 因此可逆, 且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2&\boldsymbol{X}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2&4\boldsymbol{X}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2&\boldsymbol{X}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(1,1,4)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且方阵 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}$$

为对角阵. □

6.1.19 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 x, y 应满足的条件.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),$$

显然 $\lambda = 1$ 与 $\lambda = 2$ 的特征向量线性无关, 因此只需存在 2 个线性无关的属于 $\lambda = 1$ 的特征向量, 即 $\lambda = 1$ 的特征子空间 V_1 的维数 $\dim V_1 = 2 \implies \mathrm{rank}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$, 即

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \implies x = -y.$$

□

6.1.20 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

(1) 求 x, y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 从而其特征多项式相等, 即

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \varphi_{\boldsymbol{B}}(\lambda),$$

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)((\lambda - 1)(\lambda - x) - 2),$$

$$\varphi_{\boldsymbol{B}}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - y),$$

从而 $\lambda = -1$ 是 $\varphi_{\boldsymbol{A}} = 0$ 的根 $\implies x = 0$, 同理 $\lambda = -2$ 是 $\varphi_{\boldsymbol{B}} = 0$ 的根 $\implies y = -2$, 故 $x = 0, y = -2$.

(2) $\lambda=-1$ 时, 方程 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

同理可求得 $\lambda=2,-2$ 分别有特征值

$$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 是 3 个线性无关的 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 是以 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 为列向量的方阵, 从而 $\boldsymbol{T}$ 是可逆方阵, 且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{X}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}.$$

□

6.1.21 (幂零矩阵) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 满足 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$, 其中 $m\geqslant 2$ 为正整数.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 证明: $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵;

(3) 证明: $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=1$.

解 (1) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{X}$ 是属于 λ 的特征向量, 从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}, \quad \cdots,$$

由数学归纳法易证得: $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\lambda^k\boldsymbol{X}$ $(\forall k\in\mathbb{N}^*)$, 特别地, 对 $k=m$ 成立, 我们有

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{X}=\lambda^m\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \Longrightarrow \lambda^m=0 \Longrightarrow \lambda=0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 $\lambda=0$.

(2) 用反证法. 若存在某个可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵, 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似知, $\boldsymbol{B}$ 的特征值也只有 0, 从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O} \Longrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{O}$, 与题设矛盾, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角矩阵.

(3) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 $\lambda=0$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^n,$$

在上式中取 $\lambda=-1$, 得:

$$\det(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(-1)^n \Longrightarrow \det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=(-1)^n\det(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=1.$$

□

另证 (3) 考虑相似上三角化.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只有 0, 因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & * & \cdots & * \\ & 0 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0\end{pmatrix},$$

从而

$$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{P})=\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\begin{vmatrix}1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1\end{vmatrix}=1.$$

□

6.1.22 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 证明: $\boldsymbol{B}$ 相似于对角矩阵.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 分别对应 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$, 即

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i,\quad i=1,2,\cdots,n,\\ \Longrightarrow\ &\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{B}\lambda_i\boldsymbol{X}_i=\lambda_i(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i),\quad i=1,2,\cdots,n,\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i$ 也是属于 λ_i 的特征向量, 由于 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互异, 因此 λ_i 的特征子空间

$$V_{\lambda_i}=\{k\boldsymbol{X}_i|k\in\mathbb{R}\},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

而 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i\in V_{\lambda_i}\implies\exists\mu_i\in\mathbb{R}$, 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_i=\mu_i\boldsymbol{X}_i$, 这说明 $\boldsymbol{X}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 至此, 我们得到了 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

事实上, 我们有: 记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \cdots & \boldsymbol{X}_n\end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}.$$

即, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时对角化. □

参考 高等代数.**例 6.37**.

6.1.23 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant n$.

引理 6.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{m\times n}$, 则有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}.$$

引理 6.3 (Sylvecter 秩不等式) 设 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n},\boldsymbol{B}\in F^{n\times p}$, 则有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}-n\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}.$$

引理 6.4 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$, 则有 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant n$.

事实上, 我们有下列 3 个条件等价: ($\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵)

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$;

(2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$;

(3) $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant n$.

证明 (1) 我们只证明 (1) $\Longrightarrow$ (2).

一方面, 由**引理** 6.2, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})&=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&\geqslant\operatorname{rank}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}))=n,\end{aligned}$$

另一方面, 由**引理** 6.3及 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$, 我们有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leqslant n+\operatorname{rank}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}))=n+\operatorname{rank}\boldsymbol{O}=n,$$

因此

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n.$$

最后, 由上式及**引理** 6.4知, $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant n$. □

引理 6.5 复方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式没有重根.

证明 (2) 记 $f(\lambda)=\lambda^2-1\implies f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 即 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $d_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 是 $f(\lambda)$ 的因式, 由于 $f(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)$ 没有重根, 因此 $d_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 也没有重根, 由**引理** 6.5知, $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 即, 存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n):=\boldsymbol{B},$$

其中 $\lambda_i\in\{\pm1\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. (此处已用到**习题** 6.1.13(1)的结论: $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 ±1, 对角阵 $\boldsymbol{B}$ 与其相似, 故其主对角线上的元素只能是其特征值 ±1.)

又可以通过适当的排列, 使得

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r,-\boldsymbol{I}_{n-r}),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant n$. □

6.1.24 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实方阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 在实数域上不相似于上三角矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是否一定在复数域上相似于对角矩阵?

引理 6.6 复数域上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于上三角矩阵. 特别地, 当 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值均为实数时, $\boldsymbol{A}$ 实相似于上三角阵.

引理的证明 由数学归纳法不难证明.

证明 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 有 3 个实根 (计重数), 则由**引理** 6.6知, $\boldsymbol{A}$ 必实相似于上三角阵, 反之, $\boldsymbol{A}$ 不实相似于上三角阵, 故 $\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ 必有 1 个实根, 2 个共轭虚根, 即 $\boldsymbol{A}$ 在复数域上有 3 个不同的特征值, 从而其在复数域上相似于对角矩阵. □

6.1.25

6.1.26

6.1.27

6.1.28

6.1.29

6.1.30

6.1.31

6.2 补充习题

6.2.1 (Cayley-Hamilton 定理) 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 n 阶方阵, 其特征多项式

$$\varphi_A(\lambda)=f(\lambda)=|\lambda \boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

求证:

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}.$$

6.2.2 设 2 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

证明 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{X}$ 为属于 λ 的特征向量, 从而

$$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}\implies \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\lambda^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{OX}=\boldsymbol{0}\implies \lambda=0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 相似于复上三角阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}$ $(t\in\mathbb{C})$, 即存在可逆复方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$.

若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\implies t\neq 0$, 取 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{t}&0\\0&1\end{pmatrix}$, 从而

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}t&0\\0&1\end{pmatrix}\implies \boldsymbol{QBQ}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\iff \boldsymbol{QPAP}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{QP}$, 满足 $\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{TAT}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. □

参考 线性代数与解析几何 6.4.**例 6.4.5**.

6.2.3 求一个特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^4-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+1$ 的实方阵.

引理 6.7 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & & & & -a_0\\ 1 & & & & -a_1\\ & 1 & & & -a_2\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

换句话说, 对任意的 n 次多项式 $f(\lambda)$, 我们总可以找到对应的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $f(\lambda)=\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$.

引理的证明 直接验证即可.

说明 将 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 按第一行展开, 并用递推式, 即得到著名的**秦九韶算法**.

参考 高等代数.**例 6.14**.

6.2.4 证明或证伪:

(1) 两个方阵的特征多项式相等, 则它们相似;

(2) 两个方阵的最小多项式相等, 则它们相似;

(3) 两个方阵的特征多项式及最小多项式均相等, 则它们相似.

6.2.5

6.2.6

6.2.7

6.2.8

6.2.9

6.2.10

6.3 重点习题

6.1.22

6.1.23

第 7 章　Euclid 空间

7.1　习题

7.1.1

7.1.2　设在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 给出的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

试求 $\mathbb{R}^3$ 中由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 给出的一组标准正交基.

提示 (1)　运用 Gram-Schmidt 正交化.

解 (1)　取 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2, \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1,
\end{aligned}$$

又

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = 1, \\ (\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2) = 2, \\ (\boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_3) = 2 + 1 + 2 \cdot (-1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\gamma}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{\beta}_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\gamma}_3 = \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

从而 $\{\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3\}$ 构成一组标准正交基. □

提示 (2)　考虑内积在不同基下度量矩阵的相合关系.

解 (2) 直接将该度量矩阵 $\boldsymbol{S}$ 相合到单位阵:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 2 & 0 & & 1 & \\ -1 & 0 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\to(3)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{2}}(2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \end{array}\right),$$

故

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

满足 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$.

取 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$, 满足 $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ 构成一组标准正交基. □

7.1.3 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 3, 1, -1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, -1, -2, 2)$,

(1) 求 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的长度及彼此间的夹角;

(2) 求与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的向量.

解 (1)

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\alpha}_1| = \sqrt{7}, \quad |\boldsymbol{\alpha}_2| &= \sqrt{15}, \quad |\boldsymbol{\alpha}_3| = \sqrt{10}, \\ \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \rangle &= \arccos \frac{2+6-1-1}{\sqrt{105}} = \arccos \frac{2\sqrt{105}}{35}, \\ \langle \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \rangle &= \arccos \frac{-2-3-2-2}{\sqrt{150}} = \arccos \frac{-3\sqrt{6}}{10}, \\ \langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 \rangle &= \arccos \frac{-1-2+2+2}{\sqrt{70}} = \arccos \frac{\sqrt{70}}{70}. \end{aligned}$$

(2) 设 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交, 考虑矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

对应的齐次线性方程组的解.

$$\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故该齐次线性方程组有通解

$$\boldsymbol{X} = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

□

7.1.4 用 Schmidt 正交化方法构造标准正交向量组:

(1) $(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$;

(2) $(1,1,1,2),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7)$.

解 (1) 分别记原 3 个向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (0,0,1),\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}_1 = (0,1,0),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2 = (1,0,0),
\end{aligned}$$

又 $|\boldsymbol{\beta}_1| = |\boldsymbol{\beta}_2| = |\boldsymbol{\beta}_3| = 1$, 故 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$ 构成一组标准正交向量组.

(2) 分别记原 3 个向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,2),\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{3}{7}\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{7}(4,4,-38,15),\\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \frac{1}{7}\boldsymbol{\beta}_1 + \frac{389\times 7}{1701}\boldsymbol{\beta}_2 = \cdots,
\end{aligned}$$

取

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_1 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,1,2),\\
\boldsymbol{\gamma}_2 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|} = \frac{1}{9\sqrt{21}}(4,4,-38,15),\\
\boldsymbol{\gamma}_3 &= \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|} = \frac{1}{\sqrt{13449}}\left(\frac{493\sqrt{2}}{9},\frac{743}{9\sqrt{2}},-\frac{133}{9\sqrt{2}},-\frac{133\sqrt{2}}{3}\right),
\end{aligned}$$

则 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\}$ 构成一组标准正交向量组. □

说明 上述 $\boldsymbol{\gamma}_3$ 计算结果来自 WolframAlpha.

7.1.5

7.1.6

7.1.7

7.1.8 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组标准正交基, 且

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3),\\
\boldsymbol{\alpha}_2 &= \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3),\\
\boldsymbol{\alpha}_3 &= \frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3),
\end{aligned}$$

证明:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基;

(2) 求把 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 变换到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的正交变换的矩阵;

(3) 求标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 到标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标变换矩阵.

证明 (1) 直接验证得:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) &= \frac{1}{9}(4(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) - 2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)) = 0, \\
(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1) &= \frac{1}{9}(2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 4(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + 2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)) = 0, \\
(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) &= \frac{1}{9}(4(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) - 2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) - 2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)) = 0, \\
(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) &= \frac{1}{9}(4(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + 4(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + 1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)) = 1, \\
(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) &= \frac{1}{9}(4(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + 1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + 4(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)) = 1, \\
(\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3) &= \frac{1}{9}(1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + 4(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + 4(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)) = 1,
\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 构成一组标准正交基. □

解 (2) 注意到,

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} := \boldsymbol{E}\boldsymbol{P},$$

故把 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 变换到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的正交变换的矩阵为 $\boldsymbol{P}$.

(3) 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 以及 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 分别构成两组标准正交基, 故以其为列向量的矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}$ 均为正交矩阵, 从而可逆且 $\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$ 也为正交矩阵, 因此 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 满足 $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, 从而

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{P} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1},$$

记向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$, 则有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}$, 故坐标变换矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

□

7.1.9 写出所有 3 阶正交矩阵, 它的元素是 0 或 1.

解 设 $\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交方阵, 则其列向量组 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3)$ 构成 $\mathbb{R}^{3\times 1}$ 的一组标准正交基, 则 $\langle \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_i\rangle = 1\ (i = 1, 2, 3)$, 又其各元素为 0 或 1, 故 $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, 从而

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

共 6 个. □

7.1.10 如果一个正交矩阵中每个元素都是 $\dfrac{1}{4}$ 或 $-\dfrac{1}{4}$, 那么这个正交矩阵是几阶的?

解 设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正交矩阵, 其列向量组 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$ 构成 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 的一组标准正交基, 从而

$$\langle \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_i\rangle = \frac{1}{16}\cdot n = 1 \implies n = 16,$$

即 $\boldsymbol{P}$ 为 16 阶正交矩阵. □

7.1.11 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量, 证明: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是一个正交矩阵. 当 $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 时, 具体求出 $\boldsymbol{Q}$.

证明 计算得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} - 2(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 满足 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$, 记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B} = (b_{ij}) = \boldsymbol{A}^2$, 则

$$\begin{aligned} a_{ij} &= x_i x_j, \\ b_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} x_i x_k x_k x_j = x_i x_j \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = x_i x_j = a_{ij}, \end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \implies \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I},$$

即 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵.

当 $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 时,

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

□

7.1.12

7.1.13 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都为 n 阶正交矩阵, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵;

(2) $\boldsymbol{AB}$ 也为正交矩阵;

(3) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为正交矩阵.

证明 (1)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \implies |\boldsymbol{A}|^2=1 \implies |\boldsymbol{A}|=\pm 1 \implies \boldsymbol{A}^*=\pm\boldsymbol{A}^{-1}=\pm\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}^*$ 也为正交矩阵.

(2)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I} \implies (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{AB}$ 也为正交矩阵.

(3)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \implies \boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为正交矩阵. □

7.1.14

7.1.15

7.1.16

7.1.17 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意 k 个向量, 试证: $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 两两正交的充分必要条件是

$$\sum_{s=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_s)=0,\quad i,j=1,2,\cdots,k,\ i\neq j.$$

证明 记

$$\boldsymbol{x}_i=x_{1i}\boldsymbol{e}_1+x_{2i}\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_{ni}\boldsymbol{e}_n,\quad i=1,2,\cdots,k,$$

则 $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j$ 正交

$$\iff (\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)=0 \iff \sum_{s=1}^{n}x_{si}x_{sj}=0 \iff \sum_{s=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{e}_s)=0,$$

因此 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 两两正交 $\iff$ 上式对 $\forall i,j=1,2,\cdots,k,\ i\neq j$ 成立. □

7.1.18 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-2&2\\4&2&1\end{pmatrix}$;

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

解 (1)

(2)

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-4\\-2&\lambda+2&-2\\-4&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-27\lambda-54=(\lambda-6)(\lambda+3)^2\implies\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=-3,$$

$\lambda_1=6$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&\\&-2&1\\&&\end{pmatrix}\implies\boldsymbol{X}_1=t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{Y}_1=\dfrac{1}{3}(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量;

$\lambda_{2,3}=-3$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\&&\\&&\end{pmatrix}\implies\boldsymbol{X}=t_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\quad t_1,t_2\in\mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{X}_2=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_3=(0,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 对其进行 Gram-Schmidt 正交化得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_2&=(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{Z}_3&=(0,-2,1)^{\mathrm{T}}-\frac{4}{5}(1,-2,0)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},1\right)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{Y}_2&=\frac{\boldsymbol{Z}_2}{|\boldsymbol{Z}_2|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{Y}_3&=\frac{\boldsymbol{Z}_3}{|\boldsymbol{Z}_3|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,-2,5)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3$ 构成一组标准正交基, 以其为列向量的正交矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}6&&\\&-3&\\&&-3\end{pmatrix}$$

为对角矩阵.

(4) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & \\ 2 & \lambda-2 & 2\\ & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5),$$
$$\Longrightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5,$$

$\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & \\ 2 & -3 & 2\\ & 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 1 & \\ & 1 & -1\\ & & \end{pmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{X}=t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{X}_1=\dfrac{1}{3}(1,2,2)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量;

$\lambda_2=2$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & \\ 2 & 0 & 2\\ & 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 2 & \\ & 2 & 1\\ & & \end{pmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{X}=t\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{X}_2=\dfrac{1}{3}(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量;

$\lambda_3=5$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & \\ 2 & 3 & 2\\ & 2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & 2\\ & & \end{pmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{X}=t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{X}_3=\dfrac{1}{3}(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量;

从而, $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 构成一组标准正交基, 以其为列向量的正交矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}$$

为对角矩阵. □

7.1.19

7.1.20

7.1.21

7.1.22

7.1.23

7.1.24

7.1.25

7.1.26

7.1.27

7.1.28

第 8 章　实二次型

8.1　习题

8.1.1　将下列二次型表示成矩阵形式:

(1) $Q(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+3x_1x_3+4x_2x_3$;

(2) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2-x_2x_3$;

(3) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+3x_1x_3+5x_1x_4+6x_2x_3+7x_2x_4+10x_3x_4$;

(4) $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n-2}(x_i-x_{i+2})^2$.

解　(1)

(2)

(3)

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & & 3 & \frac{7}{2}\\ \frac{3}{2} & 3 & & 5\\ \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 5 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

(4) (I) $n=3$ 时,

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2-2x_1x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & & -1\\ & & \\ -1 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};$$

(II) $n=4$ 时,

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2-2x_1x_3-2x_2x_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}1 & & -1 & \\ & 1 & & -1\\ -1 & & 1 & \\ & -1 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix};$$

(III) $n \geqslant 5$ 时,

$$
\begin{aligned}
Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1^2 + x_2^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 + \sum_{i=3}^{n-2} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2} x_i x_{i+2} \\
&= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix}
1 & & -1 & & & & & \\
& 1 & & -1 & & & & \\
-1 & & 2 & & & & & \\
& -1 & & 2 & & \ddots & & \\
& & & & \ddots & & & \\
& & & \ddots & & 2 & & -1 \\
& & & & & & 1 & \\
& & & & & -1 & & 1
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

8.1.2 写出下列对称矩阵对应的二次型:

(1)

(2)

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1)

(2)

(3)

$$
Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4.
$$

□

8.1.3 求正交变换化下列实二次型为标准形:

(1) $Q = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

(2) $Q = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_2x_3 - 16x_1x_3$;

(3)

(4)

解 (1)

$$Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}:=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^3-9\lambda^2=\lambda^2(\lambda-9)\implies\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9,$$

$\lambda_{1,2}=0$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\&&\\&&\end{pmatrix}\implies\boldsymbol{X}=t_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad t_1,t_2\in\mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{X}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$, 对其进行 Gram-Schmidt 正交化得:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_1&=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{Z}_2&=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{-4}{5}(2,1,0)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{Y}_1&=\frac{\boldsymbol{Z}_1}{|\boldsymbol{Z}_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{Y}_2&=\frac{\boldsymbol{Z}_2}{|\boldsymbol{Z}_2|}=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,4,5)^{\mathrm{T}};\end{aligned}$$

$\lambda=9$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&5&4\\0&1&1\\&&\end{pmatrix}\implies\boldsymbol{X}_3=t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{Y}_3=\dfrac{1}{3}(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量, 从而 $\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{Y}_3$ 构成一组标准正交基, 以其为列向量的正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix},$$

对应的正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

该正交变换将二次型 $Q(\boldsymbol{X})$ 化为标准形

$$Q_1(\boldsymbol{Y}) = Q(\boldsymbol{X}) = 9\left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 = 9y_3^2.$$

(2)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 & 8 \\ -4 & \lambda - 7 & -4 \\ 8 & -4 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda - 729 = (\lambda + 9)(\lambda - 9)^2,$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = -9, \lambda_2 = \lambda_3 = 9,$$

$\lambda_1 = -9$ 对应的特征向量

$$\begin{pmatrix} -10 & -4 & 8 \\ -4 & -16 & -4 \\ 8 & -4 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ & & \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X}_1 = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{Y}_1 = \dfrac{1}{3}(-2, 1, -2)^{\mathrm{T}}$ 为单位向量;

$\lambda_{2,3} = 9$ 对应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 8 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

取 $\boldsymbol{X}_2 = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_3 = (0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, 对其进行 Gram-Schmidt 正交化得:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_2 &= (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{Z}_3 &= (0, 2, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{4}{5}(1, 2, 0)^{\mathrm{T}} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{Y}_2 &= \frac{\boldsymbol{Z}_2}{|\boldsymbol{Z}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{Y}_3 &= \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4, 2, 5)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{Y}_3$ 构成一组标准正交基, 以其为列向量的正交矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$$

满足

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -9 & & \\ & 9 & \\ & & 9 \end{pmatrix},$$

对应的正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

该正交变换将二次型 $Q(\boldsymbol{X})$ 化为标准形

$$Q_1(\boldsymbol{Y}) = Q(\boldsymbol{X}) = -9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2.$$

(3)

(4)

□

说明 (1) 方阵不同特征值对应的特征向量相互正交.

说明 (2) 实对称方阵必可正交对角化.

8.1.4 用配方法将下列二次型化为标准形, 并求相应的可逆线性变换:

(1)

(2) $Q = x_1^2 + x_2x_3$;

(3) $Q = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;

(4)

解 (1)

(2) 记

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} \iff \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X},$$

则

$$Q(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

(3) 记

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}Q(\boldsymbol{X}) &= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + (y_1 - y_2)(y_3 + y_4) + (y_1 + y_2)(y_3 - y_4) \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + 2(y_1y_3 - y_2y_4) = (y_1 + y_3)^2 - (y_2 + y_4)^2,\end{aligned}$$

记

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix},$$

则

$$Q(\boldsymbol{X}) = Q_1(\boldsymbol{Z}) = z_1^2 - z_2^2.$$

(4)

□

8.1.5 用初等变换法将下列二次型化成标准形, 并求相应的可逆线性变换:

(1) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$;

(2)

(3) $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$;

(4)

解 (1)

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x},$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 3 & 2 & & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & 1 \\ 2 & 3 & 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & & \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-2(1)\to(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & & 1 \\ 0 & -1 & -1 & & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & & \end{pmatrix} \xrightarrow{-(1)\to(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & -1 & -1 & & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-(2)\to(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix},$$

因此可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 变换为

$$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}&&1\\&1&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

(2)

(3)

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&&\\1&0&-1&&1&\\1&-1&0&&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)\to(1)}\begin{pmatrix}2&1&0&1&1&\\1&0&-1&&1&\\0&-1&0&&&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}(1)\to(2)}\begin{pmatrix}2&0&0&1&1&\\0&-\dfrac{1}{2}&-1&-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\\0&-1&0&&&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-2(2)\to(3)}\begin{pmatrix}2&0&0&1&1&\\0&-\dfrac{1}{2}&0&-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&\\0&0&2&1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-\dfrac{1}{2}&1\\1&\dfrac{1}{2}&-1\\&&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&&\\&-\dfrac{1}{2}&\\&&2\end{pmatrix},$$

因此可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 变换为

$$\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&&\\&-\dfrac{1}{2}&\\&&2\end{pmatrix}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-\dfrac{1}{2}&1\\1&\dfrac{1}{2}&-1\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

(4)

□

8.1.6 试证: 在实数域上, 对称矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 不相合.

证明 用反证法. 假设上述矩阵相合, 则存在可逆实方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\implies \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\implies \left|\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right|=|\boldsymbol{P}|^2=-1,$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 为实方阵, 因此上式显然无解. 故矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 不相合. □

8.1.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的相合标准形.

解 由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \implies \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{O}$, 由 Sylvester 秩不等式知,

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) - n \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})) = 0 \implies \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \leqslant n,$$

另一方面,

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = n,$$

因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = n$. 类似于**习题** 6.1.23, 我们有: $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 又设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ, 特征向量为 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X} = \lambda^2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X} \implies \lambda^2 - \lambda = 0 \implies \lambda = 0 \text{ or } 1,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})$ $(r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A})$. 又 $\boldsymbol{A}$ 是实对称方阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可以正交相似于 $\boldsymbol{B}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 满足 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O}),$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 相合于标准形 $\operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})$, 其中 $r = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. □

说明 (1) 我们有, $\boldsymbol{A}$ 为正定或半正定方阵.

说明 (2) 考虑实对称方阵的相合变换时, 我们总可以通过正交矩阵对其进行正交对角化. (相似相合变换)

8.1.8 证明: 秩等于 r 的对称矩阵可以表示成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

提示 先对相合标准形证明上述结论, 再利用该结论在相合变换下的不变性过渡到一般的情形.

证明 对 $\boldsymbol{A}$ 做相合变换, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵, $\operatorname{rank}\boldsymbol{D} = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = r$, 因此可以表示成 r 个秩等于 1 的对角矩阵 (基础矩阵) 之和, 即

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2 + \cdots + \boldsymbol{D}_r, \quad \operatorname{rank}\boldsymbol{D}_i = 1\ (i = 1, 2, \cdots, r),$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2 + \cdots + \boldsymbol{D}_r)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{P} + \cdots + \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{P},$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 因此上述 r 个矩阵的秩均为 1, 且均为对称矩阵, 从而 $\boldsymbol{A}$ 被表示成了 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和. □

8.1.9

8.1.10 判断下列二次型是否是正定二次型:

(1) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(2) $Q(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

(3)

(4)

解 (1)

$$Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}:=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$1>0,\quad \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&-2\\0&-2&4\end{vmatrix}=0,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的, 从而 Q 是半正定的.

(2)

$$Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}:=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$-5<0,\quad \begin{vmatrix}-5&2\\2&-6\end{vmatrix}=26>0,\quad \begin{vmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{vmatrix}=-80<0,$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 是负定的, 从而 Q 是负定的.

(3)

(4)

□

8.1.11

8.1.12 问参数 t 满足什么条件时, 下列二次型正定?

(1) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_1x_3$;

(2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+tx_1x_2+tx_1x_3+x_2x_3$.

解 (1)

$$Q=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&1&\frac{t}{2}\\1&1&0\\\frac{t}{2}&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

要求 Q 正定, 则 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$2>0,\quad \begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0,\quad \begin{vmatrix}2&1&\dfrac{t}{2}\\1&1&0\\\dfrac{t}{2}&0&1\end{vmatrix}=1-\frac{1}{4}t^2>0,$$

$$\Longrightarrow\ t\in(-2,2).$$

(2)

$$Q=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&\frac{t}{2}&\frac{t}{2}\\\frac{t}{2}&2&\frac{1}{2}\\\frac{t}{2}&\frac{1}{2}&3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}:=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

要求 Q 正定, 则 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$1>0,\quad \begin{vmatrix}1&\frac{t}{2}\\\frac{t}{2}&2\end{vmatrix}=2-\frac{1}{4}t^2>0,\quad \begin{vmatrix}1&\frac{t}{2}&\frac{t}{2}\\\frac{t}{2}&2&\frac{1}{2}\\\frac{t}{2}&\frac{1}{2}&3\end{vmatrix}=\frac{23}{4}-t^2>0,$$

$$\Longrightarrow\ t\in\left(-\frac{\sqrt{23}}{2},\frac{\sqrt{23}}{2}\right).$$

□

8.1.13

8.1.14

8.1.15 设有 n 元二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为实数, 试问: 当 $a_1,\cdots,a_n$ 满足何种条件时, $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型?

解 (1) 要使 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型, 即对 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, 满足 $Q(\boldsymbol{x})>0$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

由对称性, 不妨设 $x_1\neq 0$. 显然, 我们有 $Q(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 等号成立当且仅当

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\x_2+a_2x_3=0,\\\vdots\\x_n+a_nx_1=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ x_1+a_1(-a_2)x_3=x_1+a_1(-a_2)(-a_3)x_4=\cdots=x_1(1-(-1)^na_1a_2\cdots a_n)=0,$$

$$\Longrightarrow\ 1-(-1)^na_1a_2\cdots a_n=0,$$

因此当且仅当上式成立时, $Q(\boldsymbol{x})$ 为半正定型; 换句话说, 当

$$1-(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$$

时, $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型. □

解 (2) 考虑其对应的对称方阵的顺序主子式. □

8.1.16

8.1.17 证明: 若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶正定方阵, 则 $\det \boldsymbol{A} \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

提示 用数学归纳法, 并考虑分块矩阵的初等变换, 得到 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{A}_{n-1}|$ 的关系. 其中 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 $n-1$ 行列构成的矩阵.

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, $\det \boldsymbol{A}=a_{11} \leqslant a_{11}$, 显然成立.

假设结论对 $n-1$ 成立, 下面考虑 $n(\geqslant 2)$ 时的情形.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子式也是正定方阵, 由归纳假设知,

$$\det \boldsymbol{A}_{n-1} \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1},$$

且存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_{n-1}$, 从而

$$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{I} \implies \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

从而 $\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$ 也是正定方阵, 因此对 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, 有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}>0$.

对 $\boldsymbol{A}$ 作如下分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

注意到,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix},$$

两边取行列式并由归纳假设知, 得:

$$\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{A}_{n-1}(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中上式已用到 $\boldsymbol{A}$ 为正定方阵, 从而 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{n-1,n-1}>0$.

因此结论对 n 时的情形也成立. 由数学归纳法知, 结论对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 成立. 即, 对 $\forall \boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定方阵, 有

$$\det \boldsymbol{A} \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

□

参考 高等代数.**例 8.34**.

8.1.18

8.1.19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆实对称矩阵, 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦正定;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

证明 (1) $\boldsymbol{A}$ 正定, 则存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$, 又

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{I} \implies (\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \implies (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}},$$

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

(2) $\boldsymbol{A}$ 正定且可逆, 从而 $|\boldsymbol{A}|>0$, 由 (1) 的结论知, $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{A}^{-1}$ 也为正定方阵. □

提示 对任意的 $\boldsymbol{x}$, 考虑 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}. \tag{8.1}$$

8.1.20

8.1.21 设实向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 n 阶列向量, 定义 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$, 证明矩阵

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix}$$

为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证明 注意到,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix}:=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},$$

显然, $\boldsymbol{P}$ 可逆 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 因此我们只需证明 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\iff$ $\boldsymbol{P}$ 可逆.

充分性. 当 $\boldsymbol{P}$ 可逆时, 上式表示 $\boldsymbol{A}$ 相合于 $\boldsymbol{I}$, 因此 $\boldsymbol{A}>0$.

必要性. $\boldsymbol{A}$ 正定 $\implies |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{P}|^2>0 \implies |\boldsymbol{P}|\neq 0$, 从而 $\boldsymbol{P}$ 可逆. □

说明 一般地, 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 我们有 $\boldsymbol{A}$ 是半正定对称方阵. (只需证明 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均 $\geqslant 0$ 即可, 方法同上.)

8.1.22 将下列二次方程化为最简形式, 并判断曲面类型:

(1) $4x^2-6y^2-6z^2-4yz-4x+4y+4z-5=0$;

(2) $x^2-\dfrac{4}{3}y^2+\dfrac{4}{3}z^2-\dfrac{16}{3}\sqrt{2}yz+4x+\dfrac{8}{3}\sqrt{3}z-1=0$.

解 (1) 先将二次型 $Q(x,y,z)=4x^2-6y^2-6z^2-4yz$ 通过正交变换化为标准形.

$$Q(x,y,z)=4x^2-6y^2-6z^2-4yz=(x,y,z)\begin{pmatrix}4&&\\&-6&-2\\&-2&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:=(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4&&\\&\lambda+6&2\\&2&\lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+8)(\lambda+4)\implies\lambda_1=4,\quad\lambda_2=-8,\quad\lambda_3=-4,$$

其对应的特征向量分别为

$$t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R},$$

取

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$$

构成一组标准正交基, 以其为列向量的 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$$

将二次型 $Q(x,y,z)$ 化为

$$Q_1(x_1,y_1,z_1)=4x_1^2-8y_1^2-4z_1^2,$$

从而原曲面方程化为

$$\begin{aligned}&4x_1^2-8y_1^2-4z_1^2-4x_1+4\cdot\sqrt2y_1-5=0,\\ \iff\ &4\left(x_1-\frac12\right)^2-8\left(y_1-\frac{\sqrt2}{4}\right)^2-4z_1^2-5=0,\end{aligned}$$

作平移变换

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-\frac12\\y_1-\frac{\sqrt2}{4}\\z_1\end{pmatrix},$$

从而原曲面方程化为

$$4x_2^2-8y_2^2-4z_2^2-5=0,$$

这是双叶双曲面.

(2)

$$Q(x,y,z)=x^2-\frac{4}{3}y^2+\frac{4}{3}z^2-\frac{16}{3}\sqrt{2}yz=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&&\\&-\frac{4}{3}&-\frac{8}{3}\sqrt{2}\\&-\frac{8}{3}\sqrt{2}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:=(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\varphi_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1&&\\&\lambda+\frac{4}{3}&\frac{8}{3}\sqrt{2}\\&\frac{8}{3}\sqrt{2}&\lambda-\frac{4}{3}\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda-4)\implies\lambda_1=1,\quad\lambda_2=-4,\quad\lambda_3=4,$$

其对应的特征向量分别为

$$t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad t\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\quad t\begin{pmatrix}0\\1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

取

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

构成一组标准正交基, 以其为列向量的 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵, 正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$$

将二次型 $Q(x,y,z)$ 化为

$$Q_1(x_1,y_1,z_1)=x_1^2-4y_1^2+4z_1^2,$$

从而原曲面方程化为

$$\begin{aligned}&x_1^2-4y_1^2+4z_1^2+4x_1+\frac{8}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(y_1-\sqrt{2}z_1)-1=0,\\\iff&(x_1+2)^2-4\left(y_1-\frac{1}{3}\right)^2+4\left(z_1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\frac{49}{9}=0,\end{aligned}$$

作平移变换

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2\\y_1-\frac{1}{3}\\z_1-\frac{\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix},$$

从而原曲面方程化为

$$x_2^2-4y_2^2+4z_2^2-\frac{49}{9}=0,$$

这是单叶双曲面. □

8.1.23 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$, 证明: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 为正定矩阵或半正定矩阵.

证明 由习题 6.1.23的结论知, $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{I}_{n-r}\end{pmatrix}$, 其中 $0\leqslant r\leqslant n$. 即, 存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, 从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}$, 而 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}_{n-r}\end{pmatrix}$, 因此其特征值 $\geqslant 0$, 从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的特征值 $\geqslant 0$, 因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 正定或半正定. □

8.1.24 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称正定方阵, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 亦正定;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

证明 (1) 对 $\forall\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0,$$

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 正定.

(2) 必要性.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定, 因此为对称阵, 从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

充分性.

由 $\boldsymbol{B}$ 正定知, 存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$, 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 正定, 从而其特征值大于 0,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 相似于 $\boldsymbol{C}$, 因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的特征值大于 0, 又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为对称阵, 由实对称方阵可正交对角化知, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定. □

8.1.25 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵, 证明: 存在上三角阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

证明 对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 结论显然成立;

假设结论对 $n-1$ 时的情形成立, 下面考虑 $n(\geqslant 2)$ 时的情形. 对 $\boldsymbol{A}$ 做如下分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn}\end{pmatrix},$$

注意到,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix},$$

其中已用到 $\boldsymbol{A}_{n-1}$ 也为实对称正定方阵, 从而 $(\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}_{n-1}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & a_{nn} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}$ 相合, 从而后者也为正定矩阵, 因此我们有

$$a_{nn} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\alpha} > 0.$$

由归纳假设知, 存在上三角阵 $\boldsymbol{P}_{n-1}$, 使得 $\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{P}_{n-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_{n-1}$, 令

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{n-1} & (\boldsymbol{P}_{n-1}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{\alpha} \\ & \sqrt{a_{nn} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix}$$

为上三角阵, 且满足 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}$, 因此结论对 n 也成立.

由数学归纳法知, 结论对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 成立. □

8.1.26

8.1.27 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A} > 0$. 求证: $\det \boldsymbol{A} \leqslant \left(\frac{1}{n} \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \right)^n$.

证明 由习题 8.1.17的结论及均值不等式知,

$$\det \boldsymbol{A} \leqslant a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \leqslant \left(\frac{a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}{n} \right)^n = \left(\frac{1}{n} \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \right)^n.$$

□

8.1.28

8.1.29

8.1.30

8.2 补充习题

8.2.1 **(QR 分解)** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, 其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{R}$ 是一个上三角矩阵且主对角线上的元素全大于等于零, 并且若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则这样的分解必唯一.

8.3 重点习题

8.1.17

8.1.25