# Relatório de Cálculo Numérico Computacional

Grupo 1 - Prática 1

Rafael dos Santos | Fábio Mendes Crepaldi | Hermes Soares de Jesus |

Paulo Roberto Bomfim Rosa

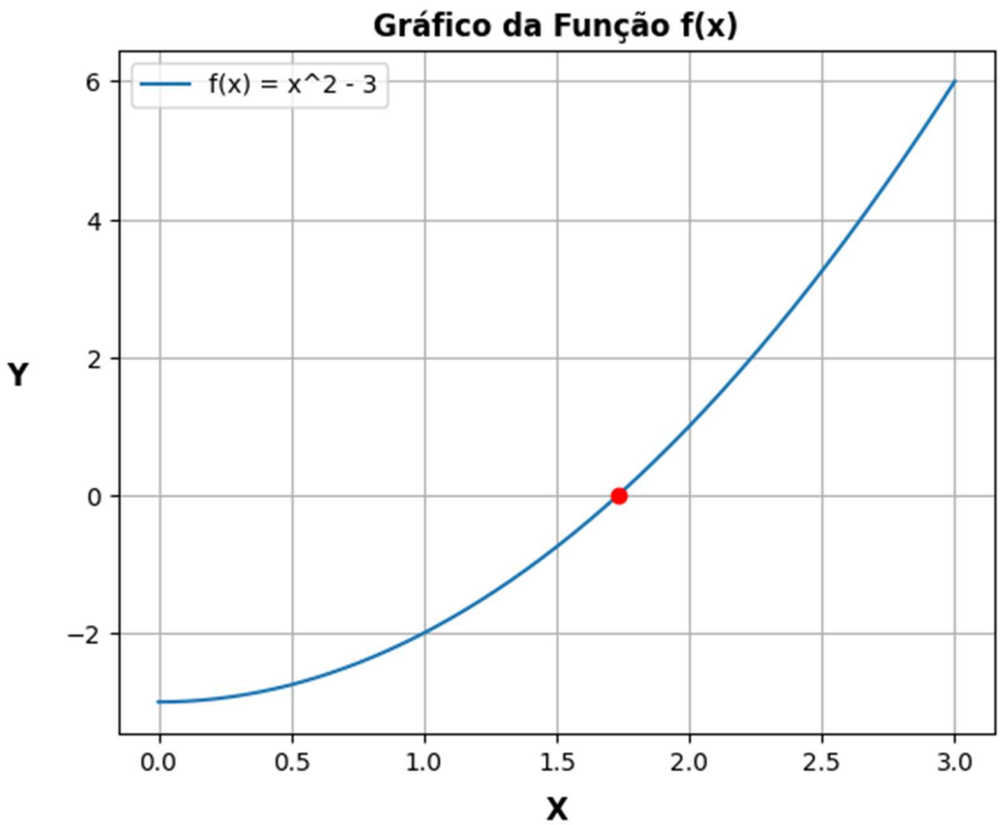
**Tópico 2 – Zeros reais de funções reais**

**Parte 1**

Exemplo 2.1

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função f(x) = $x^2$-3 possui raiz real no intervalo [1, 2].




Inspeção:

f(1) = $1^2$ - 3 = -2

f(2) = $2^2$ - 3 = 1

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [1, 2]: A função f(x) é continua no intervalo, obtendo-se que f(1) * f(2) = -2 * 1 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [1, 2] tal que f(α) = 0.

- Unicidade do zero da função no intervalo [1, 2]: Existe a derivada de f, sendo ela f'(x) = 2x. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [1, 2] pois f'(1) = 2*1 > 0 e f'(2) = 2*2 > 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [1, 2] contém único valor α ∈ [1, 2] tal que f(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = 1, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

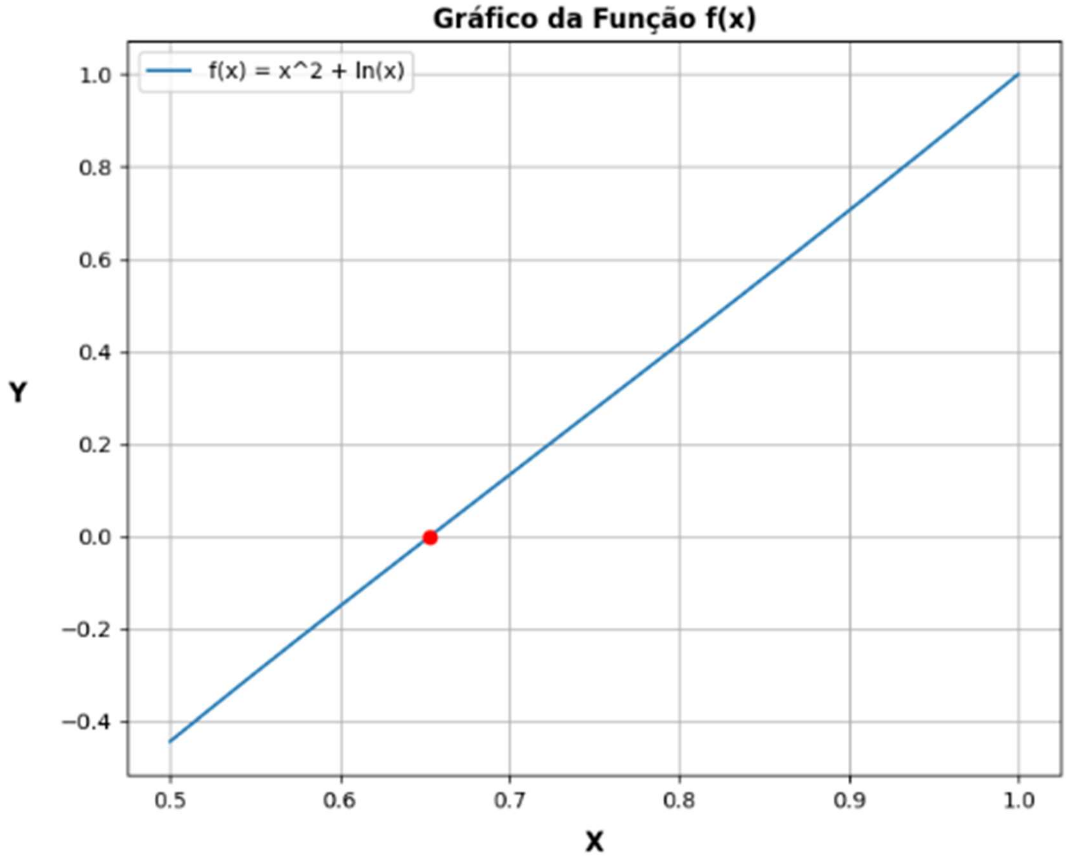
```
********Metodo de bissecção********
 k|     xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 1.50000 |  1.00000  | -0.75000
 2| 1.75000 |  0.50000  | 0.06250
 3| 1.62500 |  0.25000  | -0.35938
 4| 1.68750 |  0.12500  | -0.15234
 5| 1.71875 |  0.06250  | -0.04590
 6| 1.73438 |  0.03125  | 0.00806
 7| 1.72656 |  0.01562  | -0.01898
 8| 1.73047 |  0.00781  | -0.00548
 9| 1.73242 |  0.00391  | 0.00129
10| 1.73145 |  0.00195  | -0.00210
11| 1.73193 |  0.00098  | -0.00041
12| 1.73218 |  0.00049  | 0.00044
13| 1.73206 |  0.00024  | 0.00002
14| 1.73199 |  0.00012  | -0.00019
15| 1.73203 |  0.00006  | -0.00009
16| 1.73204 |  0.00003  | -0.00004
17| 1.73205 |  0.00002  | -0.00001

Aproximação 1.73205 à raiz, com 17 iterações
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 1.66667| 1.00000   | -0.22222
 2| 1.72727| 0.33333   | -0.01653
 3| 1.73171| 0.27273   | -0.00119
 4| 1.73203| 0.26829   | -0.00009
 5| 1.73205| 0.26797   | -0.00001

Aproximação 1.73205 à raiz, com 5 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm   | abs(x-x0)|   f(x)  |   f1(x)
 1| 1.75000 | 0.25000  | 0.06250 | 3.50000
 2| 1.73214 | 0.01786  | 0.00032 | 3.46429
 3| 1.73205 | 0.00009  | 0.00000 | 3.46410

Aproximação 1.73205 à raiz, com 3 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 1,73205 com 5 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, vamos mostrar que f(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a virgula, pois:

$f(\alpha) = 1{,}73205^2 - 3 \approx 0$

Exercício 2

1. Analisando graficamente verificamos que a função $g(x) = x^2+\ln(x)$ possui raiz real no intervalo [0,5, 1].




Inspeção:

$g(0,5) = 0,5^2 + (-0.69314) = -0.\ 44314$

$g(1) = 1^2 + 0 = 1$

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [0,5, 1]: A função g(x) é continua no intervalo, obtendo-se que $g(0,5) * g(1) = -0.\ 44314 * 1 < 0$, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto $\alpha \in [0.5, 1]$ tal que $g(\alpha) = 0$.
- Unicidade do zero da função no intervalo [0.5, 1]: Existe a derivada de g(x), sendo ela $g'(x) = 2x + 1/x$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [0,5, 1] pois $g'(0.5) = 2*0.5 + 1/0.5 > 0$ e $g'(1) = 2*1 + 1/1 > 0$. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [0,5, 1] contém único valor $\alpha \in [0,5, 1]$ tal que $g(\alpha) = 0$.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0 = 0,5$, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 0.75000 |  0.50000  | 0.27482
 2| 0.62500 |  0.25000  | -0.07938
 3| 0.68750 |  0.12500  | 0.09796
 4| 0.65625 |  0.06250  | 0.00945
 5| 0.64062 |  0.03125  | -0.03491
 6| 0.64844 |  0.01562  | -0.01272
 7| 0.65234 |  0.00781  | -0.00163
 8| 0.65430 |  0.00391  | 0.00391
 9| 0.65332 |  0.00195  | 0.00114
10| 0.65283 |  0.00098  | -0.00025
11| 0.65308 |  0.00049  | 0.00045
12| 0.65295 |  0.00024  | 0.00010
13| 0.65289 |  0.00012  | -0.00007
14| 0.65292 |  0.00006  | 0.00001
15| 0.65291 |  0.00003  | -0.00003
16| 0.65292 |  0.00002  | -0.00001

Aproximação 0.652916 à raiz, com 16 iterações
```

```
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm   | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 0.65353| 0.50000   | 0.00175
 2| 0.65293| 0.15353   | 0.00004
 3| 0.65292| 0.15293   | 0.00000

Aproximação 0.652919 à raiz, com 3 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0)|   f(x)  |   f1(x)
 1| 0.65292 | 0.00520  | -0.00001 | 2.83742

Aproximação 0.652917 à raiz, com 1 iterações
```

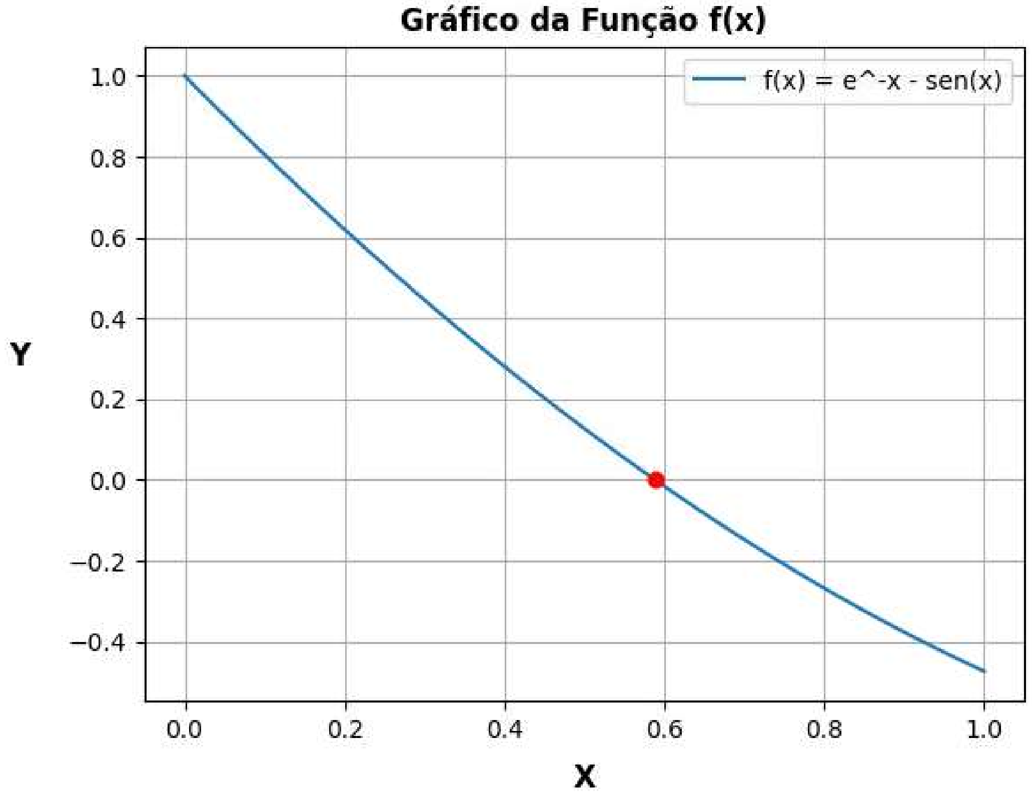
3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se $\alpha \approx 0{,}65292$ com 5 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, vamos mostrar que $g(\alpha) \approx 0$. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a virgula, pois:

$g(\alpha) = 0{,}65292^2 + (-0.42630) \approx 0$

Exemplo 2.2

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função f(x) =$e^{-x} - sen(x)$ possui raiz real no intervalo [0, 1].




Inspeção:

f(0) = $e^{0} - sen(0)$= 1 – 0 = 1

f(1) = $e^{-1} - sen(1) \cong$ 0,3679 - 0,8415 = -0,4736

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [0, 1]: A função f(x) é continua no intervalo, obtendo-se que f(0) * f(1) = 1 * -0,4736 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [0, 1] tal que f(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [0, 1]: Existe a derivada de f, sendo ela f'(x) = $-e^{-x} - \cos(x)$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [1, 2] pois f'(0) = -1 -1 < 0 e f'(1) = -0,3679 -0,5403 < 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [0, 1] contém único valor α ∈ [0, 1] tal que f(α) = 0.

2. Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = 0, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|     xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 0.50000 |  1.00000  | 0.12711
 2| 0.75000 |  0.50000  | -0.20927
 3| 0.62500 |  0.25000  | -0.04984
 4| 0.56250 |  0.12500  | 0.03648
 5| 0.59375 |  0.06250  | -0.00722
 6| 0.57812 |  0.03125  | 0.01449
 7| 0.58594 |  0.01562  | 0.00360
 8| 0.58984 |  0.00781  | -0.00182
 9| 0.58789 |  0.00391  | 0.00089
10| 0.58887 |  0.00195  | -0.00046
11| 0.58838 |  0.00098  | 0.00021
12| 0.58862 |  0.00049  | -0.00013
13| 0.58850 |  0.00024  | 0.00004
14| 0.58856 |  0.00012  | -0.00004
15| 0.58853 |  0.00006  | 0.00000

Aproximação 0.58853 à raiz, com 15 iterações
```

```
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|    xm    | abs(xb-xa)|   f(xm)
 1| 0.67861| 1.00000    | -0.12040
 2| 0.60569| 0.67861    | -0.02363
 3| 0.59171| 0.60569    | -0.00440
 4| 0.58912| 0.59171    | -0.00081
 5| 0.58864| 0.58912    | -0.00015
 6| 0.58855| 0.58864    | -0.00003
 7| 0.58854| 0.58855    | -0.00001

Aproximação 0.58854 à raiz, com 7 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|     xm    | abs(x-x0)|    f(x)   |    f1(x)
 1| 0.58564 | 0.08564   | 0.00401 | -1.39010
 2| 0.58853 | 0.00289   | 0.00000 | -1.38690

Aproximação 0.58853 à raiz, com 2 iterações
```

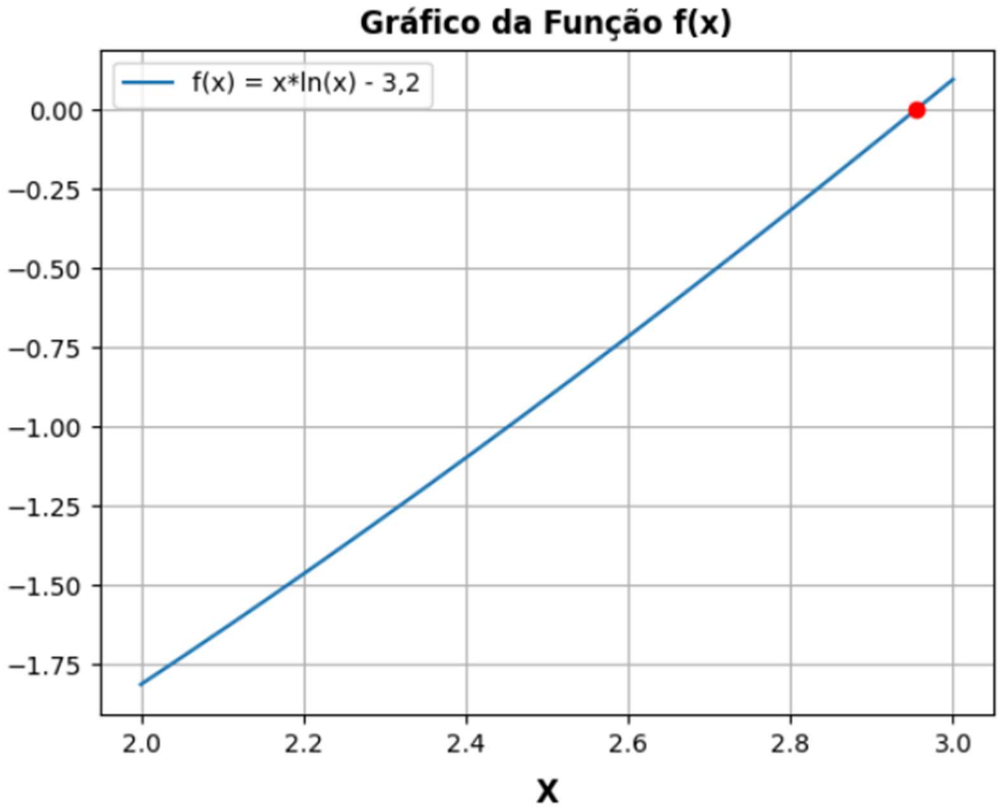
3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 0,58853 com 5 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método da falsa posição difere apenas na última casa decimal significativa, 0,58854, deve-se mostrar, pois, que f(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a vírgula, pois:

f(α) = $e^{-0,58853} - sen(0,58853) \cong 0,55514 - 0,55513 \cong 0,00001$

Exemplo 2.3

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função f(x) = x ln x - 3,2 possui raiz real no intervalo [2, 3].




Inspeção:

f(2) = 2 * ln(2) – 3,2 = -1,81370

f(3) = 3 * ln(3) - 3,2 = 0,09583

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [2, 3]: A função f(x) é continua no intervalo, obtendo-se que f(2) * f(3) = -1,81370 * 0,09583 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [2, 3] tal que f(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [2, 3]: Existe a derivada de f, sendo ela f'(x) = ln(x) + 1. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [2, 3] pois f'(2) = ln(2) + 1 > 0 e f'(3) = ln(3) + 1 > 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [2, 3] contém único valor α ∈ [2, 3] tal que f(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = 3, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 2.50000 |  1.00000   | -0.90927
 2| 2.75000 |  0.50000   | -0.41810
 3| 2.87500 |  0.25000   | -0.16385
 4| 2.93750 |  0.12500   | -0.03467
 5| 2.96875 |  0.06250   | 0.03042
 6| 2.95312 |  0.03125   | -0.00217
 7| 2.96094 |  0.01562   | 0.01412
 8| 2.95703 |  0.00781   | 0.00597
 9| 2.95508 |  0.00391   | 0.00190
10| 2.95410 |  0.00195   | -0.00013
11| 2.95459 |  0.00098   | 0.00088
12| 2.95435 |  0.00049   | 0.00038
13| 2.95422 |  0.00024   | 0.00012
14| 2.95416 |  0.00012   | -0.00001

Aproximação 2.95416 à raiz, com 14 iterações
```

```
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 2.94981| 1.00000   | -0.00907
 2| 2.95415| 0.05019   | -0.00003
 3| 2.95417| 0.04585   | -0.00000

Aproximação 2.95417 à raiz, com 3 iterações
```

```
***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0)|   f(x)   |   f1(x)
 1| 2.95417 | 0.00017   | 0.00000 | 2.08322

Aproximação 2.95417 à raiz, com 1 iterações
```

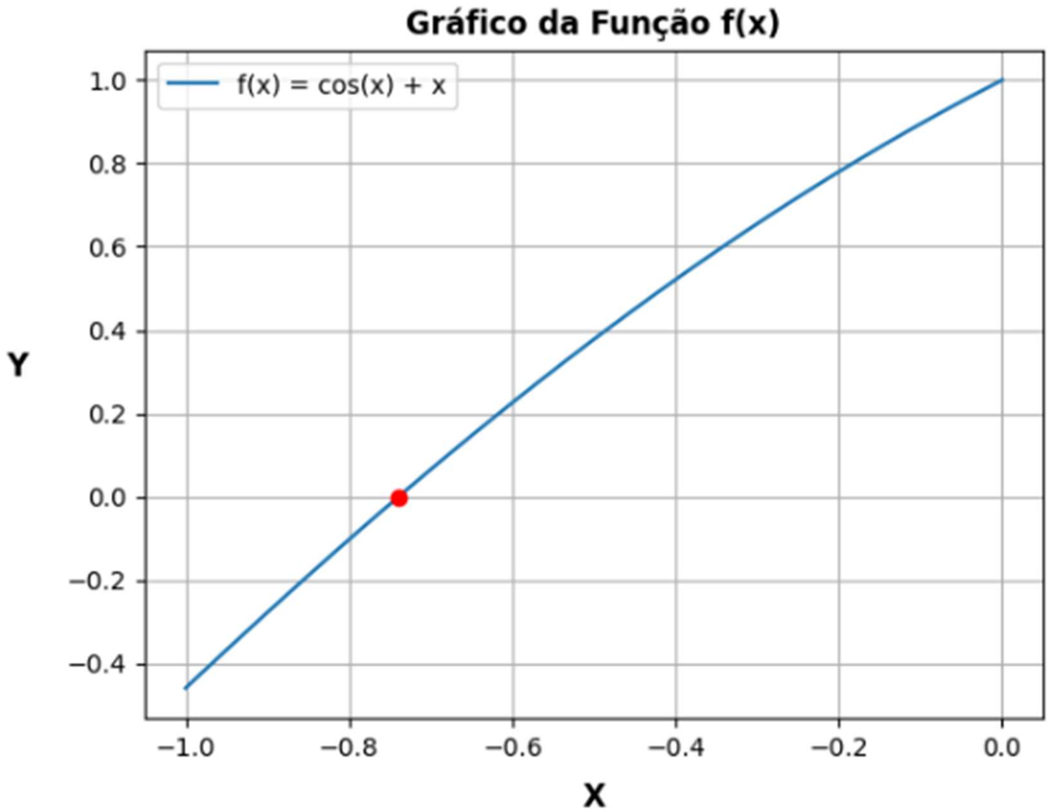
3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 2,95417 com 5 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método da bissecção difere apenas na última casa decimal significativa, 2,95416, deve-se mostrar, pois, que f(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a vírgula, pois:

$f(\alpha) = 2{,}95417 * \ln(2{,}95417) - 3{,}2 \approx 0$

Exemplo 2.4

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função f(x) = cos(x) + x possui raiz real no intervalo [-1, 0].




Inspeção:

f(-1) = 0.54030 - 1 = -0.45969

f(0) = 1 - 0 = 1

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [-1, 0]: A função f(x) é continua no intervalo, obtendo-se que f(-1) * f(0) = -0. 45969 * 1 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [-1, 0] tal que f(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [-1, 0]: Existe a derivada de f(x), sendo ela f'(x) = -sen(x) + 1. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [-1, 0] pois f'(-1) = 0.84147 + 1 > 0 e f'(0) = 0 + 1 > 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [-1, 0] contém único valor α ∈ [-1, 0] tal que f(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = -1, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| -0.50000 |  1.00000  | 0.37758
 2| -0.75000 |  0.50000  | -0.01831
 3| -0.62500 |  0.25000  | 0.18596
 4| -0.68750 |  0.12500  | 0.08533
 5| -0.71875 |  0.06250  | 0.03388
 6| -0.73438 |  0.03125  | 0.00787
 7| -0.74219 |  0.01562  | -0.00520
 8| -0.73828 |  0.00781  | 0.00135
 9| -0.74023 |  0.00391  | -0.00192
10| -0.73926 |  0.00195  | -0.00029
11| -0.73877 |  0.00098  | 0.00053
12| -0.73901 |  0.00049  | 0.00012
13| -0.73914 |  0.00024  | -0.00008
14| -0.73907 |  0.00012  | 0.00002
15| -0.73911 |  0.00006  | -0.00003
16| -0.73909 |  0.00003  | -0.00001

Aproximação -0.73909 à raiz, com 16 iterações
```

```
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| -0.68507| 1.00000   | 0.08930
 2| -0.73630| 0.31493   | 0.00466
 3| -0.73895| 0.26370   | 0.00023
 4| -0.73908| 0.26105   | 0.00001
 5| -0.73908| 0.26092   | 0.00000

Aproximação -0.73908 à raiz, com 5 iterações
```

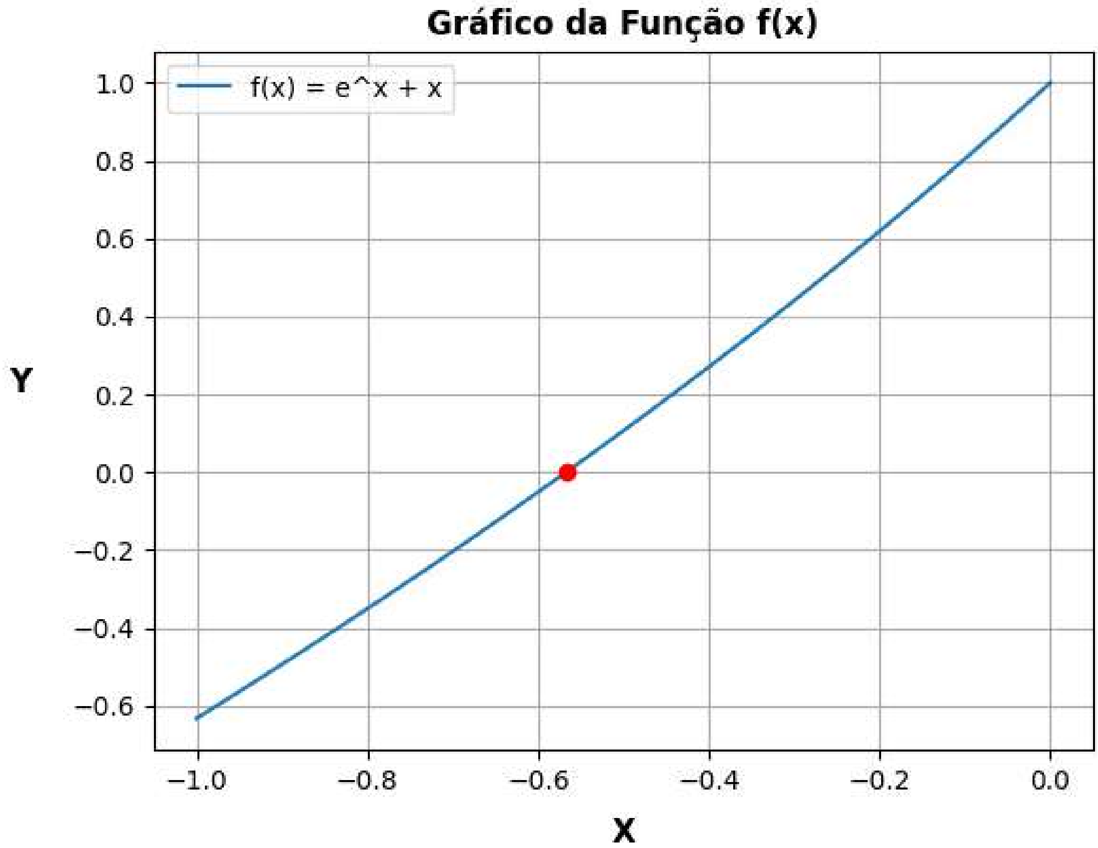
```
***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm   | abs(x-x0)|   f(x)   |   f1(x)
 1| -0.73911 | 0.01125  | -0.00005 | 1.67363
 2| -0.73909 | 0.00003  | -0.00000 | 1.67361

Aproximação -0.73909 à raiz, com 2 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se $\alpha \approx -0.73909$ com 5 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, vamos mostrar que $f(\alpha) \approx 0$. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a virgula, pois:

$f(\alpha) = 0.73908 + (-0.73909) \approx 0$

Exercício 2

1. Analisando graficamente verificamos que a função g(x) = $e^{x} + x$ possui raiz real no intervalo [-1, 0].




Inspeção:

g(-1) = $e^{-1} - 1$ ≈ -0,63212

g(0) = $e^{0} - 0$ = 1

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [-1, 0]: A função g(x) é continua no intervalo, obtendo-se que g(-1) * g(0) = -0,63212 * 1 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [-1, 0] tal que g(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [-1, 0]: Existe a derivada de g(x), sendo ela g'(x) = $e^{x} + 1$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [-1, 0] pois g'(-1) = 1,36787 > 0 e g'(0) = 2 > 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [-1, 0] contém único valor α ∈ [-1, 0] tal que g(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = -1, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|     xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| -0.50000 |  1.00000   | 0.10653
 2| -0.75000 |  0.50000   | -0.27763
 3| -0.62500 |  0.25000   | -0.08974
 4| -0.56250 |  0.12500   | 0.00728
 5| -0.59375 |  0.06250   | -0.04150
 6| -0.57812 |  0.03125   | -0.01718
 7| -0.57031 |  0.01562   | -0.00496
 8| -0.56641 |  0.00781   | 0.00116
 9| -0.56836 |  0.00391   | -0.00191
10| -0.56738 |  0.00195   | -0.00038
11| -0.56689 |  0.00098   | 0.00039
12| -0.56714 |  0.00049   | 0.00001

Aproximação -0.56714 à raiz, com 12 iterações
```

```
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|    xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| -0.61270| 1.00000    | -0.07081
 2| -0.57218| 0.61270    | -0.00789
 3| -0.56770| 0.57218    | -0.00088
 4| -0.56721| 0.56770    | -0.00010
 5| -0.56715| 0.56721    | -0.00001
 6| -0.56714| 0.56715    | -0.00000

Aproximação -0.56714 à raiz, com 6 iterações
```

```
***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|     xm    | abs(x-x0)|   f(x)  |   f1(x)
 1| -0.56699 | 0.02910  | 0.00024 | 1.56723
 2| -0.56714 | 0.00016  | 0.00000 | 1.56714

Aproximação -0.56714 à raiz, com 2 iterações
```

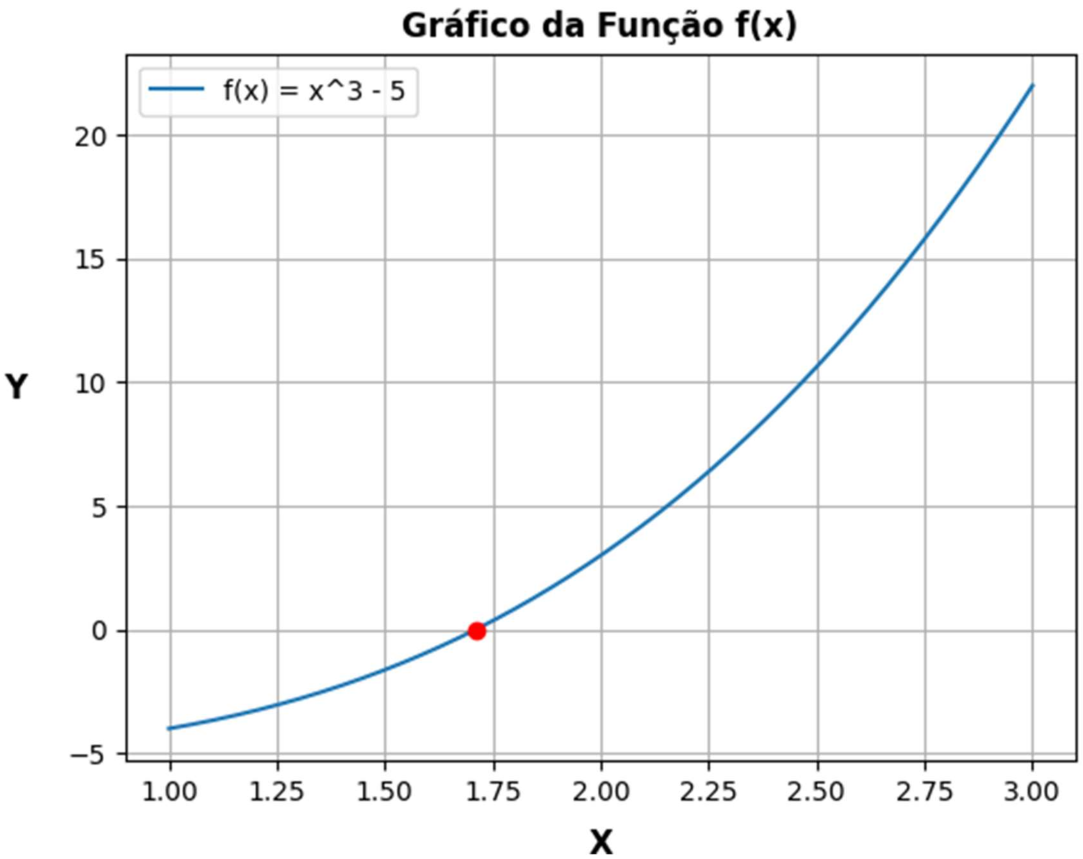
3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ -0,56714 com 5 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, vamos mostrar que g(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a virgula, pois:

$g(\alpha) = 0{,}56714 - 0{,}56714 \approx 0$

Exemplo 2.5

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função $f(x) = x^3 - 5$ possui raiz real no intervalo [1, 3].




Inspeção:

$f(1) = 1 - 5 = -4$

$f(3) = 27 - 5 = 22$

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [1, 3]: A função f(x) é continua no intervalo, obtendo-se que $f(1) * f(3) = -4 * 22 < 0$, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto $\alpha \in [1, 3]$ tal que $f(\alpha) = 0$.
- Unicidade do zero da função no intervalo [1, 3]: Existe a derivada de f(x), sendo ela $f'(x) = 3x^2$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [0, 3] pois $f'(1) = 1 > 0$ e $f'(3) = 3(3)^2 > 0$. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [1, 3] contém único valor $\alpha \in [1, 3]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = -1, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 2.00000 |  2.00000  | 3.00000
 2| 1.50000 |  1.00000  | -1.62500
 3| 1.75000 |  0.50000  | 0.35938
 4| 1.62500 |  0.25000  | -0.70898
 5| 1.68750 |  0.12500  | -0.19458
 6| 1.71875 |  0.06250  | 0.07736
 7| 1.70312 |  0.03125  | -0.05986
 8| 1.71094 |  0.01562  | 0.00844
 9| 1.70703 |  0.00781  | -0.02579
10| 1.70898 |  0.00391  | -0.00869
11| 1.70996 |  0.00195  | -0.00013
12| 1.71045 |  0.00098  | 0.00415
13| 1.71021 |  0.00049  | 0.00201
14| 1.71008 |  0.00024  | 0.00094
15| 1.71002 |  0.00012  | 0.00040
16| 1.70999 |  0.00006  | 0.00014
17| 1.70998 |  0.00003  | 0.00000

Aproximação 1.70998 à raiz, com 17 iterações
```

```
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm   | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 1.30769| 2.00000   | -2.76377
 2| 1.49656| 1.69231   | -1.64815
 3| 1.60134| 1.50344   | -0.89367
 4| 1.65594| 1.39866   | -0.45917
 5| 1.68342| 1.34406   | -0.22935
 6| 1.69700| 1.31658   | -0.11293
 7| 1.70366| 1.30300   | -0.05521
 8| 1.70690| 1.29634   | -0.02690
 9| 1.70848| 1.29310   | -0.01309
10| 1.70925| 1.29152   | -0.00636
11| 1.70962| 1.29075   | -0.00309
12| 1.70980| 1.29038   | -0.00150
13| 1.70989| 1.29020   | -0.00073
14| 1.70994| 1.29011   | -0.00035
15| 1.70996| 1.29006   | -0.00017
16| 1.70997| 1.29004   | -0.00008
17| 1.70997| 1.29003   | -0.00004
18| 1.70997| 1.29003   | -0.00002
19| 1.70997| 1.29003   | -0.00001

Aproximação 1.70997 à raiz, com 19 iterações
```

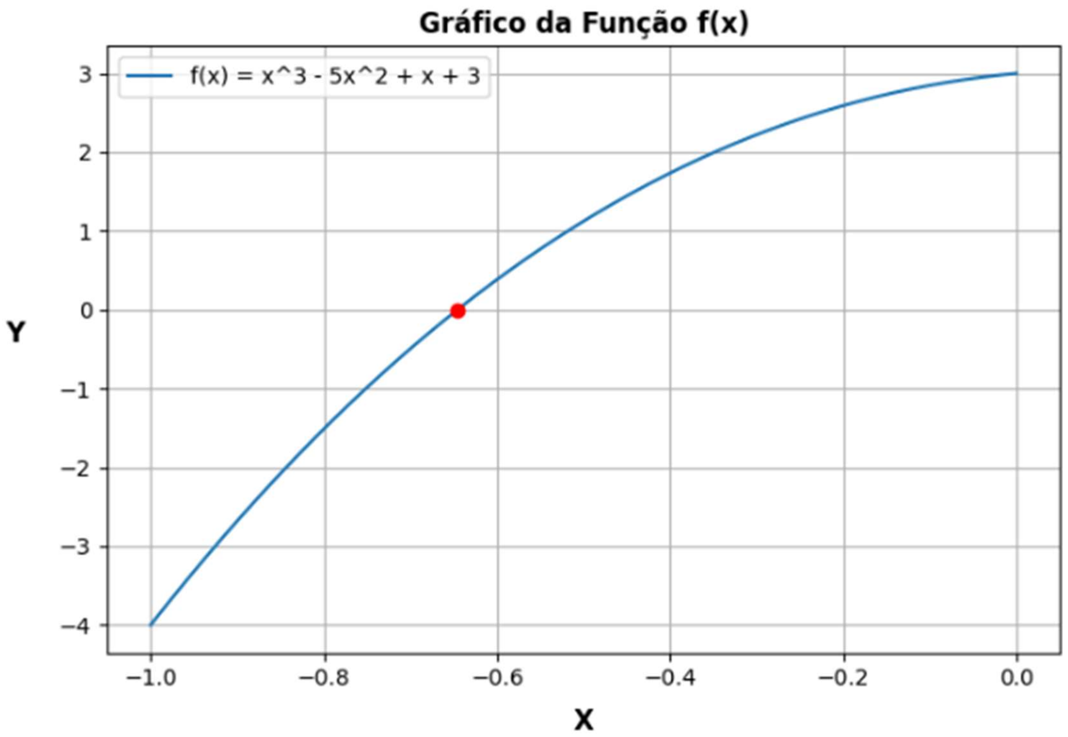
```
***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0)|   f(x)  |   f1(x)
 1| 1.80583 | 0.37936  | 0.88883 | 9.78304
 2| 1.71497 | 0.09085  | 0.04397 | 8.82340
 3| 1.70999 | 0.00498  | 0.00013 | 8.77220
 4| 1.70998 | 0.00001  | 0.00000 | 8.77205

Aproximação 1.70998 à raiz, com 4 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 1,70998 com 5 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método da falsa posição difere apenas na última casa decimal significativa, vamos mostrar que f(α) ≈ 0:

f(α) = 5.00003 – 5 ≈ 0

Exercício 2

1. Analisando graficamente verificamos que a função $g(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$ possui raiz negativa real no intervalo [-1, 0].




Inspeção:

$g(-1) = (-1)^3 - 5 * (-1)^2 - 1 + 3 = -4$

$g(0) = (0)^3 - 5*(0)^2 + 0 + 3 = 3$

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [-1, 0]: A função g(x) é continua no intervalo, obtendo-se que $g(-1) * g(0) = -4 * 3 < 0$, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto $\alpha \in [-1, 0]$ tal que $g(\alpha) = 0$.
- Unicidade do zero da função no intervalo [-1, 0]: Existe a derivada de g(x), sendo ela $g'(x) = 3x^2 -10x + 1$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [-1, 3] pois $g'(-1) = 3 + 10 + 1 = 14 > 0$ e $g'(0) = 0 + 0 + 1 = 1 > 0$. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [-1, 0] contém único valor $\alpha \in [-1, 0]$ tal que $g(\alpha) = 0$.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0 = -1$, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| -0.50000 |  1.00000  | 1.12500
 2| -0.75000 |  0.50000  | -0.98438
 3| -0.62500 |  0.25000  | 0.17773
 4| -0.68750 |  0.12500  | -0.37573
 5| -0.65625 |  0.06250  | -0.09219
 6| -0.64062 |  0.03125  | 0.04446
 7| -0.64844 |  0.01562  | -0.02344
 8| -0.64453 |  0.00781  | 0.01061
 9| -0.64648 |  0.00391  | -0.00639
10| -0.64551 |  0.00195  | 0.00212
11| -0.64600 |  0.00098  | -0.00213
12| -0.64575 |  0.00049  | -0.00001

Aproximação -0.64575 à raiz, com 12 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| -0.42857| 1.00000   | 1.57434
 2| -0.58996| 0.57143   | 0.46445
 3| -0.63262| 0.41004   | 0.11319
 4| -0.64273| 0.36738   | 0.02628
 5| -0.64506| 0.35727   | 0.00603
 6| -0.64559| 0.35494   | 0.00138
 7| -0.64572| 0.35441   | 0.00032
 8| -0.64574| 0.35428   | 0.00007
 9| -0.64575| 0.35426   | 0.00002
10| -0.64575| 0.35425   | 0.00000

Aproximação -0.64575 à raiz, com 10 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0)|   f(x)   |   f1(x)
 1| -0.64919 | 0.06510  | -0.03000 | 8.75619
 2| -0.64576 | 0.00343  | -0.00008 | 8.70863
 3| -0.64575 | 0.00001  | -0.00000 | 8.70850

Aproximação -0.64575 à raiz, com 3 iterações
```

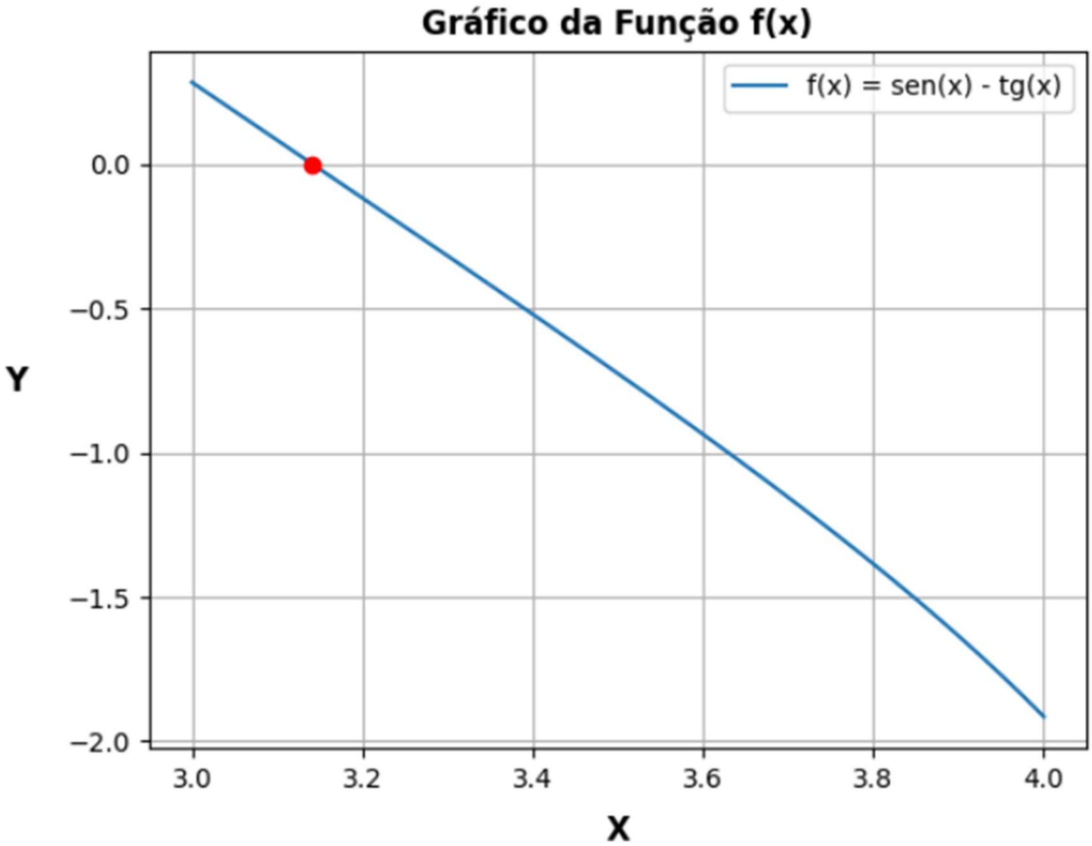
3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ -0,64575 com 5 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método da falsa posição difere apenas na última casa decimal significativa, vamos mostrar que g(α) ≈ 0:

$g(\alpha) = -0{,}26927 - 2{,}08495 - 0{,}64575 + 3 \approx 0$

Exemplo 2.6

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função $f(x) = sen(x) - tg(x)$ possui raiz real no intervalo [3, 4].




Inspeção:

$f(3) = sen(3) - tg(3) \approx 0{,}28366$

$f(4) = sen(4) - tg(4) \approx -1{,}91462$

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [3, 4]: A função $f(x)$ é continua no intervalo, obtendo-se que $f(3) * f(4) = 0{,}28366 * -1{,}91462 < 0$, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto $\alpha \in [3, 4]$ tal que $f(\alpha) = 0$.
- Unicidade do zero da função no intervalo [3, 4]: Existe a derivada de $f(x)$, sendo ela $f'(x) = cos(x) - sec^2(x)$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [3, 4] pois $f'(3) = cos(3) - sec^2(3) < 0$ e $f'(4) = cos(4) - sec^2(4) < 0$. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [3, 4] contém único valor $\alpha \in [3, 4]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = 4, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 3.50000 |  1.00000  | -0.72537
 2| 3.25000 |  0.50000  | -0.21703
 3| 3.12500 |  0.25000  | 0.03319
 4| 3.18750 |  0.12500  | -0.09183
 5| 3.15625 |  0.06250  | -0.02932
 6| 3.14062 |  0.03125  | 0.00194
 7| 3.14844 |  0.01562  | -0.01369
 8| 3.14453 |  0.00781  | -0.00588
 9| 3.14258 |  0.00391  | -0.00197
10| 3.14160 |  0.00195  | -0.00002
11| 3.14111 |  0.00098  | 0.00096
12| 3.14136 |  0.00049  | 0.00047
13| 3.14148 |  0.00024  | 0.00023
14| 3.14154 |  0.00012  | 0.00010
15| 3.14157 |  0.00006  | 0.00004
16| 3.14159 |  0.00003  | 0.00001
17| 3.14159 |  0.00002  | -0.00000

Aproximação 3.14159 à raiz, com 17 iterações
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 3.12904| 1.00000   | 0.02511
 2| 3.14031| 0.87096   | 0.00256
 3| 3.14146| 0.85969   | 0.00026
 4| 3.14158| 0.85854   | 0.00003
 5| 3.14159| 0.85842   | 0.00000

Aproximação 3.14159 à raiz, com 5 iterações
***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0)|   f(x)  |   f1(x)
 1| 3.14346 | 0.21709  | -0.00374 | -2.00000
 2| 3.14159 | 0.00187  | -0.00000 | -2.00000

Aproximação 3.14159 à raiz, com 2 iterações
```

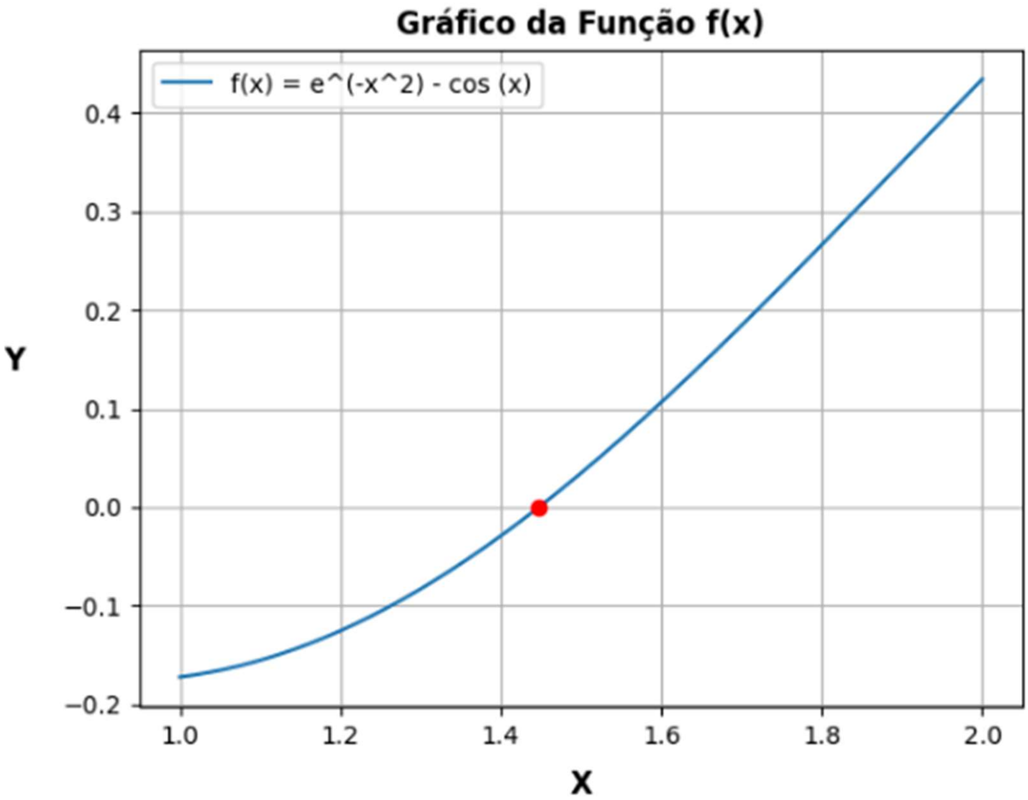
3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 3,14159 com 5 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, vamos mostrar que f(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a virgula, pois:

$f(\alpha) = sen(3,14159) - tg(3,14159) \approx 0$

Exemplo 2.7

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função f(x) = $e^{-x^2}$- cos(x) possui raiz real no intervalo [1, 2].




Inspeção:

f(1) = $e^{-1^{2}}$- cos(1) ≈ -0,17242

f(2) = $e^{-2^{2}}$- cos(2) ≈ 0,43446

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [1, 2]: A função f(x) é continua no intervalo, obtendo-se que f(1) * f(2) = -0,17242 * 0,4346 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [1, 2] tal que f(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [1, 2]: Existe a derivada de f, sendo ela f'(x) = $2e^{-x^2}$* x + sen(x). Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [1, 2] pois f'(1) = $2e^{-1^2}$* 1 + sen(1) > 0 e f'(2) = $2e^{-2^2}$* 2 + sen(2) > 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [1, 2] contém único valor α ∈ [1, 2] tal que f(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = 2,  obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

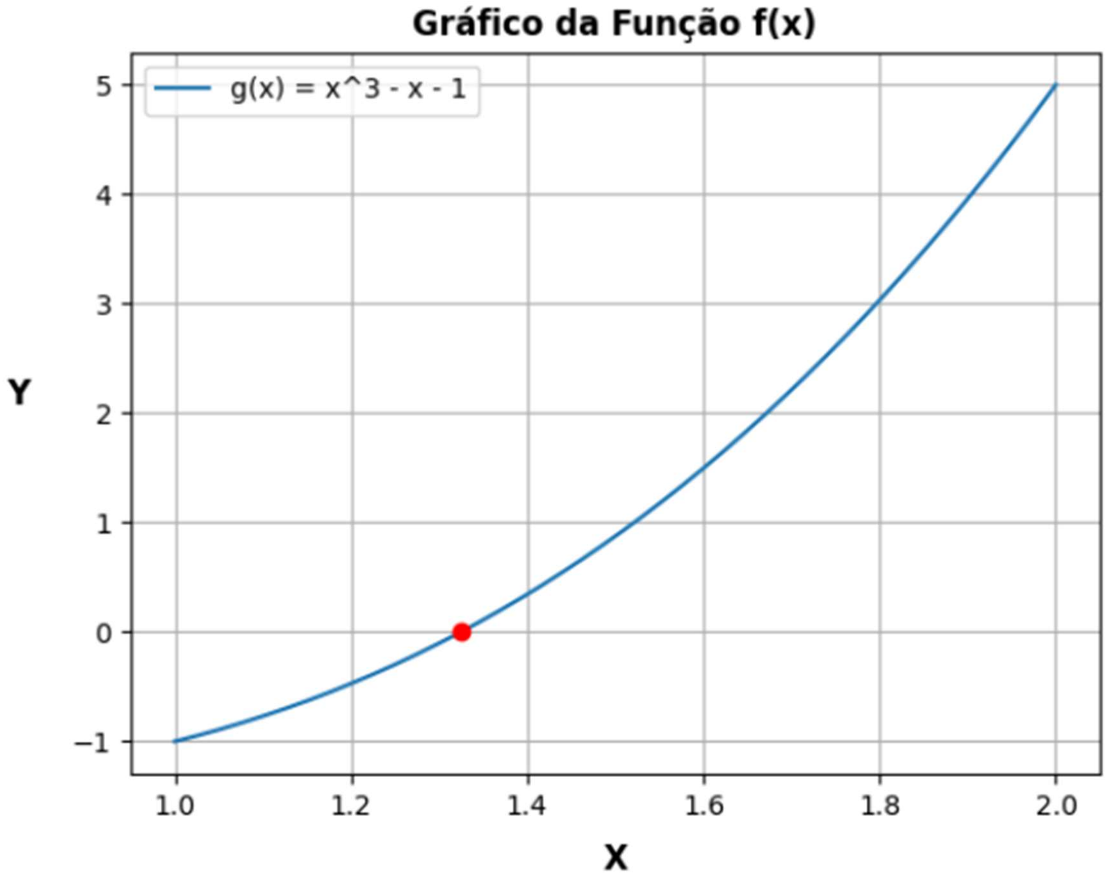
```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 1.50000 |  1.00000  | 0.03466
 2| 1.25000 |  0.50000  | -0.10571
 3| 1.37500 |  0.25000  | -0.04357
 4| 1.43750 |  0.12500  | -0.00626
 5| 1.46875 |  0.06250  | 0.01378
 6| 1.45312 |  0.03125  | 0.00365
 7| 1.44531 |  0.01562  | -0.00133
 8| 1.44922 |  0.00781  | 0.00115
 9| 1.44727 |  0.00391  | -0.00009
10| 1.44824 |  0.00195  | 0.00053
11| 1.44775 |  0.00098  | 0.00022
12| 1.44751 |  0.00049  | 0.00006
13| 1.44739 |  0.00024  | -0.00002
14| 1.44745 |  0.00012  | 0.00002
15| 1.44742 |  0.00006  | 0.00000

Aproximação 1.44742 à raiz, com 15 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm   | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 1.28411| 1.00000   | -0.09052
 2| 1.40755| 0.71589   | -0.02462
 3| 1.43932| 0.59245   | -0.00512
 4| 1.44585| 0.56068   | -0.00099
 5| 1.44711| 0.55415   | -0.00019
 6| 1.44736| 0.55289   | -0.00004
 7| 1.44740| 0.55264   | -0.00001

Aproximação 1.44740 à raiz, com 7 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0)|   f(x)  |   f1(x)
 1| 1.44812 | 0.03221  | 0.00045 | 0.63677
 2| 1.44741 | 0.00071  | 0.00000 | 0.63613

Aproximação 1.44741 à raiz, com 2 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 1,44740 com 5 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método da bissecção difere apenas na última casa decimal significativa, 1,44742, e no método de Newton-Raphson, 1,44741, deve-se mostrar, pois, que f(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a vírgula, pois:

f(α) = $e^{-1{,}44740^2}$- cos(1,44740) ≈ 0

Exercício 2

1. Analisando graficamente verificamos que a função $g(x) = x^3 - x - 1$ possui raiz real no intervalo [1, 2].




Inspeção:

$g(1) = 1 – 1 - 1 = -1$

$g(2) = 8 – 2 – 1 = 5$

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [1, 2]: A função g(x) é continua no intervalo, obtendo-se que $g(1) * g(2) = -1 * 2 < 0$, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto $\alpha \in [1, 2]$ tal que $g(\alpha) = 0$.
- Unicidade do zero da função no intervalo [-1, 0]: Existe a derivada de g(x), sendo ela $g'(x) = 3x^2 - 1$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [1, 2] pois $g'(1) = 3 - 1 > 0$ e $g'(2) = 12 - 1 > 0$. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [1, 2] contém único valor $\alpha \in [1, 2]$ tal que $g(\alpha) = 0$.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = 1, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

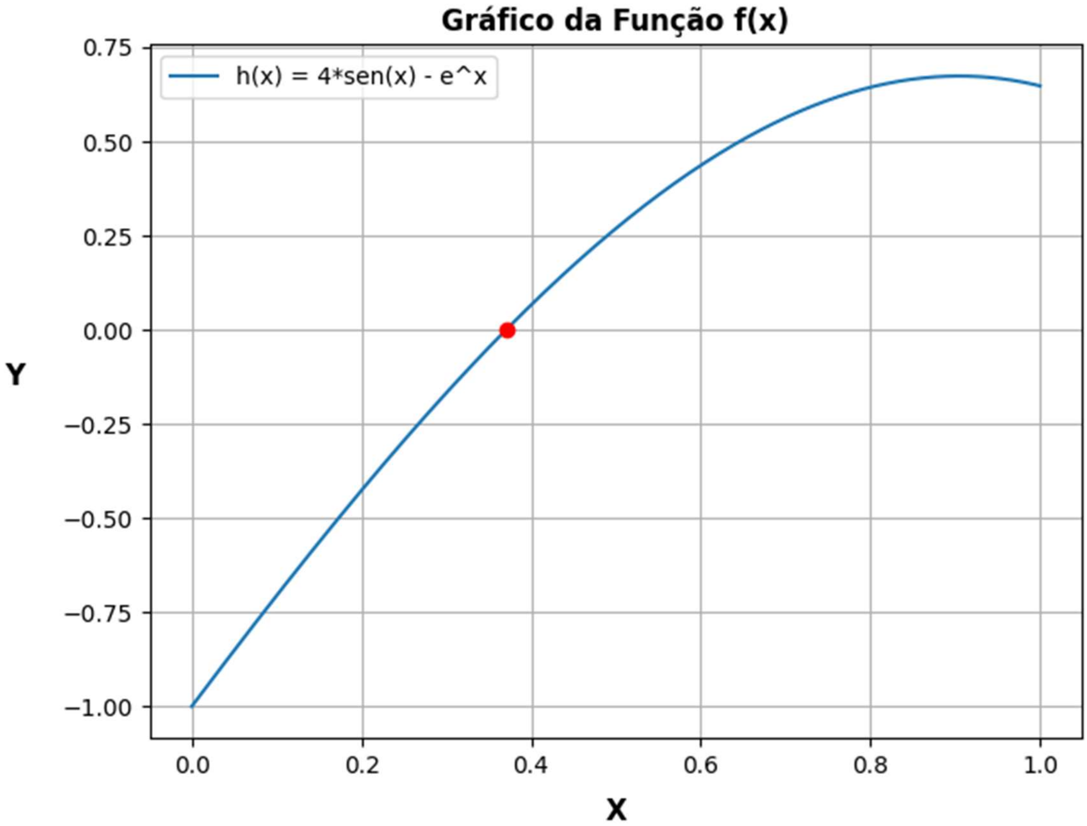
```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 1.50000 |  1.00000  | 0.87500
 2| 1.25000 |  0.50000  | -0.29688
 3| 1.37500 |  0.25000  | 0.22461
 4| 1.31250 |  0.12500  | -0.05151
 5| 1.34375 |  0.06250  | 0.08261
 6| 1.32812 |  0.03125  | 0.01458
 7| 1.32031 |  0.01562  | -0.01871
 8| 1.32422 |  0.00781  | -0.00213
 9| 1.32617 |  0.00391  | 0.00621
10| 1.32520 |  0.00195  | 0.00204
11| 1.32471 |  0.00098  | -0.00005
12| 1.32495 |  0.00049  | 0.00099
13| 1.32483 |  0.00024  | 0.00047
14| 1.32477 |  0.00012  | 0.00021
15| 1.32474 |  0.00006  | 0.00008
16| 1.32472 |  0.00003  | 0.00002
17| 1.32471 |  0.00002  | -0.00001

Aproximação 1.32471 à raiz, com 17 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm   | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 1.16667| 1.00000   | -0.57870
 2| 1.25311| 0.83333   | -0.28536
 3| 1.29344| 0.74689   | -0.12954
 4| 1.31128| 0.70656   | -0.05659
 5| 1.31899| 0.68872   | -0.02430
 6| 1.32228| 0.68101   | -0.01036
 7| 1.32368| 0.67772   | -0.00440
 8| 1.32428| 0.67632   | -0.00187
 9| 1.32453| 0.67572   | -0.00079
10| 1.32464| 0.67547   | -0.00034
11| 1.32468| 0.67536   | -0.00014
12| 1.32470| 0.67532   | -0.00006
13| 1.32471| 0.67530   | -0.00003
14| 1.32472| 0.67529   | -0.00001
15| 1.32472| 0.67528   | -0.00000

Aproximação 1.32472 à raiz, com 15 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0)|   f(x)  |   f1(x)
 1| 1.34783 | 0.15217  | 0.10068 | 4.44991
 2| 1.32520 | 0.02263  | 0.00206 | 4.26847
 3| 1.32472 | 0.00048  | 0.00000 | 4.26463

Aproximação 1.32472 à raiz, com 3 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 1,32472 com 5 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, fora a bissecção, que resultou em 1,32471. Vamos mostrar que g(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a virgula, pois:

g(α) = 2,32472 – 1,32471 - 1 ≈ 0

Exercício 3

1. Analisando graficamente verificamos que a função h(x) = 4sen(x) - $e^x$ possui raiz real no intervalo [0, 1].




Inspeção:

h(0) = 0 – 1 = -1

h(1) = 3,36588 – 2,71828 ≈ 0,64760

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [0, 1]: A função h(x) é continua no intervalo, obtendo-se que h(0) * h(1) = -1 * 2 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [0, 1] tal que h(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [0, 1]: Existe a derivada de h(x), sendo ela h'(x) = $4\cos x - e^x$. Adicionalmente, ela não preserva o sinal no intervalo [0, 1] pois h'(0) = 4 - 1 = 3 > 0 e h'(1) = 2,16120 - $e$ ≈ -0,55707 < 0. Não estando satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3, resulta que não é possível verificar que no intervalo [0, 1] contém único valor α ∈ [0, 1] tal que h(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-5, sendo Newton-Raphson com $X_0$ = 1, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

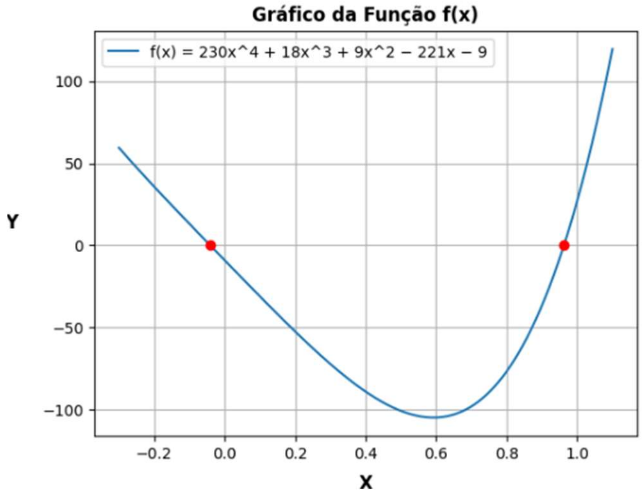
```
********Metodo de bissecção********
 k|     xm    | abs(xb-xa)| f(xm)
 1| 0.50000 |  1.00000  | 0.26898
 2| 0.25000 |  0.50000  | -0.29441
 3| 0.37500 |  0.25000  | 0.01010
 4| 0.31250 |  0.12500  | -0.13708
 5| 0.34375 |  0.06250  | -0.06215
 6| 0.35938 |  0.03125  | -0.02568
 7| 0.36719 |  0.01562  | -0.00770
 8| 0.37109 |  0.00781  | 0.00122
 9| 0.36914 |  0.00391  | -0.00323
10| 0.37012 |  0.00195  | -0.00101
11| 0.37061 |  0.00098  | 0.00011
12| 0.37036 |  0.00049  | -0.00045
13| 0.37048 |  0.00024  | -0.00017
14| 0.37054 |  0.00012  | -0.00003
15| 0.37057 |  0.00006  | 0.00004
16| 0.37056 |  0.00003  | 0.00000

Aproximação 0.37056 à raiz, com 16 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|    xm    | abs(xb-xa)|  f(xm)
 1| 0.60694| 1.00000    | 0.44662
 2| 0.41956| 0.60694    | 0.10814
 3| 0.37862| 0.41956    | 0.01828
 4| 0.37182| 0.37862    | 0.00287
 5| 0.37075| 0.37182    | 0.00045
 6| 0.37059| 0.37075    | 0.00007
 7| 0.37056| 0.37059    | 0.00001
 8| 0.37056| 0.37056    | 0.00000

Aproximação 0.37056 à raiz, com 8 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|     xm    | abs(x-x0)|    f(x)   |    f1(x)
 1| 0.36975 | 0.03642   | -0.00184 | 2.28229
 2| 0.37056 | 0.00080   | -0.00000 | 2.27996

Aproximação 0.37056 à raiz, com 2 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 1,32472 com 5 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, fora a bissecção, que resultou em 0,37056. Vamos mostrar que h(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 5 dígitos significativos após a virgula, pois h(α) = 1,44854 – 1,44854 = 0

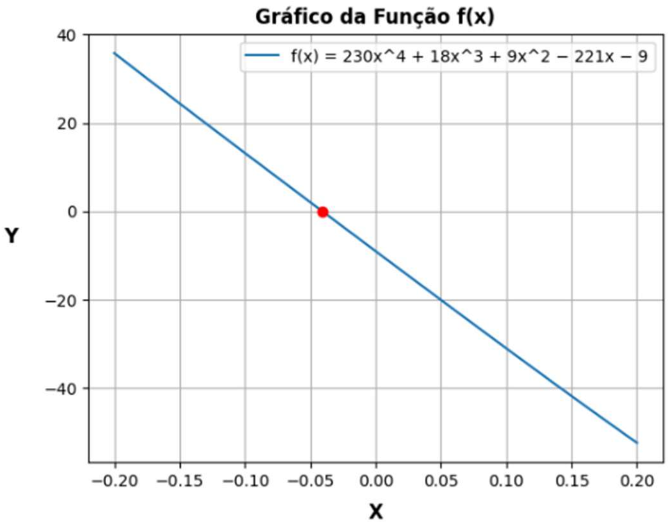
**Parte 2**

Exemplo 2.1

1. Analisando graficamente verificamos que a função f(x) = 230$x^4$ + 18$x^3$ + 9$x^2$ − 221$x$ − 9 possui duas raízes reais no intervalo [-0,3; 1,1].




Analisando graficamente verificamos a existência de duas raízes no intervalo [-0,3; 1,1], por isso, resolvemos escolher uma única raiz que está no intervalo [-0,2; 0,2], como sugere a imagem do gráfico a seguir:




Inspeção:

f(-0,2) = 230*($-0{,}2^4$) + 18*($-0{,}2^3$) + 9*($-0{,}2^2$) − 221*($-0{,}2$ ) − 9 = 35,784

f(0,2) = 230*($0{,}2^4$) + 18*($0{,}2^3$) + 9*($0{,}2^2$) - 221*($0{,}2$) - 9 = -52,328

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [-0,2; 0,2]: A função f(x) é continua no intervalo, obtendo-se que f(-0,2) * f(0,2) = 35,784 * -52,328 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [-0,2; 0,2] tal que f(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [-0,2; 0,2]: Existe a derivada de f, sendo ela f’(x) = 920$x^3$ + 54$x^2$ - 18$x$ - 221. Adicionalmente, ela

preserva o sinal no intervalo [-0,2; 0,2] pois f'(-0,2) = 920 * $(-0{,}2^3)$ + 54 * $(-0{,}2^2)$ - 18 * $(-0{,}2)$ - 221 = -229,8 < 0 e f'(0,2) = 920 * $(-0{,}2^3)$ + 54 * $(-0{,}2^2)$ - 18 * $(-0{,}2)$ - 221 = -207,88 < 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [-0,2; 0,2] contém único valor α ∈ [-0,2; 0,2] tal que f(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = 10^-6, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

- Como a função possui duas raízes no intervalo originalmente mencionado, obtivemos a derivada de segunda ordem f''(x) = 2760$x^2$ + 108x + 18 para determinar um melhor ponto inicial para o método de Newton-Raphson.

  f''(-0,2) = 2760 * (-0,2²) + 108 * (-0,2) + 18 = -114

  f''(0,2) = 2760 * (0,2²) + 108 * (0,2) + 18 = 150

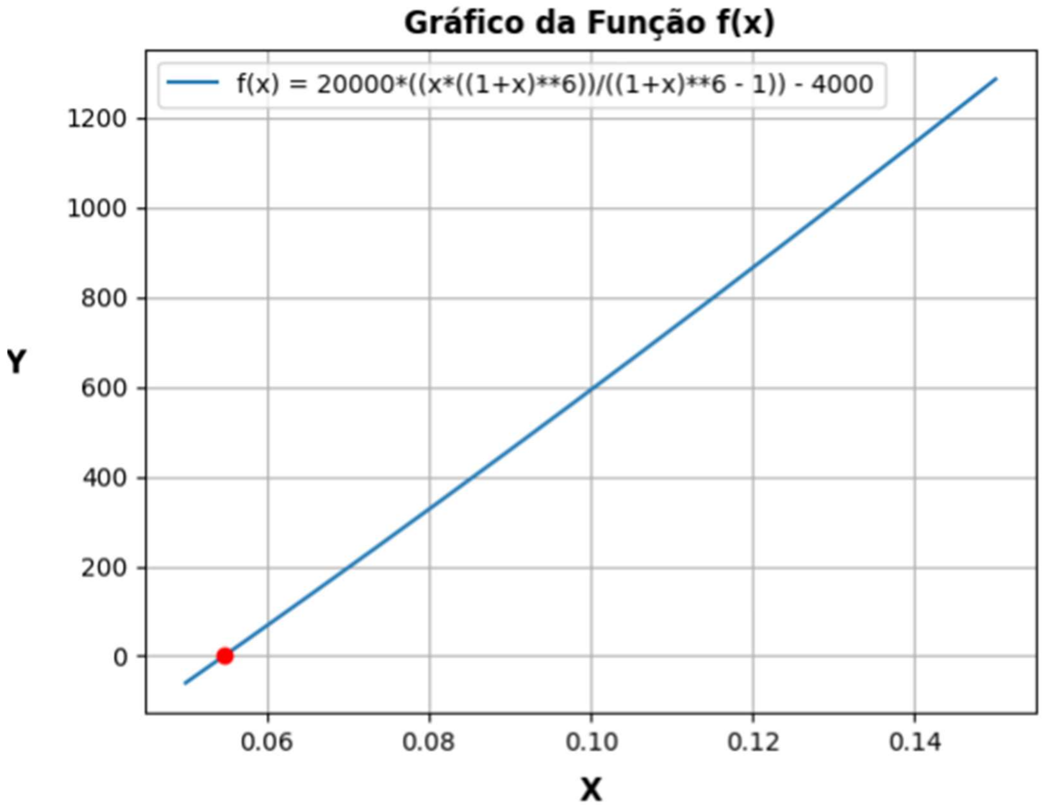
  Como f''(-0,2) < f''(0,2), utilizaremos o ponto [-0,2] como o inicial para o método de Newton-Raphson.

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm     | abs(xb-xa) | f(xm)
 1| 0.000000 |  0.400000  | -9.000000
 2| -0.100000 |  0.200000  | 13.195000
 3| -0.050000 |  0.100000  | 2.071688
 4| -0.025000 |  0.050000  | -3.469566
 5| -0.037500 |  0.025000  | -0.700338
 6| -0.043750 |  0.012500  | 0.685312
 7| -0.040625 |  0.006250  | -0.007602
 8| -0.042188 |  0.003125  | 0.338833
 9| -0.041406 |  0.001562  | 0.165610
10| -0.041016 |  0.000781  | 0.079003
11| -0.040820 |  0.000391  | 0.035700
12| -0.040723 |  0.000195  | 0.014049
13| -0.040674 |  0.000098  | 0.003224
14| -0.040649 |  0.000049  | -0.002189
15| -0.040662 |  0.000024  | 0.000517
16| -0.040656 |  0.000012  | -0.000836
17| -0.040659 |  0.000006  | -0.000159
18| -0.040660 |  0.000003  | 0.000179
19| -0.040659 |  0.000002  | 0.000010

Aproximação -0.040659 à raiz, com 19 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa) |  f(xm)
 1| -0.037552| 0.400000   | -0.688767
 2| -0.040620| 0.162448   | -0.008724
 3| -0.040659| 0.159380   | -0.000112
 4| -0.040659| 0.159341   | -0.000001
 5| -0.040659| 0.159341   | -0.000000

Aproximação -0.040659 à raiz, com 5 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0) |   f(x)   |   f1(x)
 1| -0.040660 | 0.003622  | 0.000121 | -221.704445
 2| -0.040659 | 0.000001  | 0.000000 | -221.704435

Aproximação -0.040659 à raiz, com 2 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ -0,040659 com 6 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, vamos mostrar que f(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 6 dígitos significativos após a virgula, pois: f(α) ≈ 0,000628 - 0,001209 + 0,014878 + 8,985639 – 9 ≈ 0

Exemplo 2.2

1. Analisando graficamente verificamos que a função h(i) = 20000 * $(i(1+i)^6)$ / $((1 + i)^6 – 1)$ - 4000 possui raiz real no intervalo [0,05; 0,15].




Inspeção:

h(0,05) = 20000 * $((0{,}05 * (1 + 0{,}05)^6) / ((1 + 0{,}05)^6 – 1))$ - 4000 = -59,65063

h(0,15) = 20000 * $((0{,}15 * (1 + 0{,}15)^6) / ((1 + 0{,}15)^6 – 1))$ - 4000 = 1284,73813

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [0,05; 0,15]: A função h(x) é continua no intervalo, obtendo-se que h(0,05) * h(0,15) = -59,65063 * 1284,73813 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto $\alpha \in$ [0,05; 0,15] tal que $h(\alpha) = 0$.
- Unicidade do zero da função no intervalo [0,05; 0,15]: Existe a derivada de f, sendo ela $h'(x) = ((20000x^5 + 7x^4 + 21x^3 + 35x^2 + 35x + 21)(1 + x)^5)/((x^5 + 6x^4 + 15x^3 + 20x^2 + 15x + 6)^2))$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [0,05; 0,15] pois h'(0,05) = 12601,25162 > 0 e h'(0,15) = 14232.90454 > 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [0,05; 0,15] contém único valor $\alpha \in$ [0,05; 0,15] tal que $h(\alpha) = 0$.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de $e = 10^{-6}$, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

- Obtivemos a derivada de segunda ordem h''(x) = (120000 (5 x^4 + 28 x^3 + 63 x^2 + 70 x + 35) (1 + x)^4) / (x^5 + 6 x^4 + 15 x^3 + 20 x^2 + 15 x + 6)^3 para determinar um melhor ponto inicial para o método de Newton-Raphson.

  h''(0,05) = $\frac{5635450}{314{,}410586} \cong 17995{,}2$

  h''(0,15) = $\frac{11575135}{298{,}37436} \cong 38736{,}4$

  Como h''(0,05) < h''(0,15), utilizaremos o ponto [0,5] como o inicial para o método de Newton-Raphson.

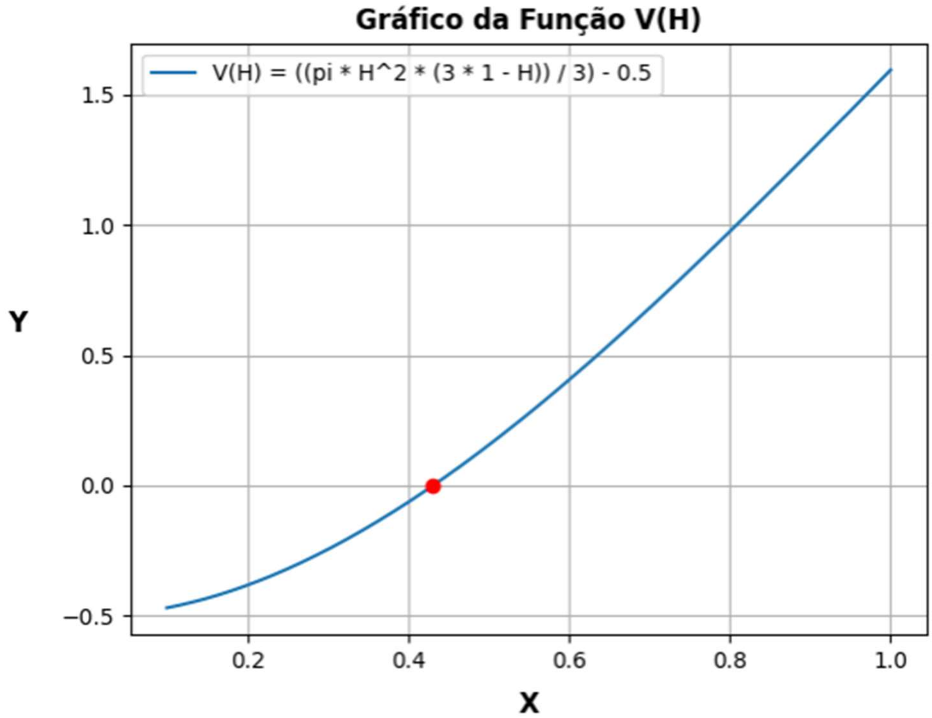
```
********Metodo de bissecção********
 k|     xm     | abs(xb-xa) |  f(xm)
 1| 0.100000 |  0.100000  | 592.147607
 2| 0.075000 |  0.050000  | 260.897824
 3| 0.062500 |  0.025000  | 99.254649
 4| 0.056250 |  0.012500  | 19.455884
 5| 0.053125 |  0.006250  | -20.184391
 6| 0.054688 |  0.003125  | -0.385947
 7| 0.055469 |  0.001563  | 9.529553
 8| 0.055078 |  0.000781  | 4.570448
 9| 0.054883 |  0.000391  | 2.091912
10| 0.054785 |  0.000195  | 0.852898
11| 0.054736 |  0.000098  | 0.233454
12| 0.054712 |  0.000049  | -0.076251
13| 0.054724 |  0.000024  | 0.078600
14| 0.054718 |  0.000012  | 0.001174
15| 0.054715 |  0.000006  | -0.037539
16| 0.054716 |  0.000003  | -0.018182
17| 0.054717 |  0.000002  | -0.008504

Aproximação 0.054717 à raiz, com 17 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|    xm    | abs(xb-xa) |  f(xm)
 1| 0.054437| 0.100000   | -3.562855
 2| 0.054701| 0.095563   | -0.210997
 3| 0.054717| 0.095299   | -0.012489
 4| 0.054718| 0.095283   | -0.000739
 5| 0.054718| 0.095282   | -0.000044
 6| 0.054718| 0.095282   | -0.000003
 7| 0.054718| 0.095282   | -0.000000

Aproximação 0.054718 à raiz, com 7 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|     xm     | abs(x-x0) |   f(x)   |    f1(x)
 1| 0.054718 | 0.000016  | 0.000002 | 12685.441519
 2| 0.054718 | 0.000000  | 0.000000 | 12685.441516

Aproximação 0.054718 à raiz, com 2 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 0,054718 com 6 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método da bissecção difere apenas na última casa decimal significativa, 0,054717. Se mostra, então, que h(α) ≈ 0, substituindo o valor:

h(α) = 20000((0,054718((1+0,054718)$^6$)) / ((1+0,054718)$^6$ - 1)) - 4000 ≈ 0

Exemplo 2.3

1 - Analisando graficamente verificamos que a função V(H)=((πH²(3*1-H))/3)-0,5 possui duas raízes reais no intervalo [0,1; 1].




Inspeção:

V(0,1) = (0π(3 - 0))/3)-0,5 = -0,5

V(1) = (π(3 - 1))/3)-0,5 ≈ 1,594395

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [0,1; 1]: A função V(m) é continua no intervalo, obtendo-se que V(0,1) * V(1) ≈ -0,5 * 1,594395 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [0,1, 1] tal que V(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [0,1; 1]: Existe a derivada de V(m), sendo ela V'(H) = -π(-2+H)H. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [0,1; 1] pois V'(0,1) = 1,9π * 0,1 ≈ 0,596902 > 0 e V'(1) = π * 1 ≈ 3,141592 > 0. Estando satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3, resulta que é possível verificar que no intervalo [0,1; 1] contém único valor α ∈ [0,1; 1] tal que V(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = $10^{-6}$, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

- Obtivemos a derivada de segunda ordem V''(H) = -π((2 * H) - 2) para determinar um melhor ponto inicial para o método de Newton-Raphson.

  V''(0,1) = -π((2 * 0,1) - 2) ≈ 5,56486

  V''(1) = -π((2 * 1) - 2) = 0

  Como V''(1) < V''(0,1), utilizaremos o ponto [1] como o inicial para o método de Newton-Raphson.

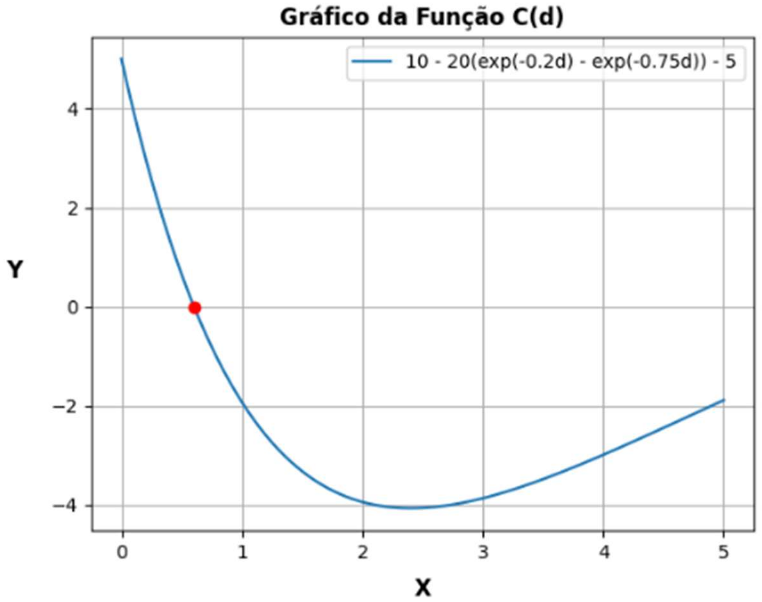
```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm     | abs(xb-xa) | f(xm)
 1| 0.550000 |  0.900000  | 0.276104
 2| 0.325000 |  0.450000  | -0.204118
 3| 0.437500 |  0.225000  | 0.013628
 4| 0.381250 |  0.112500  | -0.101395
 5| 0.409375 |  0.056250  | -0.045351
 6| 0.423438 |  0.028125  | -0.016220
 7| 0.430469 |  0.014062  | -0.001384
 8| 0.433984 |  0.007031  | 0.006100
 9| 0.432227 |  0.003516  | 0.002352
10| 0.431348 |  0.001758  | 0.000482
11| 0.430908 |  0.000879  | -0.000451
12| 0.431128 |  0.000439  | 0.000015
13| 0.431018 |  0.000220  | -0.000218
14| 0.431073 |  0.000110  | -0.000101
15| 0.431100 |  0.000055  | -0.000043
16| 0.431114 |  0.000027  | -0.000014
17| 0.431121 |  0.000014  | 0.000001

Aproximação 0.431121 à raiz, com 17 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa) |  f(xm)
 1| 0.304778| 0.900000   | -0.237825
 2| 0.395019| 0.695222   | -0.074333
 3| 0.421968| 0.604981   | -0.019298
 4| 0.428881| 0.578032   | -0.004751
 5| 0.430577| 0.571119   | -0.001154
 6| 0.430989| 0.569423   | -0.000279
 7| 0.431089| 0.569011   | -0.000068
 8| 0.431113| 0.568911   | -0.000016
 9| 0.431119| 0.568887   | -0.000004
10| 0.431120| 0.568881   | -0.000001

Aproximação 0.431120 à raiz, com 10 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm     | abs(x-x0) |   f(x)   |   f1(x)
 1| 0.433799 | 0.058689  | 0.005704 | 2.134449
 2| 0.431127 | 0.002672  | 0.000013 | 2.124920
 3| 0.431121 | 0.000006  | 0.000000 | 2.124899

Aproximação 0.431121 à raiz, com 3 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 0,431121 com 6 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método da Falsa posição difere apenas na última casa decimal significativa, 0,431120. Se mostra, então, que V(α) ≈ 0, substituindo o valor:

V(0,431121)=((π*0,431121²(3-0,431121))/3)-0,5 ≈ 0

Exemplo 2.4

1. Analisando graficamente verificamos que a função C(d) = 10 – 20($e^{-0,2d}$ - $e^{-0,75d}$) - 5 possui uma raiz real no intervalo [0; 5].




Inspeção:

C(0) = 10 – 20($e^{-0,2\cdot 0}$ - $e^{-0,75\cdot 0}$) - 5 = 5

C(5) = 10 – 20($e^{-0,2\cdot 5}$ - $e^{-0,75\cdot 5}$) - 5 ≈ -1,887233

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [0; 5]: A função C(d) é continua no intervalo, obtendo-se que C(0) * C(5) = 5 * -1,887233 < 0, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto α ∈ [0; 5] tal que C(α) = 0.
- Unicidade do zero da função no intervalo [0, 5]: Existe a derivada de C, sendo ela C'(d) = -15 * $e^{-0,75d}$ + 4 * $e^{-0,2d}$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [0; 5] pois C'(0) = -15 * $e^{-0,75\cdot 0}$ + 4 *$e^{-0,2\cdot 0}$ = 19 > 0 e C'(5) = -15 * $e^{-0,75\cdot 5}$ + 4 * $e^{-0,2\cdot 5}$ ≈ 1,82428 > 0. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [0; 5] contém único valor α ∈ [0; 5] tal que C(α) = 0.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de e = $10^6$, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

- Obtivemos a derivada de segunda ordem C''(x) = 11.25 e^(-0.75 x) - 0.8 e^(-0.2 x) para determinar um melhor ponto inicial para o método de Newton-Raphson.

  C''(0) = $11.25e^{-0.75\times 0} - 0.8e^{-0.2\times 0} = 10{,}45$

  C''(5) = $11.25e^{-0.75\times 5} - 0.8e^{-0.2\times 5} = -0{,}02966$

Como C’’(0) < C’’(5), utilizaremos o ponto 5 como o inicial para o método de Newton-Raphson.

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm    | abs(xb-xa) | f(xm)
 1| 2.500000 |  5.000000  | -4.063514
 2| 1.250000 |  2.500000  | -2.743903
 3| 0.625000 |  1.250000  | -0.134258
 4| 0.312500 |  0.625000  | 2.033041
 5| 0.468750 |  0.312500  | 0.861550
 6| 0.546875 |  0.156250  | 0.343047
 7| 0.585938 |  0.078125  | 0.099406
 8| 0.605469 |  0.039062  | -0.018653
 9| 0.595703 |  0.019531  | 0.040067
10| 0.600586 |  0.009766  | 0.010630
11| 0.603027 |  0.004883  | -0.004031
12| 0.601807 |  0.002441  | 0.003295
13| 0.602417 |  0.001221  | -0.000369
14| 0.602112 |  0.000610  | 0.001462
15| 0.602264 |  0.000305  | 0.000547
16| 0.602341 |  0.000153  | 0.000089
17| 0.602379 |  0.000076  | -0.000140
18| 0.602360 |  0.000038  | -0.000026
19| 0.602350 |  0.000019  | 0.000031
20| 0.602355 |  0.000010  | 0.000003
21| 0.602357 |  0.000005  | -0.000012
22| 0.602356 |  0.000002  | -0.000004
23| 0.602356 |  0.000001  | -0.000001

Aproximação 0.602356 à raiz, com 23 iterações

*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa) |  f(xm)
 1| 3.629904| 5.000000   | -3.362695
 2| 2.170296| 3.629904   | -4.029950
 3| 1.201721| 2.170296   | -2.606238
 4| 0.789957| 1.201721   | -1.017924
 5| 0.656337| 0.789957   | -0.314709
 6| 0.617472| 0.656337   | -0.089991
 7| 0.606556| 0.617472   | -0.025150
 8| 0.603520| 0.606556   | -0.006984
 9| 0.602678| 0.603520   | -0.001936
10| 0.602445| 0.602678   | -0.000536
11| 0.602380| 0.602445   | -0.000149
12| 0.602362| 0.602380   | -0.000041
13| 0.602357| 0.602362   | -0.000011
14| 0.602356| 0.602357   | -0.000003
15| 0.602356| 0.602356   | -0.000001

Aproximação 0.602356 à raiz, com 15 iterações
```

```
***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0) |   f(x)    |   f1(x)
 1| 6.810953 | 0.124043  | -0.001046 | 0.933694
 2| 6.812073 | 0.001120  | -0.000000 | 0.933540

Aproximação 6.812073 à raiz, com 2 iterações
```

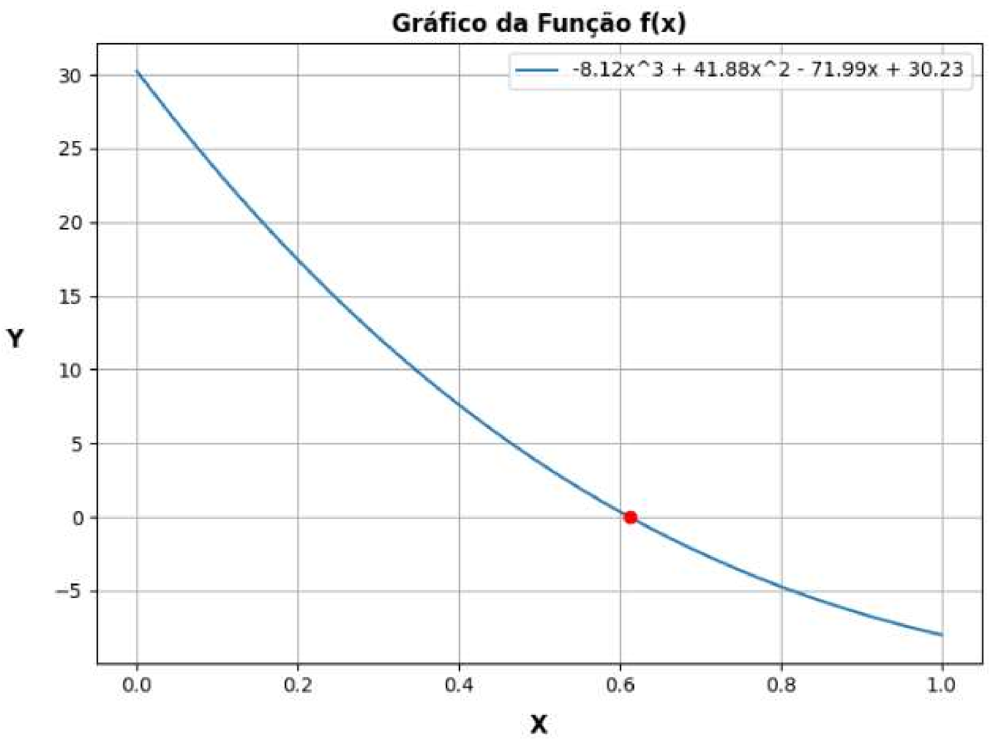
3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se α ≈ 0,602356 com 6 dígitos são as aproximações obtidas com os 3 métodos, já que o método de Newton-Raphson difere apenas na última casa decimal significativa, 0,602355, deve-se mostrar, pois, que C(α) ≈ 0. E de fato tal resultado é obtido com 6 dígitos significativos após a vírgula, pois:

$C(\alpha) = 10 – 20(e^{-0,2\cdot 0,602356} - e^{-0,75\cdot 0,602356}) - 5 \approx 0$

Exemplo 2.5

Exercício 1

1. Analisando graficamente verificamos que a função $T(x) = -8{,}12x^3 + 41{,}8x^2 - 71{,}99x + 30{,}23$ possui raiz real no intervalo [0, 1].




Inspeção:

$T(0) = -8{,}12 * 0 + 41{,}88 * 0 - 71{,}99*0 + 30{,}23 = 30{,}23$

$T(1) = -8{,}12 * 1 + 41{,}88 * 1 - 71{,}99 * 1 + 30{,}23 = -8$

Análise teórica:

- Existência do zero da função no intervalo [0, 1]: A função T(x) é continua no intervalo, obtendo-se que $T(0) * T(1) = 30{,}23 * (-8) < 0$, de modo que estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.2, cuja tese afirma que existe pelo menos um ponto $\alpha \in [0, 1]$ tal que $T(\alpha) = 0$.
- Unicidade do zero da função no intervalo [3, 4]: Existe a derivada de T(x), sendo ela $T'(x) = -24{,}36x^2 + 83{,}76x - 71{,}99$. Adicionalmente, ela preserva o sinal no intervalo [0, 1] pois $T'(0) = -71{,}99 < 0$ e $T'(1) = -12{,}59 < 0$. Como estão satisfeitas as hipóteses da Proposição 2.3 resulta que o intervalo [0, 1] contém único valor $\alpha \in [0, 1]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

2 - Para os métodos de refinamento indicados no enunciado e considerando a precisão de $e = 10^6$, obtém-se como saída do console em python os valores apresentados abaixo:

- Obtivemos a derivada de segunda ordem $T''(x) = -48{,}72x + 84{,}36$ para determinar o melhor ponto inicial para o método de Newton-Raphson.

T''(0) = 84.36

T''(1) = 35.64

Como T''(1) > T''(0), usamos o ponto 0 como inicial para o método.

```
********Metodo de bissecção********
 k|    xm     | abs(xb-xa) | f(xm)
  1| 2.500000 |  5.000000  | -14.870000
  2| 1.250000 |  2.500000  | -10.179375
  3| 0.625000 |  1.250000  | -0.386797
  4| 0.312500 |  0.625000  | 11.575166
  5| 0.468750 |  0.312500  | 4.850502
  6| 0.546875 |  0.156250  | 2.057547
  7| 0.585938 |  0.078125  | 0.793251
  8| 0.605469 |  0.039062  | 0.192878
  9| 0.615234 |  0.019531  | -0.099524
 10| 0.610352 |  0.009766  | 0.046033
 11| 0.612793 |  0.004883  | -0.026907
 12| 0.611572 |  0.002441  | 0.009523
 13| 0.612183 |  0.001221  | -0.008702
 14| 0.611877 |  0.000610  | 0.000408
 15| 0.612030 |  0.000305  | -0.004148
 16| 0.611954 |  0.000153  | -0.001870
 17| 0.611916 |  0.000076  | -0.000731
 18| 0.611897 |  0.000038  | -0.000162
 19| 0.611887 |  0.000019  | 0.000123
 20| 0.611892 |  0.000010  | -0.000019
 21| 0.611889 |  0.000005  | 0.000052
 22| 0.611891 |  0.000002  | 0.000016
 23| 0.611891 |  0.000001  | -0.000001

Aproximação 0.611891 à raiz, com 23 iterações
```

```
*******Metodo da Falsa Posição*******
 k|   xm    | abs(xb-xa) |  f(xm)
 1| 0.460893| 5.000000   | 5.151564
 2| 0.538099| 4.539107   | 2.353463
 3| 0.573094| 4.461901   | 1.199508
 4| 0.590858| 4.426906   | 0.640021
 5| 0.600316| 4.409142   | 0.349230
 6| 0.605471| 4.399684   | 0.192801
 7| 0.608315| 4.394529   | 0.107114
 8| 0.609895| 4.391685   | 0.059715
 9| 0.610775| 4.390105   | 0.033355
10| 0.611267| 4.389225   | 0.018650
11| 0.611542| 4.388733   | 0.010435
12| 0.611696| 4.388458   | 0.005840
13| 0.611782| 4.388304   | 0.003269
14| 0.611830| 4.388218   | 0.001830
15| 0.611857| 4.388170   | 0.001025
16| 0.611872| 4.388143   | 0.000574
17| 0.611880| 4.388128   | 0.000321
18| 0.611885| 4.388120   | 0.000180
19| 0.611888| 4.388115   | 0.000101
20| 0.611889| 4.388112   | 0.000056
21| 0.611890| 4.388111   | 0.000032
22| 0.611891| 4.388110   | 0.000018
23| 0.611891| 4.388109   | 0.000010
24| 0.611891| 4.388109   | 0.000006
25| 0.611891| 4.388109   | 0.000003
26| 0.611891| 4.388109   | 0.000002
27| 0.611891| 4.388109   | 0.000001

Aproximação 0.611891 à raiz, com 27 iterações

***********Metodo de Newton-Raphson***********
 k|    xm    | abs(x-x0) |   f(x)   |   f1(x)
 1| 0.569476 | 0.204901  | 1.315592 | -32.190687
 2| 0.610345 | 0.040869  | 0.046225 | -29.942108
 3| 0.611889 | 0.001544  | 0.000064 | -29.858763
 4| 0.611891 | 0.000002  | 0.000000 | -29.858646

Aproximação 0.611891 à raiz, com 4 iterações
```

3 – Verificação da qualidade da aproximação: Se $\alpha \approx 0{,}611891$ com 6 dígitos é a aproximação obtida com os 3 métodos, vamos mostrar que $T(\alpha) \approx 0$. E de fato tal resultado é obtido com 6 dígitos significativos após a virgula, pois:

$f(\alpha) = 8.12 * 0{,}229098 + 41.88 * 0{,}374410 - 71.99 * 0{,}611891 + 30.23 \approx 0$

# Tópico 3 – Sistema de equações lineares

## Parte 1

Exemplo 3.1

1. S3$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

```
***Método de Gauss***

Matriz A original:
1.000000, 1.000000, 1.000000
2.000000, 1.000000, -1.000000
2.000000, 2.000000, 1.000000

Vetor B original:
1.000000, 0.000000, 1.000000
Dimensao de n: 3

Matriz triangularizada:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, -1.000000, -3.000000
0.000000, 0.000000, -1.000000

Vetor B escalonado
1.000000, -2.000000, -1.000000

Solução X do sistema:
1.000000
-1.000000
1.000000

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -1.000000) + (1.000000 * 1.000000) = 1.000000
(2.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -1.000000) + (-1.000000 * 1.000000) = 0.000000
(2.000000 * 1.000000) + (2.000000 * -1.000000) + (1.000000 * 1.000000) = 1.000000
```

```
***Método de LU***

Matriz A original:
1.000000, 1.000000, 1.000000
2.000000, 1.000000, -1.000000
2.000000, 2.000000, 1.000000

Vetor B original:
1.000000, 0.000000, 1.000000

Dimensão de n: 3

Fator L:
0.000000, 0.000000, 0.000000
2.000000, 0.000000, 0.000000
2.000000, -0.000000, 0.000000

Fator U:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, -1.000000, -3.000000
0.000000, 0.000000, -1.000000

Solução de Y para LY=B:
1.000000, -2.000000, -1.000000

Solução X do sistema:
1.000000
-1.000000
1.000000

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -1.000000) + (1.000000 * 1.000000) = 1.000000
(2.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -1.000000) + (-1.000000 * 1.000000) = 0.000000
(2.000000 * 1.000000) + (2.000000 * -1.000000) + (1.000000 * 1.000000) = 1.000000
```

2. S3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

```
***Método de Gauss***

Matriz A original:
1.000000, 1.000000, 1.000000
2.000000, 1.000000, -1.000000
2.000000, -1.000000, 1.000000

Vetor B original:
-2.000000, 1.000000, 3.000000
Dimensao de n: 3

Matriz triangularizada:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, -1.000000, -3.000000
0.000000, 0.000000, 8.000000

Vetor B escalonado
-2.000000, 5.000000, -8.000000

Solução X do sistema:
1.000000
-2.000000
-1.000000

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -2.000000) + (1.000000 * -1.000000) = -2.000000
(2.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -2.000000) + (-1.000000 * -1.000000) = 1.000000
(2.000000 * 1.000000) + (-1.000000 * -2.000000) + (1.000000 * -1.000000) = 3.000000
```

```
***Método de LU***

Matriz A original:
1.000000, 1.000000, 1.000000
2.000000, 1.000000, -1.000000
2.000000, -1.000000, 1.000000

Vetor B original:
-2.000000, 1.000000, 3.000000

Dimensão de n: 3

Fator L:
0.000000, 0.000000, 0.000000
2.000000, 0.000000, 0.000000
2.000000, 3.000000, 0.000000

Fator U:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, -1.000000, -3.000000
0.000000, 0.000000, 8.000000

Solução de Y para LY=B:
-2.000000, 5.000000, -8.000000

Solução X do sistema:
1.000000
-2.000000
-1.000000

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -2.000000) + (1.000000 * -1.000000) = -2.000000
(2.000000 * 1.000000) + (1.000000 * -2.000000) + (-1.000000 * -1.000000) = 1.000000
(2.000000 * 1.000000) + (-1.000000 * -2.000000) + (1.000000 * -1.000000) = 3.000000
```

3. S3 $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 27 \\ 4x_1 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$

```
***Método de Gauss***

Matriz A original:
1.000000, 10.000000, 3.000000
0.000000, 4.000000, 1.000000
2.000000, 1.000000, 4.000000

Vetor B original:
27.000000, 6.000000, 12.000000
Dimensao de n: 3

Matriz triangularizada:
1.000000, 10.000000, 3.000000
0.000000, 4.000000, 1.000000
0.000000, 0.000000, 2.750000

Vetor B escalonado
27.000000, 6.000000, -13.500000

Solução X do sistema:
14.454545
2.727273
-4.909091

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 14.454545) + (10.000000 * 2.727273) + (3.000000 * -4.909091) = 27.000000
(0.000000 * 14.454545) + (4.000000 * 2.727273) + (1.000000 * -4.909091) = 6.000000
(2.000000 * 14.454545) + (1.000000 * 2.727273) + (4.000000 * -4.909091) = 12.000000
```

```
***Método de LU***

Matriz A original:
1.000000, 10.000000, 3.000000
0.000000, 4.000000, 1.000000
2.000000, 1.000000, 4.000000

Vetor B original:
27.000000, 6.000000, 12.000000

Dimensão de n: 3

Fator L:
0.000000, 0.000000, 0.000000
0.000000, 0.000000, 0.000000
2.000000, -4.750000, 0.000000

Fator U:
1.000000, 10.000000, 3.000000
0.000000, 4.000000, 1.000000
0.000000, 0.000000, 2.750000

Solução de Y para LY=B:
27.000000, 6.000000, -13.500000

Solução X do sistema:
14.454545
2.727273
-4.909091

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 14.454545) + (10.000000 * 2.727273) + (3.000000 * -4.909091) = 27.000000
(0.000000 * 14.454545) + (4.000000 * 2.727273) + (1.000000 * -4.909091) = 6.000000
(2.000000 * 14.454545) + (1.000000 * 2.727273) + (4.000000 * -4.909091) = 12.000000
```

4. S4 $\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 + 0{,}3x_4 = 4{,}0 \\ 0{,}3x_1 + 2x_2 - 0{,}3x_3 - 0{,}9x_4 = 7{,}5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 0{,}3x_3 + 0{,}8x_4 = 4{,}4 \\ 0{,}6x_1 + 3{,}2x_2 - 1{,}8x_3 + 0{,}4x_4 = 10 \end{cases}$

```
***Método de Gauss***

Matriz A original:
0.100000, 0.200000, 1.000000, 0.300000
0.300000, 2.000000, -0.300000, -0.900000
4.000000, 2.000000, -0.300000, 0.800000
0.600000, 3.200000, -1.800000, 0.400000

Vetor B original:
4.000000, 7.500000, 4.400000, 10.000000
Dimensao de n: 4

Matriz triangularizada:
0.100000, 0.200000, 1.000000, 0.300000
0.000000, 1.400000, -3.300000, -1.800000
0.000000, 0.000000, -54.442857, -18.914286
0.000000, 0.000000, 0.000000, 2.243453

Vetor B escalonado
4.000000, -4.500000, -174.885714, 2.340750

Solução X do sistema:
-1.317224
4.844569
2.849798
1.043369

Verificação dos resultados:
(0.100000 * -1.317224) + (0.200000 * 4.844569) + (1.000000 * 2.849798) + (0.300000 * 1.043369) = 4.000000
(0.300000 * -1.317224) + (2.000000 * 4.844569) + (-0.300000 * 2.849798) + (-0.900000 * 1.043369) = 7.500000
(4.000000 * -1.317224) + (2.000000 * 4.844569) + (-0.300000 * 2.849798) + (0.800000 * 1.043369) = 4.400000
(0.600000 * -1.317224) + (3.200000 * 4.844569) + (-1.800000 * 2.849798) + (0.400000 * 1.043369) = 10.000000
```

```
***Método de LU***

Matriz A original:
0.100000, 0.200000, 1.000000, 0.300000
0.300000, 2.000000, -0.300000, -0.900000
4.000000, 2.000000, -0.300000, 0.800000
0.600000, 3.200000, -1.800000, 0.400000

Vetor B original:
4.000000, 7.500000, 4.400000, 10.000000

Dimensão de n: 4

Fator L:
0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000
3.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000
40.000000, -4.285714, 0.000000, 0.000000
6.000000, 1.428571, 0.056678, 0.000000

Fator U:
0.100000, 0.200000, 1.000000, 0.300000
0.000000, 1.400000, -3.300000, -1.800000
0.000000, 0.000000, -54.442857, -18.914286
0.000000, 0.000000, 0.000000, 2.243453

Solução de Y para LY=B:
4.000000, -4.500000, -174.885714, 2.340750

Solução X do sistema:
-1.317224
4.844569
2.849798
1.043369

Verificação dos resultados:
(0.100000 * -1.317224) + (0.200000 * 4.844569) + (1.000000 * 2.849798) + (0.300000 * 1.043369) = 4.000000
(0.300000 * -1.317224) + (2.000000 * 4.844569) + (-0.300000 * 2.849798) + (-0.900000 * 1.043369) = 7.500000
(4.000000 * -1.317224) + (2.000000 * 4.844569) + (-0.300000 * 2.849798) + (0.800000 * 1.043369) = 4.400000
(0.600000 * -1.317224) + (3.200000 * 4.844569) + (-1.800000 * 2.849798) + (0.400000 * 1.043369) = 10.000000
```

Exemplo 3.2

1. S4
$$\begin{cases} 20x_1 - 5x_2 = 1100 \\ -5x_1 + 15x_2 - 5x_3 = 100 \\ -5x_2 + 15x_3 - 5x_4 = 100 \\ -5x_3 + 19x_4 = 100 \end{cases}$$

```
***Método de Thomas***

Vertores originais A, B, C e D:
A: 0.000000, -5.000000, -5.000000, -5.000000
B: 20.000000, 15.000000, 15.000000, 19.000000
C: -5.000000, -5.000000, -5.000000, 0.000000
D: 1100.000000, 100.000000, 100.000000, 100.000000

Solução X do sistema:
63.830645
35.322581
22.137097
11.088710

Verificação dos resultados:
(20.000000 * 63.830645) + (-5.000000 * 35.322581) + (0.000000 * 22.137097) + (0.000000 * 11.088710) = 1100.000000
(-5.000000 * 63.830645) + (15.000000 * 35.322581) + (-5.000000 * 22.137097) + (0.000000 * 11.088710) = 100.000000
(0.000000 * 63.830645) + (-5.000000 * 35.322581) + (15.000000 * 22.137097) + (-5.000000 * 11.088710) = 100.000000
(0.000000 * 63.830645) + (0.000000 * 35.322581) + (-5.000000 * 22.137097) + (19.000000 * 11.088710) = 100.000000
```

2. S4
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 3_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

```
***Método de Thomas***

Vertores originais A, B, C e D:
A: 0.000000, -1.000000, -1.000000, -1.000000
B: 3.000000, 3.000000, 3.000000, 3.000000
C: -1.000000, -1.000000, -1.000000, 0.000000
D: 2.000000, 1.000000, 1.000000, 2.000000

Solução X do sistema:
1.000000
1.000000
1.000000
1.000000

Verificação dos resultados:
(3.000000 * 1.000000) + (-1.000000 * 1.000000) + (0.000000 * 1.000000) + (0.000000 * 1.000000) = 2.000000
(-1.000000 * 1.000000) + (3.000000 * 1.000000) + (-1.000000 * 1.000000) + (0.000000 * 1.000000) = 1.000000
(0.000000 * 1.000000) + (-1.000000 * 1.000000) + (3.000000 * 1.000000) + (-1.000000 * 1.000000) = 1.000000
(0.000000 * 1.000000) + (0.000000 * 1.000000) + (-1.000000 * 1.000000) + (3.000000 * 1.000000) = 2.000000
```

Exemplo 3.3

1. S3 $\begin{cases} 10x + y + \ z = 12 \\ x + 5y + 9z = 15 \\ 2x + 8y - 4z = 6 \end{cases}$

Verificação da convergência do sistema: O sistema de equações lineares S1 converge se for diagonalmente dominante se forem satisfeitos o critério das linhas ou o critério das colunas. Temos essa condição não satisfeita nas linhas 2 e 3, pois, |10| ≥ |1|+|1|; |5| < |1|+|9| e |-4| < |2|+|8|, o que mostra que S1 não tem diagonal dominante e, pela Proposição 3.8, o sistema S1 não é convergente.

Sendo assim vemos necessidade de permutar as linhas 2 e 3, a fim de satisfazer a Proposição 3.8, agora temos que, |8| ≥ |2|+|-4| e |9| ≥ |1|+|5|, sendo o sistema S1 convergente.

$$\text{Permutado} \begin{cases} 10x + y + \ z = 12 \\ 2x + 8y - 4z = 6 \\ x + 5y + 9z = 15 \end{cases}$$

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
10.000000, 1.000000, 1.000000
2.000000, 8.000000, -4.000000
1.000000, 5.000000, 9.000000

Vetor B original:
12.000000, 6.000000, 15.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 12

Solução X do sistema:
1.000000
1.000000
1.000000

Verificação dos resultados:
(10.000000 * 1.000000) + (1.000000 * 1.000000) + (1.000000 * 1.000000) = 12.000000
(2.000000 * 1.000000) + (8.000000 * 1.000000) + (-4.000000 * 1.000000) = 6.000000
(1.000000 * 1.000000) + (5.000000 * 1.000000) + (9.000000 * 1.000000) = 15.000000

***Método de Gauss-Jacobi***

Matriz A original:
10.000000, 1.000000, 1.000000
2.000000, 8.000000, -4.000000
1.000000, 5.000000, 9.000000

Vetor B original:
12.000000, 6.000000, 15.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 21

Solução X do sistema:
1.000000
1.000000
1.000000

Verificação dos resultados:
(10.000000 * 1.000000) + (1.000000 * 1.000000) + (1.000000 * 1.000000) = 12.000000
(2.000000 * 1.000000) + (8.000000 * 1.000000) + (-4.000000 * 1.000000) = 6.000000
(1.000000 * 1.000000) + (5.000000 * 1.000000) + (9.000000 * 1.000000) = 15.000000
```

2. S3 $\begin{cases} 6x - y + z = 7 \\ x + 8y - z = 16 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$

Verificação da convergência do sistema: O sistema de equações lineares S2 converge se for diagonalmente dominante se forem satisfeitos o critério das linhas ou o critério das colunas. Temos essa condição satisfeita, pois, |6| ≥ |-1|+|1|; |8| ≥ |1|+|-1| e |5| ≥ |1|+|1|, o que mostra que S2 tem diagonal dominante e, pela Proposição 3.8, o sistema S2 é convergente.

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
6.000000, -1.000000, 1.000000
1.000000, 8.000000, -1.000000
1.000000, 1.000000, 5.000000

Vetor B original:
7.000000, 16.000000, 18.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 7

Solução X do sistema:
1.048980
2.236735
2.942857

Verificação dos resultados:
(6.000000 * 1.048980) + (-1.000000 * 2.236735) + (1.000000 * 2.942857) = 7.000000
(1.000000 * 1.048980) + (8.000000 * 2.236735) + (-1.000000 * 2.942857) = 16.000000
(1.000000 * 1.048980) + (1.000000 * 2.236735) + (5.000000 * 2.942857) = 18.000000

***Método de Gauss-Jacobi***

Matriz A original:
6.000000, -1.000000, 1.000000
1.000000, 8.000000, -1.000000
1.000000, 1.000000, 5.000000

Vetor B original:
7.000000, 16.000000, 18.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 10

Solução X do sistema:
1.048980
2.236735
2.942857

Verificação dos resultados:
(6.000000 * 1.048980) + (-1.000000 * 2.236735) + (1.000000 * 2.942857) = 7.000000
(1.000000 * 1.048980) + (8.000000 * 2.236735) + (-1.000000 * 2.942857) = 16.000000
(1.000000 * 1.048980) + (1.000000 * 2.236735) + (5.000000 * 2.942857) = 18.000000
```

3. S3 $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 27 \\ 4x_1 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$

Verificação da convergência do sistema: O sistema de equações lineares S3 converge se for diagonalmente dominante se forem satisfeitos o critério das linhas ou o critério das colunas. Temos essa condição não satisfeita nas linhas 1 e 2, pois, |1| < |10|+|3|; |0| < |4|+|1| e |4| ≥ |2|+|1|, o que mostra que S3 não tem diagonal dominante e, pela Proposição 3.8, o sistema S3 não é convergente.

Sendo assim vemos necessidade de permutar as linhas 1 e 2, a fim de satisfazer a Proposição 3.8, agora temos que, |4| ≥ |0|+|1| e |10| ≥ |1|+|3|, sendo o sistema S3 convergente.

Permutado $\begin{cases} 4x_1 + x_3 = 6 \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
4.000000, 0.000000, 1.000000
1.000000, 10.000000, 3.000000
2.000000, 1.000000, 4.000000

Vetor B original:
6.000000, 27.000000, 12.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 9

Solução X do sistema:
1.000001
2.000001
1.999999

Verificação dos resultados:
(4.000000 * 1.000001) + (0.000000 * 2.000001) + (1.000000 * 1.999999) = 6.000000
(1.000000 * 1.000001) + (10.000000 * 2.000001) + (3.000000 * 1.999999) = 27.000000
(2.000000 * 1.000001) + (1.000000 * 2.000001) + (4.000000 * 1.999999) = 12.000000

***Método de Gauss-Jacobi***

Matriz A original:
4.000000, 0.000000, 1.000000
1.000000, 10.000000, 3.000000
2.000000, 1.000000, 4.000000

Vetor B original:
6.000000, 27.000000, 12.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 20

Solução X do sistema:
1.000000
2.000000
2.000000

Verificação dos resultados:
(4.000000 * 1.000000) + (0.000000 * 2.000000) + (1.000000 * 2.000000) = 6.000000
(1.000000 * 1.000000) + (10.000000 * 2.000000) + (3.000000 * 2.000000) = 27.000000
(2.000000 * 1.000000) + (1.000000 * 2.000000) + (4.000000 * 2.000000) = 12.000000
```

4. S3 $\begin{cases} 7x + y - \ z = 13 \\ x + 8y + z = 30 \\ 2x - y + 5z = 21 \end{cases}$

Verificação da convergência do sistema: O sistema de equações lineares S4 converge se for diagonalmente dominante se forem satisfeitos o critério das linhas ou o critério das colunas. Temos essa condição satisfeita, pois, |7| ≥ |1|+|-1|; |8| ≥ |1|+|1| e |5| ≥ |2|+|-1|, o que mostra que S4 tem diagonal dominante e, pela Proposição 3.8, o sistema S4 é convergente.

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
7.000000, 1.000000, -1.000000
1.000000, 8.000000, 1.000000
2.000000, -1.000000, 5.000000

Vetor B original:
13.000000, 30.000000, 12.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 7

Solução X do sistema:
1.730897
3.239203
2.355482

Verificação dos resultados:
(7.000000 * 1.730897) + (1.000000 * 3.239203) + (-1.000000 * 2.355482) = 13.000000
(1.000000 * 1.730897) + (8.000000 * 3.239203) + (1.000000 * 2.355482) = 30.000000
(2.000000 * 1.730897) + (-1.000000 * 3.239203) + (5.000000 * 2.355482) = 12.000000

***Método de Gauss-Jacobi***

Matriz A original:
7.000000, 1.000000, -1.000000
1.000000, 8.000000, 1.000000
2.000000, -1.000000, 5.000000

Vetor B original:
13.000000, 30.000000, 12.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 11

Solução X do sistema:
1.730896
3.239203
2.355482

Verificação dos resultados:
(7.000000 * 1.730896) + (1.000000 * 3.239203) + (-1.000000 * 2.355482) = 13.000000
(1.000000 * 1.730896) + (8.000000 * 3.239203) + (1.000000 * 2.355482) = 30.000000
(2.000000 * 1.730896) + (-1.000000 * 3.239203) + (5.000000 * 2.355482) = 12.000000
```

5. S2 $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$

Verificação da convergência do sistema: O sistema de equações lineares S5 converge se for diagonalmente dominante se forem satisfeitos o critério das linhas ou o critério das colunas. Temos essa condição satisfeita, pois, |5| ≥ |-1| e |4| ≥ |2|, o que mostra que S5 tem diagonal dominante e, pela Proposição 3.8, o sistema S5 é convergente.

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
5.000000, -1.000000
2.000000, 4.000000

Vetor B original:
13.000000, 14.000000

Dimensão n: 2

Número de iterações: 7

Solução X do sistema:
3.000000
2.000000

Verificação dos resultados:
(5.000000 * 3.000000) + (-1.000000 * 2.000000) = 13.000000
(2.000000 * 3.000000) + (4.000000 * 2.000000) = 14.000000

***Método de Gauss-Jacobi***

Matriz A original:
5.000000, -1.000000
2.000000, 4.000000

Vetor B original:
13.000000, 14.000000

Dimensão n: 2

Número de iterações: 14

Solução X do sistema:
3.000000
2.000000

Verificação dos resultados:
(5.000000 * 3.000000) + (-1.000000 * 2.000000) = 13.000000
(2.000000 * 3.000000) + (4.000000 * 2.000000) = 14.000000
```

6. S4 $\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + \ x_3 + 0{,}3x_4 = 4{,}0 \\ 0{,}3x_1 + 2x_2 - \ 0{,}3x_3 - 0{,}9x_4 = 7{,}5 \\ 4x_1 + 2x_2 - \ 0{,}3x_3 + 0{,}8x_4 = 4{,}4 \\ 0{,}6x_1 + 3{,}2x_2 - \ 1{,}8x_3 + 0{,}4x_4 = 10 \end{cases}$

Verificação da convergência do sistema: O sistema de equações lineares S6 converge se for diagonalmente dominante se forem satisfeitos o critério das linhas ou o critério das colunas. Temos essa condição não satisfeita nas linhas 1, 3 e 4, pois, |0,1| < |0,2|+|1|+|0,3|; |2| ≥ |0,3|+|-0,3|+|-0,9|; |-0,3| < |4|+|2|+|0,8| e |0,4| < |0,6|+|3,2|+|-1,8|, o que mostra que S6 não tem diagonal dominante e, pela Proposição 3.8, o sistema S6 não é convergente.

Sendo assim vemos necessidade de permutar as linhas 1 e 3 e 2 e 4, mesmo não satisfazendo totalmente a Proposição 3.8, agora temos que, |4| ≥ |2|+|-0,3|+|0,8|; |3,2| ≥ |0,6|+|-1,8|+|0,4|; |1| ≥ |0,1|+|0,2|+|0,3| e |-0,9| > |0,3|+|2|+|-0,3|, sendo o sistema S6 fortemente propenso a convergir.

$$\text{Permutado} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - \ 0{,}3x_3 + 0{,}8x_4 = 4{,}4 \\ 0{,}6x_1 + 3{,}2x_2 - \ 1{,}8x_3 + 0{,}4x_4 = 10 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + \ x_3 + 0{,}3x_4 = 4{,}0 \\ 0{,}3x_1 + 2x_2 - \ 0{,}3x_3 - 0{,}9x_4 = 7{,}5 \end{cases}$$

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
4.000000, 2.000000, -0.300000, 0.800000
0.600000, 3.200000, -1.800000, 0.400000
0.100000, 0.200000, 1.000000, 0.300000
0.300000, 2.000000, -0.300000, -0.900000

Vetor B original:
4.400000, 10.000000, 4.000000, 7.500000

Dimensão n: 4

Número de iterações: 30

Solução X do sistema:
-1.317223
4.844570
2.849798
1.043370

Verificação dos resultados:
(4.000000 * -1.317223) + (2.000000 * 4.844570) + (-0.300000 * 2.849798) + (0.800000 * 1.043370) = 4.400000
(0.600000 * -1.317223) + (3.200000 * 4.844570) + (-1.800000 * 2.849798) + (0.400000 * 1.043370) = 10.000000
(0.100000 * -1.317223) + (0.200000 * 4.844570) + (1.000000 * 2.849798) + (0.300000 * 1.043370) = 4.000000
(0.300000 * -1.317223) + (2.000000 * 4.844570) + (-0.300000 * 2.849798) + (-0.900000 * 1.043370) = 7.500000
```

```
***Método de Gauss-Jacobi***

Matriz A original:
4.000000, 2.000000, -0.300000, 0.800000
0.600000, 3.200000, -1.800000, 0.400000
0.100000, 0.200000, 1.000000, 0.300000
0.300000, 2.000000, -0.300000, -0.900000

Vetor B original:
4.400000, 10.000000, 4.000000, 7.500000

Dimensão n: 4

Número de iterações: 52

Solução X do sistema:
-1.317224
4.844570
2.849798
1.043370

Verificação dos resultados:
(4.000000 * -1.317224) + (2.000000 * 4.844570) + (-0.300000 * 2.849798) + (0.800000 * 1.043370) = 4.400000
(0.600000 * -1.317224) + (3.200000 * 4.844570) + (-1.800000 * 2.849798) + (0.400000 * 1.043370) = 10.000000
(0.100000 * -1.317224) + (0.200000 * 4.844570) + (1.000000 * 2.849798) + (0.300000 * 1.043370) = 4.000000
(0.300000 * -1.317224) + (2.000000 * 4.844570) + (-0.300000 * 2.849798) + (-0.900000 * 1.043370) = 7.500000
```

**Parte 2**

Exemplo 3.1

$$\begin{cases} 1a + 10b + 1c = 170 \\ 9a + 1b = 180 \\ 2a + 2b + 5c = 140 \end{cases}$$

```
***Método de Gauss***

Matriz A original:
1.000000, 10.000000, 1.000000
9.000000, 1.000000, 0.000000
2.000000, 2.000000, 5.000000

Vetor B original:
170.000000, 180.000000, 140.000000

Dimensao de n: 3

Matriz triangularizada:
1.000000, 10.000000, 1.000000
0.000000, -89.000000, -9.000000
0.000000, 0.000000, 4.820225

Vetor B escalonado
170.000000, -1350.000000, 73.033708

Solução X do sistema:
18.484848
13.636364
15.151515

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 18.484848) + (10.000000 * 13.636364) + (1.000000 * 15.151515) = 170.000000
(9.000000 * 18.484848) + (1.000000 * 13.636364) + (0.000000 * 15.151515) = 180.000000
(2.000000 * 18.484848) + (2.000000 * 13.636364) + (5.000000 * 15.151515) = 140.000000
```

```
***Método de LU***

Matriz A original:
1.000000, 10.000000, 1.000000
9.000000, 1.000000, 0.000000
2.000000, 2.000000, 5.000000

Vetor B original:
170.000000, 180.000000, 140.000000

Dimensão de n: 3

Fator L:
0.000000, 0.000000, 0.000000
9.000000, 0.000000, 0.000000
2.000000, 0.202247, 0.000000

Fator U:
1.000000, 10.000000, 1.000000
0.000000, -89.000000, -9.000000
0.000000, 0.000000, 4.820225

Solução de Y para LY=B:
170.000000, -1350.000000, 73.033708

Solução X do sistema:
18.484848
13.636364
15.151515

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 18.484848) + (10.000000 * 13.636364) + (1.000000 * 15.151515) = 170.000000
(9.000000 * 18.484848) + (1.000000 * 13.636364) + (0.000000 * 15.151515) = 180.000000
(2.000000 * 18.484848) + (2.000000 * 13.636364) + (5.000000 * 15.151515) = 140.000000
```

Com permutação da matriz original, é possível o uso dos métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel:

$$\text{permutada}\begin{cases} 9a + 1b = 180 \\ 1a + 10b + 1c = 170 \\ 2a + 2b + 5c = 140 \end{cases}$$

```
***Método de Gauss-Jacobi***

Matriz A original:
9.000000, 1.000000, 0.000000
1.000000, 10.000000, 1.000000
2.000000, 2.000000, 5.000000

Vetor B original:
180.000000, 170.000000, 140.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 14

Solução X do sistema:
18.484848
13.636364
15.151515

Verificação dos resultados:
(9.000000 * 18.484848) + (1.000000 * 13.636364) + (0.000000 * 15.151515) = 180.000000
(1.000000 * 18.484848) + (10.000000 * 13.636364) + (1.000000 * 15.151515) = 170.000000
(2.000000 * 18.484848) + (2.000000 * 13.636364) + (5.000000 * 15.151515) = 140.000000
```

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
9.000000, 1.000000, 0.000000
1.000000, 10.000000, 1.000000
2.000000, 2.000000, 5.000000

Vetor B original:
180.000000, 170.000000, 140.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 7

Solução X do sistema:
18.484848
13.636364
15.151515

Verificação dos resultados:
(9.000000 * 18.484848) + (1.000000 * 13.636364) + (0.000000 * 15.151515) = 180.000000
(1.000000 * 18.484848) + (10.000000 * 13.636364) + (1.000000 * 15.151515) = 170.000000
(2.000000 * 18.484848) + (2.000000 * 13.636364) + (5.000000 * 15.151515) = 140.000000
```

Obtendo como solução X do sistema os resultados {a ≈ 18,484848; b ≈ 13,636364; c ≈ 15,151515} em todos os métodos testados, podemos então afirmar que a solução está correta, havendo clareza na verificação dos resultados. Como conclusão, deve-se ingerir 18.484848 gramas do alimento I, 13.636364 do alimento II e 15.151515 do alimento III para ter-se uma dieta diária equilibrada.

Exemplo 3.2

Para esta questão foi necessário montar o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 20x_4 = 504 \\ 20x_1 + 25x_2 + 40x_3 + 50x_4 = 1970 \\ 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 22x_4 = 970 \\ 10x_1 + 8x_2 + 10x_3 - 15x_4 = 601 \end{cases}$$

Não foi possível o uso dos métodos Thomas, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, por, respectivamente, a matriz não estar triangularizada e ela não ser diagonalmente dominante, não sendo possível realizar uma permutação adequada entre as linhas para realizar os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, assim como demonstrado a seguir:

$|3| \leq |4| + |7| + |20|$

$|25| \leq |20| + |40| + |50|$

$|20| \leq |10| + |15| + |22|$

$|15| \leq |10| + |8| + |10|$

```
***Método de Gauss***

Matriz A original:
3.000000, 4.000000, 7.000000, 20.000000
20.000000, 25.000000, 40.000000, 50.000000
10.000000, 15.000000, 20.000000, 22.000000
10.000000, 8.000000, 10.000000, 15.000000

Vetor B original:
504.000000, 1970.000000, 970.000000, 601.000000

Dimensao de n: 4

Matriz triangularizada:
3.000000, 4.000000, 7.000000, 20.000000
0.000000, -1.666667, -6.666667, -83.333333
0.000000, 0.000000, -10.000000, -128.000000
0.000000, 0.000000, 0.000000, 112.600000

Vetor B escalonado
504.000000, -1390.000000, -2100.000000, 1689.000000

Solução X do sistema:
10.000000
12.000000
18.000000
15.000000

Verificação dos resultados:
(3.000000 * 10.000000) + (4.000000 * 12.000000) + (7.000000 * 18.000000) + (20.000000 * 15.000000) = 504.000000
(20.000000 * 10.000000) + (25.000000 * 12.000000) + (40.000000 * 18.000000) + (50.000000 * 15.000000) = 1970.000000
(10.000000 * 10.000000) + (15.000000 * 12.000000) + (20.000000 * 18.000000) + (22.000000 * 15.000000) = 970.000000
(10.000000 * 10.000000) + (8.000000 * 12.000000) + (10.000000 * 18.000000) + (15.000000 * 15.000000) = 601.000000
```

```
***Método de LU***

Matriz A original:
3.000000, 4.000000, 7.000000, 20.000000
20.000000, 25.000000, 40.000000, 50.000000
10.000000, 15.000000, 20.000000, 22.000000
10.000000, 8.000000, 10.000000, 15.000000

Vetor B original:
504.000000, 1970.000000, 970.000000, 601.000000

Dimensão de n: 4

Fator L:
0.000000, 0.000000, 0.000000, 0.000000
6.666667, 0.000000, 0.000000, 0.000000
3.333333, -1.000000, 0.000000, 0.000000
3.333333, 3.200000, -0.800000, 0.000000

Fator U:
3.000000, 4.000000, 7.000000, 20.000000
0.000000, -1.666667, -6.666667, -83.333333
0.000000, 0.000000, -10.000000, -128.000000
0.000000, 0.000000, 0.000000, 112.600000

Solução de Y para LY=B:
504.000000, -1390.000000, -2100.000000, 1689.000000

Solução X do sistema:
10.000000
12.000000
18.000000
15.000000

Verificação dos resultados:
(3.000000 * 10.000000) + (4.000000 * 12.000000) + (7.000000 * 18.000000) + (20.000000 * 15.000000) = 504.000000
(20.000000 * 10.000000) + (25.000000 * 12.000000) + (40.000000 * 18.000000) + (50.000000 * 15.000000) = 1970.000000
(10.000000 * 10.000000) + (15.000000 * 12.000000) + (20.000000 * 18.000000) + (22.000000 * 15.000000) = 970.000000
(10.000000 * 10.000000) + (8.000000 * 12.000000) + (10.000000 * 18.000000) + (15.000000 * 15.000000) = 601.000000
```

Obtendo como solução X do sistema os resultados {$X_1 = 10$; $X_2 = 12$; $X_3 = 18$; $X_4 = 15$} tanto no método de Gauss, quanto no método de LU, podemos então afirmar que a solução está correta, havendo clareza na verificação dos resultados. Como conclusão, o engenheiro terá como resultado a fabricação de 10 PCs do tipo I, 12 PCs do tipo II, 18 PCs do tipo III e 15 PCs do tipo IV, produzidos no dia.

Exemplo 3.3

Para esta questão foi necessário montar o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 1c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 12 \\ 1c_2 + 2c_3 = 10 \\ 2c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 16 \end{cases}$$

Não foi possível o uso dos métodos Thomas e Gauss-Jacobi, por, respectivamente, a matriz não estar triangularizada e ela não ser diagonalmente dominante, não sendo possível realizar uma permutação adequada entre as linhas para realizar os métodos de Gauss-Jacobi assim como demonstrado a seguir:

```
***Método de Gauss***

Matriz A original:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, 1.000000, 2.000000
2.000000, 1.000000, 1.000000

Vetor B original:
12.000000, 10.000000, 16.000000

Dimensao de n: 3

Matriz triangularizada:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, 1.000000, 2.000000
0.000000, 0.000000, 1.000000

Vetor B escalonado
12.000000, 10.000000, 2.000000

Solução X do sistema:
4.000000
6.000000
2.000000

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 4.000000) + (1.000000 * 6.000000) + (1.000000 * 2.000000) = 12.000000
(0.000000 * 4.000000) + (1.000000 * 6.000000) + (2.000000 * 2.000000) = 10.000000
(2.000000 * 4.000000) + (1.000000 * 6.000000) + (1.000000 * 2.000000) = 16.000000
```

```
***Método de LU***

Matriz A original:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, 1.000000, 2.000000
2.000000, 1.000000, 1.000000

Vetor B original:
12.000000, 10.000000, 16.000000

Dimensão de n: 3

Fator L:
0.000000, 0.000000, 0.000000
0.000000, 0.000000, 0.000000
2.000000, -1.000000, 0.000000

Fator U:
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, 1.000000, 2.000000
0.000000, 0.000000, 1.000000

Solução de Y para LY=B:
12.000000, 10.000000, 2.000000

Solução X do sistema:
4.000000
6.000000
2.000000

Verificação dos resultados:
(1.000000 * 4.000000) + (1.000000 * 6.000000) + (1.000000 * 2.000000) = 12.000000
(0.000000 * 4.000000) + (1.000000 * 6.000000) + (2.000000 * 2.000000) = 10.000000
(2.000000 * 4.000000) + (1.000000 * 6.000000) + (1.000000 * 2.000000) = 16.000000
```

$$\text{permutada}\begin{cases} 2c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 16 \\ 1c_1 + 1c_2 + 1c_3 = 121c_2 + 2c_3 = 10 \\ 1c_2 + 2c_3 = 10 \end{cases}$$

```
***Método de Gauss-Seidel***

Matriz A original:
2.000000, 1.000000, 1.000000
1.000000, 1.000000, 1.000000
0.000000, 1.000000, 2.000000

Vetor B original:
16.000000, 12.000000, 10.000000

Dimensão n: 3

Número de iterações: 47

Solução X do sistema:
4.000001
5.999996
2.000002

Verificação dos resultados:
(2.000000 * 4.000001) + (1.000000 * 5.999996) + (1.000000 * 2.000002) = 16.000000
(1.000000 * 4.000001) + (1.000000 * 5.999996) + (1.000000 * 2.000002) = 12.000000
(0.000000 * 4.000001) + (1.000000 * 5.999996) + (2.000000 * 2.000002) = 10.000000
```

Obtendo como solução X do sistema os resultados {$x_1 \approx 4$; $x_2 \approx 6$; $x_3 \approx 2$} tanto no método de Gauss, quanto no método de LU e no método Gauss-Seidel, podemos então afirmar que a solução está correta, havendo clareza na verificação dos resultados. Como conclusão, precisaremos de 4 caminhões C1, 6 caminhões C2 e 2 caminhões C3 para transportar as cargas.