Prova

September 9, 2024

1 Prova CNC

Prática 1 - Rafael dos Santos

2 Bibliotecas a serem importadas

[2]:
```
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy.linalg as la
```

3 Bibliotecas implementadas

3.1 Método da Gauss

[3]:
```
def gauss(A, B):
    n = len(B)
    B = B.copy()

    # Triangularização
    for k in range(n):
        for i in range(k+1, n):
            m = A[i][k] / A[k][k]
            A[i][k] = 0
            for j in range(k+1, n):
                A[i][j] = A[i][j] - m * A[k][j]
            B[i] = B[i] - m * B[k]

    # Retrosubstituição
    X = [0] * n
    X[n-1] = B[n-1] / A[n-1][n-1]
    for k in range(n-1, -1, -1):
        soma = 0
        for j in range(k+1, n):
            soma += A[k][j] * X[j]
        X[k] = (B[k] - soma) / A[k][k]
```

```
    return X;
```

3.2 Método de Newton-Raphson

[4]:
```
def newtonRaphson(x0, ep1, ep2, nMax, funcao, derivada):
        k = 0
        x = x0 - funcao(x0) / derivada(x0)
        while (k < nMax) and (abs(x - x0) > ep1) and (abs(funcao(x)) > ep2):
                x0 = x
                k = k + 1
                x = x0 - funcao(x0) / derivada(x0)
        return x
```

3.3 Método de Interpolação por Solução de Sistemas de Equações - Vandermonde

[5]:
```
def fatorial(x):
    res = 1
    while x > 0:
        res *= x
        x -= 1
    return res

def vandermonde(x, y, ponto = None, funcao = None, derivada = None):
    y_copy = y.copy()
    print("1)......TABELA DE DADOS......:")

    n = len(y)

    for i in range(n):
        print("  x = %.6f; f(x) = %.6f" %(x[i], y[i]))

    matrix = np.zeros([n, n])

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            matrix[i][j] = x[i] ** j

    print('\n2)......MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO......:')
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            print("  %.6f" %matrix[i][j], end="\t")
        print()

    result = gauss(matrix, y)
```

```python
    print('\n3)......COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE......:')
    for i in range(n):
        print("  a%d = %.6f" %(i, result[i]))

    print('\n4)......POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO......:')

    # Construindo o polinômio utilizando sympy
    simx = sp.Symbol('x')
    polinomio = sum(result[i] * simx**i for i in range(n))

    # Simplificando o polinômio
    polinomio_simplificado = sp.simplify(polinomio)
    print(polinomio_simplificado)

    aprox = None
    if funcao != None:
        print('\n5)......VALORES EXATO, APROX. e ERRO RELATIVO......:')
        y_orig = funcao.subs('x', ponto)
        print("  a) O valor exato em x = \"%f\" é: %.6f" % (ponto, y_orig))

        # Avaliando o polinômio no ponto
        aprox = float(polinomio_simplificado.subs(simx, ponto))

        print("  b) O valor aproximado em x = \"%f\" por Vandermonde é: %.6f" % (ponto, aprox))
        erro_relativo = abs((y_orig - aprox) / y_orig) * 100
        print("  c) O Er_Rel, |(%.6f - %.6f) / %.6f| * 100%% é: %.6f%%" % (y_orig, aprox, y_orig, erro_relativo))
        print("\n6)......ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO......:")

        valor_max_y = abs(derivada.subs('x', x[0]))
        for i in range(1, n):
            cur_deriv = abs(derivada.subs('x', x[i]))
            if cur_deriv > valor_max_y:
                valor_max_y = cur_deriv

        res = 1
        for i in range(0, n):
            res *= (ponto - x[i])

        res = (abs(res) * valor_max_y) / fatorial(n)
        print("  O erro de truncamento pelo corolario 4.1 é: %.6f" % res)

    elif (funcao == None) and (ponto != None):
        # Avaliando o polinômio no ponto x_aprox
        aprox = float(polinomio_simplificado.subs(simx, ponto))
```

```
        print("\n5)......VALOR APROXIMADO......:")
        print("  b) O valor aproximado em x = \"%f\" por Vandermonde é: %.6f" %␣
↪(ponto, aprox))

    print("\n****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE****************\n")

    ### PLOT DO GRÁFICO ###
    # Converte o polinômio simplificado em uma função utilizável pelo numpy
    polinomio_funcao = sp.lambdify(simx, polinomio_simplificado)

    # Define um intervalo de valores para x para plotar a função
    x_vals = np.linspace(min(x) - 1, max(x) + 1, 500)
    y_vals = polinomio_funcao(x_vals)

    # Plota a função polinomial
    plt.plot(x_vals, y_vals, label=f'Polinômio Interpolador:␣
↪{polinomio_simplificado}')

    # Plota os pontos de dados originais
    plt.scatter(x, y_copy, color='red', label='Pontos de dados')

    # Plota o ponto de aproximação se o mesmo existir
    if aprox != None:
        plt.plot(ponto, aprox, 'mo', label='Ponto de aproximação')

    # Adiciona grade ao gráfico
    plt.grid(True)

    # Adiciona título e rótulos dos eixos
    plt.title('Gráfico da Função Interpoladora de Vandermonde',␣
↪fontweight='bold')
    plt.xlabel('X', labelpad=8, fontsize=12, fontweight='bold')
    plt.ylabel('Y', rotation=0, labelpad=20, fontsize=12, fontweight='bold')

    # Adiciona a legenda
    plt.legend()

    # Mostra o gráfico
    plt.show()
```

3.4 Método de Interpolação de Langrange

[6]:
```
def fatorial(x):
    res = 1
    while x > 0:
        res *= x
```

```python
        x -= 1
    return res

def lagrange(x, y, x_aprox = None, func_original = None, derivada_n = None):
    print('1)......TABELA DE DADOS......:')

    n = len(y)

    for i in range(n):
        print(f"x = {x[i]}; f(x) = {y[i]}")

    xis = np.zeros([0])
    coefs = np.zeros([n, n])

    denom = 1
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                continue

            denom *= x[i] - x[j]
            xis = np.append(xis, x[j])

        over_denom = 1 / denom
        if n == 4:
            xcube = over_denom
            xsquare = -over_denom * (xis[0] + xis[1] + xis[2])
            xfirst = over_denom * (xis[0]*xis[1] + (xis[0] + xis[1]) * xis[2])
            xzero = -over_denom * (xis[0] * xis[1] * xis[2])

            coefs[i] = [xzero, xfirst, xsquare, xcube]
        elif n == 3:
            xsquare = over_denom
            xfirst = -over_denom * (xis[0] + xis[1])
            xzero = over_denom * (xis[0] * xis[1])

            coefs[i] = [xzero, xfirst, xsquare]
        else:
            xfirst = over_denom
            xzero = -over_denom * xis[0]
            coefs[i] = [xzero, xfirst]

        xcube = xsquare = xfirst = xzero = 0
        denom = 1
        xis = np.zeros([0])

    result = np.zeros([n])
```

```python
print('\n2)......COEFICIENTES DE LAGRANGE......:')
for i in range(n):
    print(f"L{i}(x) = ", end="")
    first_term = True
    for j in range(n):
        if coefs[i][j] != 0:
            if not first_term:
                if coefs[i][j] > 0:
                    print(f" + ", end="")
                else:
                    print(f" - ", end="")
            else:
                first_term = False
                if coefs[i][j] < 0:
                    print(f"-", end="")

            if j == 0 or abs(coefs[i][j]) != 1:
                print(f"{abs(coefs[i][j]):.6g}", end="")
            if j > 0:
                print(f"x^{j}", end="")
    print()

for i in range(n):
    for j in range(n):
        coefs[i][j] = coefs[i][j] * y[i]

for i in range(n):
    for j in range(n):
        result[i] += coefs[j][i]

print('\n3)......POLINÔMIO INTERPOLADOR POR LAGRANGE......:')

simbolo_x = sp.Symbol('x')

simp = sum(result[i] * simbolo_x**i for i in range(n))

simp = sp.simplify(simp)

print(simp)

polinomio_funcao = sp.lambdify(simbolo_x, simp)

print('\n4)......VALORES EXATO, APROX e ERRO RELATIVO......:')

if func_original is not None and x_aprox is not None:
    y_orig = func_original.subs('x', x_aprox).evalf()
```

```
        print(f"a) O valor exato em x = \"{x_aprox:.6f}\" é: {y_orig:.6f}")
    else:
        print("a) Nao temos o valor exato para descobrirmos o valor exato")

    if x_aprox is not None:
        y_aprox = polinomio_funcao(x_aprox)
        print(f"b) O valor aproximado em x = \"{x_aprox:.6f}\" por Lagrange é:␣
↪{y_aprox:.6f}")
        if func_original is not None:
            calc = ((y_orig - y_aprox)/y_orig) * 100
            print(f"c) O Er_Rel, |{y_orig:.6f} - {y_aprox:.6f}| / {y_orig:.6f}|␣
↪* 100% é {calc:.6f}%")
        else:
            print("c) Nao temos o valor exato para descobrirmos o erro")

    print("\n5)......ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO......:")

    if func_original is not None:
        valor_max_y = abs(derivada_n.subs('x', x[0]).evalf())
        for i in range(1, n):
            cur_deriv = abs(derivada_n.subs('x', x[i]).evalf())

            if cur_deriv > valor_max_y:
                valor_max_y = cur_deriv

        res = 1
        for i in range(0, n):
            res *= (x_aprox - x[i])

        res = (abs(res) * valor_max_y) / fatorial(n)

        print(f"O erro de truncamento pelo corolário 4.1 é {res:.6f}")
    else:
        print("a) Nao temos a funcao original para descobrirmos o erro")

    print("\n**********FIM DO MÉTODO DE LAGRANGE**********\n")

    x_vals = np.linspace(min(x) - 1, max(x) + 1, 500)
    y_vals = polinomio_funcao(x_vals)

    plt.plot(x_vals, y_vals, label=f'Polinômio Interpolador: {simp}')

    plt.scatter(x, y, color='red', label='Pontos de dados')

    if x_aprox is not None:
        plt.plot(x_aprox, y_aprox, 'mo', label='Ponto de aproximação')
```

```
    plt.grid(True)

    plt.title('Gráfico da Função Interpoladora de Lagrange', fontweight='bold')
    plt.xlabel('X', labelpad=8, fontsize=12, fontweight='bold')
    plt.ylabel('Y', rotation=0, labelpad=20, fontsize=12, fontweight='bold')

    plt.legend()

    plt.show()
```

3.5 Método de Intepolação de Newton

[7]:
```
def calcordem(x, y):
    ordem = len(x)
    o = np.zeros(ordem)
    arr = np.zeros(ordem)
    dd = np.zeros((ordem,ordem))

    # Para ordem 0
    for i in range(ordem):
        o[i] = y[i]
        dd[i][0] = y[i]
    arr[0] = y[0]

    # Para ordem maior que 0
    for i in range(1, ordem):
        for j in range(ordem - i):
            o[j] = (o[j+1] - o[j]) / (x[i+j] - x[j])
            dd[j][i] = o[j]
            if j == 0:
                arr[i] = o[j]

    # Para arredondar os numeros
    for i in range(ordem):
        arr[i] = round(arr[i], 6)

    return arr,dd

def fatorial(x):
    res = 1
    while x > 0:
        res *= x
        x -= 1
    return res

def newton(x, y, xtotal = None, ytotal = None, ponto = None, funcao = None,␣
 ↪derivada = None):
```

```
    ordem = len(x)

    print("**********INTERPOLAÇÃO: MÉTODO DE NEWTON**********\n")
    print("1)...............TABELA DE DADOS...............:")
    for i in range(ordem):
        print("  x = %.6f; f(x) = %.6f" %(x[i], y[i]))

    print("\n2)...............TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS...............:")
    num, dd = calcordem(x, y)
    for k in range(len(dd)):
      print("Ordem %d" %k, end="\t")
    print()
    for i in range(len(dd)):
        for j in range(len(dd)):
            print("%.6f" %dd[i][j], end="\t")
        print()
    # Definindo a variável simbólica x
    simbolo_x = sp.Symbol('x')

    # Construindo o polinômio de Newton
    polinomio = num[0]
    termo = 1
    for i in range(1, ordem):
        termo *= (simbolo_x - x[i-1])
        polinomio += num[i] * termo

    # Simplificando o polinômio
    polinomio_simplificado = sp.simplify(polinomio)

    print("\n3)...............POLINÔMIO INTERPOLADOR POR NEWTON...............
↪:")
    print(polinomio_simplificado)

    aprox = None
    if funcao != None:
        polinomio_funcao = sp.lambdify(simbolo_x, polinomio_simplificado)
        exato = funcao.subs('x', ponto)
        aprox = polinomio_funcao(ponto)
        erro_rel = abs((exato - aprox)/exato) * 100
        print("\n4)...............VALORES EXATO, APROX. e ERRO RELATIVO.......
↪........:")
        print("  a) O valor exato em x = \"%f\" é: %.6f" %(ponto, exato))
        print("  b) O valor aproximado em x = \"%f\" por Newton é: %.6f"␣
↪%(ponto, aprox))
        print("  c) Er_Rel, |(%.6f - %.6f)/%.6f|*100%%, é: %.6f%%" %(exato,␣
↪aprox, exato, erro_rel))
```

```
    print("\n5)...............ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO...........
↪....:")
    num = 1

    for i in range(ordem):
        num *= ponto - x[i]

    valor_max_y = abs(derivada.subs('x', x[0]))
    for i in range(1, ordem):
        cur_deriv = abs(derivada.subs('x', x[i]))
        if cur_deriv > valor_max_y:
            valor_max_y = cur_deriv

    err_trunc41 = (abs(num) * valor_max_y) / fatorial(ordem)

    print("  O erro de truncamento pelo corolário 4.1 é: %.6f" %err_trunc41)

    if xtotal == x:
        ordem -= 1

    _, dd = calcordem(xtotal, ytotal)
    valor_max_ordem = abs(dd[0][ordem])
    for i in range(1, ordem):
        if abs(dd[i][ordem]) > valor_max_ordem:
            valor_max_ordem = abs(dd[i][ordem])

    err_trunc42 = abs(num) * abs(valor_max_ordem)
    print("  O erro de truncamento pelo corolário 4.2 é: %.6f" %err_trunc42)
  elif (funcao == None) and (ponto != None):
    print("\n4)...............VALOR APROXIMADO...............:")
    polinomio_funcao = sp.lambdify(simbolo_x, polinomio_simplificado)
    aprox = polinomio_funcao(ponto)
    print("  a) O valor aproximado em x = \"%f\" por Newton é: %.6f" %(ponto,␣
↪aprox))

  print("\n**********FIM DO MÉTODO DE NEWTON**********\n")

  ### PLOT DO GRÁFICO ###
  # Converte o polinômio simplificado em uma função utilizável pelo numpy
  polinomio_funcao = sp.lambdify(simbolo_x, polinomio_simplificado)

  # Define um intervalo de valores para x para plotar a função
  x_vals = np.linspace(min(x) - 1, max(x) + 1, 500)
  y_vals = polinomio_funcao(x_vals)

  # Plota a função polinomial
```

```
    plt.plot(x_vals, y_vals, label=f'Polinômio Interpolador:␣
 ↪{polinomio_simplificado}')

    # Plota os pontos de dados originais
    plt.scatter(x, y, color='red', label='Pontos de dados')

    # Plota o ponto de aproximação se o mesmo existir
    if aprox != None:
        plt.plot(ponto, aprox, 'mo', label='Ponto de aproximação')

    # Adiciona grade ao gráfico
    plt.grid(True)

    # Adiciona título e rótulos dos eixos
    plt.title('Gráfico da Função Interpoladora de Newton', fontweight='bold')
    plt.xlabel('X', labelpad=8, fontsize=12, fontweight='bold')
    plt.ylabel('Y', rotation=0, labelpad=20, fontsize=12, fontweight='bold')

    # Adiciona a legenda
    plt.legend()

    # Mostra o gráfico
    plt.show()
```

3.6 Regressão Linear

[8]:
```
# Função de somatório
def somatoria(vetor, n, pot):
    soma = 0
    vetor_temp = np.copy(vetor)  # Copia do vetor
    for i in range(n):
        vetor_temp[i] = pow(vetor_temp[i], pot)
        soma += vetor_temp[i]
    return soma

# Função principal de ajuste polinomial
def ajuste_polinomial(x, y, compdeter, grau=1):
    tamanho = len(x)
    Sx = somatoria(x, tamanho, 1)
    Sy = somatoria(y, tamanho, 1)
    Sxy = somatoria(x * y, tamanho, 1)

    print("/////////////// AJUSTE POR REGRESSÃO POLINOMIAL-MÉTODO QUADRADOS␣
 ↪MÍNIMOS ///////////////")
    print("/////////////////////////// TABELA DE DADOS PARA OS AJUSTES: ////////
 ↪///////////////////")
```

```
    for i in range(tamanho):
        print(f"  x = {x[i]:.6f}        y(x) = {y[i]:.6f}")

    # Inicializar variáveis de R²
    R2_L, R2_Q, R2_C = None, None, None

    # Regressão Linear
    if grau >= 1:
        print("\n**************************  REGRESSÃO LINEAR **************************")
        Sx2 = somatoria(x, tamanho, 2)
        A = np.array([[tamanho, Sx], [Sx, Sx2]])
        B = np.array([Sy, Sxy])
        print("///////// MATRIZ DO SISTEMA LINEAR PARA CALCULAR OS COEFICIENTES ////////")
        for row in A:
            print(' '.join(f'{val:.2f}' for val in row))
        print("\n/////////////////// VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES /////////////////////")
        for val in B.T:
            print(f'{val:.2f}')
        d1 = gauss(A, B)
        print("")
        print('A equação linear da reta é = ', end="")
        for i in range(len(d1)):
            if (i == 0):
                print(f'{d1[i]:.6g}', end="")
            else:
                print(f' + {d1[i]:.6g}x', end="")
        y_pred_linear = d1[1] * x + d1[0]  # Previsões feitas pela equação linear
        # Calcular a soma dos desvios quadráticos
        SSE = np.sum((y - y_pred_linear) ** 2)
        # Calcular a soma total dos quadrados
        y_mean = np.mean(y)
        SST = np.sum((y - y_mean) ** 2)
        # Calcular o coeficiente de determinação R^2
        R2_L = 1 - (SSE / SST)
        print("\n////////////////////// SOMA DOS DESVIOS QUADRÁTICOS /////////////////////////")
        print(f"{SSE:.4f}")
        print("\n//////////////////// COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R^2 /////////////////////")
        print(f"{R2_L:.4f}")

    # Regressão Quadrática
```

```
    if grau >= 2:
        print("\n**************************  REGRESSÃO QUADRATICA ␣
↪**************************")
        Sx3 = somatoria(x, tamanho, 3)
        Sx4 = somatoria(x, tamanho, 4)
        Sx2y = somatoria(pow(x, 2) * y, tamanho, 1)
        A2 = np.array([[tamanho, Sx, Sx2],
                       [Sx, Sx2, Sx3],
                       [Sx2, Sx3, Sx4]])
        B2 = np.array([Sy, Sxy, Sx2y])
        print("///////// MATRIZ DO SISTEMA QUADRÁTICO PARA CALCULAR OS␣
↪COEFICIENTES /////////")
        for row in A2:
            print(' '.join(f'{val:.2f}' for val in row))
        print("\n/////////////////////// VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES ////////
↪///////////////")
        for val in B2.T:
            print(f'{val:.2f}')
        d2 = gauss(A2, B2)
        print("")
        print('A equação quadrática da reta é = ', end="")
        for i in range(len(d2)):
            if (i == 0):
                print(f'{d2[i]:.6g}', end="")
            else:
                print(f' + {d2[i]:.6g}x^{i}', end="")
        y_pred_linear = d2[2] * x**2 + d2[1] * x + d2[0]
        # Calcular a soma dos desvios quadráticos
        SSE = np.sum((y - y_pred_linear) ** 2)
        # Calcular a soma total dos quadrados
        y_mean = np.mean(y)
        SST = np.sum((y - y_mean) ** 2)
        # Calcular o coeficiente de determinação R^2
        R2_Q = 1 - (SSE / SST)
        print("\n//////////////////////// SOMA DOS DESVIOS QUADRÁTICOS /////////
↪///////////////")
        print(f"{SSE:.4f}")
        print("\n////////////////////// COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R^2 ////////
↪//////////////")
        print(f"{R2_Q:.4f}")
        if grau == 2 and compdeter == 1:
          if R2_L > R2_Q:
            print("\n** O AJUSTE LINEAR TEM UM COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO␣
↪MELHOR **")
          else:
```

```python
            print("\n** O AJUSTE QUADRATICO TEM UM COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO MELHOR **")

    # Regressão Cúbica
    if grau >= 3:
        print("\n*****************************  REGRESSÃO CÚBICA *****************************")
        Sx5 = somatoria(x, tamanho, 5)
        Sx6 = somatoria(x, tamanho, 6)
        Sx3y = somatoria(pow(x, 3) * y, tamanho, 1)
        A3 = np.array([
            [tamanho, Sx, Sx2, Sx3],
            [Sx, Sx2, Sx3, Sx4],
            [Sx2, Sx3, Sx4, Sx5],
            [Sx3, Sx4, Sx5, Sx6]
        ])
        B3 = np.array([Sy, Sxy, Sx2y, Sx3y])
        print("/////////// MATRIZ DO SISTEMA CÚBICO PARA CALCULAR OS COEFICIENTES ///////////")
        for row in A3:
            print(' '.join(f'{val:.2f}' for val in row))
        print("\n////////////////////// VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES /////////////////////////")
        for val in B3.T:
            print(f'{val:.2f}')
        d3 = gauss(A3, B3)
        print("")
        print('A equação cúbica da reta é = ', end="")
        for i in range(len(d3)):
            if (i == 0):
                print(f'{d3[i]:.6g}', end="")
            else:
                print(f' + {d3[i]:.6g}x^{i}', end="")
        print("")
        y_pred_linear = d3[3] * x**3 + d3[2] * x**2 + d3[1] * x + d3[0]

        # Calcular a soma dos desvios quadráticos
        SSE = np.sum((y - y_pred_linear) ** 2)
        # Calcular a soma total dos quadrados
        y_mean = np.mean(y)
        SST = np.sum((y - y_mean) ** 2)
        # Calcular o coeficiente de determinação R^2
        R2_C = 1 - (SSE / SST)
        print("\n////////////////////// SOMA DOS DESVIOS QUADRÁTICOS ///////////////////////")
        print(f"{SSE:.4f}")
```

```
        print("\n///////////////////// COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R^2 ////////
↪//////////////")
        print(f"{R2_C:.4f}")
        # Comparação de R² entre todos os modelos
        if compdeter == 1:
            if R2_L > R2_Q and R2_Q > R2_C:
                print("\n** O AJUSTE LINEAR TEM O MELHOR COEFICIENTE DE␣
↪DETERMINAÇÃO **")
            elif R2_Q > R2_C and R2_C > R2_L:
                print("\n** O AJUSTE QUADRÁTICO TEM O MELHOR COEFICIENTE DE␣
↪DETERMINAÇÃO **")
            else:
                print("\n** O AJUSTE CÚBICO TEM O MELHOR COEFICIENTE DE␣
↪DETERMINAÇÃO **")

    print("\n/////////////////////// FIM DO AJUSTE POLINOMIAL ///////////////
↪/////////")
    # Plotando os gráficos
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 6))

    ax.scatter(x, y, 20, 'red', label='Pontos de dados')

    if grau >= 1:
        b = d1[0]
        a = d1[1]
        x_linha = np.linspace(min(x), max(x), 100)
        y_linha = a * x_linha + b
        ax.plot(x_linha, y_linha, color='blue', label=f'Linear: {a:.2f}x + {b:.
↪2f}')

    if grau >= 2:
        c = d2[0]
        b = d2[1]
        a = d2[2]
        x_curva = np.linspace(min(x), max(x), 100)
        y_curva = a * x_curva**2 + b * x_curva + c
        ax.plot(x_curva, y_curva, color='green', label=f'Quadrático: {a:.2f}x^2␣
↪+ {b:.2f}x + {c:.2f}')

    if grau >= 3:
        d = d3[3]
        c = d3[0]
        b = d3[1]
        a = d3[2]
        x_curva2 = np.linspace(min(x), max(x), 100)
        y_curva2 = d * x_curva2**3 + a * x_curva2**2 + b * x_curva2 + c
```

```
        ax.plot(x_curva2, y_curva2, color='magenta', label=f'Cúbico: {d:.2f}x^3␣
↪+ {a:.2f}x^2 + {b:.2f}x + {c:.2f}')

    ax.set(xlim=(min(x)-1, max(x)+1), ylim=(min(y)-1, max(y)+1))
    plt.title('Pol. inter., p_n(x)', fontsize=16, fontweight='bold')
    plt.xlabel(f'X quando: {x}', labelpad=8, fontsize=10, fontweight='bold')
    plt.ylabel(f'Y quando: {y}', rotation=90, labelpad=20, fontsize=10,␣
↪fontweight='bold')
    plt.legend()
    plt.grid(True)
    plt.show()
```

3.7 Série de Taylor e Diferenças Finitas

[9]:
```
def derivada_taylor(xk, fx, metodo, ponto, f = None):
    i = np.where(xk == ponto)[0][0]

    h1 = abs(xk[i] - xk[i+1])
    h2 = abs(xk[i-1] - xk[i])
    h3 = h1+h2

    tem_funcao = f is not None

    if tem_funcao: #Caso seja dada uma função na questão, será realizado o␣
↪cálculo das derivada necessarias para verifiação do erro
        d1 = sp.diff(f, x)
        f1 = d1.subs(x, ponto).evalf()
        d2 = sp.diff(f, x, 2)
        f2 = d2.subs(x, ponto).evalf()
        d3 = sp.diff(f, x, 3)
        f3 = d3.subs(x, ponto).evalf()
        d4 = sp.diff(f, x, 4)
        f4 = d4.subs(x, ponto).evalf()

    if metodo == 1: #Realiza o Método de diferenças finitas progressiva de 1ª␣
↪ordem
        print(f"Calculando f'({xk[i]}) pelo MDF-Progressiva de 1ª Ordem:")
        print("f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk)) / h1")
        print(f"       ~ (f({xk[i+1]}) - f({xk[i]})) / {h1:.6f}")
        print(f"       ~ ({fx[i+1]:.6f} - {fx[i]:.6f}) / {h1:.6f}")
        r = (fx[i+1] - fx[i]) / h1
        print(f"       ~ %.6f\n" % r)
        if tem_funcao: #Caso seja dada uma função na questão, será realizado o␣
↪cálculo de erro
            errel = abs((f1 - r) / f1) * 100
```

```python
            print(f"Er_rel = | ({f1:.6f} - {r:.6f}) / {f1:.6f} | * 100% = {errel:.6f}%")
            ertru = abs((-h1/2)*f2)
            print(f"Er_Trunc = | ({h1:.6f}/2)*{f2:.6f} | = {ertru:.6f}\n")
        return r

    elif metodo == 2: #Realiza o Método de diferenças finitas regressiva de 1ª ordem
        print(f"Calculando f'({xk[i]}) pelo MDF-Regressiva de 1ª Ordem:")
        print("f'(xk) ~ (f(xk) - f(xk-1)) / h2")
        print(f"       ~ (f({xk[i]}) - f({xk[i-1]})) / {h2:.6f}")
        print(f"       ~ ({fx[i]:.6f} - {fx[i-1]:.6f}) / {h2:.6f}")
        r = (fx[i] - fx[i-1]) / h2
        print(f"       ~ %.6f\n" % r)
        if tem_funcao: #Caso seja dada uma função na questão, será realizado o cálculo de erro
            errel = abs((f1 - r) / f1) * 100
            print(f"Er_rel = | ({f1:.6f} - {r:.6f}) / {f1:.6f} | * 100% = {errel:.6f}%")
            ertru = abs((h2/2)*f2)
            print(f"Er_Trunc = | ({h2:.6f}/2)*{f2:.6f} | = {ertru:.6f}\n")
        return r

    elif metodo == 3: #Realiza o Método de diferenças finitas centrada de 2ª ordem à 1ª derivada
        print(f"Calculando f'({xk[i]}) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à primeira derivda: ")
        print("f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / h3")
        print(f"       ~ (f({xk[i+1]}) - f({xk[i-1]})) / {h3:.6f}")
        print(f"       ~ ({fx[i+1]:.6f} - {fx[i-1]:.6f}) / {h3:.6f}")
        r = (fx[i+1] - fx[i-1]) / (h3)
        print(f"       ~ %.6f\n" % r)
        if tem_funcao == 1: #Caso seja dada uma função na questão, será realizado o cálculo de erro
            errel = abs((f1 - r) / f1) * 100
            print(f"Er_rel = | ({f1:.6f} - {r:.6f}) / {f1:.6f} | * 100% = {errel:.6f}%")
            ertru = abs(((h3)**2/6)*f3)
            print(f"Er_Trunc = | ({h3:.6f}^2 / 6) * {f3:.6f} | = {ertru:.6f}\n")

    elif metodo == 4: #Realiza o Método de diferenças finitas centrada de 2ª ordem à 2ª derivada
        print(
            f"Calculando f'({xk[i]}) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à segunda derivada:")
        print("f''(xk) ~ (f(xk+1) - 2*f(Xk) + f(xk-1)) / h1*h2")
```

```
        print(f"        ~ (f({xk[i+1]}) - 2*f({xk[i]}) + f({xk[i-1]})) / {h1*h2:
↪.6f}")
        print(f"        ~ ({fx[i+1]:.6f} - {2*fx[i]:.6f} + {fx[i-1]:.6f}) /␣
↪{h1*h2:.6f}")
        r = (fx[i+1] - 2*fx[i] + fx[i-1]) / (h1*h2)
        print(f"        ~ %.6f\n" % r)
        if tem_funcao == 1: #Caso seja dada uma função na questão, será␣
↪realizado o cálculo de erro
            errel = abs((f2 - r) / f2) * 100
            print(f"Er_rel = | ({f2:.6f} - {r:.6f}) / {f2:.6f} | * 100% =␣
↪{errel:.6f}%")
            ertru = abs(((h1*h2)**2/6)*f4)
            print(f"Er_Trunc = | ({h1*h2:.6f}^2 / 6) * {f4:.6f} | = {ertru:.
↪6f}")
        return r
```

3.8 Método de Lagrange

[10]:
```
def derivada_lagrange(xk, fx, metodo, ponto, f = None):
    i = np.where(xk == ponto)[0][0]

    h1 = abs(xk[i] - xk[i+1])
    h2 = abs(xk[i-1] - xk[i])

    tem_funcao = f is not None

    if tem_funcao: #Caso seja dada uma função na questão, será realizado o␣
↪cálculo das derivada necessarias para verifiação do erro
        d1 = sp.diff(f, x)
        f1 = d1.subs(x, ponto).evalf()

    if metodo == 1: #Realiza o 1º caso pelo método de Lagrande
        print(f"Calculando f'({xk[i]}) pelo Método de Lagrange - 1º caso:")
        print("f'(xk) ~ (-3f(xk) + 4f(xk+1) - f(xk+2)) / (h1+h2)")
        print(f"       ~ (-3 * f({xk[i]}) + 4 * f({xk[i+1]}) - f({xk[i+2]})) /␣
↪({h1+h2:.6f})")
        print(f"       ~ (-3 * {fx[i]:.6f} - 4 * {fx[i+1]:.6f} - {fx[i+2]}) /␣
↪({h1+h2:.6f})")
        r = (-3*fx[i] + 4*fx[i+1] - fx[i+2]) / (h1+h1)
        print(f"       ~ %.6f\n" % r)
        if tem_funcao: #Caso seja dada uma função na questão, será realizado o␣
↪cálculo de erro
            errel = abs((f1 - r) / f1) * 100
            print(f"Er_rel = | ({f1:.6f} - {r:.6f}) / {f1:.6f} | * 100% =␣
↪{errel:.6f}%\n")
        return r
```

```
    elif metodo == 2: #Realiza o 2º caso pelo método de Lagrande
        print(f"Calculando f'({xk[i]}) pelo Método de Lagrange - 2º caso:")
        print("f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1+h2)")
        print(f"       ~ (f({xk[i+1]}) - f({xk[i-1]})) / ({h1+h2:.6f})")
        print(f"       ~ ({fx[i+1]:.6f} - {fx[i-1]:.6f}) / ({h1+h2:.6f})")
        r = (fx[i+1] - fx[i-1]) / (h1+h2)
        print(f"       ~ %.6f\n" % r)
        if tem_funcao: #Caso seja dada uma função na questão, será realizado o␣
↪cálculo de erro
            errel = abs((f1 - r) / f1) * 100
            print(f"Er_rel = | ({f1:.6f} - {r:.6f}) / {f1:.6f} | * 100% =␣
↪{errel:.6f}%\n")
        return r

    elif metodo == 3: #Realiza o 3º caso pelo método de Lagrande
        print(f"Calculando f'({xk[i]}) pelo Método de Lagrange - 3º caso:")
        print("f'(xk) ~ (f(xk-2) - 4f(xk-1) + 3f(xk)) / h1+h2")
        print(f"       ~ (f({xk[i-2]}) - 4f({xk[i-1]}) + 3f({xk[i]})) /␣
↪{(h1+h2):.6f}")
        print(f"       ~ ({fx[i-2]:.6f} - 4 * {fx[i-1]:.6f} + 3 * {fx[i]:.6f}) /
↪ {(h1+h2):.6f}")
        r = (fx[i-2] - 4*fx[i-1] + 3*fx[i]) / (h1+h2)
        print(f"       ~ %.6f\n" % r)
        if tem_funcao == 1: #Caso seja dada uma função na questão, será␣
↪realizado o cálculo de erro
            errel = abs((f1 - r) / f1) * 100
            print(f"Er_rel = | ({f1:.6f} - {r:.6f}) / {f1:.6f} | * 100% =␣
↪{errel:.6f}%\n")
        return r
```

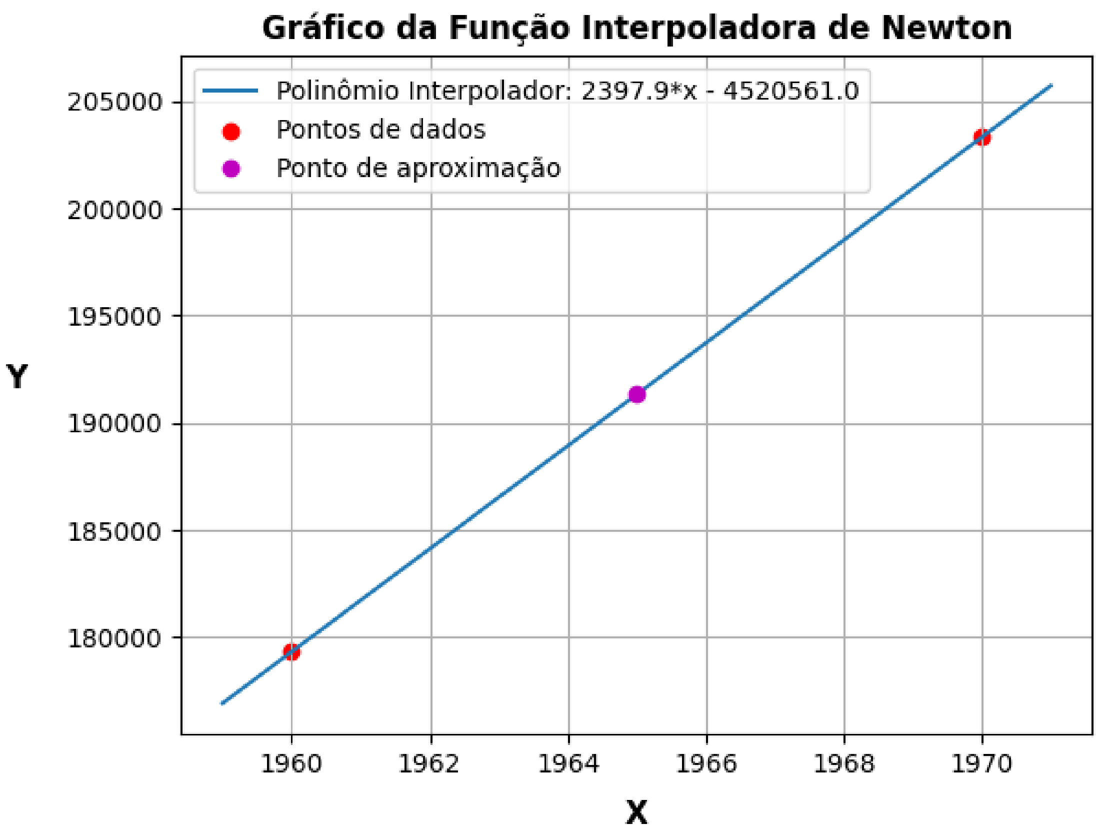
4 1, 2 - INTERPOLAÇÃO

4.1 Exercício 1

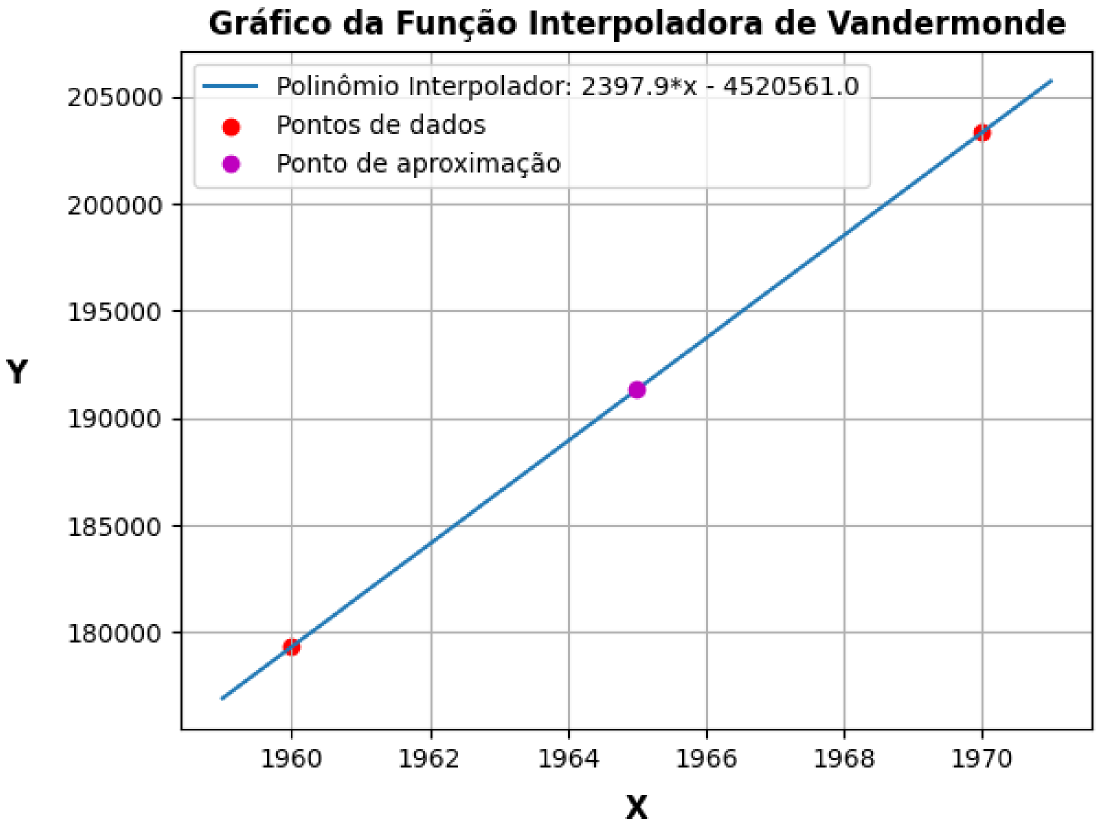
[17]:
```
x = [1940, 1950, 1960, 1970, 1980]
y = [132165, 151326, 179323, 203302, 226542]

x_linear = [1960, 1970]
y_linear = [179323, 203302]

x_quadratico = [1960, 1970, 1980]
y_quadratico = [179323, 203302, 226542]

ponto = 1965
```

```python
# LINEAR
newton(x_linear, y_linear, x, y, ponto)
vandermonde(x_linear, y_linear, ponto)
lagrange(x_linear, y_linear, ponto)

# QUADRÁTICA
newton(x_quadratico, y_quadratico, x, y, ponto)
vandermonde(x_quadratico, y_quadratico, ponto)
lagrange(x_quadratico, y_quadratico, ponto)
```

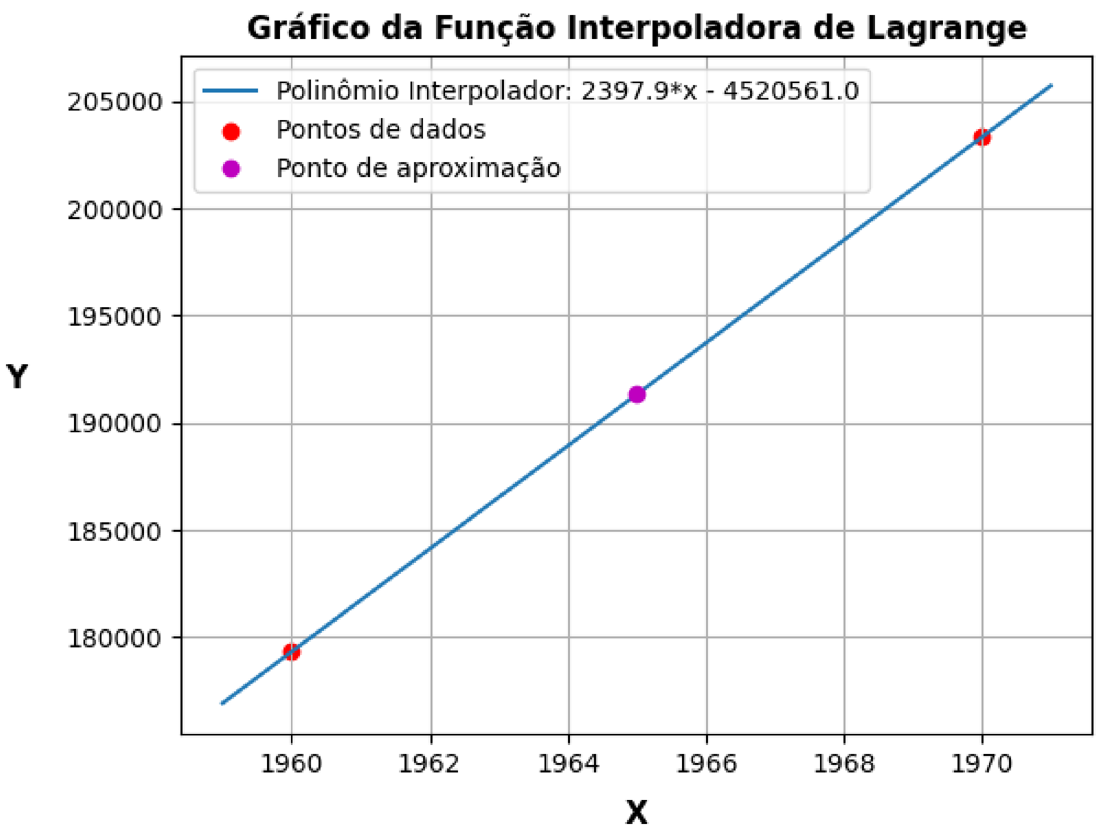
```
**********INTERPOLAÇÃO: MÉTODO DE NEWTON**********

1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 1960.000000; f(x) = 179323.000000
  x = 1970.000000; f(x) = 203302.000000

2)…TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS…:
Ordem 0 Ordem 1
179323.000000   2397.900000
203302.000000   0.000000

3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR NEWTON…:
2397.9*x - 4520561.0

4)…VALOR APROXIMADO…:
  a) O valor aproximado em x = "1965.000000" por Newton é: 191312.500000

**********FIM DO MÉTODO DE NEWTON**********
```



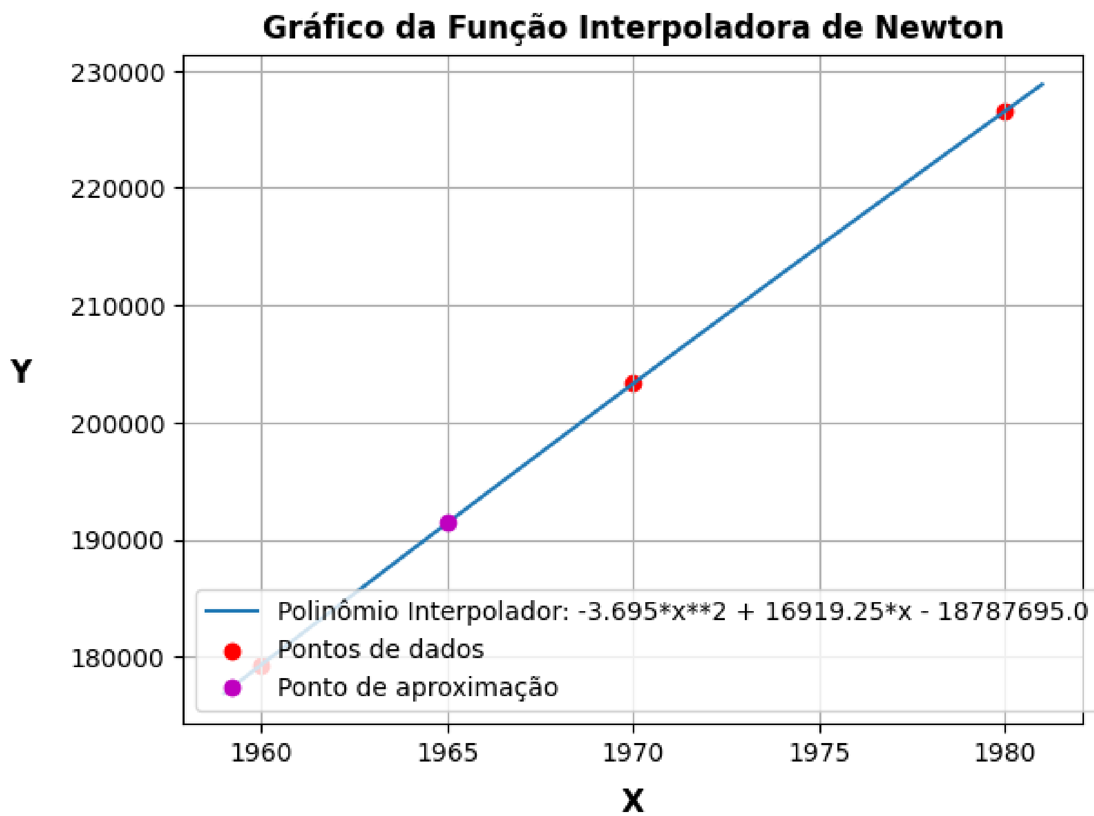

```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 1960.000000; f(x) = 179323.000000
  x = 1970.000000; f(x) = 203302.000000

2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        1960.000000
  1.000000        1970.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = -4520561.000000
  a1 = 2397.900000

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
2397.9*x - 4520561.0

5)…VALOR APROXIMADO…:
  b) O valor aproximado em x = "1965.000000" por Vandermonde é: 191312.500000

*****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE*****************
```




```
1)…TABELA DE DADOS…:
x = 1960; f(x) = 179323
x = 1970; f(x) = 203302

2)…COEFICIENTES DE LAGRANGE…:
L0(x) = 197 - 0.1x^1
L1(x) = -196 + 0.1x^1

3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR LAGRANGE…:
2397.9*x - 4520561.0

4)…VALORES EXATO, APROX e ERRO RELATIVO…:
a) Nao temos o valor exato para descobrirmos o valor exato
b) O valor aproximado em x = "1965.000000" por Lagrange é: 191312.500000
c) Nao temos o valor exato para descobrirmos o erro

5)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
a) Nao temos a funcao original para descobrirmos o erro

**********FIM DO MÉTODO DE LAGRANGE**********
```

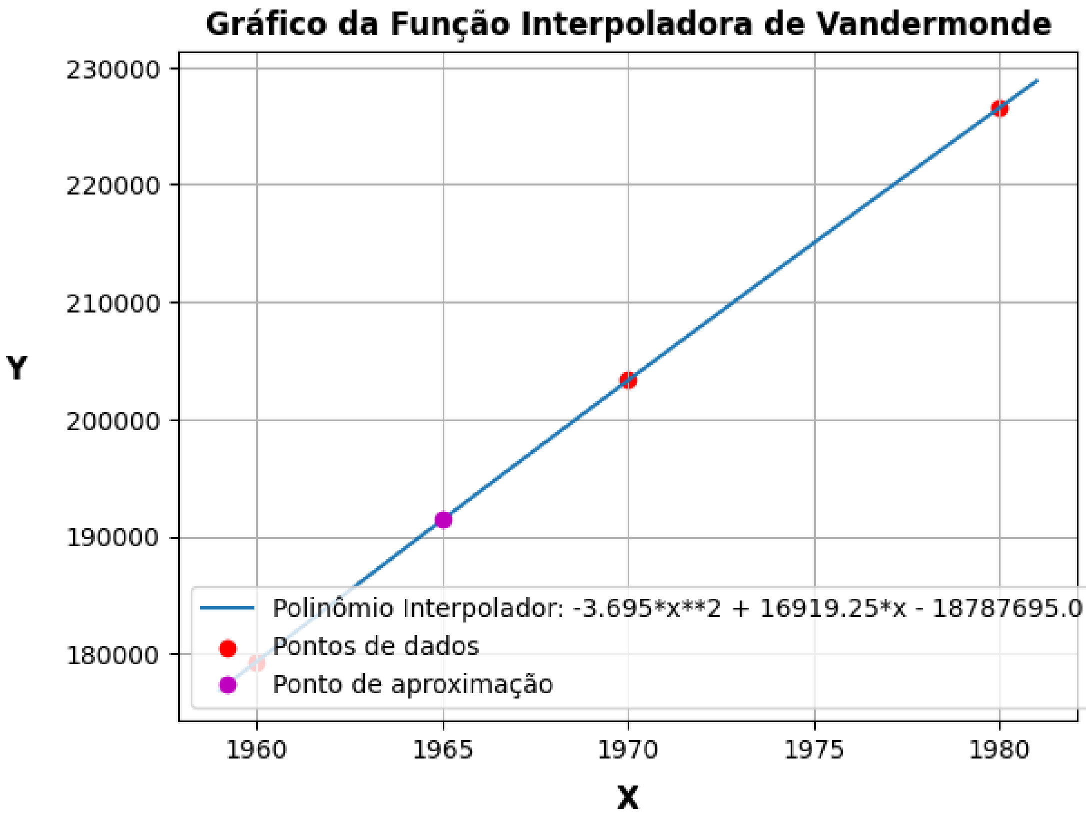



```
**********INTERPOLAÇÃO: MÉTODO DE NEWTON**********

1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 1960.000000; f(x) = 179323.000000
  x = 1970.000000; f(x) = 203302.000000
  x = 1980.000000; f(x) = 226542.000000

2)…TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS…:
Ordem 0 Ordem 1 Ordem 2
179323.000000   2397.900000     -3.695000
203302.000000   2324.000000     0.000000
226542.000000   0.000000        0.000000

3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR NEWTON…:
-3.695*x**2 + 16919.25*x - 18787695.0

4)…VALOR APROXIMADO…:
  a) O valor aproximado em x = "1965.000000" por Newton é: 191404.875000

**********FIM DO MÉTODO DE NEWTON**********
```




```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 1960.000000; f(x) = 179323.000000
  x = 1970.000000; f(x) = 203302.000000
  x = 1980.000000; f(x) = 226542.000000

2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        1960.000000     3841600.000000
  1.000000        1970.000000     3880900.000000
  1.000000        1980.000000     3920400.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = -18787695.000000
  a1 = 16919.250000
  a2 = -3.695000

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
-3.695*x**2 + 16919.25*x - 18787695.0

5)…VALOR APROXIMADO…:
  b) O valor aproximado em x = "1965.000000" por Vandermonde é: 191404.875000
```

****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE****************



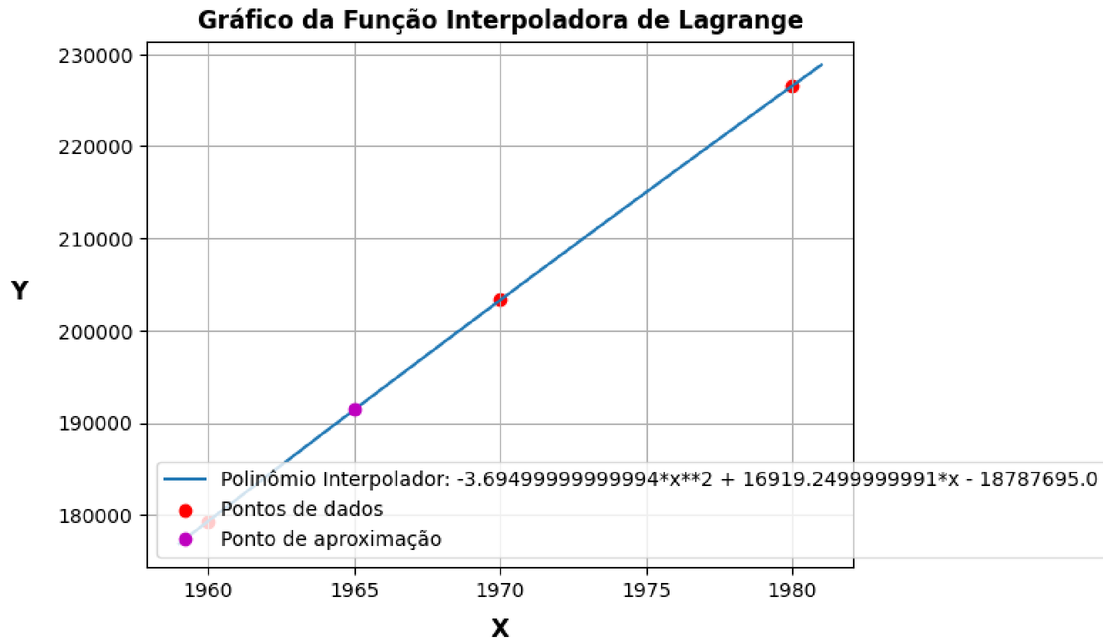
1)…TABELA DE DADOS…:
x = 1960; f(x) = 179323
x = 1970; f(x) = 203302
x = 1980; f(x) = 226542

2)…COEFICIENTES DE LAGRANGE…:
L0(x) = 19503 - 19.75x^1 + 0.005x^2
L1(x) = -38808 + 39.4x^1 - 0.01x^2
L2(x) = 19306 - 19.65x^1 + 0.005x^2

3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR LAGRANGE…:
-3.6949999999994*x**2 + 16919.2499999991*x - 18787695.0

4)…VALORES EXATO, APROX e ERRO RELATIVO…:
a) Nao temos o valor exato para descobrirmos o valor exato
b) O valor aproximado em x = "1965.000000" por Lagrange é: 191404.874998
c) Nao temos o valor exato para descobrirmos o erro

```
5)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
a) Nao temos a funcao original para descobrirmos o erro

**********FIM DO MÉTODO DE LAGRANGE**********
```

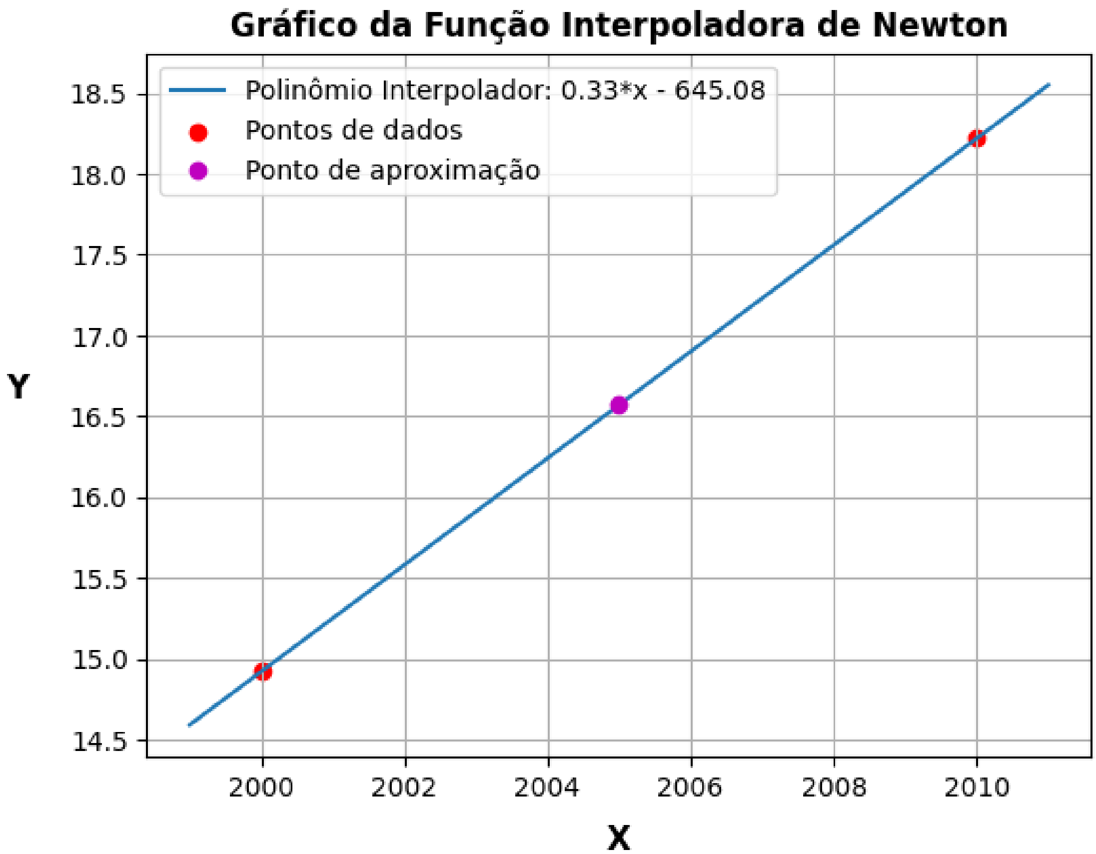


4.2 Exercício 2

[25]:
```python
x = [1980, 1990, 2000, 2010, 2020]
y = [10.20, 12.21, 14.92, 18.22, 22.26]

x_linear = [2000, 2010]
y_linear = [14.92, 18.22]

x_quadratico = [2000, 2010, 2020]
y_quadratico = [14.92, 18.22, 22.26]

ponto = 2005

xsim = sp.symbols('x')

funcao = 10 * sp.exp(0.02*25)
derivada_linear = sp.diff(funcao, xsim, 2)
derivada_quadratica = sp.diff(funcao, xsim, 3)

# LINEAR
```

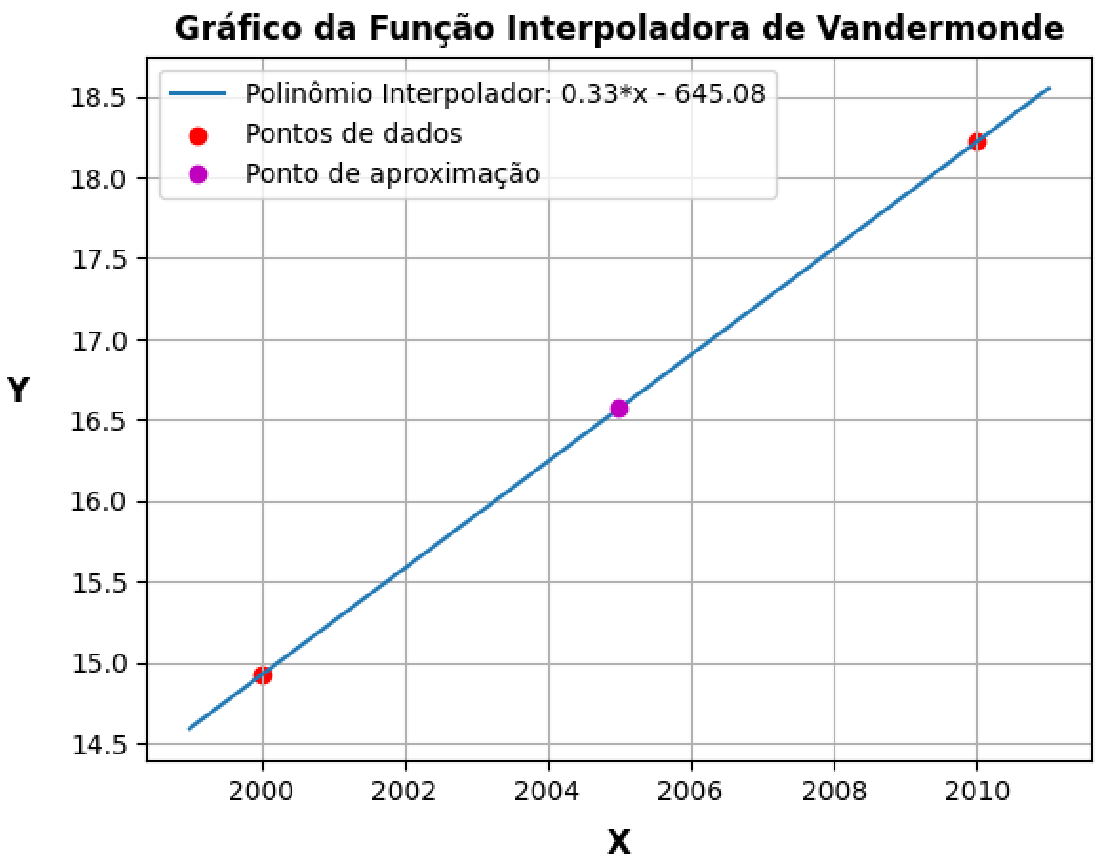
```
newton(x_linear, y_linear, x, y, ponto, funcao, derivada_linear)
vandermonde(x_linear, y_linear, ponto, funcao, derivada_linear)
lagrange(x_linear, y_linear, ponto, funcao, derivada_linear)

# QUADRATICO
newton(x_quadratico, y_quadratico, x, y, ponto, funcao, derivada_quadratica)
vandermonde(x_quadratico, y_quadratico, ponto, funcao, derivada_quadratica)
lagrange(x_quadratico, y_quadratico, ponto, funcao, derivada_quadratica)
```

```
**********INTERPOLAÇÃO: MÉTODO DE NEWTON**********

1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 2000.000000; f(x) = 14.920000
  x = 2010.000000; f(x) = 18.220000

2)…TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS…:
Ordem 0 Ordem 1
14.920000       0.330000
18.220000       0.000000

3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR NEWTON…:
0.33*x - 645.08

4)…VALORES EXATO, APROX. e ERRO RELATIVO…:
  a) O valor exato em x = "2005.000000" é: 16.487213
  b) O valor aproximado em x = "2005.000000" por Newton é: 16.570000
  c) Er_Rel, |(16.487213 - 16.570000)/16.487213|*100%, é: 0.502130%

5)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
  O erro de truncamento pelo corolário 4.1 é: 0.000000
  O erro de truncamento pelo corolário 4.2 é: 0.087500

**********FIM DO MÉTODO DE NEWTON**********
```




```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 2000.000000; f(x) = 14.920000
  x = 2010.000000; f(x) = 18.220000

2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        2000.000000
  1.000000        2010.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = -645.080000
  a1 = 0.330000

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
0.33*x - 645.08

5)…VALORES EXATO, APROX. e ERRO RELATIVO…:
  a) O valor exato em x = "2005.000000" é: 16.487213
  b) O valor aproximado em x = "2005.000000" por Vandermonde é: 16.570000
  c) O Er_Rel, |(16.487213 - 16.570000) / 16.487213| * 100% é: 0.502130%
```

```
6)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
  O erro de truncamento pelo corolario 4.1 é: 0.000000

*****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE*****************
```

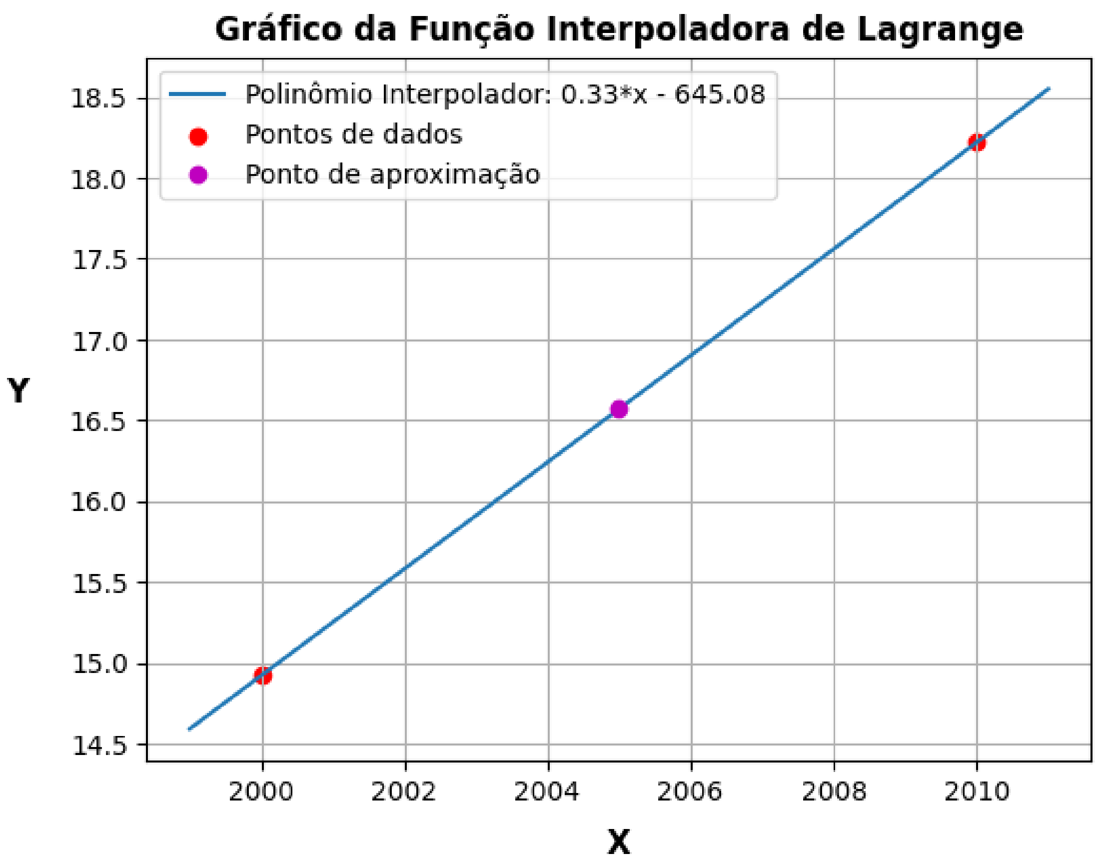



```
1)…TABELA DE DADOS…:
x = 2000; f(x) = 14.92
x = 2010; f(x) = 18.22

2)…COEFICIENTES DE LAGRANGE…:
L0(x) = 201 - 0.1x^1
L1(x) = -200 + 0.1x^1

3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR LAGRANGE…:
0.33*x - 645.08

4)…VALORES EXATO, APROX e ERRO RELATIVO…:
a) O valor exato em x = "2005.000000" é: 16.487213
b) O valor aproximado em x = "2005.000000" por Lagrange é: 16.570000
```

c) O Er_Rel, |16.487213 - 16.570000| / 16.487213| * 100% é -0.502130%

5)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
O erro de truncamento pelo corolário 4.1 é 0.000000

**********FIM DO MÉTODO DE LAGRANGE**********



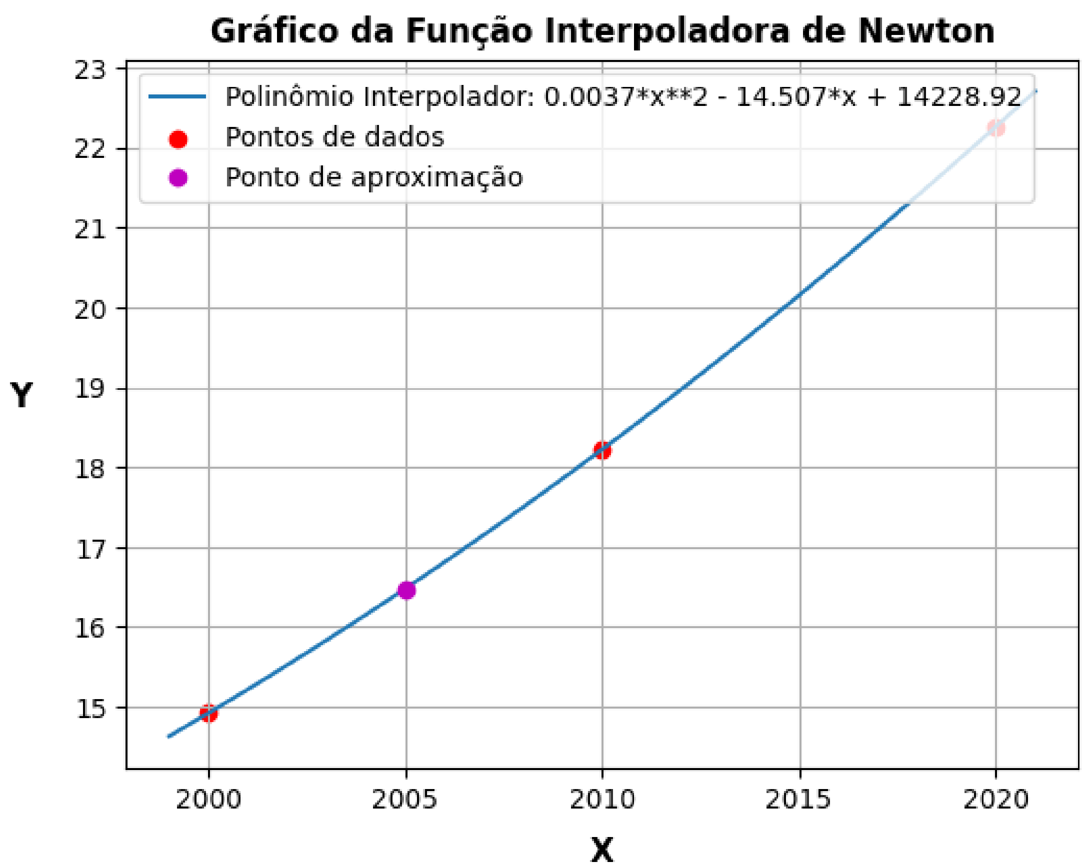
**********INTERPOLAÇÃO: MÉTODO DE NEWTON**********

1)…TABELA DE DADOS…:
x = 2000.000000; f(x) = 14.920000
x = 2010.000000; f(x) = 18.220000
x = 2020.000000; f(x) = 22.260000

2)…TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS…:

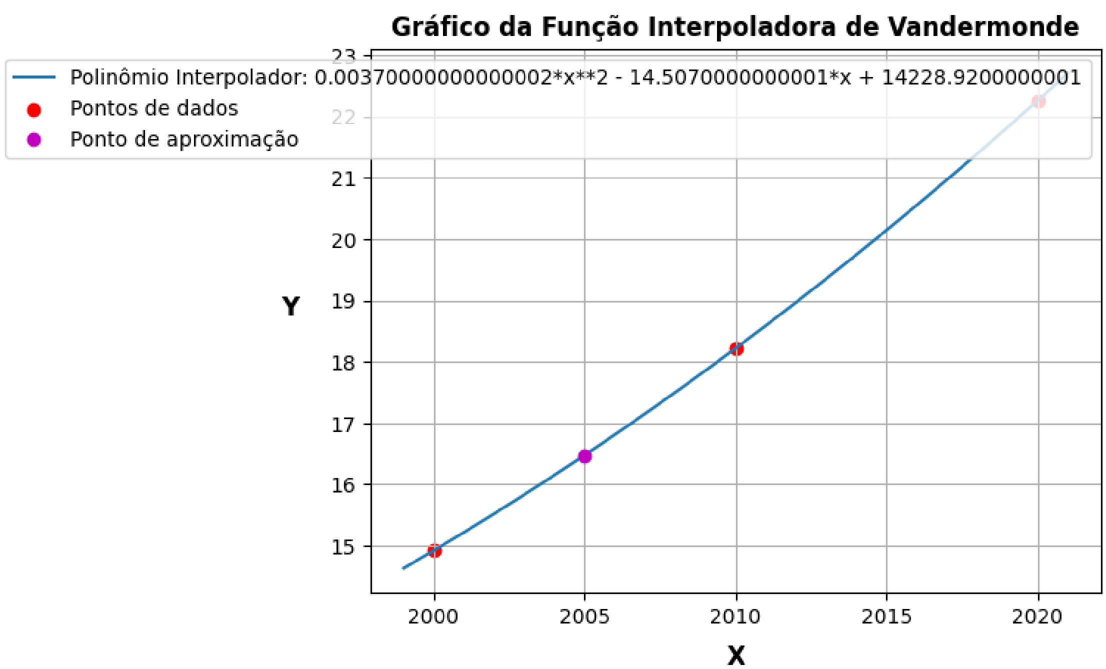
Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
14.920000	0.330000	0.003700
18.220000	0.404000	0.000000
22.260000	0.000000	0.000000

```
3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR NEWTON…:
0.0037*x**2 - 14.507*x + 14228.92

4)…VALORES EXATO, APROX. e ERRO RELATIVO…:
  a) O valor exato em x = "2005.000000" é: 16.487213
  b) O valor aproximado em x = "2005.000000" por Newton é: 16.477500
  c) Er_Rel, |(16.487213 - 16.477500)/16.487213|*100%, é: 0.058911%

5)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
  O erro de truncamento pelo corolário 4.1 é: 0.000000
  O erro de truncamento pelo corolário 4.2 é: 0.009375

**********FIM DO MÉTODO DE NEWTON**********
```



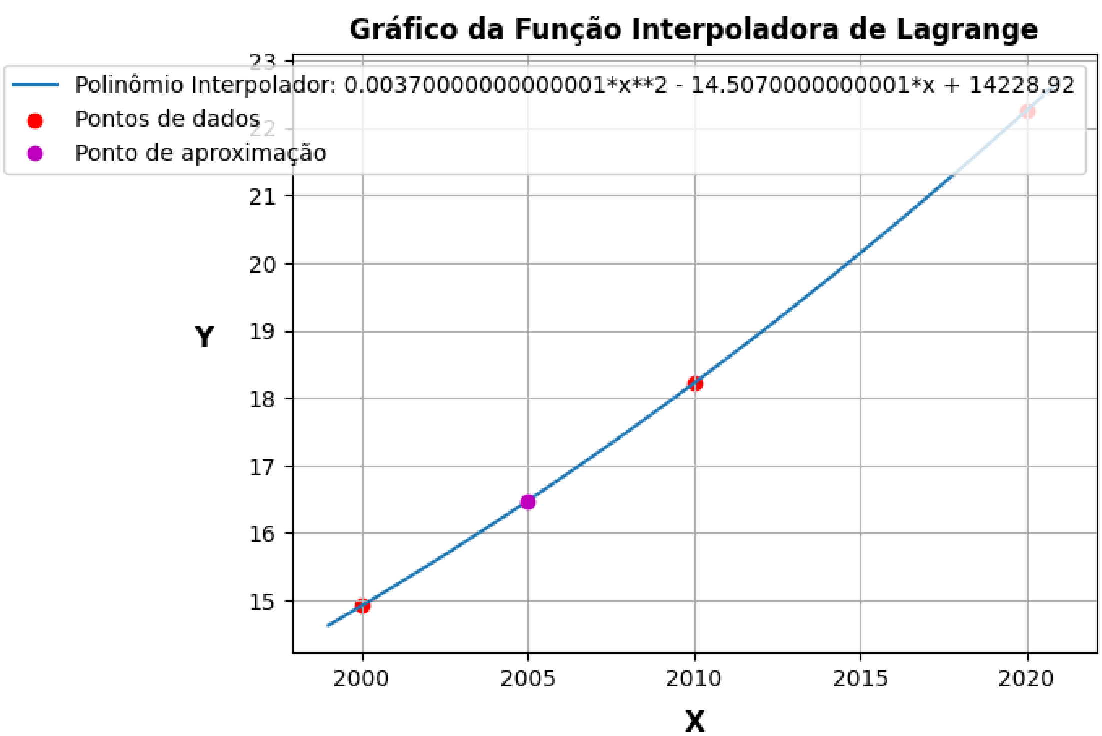

```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 2000.000000; f(x) = 14.920000
  x = 2010.000000; f(x) = 18.220000
  x = 2020.000000; f(x) = 22.260000
```

```
2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        2000.000000     4000000.000000
  1.000000        2010.000000     4040100.000000
  1.000000        2020.000000     4080400.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = 14228.920000
  a1 = -14.507000
  a2 = 0.003700

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
0.00370000000000002*x**2 - 14.5070000000001*x + 14228.9200000001

5)…VALORES EXATO, APROX. e ERRO RELATIVO…:
  a) O valor exato em x = "2005.000000" é: 16.487213
  b) O valor aproximado em x = "2005.000000" por Vandermonde é: 16.477500
  c) O Er_Rel, |(16.487213 - 16.477500) / 16.487213| * 100% é: 0.058911%

6)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
  O erro de truncamento pelo corolario 4.1 é: 0.000000

****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE****************
```




```
1)…TABELA DE DADOS…:
```

```
x = 2000; f(x) = 14.92
x = 2010; f(x) = 18.22
x = 2020; f(x) = 22.26

2)…COEFICIENTES DE LAGRANGE…:
L0(x) = 20301 - 20.15x^1 + 0.005x^2
L1(x) = -40400 + 40.2x^1 - 0.01x^2
L2(x) = 20100 - 20.05x^1 + 0.005x^2

3)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR LAGRANGE…:
0.00370000000000001*x**2 - 14.5070000000001*x + 14228.92

4)…VALORES EXATO, APROX e ERRO RELATIVO…:
a) O valor exato em x = "2005.000000" é: 16.487213
b) O valor aproximado em x = "2005.000000" por Lagrange é: 16.477500
c) O Er_Rel, |16.487213 - 16.477500| / 16.487213| * 100% é 0.058911%

5)…ESTIMATIVA DO ERRO DE TRUNCAMENTO…:
O erro de truncamento pelo corolário 4.1 é 0.000000

**********FIM DO MÉTODO DE LAGRANGE**********
```

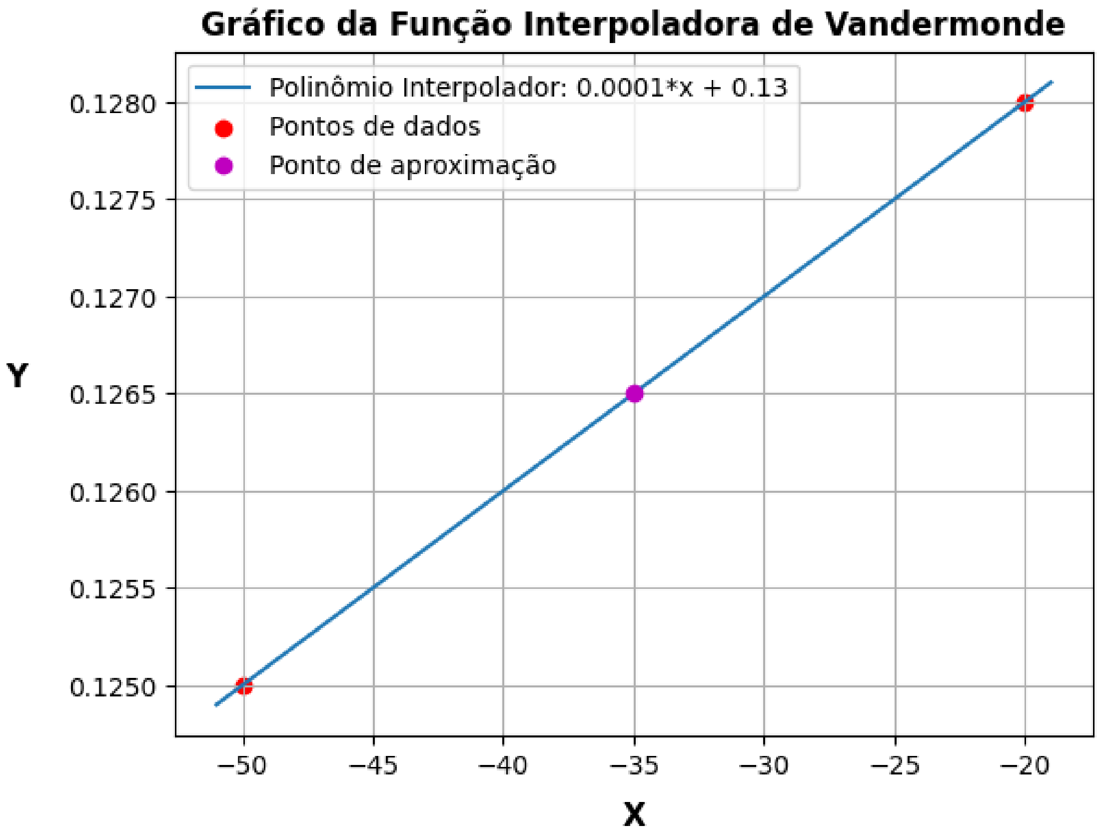


5 3, 4 - AJUSTE DE FUNCÃO

5.1 Exercício 3

[29]:
```
# Aproximação
x_linear = [-50, -20]
y_linear = [0.125, 0.128]

x_quadratico = [-50, -20, 10]
y_quadratico = [0.125, 0.128, 0.134]

ponto = -35
# LINEAR
vandermonde(x_linear, y_linear, ponto)

# QUADRÁTICO
vandermonde(x_quadratico, y_quadratico, ponto)

# Regressão
x = np.array([-50, -35, -20, 10, 70, 100, 120])
y = np.array([0.125, 0.126, 0.128, 0.134, 0.144, 0.150, 0.155])

ajuste_polinomial(x, y, 1, grau=2)
```

```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = -50.000000; f(x) = 0.125000
  x = -20.000000; f(x) = 0.128000

2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        -50.000000
  1.000000        -20.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = 0.130000
  a1 = 0.000100

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
0.0001*x + 0.13

5)…VALOR APROXIMADO…:
  b) O valor aproximado em x = "-35.000000" por Vandermonde é: 0.126500

*****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE*****************
```




```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = -50.000000; f(x) = 0.125000
  x = -20.000000; f(x) = 0.128000
  x = 10.000000; f(x) = 0.134000

2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        -50.000000      2500.000000
  1.000000        -20.000000      400.000000
  1.000000        10.000000       100.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = 0.131667
  a1 = 0.000217
  a2 = 0.000002

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
1.66666666666667e-6*x**2 + 0.000216666666666667*x + 0.131666666666667

5)…VALOR APROXIMADO…:
  b) O valor aproximado em x = "-35.000000" por Vandermonde é: 0.126125
```

****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE****************

/////////////// AJUSTE POR REGRESSÃO POLINOMIAL-MÉTODO QUADRADOS MÍNIMOS ///////////////

/////////////////////////// TABELA DE DADOS PARA OS AJUSTES: ///////////////////////////

```
  x = -50.000000        y(x) = 0.125000
  x = -35.000000        y(x) = 0.126000
  x = -20.000000        y(x) = 0.128000
  x = 10.000000        y(x) = 0.134000
  x = 70.000000        y(x) = 0.144000
  x = 100.000000        y(x) = 0.150000
  x = 120.000000        y(x) = 0.155000
```

************************** REGRESSÃO LINEAR **************************

///////// MATRIZ DO SISTEMA LINEAR PARA CALCULAR OS COEFICIENTES ////////

7.00 195.00

195.00 33525.00

//////////////////// VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES ////////////////////

0.96

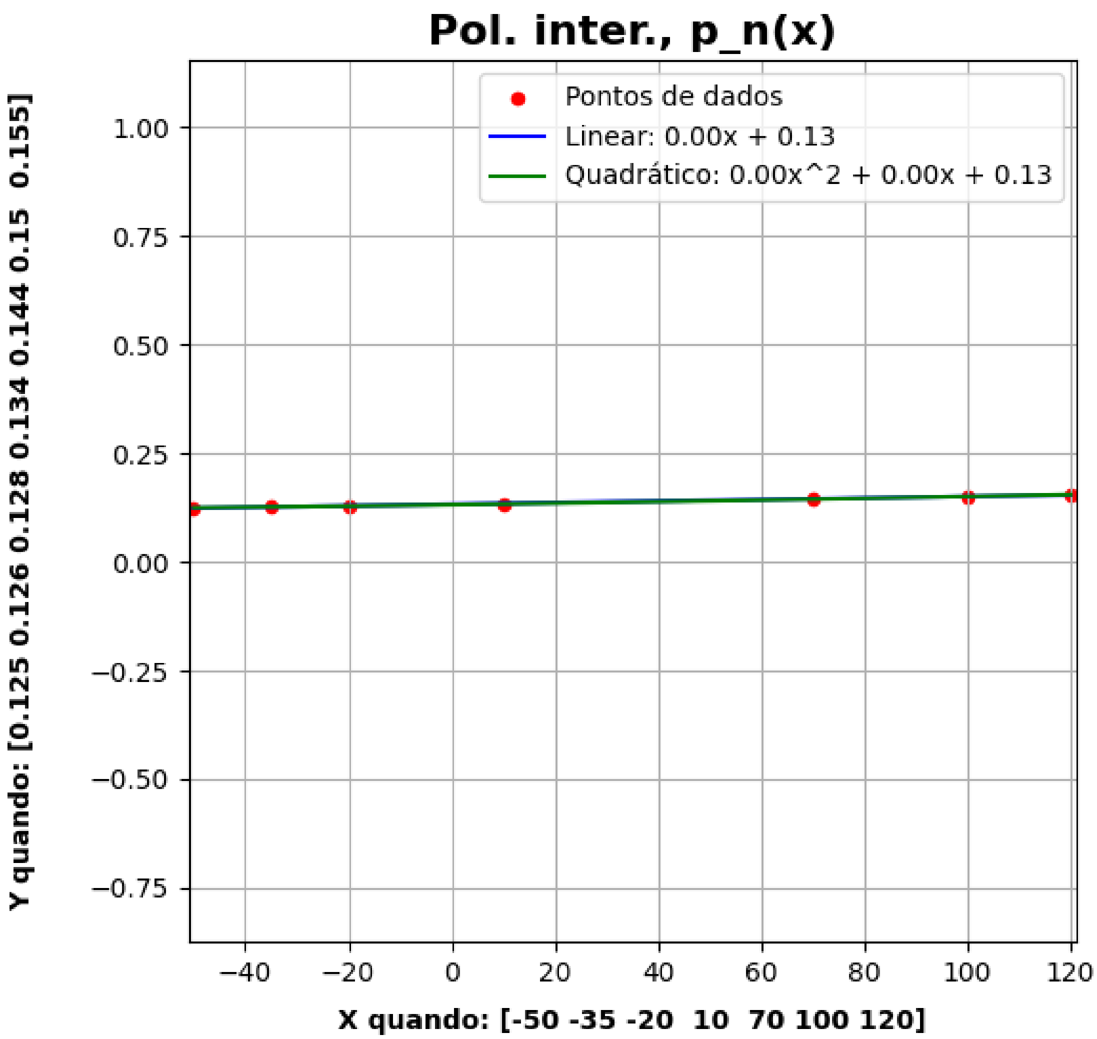
31.80

A equação linear da reta é = 0.132469 + 0.000178037x

//////////////////////// SOMA DOS DESVIOS QUADRÁTICOS ////////////////////////

0.0000

```
////////////////////// COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R^2 //////////////////////
0.9941

**************************  REGRESSÃO QUADRATICA  **************************
///////// MATRIZ DO SISTEMA QUADRÁTICO PARA CALCULAR OS COEFICIENTES /////////
7.00 195.00 33525.00
195.00 33525.00 2896125.00
33525.00 2896125.00 339290625.00

/////////////////////// VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES ///////////////////////
0.96
31.80
4969.05

A equação quadrática da reta é = 0.131622 + 0.000157236x^1 + 2.97805e-07x^2
//////////////////////// SOMA DOS DESVIOS QUADRÁTICOS ////////////////////////
0.0000

////////////////////// COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R^2 //////////////////////
0.9982

** O AJUSTE QUADRATICO TEM UM COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO MELHOR **

///////////////////////// FIM DO AJUSTE POLINOMIAL /////////////////////////
```

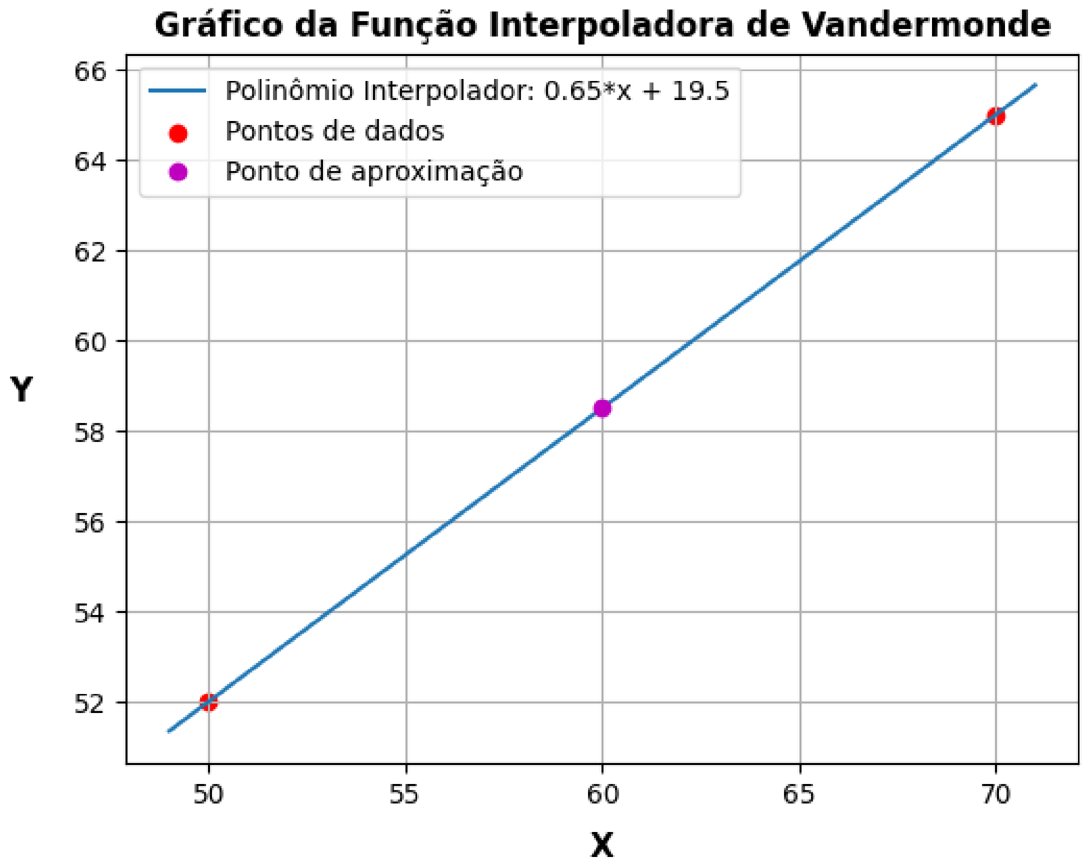


5.2 Exercício 4

[32]:
```
# Aproximação
x_linear = [50, 70]
y_linear = [52, 65]

x_quadratico = [40, 50, 70]
y_quadratico = [39, 52, 65]

ponto = 60

vandermonde(x_linear, y_linear, ponto)
vandermonde(x_quadratico, y_quadratico, ponto)
```

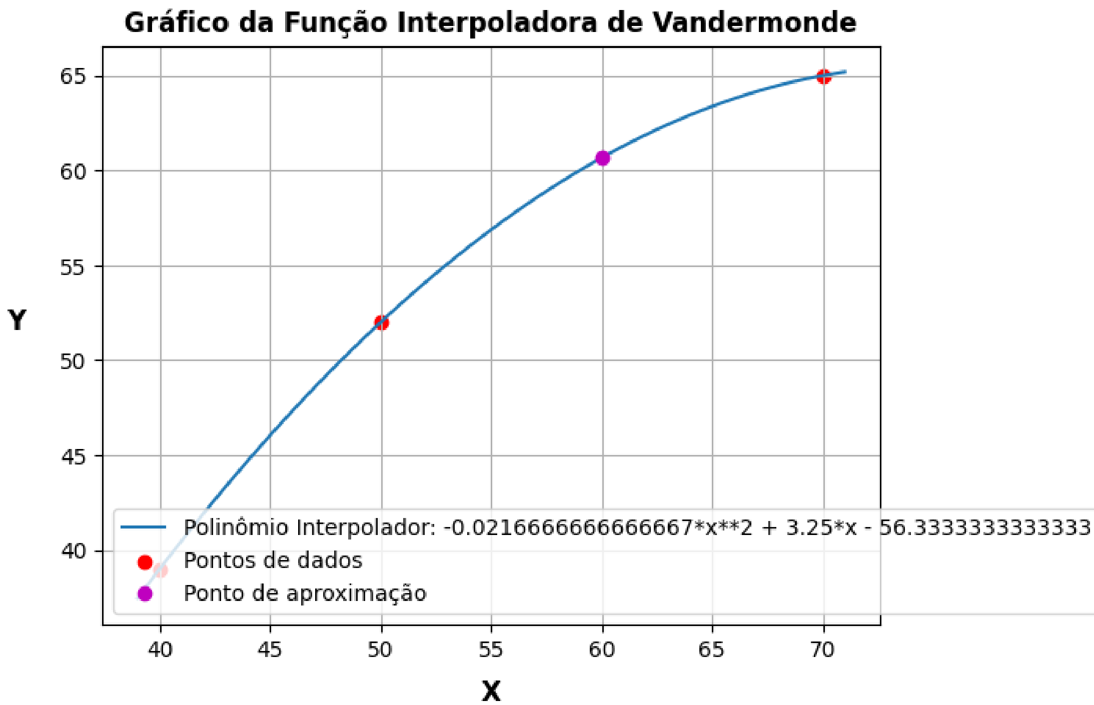
```python
# Regressão
x = np.array([0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90])
y = np.array([0, 10, 19, 31, 39, 52, 58.50, 65, 69, 70])

ajuste_polinomial(x, y, 1, grau=2)
```

```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 50.000000; f(x) = 52.000000
  x = 70.000000; f(x) = 65.000000

2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        50.000000
  1.000000        70.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = 19.500000
  a1 = 0.650000

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
0.65*x + 19.5

5)…VALOR APROXIMADO…:
  b) O valor aproximado em x = "60.000000" por Vandermonde é: 58.500000

*****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE*****************
```



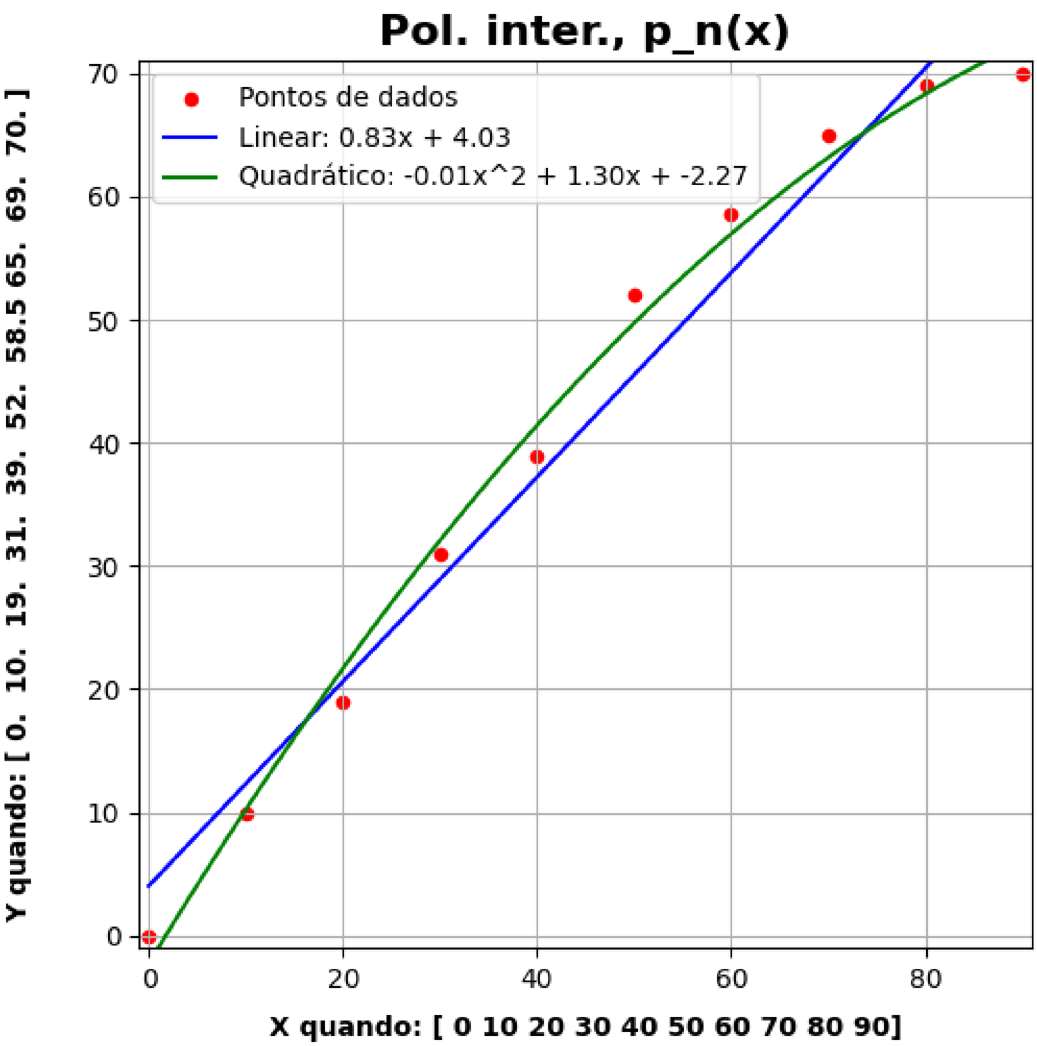

```
1)…TABELA DE DADOS…:
  x = 40.000000; f(x) = 39.000000
  x = 50.000000; f(x) = 52.000000
  x = 70.000000; f(x) = 65.000000

2)…MATRIZ DE VANDERMONDE DO SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
  1.000000        40.000000       1600.000000
  1.000000        50.000000       2500.000000
  1.000000        70.000000       4900.000000

3)…COEFICIENTES DO POLINÔMIO INTERPOLADOR - VANDERMONDE…:
  a0 = -56.333333
  a1 = 3.250000
  a2 = -0.021667

4)…POLINÔMIO INTERPOLADOR POR SISTEMA DE EQUAÇÃO…:
-0.0216666666666667*x**2 + 3.25*x - 56.3333333333333

5)…VALOR APROXIMADO…:
  b) O valor aproximado em x = "60.000000" por Vandermonde é: 60.666667
```

```
****************FIM DO MÉTODO DE VANDERMONDE****************
```




```
/////////////// AJUSTE POR REGRESSÃO POLINOMIAL-MÉTODO QUADRADOS MÍNIMOS
///////////////
/////////////////////////// TABELA DE DADOS PARA OS AJUSTES:
///////////////////////////
  x = 0.000000        y(x) = 0.000000
  x = 10.000000        y(x) = 10.000000
  x = 20.000000        y(x) = 19.000000
  x = 30.000000        y(x) = 31.000000
  x = 40.000000        y(x) = 39.000000
  x = 50.000000        y(x) = 52.000000
  x = 60.000000        y(x) = 58.500000
  x = 70.000000        y(x) = 65.000000
  x = 80.000000        y(x) = 69.000000
  x = 90.000000        y(x) = 70.000000

*************************  REGRESSÃO LINEAR  *************************
///////// MATRIZ DO SISTEMA LINEAR PARA CALCULAR OS COEFICIENTES ////////
10.00 450.00
450.00 28500.00
```

```
//////////////////// VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES /////////////////////
413.50
25450.00

A equação linear da reta é = 4.02727 + 0.829394x
//////////////////////// SOMA DOS DESVIOS QUADRÁTICOS ////////////////////////
181.8970

////////////////////// COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R^2 //////////////////////
0.9689

**************************  REGRESSÃO QUADRATICA  **************************
///////// MATRIZ DO SISTEMA QUADRÁTICO PARA CALCULAR OS COEFICIENTES /////////
10.00 450.00 28500.00
450.00 28500.00 2025000.00
28500.00 2025000.00 153330000.00

/////////////////////// VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES ///////////////////////
413.50
25450.00
1766600.00

A equação quadrática da reta é = -2.26818 + 1.30155x^1 + -0.00524621x^2
//////////////////////// SOMA DOS DESVIOS QUADRÁTICOS ////////////////////////
36.5769

////////////////////// COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R^2 //////////////////////
0.9938

** O AJUSTE QUADRATICO TEM UM COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO MELHOR **

///////////////////////// FIM DO AJUSTE POLINOMIAL /////////////////////////
```



6 5, 6 - DERIVADAS NUMÉRICAS

6.1 Exercício 5

[21]:
```
# Dados da tabela
xk = np.array([3, 4, 5, 6, 7, 8])
fx = np.array([1.0986, 1.3862, 1.6094, 1.7917, 1.9459, 2.0794])
a = 5
b = 6

x = sp.symbols('x')
# função que é dada pelo exercicio
f = sp.log(x)
```

```python
# Calculando as derivadas aproximadas
print("********SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS: PONTO = 5********")
derivada_taylor(xk, fx, 1, a, f)
derivada_taylor(xk, fx, 2, a, f)
derivada_taylor(xk, fx, 3, a, f)
derivada_taylor(xk, fx, 4, a, f)
print("******FIM DA SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS******\n")

print("********DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE: PONTO = 5********")
derivada_lagrange(xk, fx, 1, a, f)
derivada_lagrange(xk, fx, 2, a, f)
derivada_lagrange(xk, fx, 3, a, f)
print("******FIM DE DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE******\n")

# Calculando as derivadas aproximadas
print("********SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS: PONTO = 6********")
derivada_taylor(xk, fx, 1, b, f)
derivada_taylor(xk, fx, 2, b, f)
derivada_taylor(xk, fx, 3, b, f)
derivada_taylor(xk, fx, 4, b, f)
print("******FIM DA SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS******\n")

print("********DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE: PONTO = 6********")
derivada_lagrange(xk, fx, 1, b, f)
derivada_lagrange(xk, fx, 2, b, f)
derivada_lagrange(xk, fx, 3, b, f)
print("******FIM DE DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE******\n")
```

```
********SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS: PONTO = 5********
Calculando f'(5) pelo MDF-Progressiva de 1ª Ordem:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk)) / h1
       ~ (f(6) - f(5)) / 1.000000
       ~ (1.791700 - 1.609400) / 1.000000
       ~ 0.182300

Er_rel = | (0.200000 - 0.182300) / 0.200000 | * 100% = 8.850000%
Er_Trunc = | (1.000000/2)*-0.040000 | = 0.020000

Calculando f'(5) pelo MDF-Regressiva de 1ª Ordem:
f'(xk) ~ (f(xk) - f(xk-1)) / h2
       ~ (f(5) - f(4)) / 1.000000
       ~ (1.609400 - 1.386200) / 1.000000
       ~ 0.223200

Er_rel = | (0.200000 - 0.223200) / 0.200000 | * 100% = 11.600000%
Er_Trunc = | (1.000000/2)*-0.040000 | = 0.020000
```

```
Calculando f'(5) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à primeira derivda:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / h3
       ~ (f(6) - f(4)) / 2.000000
       ~ (1.791700 - 1.386200) / 2.000000
       ~ 0.202750

Er_rel = | (0.200000 - 0.202750) / 0.200000 | * 100% = 1.375000%
Er_Trunc = | (2.000000^2 / 6) * 0.016000 | = 0.010667

Calculando f'(5) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à segunda derivada:
f''(xk) ~ (f(xk+1) - 2*f(Xk) + f(xk-1)) / h1*h2
        ~ (f(6) - 2*f(5) + f(4)) / 1.000000
        ~ (1.791700 - 3.218800 + 1.386200) / 1.000000
        ~ -0.040900

Er_rel = | (-0.040000 - -0.040900) / -0.040000 | * 100% = 2.250000%
Er_Trunc = | (1.000000^2 / 6) * -0.009600 | = 0.001600
******FIM DA SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS******

********DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE: PONTO = 5********
Calculando f'(5) pelo Método de Lagrange - 1º caso:
f'(xk) ~ (-3f(xk) + 4f(xk+1) - f(xk+2)) / (h1+h2)
       ~ (-3 * f(5) + 4 * f(6) - f(7)) / (2.000000)
       ~ (-3 * 1.609400 - 4 * 1.791700 - 1.9459) / (2.000000)
       ~ 0.196350

Er_rel = | (0.200000 - 0.196350) / 0.200000 | * 100% = 1.825000%

Calculando f'(5) pelo Método de Lagrange - 2º caso:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1+h2)
       ~ (f(6) - f(4)) / (2.000000)
       ~ (1.791700 - 1.386200) / (2.000000)
       ~ 0.202750

Er_rel = | (0.200000 - 0.202750) / 0.200000 | * 100% = 1.375000%

Calculando f'(5) pelo Método de Lagrange - 3º caso:
f'(xk) ~ (f(xk-2) - 4f(xk-1) + 3f(xk)) / h1+h2
       ~ (f(3) - 4f(4) + 3f(5)) / 2.000000
       ~ (1.098600 - 4 * 1.386200 + 3 * 1.609400) / 2.000000
       ~ 0.191000

Er_rel = | (0.200000 - 0.191000) / 0.200000 | * 100% = 4.500000%

******FIM DE DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE******

********SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS: PONTO = 6********
Calculando f'(6) pelo MDF-Progressiva de 1ª Ordem:
```

```
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk)) / h1
       ~ (f(7) - f(6)) / 1.000000
       ~ (1.945900 - 1.791700) / 1.000000
       ~ 0.154200

Er_rel = | (0.166667 - 0.154200) / 0.166667 | * 100% = 7.480000%
Er_Trunc = | (1.000000/2)*-0.027778 | = 0.013889

Calculando f'(6) pelo MDF-Regressiva de 1ª Ordem:
f'(xk) ~ (f(xk) - f(xk-1)) / h2
       ~ (f(6) - f(5)) / 1.000000
       ~ (1.791700 - 1.609400) / 1.000000
       ~ 0.182300

Er_rel = | (0.166667 - 0.182300) / 0.166667 | * 100% = 9.380000%
Er_Trunc = | (1.000000/2)*-0.027778 | = 0.013889

Calculando f'(6) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à primeira derivda:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / h3
       ~ (f(7) - f(5)) / 2.000000
       ~ (1.945900 - 1.609400) / 2.000000
       ~ 0.168250

Er_rel = | (0.166667 - 0.168250) / 0.166667 | * 100% = 0.950000%
Er_Trunc = | (2.000000^2 / 6) * 0.009259 | = 0.006173

Calculando f'(6) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à segunda derivada:
f''(xk) ~ (f(xk+1) - 2*f(Xk) + f(xk-1)) / h1*h2
        ~ (f(7) - 2*f(6) + f(5)) / 1.000000
        ~ (1.945900 - 3.583400 + 1.609400) / 1.000000
        ~ -0.028100

Er_rel = | (-0.027778 - -0.028100) / -0.027778 | * 100% = 1.160000%
Er_Trunc = | (1.000000^2 / 6) * -0.004630 | = 0.000772
******FIM DA SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS******

********DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE: PONTO = 6********
Calculando f'(6) pelo Método de Lagrange - 1º caso:
f'(xk) ~ (-3f(xk) + 4f(xk+1) - f(xk+2)) / (h1+h2)
       ~ (-3 * f(6) + 4 * f(7) - f(8)) / (2.000000)
       ~ (-3 * 1.791700 - 4 * 1.945900 - 2.0794) / (2.000000)
       ~ 0.164550

Er_rel = | (0.166667 - 0.164550) / 0.166667 | * 100% = 1.270000%

Calculando f'(6) pelo Método de Lagrange - 2º caso:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1+h2)
       ~ (f(7) - f(5)) / (2.000000)
```

```
        ~ (1.945900 - 1.609400) / (2.000000)
        ~ 0.168250

Er_rel = | (0.166667 - 0.168250) / 0.166667 | * 100% = 0.950000%

Calculando f'(6) pelo Método de Lagrange - 3º caso:
f'(xk) ~ (f(xk-2) - 4f(xk-1) + 3f(xk)) / h1+h2
        ~ (f(4) - 4f(5) + 3f(6)) / 2.000000
        ~ (1.386200 - 4 * 1.609400 + 3 * 1.791700) / 2.000000
        ~ 0.161850

Er_rel = | (0.166667 - 0.161850) / 0.166667 | * 100% = 2.890000%

******FIM DE DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE******
```

6.2 Exercício 6

[22]:

```python
# Dados da tabela
xk = np.array([1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7])
fx = np.array([11.59, 14.04, 16.86, 20.10, 23.80, 28.05])
a = 1.4

x = sp.symbols('x')
# função que é dada pelo exercicio
f = 3 * x * sp.exp(x) - sp.cos(x)

# Calculando as derivadas aproximadas
print("********SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS********")
derivada_taylor(xk, fx, 1, a, f)
derivada_taylor(xk, fx, 2, a, f)
derivada_taylor(xk, fx, 3, a, f)
derivada_taylor(xk, fx, 4, a, f)
print("******FIM DA SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS******\n")

print("********DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE********")
derivada_lagrange(xk, fx, 1, a, f)
derivada_lagrange(xk, fx, 2, a, f)
derivada_lagrange(xk, fx, 3, a, f)
print("******FIM DE DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE******\n")
```

```
********SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS********
Calculando f'(1.4) pelo MDF-Progressiva de 1ª Ordem:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk)) / h1
        ~ (f(1.5) - f(1.4)) / 0.100000
        ~ (20.100000 - 16.860000) / 0.100000
        ~ 32.400000
```

```
Er_rel = | (30.182889 - 32.400000) / 30.182889 | * 100% = 7.345587%
Er_Trunc = | (0.100000/2)*41.533007 | = 2.076650

Calculando f'(1.4) pelo MDF-Regressiva de 1ª Ordem:
f'(xk) ~ (f(xk) - f(xk-1)) / h2
       ~ (f(1.4) - f(1.3)) / 0.100000
       ~ (16.860000 - 14.040000) / 0.100000
       ~ 28.200000

Er_rel = | (30.182889 - 28.200000) / 30.182889 | * 100% = 6.569581%
Er_Trunc = | (0.100000/2)*41.533007 | = 2.076650

Calculando f'(1.4) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à primeira derivda:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / h3
       ~ (f(1.5) - f(1.3)) / 0.200000
       ~ (20.100000 - 14.040000) / 0.200000
       ~ 30.300000

Er_rel = | (30.182889 - 30.300000) / 30.182889 | * 100% = 0.388003%
Er_Trunc = | (0.200000^2 / 6) * 52.543190 | = 0.350288

Calculando f'(1.4) pelo MDF-Centrada de 2ª Ordem à segunda derivada:
f''(xk) ~ (f(xk+1) - 2*f(Xk) + f(xk-1)) / h1*h2
        ~ (f(1.5) - 2*f(1.4) + f(1.3)) / 0.010000
        ~ (20.100000 - 33.720000 + 14.040000) / 0.010000
        ~ 42.000000

Er_rel = | (41.533007 - 42.000000) / 41.533007 | * 100% = 1.124391%
Er_Trunc = | (0.010000^2 / 6) * 65.524272 | = 0.001092
******FIM DA SÉRIE DE TAYLOR E DIFERENÇAS FINITAS******

********DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE********
Calculando f'(1.4) pelo Método de Lagrange - 1º caso:
f'(xk) ~ (-3f(xk) + 4f(xk+1) - f(xk+2)) / (h1+h2)
       ~ (-3 * f(1.4) + 4 * f(1.5) - f(1.6)) / (0.200000)
       ~ (-3 * 16.860000 - 4 * 20.100000 - 23.8) / (0.200000)
       ~ 30.100000

Er_rel = | (30.182889 - 30.100000) / 30.182889 | * 100% = 0.274624%

Calculando f'(1.4) pelo Método de Lagrange - 2º caso:
f'(xk) ~ (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1+h2)
       ~ (f(1.5) - f(1.3)) / (0.200000)
       ~ (20.100000 - 14.040000) / (0.200000)
       ~ 30.300000

Er_rel = | (30.182889 - 30.300000) / 30.182889 | * 100% = 0.388003%
```

```
Calculando f'(1.4) pelo Método de Lagrange - 3º caso:
f'(xk) ~ (f(xk-2) - 4f(xk-1) + 3f(xk)) / h1+h2
       ~ (f(1.2) - 4f(1.3) + 3f(1.4)) / 0.200000
       ~ (11.590000 - 4 * 14.040000 + 3 * 16.860000) / 0.200000
       ~ 30.050000

Er_rel = | (30.182889 - 30.050000) / 30.182889 | * 100% = 0.440281%

******FIM DE DIFERENCIAÇÃO METÓDO DE LAGRANGE******
```