

素粒子物理学 後半レポート

05-211525 齋藤駿一

2023 年 1 月 31 日

1

$$\alpha(Q) = \frac{\alpha(\mu)}{1 - \frac{\alpha(\mu)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (1)$$

$$\alpha_S(Q) = \frac{\alpha_S(\mu)}{1 - b_0 \alpha_S(\mu) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (2)$$

が成り立つ。ただし,

$$b_0 = -\frac{11N_c - 2N_f}{12\pi} \quad (3)$$

である。まず, $\mu = m_e = 511 \text{ keV}$ として $\alpha(m_e) = 1/137$ を用いると,

$$\alpha(Q) = \frac{1/137}{1 - \frac{1/137}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{m_e^2}} \quad (4)$$

がいえる。

いま, $N_c = 3, N_f = 5$ の場合を考えて, $b_0 \approx -0.6101$ とする。 $\mu = 91.2 \text{ GeV}$ として $\alpha_S(91.2 \text{ GeV}) = 0.119$ を用いると,

$$\alpha_S(Q) = \frac{0.119}{1 + 0.6101 \times 0.119 \ln \frac{Q^2}{91.2 \text{ GeV}^2}} \quad (5)$$

がいえる。

以上をもとに表を埋めると, 次のようになる。

表 1 QED coupling と QCD coupling の表.

Q	10 GeV	100 GeV	1 TeV	1.75 TeV	$1.15 \times 10^{19} \text{ eV}$
QED α	7.58×10^{-3}	7.61×10^{-3}	7.63×10^{-3}	-	$1.05 \times 1/137$
QCD α_S	1.78×10^{-2}	1.69×10^{-2}	1.62×10^{-2}	0.119×0.7	-

2

Q1

崩壊反応 $\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ の Feynman diagram に対し Feynman rule を適用すると,

$$\mathcal{M} = i \frac{ig_{\mu\nu}}{M_W^2} \bar{u}(k_2, s_2) \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \right) u(k_1, s_1) \bar{u}(k_4, s_4) \left(-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \right) u(k_3, s_3) \quad (6)$$

と書ける. ただし, μ, ν_μ, ν_e, e^- をそれぞれ粒子 1, 2, 3, 4 とラベルした. これを Fermi 定数

$$G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8M_W^2} \quad (7)$$

を用いて整理すると,

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2, s_2) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(k_1, s_1) \bar{u}(k_4, s_4) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(k_3, s_3) \quad (8)$$

となる. これをもとにトレース計算すると,

$$|\mathcal{M}|^2 = 64 G_F^2 (k_1 \cdot k_3) (k_2 \cdot k_4) \quad (9)$$

が分かる. これを

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\mu} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3k_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - k_3 - k_4) \quad (10)$$

に代入し, さらに計算すると,

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{m_\mu^2 G_F^2}{4\pi^3} E^2 \left(1 - \frac{4E}{3m_\mu} \right) \quad (11)$$

が分かる. これを $E = 0$ から $E = m_\mu/2$ (右辺の微分がゼロになるエネルギー) まで積分すると,

$$\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (12)$$

と求まる. したがって, μ 粒子の寿命は

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5} \quad (13)$$

と求まる.

参考文献

[1] A.George. (2012). Muon & Tau Lifetime.

http://hep.ucsb.edu/people/cag/Muon_Lifetime.pdf

Q2

$$\tau_\mu = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5} = \frac{192\pi^3 \hbar}{\left(\frac{G_F}{(\hbar c)^3}\right)^2 (m_\mu c^2)^5} \quad (14)$$

に

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.166\,378\,9 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}, \quad m_\mu c^2 = 105.658\,37 \text{ MeV}, \quad \hbar = 6.582\,119\,569 \times 10^{-22} \text{ MeV s} \quad (15)$$

を代入すると,

$$\tau_\mu \approx 2.187\,347\,816 \times 10^{-6} \text{ s} \quad (16)$$

と求まる.

Q3

PDG で検索すると,

$$\tau_\mu = (2.196\,981\,1 \pm 0.000\,002\,2) \times 10^{-6} \text{ s} \quad (17)$$

と分かった. 先ほどの計算結果はこれよりも有意に小さい.

3

ニュートリノのヘリシティを測定するには, 次の Goldhaber experiment を行えば良い. まず, スピン $l=0$ の原子核 X で, K 殻の電子捕獲によりスピン $l=1$ の原子核 Y^* に励起するものを用意する. すなわち,

$$X + e^- \rightarrow Y^* + \nu_e \quad (18)$$

が起こると考える. 電子捕獲のとき系全体は静止しているので, 運動量保存により終状態の全運動量は 0 である.

さらに, 励起された原子核が光子を放出してスピン $l=0$ の基底状態 Y へ遷移すると考える. すなわち,

$$Y^* \rightarrow Y + \gamma \quad (19)$$

が起こると考える. 前述したように終状態の全運動量は 0 であり, 原子核は静止していると考えれば, ここで放出される光子の運動量 \mathbf{p}_γ と電子ニュートリノの運動量 \mathbf{p}_{ν_e} は

$$\mathbf{p}_\gamma = -\mathbf{p}_{\nu_e} \quad (20)$$

を満たす.

ここで、系全体のスピンの z 成分が反応全体

$$X + e^- \rightarrow Y + \gamma + \nu_e \quad (21)$$

を通して保存することを考えると、各粒子のスピンの z 成分の組として

$$0 + \frac{1}{2} \rightarrow 0 + 1 - \frac{1}{2} \quad (22)$$

または

$$0 - \frac{1}{2} \rightarrow 0 - 1 + \frac{1}{2} \quad (23)$$

の 2 通りだけ考えられる。したがって、光子のスピン s_γ と電子ニュートリノのスピン s_{ν_e} は必ず

$$s_\gamma = -s_{\nu_e} \quad (24)$$

を満たす。

以上より、光子のヘリシティ h_γ は電子ニュートリノのヘリシティ h_{ν_e} と等しいことが分かる：

$$h_\gamma = \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{s}_e}{|\mathbf{p}_e| \cdot |\mathbf{s}_e|} = \frac{(-\mathbf{p}_{\nu_e}) \cdot (-\mathbf{s}_{\nu_e})}{|-\mathbf{p}_{\nu_e}| \cdot |-\mathbf{s}_{\nu_e}|} = h_{\nu_e}. \quad (25)$$

つまり、光子のヘリシティを測定することで、間接的に電子ニュートリノのヘリシティを測定できる。

実際の Goldhaber experiment では、 ^{152}Eu が電子捕獲により ^{152}Sm となる反応が用いられた。その結果、ニュートリノヘリシティは -1 と求まり、ニュートリノは必ず左巻きになることが分かった。

参考文献

- [1] Manmohan Singh. Measurement of Helicity of Neutrino (Goldhaber Experiment).
<https://www.youtube.com/watch?v=6ZaG5LFFKmaI>

4

Z ボソンの崩壊 $Z \rightarrow f\bar{f}$ の部分幅 $\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f})$ は、

$$\Gamma(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{(G_F/(\hbar c)^3)m_Z^3 c^6}{3\pi\sqrt{2}}(c_L^2 + c_R^2) \approx 663 \text{ MeV} \cdot (c_L^2 + c_R^2) \quad (26)$$

を満たす。ただし、

$$c_{L,R} = T_3 - \sin^2 \theta_W Q \approx T_3 - 0.23 \times Q \quad (27)$$

である (c_R については $T_3 = 0$)。これをもとに部分幅を計算すると、表 2 のようになる。ここで、クォークは 3 つの色の組み合わせで生成されることを考慮した。

表 2 各 f についての $T_3 - \sin^2 \theta_W Q$ の値と部分幅.

	Q	$T_3(\text{L のとき})$	c_L	c_R	$c_L^2 + c_R^2$	Γ/MeV
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	1/2	1/2	0	0.25	166
e^-, μ^-, τ^-	-1	-1/2	-0.27	0.23	0.13	83.4
u, c	2/3	1/2	0.35	-0.15	0.15	3×94.8
d, s, b	-1/3	-1/2	-0.42	0.08	0.18	3×123

以上より, 全幅は

$$\Gamma_{\text{tot}} = 3 \times 166 \text{ MeV} + 3 \times 83.4 \text{ MeV} + 2 \times 3 \times 94.8 \text{ MeV} + 3 \times 3 \times 123 \text{ MeV} = 2424 \text{ MeV} \quad (28)$$

と計算できる. これより, 分岐比は

$$\text{BR}(Z \longrightarrow e^- e^+) = \frac{\Gamma(Z \longrightarrow e^- e^+)}{\Gamma_{\text{tot}}} \approx 0.0344 \quad (29)$$

$$\text{BR}(Z \longrightarrow \text{invisible})/3 = \frac{\Gamma(Z \longrightarrow \nu_e \bar{\nu}_e)}{\Gamma_{\text{tot}}} \approx 0.068 \quad (30)$$

$$\text{BR}(Z \longrightarrow d\bar{d} + s\bar{s} + b\bar{b})/3 = \frac{3 \times \Gamma(Z \longrightarrow d\bar{d})}{\Gamma_{\text{tot}}} \approx 0.152 \quad (31)$$

$$\text{BR}(Z \longrightarrow u\bar{u} + c\bar{c})/2 = \frac{3 \times \Gamma(Z \longrightarrow u\bar{u})}{\Gamma_{\text{tot}}} \approx 0.117 \quad (32)$$

と計算でき, これは実験結果とおおよそ合致する.

参考文献

- [1] B. ポッフ, K. リーツ, C. ショルツ, F. サッチャ. 柴田利明訳. 素粒子・原子核物理入門.
p.143

5

観測される Higgs 粒子の個数 \tilde{N} は, 実際に生成される個数 N を用いて,

$$\tilde{N} = N \times \text{Br}(H \longrightarrow \mu^+ \mu^-) \times 0.49 \quad (33)$$

と書ける. ここで, integrated luminosity L_{int} は, N と散乱断面積 σ を用いて

$$L_{\text{int}} = \frac{N}{\sigma} \quad (34)$$

と表される. いま, すべての生成過程について散乱断面積を足し上げると,

$$\sigma = 43.9 \text{ pb} + 3.7 \text{ pb} + 1.4 \text{ pb} + 0.9 \text{ pb} + 0.5 \text{ pb} = 50.4 \text{ pb} \quad (35)$$

が得られるので, $L_{\text{int}} = 140 \text{ fb}^{-1}$ より

$$N = L_{\text{int}} \times \sigma \approx 7.06 \times 10^6 \quad (36)$$

が分かる.

Q1

Case A では,

$$\text{Br}(H \longrightarrow \mu^+ \mu^-) = 0.00022 \quad (37)$$

なので, 観測される Higgs 粒子の個数は

$$N \approx 761 \quad (38)$$

と求まる.

Q2

Case B では,

$$\text{Br}(H \longrightarrow \mu^+ \mu^-) = 0.063 \quad (39)$$

なので, 観測される Higgs 粒子の個数は

$$N \approx 2.18 \times 10^5 \quad (40)$$

と求まる.

Q3

Search for the Higgs boson decaying to two muons in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13 \text{ TeV}$

Q4

Case A が支持される.

Q5

6

Q1,Q2

図 1 に示した.

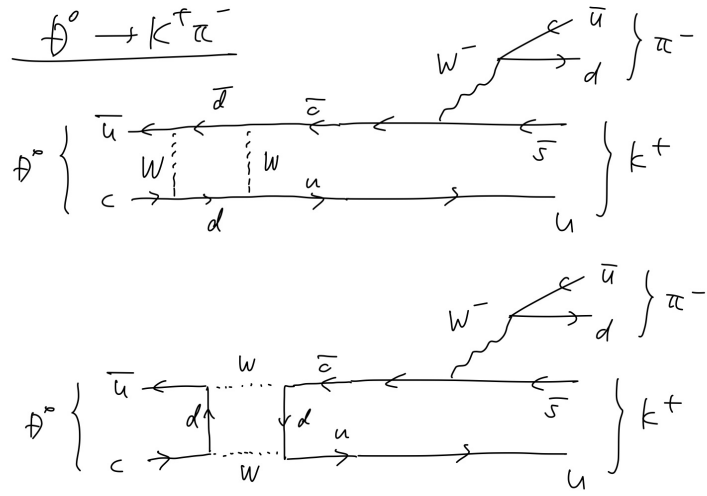
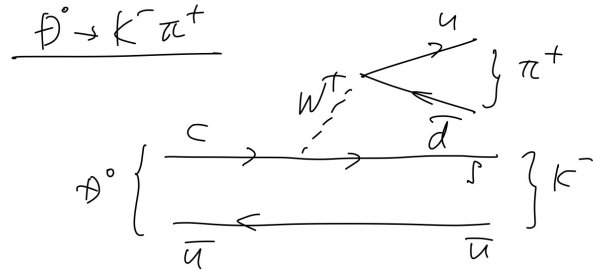


図1 Q1 の回答 (上) と Q2 の回答 (下).

Q3

$D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ の反応では, 図1 より, c クォークが d クォークに変わる必要がある. これは, d クォークが実際には s クォークと重ね合わさった状態として存在しているからであると考えられる. 重ね合わせの比率は, Cabbibo angle θ_C を用いて

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (41)$$

と書ける. いま, $\sin \theta_C \approx 0.22, \cos \theta_C \approx 0.98$ である. したがって, $c \longleftrightarrow d$ の遷移確率は $c \longleftrightarrow s$ の遷移確率に比べて,

$$\frac{\sin^2 \theta_C}{\cos^2 \theta_C} \approx \frac{1}{20} \quad (42)$$

倍程度小さくなる． $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ の反応ではこれが2回起こるため， $D^0 \rightarrow K^-\pi^+$ と比べて遷移確率は $1/400 = 5 \times 10^{-3}$ 倍程度になると考えられる．これは実際に分岐比の割合 3.6×10^{-3} と概ね合致する．

参考文献

- [1] B. ポッフ, K. リーツ, C. ショルツ, F. サッチャ. 柴田利明訳. 素粒子・原子核物理入門. p.129

7

B^0 と \bar{B}^0 の mixing は因子 $\cos \Delta m_{B^0}$ で表されるので，その周期は

$$\frac{2\pi}{\Delta m_{B^0}} = \frac{2\pi}{0.507 \text{ ps}} = 12.4 \text{ ps} \quad (43)$$

と分かる． B_S^0 と \bar{B}_S^0 の mixing の周期も同様に，

$$\frac{2\pi}{\Delta m_{B_S^0}} = \frac{2\pi}{17.8 \text{ ps}} = 0.353 \text{ ps} \quad (44)$$

と分かる．よって，粒子の速度を βc とすると， B^0 - \bar{B}^0 mixing と B_S^0 - \bar{B}_S^0 mixing の decay length はそれぞれ

$$\beta c \times 12.4 \text{ ps} \approx 3.72 \text{ mm} \times \beta \quad (45)$$

$$\beta c \times 0.353 \text{ ps} \approx 106 \mu\text{m} \times \beta \quad (46)$$

と求まる．これより， B_S^0 - \bar{B}_S^0 mixing は， $\beta = 1$ としても $\sigma_{\Delta z} \approx 100 \mu\text{m}$ で判定できる限界の長さに近い．実際は β はもっと小さいので， B_S^0 - \bar{B}_S^0 mixing は観測できない．