解析学 XC レポート

05-211525　齋藤駿一

2023 年 2 月 4 日

1

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

に対し，

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Lx(t), \qquad t > 0, \qquad x(0) > a \tag{2}$$

を満たすとする．ただし，l_1, l_2, l_3 を実数として，$l_2 \neq 0$ とする．

(1)

L の固有値 λ に対し，固有方程式

$$|L - \lambda I| = (l_1 - \lambda)(l_3 - \lambda) - l_2^2 = 0 \tag{3}$$

すなわち

$$\lambda^2 - (l_1 + l_3)\lambda + l_1 l_3 - l_2^2 = 0 \tag{4}$$

を満たす．これを λ に関する 2 次方程式と見たとき，判別式 D は

$$D = (l_1 + l_3)^2 - 4(l_1 l_3 - l_2^2) = (l_1 - l_3)^2 + 4l_2^2 > 0 \tag{5}$$

となる．ここで $l_2 \neq 0$ を用いた．したがって，固有方程式 (4) は相異なる二つの実数解を持つ．つまり，L は実数の相異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つ．

(2)

$i = 1, 2$ に対して，固有値 λ_i に対する固有ベクトル $v_i =^t (v_{i1}, v_{i2})$ について

$$(L - \lambda_i I)v_i = \begin{pmatrix} l_1 - \lambda_i & l_2 \\ l_2 & l_3 - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

が成り立つ．これより

$$v_{i2} = -\frac{l_1 - \lambda_i}{l_2} v_{i1} \tag{7}$$

であり，v_i が規格化されているとすると，

$$1 = v_{i1}^2 + v_{i2}^2 = \frac{(l_1 - \lambda_i)^2 + l_2^2}{l_2^2} v_{i1}^2 \tag{8}$$

が成り立つことから，

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{(l_1 - \lambda_i)^2 + l_2^2}} \begin{pmatrix} l_2 \\ -(l_1 - \lambda_i) \end{pmatrix} \tag{9}$$

と書ける．これを用いると，$P_i \, (i = 1, 2)$ は

$$P_i = v_i^t v_i = \frac{1}{(l_1 - \lambda_i)^2 + l_2^2} \begin{pmatrix} l_2^2 & -l_2(l_1 - \lambda_i) \\ -l_2(l_1 - \lambda_i) & (l_1 - \lambda_i)^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

と分かる．固有値 λ_i は，固有方程式 (4) を解いて，

$$\lambda_1 = \frac{(l_1 + l_3) + \sqrt{(l_1 - l_3)^2 + 4l_2^2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{(l_1 + l_3) - \sqrt{(l_1 - l_3)^2 + 4l_2^2}}{2} \tag{11}$$

と分かるので，これを代入することで P_i を l_1, l_2, l_3 を用いて表せる．

(3)

射影演算子の性質を用いると，

$$\begin{aligned} e^{Lt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\lambda_1^n P_1 + \lambda_2^n P_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} \right) P_1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 t)^n}{n!} \right) P_2 \\ &= e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2 \end{aligned} \tag{12}$$

と計算できる．

(4)

$x(t) = e^{Lt} a$ とおくと，$x(0) = a$ が成り立ち，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{Lt} \right) a \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2 \right) a \\ &= (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} P_1 + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} P_2) a \\ &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2) a \\ &= L e^{Lt} a = L x(t) \end{aligned} \tag{13}$$

も成り立つ．

(5)

$$x(t) = (e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2)a \tag{14}$$

において，$t = T$ の場合（$x(T) = b$）を考えると，

$$b = (e^{\lambda_1 T}P_1 + e^{\lambda_2 T}P_2)a \tag{15}$$

となる．ここに前問 (2) で求めた P_i を代入し整理しようとしたが，式が煩雑になって l_1, l_2, l_3 について解けなかった．

(6)

$l_1 = l_3 = 0$ のとき，L の固有値は $\lambda_1 = l_2$, $\lambda_2 = -l_2$ となり，スペクトル分解は

$$L = \frac{l_2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-l_2}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

となる．よって，解は

$$\begin{aligned} x(t) = (e^{l_2 t}P_1 + e^{-l_2 t}P_2)a &= \left(\frac{e^{l_2 t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-l_2 t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)a \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(l_2 t) & \sinh(l_2 t) \\ \sinh(l_2 t) & \cosh(l_2 t) \end{pmatrix} a \end{aligned} \tag{17}$$

と書ける．ここに $x(T) = b$ を代入して成分表示すると，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(l_2 T) & \sinh(l_2 T) \\ \sinh(l_2 T) & \cosh(l_2 T) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\cosh(l_2 T) + a_2\sinh(l_2 T) \\ a_1\sinh(l_2 T) + a_2\cosh(l_2 T) \end{pmatrix} \tag{18}$$

となり，これより

$$b_1 + b_2 = (a_1 + a_2)e^{l_2 T} \tag{19}$$

$$b_1 - b_2 = (a_1 - a_2)e^{-l_2 T} \tag{20}$$

が成り立つ．よって，b_1, b_2 について

$$b_1^2 - b_2^2 = (b_1 + b_2)(b_1 - b_2) = (a_1 + a_2)(a_1 - a_2) = a_1^2 - a_2^2 \tag{21}$$

が成り立ち，l_2 を推定する式として，

$$l_2 = \begin{cases} \frac{1}{T}\log\left|\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}\right| & (a_1 \neq -a_2, \quad b_1 \neq -b_2) \\ \frac{1}{T}\log\left|\frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}\right| & (a_1 \neq a_2, \quad b_1 \neq b_2) \end{cases} \tag{22}$$

が得られる．これより，条件 (21) を満たすとき，l_2 は一意に定まる．

2

(1)

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -g, \qquad x(0) = h, \qquad \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{23}$$

を解くと，

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{24}$$

となる．時刻 $t = t_0$ の情報を代入すると

$$x(t_0) = h - \frac{1}{2}gt_0^2 \tag{25}$$

となり，これを整理すると

$$g = \frac{2(h - x(t_0))}{t_0^2} \tag{26}$$

が得られる．

(2)

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - g, \qquad x(0) = h, \qquad \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{27}$$

を解く．まず，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{kt}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + k\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)e^{kt} = -ge^{kt} \tag{28}$$

の両辺を時刻 $t = 0$ から t まで積分すると，初期条件から

$$e^{kt}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \int_0^t (-ge^{kt})\,\mathrm{d}t = -\frac{g}{k}(e^{kt} - 1) \tag{29}$$

すなわち

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) \tag{30}$$

が得られる．この両辺を再び時刻 $t = 0$ から t まで積分すると，初期条件から

$$x(t) - h = -\frac{g}{k}\int_0^t (1 - e^{-kt})\,\mathrm{d}t = -\frac{g}{k}\left[t + \frac{e^{-kt}}{k}\right]_0^t = -\frac{g}{k}\left(t + \frac{e^{-kt} - 1}{k}\right) \tag{31}$$

が得られる．ここに時刻 $t = t_0$ の情報を代入すると，

$$\begin{aligned} x(t_0) - h &= -\frac{g}{k}\left(t_0 + \frac{e^{-kt_0} - 1}{k}\right) \\ \frac{h - x(t_0)}{gt_0^2} &= \frac{1}{kt_0}\left(1 + \frac{e^{-kt_0} - 1}{kt_0}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

となる．そこで関数 f を

$$f(y) = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{e^{-y} - 1}{y}\right) = \frac{e^{-y} + y - 1}{y^2} \tag{33}$$

と定義すると，

$$\frac{h - x(t_0)}{gt_0^2} = f(kt_0) \tag{34}$$

と書ける．ここで

$$f'(y) = -\frac{(y+2)}{y^3}\left(e^{-y} + \frac{y-2}{y+2}\right) \tag{35}$$

であり，これは $y > 0$ で常に負であることが次のようにして示せる．

まず，$y \geq 2$ のとき $f'(y) < 0$ は分かる．次に，$0 < y < 2$ に対して

$$g(y) = y - \ln(y+2) + \ln(2-y) \tag{36}$$

を定義すると，

$$g'(y) = 1 - \frac{1}{2+y} + \frac{-1}{2-y} = -\frac{y^2}{4-y^2} < 0 \tag{37}$$

が成り立つので，$g(y)$ は単調に減少する．これと $g(0) = 0$ より，$g(y) < 0$ がいえる．したがって，$0 < y < 2$ に対して

$$y < \ln\left(\frac{2+y}{2-y}\right) \tag{38}$$

$$-y < \ln\left(\frac{2-y}{2+y}\right) \tag{39}$$

$$e^{-y} - \frac{2-y}{2+y} > 0 \tag{40}$$

がいえる．よって，$0 < y < 2$ に対して $f'(y) < 0$ が分かる．以上より，$y > 0$ で常に $f'(y) < 0$ である．

したがって，$y > 0$ で $f(y)$ は単調に減少するので，$y > 0$ で f の逆関数 f^{-1} を定義できる．これを用いると，

$$kt_0 = f^{-1}\left(\frac{h - x(t_0)}{gt_0^2}\right) \tag{41}$$

すなわち

$$k = \frac{1}{t_0} f^{-1}\left(\frac{h - x(t_0)}{gt_0^2}\right) \tag{42}$$

が成り立つ．

3

(1)

$$E(t) = \int_0^1 |u(x,t)|^2 dx \tag{43}$$

に対して，

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\int_0^1 u(x,t)u_t(x,t)dx \qquad (44) \\ &= 2\int_0^1 u(x,t)u_{xx}(x,t)dx = [2u(x,t)u_x(x,t)]_0^1 - 2\int_0^1 |u_x(x,t)|^2 dx \\ &= -2\int_0^1 |u_x(x,t)|^2 dx \qquad (45) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} E''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-2\int_0^1 |u_x(x,t)|^2 dx\right) \\ &= -4\int_0^1 u_x(x,t)u_{xt}(x,t)dx = -4\int_0^1 u_x(x,t)u_{xxx}(x,t)dx \\ &= -[4u_x(x,t)u_{xx}(x,t)]_0^1 + 4\int_0^1 |u_{xx}(x,t)|^2 dx = 4\int_0^1 |u_{xx}(x,t)|^2 dx \qquad (46) \end{aligned}$$

が分かる．ここで，

$$u_{xx}(0,t) = u_t(0,t) = 0, \qquad u_{xx}(1,t) = u_t(1,t) = 0, \tag{47}$$

を用いた．したがって，Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int f(x)dx \int g(x)dx \tag{48}$$

を $f(x) = w(x,t)$, $g(x) = 2w_x(x,t)$ の場合に適用すると，

$$E'(t)^2 \le E(t)E''(t) \tag{49}$$

が得られる．したがって，

$$E(t)E''(t) - E'(t)^2 \ge 0 \tag{50}$$

が成り立つ．

(2)

$t \geq 0$ に対して常に $E(t) \neq 0$ のとき，

$$(\log E(t))'' = \left(\frac{E'(t)}{E(t)}\right)' = \frac{E(t)E''(t) - E'(t)^2}{E(t)^2} \geq 0 \tag{51}$$

が成り立つので，$\log E(t)$ は上に凸である．したがって，$t = 0, t_0, T\ (0 < t_0 < T)$ における $E(t)$ の値に関して，凸不等式と $E(0) \leq M$ から

$$\log E(t_0) \leq \frac{(T - t_0)\log E(0) + t_0 \log E(T)}{T} \leq \frac{(T - t_0)\log M + t_0 \log E(T)}{T} \tag{52}$$

が成り立つ．よって，$E(t_0)$ は

$$E(t_0) \leq M^{(T-t_0)/T} E(T)^{t_0/T} = M\left(\frac{E(T)}{M}\right)^{t_0/T} \tag{53}$$

と上から抑えられる．

(3)

ある時刻 $0 \leq t' \leq T$ で $E(t') = 0$ となる場合，$\log E(t')$ が定義できないため，上の議論が成り立たない．この場合，$E'(t) \leq 0$ より $0 \leq E(T) \leq E(t') = 0$ より $E(T) = 0$ がいえる．そのため，時刻 $0 < t_0 < T$ に対し，$E(t_0)$ を $E(T)$ を用いて評価することはできないが，$E(0) \leq M$ を用いた評価 $E(t_0) \leq E(0) \leq M$ は成り立つ．

4

2 つの問題を考える．

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \mu(t)f(x), \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{54}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{55}$$

と

$$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{56}$$
$$v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t > 0, \qquad v(x,0) = f(x), \quad 0 < x < 1. \tag{57}$$

(1)

$v(x,t)$ をフーリエ変換して

$$v(x,t) = \int e^{ikx}\tilde{v}(k,t)\,\mathrm{d}k \tag{58}$$

と書くと，

$$0 = v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = \int e^{ikx}(\tilde{v}_t(k,t) + k^2\tilde{v}(k,t))\,\mathrm{d}k \tag{59}$$

が得られる．この両辺をフーリエ逆変換することで，

$$\tilde{v}_t(k,t) = -k^2\tilde{v}_{xx}(k,t) \tag{60}$$

が得られる．これを解くと，

$$\tilde{v}(k,t) = \tilde{v}(k,0)e^{-k^2t/2} \tag{61}$$

となる．したがって，式 (58) より

$$v(x,t) = \int e^{ikx}\tilde{v}(k,0)e^{-k^2t/2}\,\mathrm{d}k \tag{62}$$

がいえる．$t = 0$ の場合を考え，

$$v(x,0) = \int e^{ikx}\tilde{v}(k,0)\,\mathrm{d}k \tag{63}$$

を逆フーリエ変換すると，

$$\tilde{v}(k,0) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx}v(x,0)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{64}$$

が得られるので，これを式 (62) に代入すると，

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}\int e^{-iky}v(y,0)e^{-k^2t/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}k \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(y)\int e^{ik(x-y)}e^{-k^2t/2}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(y)\int \exp\left\{-t\left(k - \frac{i(x-y)}{2t}\right)^2 - \frac{(x-y)^2}{4t}\right\}\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{\frac{1}{4\pi t}}\int f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{65}$$

が分かる．

(2)

$$u(x,t) = \int_0^t \mu(s)v(x,t-s)ds \tag{66}$$

と書けることを示す．そのために，右辺を $\tilde{u}(x,t)$ とし，$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$ を示す．

まず，$v(x,0)=0$, $v(0,t)=v(1,t)=0$ を用いると，

$$\tilde{u}(x,0)=0, \qquad \tilde{u}(0,t)=\tilde{u}(1,t)=0 \tag{67}$$

が分かる．次に，$v(x,0)=f(x)$ を用いると

$$\partial_t \tilde{u}(x,t)=\mu(t)v(x,0)+\int_0^t \mu(s)\partial_t v(x,t-s)ds=\mu(t)f(x)+\int_0^t \mu(s)\partial_t v(x,t-s)ds \tag{68}$$

が分かり，

$$\partial_{xx}\tilde{u}(x,t)=\int_0^t \mu(s)\partial_{xx}v(x,t-s)ds \tag{69}$$

が成り立つので，$\partial_t v(x,t-s)=\partial_{xx}v(x,t-s)$ より，

$$\partial_t \tilde{u}(x,t)=\partial_{xx}\tilde{u}(x,t)+\mu(t)f(x) \tag{70}$$

がいえる．以上より，$\tilde{u}(x,t)$ は $u(x,t)$ に関する問題の解の一つである．加えて，$w(x,t)=u(x,t)-\tilde{u}(x,t)$ とおくと，これは

$$w_t(x,t)=w_{xx}(x,t), \qquad 0<x<1,\ t>0 \tag{71}$$

$$w(0,t)=w(1,t)=0, \quad t>0, \qquad w(x,0)=0, \quad 0<x<1. \tag{72}$$

の解である．ここで，

$$E(t)=\int_0^1 |w(x,t)|^2 dx \tag{73}$$

を定義すると，$E(t)\geq 0$ である．一方

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=-2\int_0^1 |w_x(x,t)|^2 dx \leq 0 \tag{74}$$

と分かるので，$E(t)$ は単調非増加である．いま

$$E(t)\leq E(0)=0 \tag{75}$$

より $E(t)=0$，すなわち任意の $0<x<1, t>0$ に対して $w(x,t)=0$ がいえる．したがって，$u(x,t)=\tilde{u}(x,t)$ である．

(3)