

# 物理学実験Ⅱレポート (パルス技術 2Ab)

05-211525 齋藤駿一

共同実験者：菅原優生

2021 年 11 月 17 日

## 1 実験 1

まずパルス発生器で発生させたパルスを GATE & Delay Generator で整形し，可変減衰器で適切に減衰させ，その波形をオシロスコープで確認できるようにセットアップを行った．オシロスコープに繋がる同軸ケーブルには，その特性インピーダンスに等しい  $50\Omega$  の終端抵抗をつけた．

### 1.1 課題 1.1

#### 1.1.1 手法と結果

まずパルス発生器のパルスのレートを  $100\text{ kHz}$  に設定した．次に GATE & Delay Generator の遅延時間を 0 に，パルス幅を  $1\mu\text{s}$  に設定した．最後に可変減衰器で減衰度を調整し，オシロスコープ上でパルスの波高が  $+1.0\text{ V}$  となるようにした．その結果図 1 のような波形が得られた．

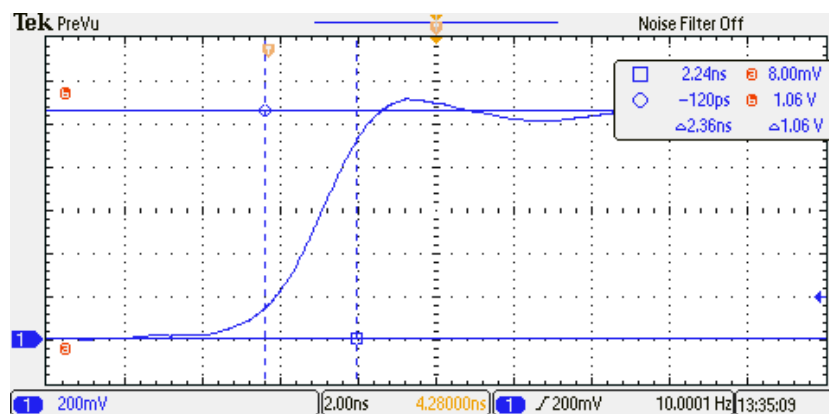


図 1 矩形波パルス (幅  $1\mu\text{s}$ ，波高  $+1.0\text{ V}$ ) の立ち上がりの様子

ここでは「パルスの高さ」を，パルスが安定して平坦になったところでの波高と定義する．また「立ち上がり時間」を，波高がパルスの高さの 10% から 90% になるのにかかる時間と定義する．

まず得られたパルスの立ち上がり時間をディスプレイ上で測定した値から求める．オシロスコープのカーソルを操作して，図 1 に示したパルスは 8.00 mV から 1.06 V に立ち上がっていることを確認した．よって波高がパルスの高さの 10% に達したときの電位は約 113 mV，90% に達したときの電位は約 955 mV と計算できる．ただしカーソルは離散的に動くので，正確にこれらの電位に達した時刻を測定することは難しかった．そこでこれらに最も近い電位 112 mV，952 mV に達したときの時刻を確認したところ，それぞれ  $-360$  ps， $2.36$  ns であった．よってパルスの立ち上がり時間はその差をとって約  $2.72$  ns と分かる．

### 1.1.2 考察

ディスプレイに表示される波形は，実際にはオシロスコープ自身の立ち上がり時間の寄与を受ける，オシロスコープの周波数帯域  $f_{\text{osc}} = 200$  MHz から，オシロスコープによる立ち上がり時間は

$$t_{\text{osc}} = \frac{350 \text{ ns MHz}^{-1}}{f_{\text{osc}}} = 1.75 \text{ ns} \quad (1)$$

となる．これをもとに先ほど求めた立ち上がり時間  $t_{\text{disp}} = 2.72$  ns を補正すると，実際のパルスの立ち上がり時間は

$$t_{\text{pulse}} = \sqrt{t_{\text{disp}}^2 - t_{\text{osc}}^2} = 2.08 \text{ ns} \quad (2)$$

と求まる．

## 1.2 課題 1.2

課題 1.1 で用いたセットアップを次のように変更した．まずオシロスコープの CH1 に繋がる同軸ケーブルの終端抵抗を取り外し，代わりに 1 m(メジャーを用いて長さを正確に測定した結果 101.7 cm と分かった．) の同軸ケーブルを取り付けた．そしてケーブルの反対側をオシロスコープの CH2 に接続し，そこに  $50 \Omega$  の終端抵抗を取り付けた．またオシロスコープのディスプレイ上に CH2 の信号が表示されるようにした．その結果図 2 のように，CH1 と似た波形が CH2 で遅れて立ち上がることが分かった．また CH1，CH2 のそれぞれの波形で立ち上がった直後に電圧値が極大をとる時刻にカーソルを合わせ，その差を確認すると  $5.28$  ns と分かった．

次に CH1 と CH2 の間のケーブルの長さを 5 m(メジャーを用いて長さを正確に測定した結果 501.9 cm と分かった．) に変更して同じ測定を行った．その結果図 3 が得られ，立ち上がりの時刻の差は  $26.8$  ns と分かった．

これより同軸ケーブルを伝わるパルスの速度は

$$v = \frac{501.9 \text{ cm} - 101.7 \text{ cm}}{26.8 \text{ ns} - 5.28 \text{ ns}} = 18.6 \text{ cm ns}^{-1} = 1.86 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (3)$$

と求まる．これは真空中の光速の約 62% である．

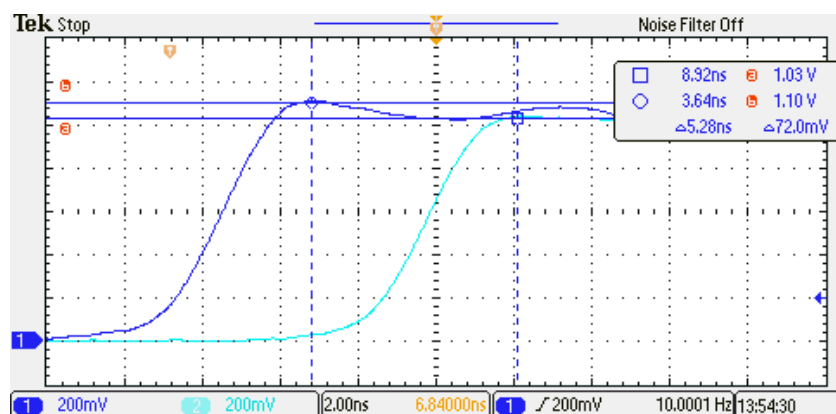


図 2 直接オシロスコープに入ったパルス (青色) と、そこからさらに長さ 1 m の同軸ケーブルを通してオシロスコープに入ったパルス (水色) の波形

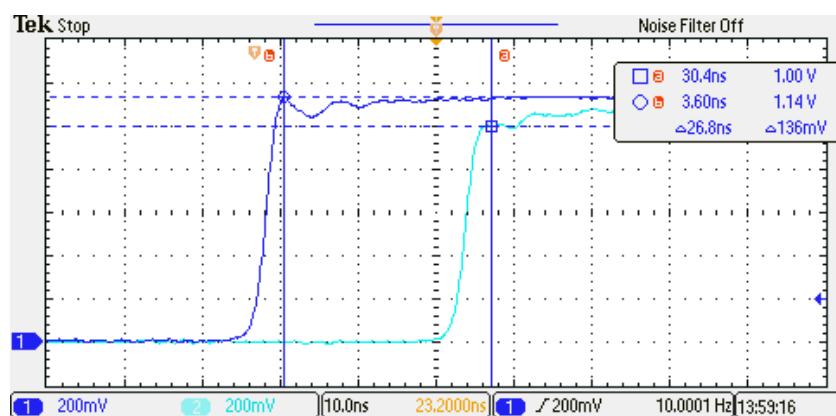


図 3 直接オシロスコープに入ったパルス (青色) と、そこからさらに長さ 5 m の同軸ケーブルを通してオシロスコープに入ったパルス (水色) の波形

### 1.3 課題 1.3

課題 1.2 のセットアップ (CH1 と CH2 の間のケーブルの長さを 5 m としたもの) を引き続き用い、CH2 に取り付けた終端抵抗を他のものに変えてオシロスコープの波形を観察した。

#### 1.3.1 終端抵抗を短絡させた場合 ( $R = 0$ )

終端抵抗を短絡させると図 4 のような波形が得られた。この場合パルスがケーブル終端に達すると符号が逆転した反射波が生じる。そのため速度  $v$  で進むパルスが長さ  $L$  のケーブルを往復するのにかかる時間  $2L/v$  だけ経過すると、ケーブル直前の位置で入力のパルスと反射したパルスが打ち消し合う。その結果として、ケーブル直前では時刻 0 でパルスが立ち上がり、時刻  $2L/v$  でパルスが反射波に打ち消され、電圧値が 0 に戻ったと考える。

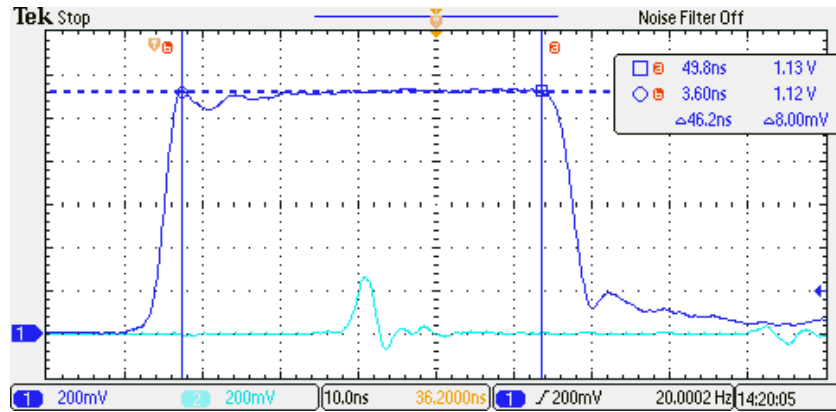


図4 ケーブル終端を短絡させた場合の波形 ( $R = 0$ )。青色は5 m のケーブル直前の波形，水色はケーブル直後の波形。

### 1.3.2 終端に (同軸ケーブルの特性インピーダンスとは異なる) 有限の抵抗を繋いだ場合 ( $R = 83 \Omega, 100 \Omega$ )

同軸ケーブルの特性インピーダンス ( $50 \Omega$ ) と異なる抵抗を終端に繋いだところ， $R = 83 \Omega$  では図5， $R = 100 \Omega$  では図6 のような波形が得られた。

まず同軸ケーブルの特性インピーダンスを  $Z_0$ ，終端抵抗のインピーダンスを  $Z_L$  とおくと，終端での反射係数は

$$r = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (4)$$

と与えられる。今回の終端抵抗はいずれも  $Z_0 = 50 \Omega$  より大きいので， $r > 0$ ，つまり反射波は同符号となる。その結果として，ケーブル直前では時刻0でパルスが立ち上がり，時刻  $2L/v$  でパルスに反射波が加わってさらに電圧値が上昇したと考える。

今回は実験していないが，逆に  $Z_0 = 50 \Omega$  よりも小さい終端抵抗を繋げた場合， $r < 0$  となるので時刻  $2L/v$  で電圧値は下がると考える。

### 1.3.3 ケーブル終端に何も取り付けなかった場合 ( $R = \infty \Omega$ )

ケーブル終端に何も取り付けなかった場合，図7のような波形が得られた。ケーブル終端に何も取り付けない場合，ケーブル終端で同軸ケーブルの芯線と外部導線の間で電荷の移動がないので，入射波とまったく同じ反射波が生じる。その結果として，ケーブル直前では時刻0にパルスが立ち上がり，時刻  $2L/v$  でパルスに反射波が加わって電圧値が2倍になったと考える。

### 1.3.4 ケーブル終端にコンデンサ，コイルを取り付けた場合

ケーブル終端にコンデンサを取り付けた場合図8，コイルを取り付けた場合図9のような波形が得られた。これらについて取り付けた素子のインピーダンスから反射係数を求めることもできるが，ここではそれはせず定性的な考察を行う。コンデンサは電流が流れ始めるときは抵抗が0のよ

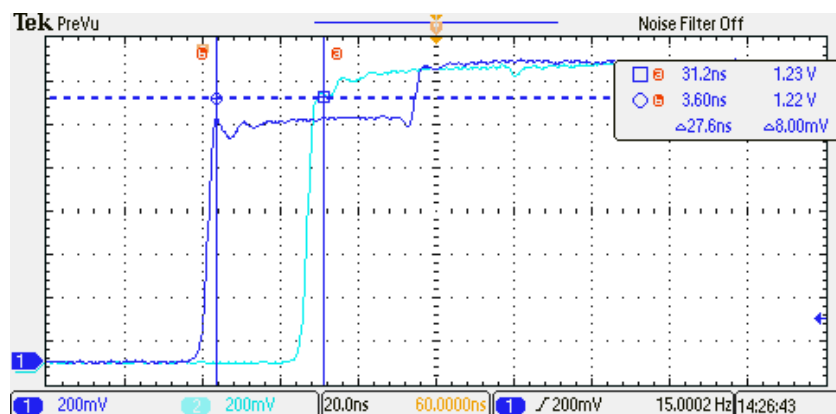


図 5 ケーブル終端に抵抗 ( $83.37\ \Omega$ ) を取り付けた場合の波形。青色は 5 m のケーブル直前の波形、水色はケーブル直後の波形。

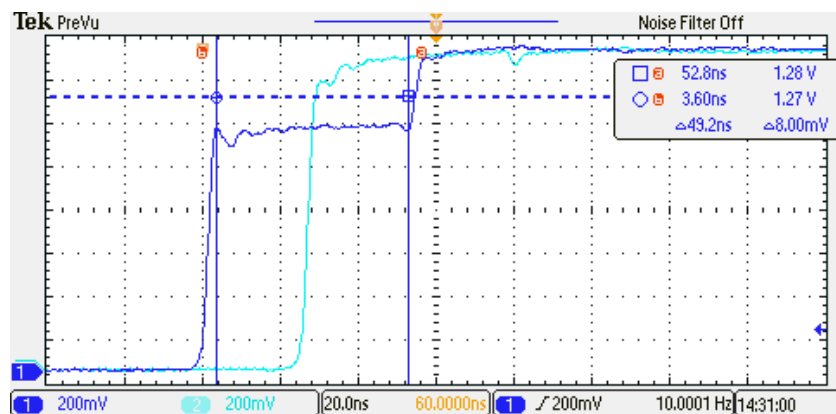


図 6 ケーブル終端に抵抗 ( $100.24\ \Omega$ ) を取り付けた場合の波形。青色は 5 m のケーブル直前の波形、水色はケーブル直後の波形。

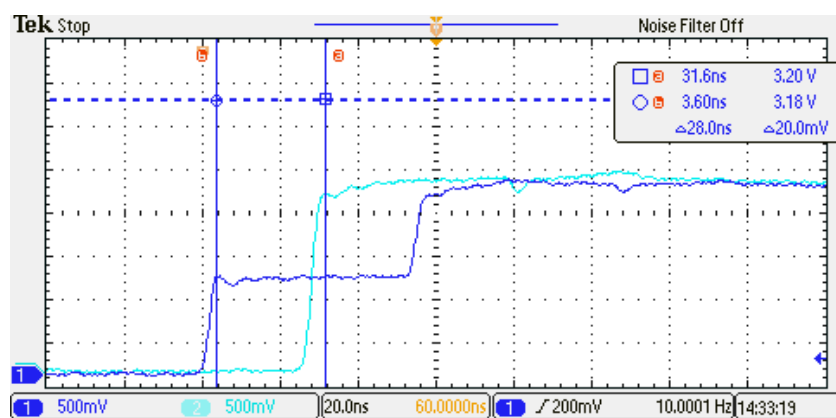


図 7 ケーブル終端に何も取り付けなかった場合の波形 ( $\infty\ \Omega$ )。青色は 5 m のケーブル直前の波形、水色はケーブル直後の波形。

うな振る舞いをし、定常状態では抵抗が  $\infty$  のような振る舞いをすることが知られている。よって今回の場合の反射波も、最初は  $R = 0$  のときと同じく入射波を打ち消すが、徐々に  $R = \infty$  のときのように入射波を 2 倍に増幅させるようになっていくと考える。その結果として、ケーブル直前では時刻 0 でパルスが立ち上がり、時刻  $2L/v$  で一度反射波により電圧値が 0 に近づくが、その後電圧値が上昇してもとのパルスの 2 倍の高さに近づいていくと考える。

一方コイルは電流が流れ始めるときは抵抗が  $\infty$  のような振る舞いをし、定常状態では抵抗が 0 のような振る舞いをすることが知られている。その結果としてコンデンサのときとは逆に、時刻  $2L/v$  で反射波により電圧値が上昇するが、その後電圧値が下降してもとのパルスが打ち消されると考える。

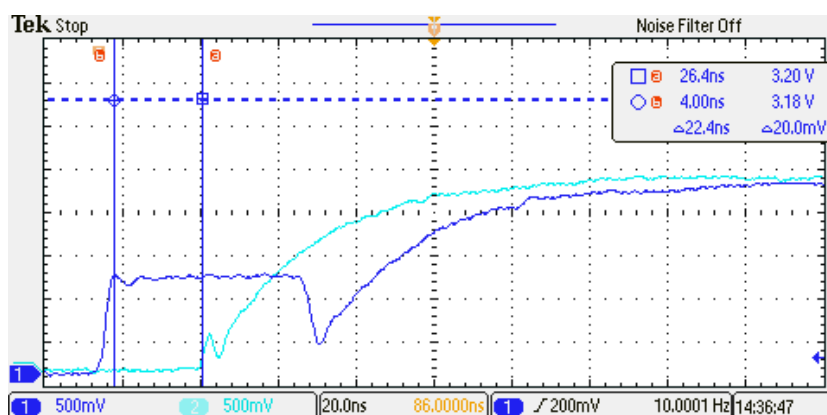


図 8 ケーブル終端にコンデンサ (492.9 pF) を取り付けた場合の波形。青色は 5 m のケーブル直前の波形、水色はケーブル直後の波形。

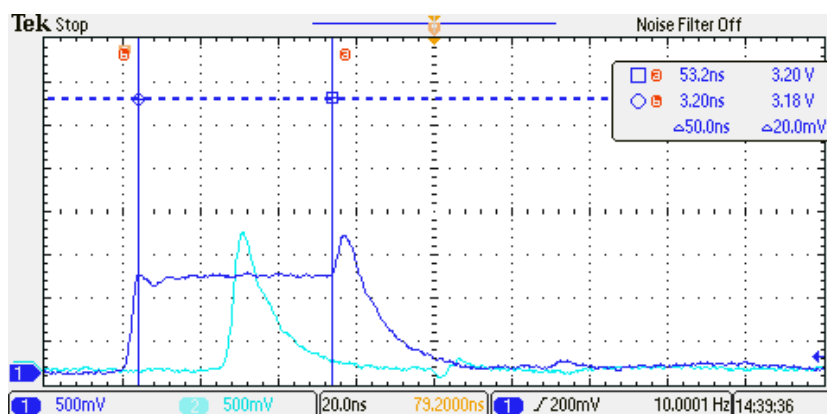


図 9 ケーブル終端にコイル (0.39  $\mu$ H) を取り付けた場合の波形。青色は 5 m のケーブル直前の波形、水色はケーブル直後の波形。

## 2 実験 2

プラスチックシンチレータ用光電子増倍管 (PMT) 信号 A-G のうち A をオシロスコープの CH1 に繋げた。オシロスコープ側には  $50\ \Omega$  の終端抵抗を取り付けた。次に高压電源の電圧出力を電圧分配器を通してそれぞれの光電子増倍管の  $-HV$  に印加した。このとき徐々に電圧を上げ、最終的に  $-2000\ \text{V}$  の電圧をかけた。

続いて NaI シンチレータ用光電子増倍管信号をオシロスコープの CH2 に繋げた。先ほどと同様ターミネートも行った。その後この光電子増倍管に高压電圧を印加した。このとき  $10\ \text{V}$  の出力設定つまみを回して徐々に電圧を上げ、 $2000\ \text{V}$  の電圧をかけた。

### 2.1 課題 2.1

まずシンチレータ付近に Cs 線源を置きオシロスコープ上の波形を観察したところ、プラスチックシンチレータでは図 10, NaI シンチレータでは図 11 のような波形が得られた。

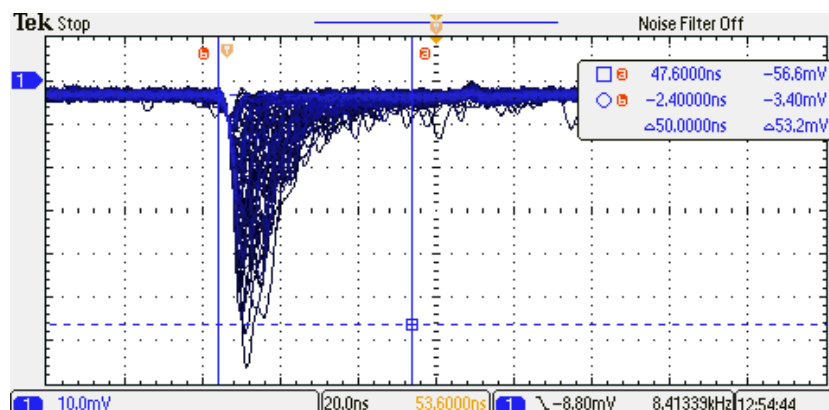


図 10 Cs 線源近くのプラスチックシンチレータからの波形

次に Na 線源を置いたところ、プラスチックシンチレータでは図 12, NaI シンチレータでは図 13 のような波形が得られた。

### 2.2 課題 2.2

課題 2.1 の結果をもとに、各シンチレータのエネルギー較正を行った。まず課題 2.1 において NaI シンチレータを通した波形では光電吸収ピークが見える。そのためオシロスコープに表示された電圧はそのまま線源から放出された  $\gamma$  線のエネルギーに一致する。一方プラスチックシンチレータを通した波形では光電吸収ピークは見え、コンプトンエッジが見える。そのためオシロスコープ上の電圧は線源から放出された  $\gamma$  線のエネルギーより小さなエネルギー値に対応する、

各シンチレータに対して得られたデータをもとに較正を行った。エネルギー  $E(\text{MeV})$  の入力を

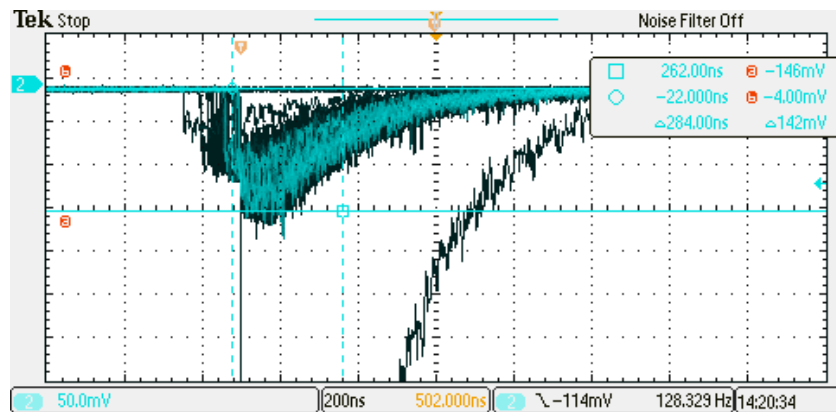


図 11 Cs 線源近くの NaI シンチレータからの波形

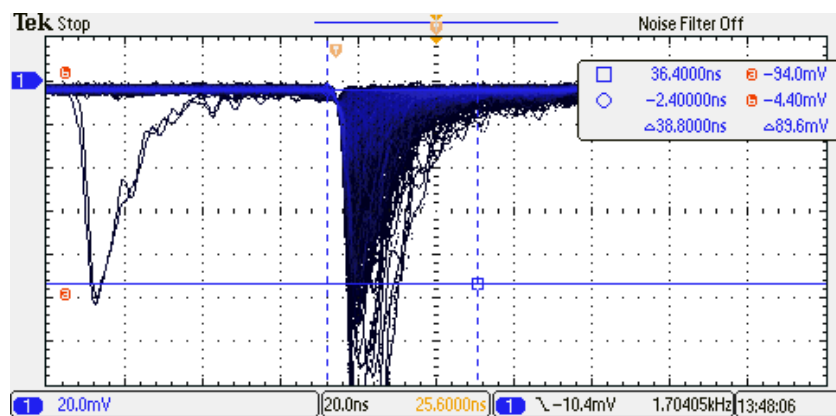


図 12 Na 線源近くのプラスチックシンチレータからの波形

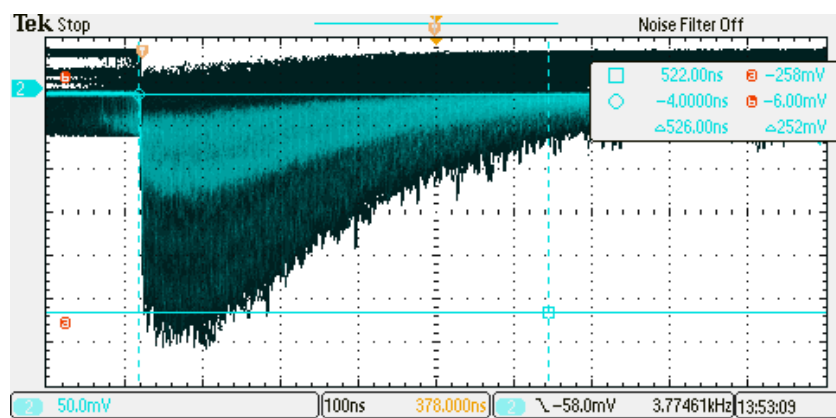


図 13 Na 線源近くの NaI シンチレータからの波形



表 1 エネルギー較正に用いた値 (1)

線源	プラスチックシンチレータ		NaI シンチレータ	
	エネルギー (MeV)	電圧値 (mV)	エネルギー (MeV)	電圧値 (mV)
Cs	0.478	$50 \pm 10$	0.662	$130 \pm 10$
Na	0.341	$30 \pm 7$	0.511	$118 \pm 6$
Na	1.062	$83 \pm 7$	1.275	$250 \pm 10$

プラスチックシンチレータに通すと、オシロスコープ上で電圧  $V_{\text{pla}}(\text{mV})$  の高さのパルスとして表示されるとする。また NaI シンチレータに通すとそれが電圧  $V_{\text{NaI}}(\text{mV})$  の高さのパルスになるとする。この各々に対して、実験結果から

$$V_i = a_i E + b_i \quad (i = \text{pla}, \text{NaI}) \quad (5)$$

という線形フィッティングを行った。その結果

$$a_{\text{pla}} = 70 \pm 11 \quad (6)$$

$$b_{\text{pla}} = 9 \pm 8 \quad (7)$$

$$a_{\text{NaI}} = 174 \pm 19 \quad (8)$$

$$b_{\text{NaI}} = 56 \pm 15 \quad (9)$$

が得られ、図示するとプラスチックシンチレータの場合は図 14, NaI シンチレータの場合は図 15 のようになった。

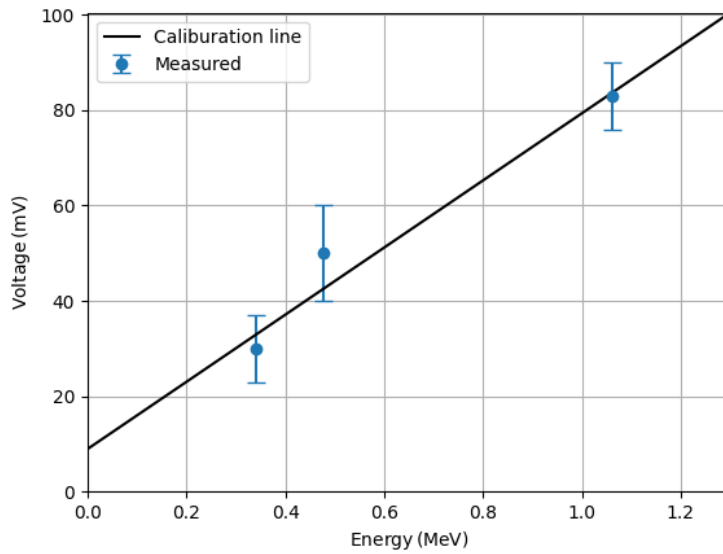


図 14 プラスチックシンチレータの較正直線 :  $V_{\text{pla}}(\text{mV}) = (70 \pm 11)E(\text{MeV}) + (9 \pm 8)$

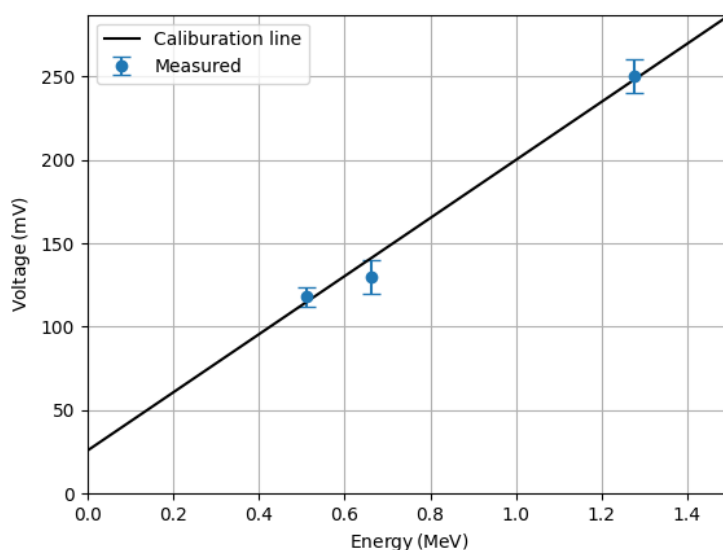


図 15 NaI シンチレータの較正直線 :  $V_{\text{NaI}}(\text{mV}) = (174 \pm 19)E(\text{MeV}) + (56 \pm 15)$

## 2.3 課題 2.3

$\mu$  粒子がプラスチックシンチレータに入射したときエネルギー損失は 2.01 MeV であり, NaI シンチレータに入射したときエネルギー損失は 6.08 MeV である. よって課題 2.2 で導いた較正直線から,  $\mu$  粒子はプラスチックシンチレータを通過すると  $(150 \pm 20)$  mV のパルスを生み, NaI シンチレータを通過すると  $(1080 \pm 110)$  mV のパルスを生むと計算できる.

## 2.4 課題 2.4

課題 2.1 で扱った系から線源を取り除き,  $\mu$  粒子を測定した. このとき課題 2.3 の計算結果が  $\mu$  粒子のエネルギーの平均値を与えることを参考にした. ただし  $\mu$  粒子のエネルギー損失は Landau 分布に従っており, 平均値の半分程度のエネルギーを損失することもあるので, トリガーは求めた平均値の半分以下の位置にかけた. その結果プラスチックシンチレータでは図 16 のような波形が, NaI シンチレータでは図 17 のような波形が見られた. プラスチックシンチレータでは波形の現れる頻度は  $(50 \pm 20)$  Hz であり, 理論値の 20 Hz より高かった. これはトリガレベルが約 70 mV だったため,  $\mu$  粒子以外の放射線による波形が混じったからと考える. また NaI シンチレータでは波形の現れる頻度は 1 分に 1 回程度であり, これは理論値  $1.27 \text{ min}^{-1}$  と整合する.

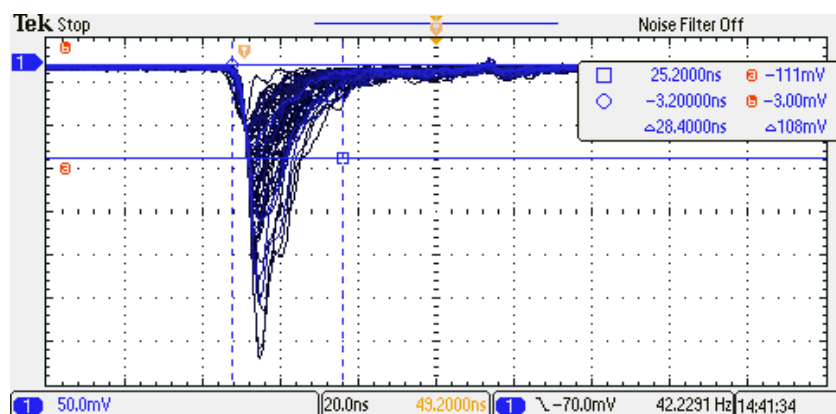


図 16 線源を離れたときのプラスチックシンチレータからの波形。  $\mu$  粒子によるものとする。

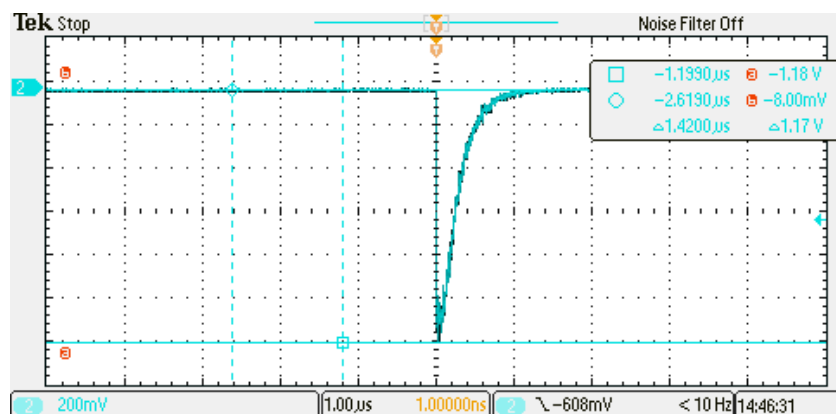


図 17 線源を離れたときの NaI シンチレータからの波形。  $\mu$  粒子によるものとする。

### 3 課題 3

ここではディスクリミネータ回路，コインシデンス回路を用いて，宇宙線中での荷電粒子の強度とプラスチックシンチレータ中でのエネルギー損失を測定した。

#### 3.1 課題 3.1

##### 3.1.1 方法と結果

まずディスクリミネータのスレッシュホールド電圧を最低まで下げ，コインシデンス回路でシンチレータ B に対応するものを OFF にした (以後この操作をシンチレータ A のセルフトリガと呼ぶ)。つまりシンチレータ A で起こったエネルギー損失を単純に記録した。このときシンチレータ付近に Na 線源を置いて数分待つと，エネルギー損失の実験結果 (ヒストグラム) は図 18 のようになった。また Cs 線源に取り替えて同様の測定を行うと図 19 のようになった。

このヒストグラムにおいてコンプトンエッジは頻度が下がり始める部分にあると考え，コンプト

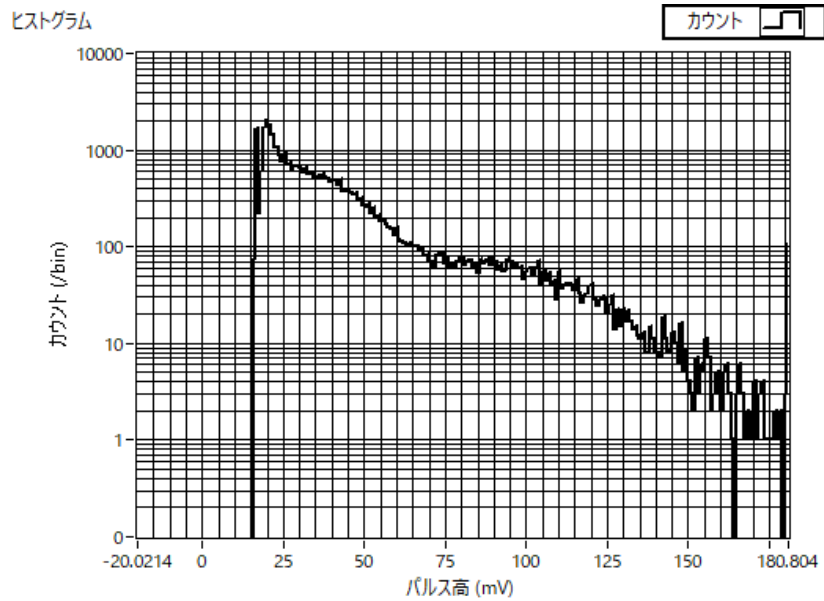


図 18 Na 線源を置いたときの信号のヒストグラム

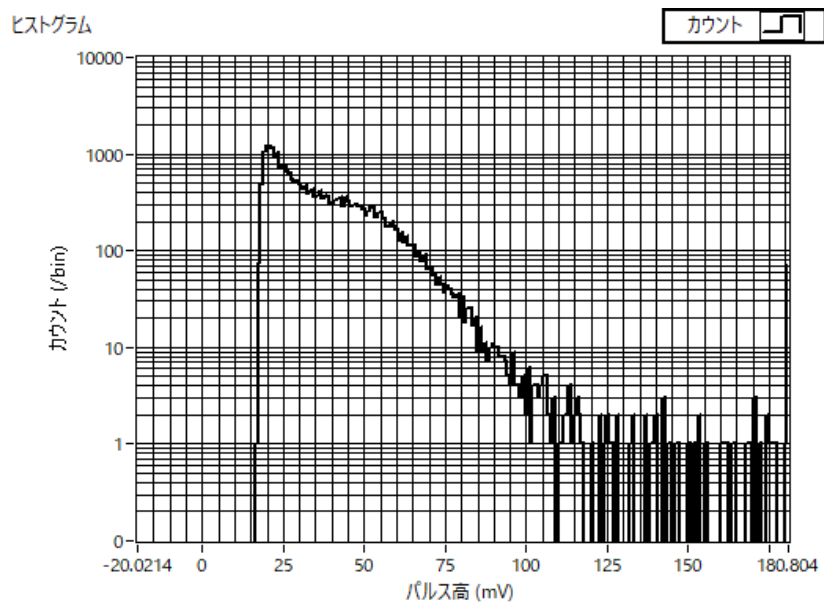


図 19 Cs 線源を置いたときの信号のヒストグラム

表 2 エネルギー較正に用いた値 (2)

線源	エネルギー (MeV)	電圧値 (mV)
Cs	0.478	$50 \pm 5$
Na	0.341	$40 \pm 5$
Na	1.062	$110 \pm 5$

ンエッジの電圧値を表 2 のように求めた．これをもとに較正を行うと

$$V_{\text{pla}}(\text{mV}) = (99 \pm 5)E(\text{MeV}) + (5 \pm 3) \quad (10)$$

と求まった (図 20)．以降では係数の誤差を切り捨てた式を較正に用い， $E$  の比例係数の誤差の割合がおよそ 1/20 であることから誤差を見積もり，それをもとに有効数字を決めた．

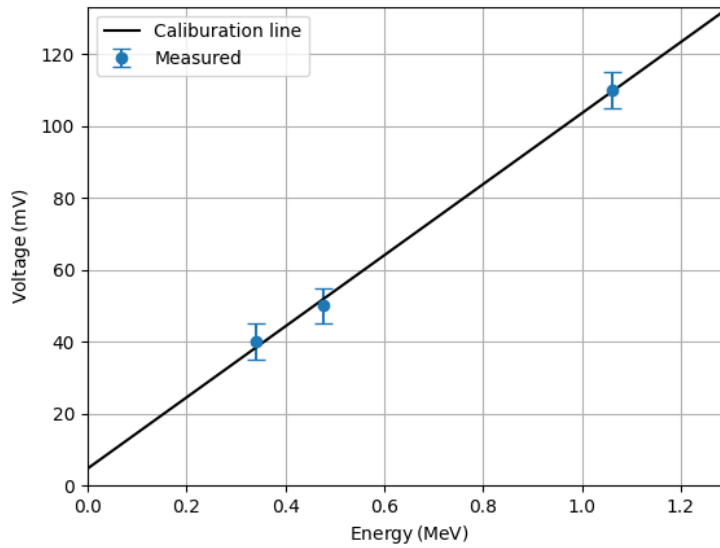


図 20 ヒストグラムを参照したエネルギー較正

次に線源を取り除き，宇宙線のエネルギー損失を測定した．まず先ほどと同じくスレッシュホールド電圧を最低にし，A のセルフトリガを行って測定すると，図 21 のようになった．次にコインシデンス回路でシンチレータ B に対応するものを ON にして測定すると，図 22 のようになった．

前者は単にシンチレータ A で起こったエネルギー損失の分布だが，後者はそのうちシンチレータ A, B で同時に起こったエネルギー損失を取り出した分布である． $\mu$  粒子が入射するとシンチレータ A, B で同時にエネルギー損失が起こるので，得られた二つの図を比較することで  $\mu$  粒子のエネルギー損失に対応する電圧が読み取れる．この読み取りをもとにスレッシュホールド電圧を 110 mV に上げ，コインシデンス条件の下で測定を行うと図 23 のようになった．

エネルギー損失の結果から，最頻値は 2.0 MeV，平均値は 2.6 MeV と求まった．この平均値は Bethe-Bloch の計算から導かれる 2.01 MeV よりも大きな値である．

### 3.1.2 考察

次にこの結果を考察する．まず平均値が最頻値より大きいことから，エネルギー損失の分布は高エネルギー側に偏っているといえる．これはエネルギー損失が Landau 分布に従っており，高エネルギー側の裾野が広いためと考える．

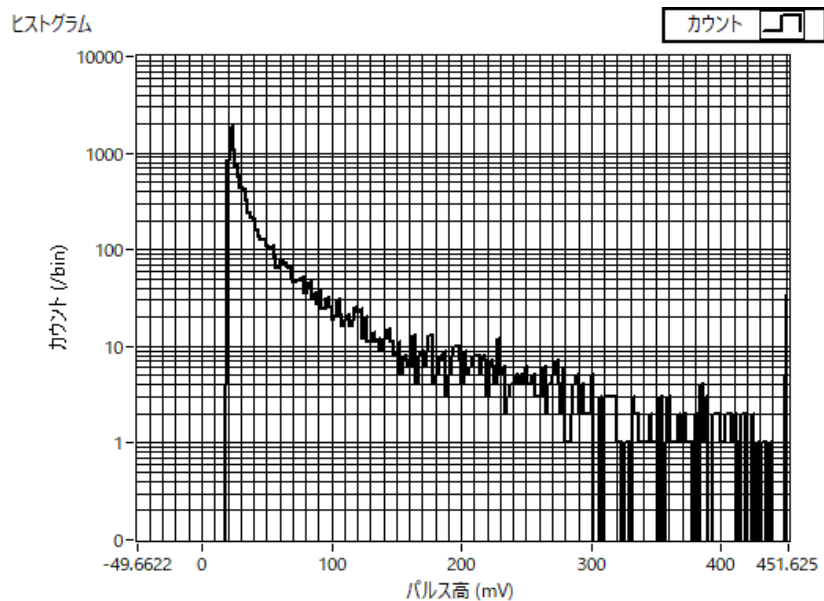


図 21 宇宙線のエネルギー損失を示すヒストグラム．シンチレータ A のセルフトリガをかけて測定した．

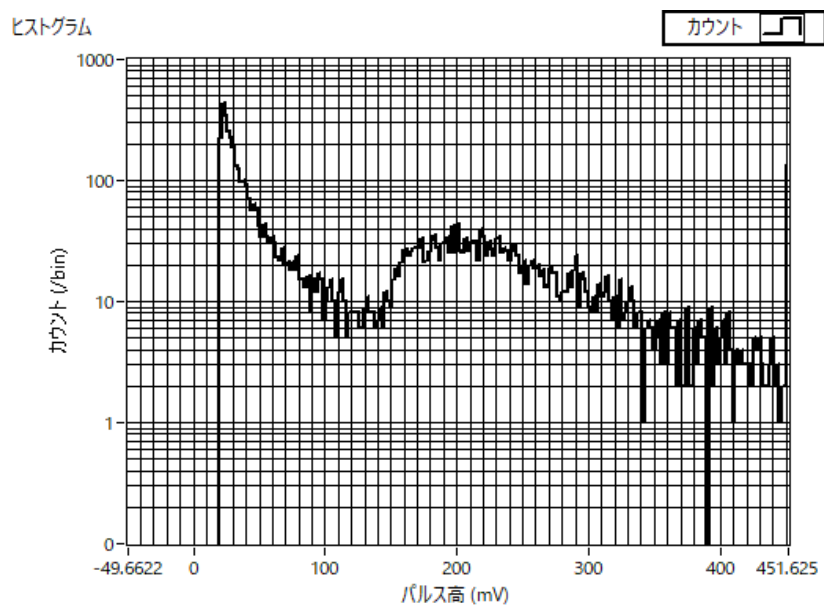


図 22 宇宙線のエネルギー損失を示すヒストグラム．コインシデンス条件を課して測定した．

一方で平均値が Bethe-Bloch の計算からずれた原因を考察する．まず較正直線の誤差を考えると、較正直線の傾きに 5% の誤差があることから、それをもとに求めた平均値 2.6 MeV には 0.1 MeV の誤差がある．これは Bethe-Bloch の計算からのずれよりも小さく、このずれの説明にはならない．また今回の実験結果では平均値 2.6 MeV よりも最頻値 2.0 MeV の方が Bethe-Bloch の計算 2.01 MeV に近い．先ほどと同様に誤差を考えると最頻値の誤差も 0.1 MeV となるので、最頻値は Bethe-Bloch の計算と一致するといえる．しかし結局平均値と Bethe-Bloch の計算の差異

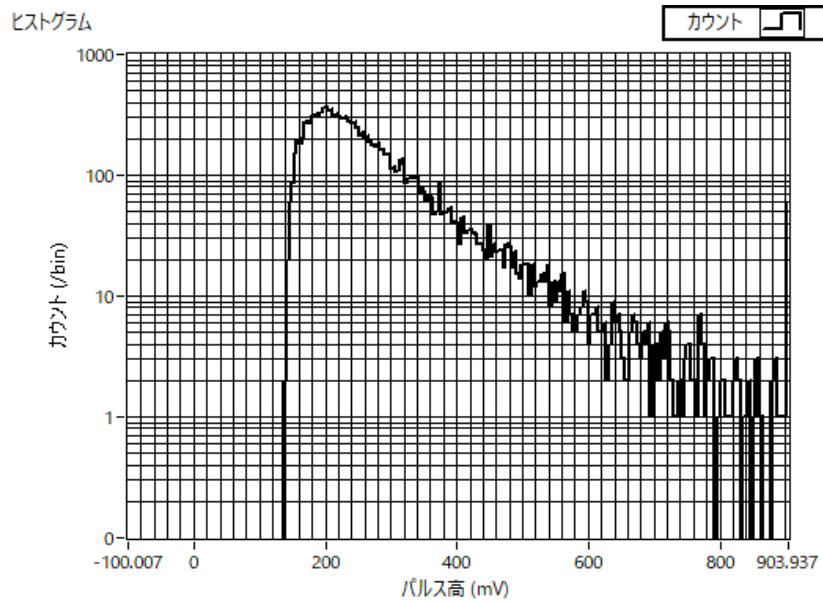


図 23 宇宙線のエネルギー損失を示すヒストグラム．スレッシュホールド電圧を 110 mV とし、コ  
インシデンスを課した．

は説明できなかった．

## 3.2 課題 3.2

### 3.2.1 測定結果

また課題 3.1 で行った宇宙線のエネルギー損失の測定と同時に、各シンチレータに繋がったディ  
スクリミネータ回路とコインシデンス回路から発せられたパルスの総数をカウントした．その結  
果 1434.4s の間にシンチレータ A に繋がったディスクリミネータ回路から 24,970 回、シンチレー  
タ B に繋がったディスクリミネータ回路から 17,935,055 回、コインシデンス回路から 14,531 回  
パルスが出たことが分かった．またシンチレータ A,B のジオメトリーも測定した．その結果シン  
チレータは一辺  $L = 35.5 \text{ cm}$  の正方形で、シンチレータ A,B 間の距離は  $d = 8.0 \text{ cm}$  と分かった．

### 3.2.2 宇宙線のフラックスと計測率の関係

これをもとに宇宙線のフラックスを求めた．下側のシンチレータ上に点 P およびそのまわりの  
微小面積  $dS$  をとり、上側のシンチレータ上に点 P' およびそのまわりの微小面積  $dS'$  をとる．こ  
のとき単位時間あたりに  $dS'$  から  $dS$  へと貫いていく宇宙線の総数を求める．シンチレータに垂直  
な上向きの方に  $z$  軸をとり、直線 PP' と  $z$  軸のなす角を  $\theta$  とする．まず点 P と点 P' の間の距  
離を  $r$  とすると、点 P から  $dS'$  を見こむ立体角は  $dS' \cos \theta / r^2$  である．よって宇宙線のフラッ  
クスを  $I$  とおくと、単位時間あたりに  $dS'$  を通過する宇宙線の総数は  $I dS' \cos \theta / r^2$  となる．一方  
でこの宇宙線が  $dS$  に入射するとき、宇宙線は  $dS$  を宇宙線の入射方向に傾けた微小面積  $dS \cos \theta$  を

通過する．よって結局  $dS'$  を経由して  $dS$  へ単位時間あたりに到達する宇宙線の総数  $dN/dt$  は

$$\frac{dN}{dt} = IdS' \frac{\cos \theta}{r^2} dS \cos \theta = \frac{I \cos^2 \theta}{r^2} dS dS' \quad (11)$$

となる．よってある計測時間  $t$  の間に上側のシンチレータを経由して下側のシンチレータに到達する宇宙線の総数  $N$  は

$$\frac{N}{t} = \iint \frac{I \cos^2 \theta}{r^2} dS dS' \quad (12)$$

と計算できる．ただし積分は上下のシンチレータの全域にわたって行う．また上下のシンチレータにそれぞれ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  の座標を入れると，シンチレータの間隔を  $d$  として

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + d^2}} \quad (13)$$

および

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + d^2} \quad (14)$$

がいえる．よって式 (12) は

$$\frac{N}{t} = \iiint \frac{Id^2}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + d^2)^2} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (15)$$

となる．

### 3.2.3 宇宙線のフラックスが方向によらない場合の考察

まず宇宙線のフラックスが方向によらないと仮定する．このとき式 (15) より，コインシデンス回路から出たパルスの総数  $N$ ，計測時間  $t$ ，宇宙線のフラックス  $I = I_0$  の間に

$$\frac{N}{t} = I_0 \iiint \frac{d^2}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + d^2)^2} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (16)$$

が成り立つ．ただし積分は  $0 \leq x_i, y_i \leq 35.5 \text{ cm}$  ( $i = 1, 2$ ) の区間でとる．実験で求めた値を代入し積分を刻み幅  $0.1 \text{ cm}$  で数値計算すると，宇宙線のフラックス  $I_0$  は  $3.9 \times 10^{-3} \text{ /sr/cm}^2/\text{s}$  と求まった．

## 3.3 課題 3.3

次に宇宙線のフラックスが  $I = I'_0 \cos^2 \theta$  の形で与えられると考える．このとき式 (16) に代わって

$$\frac{N}{t} = I_0 \iiint \frac{d^4}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + d^2)^3} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \quad (17)$$

が成り立つ．課題 3.2 と同様に積分を刻み幅  $0.1 \text{ cm}$  で数値計算すると，宇宙線のフラックス  $I'_0$  は  $6.5 \times 10^{-3} \text{ /sr/cm}^2/\text{s}$  と求まった．

参考文献 [2] によれば地表において垂直方向から来る運動量  $1 \text{ GeV}/c$  以上の  $\mu$  粒子のフラックスは約  $7 \times 10^{-3} \text{ /sr/cm}^2/\text{s}$  である．課題 3.2 で計算した値よりもここで計算した値の方がこの文献値に近い．よって実際には  $\mu$  粒子のフラックスは  $I = I'_0 \cos^2 \theta$  の形で与えられると考えられる．



### 3.4 課題 3.4

これまではコインシデンス回路からパルスが出力された場合シンチレータ A,B を同時にある粒子が通過したと見なした．ところが偶然二つの粒子が別々にシンチレータ A,B に入射したことで生じた無関係なパルスによってコインシデンス回路からパルスが出力されることもあり得る．そこでここではその確率を見積もった．

まず 1434.4 s の間にシンチレータ A に繋がったディスクリミネータ回路から 24,970 回パルスの出力があった．またパルス幅を測定すると 60.0 ns だった．よって計測時間全体においてシンチレータ A 由来のパルスが出力されている時間の割合は

$$p_1 = \frac{24,970 \times 60.0 \text{ ns}}{1434.4 \text{ s}} = 1.04 \times 10^{-6} \quad (18)$$

と求まる．一方で同じ計測時間でシンチレータ B に繋がったディスクリミネータ回路から 17,935,055 回パルスの出力があり，そのパルス幅は 59.2 ns であった．よって計測時間全体においてシンチレータ B 由来のパルスが出力されている時間の割合は

$$p_2 = \frac{17,935,055 \times 59.2 \text{ ns}}{1434.4 \text{ s}} = 7.40 \times 10^{-4} \quad (19)$$

と求まる．したがって偶然二つのパルスが重なる確率は

$$p_1 p_2 = 1.04 \times 10^{-6} \times 7.40 \times 10^{-4} = 7.73 \times 10^{-10} \quad (20)$$

と求まる．これは非常に小さい確率なので，コインシデンス回路からパルスが発生した場合には，それは同一の粒子によるものと考えて問題ない．

## 4 実験 4

### 4.1 課題 4.1

ここでは配布されたデータをもとに  $\mu$  粒子の寿命を見積もった．

まずデータを得るための測定方法を述べる．この測定ではシンチレータ A,B,C,D,E,F,G を用いる．シンチレータはこの順に上から並んでおり，シンチレータ D,E は他のシンチレータに比べて分厚い一つのシンチレータに繋がっている．そのため  $\mu$  粒子はまずシンチレータ A,B,C を通過し，その後シンチレータ D,E で崩壊し，電子または陽電子を放出する．その結果シンチレータ D,E からは  $\mu$  粒子の入射時と崩壊時の 2 回信号が生まれる．以降は入射時の信号を start 信号と呼び崩壊時の信号を stop 信号と呼ぶ．まず D,E から発された信号を  $\mu$  粒子によるものに限定するため，シンチレータ A~E で信号が生まれ F,G で信号が生まれえないような信号だけを抽出するようなコインシデンス回路を入れる．また start 信号に対応する stop 信号が入力されない場合に備えて，start 信号の入力から 18  $\mu$ s 後に stop 信号を生成して入力する．こうして得た start 信号と stop 信号をポケオシの別々のチャンネルに入力し，その時間差を測定する．

ここではこのような実験により得られたデータを統計的に処理した．まず  $\mu$  粒子は確率的に崩壊するので，あるパラメータ  $\lambda$  を用いて粒子数  $N$  は

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (21)$$

に従って指数的に減少すると考える．つまり  $\mu$  粒子の平均寿命を  $\tau$  として

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (22)$$

と考える．この仮説が正しいかを以降の統計的な解析によって確かめる．

#### 4.1.1 ヒストグラムを用いた解析

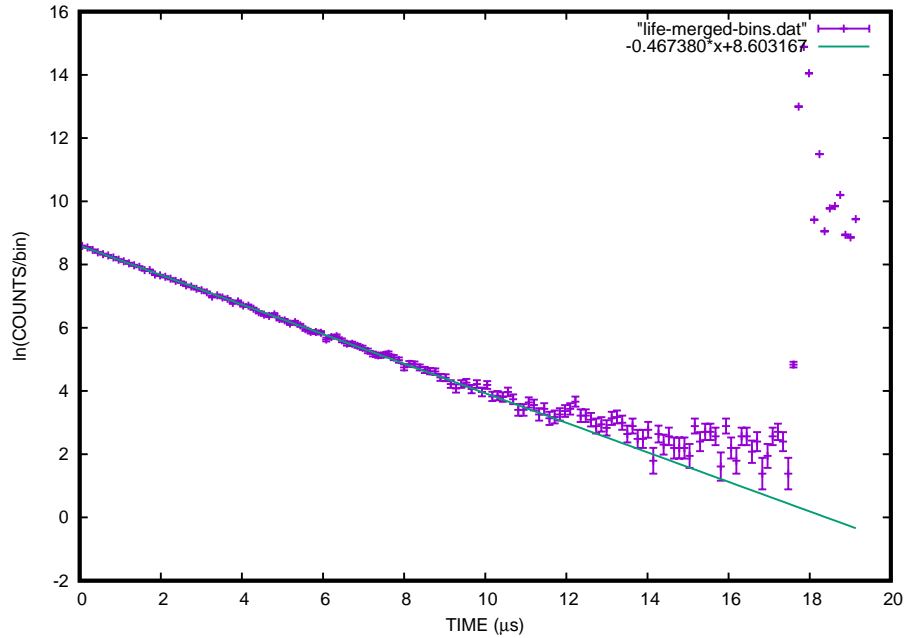


図 24  $\mu$  粒子の入射から崩壊までの時間のヒストグラム (紫) とフィッティング (緑)．フィッティングはガウス分布への近似が成り立つと考える範囲 (粒子数 30 個以上) に限り，18  $\mu\text{s}$  の信号付近は除いて行った．その結果  $\tau = (2.140 \pm 0.008) \mu\text{s}$  および  $\chi^2/n = 1.07$  を得た．

まずデータを計測時間 (start 信号から stop 信号までの時間) によって 256 個に分割してヒストグラムを作成した．ヒストグラムのあるビン  $j$  に注目するとその個数は真の値  $\mu_j$  に対して統計的なばらつきでずれている．そのばらつきはポアソン分布に従うと考える． $\mu_j \gg 10$  のときポアソン分布はガウス分布に近似できるので，このとき尤度  $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = \prod_j \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_j}} \exp\left(-\frac{(N_j - \mu_j)^2}{2\mu_j}\right) \quad (23)$$

となる。

この確率を最大化するような  $\mu_j$  を考える (最尤法)。先ほどの仮説により  $\mu_j = N_0 \exp(-t/\tau)$  なので,  $\mu_j \approx N_j$  および  $\Delta N_j = \sqrt{N_j}$  を用いると

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(N_j - N_0 \exp(-t_j/\tau))^2}{\Delta N_j^2} \quad (24)$$

を最小化すれば良いことが分かる。ここで変数変換  $y_j = \ln N_j$  を施すと, 誤差の伝播則から  $\Delta y_j = 1/\sqrt{N_j}$  となることに注意して

$$\chi^2 \approx \sum_j \frac{(y_j - \ln N_0 + t/\tau)^2}{\Delta y_j^2} \quad (25)$$

がいえる。そこでこれを最小化するように関数

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t := \ln N_0 - t/\tau \quad (26)$$

を定めて平均寿命  $\tau$  を算出した。またフィッティングの誤差  $\Delta\alpha_0, \Delta\alpha_1$  から  $\tau$  の誤差

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1^2} \quad (27)$$

も計算した。そしてこのフィッティングをもとに  $\chi^2$  の最小値を計算した。フィッティングに用いた点の数からパラメータの数 2 を引いた自由度  $n$  とこの  $\chi^2$  を比較して  $\chi^2/n$  を計算し, この値から仮説の信頼水準を求めた。

まずフィッティングの結果

$$f(t) = (8.603 \pm 0.005) + (-0.4674 \pm 0.0016)t \quad (28)$$

と分かった。ただしガウス分布への近似が成り立つように, 今回はフィッティングを  $N_j \geq 30$  のデータに限って行った。また時間 17  $\mu\text{s}$  より先のデータを無視することで, 18  $\mu\text{s}$  付近の信号がフィッティングに寄与しないようにした。このフィッティング結果より  $\mu$  粒子の寿命は  $\tau = (2.140 \pm 0.008) \mu\text{s}$  と計算できる。またこのフィッティングをもとにカイ二乗検定を行うと  $\chi^2 = 91.7$  となり, 自由度が  $n = 86$  であることから

$$\frac{\chi^2}{n} = 1.07 \quad (29)$$

となる。これより信頼水準は約 30% と見積もれる<sup>\*1</sup>。よって  $\mu$  粒子の崩壊はポアソン分布で概ね良く近似できると考える。

---

<sup>\*1</sup> 信頼水準の見積もりはテキスト p.43 の図 38 を参考にした。

#### 4.1.2 ヒストグラムを用いない解析

次にヒストグラムを用いない別の方法で  $\mu$  粒子の寿命を推定した．まずデータで得られた計測時間の測定値  $t_k$  は仮説より指数関数  $\exp(-t/\tau)$  に従うと考える．よって尤度は

$$\mathcal{L} = \prod_k \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t_k}{\tau}\right) \quad (30)$$

と求まる．これを最大化することは  $\ln \mathcal{L}$  を最大化することと等価である．最大化が達成されたとき

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = \sum_k \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{t_k}{\tau^2}\right) = 0 \quad (31)$$

より，イベント数を  $n$  とすると

$$\tau = \frac{1}{n} \sum_k t_k \quad (32)$$

がいえる．つまり  $\tau$  の最良推定値はデータの平均である．またその誤差  $\Delta\tau$  は  $\ln \mathcal{L}$  の尖り具合として

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau'=\tau}\right)^{-1}} = \frac{\tau}{\sqrt{n}} \quad (33)$$

と求まる．以上の解析を計測時間  $17 \mu\text{s}$  以下のデータに対して行ったら  $\tau = (2.171 \pm 0.007) \mu\text{s}$  と分かった．

さらに別の方法で  $\tau$  を見積もる．推定値  $\tau$  を変化させたときの尤度  $\mathcal{L}$  の対数は図 25 のようになった．そこでこのプロットの最大値における  $\tau$  を寿命の推定値と考える．またこれと  $\ln(\mathcal{L})$  が最大値から 0.5 だけ下がった地点に最も近いプロットでの  $\tau$  までの差を  $\tau$  の誤差と考える．このようにして求めた寿命は  $\tau = (2.171 \pm 0.007) \mu\text{s}$  となった．これは先ほどの解析から求めた結果と完全に一致する．

#### 4.1.3 解析結果の考察

まとめると， $\mu$  粒子の寿命はヒストグラムを用いた解析では  $\tau = (2.140 \pm 0.008) \mu\text{s}$ ，ヒストグラムを用いない解析では  $\tau = (2.171 \pm 0.007) \mu\text{s}$  と求まった．一方で理科年表によれば電子や陽電子を出して崩壊する  $\mu$  粒子の寿命は  $(2.19698 \pm 0.00002) \mu\text{s}$  であり，今回の推定値はこれよりも有意に小さい．これは崩壊して電子を放出する  $\mu^-$  がプラスチックシンチレータを構成する炭素によって原子核捕獲されるからと考える． $\mu^-$  粒子は原子核捕獲されると

$$\mu^- + p \rightarrow \nu_\mu + n \quad (34)$$

という反応を起こし，電子も陽電子も生じさせずに消失する．そのため電子・陽電子の放出を伴う崩壊だけを考えたときの寿命  $(2.19698 \pm 0.00002) \mu\text{s}$  と比べて，今回の実験で得られる寿命は小さく見積もられることになる．

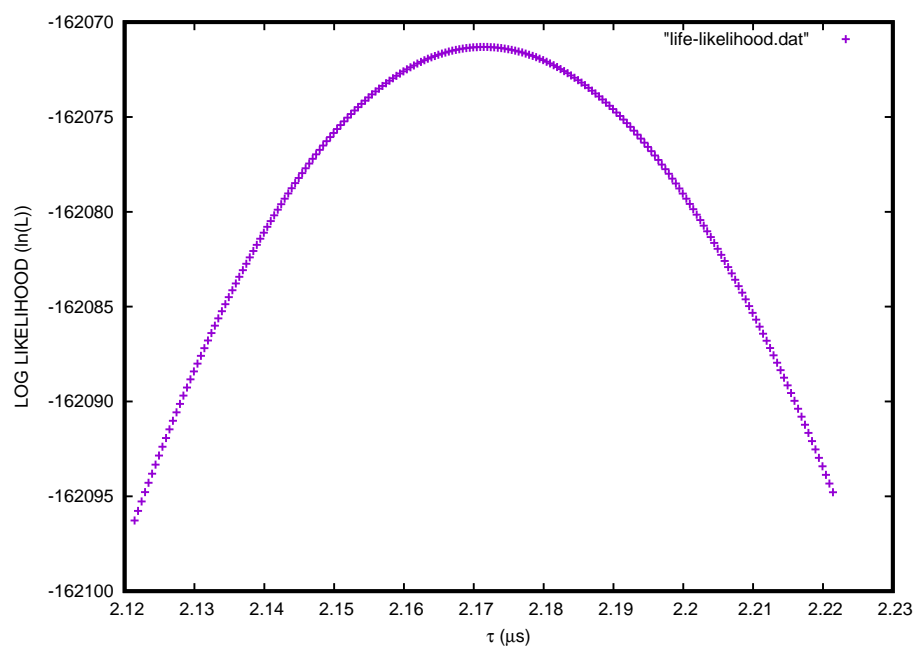


図 25  $\mu$  粒子の寿命の推定値  $\tau$  を変化させたときの尤度の対数  $\ln \mathcal{L}$  の変化．尤度が最大値をとる  $\tau$  を最良推定値として， $\ln \mathcal{L}$  が 0.5 だけ下がった地点までを誤差とした．その結果  $\tau = (2.171 \pm 0.007) \mu\text{s}$  を得た．

## 参考文献

- [1] 「物理学実験Ⅱ」解説書「パルス技術」2021 年度
- [2] Partical Data Group, Review of Partical Physics, 30.Cosmic rays
- [3] 国立天文台編「理科年表 2019」
- [4] 筑波大学素粒子実験室「 $\mu$  粒子寿命データの解析」  
<http://hep-www.px.tsukuba.ac.jp/~doraemon/class/exp3/Jikken3Day5.pdf>