素粒子物理学　前半レポート

05-211525　齋藤駿一

2022 年 12 月 25 日

1

重心系で見た衝突前の全系のエネルギーを E_{CM} とし，実験室系で見た衝突する陽子のそれぞれのエネルギー，運動量を $E_i, \vec{p}_i \, (i=1,2)$ とおくと，

$$E_{\mathrm{CM}}^2 = (E_1+E_2)^2 - (m_1+m_2)^2 \tag{1}$$

となる．$E_{\mathrm{CM}} \geq 4m_p$ が必要な条件である．

(1)

$\vec{p}_2 = 0$ とおくと，$E_2 = m_p$ と分かる．よって，$E_1 = m_p + K$ から，

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{CM}}^2 &= (m_p+K+m_p)^2 - p_1^2 \\ &= (2m_p+K)^2 - \left[(m_p+K)^2 - m_p^2\right] \\ &= 4m_p^2 + 2m_pK \end{aligned} \tag{2}$$

よって，反応が起こる条件は

$$4m_p^2 + 2m_pK \geq (4m_p)^2 \tag{3}$$

すなわち

$$K \geq 6m_p \approx 5.63\,\mathrm{GeV} \tag{4}$$

である．

(2)

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ より，反応が起こる条件は，

$$E_{\mathrm{CM}}^2 = \left(2(m_p+K)\right)^2 \geq (4m_p)^2 \tag{5}$$

すなわち

$$K \geq m_p = 938\,\mathrm{MeV} \tag{6}$$

である．

2

2.1

4 元運動量 p_1, p_2, p_3 の各々が 4 つの成分を持つので，系は計 12 個の変数で記述できる．ここで，3 つの関係式

$$p_i^2 = m_i^2 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{7}$$

のため，変数は 9 個に減らせる．また，崩壊前の粒子の 4 元運動量を P として，エネルギー・運動量保存則

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \tag{8}$$

が成り立つ．これは 4 成分それぞれで成り立つので，変数は 5 個に減らせる．さらに，系を適切に回転させることで，常に粒子 1 が x 方向に運動し，粒子 2 が x-y 平面に含まれるようにすることができる．その結果，粒子 1 の運動量の y,z 成分と粒子 2 の運動量の z 成分の 3 変数を 0 にできるので，変数は 2 個に減らせる．したがって，系の自由度は 2 である．

2.2

以下では，$i = 1, 2, 3$ に対して

$$p_i = \begin{pmatrix} E_i \\ \vec{p}_i \end{pmatrix} \tag{9}$$

とおく．まず m_{12}^2 の動く範囲を考える．その上でこの 3 体崩壊を，粒子 1 と 2 の複合粒子と粒子 3 への 2 体崩壊のように扱う．まず，複合粒子の運動量を

$$p_{12} = p_1 + p_2 \tag{10}$$

と定義すると，エネルギー・運動量保存則は

$$P = p_{12} + p_3 \tag{11}$$

と書ける．ここで，崩壊前の粒子は静止していることから，

$$P = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{12}$$

となる．よって，$P \cdot p_3 = ME_3$ が成り立つ．以上より，

$$\begin{aligned} m_{12}^2 &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= (P - p_3)^2 \\ &= P^2 + p_3^2 - 2P \cdot p_3 \\ &= M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \end{aligned} \tag{13}$$

がいえる．ここで，

$$E_3 = \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2} \geq m_3 \tag{14}$$

より，

$$m_{12}^2 \leq M^2 + m_3^2 - 2Mm_3 = (M - m_3)^2 \tag{15}$$

が分かる．一方，

$$\begin{aligned} m_{12}^2 &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \end{aligned} \tag{16}$$

であり，

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \\ &\geq E_1E_2 - |p_1|\,|p_2| \\ &= E_1E_2 - \sqrt{E_1^2 - m_1^2}\sqrt{E_2^2 - m_2^2} \\ &\geq E_1E_2 - E_1E_2 + m_1m_2 \\ &= m_1m_2 \end{aligned} \tag{17}$$

が成り立つので，

$$m_{12}^2 \geq m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 = (m_1 + m_2)^2 \tag{18}$$

がいえる．以上より，

$$(m_1 + m_2)^2 \leq m_{12}^2 \leq (M - m_3)^2 \tag{19}$$

が成り立つ．同様にして，

$$(m_2 + m_3)^2 \leq m_{23}^2 \leq (M - m_1)^2 \tag{20}$$

もいえる．

2.3

$$E_2^* = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_{12}}, \qquad E_3^* = \frac{M^2 - m_{12}^2 + m_3^2}{2m_{12}} \tag{21}$$

を用いると，

$$m_1^2 = -2m_{12}E_2^* + m_{12}^2 + m_2^2 \tag{22}$$

$$M^2 = 2m_{12}E_3^* + m_{12}^2 - m_3^2 \tag{23}$$

が分かるので，前問より

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3)^2 \leq m_{23}^2 \leq M^2 - 2Mm_1 + m_1^2 \\ = 2m_{12}(E_3^* - E_2^* + m_{12}) + m_2^2 - m_3^2 \\ - 2\sqrt{(-2m_{12}E_2^* + m_{12}^2 + m_2^2)(2m_{12}E_3^* + m_{12}^2 - m_3^2)} \end{aligned} \tag{24}$$

と書ける．

3

3.1

運動量保存則より，π^0 と n の運動量はそれぞれ $\vec{p}, -\vec{p}$ と書ける．これより，それぞれのエネルギーは

$$E_{\pi^0}^2 = |\vec{p}|^2 + m_{\pi^0}^2 \tag{25}$$

$$E_n^2 = |\vec{p}|^2 + m_n^2 \tag{26}$$

となる．辺々引いて，エネルギー保存則

$$E_{\pi^0} + E_n = m_{\pi^-} + m_p \tag{27}$$

を用いると，

$$E_{\pi^0} - E_n = \frac{m_{\pi^0}^2 - m_n^2}{m_{\pi^-} + m_p} \tag{28}$$

がいえる．したがって，これとエネルギー保存則から

$$E_{\pi^0} = \frac{1}{2}\left(m_{\pi^-} + m_p + \frac{m_{\pi^0}^2 - m_n^2}{m_{\pi^-} + m_p}\right) \tag{29}$$

がいえる．よって，

$$E_{\pi^0} = \frac{m_{\pi^0}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{30}$$

と書けることを用いると，

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2m_{\pi^0}(m_{\pi^-} + m_p)}{(m_{\pi^0} + m_p)^2 + (m_{\pi^0}^2 - m_n^2)}\right)^2} \approx 0.194 \tag{31}$$

と求まる．

3.2

π^0 が崩壊してできる 2 つの光子のエネルギーと運動量をそれぞれ $E_i, \vec{p}_i\,(i = 1, 2)$ とおくと，光子の質量がゼロであることとエネルギー・運動量保存則から

$$E_{\pi^0} = E_1 + E_2 = |\vec{p}_1| + |\vec{p}_2| \tag{32}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{33}$$

が成り立つ．ここで，$\vec{p}$ と $\vec{p}_1$ のなす角を θ として

$$\vec{p} \cdot \vec{p}_1 = |\vec{p}|\,|\vec{p}_1| \cos\theta \tag{34}$$

が成り立つとする．このとき，

$$
\begin{aligned}
m_{\pi^0}^2 &= E_{\pi^0}^2 - \vec{p}^2 \\
&= 2\left(|\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2| - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\right) \\
&= 2\left(|\vec{p}_1|\left(E_{\pi^0} - |\vec{p}_1|\right) - \vec{p}_1\cdot(\vec{p}-\vec{p}_1)\right) \\
&= 2\,|\vec{p}_1|\left(E_{\pi^0} - |\vec{p}|\cos\theta\right) \\
&= 2E_1\left(E_{\pi^0} - |\vec{p}|\cos\theta\right)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

より，

$$
E_1 = \frac{m_{\pi^0}^2}{2(E_{\pi^0} - |\vec{p}|\cos\theta)} \tag{36}
$$

と求まる．したがって，

$$
\frac{m_{\pi^0}^2}{2(E_{\pi^0} + |\vec{p}|)} \le E_1 \le \frac{m_{\pi^0}^2}{2(E_{\pi^0} - |\vec{p}|)} \tag{37}
$$

がいえる．これを β を用いて書き直すと，

$$
\frac{m_{\pi^0}\sqrt{1-\beta^2}}{2(1+\beta)} \le E_1 \le \frac{m_{\pi^0}\sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\beta)} \tag{38}
$$

となるので，値を代入すると，

$$
55.4\,\mathrm{MeV} \le E_1 \le 82.2\,\mathrm{MeV} \tag{39}
$$

となる．

4

4.1

Pauli-Dirac 表示を用いると，

$$
\vec{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{40}
$$

と書ける．ただし，$\sigma_i\,(i=1,2,3)$ は Pauli 行列，I は 2×2 の単位行列を表す．一方，

$$
S_z = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{41}
$$

と書ける．したがって，

$$
\begin{aligned}
[H_D, S_z] &= \left[\sum_i \alpha_i p_i + \beta m, S_z\right] \\
&= \sum_i \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\right] p_i + \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\right] m \\
&= \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_x, \sigma_z] p_x + [\sigma_y, \sigma_z] p_y \\ [\sigma_x, \sigma_z] p_x + [\sigma_y, \sigma_z] p_y & 0 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x p_y - \sigma_y p_x \\ \sigma_x p_y - \sigma_y p_x & 0 \end{pmatrix} \neq 0
\end{aligned} \tag{42}
$$

と計算できる．ただし，最後の変形で

$$
[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{43}
$$

を用いた．したがって，H_D と S_z は可換ではない．

4.2

$$
h = \frac{2\vec{S}\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{2}{|\vec{p}|} \sum_j \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} p_j \tag{44}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
[H_D, h] &= \frac{2}{|\vec{p}|} \sum_{i,j} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}\right] p_i p_j + \frac{2}{|\vec{p}|} \sum_j \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}\right] p_j \\
&= \frac{2}{|\vec{p}|} \sum_{i,j} \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{pmatrix} p_i p_j \\
&= \frac{2}{|\vec{p}|} \sum_{i,j} i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} p_i p_j \\
&= \frac{2}{|\vec{p}|} \sum_{i,j} i\frac{\epsilon_{ijk} - \epsilon_{jik}}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} p_i p_j \\
&= 0
\end{aligned} \tag{45}
$$

と計算できる．よって，H_D と h は可換である．

5

ここでは Pauli-Dirac 表示を用いる．一般にスピノル ψ に対して

$$
\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{46}
$$

であることを用いると，

$$\begin{aligned}\sum_i u_i \bar{u}_i &= \sum_{a=A,B} N^2 \begin{pmatrix} u_a \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} u_a \end{pmatrix} \left(u_a^\dagger, \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} u_a^\dagger \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ &= \sum_{a=A,B} (E+m) \begin{pmatrix} u_a u_a^\dagger & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} u_a u_a^\dagger \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} u_a u_a^\dagger & -\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)^2 u_a u_a^\dagger \end{pmatrix} \\ &= (E+m) \begin{pmatrix} I & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} & -\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (E+m)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{47}$$

と計算できる．ただし，2 番目の変形では $N^2 = E + m$ を，3 番目の変形では

$$u_A u_A^\dagger + u_B u_B^\dagger = I \tag{48}$$

を用いた．さらに，Pauli 行列の性質

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} I \tag{49}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m} &= \frac{1}{E+m} \sum_i \sigma_i p_i \sum_j \sigma_j p_j \\ &= \frac{1}{E+m} \sum_{i,j} \frac{\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i}{2} p_i p_j \\ &= \frac{1}{E+m} \sum_{i,j} \delta_{ij} I p_i p_j \\ &= \frac{1}{E+m} \vec{p}^2 I \\ &= \frac{E^2 - m^2}{E+m} I \\ &= (E-m) I \end{aligned} \tag{50}$$

が分かるので，

$$\begin{aligned}\sum_i u_i \bar{u}_i &= \begin{pmatrix} (E+m)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (-E+m)I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \sum_i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} p_i + m \\ &= \gamma^\mu p_\mu + m \\ &= \not{p} + m \end{aligned} \tag{51}$$

と計算できる．

同様に，

$$
\begin{aligned}
\sum_i v_i \bar{v}_i &= \begin{pmatrix} \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (-E-m)I \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (-E-m)I \end{pmatrix} \\
&= \gamma^\mu p_\mu - m \\
&= \not{p} - m
\end{aligned} \tag{52}
$$

も示せる．

6

6.1

次の二つの Feynman diagram が描ける．

それぞれについて Feynman rule を考えると，

$$
-i\mathcal{M}_1 = [\bar{u}(p_3)ie\gamma^\mu u(p_1)]\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{t}\,[\bar{u}(p_4)ie\gamma^\nu u(p_2)] \tag{53}
$$

$$
-i\mathcal{M}_2 = [\bar{u}(p_4)ie\gamma^\mu u(p_1)]\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{u}\,[\bar{u}(p_3)ie\gamma^\nu u(p_2)] \tag{54}
$$

となる．ただし，Mandelstam variable を

$$
t = (p_1 - p_3)^2 \tag{55}
$$

$$
u = (p_1 - p_4)^2 \tag{56}
$$

とした．したがって，全体の invariant matrix は，

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M} &= -i(\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2) \\
&= ie^2\left(\frac{1}{t}\,[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)]\,[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)] - \frac{1}{u}\,[\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_1)]\,[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_2)]\right)
\end{aligned} \tag{57}
$$

と計算できる．ここで，$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ とした．

6.2

一般のスピノル u, v に対して

$$
[\bar{u}\gamma^\mu v]^\dagger = [u^\dagger\gamma^0\gamma^\mu v]^\dagger = v^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 u = v^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 u = \bar{v}\gamma^\mu u \tag{58}
$$

が成り立つことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} \\
&= (-ie^2)\left(\frac{1}{t}\left[\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(p_3)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_4)\right] - \frac{1}{u}\left[\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(p_4)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_3)\right]\right) \\
&\qquad \times ie^2\left(\frac{1}{t}\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)\right] - \frac{1}{u}\left[\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_2)\right]\right) \\
&= e^4\left(\frac{1}{t^2}\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(p_3)\right]\left[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_4)\right]\right. \\
&\qquad + \frac{1}{u^2}\left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_2)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_3)\right]\left[\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(p_4)\right] \\
&\qquad - \frac{1}{tu}\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_3)\right]\left[\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)\right]\left[\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(p_4)\right] \\
&\qquad \left. - \frac{1}{tu}\left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_2)\right]\left[\bar{u}(p_1)\gamma^\nu u(p_3)\right]\left[\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_4)\right]\right)
\end{aligned} \tag{59}
$$

が分かる．さらに全スピン変数について始状態を平均し，終状態の和をとると，

$$
\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4} |\mathcal{M}|^2 \tag{60}
$$

が求まる．以降では，これをトレースを用いて計算する．

たとえば，$[\bar{u}_1\gamma^\mu u_2][\bar{u}_2\gamma^\nu u_1]$ という項を考える．スピノル成分をあらわに書くと，これは

$$
\sum_{\sigma_1,\sigma_2} [\bar{u}_1\gamma^\mu u_2][\bar{u}_2\gamma^\nu u_1] = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \bar{u}_{1\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}u_{2\beta}\bar{u}_{2\gamma}\gamma^\nu_{\gamma\delta}u_{1\delta} \tag{61}
$$

のようになる．大問 5 で導いた完全性の公式から

$$
\sum_{\sigma_1} u_{1\delta}\bar{u}_{1\alpha} = (\not{p}_1 + m)_{\delta\alpha}, \qquad \sum_{\sigma_2} u_{2\beta}\bar{u}_{2\gamma} = (\not{p}_2 + m)_{\beta\gamma} \tag{62}
$$

となることを用いると，対角成分だけ残って，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \bar{u}_1\gamma^\mu u_2\bar{u}_2\gamma^\nu u_1 &= (\not{p}_1 + m)_{\delta\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}(\not{p}_2 + m)_{\beta\gamma}\gamma^\nu_{\gamma\delta} \\
&= \mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_2 + m)]
\end{aligned} \tag{63}
$$

と書ける．

このような計算により，

$$
\begin{aligned}
\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{e^4}{4}&\left(\frac{1}{t^2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)]\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu(\not{p}_4 + m)]\right. \\
&+ \frac{1}{u^2}\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_3 + m)]\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{p}_4 + m)] \\
&\left. - \frac{2}{tu}\mathrm{Tr}[(\not{p}_3 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{p}_4 + m)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\nu]\right)
\end{aligned} \tag{64}
$$

が分かる．

6.3

前問で得たトレースの式を，公式

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma] = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) &(65)\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu] = -32 &(66)\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu] = \mathrm{Tr}[\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu] = 16g^{\rho\sigma} &(67)\\
&\mathrm{Tr}[\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma^\tau\gamma_\nu] = -32g^{\rho\lambda}g^{\sigma\tau} &(68)
\end{aligned}
$$

を用いて整理すると，

$$
\begin{aligned}
\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle = \frac{e^4}{4}\Bigg(&\frac{32}{t^2}((p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_2\cdot p_3)(p_1\cdot p_4) - m^2(p_1\cdot p_3 + p_2\cdot p_4) + 2m^4)\\
&+\frac{32}{u^2}((p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) - m^2(p_2\cdot p_3 + p_1\cdot p_4) + 2m^4)\\
&-\frac{32}{tu}(-2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + 2m^2 p_1\cdot(p_2+p_3+p_4) - 2m^4)\Bigg) \qquad (69)
\end{aligned}
$$

となり，さらに Mandelstam variable を用いて

$$
\begin{aligned}
p_1\cdot p_2 &= \frac{(p_1+p_2)^2 - 2m^2}{2} = \frac{s}{2} - m^2 &(70)\\
p_1\cdot p_3 &= \frac{-(p_1-p_3)^2 + 2m^2}{2} = -\frac{t}{2} + m^2 &(71)\\
p_1\cdot p_4 &= \frac{-(p_1-p_4)^2 + 2m^2}{2} = -\frac{u}{2} + m^2 &(72)\\
p_2\cdot p_3 &= \frac{-(p_3-p_2)^2 + 2m^2}{2} = -\frac{u}{2} + m^2 &(73)\\
p_2\cdot p_4 &= \frac{-(p_4-p_2)^2 + 2m^2}{2} = -\frac{t}{2} + m^2 &(74)\\
p_3\cdot p_4 &= \frac{(p_3+p_4)^2 - 2m^2}{2} = \frac{s}{2} - m^2 &(75)
\end{aligned}
$$

と書き直して整理すると，

$$
\begin{aligned}
\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= \frac{e^2}{4}\Bigg(\frac{8}{t^2}(s^2 + u^2 - 8m^2(s+u) + 24m^2)\\
&\qquad + \frac{8}{u^2}(s^2 + t^2 - 8m^2(s+t) + 24m^2)\\
&\qquad + \frac{16}{tu}(s^2 - 8m^2 s + 12m^4)\Bigg)\\
&= 2e^4\Bigg(\frac{1}{t^2}(s^2 + u^2 - 8m^2(s+u) + 24m^2)\\
&\qquad + \frac{1}{u^2}(s^2 + t^2 - 8m^2(s+t) + 24m^2)\\
&\qquad + \frac{2}{tu}(s^2 - 8m^2 s + 12m^4)\Bigg) \qquad (76)
\end{aligned}
$$

となる．

6.4

重心系で，+z 方向と-z 方向に運動していた 2 つの電子が正面衝突し，xz 平面上で z 軸を角度 θ だけ回転させた方向に跳ね返る状況を考える．最初電子は z 軸方向にエネルギー E，運動量 $p, -p$ で運動していたとし，

$$p_1 = (E, 0, 0, p) \tag{77}$$
$$p_2 = (E, 0, 0, -p) \tag{78}$$
$$p_3 = (E, p\sin\theta, 0, p\cos\theta) \tag{79}$$
$$p_4 = (E, -p\sin\theta, 0, -p\cos\theta) \tag{80}$$

とおくと，

$$s = 4E^2 = E_{\mathrm{CM}}^2 \tag{81}$$
$$t = 2p^2(\cos\theta - 1) \tag{82}$$
$$u = 2p^2(-\cos\theta - 1) \tag{83}$$

がいえる．重心系で見た微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\mathrm{CM}}^2}\frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle \tag{84}$$

と書けるので，ここにこれまで得た式を代入して整理すると，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{E_{\mathrm{CM}}^2 p^4 \sin^4\theta}\left[4(m^2+2p^2)^2 + (4p^4 - 3(m^2+2p^2)^2\sin^2\theta + p^4\sin^4\theta)\right] \tag{85}$$

となる．ただし，微細構造定数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \tag{86}$$

を用いた．ここで，相対論的極限 $m \ll p$ をとると，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{E_{\mathrm{CM}}^2 p^4 \sin^4\theta}\left[16p^4 + (4p^4 - 8p^4\sin^2\theta + p^4\sin^4\theta)\right] = \frac{\alpha^2}{E_{\mathrm{CM}}^2 \sin^4\theta}(3+\cos^2\theta)^2 \tag{87}$$

が得られる．

参考文献

[1] Feynman Diagrams for Beginners
https://arxiv.org/pdf/1602.04182.pdf

[2] Møller scattering - Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B8ller_scattering

7

ここでは，C. S. Wu ら (1956) による実験を紹介する．この実験は，理論物理学者の Lee と Yang の提案で行われ，弱い相互作用においてパリティ対称性が破れることを実証した．この実験は当時大きなインパクトを与え，Lee と Yang は 1957 年のノーベル物理学賞を授与された．

この実験は，コバルト 60 の β 崩壊

$$^{60}\mathrm{Co} \longrightarrow {}^{60}\mathrm{Ni}^* + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e \tag{88}$$

および，励起状態の $^{60}\mathrm{Ni}^*$ の γ 崩壊

$$^{60}\mathrm{Ni}^* \longrightarrow {}^{60}\mathrm{Ni} + 2\,\gamma \tag{89}$$

に注目した．とくに，β 崩壊の過程は弱い相互作用によるものであり，パリティ対称性が保証されない．この実験では，β 崩壊でどのように電子が放出されるかに注目する．

この実験では，$^{60}\mathrm{Co}$ のスピンの偏光を揃えることが重要である．なぜなら，もし $^{60}\mathrm{Co}$ の偏光がランダムだった場合，たとえ β 崩壊で電子がある特定の方向に放出されるとしても，（$^{60}\mathrm{Co}$ を多数実験系に用意するため）その情報が平均化されてしまうためである．そのため，Rose と Gorter による方法（極低温で高磁場をかけ，$^{60}\mathrm{Co}$ の偏光を揃える方法．ここではこれ以上深入りしない．）を用いた．もちろん，時間が経つにつれて温度が上がって偏光は失われる．しかし，その偏光度合いは γ 線の偏光測定から検出できる．なぜなら，γ 崩壊は電磁相互作用によるものであり，パリティ対称性を破らないので，それがどれだけ異方的に放出されたかが $^{60}\mathrm{Co}$ の核スピンの偏光の良い指標になるからである．

以上を踏まえ，この実験では，γ 線と電子の放出率をカウントし，それらの値を比較した．γ 線の放出率は異なる方向にある 2 箇所（EQUATIONAL, POLAR）でカウントし，それらの差異（γ 異方性）から $^{60}\mathrm{Co}$ のスピン偏光を確認した．そして，磁場を加える方向を逆向きにして電子の放出率を測定し，もとの結果との差異（β 非対称性）を調べた．

実験の結果，まず γ 異方性は実験開始から約 6 分までの間観測された（図 1 上段，中段）．つまり，この時間内では核スピンは偏光していたことになる．そして，β 非対称性もこの時間内に観測され，カウント率は磁場が下向きのときは多く，磁場が上向きのときは多かった（図 1 下段）．この結果は（γ 異方性よりも）大きく非対称であり，電子は γ 線すなわち核スピンと異なる方向に多く放出されることを意味している．これが，弱い相互作用でパリティ対称性が破れていることの証明になった．

参考文献

[1] Wu, C. S., Ambler E., Hayward R. W., Hoppes D. D., & Hudson R. P., Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay, *Physical Review*, 105(4): 1413-1415, 1957.

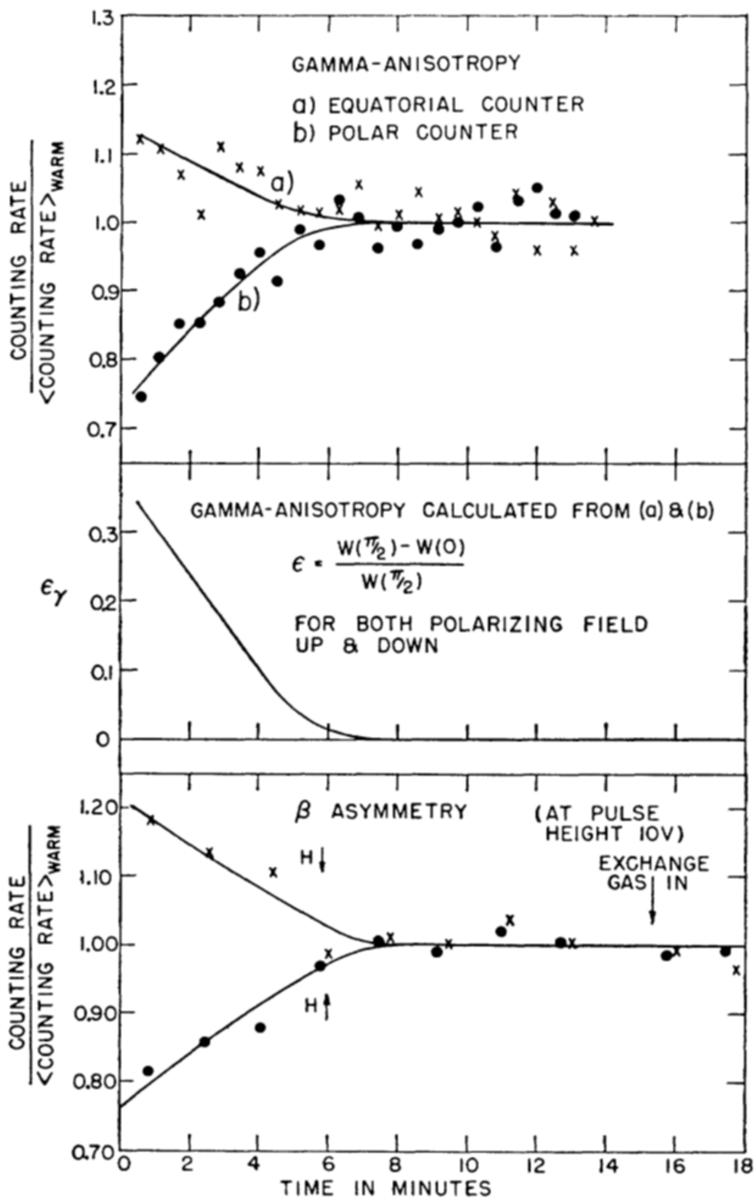

FIG. 2. Gamma anisotropy and beta asymmetry for polarizing field pointing up and pointing down.

図 1 γ 異方性と β 非対称性の測定結果．どの図も ^{60}Co のスピン偏光がなくなった時点を基準にとっている．

[2] Wu experiment - Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Wu_experiment