Maximum-Cup 2024 解説

Writer: a01sa01to, through

Tester: m_99, AngrySadEight, miryoku7

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

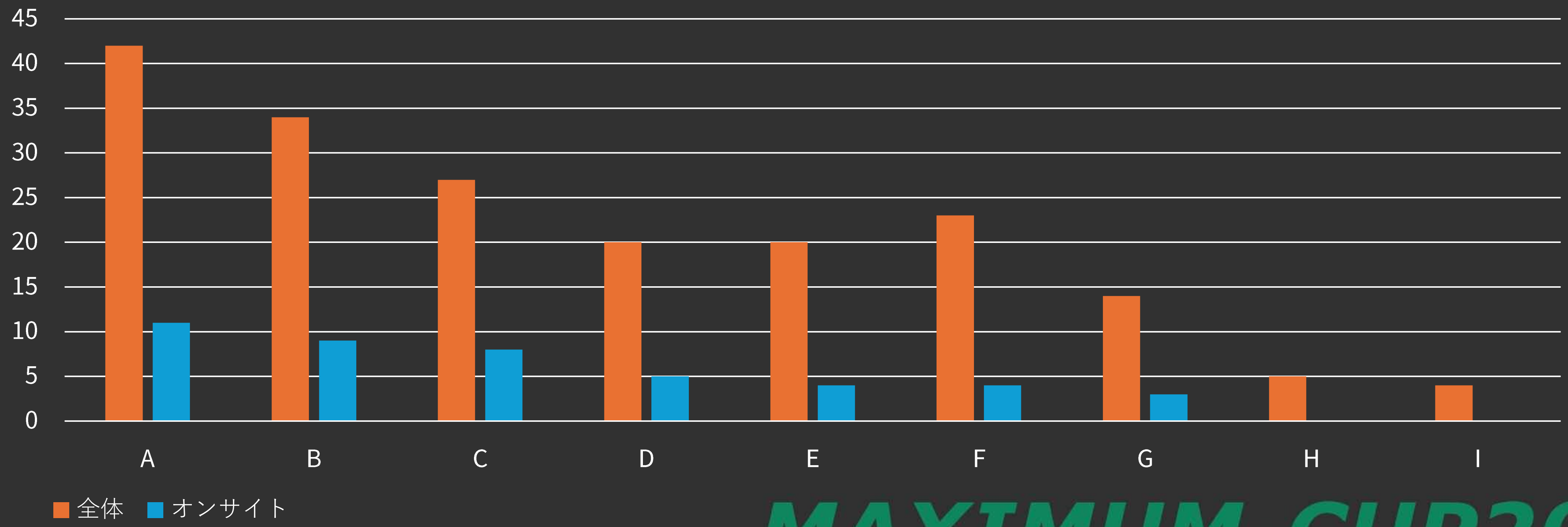
アンケート

- 今後のため、ぜひアンケートにご協力ください！
- https://forms.office.com/r/FNydh2XNGs
  - MOFE のコンテストトップページにリンクがあります

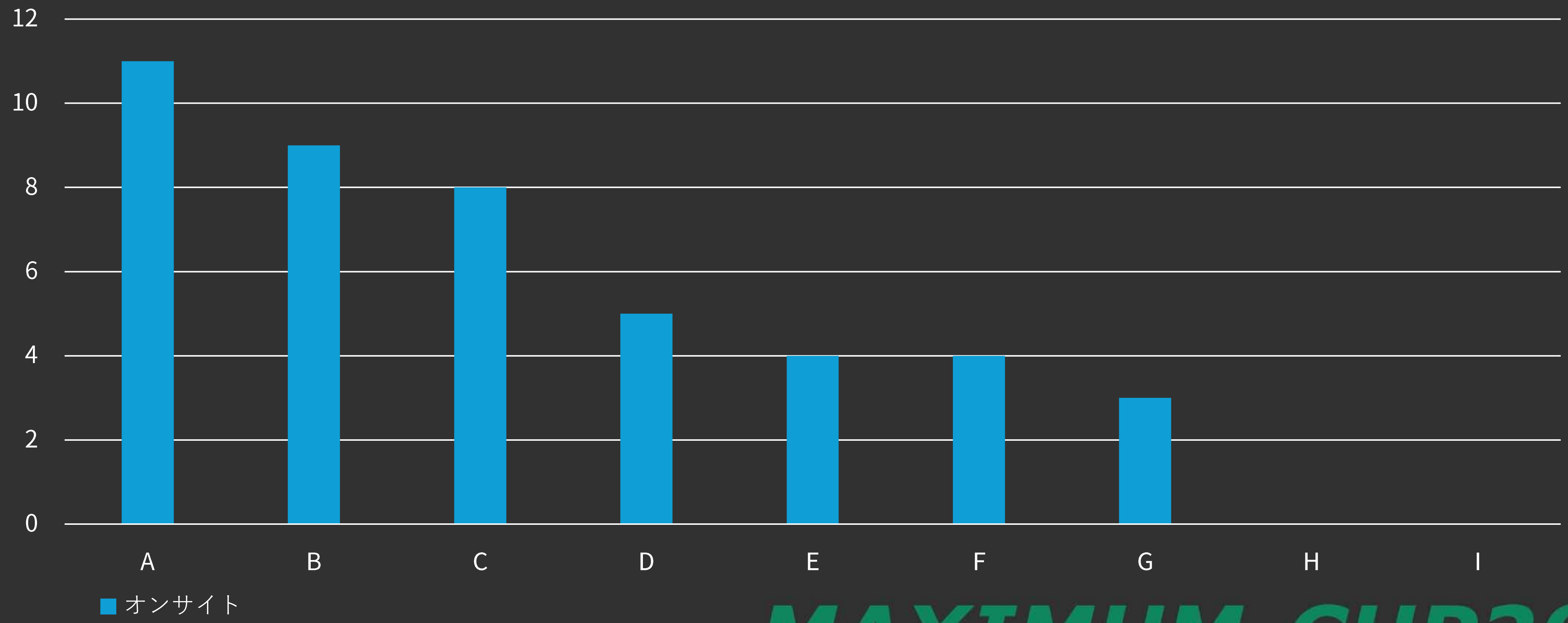
MAXIMUM-CUP2024
MAXIMUM-CUP2024

Writer & Tester 予想難易度

- A < B < C < D < E < F < G < H < I



オンサイト only AC Count



MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

A –
Saitama Venice University

Writer: a01sa01to

MAXIMUM-CUP2024
MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- $H \times W$ マスあり、各マスに $A_{i,j}$ が定まっている
- $\max A_{i,j}$ を求めよ
- $H, W \leq 1000, 0 \leq A_{i,j} \leq 10^9$

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

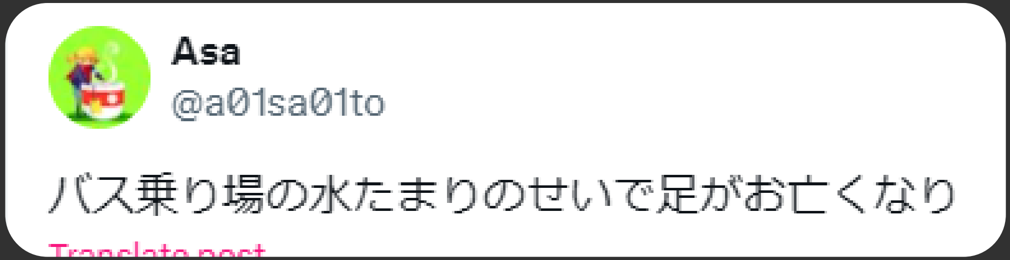
解法

- 言われた通りに実装しましょう
- $O(HW)$

MAXIMUM-CUP2024
MAXIMUM-CUP2024

裏話

- 埼玉大学は大雨時に一部学生 (a01sa01to 含) から「埼玉ヴェネツィア大学」と揶揄されます (表記揺れあり)
  - 正門の通りの側道とかあちこちに川ができる
  - 「埼玉ヴェネツィア大学」で検索！
- 水たまりでめちゃくちゃ濡れた時に発案



MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 11 / 11
  - 全体: 42 / 42
- FA
  - オンサイト: vwxyz (01:11)
  - 全体: チーム 団体 1 名様 (00:48)

MAXIMUM-CUP2024

B – Three Coins

Writer: a01sa01to

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- 数列 A_i が与えられる
- 数列から要素を 3 つ (重複可) 選び、その 3 つの和をとる
- ありうる総和すべてからなる集合 (重複不可) について、
  要素すべての XOR をとった値は？

解説 – 部分点解法

- $N \leq 200$ なので全列挙できる
- 例えば…
  - 3 重ループを回して、 3 つの和を set に入れる
  - set のすべての要素について XOR をとる
- $O(N^3 \log N)$ で通る

解説 – 満点解法

- 制約「A_{i+1} は A_i の倍数」
- 3 つの和をとるときに重複を許しているので、
  A の重複要素は取り除いてしまって問題ない
- A の要素の重複を除くと A の長さは $O(\log N)$ になる
- よって、部分点解法と同様のことをすれば良い

裏話

- Maximum-Cup 恒例「埼玉トラップ」問題として作られました
  - 皆さんトラップにはまっていただけたみたいでうれしいです
- テレビを見ていたら雑貨店 3COINS が流れてきて発案
- 当初総和だったが、 XOR にしてちょっと面倒くさくなった
- AGC050 B「Three Coins」とは無関係

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 9 / 11
  - 全体: 34 / 42
- FA
  - オンサイト: チーム MMdayo (10:44)
  - 全体: TKTYI (03:36)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

C – Minimum Changes on Bipartite Coloring

Writer: a01sa01to

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- 二部グラフ G と良い彩色 α, β が与えられる
  - 良い彩色: 「隣接点は異なる色」かつ「使われない色が存在しない」
- α が β に一致するまで以下の操作を繰り返す
  - 良い彩色を保つように、１頂点選びその頂点の色を変更する
- 最小の操作回数とその操作列は？

MAXIMUM-CUP2024

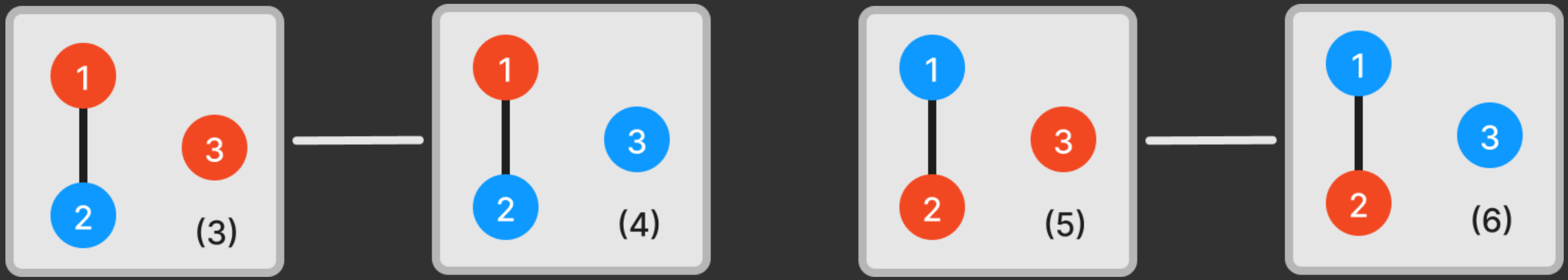
MAXIMUM-CUP2024

解説 – 部分点解法 [1/2]

- 問題を言い換えてみる
  - 良い彩色に ID を振って、頂点番号とする
  - 1 頂点の変更で一致させられるような良い彩色間に辺を張る
  - α, β に対応する頂点間の最短経路を求めよ

解説 – 部分点解法 [2/2]

- こんな感じのグラフになる (サンプル 1 の場合)



- $n \leq 8$:あり得る良い彩色を全列挙可能 + 上のグラフを構築可能
- 復元付き BFS で求められる

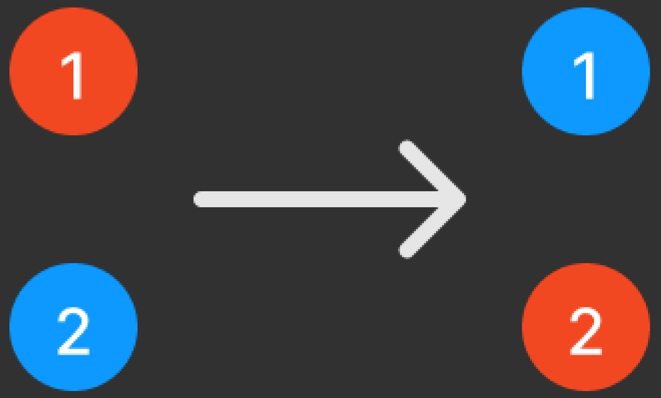
MAXIMUM-CUP2024
MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [1/5]

- 部分点で構築したグラフでは、頂点数が $O(2^n)$ 個あって厳しい
- 実験してみると、以下の性質に気づく
  - 2 頂点以上からなる連結成分の各頂点について、色は変更できない
    - 1 点変更しようとすると隣接点と同じ色になってしまい、良い彩色を満たさない
  - よって変更できるのは孤立点だけ
  - 2 頂点以上の連結成分で変わっている部分があれば **-1**

解説 – 満点解法 [2/5]

- 以下、孤立点のみ変化するケースについて考える
- ハミング距離が最小値になりそう
- コーナーケース
  - どちらかの頂点を変更しようとすると
    その色が使われなくなってしまう



MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [3/5]

- $c_{a \to b}$ を「$\alpha(v) = a, \beta(v) = b$ なる v の個数」とする
  - α, β は良い彩色なので、以下の 4 つが成り立つことに注意

$$c_{0\to0} + c_{0\to1} > 0, \quad c_{1\to0} + c_{1\to1} > 0, \quad c_{0\to0} + c_{1\to0} > 0, \quad c_{0\to1} + c_{1\to1} > 0$$

- 以下の事実が成り立つ
  - $c_{0\to0} = c_{1\to1} = 0, c_{0\to1} = c_{1\to0} = 1$ の場合答えは **-1**（さっきのコーナー）
  - それ以外は一致させられて、ハミング距離が最小操作回数

解説 – 満点解法 [4/5]

1. $c_{0\to0} > 0, c_{1\to1} > 0$ の場合: $c_{0\to1}, c_{1\to0}$ の頂点を変更する
2. $c_{0\to0} > 0, c_{1\to1} = 0$ の場合: $c_{0\to1}$ を操作して 1 に帰着
3. $c_{0\to0} =\ c_{1\to1} = 0$ の場合
   - $c_{0\to1} = 1, c_{1\to0} > 1$ なら $c_{1\to0}$ に操作して 2 に帰着
   - $c_{0\to1} = 1, c_{1\to0} = 1$ ならコーナーケースの話から、操作不可能

- $c_{0\to0} = 0, c_{1\to1} > 0$ なども同様

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [5/5]

- 実際、前ページのように操作すれば、
  最小操作回数としてハミング距離が得られる
- まとめると以下の実装をすれば良く、 $O(n+m)$ などで解ける
  - 2 頂点以上の連結成分内で変化がある: **-1**
  - $c_{0\to0}=c_{1\to1}=0, c_{0\to1}=c_{1\to0}=1$: **-1**
  - それ以外: ハミング距離、操作列の構築は前ページ参照

裏話 [1/2]

- もともとは最小操作回数だけの予定が、
  MOFE に動的得点機能が追加されたので操作列を追加
  - ↑「複数あるならどれを出力してもよい」がサポートされた
- 動的得点にすると平均点が算出されるので Rime は微妙だった

MAXIMUM-CUP2024

裏話 [2/2]

- a01sa01to が卒論のテーマ決めの時に論文漁っていて「2 彩色ならこの問題は自明、ほんとか？」になったので出題
- 3 彩色版の問題についても考えてみてください～
  - Johnson, M., Kratsch, D., Kratsch, S. et al. Finding Shortest Paths Between Graph Colourings. Algorithmica 75, 295–321 (2016). https://doi.org/10.1007/s00453-015-0009-7

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 8 / 11
  - 全体: 27 / 42
- FA
  - オンサイト: チーム Maximum_dropkick (54:12)
  - 全体: TKTYI (20:46)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

D – SaitaMaze

Writer : through

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- $H \times W$ のグリッドが与えられ、マス (i, j) の高さは $h_{i,j}$
- 上下左右に隣接する同じ高さのマスにしか移動ができない
- Maximum 君は任意のマスの高さを変える能力を持っている
- $(0, 0)$ から $(H-1, W-1)$ に到達するまでに、能力を使う最小値を求めよ

MAXIMUM-CUP2024
MAXIMUM-CUP2024

解説 – 部分点 1 解法 [1/1]

- 制約より、同じ高さの地点が存在しない
- 行先を $h_{0,0}$ に揃えるようにすると、マンハッタン距離だけ高さを揃える必要がある（これは経路によらない）
- よって答えは $H-1+W-1$
- $O(1)$ で解ける

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [1/4]

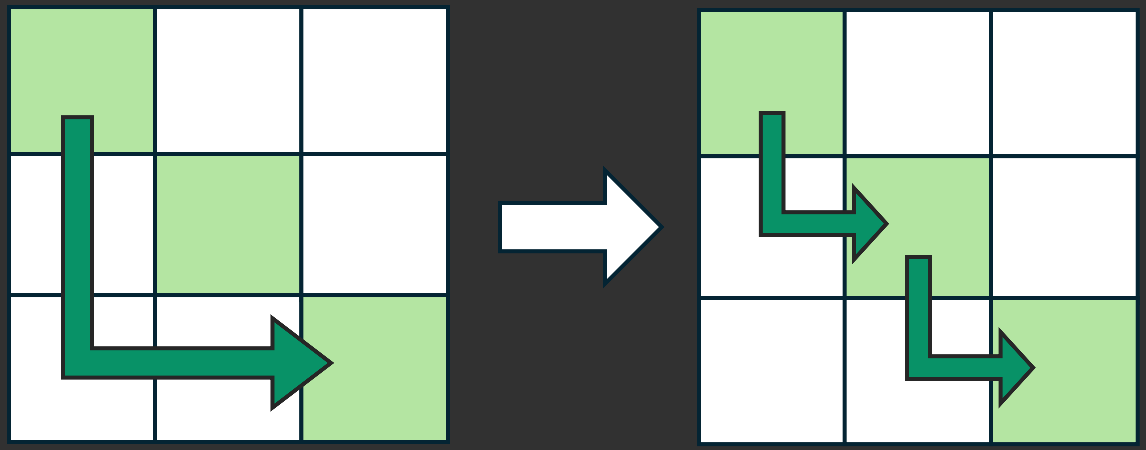
- $h_{i,j} = h_{i',j'}$ となる 2 点 $(i,j),(i',j')$ を考える
- $(i,j) \rightarrow (i',j')$ の問題を考えると、

答えは $|i - i'| + |j - j'| - 1$ 以下

  - 勿論、経路によってはもっと小さいコストで行ける時もある
  - Ex) $h_{1,1} = h_{2,2} = h_{3,3}$ の時、$(1,1) \rightarrow (3,3)$ はコスト 2 で行ける

解説 – 満点解法 [2/4]

- Ex のようなケースは分割して小さい問題の和に帰着する
  - $(1,1) \to (3,3)$ は、 $(1,1) \to (2,2)$ と $(2,2) \to (3,3)$ の和として考える



解説 – 満点解法 [3/4]

- ここで以下のグラフを考える
  1. ある地点 (i, j) において、上下左右の隣接マスに
     コスト 1 の辺を張る（隣接マスの高さが不一致の時）
  2. $h_{i,j} = h_{i',j'}$ を満たす 2 点 $(i, j), (i', j')$ の間に
     コスト $|i - i'| + |j - j'| - 1$ の辺を張る
- 答えはこのグラフにおける $(0, 0) \to (H - 1, W - 1)$ の最短経路

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [4/4]

- 辺の本数を考える（制約より同じ地点は 20 個以下）
  - 1. の辺は $2(H-1)W+2H(W-1)$ 本
  - 2. の辺は $\frac{HW}{20}20(20-1)$ 本（※ 最悪の場合）
- よって最悪の場合、合計で $E=23HW-2H-2W$ 本
- したがって $O(E\log(HW))$ で解ける

裏話 1

- ポケモン第四世代（ダイアモンド・パール）の 4 バッジ目のジムリーダー「マキシ」から着想を得た
- 本家はもっと複雑なギミックだが、問題に落とし込む過程で変更を重ね、原型をとどめていない問題になった

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

裏話 2

- 初めは $H, W \leq 100$, 同じ高さの地点は 100 個以下という制約
- $dist[H][W]$[前訪れた高さ] として 01BFS をすると $O\left((HW)^2\right)$ が通ると助言をいただき修正
- 同じ地点の個数を減らす代わりに上記を落とすようにした

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 5 / 11
  - 全体: 20 / 42
- FA
  - オンサイト: チーム MMdayo (76:27)
  - 全体: TKTYI (29:22)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

E – Train Sleeper

Writer: a01sa01to

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- N 人の人がいる
- それぞれの人が左・中・右のどれかを独立に $1/3$ の確率で選ぶ
- その後、右の人から「左に倒れる」連鎖が起きる
- さらに、左の人から「右に倒れる」連鎖が起きる
- 最終的に「左・中・右」になる確率 mod 998244353 は？

解説 – 部分点 1 解法

- $N \leq 12$ なので、 3^N 通りの状態を前計算で全列挙可能
- それぞれの状態において、
  最終的にどうなるかを数え上げて状態数 3^N で割ればよい
- $O(N \cdot 3^N \cdot \log p + Q)$ などで実装可能 $(p = 998244353)$

解説 – 部分点 2 解法

- DP できそうだなーと思って置きましたが嘘でした
- とりあえずそのままにしておきました
- 時間をかけた方へ: ごめんなさい

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [1/3]

- 前計算せずに、クエリごとに人 i について考える
- 「左」伝播で変更することになるのは、
  i が M のとき かつ i より右が MM...ML となっているとき
- 同様に「右」伝播は、 i より左が RMM...M となっているとき

解説 – 満点解法 [2/3]

- 「i より右が MM…ML」: 確率 1/3 で独立に選ばれているので、i より右の人の人数を R とすると、その確率は

$$\sum_{j=1}^{R}\left(\frac{1}{3}\right)^{j} = \frac{3^{-1}(1-3^{-R})}{1-3^{-1}} = \frac{3^{R}-1}{2\cdot 3^{R}}$$

- 左が RM…M も同様

解説 – 満点解法 [3/3]

- 以下のことを行えばよく、クエリ当たり $O(\log p \cdot \log N)$
  - $p_l = p_m = p_r = 1/3$ で初期化 (それぞれ左・中・右の確率)
  - 左伝播の確率 $x := p_m \cdot \frac{3^{N-i}-1}{2 \cdot 3^{N-i}}$ を計算し、 $p_l \mathrel{+}= x, p_m \mathrel{-}= x$ とする
  - 右伝播の確率 $y := p_m \cdot \frac{3^{i-1}-1}{2 \cdot 3^{i-1}}$ を計算し、 $p_m \mathrel{-}= y, p_r \mathrel{+}= y$ とする
  - これらを出力する

MAXIMUM-CUP2024

裏話

- 電車で爆睡しているときに発案

- 解法考えずに原案 (部分点 2 まで) を through に投げたら
  「数学やるだけじゃん」となり $N \leq 10^5$ から $N \leq 10^{18}$ に変更

MAXIMUM-CUP2024
MAXIMUM-CUP2024

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 4 / 11
  - 全体: 20 / 42
- FA
  - オンサイト: vwxyz (43:39)
  - 全体: KumaTachiRen (14:16)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

F – Maximum Spanning Tree Query

Writer: a01sa01to

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- 重み付き連結無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられる
- 以下のクエリに答えよ
  - 重み w_j の辺 $e_j = \{x_j, y_j\}$ が与えられる
  - グラフ $(V, E \cup e_j)$ の最大全域木の重みを求めよ
- 以降最大全域木を MST と表記します

解説 – 部分点 1 解法

- $N, M \leq 100, Q \leq 1000$
- クエリごとに MST を $O\left(M \log M + N\alpha(N)\right)$ で求められる
  - 辺を重みの降順でソート
  - クラスカル法同様に「すでに連結でなければ辺を採用」の繰り返し

解説 – 部分点 2 解法

- $N \leq 100, Q \leq 1000 \ (M \leq 2 \times 10^5)$
- 先ほどの方法では間に合わない（高速化したら通るかも）
- 以下の事実を使う
  - 初期状態のグラフ G の MST で使われない辺は、クエリでも使われない
  - 証明は簡単なので省略
- $M = N - 1$ とできて、通る

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [1/2]

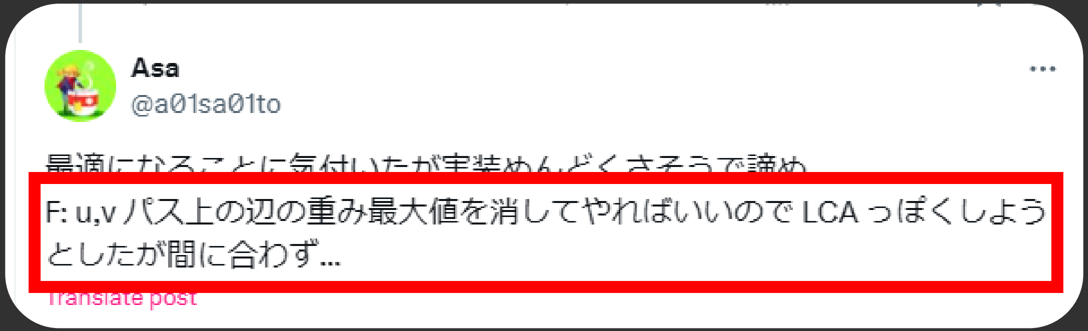
- 以下の事実を使う
  - 全域木 T が MST $\Leftrightarrow$ T に採用されていない任意の辺 $e = \{x, y\}$ について、 T の x-y パス上の辺は e より重みが小さいことはない
  - つまり、採用されない辺の端点を結ぶパス上の辺の重みは、採用されない辺の重み以上
  - 背理法使ったりクラスカル法の流れを見たりするとわかる

解説 – 満点解法 [2/2]

- よって、クエリごとに以下のことを高速に行えれば良い
  - 初期状態のグラフにおける MST T を前計算で求めておく
  - 重み w_j の辺 $e_j = \{x_j, y_j\}$ が与えられたときに、
    T の x_j-y_j パス上の辺の重みの最小値 c を求める
  - $c < w_j$ なら e_j を採用、そうでなければ T のまま
- ダブリングやオイラーツアーなどを使って $O(\log N)$

裏話

- 元ネタは ABC355 F - MST Query (気づいた方もいそう)
- コンテストで中にちょっと誤読したことにより、
  この問題と想定解が生えた



MAXIMUM-CUP2024

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 4 / 11
  - 全体: 23 / 42
- FA
  - オンサイト: チーム Maximum_dropkick (28:59)
  - 全体: dyktr_06 (13:31)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

G – Loneliness

Writer : through

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- $1 \sim 60$ の番号が付いた人がいる（番号が i の人を以降 人 i と呼ぶ ）
- 同じ番号の人は 2 人で 1 つのペアを組むことができる
- クエリが Q 個くるので順に処理する
  - クエリ1：区間 $[L, R)$ には人 $l, l+1, \ldots, r$ が奇数人、それ以外は偶数人いる
  - クエリ2：区間 $[L, R)$ にいるペアを組めない人の人数を出力
    一意に定まらない場合は “Ambiguous” を出力

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 部分点 1 解法 [1/4]

- ペアを作れずに余る人は、各番号に 0 or 1 人しかいない

⇒ 各番号における mod 2 の足し算 ⇒ 排他的論理和を使いたい

- $\mathrm{B}_{\mathrm{L}\,R}$ を以下の様に定義する

区間 $[L, R)$ において $\mathrm{B}_{\mathrm{L}\,R} = \sum_{i=1}^{60} 2^{i-1} \times ($人 i の人数 % 2$)$

  - 意味 : $\left(B_{\mathrm{L},R} \,\&\, (1LL \ll i)\right) \neq 0$ の時、区間 $[L, R)$ に人 $i+1$ が奇数人

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

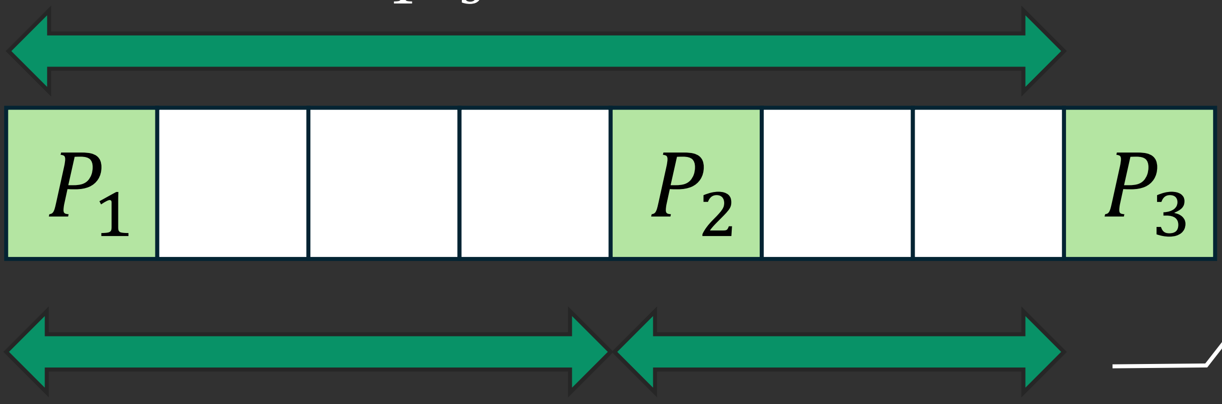
解説 – 部分点 1 解法 [2/4]

- $L < M < R$ について考えると $B_{L,R} = B_{L,M} \oplus B_{M,R}$ が言える
  - 同時に $B_{L,M} = B_{L,R} \oplus B_{M,R}$, $B_{M,R} = B_{L,R} \oplus B_{L,M}$ も言える
- 番号は高々 60 通りしかないため、 long long で上記のコストが管理でき、更新もビット演算で簡単にできる

解説 – 部分点 1 解法 [3/4]

- クエリ 1 の区間の端点を移動すると一意に定まる区間が分かる

$$B_{P_1,P_3} = 1011_2$$



$$B_{P_1,P_2} = 0111_2 \quad B_{P_2,P_3} = 1100_2$$

B_{P_1,P_3} はクエリ 1 で情報を得る以外に
$B_{P_1,P_2} \oplus B_{P_2,P_3}$ でも得る事が可能

$$1011_2 = 0111_2 \oplus 1100_2$$

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 部分点 1 解法 [4/4]

- よって、L, R を端点とするコスト $B_{l,r}$ の辺を張ったグラフ上で、コストの排他的論理和を取る BFS をすると答えが求まる
  - 到達できない場合は “Ambiguous” を出力する
  - $1 \leq L < R \leq 1e9$ だが、地点は高々 $2Q$ 個のため座圧かmap管理 で OK
- クエリ 2 毎に BFS をすることで $O(Q^2)$ で解ける

解説 – 満点解法 [1/2]

- 部分点 1 で考えたグラフでは、

$[\mathrm{L}, R)$ のコストは経路に依らずコスト $B_{l,r}$ が一定

⇒ ポテンシャルの概念が使える

- ある基準からの情報が分かれば、任意の区間の情報が分かる

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [2/2]

- 任意の頂点のポテンシャルを高速に求められるもの

  ⇒ 重み付き UnionFind !!

- $B_{l,r}$ を重みとして排他的論理和をとるような

  重み付き UnionFind を用いると、ソート

がボトルネックになり、$O(QlogQ)$ でこの問題を解ける

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [補足 1]

- ちなみに、 $UnionFind$ を 60 個持つことで解く方法も

  ありますが、かなり定数倍高速化をしないと落ちます

  (少なくとも Writer 陣では 60 個持ちは通りませんでした)
- 最悪ケースで頂点数 4×10^5 で UF 1 つあたり 3 つの長さ N の配列を持つと仮定すると、$4 \times 10^5 \times 3 \times 60 = 7.2 \times 10^7$

  になるため重い

解説 – 満点解法 [補足 2]

- “Ambiguous” さえ先に判定してしまえば、それ以外は
  オフラインクエリとして対処ができる

⇒ クエリ先読みをして UnionFind で “Ambiguous” を最初に
確認した後に Euler Tour やら HLD やらを使うことで、
同じく$O(QlogQ)$ で解くことも可能

MAXIMUM-CUP2024

裏話

- 中高生の時にあった「二人組作って〜」が原案
- 先に “Ambiguous” を判定するとオフラインクエリになることから、Euler 順に Mo’s Algorithm をするとクラスの種類が $1e9$ 以下でも可能で $O(Q\ sqrt(Q)\ logQ)$ で解くという案があった
- ただ $O(Q^2)$ とほとんど変わらないという理由から却下

MAXIMUM-CUP2024
MAXIMUM-CUP2024

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 3 / 11
  - 全体: 14 / 42
- FA
  - オンサイト: チーム Goriragon (60:56)
  - 全体: KumaTachiRen (45:49)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

H – Maximum vs Merin

Writer : through

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- N 種類のスライムがいて、 i 種類目は体力 h_i で c_i 体いる
- Maximum 君と Merin ちゃんがスライム 1 体に対して 1 以上 D 以下の攻撃か、2 体に分裂させるかのいずれかを交互に行う
- 先手は Maximum 君
- スライムの波が Q 回来るので、最適に行動した時に最後の一体を倒すのは誰か出力する

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

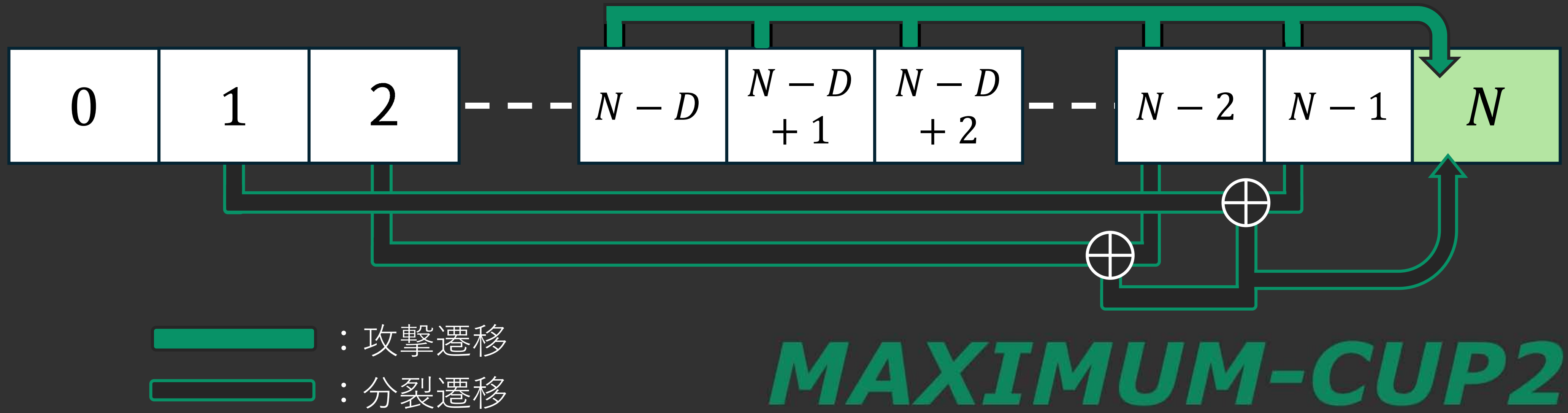
解説 – 部分点 1 [1/1]

- 愚直に攻撃と分割をシミュレーションする方法を考える
- 状態数は $S = \sum_{i=1}^{\max(h)} h_i c_i$, $V = \sum_{j=1}^{S}$ (jの分割数) として V 個
- V の最大値を V_{max} とすると $V_{\max} = 28628$ のため、体力毎のスライムの数をメモ化して後退解析をすると間に合う (OEIS参照)
- 雑にメモ化しても、$O(V \log V \cdot \max(h)^2)$ で通る

解説 – 部分点 2 [1/2]

- $g(N)$ を体力 N のスライムの Grundy 数とすると、下記になる

$$g(N) = \mathrm{mex}(\{g(N-d), g(N-k) \oplus g(k) \mid 1 \le d \le D, 1 \le k \le N\})$$



解説 – 部分点 2 [2/2]

- よって $g(0)$ から昇順に求めることが可能
- $g(N) \oplus g(N) = 0$ のため、c_i は偶奇だけを見れば良い
- $O(N + \max(h)^2)$ で解ける

解説 – 満点解法 [1/2]

- 部分点 2 の Grundy 数を見ると以下の規則に気付く
  - 最初の 0 を除いた $D + D\%2$ 項は周期 4 で以下に従う

$$\{4k-3, 4k-2, 4k, 4k-1\}$$

  - 上記より後ろの項は、それぞれ以下に周期的に従う
    - $\{0\} + \{4k-3, 4k-2, 4k, 4k-1\}$ （$D \equiv 0 \bmod 2$）
    - $\{0, D+1\} + \{4k-2, 4k-3, 4k-1, 4k\}$ （$D \equiv 1 \bmod 2$）
  - 証明はここ

解説 – 満点解法 [2/2]

- Grundy 数の一般項が $O(1)$ で求めることが可能
- よって全体で $O(N)$ で解ける

裏話

- Grundy 数の問題を作ってみたかったので作成
- 証明がとっても大変でした…頑張りました…
- ちなみに Merin ちゃんとはこれのこと ⇒

（埼玉大学マスコットキャラクター）

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 0 / 11 (部分点: 3)
  - 全体: 5 / 42
- FA
  - オンサイト: - (-)
  - 全体: karinohito (63:32)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

I – Maximum Profits by Toll

Writer: a01sa01to

MAXIMUM-CUP2024

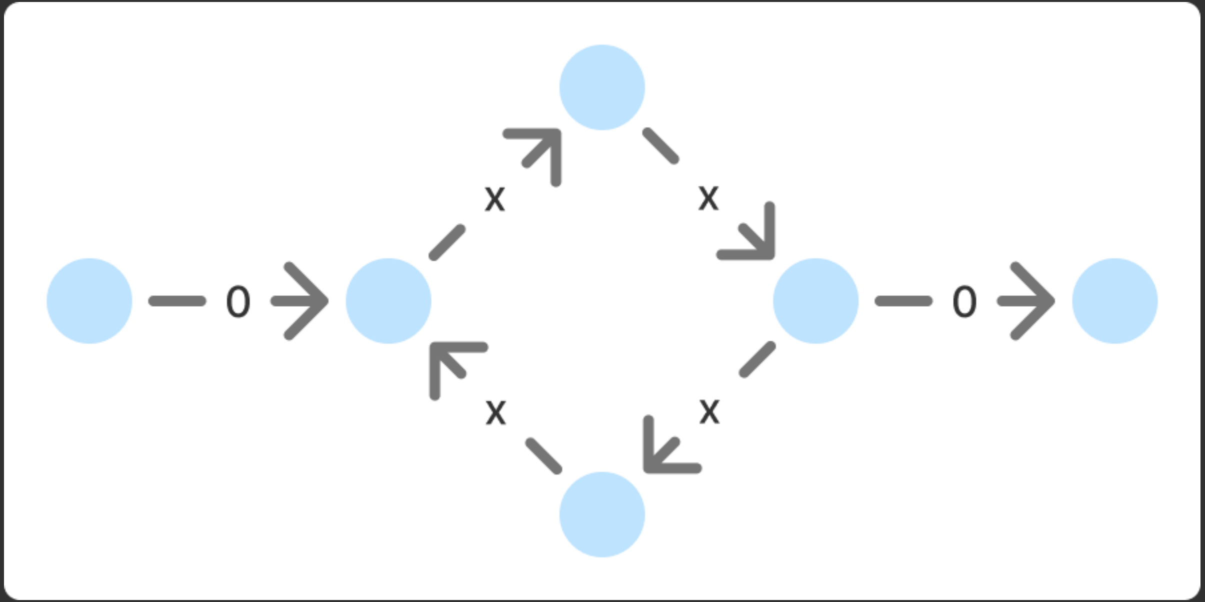
MAXIMUM-CUP2024

問題概要

- 有向グラフが与えられる
- 各辺について通行人数 t_j が定まっている
- 以下の条件を満たすように各辺に通行料 f_j を設定する
  - $\sum_{j\in X} f_j \leq c_i + \sum_{j\in Y} f_j$ が全頂点について成り立つ
    - X は入辺の集合、 Y は出辺の集合、 c_i は入力
- $\sum t_j f_j$ の最大値は？

解説 – 閉路を含む場合 [1/2]

- 閉路を含む場合、いくらでも増やせる
  - 1 つの閉路に注目
  - 閉路に含まれる辺を x 、
    そうでない点を 0 とすれば
    条件を満たしつつ
    x をいくらでも増やせる



MAXIMUM-CUP2024

解説 – 閉路を含む場合 [2/2]

- 閉路を含む場合、いくらでも増やせる
- よってこの場合は -1
- 以降、グラフは連結な DAG であると仮定する
  - DAG でなければ、閉路を含むので -1
  - 連結でなければ、各連結成分にについて同じ議論ができる

解説 – 部分点 1 解法 [1/2]

- $c_i = 0$ の場合
- 葉に注目すると出辺がないので、条件を見ると

$$\sum_{j \in X} f_j \leq c_i + \sum_{j \in Y} f_j = 0$$

- f_j は非負整数なので、入辺について $f_j = 0$ とするしかない

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 部分点 1 解法 [2/2]

- 葉の親についてみると、出辺について全部 $f_j = 0$ なので、

$$\sum_{j \in X} f_j \leq c_i + \sum_{j \in Y} f_j = 0$$

- 結局、すべての辺について $f_j = 0$ とするしかない
- 答えは `0`

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 部分点 2 解法 [1/2]

- 有向木となる場合
- 根を除く任意の町について、入辺はただ 1 本であることに注目
  - その辺を f_{in} と表記する
- すると条件は $f_{\mathrm{in}} \leq c_i + \sum_{j \in Y} f_j$ となる
- $\sum t_j f_j$ を最大化したいので、等号成立させておくのがお得

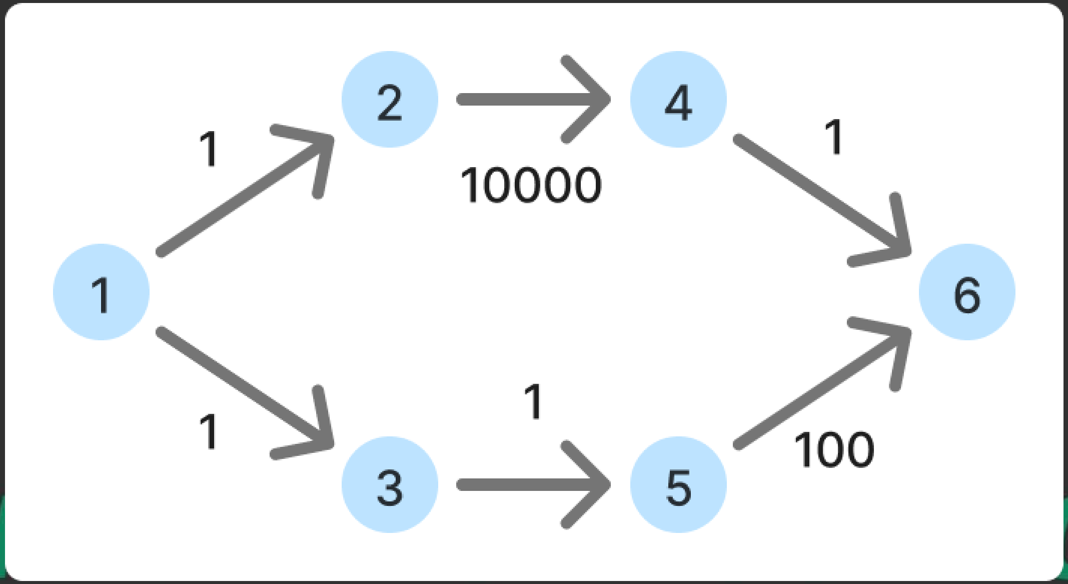
解説 – 部分点 2 解法 [2/2]

- よって各頂点に対して $f_{\mathrm{in}} = c_i + \sum_{j \in Y} f_j$ としていけば良い
  - 根の条件は $0 \leq c_i + \sum_{j \in Y} f_j$ となるが、$c_i, f_j \geq 0$ より明らかに満たす
- 葉から順番に求めていけば OK
  - トポロジカルソートしてもいいし根から再帰してもいい

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [1/9]

- 基本的に部分点 2 と同様にやれば良さそうだが…
- 入辺に対する分配をどうすればいいのか困る
- サンプル 3 の例
  - 上下どちらに 1 を設定するか？



解説 – 満点解法 [2/9]

- ~~何を思ったか~~ 線形計画問題 (LP) として表現してみる
- A をグラフの接続行列とする
  - $A \in \{-1,0,1\}^{N\times M}$ であって、以下を満たす行列 (x は任意の頂点)

$$A_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{if } e_j = (i \to x) \\ 1 & \text{if } e_j = (x \to i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

    - 読みやすさのため有向辺を「→」で表現しています

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [3/9]

- LP で表現すると以下の通り

$$\text{Maximize } \boldsymbol{t}^T \boldsymbol{f} \ \ \text{subject to } \ A\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{f} \geq 0$$

  - A は完全単模行列であり $\boldsymbol{c}$ は整数ベクトルなので、
    最適解において $\boldsymbol{f}$ が整数ベクトルとなるものが存在する
    - 用語の定義や証明は省略
  - つまり、 $\boldsymbol{f}$ の各要素を整数に限定しても最適解は得られる

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [4/9]

- 双対をとると、以下の LP が得られる

$$\text{Minimize } \boldsymbol{c}^T x \ \text{ subject to } \ A^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x} \geq 0$$

  - これも同様に、$\boldsymbol{x}$ を整数に限定しても最適解は得られる

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [5/9]

$$\text{Minimize } \boldsymbol{c}^T x \ \text{ subject to } \ A^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x} \geq 0$$

- これを文章にすると以下のようになる
  - 各頂点に非負整数 x_i を割り当てる
  - ただし、各辺 $e_j = (u \rightarrow v)$ について $x_v \geq x_u + t_j$ を満たす必要がある
  - $\sum c_i x_i$ の最小値を求めよ

解説 – 満点解法 [6/9]

- この問題を解くには？
  - $\sum c_i x_i$ の最小化なので x_i はなるべく小さくしたい
  - 各辺 $e_j = (u \to v)$ について $x_v \geq x_u + t_j$ を満たしたい
- トポロジカル順に以下のように決めていけば OK
  - 入辺がなければ $x_v = 0$
  - 入辺 $e_j = (u \to v)$ があれば $x_v \coloneqq \max(x_v, x_u + t_j)$

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [7/9]

- LP について、以下の定理が知られている (強双対定理)
  - LP とその双対がどちらも実行可能解を持つならば、
    どちらにも最適解が存在して、2 つの問題の最適値は等しい

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024

解説 – 満点解法 [8/9]

- 確認
  - 元の問題は実行可能である（$f = 0$: 最適とは限らないが条件を満たす）
  - 双対問題も実行可能である
  - トポロジカル順に求める方法で最適解が求められる
- → 強双対定理から、元の問題の最適解と一致！

解説 – 満点解法 [9/9]

- まとめると、以下のようにして求められる
  - トポロジカルソートする (閉路あれば -1)
  - トポロジカル昇順に、頂点 v に対して以下の操作をする
    - 入辺がなければ $x_v := 0$
    - あれば、その入辺を $e_j = (u \to v)$ として $x_v := \max(x_v, x_u + t_j)$
  - $\sum c_i x_i$ が答え

MAXIMUM-CUP2024

裏話

- 「難しめな問題生えないかな～」といろいろ調べてみたら双対問題を目にしたので、双対を生やした
  - 双対使ってない人多そう
- m_99 と話し合ってたらちょっとだけむずかしめになった
  - もともと $t_j, c_i = 1$ だけだった
  - 運営部屋で $t_j \geq 0$ に制約緩和してもよかった？になってました

統計情報

- AC チーム数
  - オンサイト: 0 / 11 (部分点: 1)
  - 全体: 4 / 42
- FA
  - オンサイト: - (-)
  - 全体: seekworser (83:00)

MAXIMUM-CUP2024

MAXIMUM-CUP2024