Lista I

João Pedro Silva de Sousa
122122366

Pedro Henrique Honorio Saito
122149392

Questão 1

Considere um conjunto X de fórmulas da LC construídas a partir do conjunto $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de conectivos. Desejamos provar que, para $\varphi \in X$, temos que:

> **Proposição**: Para todo $k \in \mathbb{N}$, se φ possui k ocorrências de símbolos proposicionais, então o comprimento de φ é dado por $4k - 3$.

Por indução sobre as fórmulas de X:

- **Base**: Seja φ um símbolo proposicional pertencente à X. Assim, temos que

$$|\varphi| = 4(1) - 3 = 1. \quad \blacksquare \tag{1}$$

- **Recursivo**: Dada uma fórmula $F \in X$ de tamanho m e uma fórmula básica γ da LC, a operação $* \, (F, \gamma)$ resultará em:

$$(F * \gamma), \text{ tal que } |(F * \gamma)| = m + 4 \tag{2}$$

- **Hipótese de Indução**: Para toda fórmula $F \in X$ com $n \leq k - 1$ símbolos proposicionais, o comprimento da fórmula é dado por

$$|F_n| = 4n - 3, \tag{3}$$

onde F_n indica uma fórmula com n símbolos proposicionais.

Portanto, partindo da Equação 3, substituindo $n = k - 1$ obteremos:

$$F_{k-1}, \text{ tal que } |F_{k-1}| = 4(k-1) - 3. \tag{4}$$

Aplicando uma operação binária qualquer $* \, (F_{k-1}, \varphi)$ teremos como resultado:

$$\begin{aligned} |(F_{k-1} * \varphi)| &= (4(k-1) - 3) + 4 \quad \text{por } (2) \\ |(F_{k-1} * \varphi)| &= 4(k - 1 + 1) - 3 \\ |(F_{k-1} * \varphi)| &= 4k - 3 \end{aligned} \tag{5}$$

Desse modo, concluímos que a expressão $4k - 3$ é válida para representar o comprimento de qualquer fórmula da linguagem LC_{C} com k símbolos proposicionais. $\blacksquare$

Questão 3

Item C

Vamos provar o seguinte resultado:

Proposição: Nenhum cografo possui P_4 como subgrafo induzido.

Por indução na estrutura de cografos:

Base: Somente um vértice, logo nada a demonstrar.

Hipótese de Indução: Suponha que F seja a união disjunta ou o join de outros dois cografos G e H que não admitem P_4 como subgrafo induzido. Assim, vamos analisar cada um dos casos:

- **União disjunta**: Se F é a união disjunta dos cografos G e H, por hipótese de indução vale que G e H não possuem P_4 como subgrafo induzido. Se F tivesse P_4 como subgrafo induzido, os vértices desse caminho estariam todos em G ou em H, o que é impossível, já que a hipótese de indução vale para ambos.
- **Join**: Se F é construído a partir do *join* de G e H, então seja E o conjunto das arestas adicionadas entre os vértices de G e H para gerar F. Suponhamos por contradição que P_4 com vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ seja um subgrafo induzido em F. Por hipótese de indução, não pode ocorrer de todos os vértices estarem em G ou H, disso seguem-se dois casos.

I - Sem perda de generalidade, se ocorre que $v_1 \in G$ e $v_4 \in H$, então $\{v_1, v_4\} \in E$, porém $\{v_1, v_4\}$ não é uma aresta do caminho, o que contradiz a afirmação que P_4 é um subgrafo induzido.

II - Se $v_1, v_4 \in G$, então, sem perda de generalidade, teríamos três outras possibilidades

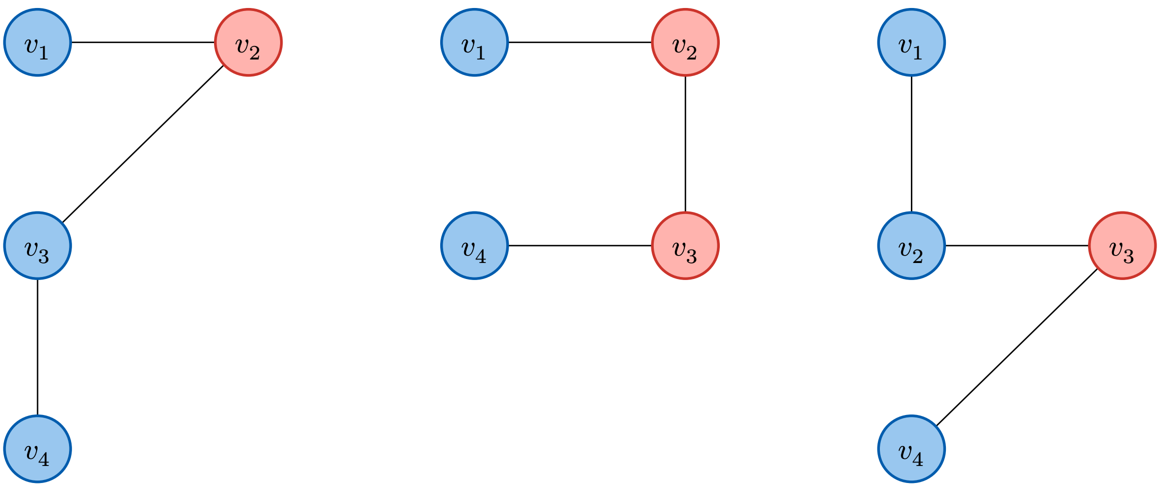
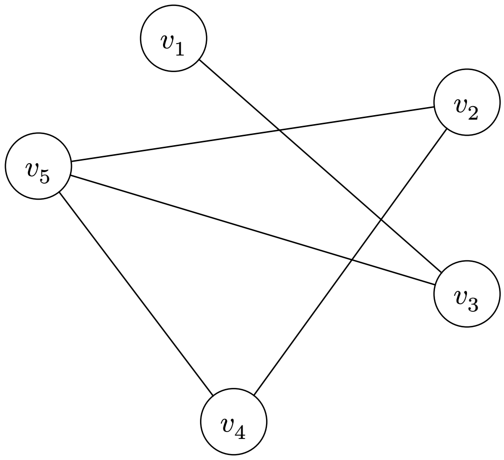


Figura 1: *Possibilidades de distribuição dos vértices de P_4 entre G e H. Os marcados em azul pertencem a G, e os de vermelho a H*

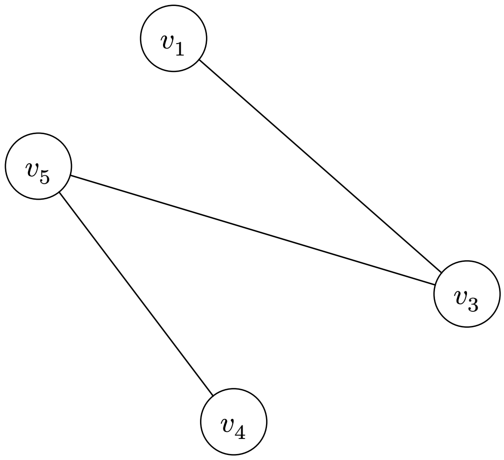
No primeiro, temos que $v_2 \in H$ e $v_4 \in G$, logo $\{v_2, v_4\} \in E$, porém essa aresta não está nas arestas de P_4. Nos outros dois, temos $v_1 \in G$ e $v_3 \in H$, de modo que $\{v_1, v_3\} \in E$, mas essa aresta também não está em P_4 em ambos os casos.

Esgotadas as possibilidades, concluímos então que não é possível P_4 ser um subgrafo induzido de um cografo. Uma vez que provamos para F, então pelo Princípio de Indução Finita, essa propriedade vale para todo cografo . ■

Item D



Com efeito, se ao removermos v_2 e as arestas que esse vértice participa, obteremos um subgrafo induzido P_4, e o grafo acima não pode ser, pois, um cografo pelo que foi provado no item anterior.



■

Questão 9

Sejam J o conjunto dos jogadores do torneio T onde todos os jogadores enfrentam os demais em partidas que não admitem empates, e D uma relação binária em J tal que, se $A, B \in J$ são jogadores e $(A, B) \in D$, dizemos que "A perdeu para B". Se T é um par ordenado (J, D), então T é um grafo de torneio, isto é, um grafo direcionado anti-simétrico e completo.

> **Proposição**: Em um torneio T sempre há um jogador $A \in J$ tal que, para qualquer outro jogador $B \in J$, pelo menos uma das afirmações abaixo é satisfeita
>
> **I** - $(B, A) \in D$
>
> **II** - Existe um jogador $C \in J$ tal que $(B, C) \in D$ e $(C, A) \in D$

Um jogador A que satisfaz a proposição acima será referido daqui em diante como *pivô*. Dessa forma provaremos a proposição por indução no número $n \geq 2$ de jogadores no torneio.

Base: Com $n = 2$, se $(B, A) \in D$, então I é satisfeita com o pivô A. Do contrário, temos que $(A, B) \in D$, e I é satisfeito para B como pivô.

Hipótese de Indução: Suponha que a proposição vale para um torneio de $n > 2$ jogadores.

Seja T um torneio de $n+1$ jogadores e T' um subtorneio de n jogadores de T obtido ao se desconsiderar um jogador $K \in J$ e todas as suas partidas. Em outras palavras, T' é um subgrafo induzido de T ao se remover o vértice rotulado por K.

Pela hipótese de indução, T' possui um pivô $A \in J$. A partir disso, teremos três casos para o torneio T:

I. $(K, A) \in D$, então I é satisfeita. Disso segue que a proposição vale para T com o pivô A.

II. $\exists\, C \in J, ((K, C) \in D \;\text{ e }\; (C, A) \in D)$, nesse caso a afirmação II é satisfeita. Portanto, para esse caso, também vale que A é um pivô do torneio T.

III. $\forall B \in J, ((B, K) \in D \;\text{ ou }\; (A, B) \in D)$, ou seja, para qualquer jogador B, se K perdeu para B, então A perdeu para B. Se o consequente dessa condição é verdadeiro, então pela hipótese de indução existe $C \in J$ tal que

$$(B, C) \in D \;\text{ e }\; (C, A) \in D \tag{6}$$

Uma vez que C perdeu para A, então temos que C deve ter perdido para K visto o que está sendo afirmado em **III**. Por conseguinte, temos que B perdeu para "alguém" que perdeu para K. Concluímos então que, para todo B, uma das afirmações é verdadeira

$$B \textit{ perdeu para } K$$

$$B \textit{ perdeu para alguém que perdeu para } K.$$

Portanto, a proposição vale para o torneio T com o jogador K como o pivô, e portanto, para um torneio de $n+1$ jogadores. Pelo Princípio de Indução, como vale para um para $n = 2$ e para $n+1$ com $n > 2$, então vale para todo $n \geq 2$. ∎

Questão 13

Item H

Antes de provarmos o resultado da proposição de conectivos completos, vamos estabelecer a seguinte definição:

> **Conjuntos de Conectivos Completos**: Seja C um conjunto de conectivos, dizemos que C é completo se, para qualquer conjunto Prop de proposições, para toda fórmula φ da LC(Prop), existe $\psi \in \mathrm{LC}_{\mathrm{C(Prop)}}$ tal que $(\varphi \vDash \psi \wedge \psi \vDash \varphi)$.

Observação. Por conveniência, usaremos o símbolo $\dashv\vDash$ para denotar equivalência semântica.

Posto isso, desejamos provar a proposição abaixo:

> **Conjuntos de Conectivos Completos**: Mostre que o conjunto C de conectivos $\{\bot, \top, \texttt{IF-THEN-ELSE}\}$ é completo.

Por indução em φ da LC(Prop) usual com todos os conectivos:

- **Base**: Se φ é básica, isto é, $\varphi \in$ Prop, então φ está em $\mathrm{LC}_{\mathrm{C(Prop)}}$ também. ∎

- **Indutivos**: Agora provaremos para cada um dos conectivos $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ da $\mathrm{LC_C}(\mathrm{Prop})$.

R $\neg$) Se φ é $(\neg\psi)$, então pela hipótese de indução existe $\beta \in \mathrm{LC_C}(\mathrm{Prop})$ de modo que $\psi \dashv\vdash \beta$. Logo, podemos concluir que $(\texttt{IF } \beta \texttt{ THEN } \top \texttt{ ELSE } \bot) \dashv\vdash (\neg\psi)$.

R $\wedge$) Considerando φ igual à $(\alpha \wedge \beta)$ e $\dot{\alpha}, \dot{\beta} \in \mathrm{LC_C}(\mathrm{Prop})$ de modo que $\alpha \dashv\vdash \dot{\alpha}$ e $\beta \dashv\vdash \dot{\beta}$. Logo, podemos concluir que $\left(\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \dot{\beta} \texttt{ ELSE } \bot\right) \dashv\vdash (\alpha \wedge \beta)$.

R $\vee$) Considerando φ igual à $(\alpha \vee \beta)$ e $\dot{\alpha}, \dot{\beta} \in \mathrm{LC_C}(\mathrm{Prop})$ de modo que $\alpha \dashv\vdash \dot{\alpha}$ e $\beta \dashv\vdash \dot{\beta}$. Logo, podemos concluir que $\left(\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \top \texttt{ ELSE } \dot{\beta}\right) \dashv\vdash (\alpha \vee \beta)$.

R $\rightarrow$) Considerando φ igual à $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $\dot{\alpha}, \dot{\beta} \in \mathrm{LC_C}(\mathrm{Prop})$ de modo que $\alpha \dashv\vdash \dot{\alpha}$ e $\beta \dashv\vdash \dot{\beta}$. Logo, podemos concluir que $\left(\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \dot{\beta} \texttt{ ELSE } \top\right) \dashv\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$.

R $\leftrightarrow$) Considerando φ igual à $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ e $\dot{\alpha}, \dot{\beta} \in \mathrm{LC_C}(\mathrm{Prop})$ de modo que $\alpha \dashv\vdash \dot{\alpha}$ e $\beta \dashv\vdash \dot{\beta}$. Logo, podemos concluir que $\left(\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \dot{\beta} \texttt{ ELSE } \left(\texttt{IF } \dot{\beta} \texttt{ THEN } \bot \texttt{ ELSE } \top\right)\right) \dashv\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Para averiguarmos as operação realizadas, podemos montar a tabela verdade para cada um dos conectivos.

$\dot{\beta}$	$\texttt{IF } \dot{\beta} \texttt{ THEN } \bot \texttt{ ELSE } \top$
V	F
F	V

Tabela 1: *Tabela verdade equivalente a* $(\neg\beta)$.

$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	$\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \dot{\beta} \texttt{ ELSE } \bot$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 2: *Tabela verdade equivalente a* $(\alpha \wedge \beta)$.

$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	$\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \top \texttt{ ELSE } \dot{\beta}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 3: *Tabela verdade equivalente a* $(\alpha \vee \beta)$.

$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	$\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \dot{\beta} \texttt{ ELSE } \top$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 4: *Tabela verdade equivalente a* $(\alpha \rightarrow \beta)$.

$\dot{\alpha}$	$\dot{\beta}$	$\texttt{IF } \dot{\alpha} \texttt{ THEN } \dot{\beta} \texttt{ ELSE } \left(\texttt{IF } \dot{\beta} \texttt{ THEN } \bot \texttt{ ELSE } \top\right)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 5: *Tabela verdade equivalente a* $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Questão 14

Item B

Vamos demonstrar o seguinte resultado:

> **Proposição**: Seja C o conjunto de conectivos $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e $\varphi \in \mathrm{LC_C}(\mathrm{Prop})$ uma fórmula construída a partir dos conectivos de C. Se $p_0, p_1, ..., p_n$ são as subfórmulas atômicas de φ, então podemos afirmar que
>
> $$p_0, p_1, ..., p_n \vDash \varphi. \tag{7}$$

Por indução sobre as fórmulas de X:

- **Base**: Se φ é uma fórmula atômica, então $\varphi = p_i$ para algum $i \in \{0, ..., n\}$. Logo, qualquer contexto c_i que torne verdadeiros todos os $p_0, p_1, ..., p_n$ satisfaz em particular p_i, ou seja,

$$c_i(p_0) = ... = c_i(p_n) = \mathrm{V} \Rightarrow p_0, p_1, ..., p_n \vDash \varphi \qquad \forall\, \varphi = p_i. \ \blacksquare \tag{8}$$

- **Hipótese de Indução**: Sejam α e β subfórmulas de φ construídas a partir de C, assumiremos, pela hipótese de indução, que

$$\{p_0, p_1, ..., p_n\} \vDash \alpha \ \text{ e } \ \{p_0, p_1, ..., p_n\} \vDash \beta. \tag{9}$$

Queremos mostrar que, sob a mesma condição, vale $c(\varphi) = \mathrm{V}$. Analisando cada caso:

- **Caso** ($\varphi = \alpha \wedge \beta$):

$$c(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{V} \Leftrightarrow c(\alpha) = \mathrm{V} \ \text{ e } \ c(\beta) = \mathrm{V} \tag{10}$$

  Mas pela hipótese de indução, temos que $c(\alpha) = c(\beta) = \mathrm{V}$, logo $c(\varphi) = \mathrm{V}$.

- **Caso** ($\varphi = \alpha \vee \beta$):

$$c(\alpha \vee \beta) = \mathrm{V} \Leftrightarrow c(\alpha) = \mathrm{V} \ \text{ ou } \ c(\beta) = \mathrm{V} \tag{11}$$

  Novamente, pela HI, temos que $c(\alpha) = c(\beta) = \mathrm{V}$, logo $c(\varphi) = \mathrm{V}$.

- **Caso** ($\varphi = \alpha \rightarrow \beta$):

$$c(\alpha \rightarrow \beta) = \mathrm{V} \Leftrightarrow c(\alpha) = \mathrm{F} \ \text{ ou } \ c(\beta) = \mathrm{V} \tag{12}$$

  Assim, como $c(\beta) = \mathrm{V}$, logo $c(\varphi) = \mathrm{V}$.

- **Caso** ($\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$):

$$c(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathrm{V} \Leftrightarrow c(\alpha) = c(\beta) \tag{13}$$

  Em todos os casos $c(\alpha) = c(\beta) = \mathrm{V}$, temos que $c(\varphi) = \mathrm{V}$.

Portanto, para quaisquer fórmulas de $p_0, p_1, ..., p_n$ e quaisquer combinação dos conectivos de C, teremos que $p_0, p_1, ..., p_n \vDash \varphi$. $\blacksquare$

Item C

Vamos provar a seguinte proposição:

> **Proposição**: O conjunto $C = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de conectivos não é completo.

Suponha, por contradição, que o conjunto C de conectivos é completo. Então, para toda fórmula $\varphi \in \mathrm{LC}(\mathrm{Prop})$, existe $\psi \in \mathrm{LC}_{\mathrm{C}(\mathrm{Prop})}$ tal que $(\varphi \vDash \psi \wedge \psi \vDash \varphi)$.

Logo, basta encontrar uma fórmula $\varphi \in \mathrm{LC}(\mathrm{Prop})$ que não seja semanticamente equivalente a nenhuma fórmula em $\mathrm{LC}_{\mathrm{C}}(\mathrm{Prop})$. Considere $\varphi = (\neg p_0)$. Desejamos encontrar $\psi \in \mathrm{LC}_{\mathrm{C}(\mathrm{Prop})}$ tal que $(\varphi \vDash \psi)$ e vice-versa.

Note que, como C contém apenas conectivos binários, qualquer fórmula em $\mathrm{LC}_{\mathrm{C}}(\mathrm{Prop})$ deve ter a forma:

$$(p_0 \wedge p_1) \qquad (p_0 \vee p_1) \qquad (p_0 \rightarrow p_1) \qquad (p_0 \leftrightarrow p_1)$$

Se p_0 e p_1 forem semanticamente verdadeiros em algum contexto, então toda a fórmula também o será (como provado na Questão 14 b). Nesse caso, $(\neg p_0)$ seria falsa, o que gera contradição com a hipótese de equivalência. Portanto, não existe $\psi \in \mathrm{LC}_{\mathrm{C}}(\mathrm{Prop})$ tal que $\psi \vDash \neg p_0$, e C não é completo.
■

Questão 17

Item A

Considerando os julgamentos $\Gamma = \{(p \vee q) : V, (p \rightarrow r) : V, (q \rightarrow r) : V, r : F\}$, vamos montar uma árvore de avaliação:

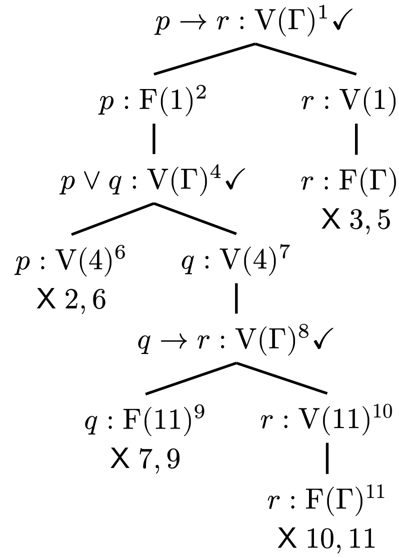


Figura 2: *Árvore de avaliação com ramos fechados e outros saturados.*

Onde cada nó segue o modelo:

$$\textit{fórmula} : \textit{julgamento}(\textit{origem})^{\textit{índice}} \quad \text{tal que } \checkmark = \textit{mexido} \text{ e } \mathsf{X} = \textit{fechado} \tag{14}$$

Uma vez que a árvore fechou, então temos que r é consequência sintática do conjunto de fórmulas $\{(p \vee q), (p \rightarrow r), (q \rightarrow r)\}$.

Item C

Seja o conjunto de julgamentos $\Gamma = \{p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) : V, (p \wedge (q \wedge r)) \vee ((\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge (\neg r))) : F\}$, uma árvore de avaliação para Γ é dada abaixo.

$$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) : \text{V}(\Gamma)^1 \checkmark$$

$$(p \wedge (q \wedge r)) \vee ((\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge (\neg r))) : \text{F}(\Gamma)^2 \checkmark$$

$$p : \text{V}(1)^3 \qquad p : \text{F}(1)^4$$

$$q \leftrightarrow r : \text{V}(1)^5 \checkmark \qquad q \leftrightarrow r : \text{F}(1)^6$$

$$q : \text{V}(5)^7 \qquad q : \text{F}(5)\text{\^{}8}$$

$$r : \text{V}(5)^9 \qquad r : \text{F}(5)^{10}$$

$$p \wedge (q \wedge r) : \text{F}(2)^{11} \qquad \neg p \wedge ((\neg q) \wedge (\neg r)) : \text{F}(2)^{12} \checkmark$$

$$\neg p : \text{F}(12)^{13} \checkmark \qquad (\neg q) \wedge (\neg r) : \text{F}(12)^{14}$$

$$p : \text{V}(12)^{14}$$

Por definição, o ramo do nó 14 está aberto e saturado, de modo que Γ é satisfazível e, portanto, temos que

$$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \nvDash (p \wedge (q \wedge r)) \vee ((\neg p) \wedge ((\neg q) \wedge (\neg r))) \tag{15}$$

Questão 18

Item C

Seja C o conjunto de conectivos $\{\top, \bot, \texttt{IF-THEN-ELSE}\}$, vamos encontrar as regras de manipulação de árvores de avaliação para esses conectivos e que sejam *corretas*, isto é, que preservem a satisfabilidade das árvores.

Comecemos pelos conectivos $\top$ e $\bot$, que são avaliados diretamente para verdadeiro e falso, respectivamente. Como não dependem de subfórmulas, definiremos suas regras como:

- **Regra** $\top$: Se A é árvore de avaliação para um conjunto de julgamentos Γ e r é um ramo aberto com o nó ainda não *mexido* $(\top : \text{V})$, então nenhuma ação é necessária pois $\top$ é avaliado diretamente para verdadeiro independentemente. Por outro lado, se nos depararmos com o nó $(\top : \text{F})$, fechamos imediatamente a árvore pois isso representa uma contradição.
- **Regra** $\bot$: Análogo ao caso anterior, isto é, para $(\bot : \text{F})$ não há nada a se fazer e, se encontrarmos $(\bot : \text{V})$, fechamos a árvore pois isso indica uma contradição.

Por fim, a regra para o conectivo `IF-THEN-ELSE` pode ser facilmente identificada ao analisarmos sua tabela verdade:

α	β	γ	IF α THEN β ELSE γ
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

Tabela 6: *Tabela verdade para* `IF-THEN-ELSE`.

Como podemos perceber, para `IF-THEN-ELSE` verdadeiro temos duas opções:

1. α e β são verdadeiros, sendo γ indeterminado pois pode assumir tanto V quanto F.
2. α falso e γ verdadeiro, sendo que β pode assumir tanto V quanto F.

Por outro lado, para `IF-THEN-ELSE` falso temos outras duas opções:

1. α e γ são falsos, tal que β pode assumir tanto V quanto F.
2. α verdadeiro e β falso, sendo que γ varia entre V e F.

Assim, para uma árvore de avaliação A com nó ainda não *mexido* $(\texttt{IF}\ \alpha\ \texttt{THEN}\ \beta\ \texttt{ELSE}\ \gamma) : \mathrm{V}$ ou $(\texttt{IF}\ \alpha\ \texttt{THEN}\ \beta\ \texttt{ELSE}\ \gamma) : \mathrm{F}$, teremos as regras:

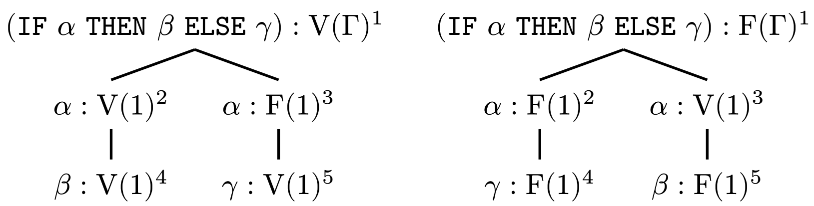


Figura 4: *Regra de conectivo para* `IF-THEN-ELSE` *verdadeiro e falso.*

■

Questão 19

Item A

Antes de provarmos o resultado da proposição, iremos provar o seguinte lema

> **Lema**: Seja r um ramo de uma árvore de avaliação e $\varphi : *$ um julgamento que ocorre como rótulo nesse ramo. Se r' é a extensão do ramo r ao se aplicar uma regra de conectivo a $\varphi : *$, e c um contexto que satisfaz r', então c satisfaz $\varphi : *$

Demonstração: Provaremos observando cada regra da árvore de avaliação.

R $\neg$) Seja $\varphi = (\neg\psi)$, como r é saturado, então $\psi : \overline{*}$ ocorre como rótulo em r por definição. Uma vez que c satisfaz $\psi : \overline{*}$ por hipótese, então temos que $c(\psi) = \overline{*} \implies c(\varphi) = *$, e $\varphi : *$ é satisfeito

R $\wedge$) V : Se $\varphi = \alpha \wedge \beta$, então $\alpha : \mathrm{V}$ e $\beta : \mathrm{V}$ ocorrem como rótulos em r. Como $c(\alpha) = \mathrm{V}$ e $c(\beta) = \mathrm{V}$, então $c(\varphi) = \mathrm{V}$.

$R \wedge)$ F : Temos que α : F ou β : F ocorrem como rótulos em r. Como vale que c satisfaz o julgamento de α ou β por hipótese, então teremos que $c(\alpha \wedge \beta) = c(\varphi) = \mathrm{F}$.

$R \vee)$ V : Se $\varphi = \alpha \vee \beta$, então α : V ou β : V ocorrem como rótulos em r. Como $c(\alpha) = \mathrm{V}$ ou $c(\beta) = \mathrm{V}$, então $c(\varphi) = \mathrm{V}$.

$R \vee)$ F : Neste caso ocorrem tanto α : F quanto β : F em r. Uma vez que esses julgamentos são satisfeitos, então $c(\varphi) = \mathrm{F}$.

$R \rightarrow)$ V: Se $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$, então α : F ou β : V ocorrem como rótulos em r. Se c satisfaz ao menos um desses julgamentos, então c irá satisfazer φ : V

$R \leftrightarrow)$ V: Se $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$, então temos que ou α : V e β : V ocorrem em r, ou α : F e β : F ocorrem no mesmo ramo. Para ambos os casos, como os julgamentos são satisfeitos, é verdade que $c(\varphi) = \mathrm{V}$, e c satisfaz φ : V

$R \leftrightarrow)$ F: Por fim, se $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$, então ou α : V e β : F ocorre em r, ou α : F e β : V ocorre em r. Como para qualquer um dos casos, c satisfaz esses julgamentos, teremos que $c(\varphi) = \mathrm{F}$.

■

Agora provando o resultado seguinte.

Proposição: Se r é um ramo aberto e saturado numa árvore de avaliação A para Γ, e c_r é um contexto construído como

$$c_r(p) = \begin{cases} \mathrm{V}, \text{ se } p : \mathrm{V} \\ \mathrm{F}, \text{ se } p : \mathrm{F} \end{cases} \tag{16}$$

em que p são fórmulas básicas que ocorrem em julgamentos que rotulam os vértices de r, então c_r satisfaz todos os julgamentos que ocorrem em r.

Demonstração: Se $\varphi : *$ é um julgamento que ocorre em r, então provaremos por indução na estrutura sintática de φ

Base: Se φ é uma fórmula básica, então c_r satisfaz $\varphi : *$ por construção.

Hipótese de Indução: Se $\varphi = (\neg\psi)$ ou $\varphi = (\alpha * \beta)$ e temos por definição de r saturado que rótulos envolvendo ψ, α ou β ocorrem em r, suponha que o teorema vale para esses rótulos.

Com efeito, se esses rótulos ocorrem em r, então isso se deve ao fato de termos aplicado uma regra de conectivos $\varphi : *$, e como os julgamentos desses rótulos são satisfeitos por hipótese de indução, então $\varphi : *$ deve ser satisfeito visto o lema anterior. Pelo Princípio de Indução Finita, então todo julgamento de r é satisfeito por c_r.

■

Item C

A prova do teorema da completude do sistema de provas por árvores de avaliação se dará sobre a suposição de que o conjunto de fórmulas Σ é finito.

Teorema: $\Sigma \nvdash \varphi \Longrightarrow \Sigma \nvDash \varphi$

Demonstração: Por hipótese, uma árvore de avaliação para Γ tal que

$$\Gamma = \{\sigma : \mathrm{V} \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{\varphi : \mathrm{F}\} \tag{17}$$

terá pelo menos um ramo r aberto e saturado (sob a hipótese de que Σ é finito). Com efeito, se c_r é o contexto construído conforme a Equação 16, então c_r satisfaz todos os julgamentos que ocorrem como rótulos no ramo pela proposição do item anterior. Portanto, existe um contexto $c = c_r$ tal que

$$\forall \sigma \in \Sigma, (c(\sigma) = \mathrm{V}) \;\text{ e }\; c(\varphi) = \mathrm{F} \tag{18}$$

donde concluímos que

$$\Sigma \nvDash \varphi \tag{19}$$

■