Atividades sobre Modelos Epidemiológicos e Estabilidade

Pedro Henrique Honorio Saito

122149392

1. Modelo SI

1.1. Letra a

Enunciado: Explique como foi obtido o sistema (1).

O sistema (1) é obtido a partir da taxa média de novas infecções, representada por $\beta \frac{SI}{N}$, onde S e I indicam, respectivamente, as populações de *suscetíveis* e *infectados*. A formulação das equações diferenciais baseia-se na variação das populações ao longo do tempo e, isto é, no cálculo das derivadas de S e I em relação a t.

Considerando $S(t)$, $I(t)$ e $S(t + \Delta t)$, $I(t + \Delta t)$ a quantidade de indivíduos nos compartimentos de suscetíveis e infectados nos instantes de tempo t e $t + \Delta t$, respectivamente. A variação das populações seria dada por:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \Delta t + \text{desvíos}$$
$$I(t + \Delta t) - I(t) = \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \Delta t + \text{desvíos}$$

Assim, aplicando a definição de derivada em ambas as equações:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \cancel{\Delta t} + \text{desvíos}$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \cancel{\Delta t} + \text{desvíos}$$

Portanto, chegamos ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \end{cases} \blacksquare$$

1.2. Letra b

Enunciado: Mostre que o tamanho da população permanece constante.

Dada a expressão do tamanho absoluto da população $N = S + I$, podemos tentar aplicar a definição de limite para descobrir a taxa de variação da população N. Assim, considerando $N(t)$ e $N(t + \Delta t)$ a quantidade de indivíduos da população nos instantes t e $t + \Delta t$ respectivamente.

$$\begin{aligned} N(t+\Delta t) - N(t) &= S(t+\Delta t) + I(t+\Delta t) - (S(t) + I(t)) \\ &= S(t+\Delta t) - S(t) + I(t+\Delta t) - I(t) \\ &= -\beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)}\Delta t + \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)}\Delta t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desse modo, é fácil percebermos que a população N é uma constante e, portanto, sua variação no tempo é nula.

1.3. Letra c

Enunciado: Mostre que $s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}$ e $\tau = \beta t$ são grandezas adimensionais.

Para as duas primeiras variáveis s e i podemos partir da definição delas:

$$s = \frac{S\text{ (Qtd. de indivíduos suscetíveis)}}{N\text{ (Qtd. da população)}} \quad \text{e} \quad i = \frac{I\text{ (Qtd. de indivíduos infectados)}}{N\text{ (Qtd. da população)}}$$

Como o numerador e denominador possuem as mesmas unidades de medida, teremos variáveis adimensionais a partir disso. Por fim, temos β que, por representar $\frac{\text{Número de contatos}}{\text{unidade de tempo}}$, equivale *frequência de contatos* com unidade de medida u.t.^{-1}. Desse modo,

$$[\tau] = [\beta] \cdot [t] = \frac{1}{\text{tempo}} \cdot \text{tempo}.$$

Ou seja, τ é adimensional. Assim, mostramos que $s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}$ e $\tau = \beta t$ são todas grandezas **adimensionais**, pois resultam da razão entre quantidades com mesma unidade ou do produto de grandezas cujas unidades se cancelam.

1.4. Letra d

Enunciado: Obtenha o sistema de EDOs adimensionalizado correspondente.

Aqui percebemos uma relação entre as variáveis dimensionalizadas e as adimensionais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s &\to S \\ i &\to I \\ \tau &\to t \end{aligned}$$

Feita essa observação, vamos partir da derivada $\frac{ds}{d\tau}$ e expandi-la por meio da regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\tau} &= \frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{S}{N}\right) \cdot \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{1}{N}\frac{dS}{dt} \cdot \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \left(-\cancel{\beta}\frac{SI}{N}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{\beta}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{ds}{d\tau} = -s \cdot i}$$

Repetindo o mesmo procedimento para o i, chegaremos a uma solução semelhante:

$$\begin{aligned}
\frac{di}{d\tau} &= \frac{di}{dt}\frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{I}{N}\right) \cdot \frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{1}{N}\frac{dI}{dt} \cdot \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1}{N} \cdot \left(\cancel{\beta}\frac{SI}{N}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{\beta}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{di}{d\tau} = s \cdot i}$$

Com isso, encontramos o sistema de equações diferenciais adimensionalizadas para a questão, dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{d\tau} = -s \cdot i \\ \dfrac{di}{d\tau} = s \cdot i \quad \blacksquare \end{cases}$$

1.5. Letra e

Enunciado: Use a conservação do tamanho da população para chegar em EDOs desacopladas para as variáveis s e i.

Por meio da conservação do tamanho da população $N = S + I$, podemos relacionar as variáveis adimensionalizadas da mesma forma:

$$\begin{aligned}
s + i = \frac{S+I}{N} &= \frac{N}{N} = 1 \\
\to s &= 1 - i \\
\to i &= 1 - s
\end{aligned}$$

Com isso, conseguimos substituir no sistema de equações diferenciais descoberto na questão anterior:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{d\tau} = -s \cdot (1-s) = -s + s^2 \\ \dfrac{di}{d\tau} = i \cdot (1-i) = i - i^2 \end{cases}$$

1.6. Letra f

Enunciado: Você consegue achar soluções de forma analítica para essas EDOs? Explique.

Sim, as EDOs expressas no sistema anterior são **separáveis** e, portanto, conseguimos chegar na solução para elas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{d\tau} = -s + s^2 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{ds}{s(s-1)} = \int d\tau \\ \dfrac{di}{d\tau} = i - i^2 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{di}{i(i-1)} = \int d\tau \end{cases}$$

Resolvendo a primeira, chegaremos que:

$$\int \frac{ds}{s(s-1)} = \tau + C_1$$

Decompondo por frações parciais teremos que:

$$\int \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right) ds = \tau + C_1$$

Assim, o lado esquerdo ficará:

$$-\ln|s| + \ln|s-1| = \tau + C_1$$

Combinando os logaritmos obteremos:

$$\ln\left|\frac{s-1}{s}\right| = \tau + C_1$$

Por fim, para a exponenciação, podemos definir $K = e^{C_1}$:

$$\left|\frac{s-1}{s}\right| = Ke^{\tau} \Rightarrow \frac{s-1}{s} = Ke^{C_1}$$

Por fim, vamos isolar o s:

$$\frac{s-1}{s} = Ke^{\tau} \Rightarrow s - 1 = sKe^{\tau} \Rightarrow s(1 - Ke^{\tau}) = 1 \Rightarrow s(\tau) = \frac{1}{1 - Ke^{\tau}}$$

Chamando $C_s = -K$, ficaremos com essa solução geral:

$$\boxed{s(\tau) = \frac{1}{1 - Ke^{\tau}} \quad \text{ou} \quad s(\tau) = \frac{1}{1 + C_s e^{\tau}}}$$

Agora vamos determinar a solução analítica para a condição inicial $s(0) = s_0$:

$$s_0 = \frac{1}{1 + C_s}$$

$$C_s = \frac{1}{s_0} - 1 = \frac{1 - s_0}{s_0}$$

Sendo assim, encontramos a solução analítica:

$$\boxed{s(\tau) = \frac{s_0}{s_0 + (1 - s_0)e^{\tau}}}$$

1.7. Letra g

Enunciado: Obtenha os pontos de equilíbrio para as EDOs adimensionalizadas. Analise a estabilidade desses equilíbrios a partir das EDOs linearizadas.

Para obter os pontos de equilíbrio, usaremos as equações diferenciais desacopladas obtidas:

$$\frac{ds}{d\tau} = s(s-1) = 0 \Rightarrow s^* = 0 \quad \text{ou} \quad s^* = 1, \frac{di}{d\tau} = i(1-i) = 0 \Rightarrow i^* = 0 \quad \text{ou} \quad i^* = 1.$$

Nesse sentido, os equilíbrios do sistema (s, i) são as duas combinações:

$$(s^*, i^*) \in \{0,1\} \times \{0,1\} \setminus \{(0,0),(1,1)\} = (1,0),(0,1)$$

Como impusemos a conservação $s + i = 1$, os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ não são equilíbrios admissíveis. Portanto, para analisarmos a estabilidade dos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, pegaremos a derivada das EDOs nesses pontos. Assim, para

$$\frac{di}{d\tau} = f_1(i) = i(1-i)$$

faremos

$$\dot{f}_1(i) = 1 - 2i$$

Agora basta substituirmos os pontos. Os equilíbrios são dados por $f(i^*) = 0$, isto é, $i_0^* = 0$ e $i_1^* = 1$.

1. Em $i_0^* = 0$: Temos um equilíbrio instável, pois

$$\dot{f}_1(0) = 1 - 2 \cdot 0 = 1 > 0.$$

1. Em $i_1^* = 1$: Temos um equilíbrio estável, uma vez que

$$\dot{f}_1(1) = 1 - 2(1) = -1 < 0.$$

De forma análoga, chegaremos à conclusão de que $s_0^* = 0$ se trata de um equilíbrio estável, enquanto $s_1^* = 1$ é um equilíbrio instável.

1.8. Letra h

Enunciado: Mostre o comportamento das trajetórias (curvas) do sistema no espaço de fase nas coordenadas (S, I).

Para o espaço de fase nas coordenadas (s, i) obteremos o seguinte gráfico:

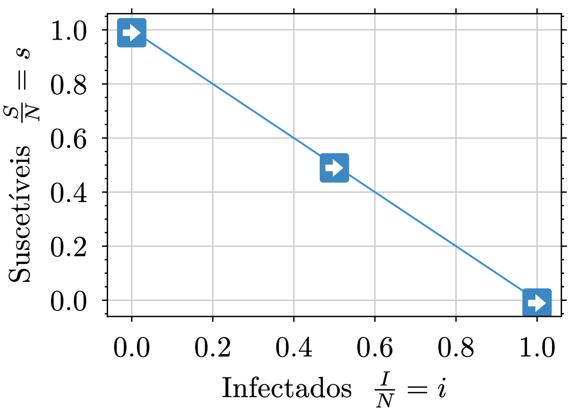

Figura 1: Modelo adimensionalizado $s + i = 1$

Aqui podemos ver as setas se deslocando do ponto de equilíbrio instável $s = 1$ e $i = 0$ para o equilíbrio estável $s = 0$ e $i = 1$.

Por outro lado, para o sistema original $S + I = N$ teríamos infinitas retas para cada valor de N. Aqui está um exemplo para $N = 50, 100, 150$:

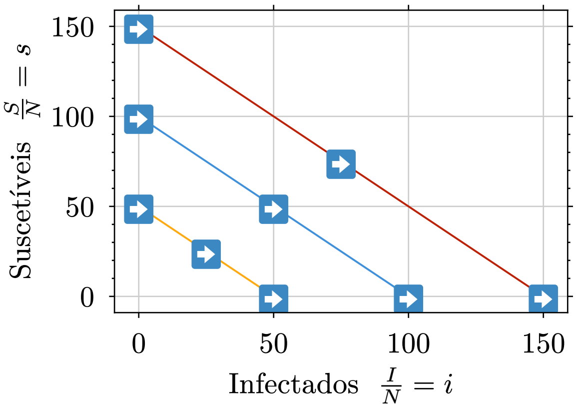

Figura 2: Modelo dimensionalizado $S + I = N$

2. Modelo SI com evolução demográfica

2.1. Letra a

Enunciado: Explique como foi obtido o sistema (2).

O sistema (2) é obtido tanto a partir da taxa média de novas infecções, representada por $\beta\frac{SI}{N}$ quanto pelas taxas de entrada e saída de cada uma das populações, indicadas por μN, μS e μI. A formulação das equações diferenciais baseia-se na variação das populações ao longo do tempo e, isto é, no cálculo das derivadas de S e I em relação a t.

Considerando $S(t)$, $I(t)$ e $S(t + \Delta t)$, $I(t + \Delta t)$ a quantidade de indivíduos nos compartimentos de suscetíveis e infectados nos instantes de tempo t e $t + \Delta t$, respectivamente. A variação das populações seria dada por:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \mu N \Delta t - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \Delta t - \mu S \Delta t + \text{desvíos}$$

$$I(t + \Delta t) - I(t) = \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \Delta t - \mu I \Delta t + \text{desvíos}$$

Assim, aplicando a definição de derivada em ambas as equações:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \mu N \cancel{\Delta t} - \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \cancel{\Delta t} - \mu S \cancel{\Delta t} + \text{desvíos}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} \cancel{\Delta t} - \mu I \cancel{\Delta t} + \text{desvíos}$$

Portanto, chegamos ao seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu N - \beta \dfrac{S(t)I(t)}{N(t)} - \mu S \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta \dfrac{S(t)I(t)}{N(t)} - \mu I \quad \blacksquare \end{cases}$$

2.2. Letra b

Enunciado: Mostre que o tamanho da população permanece constante.

Dada a expressão do tamanho absoluto da população $N = S + I$, podemos tentar aplicar a definição de limite para descobrir a taxa de variação da população N. Assim, considerando $N(t)$ e $N(t + \Delta t)$ a quantidade de indivíduos da população nos instantes t e $t + \Delta t$ respectivamente.

$$
\begin{aligned}
N(t+\Delta t) - N(t) &= S(t+\Delta t) + I(t+\Delta t) - (S(t) + I(t)) \\
&= S(t+\Delta t) - S(t) + I(t+\Delta t) - I(t) \\
&= \Delta t\left(\mu N - \beta\frac{SI}{N} - \mu S + \beta\frac{SI}{N} - \mu I\right) \\
&= \Delta t\left(\mu\cancel{(N-(S+I))}\cancel{-\beta\frac{SI}{N}+\beta\frac{SI}{N}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Desse modo, é fácil percebermos que a população N é uma constante e, portanto, sua variação no tempo é nula.

2.3. Letra c

Enunciado: Mostre que $s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}$ e $\tau = \beta t$ são grandezas adimensionais.

Para as duas primeiras variáveis s e i podemos partir da definição delas:

$$
s = \frac{S\ (\text{Qtd. de indivíduos suscetíveis})}{N\ (\text{Qtd. da população})} \quad \text{e} \quad i = \frac{I\ (\text{Qtd. de indivíduos infectados})}{N\ (\text{Qtd. da população})}
$$

Como o numerador e denominador possuem as mesmas unidades de medida, teremos variáveis adimensionais a partir disso. Por fim, temos β que, por representar $\frac{\text{Número de contatos}}{\text{unidade de tempo}}$, equivale *frequência de contatos* com unidade de medida u.t.^{-1}. Desse modo,

$$
[\tau] = [\beta] \cdot [t] = \frac{1}{\text{tempo}} \cdot \text{tempo}.
$$

Ou seja, τ é adimensional. Assim, mostramos que $s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}$ e $\tau = \beta t$ são todas grandezas **adimensionais**, pois resultam da razão entre quantidades com mesma unidade ou do produto de grandezas cujas unidades se cancelam. Por fim, conclui-se que o termo $\frac{\mu}{\beta}$ também é adimensional, pois ambos os parâmetros representam taxas (frequências) com mesma unidade: Taxa de crescimento populacional e taxa de transmissão da doença.

2.4. Letra d

Enunciado: Obtenha o sistema de EDOs adimensionalizado correspondente.

Aqui percebemos uma relação entre as variáveis dimensionalizadas e as adimensionais da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
s &\to S \\
i &\to I \\
\tau &\to t
\end{aligned}
$$

Feita essa observação, vamos partir da derivada $\frac{ds}{d\tau}$ e expandi-la por meio da regra da cadeia:

$$
\begin{aligned}
\frac{ds}{d\tau} &= \frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{S}{N}\right) \cdot \frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{1}{N}\frac{dS}{dt} \cdot \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1}{N} \cdot \left(\mu N - \beta\frac{SI}{N} - \mu S\right) \cdot \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1}{N} \cdot \left(\mu \cancel{N} - \cancel{\beta}\frac{SI}{N} - \mu S\right) \cdot \frac{1}{\cancel{\beta}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{ds}{d\tau} = \frac{\mu}{\beta}(1-s) - si}
$$

Repetindo o mesmo procedimento para o i, chegaremos a essa solução semelhante:

$$
\begin{aligned}
\frac{di}{d\tau} &= \frac{di}{dt}\frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{I}{N}\right) \cdot \frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{1}{N}\frac{dI}{dt} \cdot \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1}{N} \cdot \left(\cancel{\beta}\frac{SI}{N} - \mu I\right) \cdot \frac{1}{\cancel{\beta}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{di}{d\tau} = i\left(s - \frac{\mu}{\beta}\right)}
$$

Com isso, encontramos o sistema de equações diferenciais adimensionalizadas para a questão, dada por:

$$
\begin{cases}
\frac{ds}{d\tau} = \frac{\mu}{\beta}(1-s) - si \\
\frac{di}{d\tau} = i\left(s - \frac{\mu}{\beta}\right)
\end{cases}
\quad \blacksquare
$$

2.5. Letra e

Enunciado: Use a conservação do tamanho da população para chegar em EDOs desacopladas para as variáveis s e i.

Por meio da conservação do tamanho da população $N = S + I$, podemos relacionar as variáveis adimensionalizadas da mesma forma:

$$
\begin{gathered}
s + i = \frac{S+I}{N} = \frac{N}{N} = 1 \\
\to s = 1 - i \\
\to i = 1 - s
\end{gathered}
$$

Com isso, conseguimos substituir no sistema de equações diferenciais descoberto na questão anterior:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{d\tau} = (1-s)\left(\dfrac{\mu}{\beta} - s\right) \\ \dfrac{di}{d\tau} = i\left(1 - \dfrac{\mu}{\beta} - i\right) \end{cases}$$

Obs: Podemos observar que a diferencial $\frac{di}{d\tau}$ é uma **equação logística**.

2.6. Letra f

Enunciado: Você consegue achar soluções de forma analítica para essas EDOs? Explique.

Sim, as EDOs expressas no sistema anterior são **separáveis** e, portanto, conseguimos chegar na solução para elas:

Trataremos a segunda equação primeiro, como podemos ver, trata-se de uma equação logística independente:

$$\frac{di}{d\tau} = i(a-i) \quad \text{onde } a = 1 - \frac{\mu}{\beta}$$

Os slides de *Modelagem epidemiológica* demonstram uma solução analítica análoga para essa diferencial com condição inicial $i(0) = i_0$. Para facilitar, vamos denotar $\frac{\beta}{\mu} = k$, assim encontraremos a solução

$$i(\tau) = \frac{i_0(1-k^{-1})e^{(1-k^{-1})\tau}}{1-k^{-1} + i_0(e^{(1-k^{-1})\tau} - 1)}$$

quando $k \neq 1$, e

$$i(\tau) = \frac{i_0}{1 + i_0\tau}$$

quando $k = 1$.

De forma semelhante para a equação diferencial envolvendo o s dada por

$$\frac{ds}{d\tau} = (1-s)\left(\frac{\mu}{\beta} - s\right),$$

temos a solução analítica:

$$s(\tau) = \frac{(s_0-1)e^{(1-k^{-1})\tau} + 1 - ks_0}{k(s_0-1)e^{(1-k^{-1})\tau} + 1 - ks_0}$$

quando $k = \frac{\mu}{\beta} \neq 1$ e

$$s(\tau) = \frac{(\tau-1)(s_0-1) - 1}{\tau(s_0-1) - 1}$$

quando $k = 1$.

2.7. Letra g

Enunciado: Obtenha os pontos de equilíbrio para as EDOs adimensionalizadas. Analise a estabilidade desses equilíbrios a partir das EDOs linearizadas.

Partindo das equações diferenciais desacopladas, analisamos primeiro a EDO

$$f_1(i) = i(1 - k^{-1} - i).$$

Como podemos ver, temos dois pontos de equilíbrio: $\bar{i_0} = 0$ e $\bar{i_1} = 1 - k^{-1}$. Para analisarmos a estabilidade, pegaremos a derivada $\dot{f}_1(i)$ para cada um desses pontos que resultará em $\dot{f}_1(\bar{i_0}) = 1 - k^{-1}$ e $\dot{f}_1(\bar{i_1}) = -(1 - k^{-1})$.

1. **Caso $\boldsymbol{k > 1}$**: Temos que $\dot{f}_1(\bar{i_0} = 0) > 0$ é um ponto instável e, analogamente, $\dot{f}_1(\bar{i_1} = 1 - k^{-1} \in (0, 1)$ é assintoticamente estável.
2. **Caso $\boldsymbol{k < 1}$**: Temos que $\dot{f}_1(\bar{i_0} = 0) < 0$ é assintoticamente estável e $\dot{f}_1(\bar{i_1} = 1 - k^{-1}) > 0$ é instável. Como $k < 1$, então $\bar{i_1} = 1 - k^{-1}$ é inferior a zero e, portanto, está fora das restrições do problema ($i \geq 0$).
3. **Caso $\boldsymbol{k = 1}$**: Tiramos que $i_0 = i_1 = 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável. Sabemos disso a partir da análise da solução explícita da EDO, dado que não conseguimos analisar a estabilidade em um ponto singular.

Concluímos que o segundo e terceiro caso são análogos. Agora vamos analisar a segunda EDO $\frac{ds}{d\tau}$ descrita por

$$\dot{f}_2(s) = (1 - s)(k^{-1} - s)$$

Novamente, podemos tirar os seguintes pontos de equilíbrio: $\bar{s_0} = 1$ e $\bar{s_1} = k^{-1}$. Com objetivo de analisar a estabilidade, pegaremos $\dot{f}_2(\bar{s_0}) = 1 - k^{-1}$ e $\dot{f}_2(\bar{s_1}) = k^{-1} - 1$ quando $k \neq 1$.

1. **Caso k > 1**: Temos que $\dot{f}_2(\bar{s_0} = 1) > 0$ é instável e $\dot{f}_2(\bar{s_1} = k^{-1}) \in (0, 1)$ é assintoticamente estável.
2. **Caso k < 1**: Temos que $\dot{f}_2(\bar{s_0} = 1) < 0$ é assintoticamente estável e $\dot{f}_2(\bar{s_1} = k^{-1}) > 0$ é instável.
3. **Caso k = 1**: Assim como na EDO anterior, chegamos à conclusão de que $s_0 = s_1 = 0$ é assintoticamente estável.

2.8. Letra h

Enunciado: Mostre o comportamento das trajetórias (curvas) do sistema no espaço de fase nas coordenadas (S, I).

Como já discutido nas análises de estabilidade do ponto de equilíbrio, temos dois pontos de equilíbrio no modelo adimensionalizado: Um ponto $(\bar{s_0}, \bar{i_1}) = (1, 0)$ e outro ponto $(\bar{s_1}, \bar{i_1}) = \left(\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right)$.

Para o modelo dimensionalizado, as equações podem ser visualizadas no espaço de fase como curvas que descrevem a evolução temporal de S e I. Dependendo do valor de $k = \frac{\beta}{\mu}$, o comportamento dessas trajetórias será classificado em diferentes cenários.

Para o caso $k > 1$, a dinâmica das populações é caracterizada pela evolução de S e I em torno dos pontos de equilíbrio $\left(S = \frac{N}{k}, I = N\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$. Estes pontos são estáveis, pois as trajetórias tendem a se aproximar dessa linha de equilíbrio ao longo do tempo. Por outro lado, os pontos circulares roxos sobre o eixo dos *Suscetíveis*, tal como $(S = N, I = 0)$ são instáveis, pois referem-se aos estágios iniciais onde toda população está suscetível e, portanto, qualquer infecção deslocará a sistema desse ponto.

Aqui está o espaço de fase para $k > 1$:

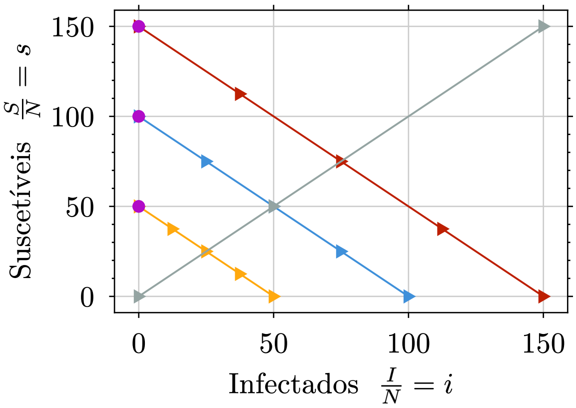

Figura 3: Modelo dimensionalizado, populações convergindo para o centro (“reta cinza”).

Segundo nossa análise, os pontos estáveis, localizados sobre a reta cinza, possuem coordenadas do formato $\left(S = \frac{N}{k}, I = N(1 - k^{-1})\right)$.

Obs: Embora não tenha conseguido representar graficamente, as setas estão convergindo para o “centro” interceptado pela reta cinza no gráfico acima.

Para $k \leq 1$:

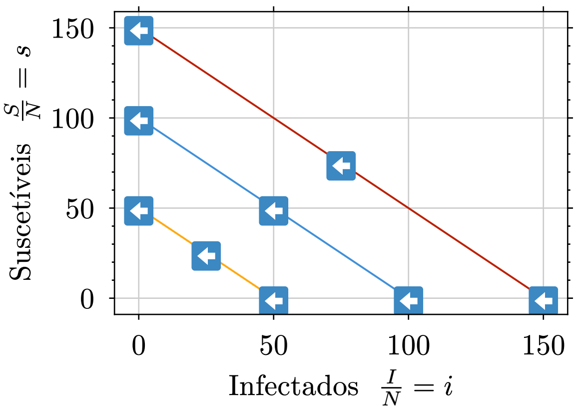

Figura 4: Modelo dimensionalizado, populações convergindo para o eixo dos suscetíveis.

Nesse sentido, quando $k = \frac{\beta}{\mu} < 1$ cada infectado gera, em média, menos de uma nova infecção e, portanto, a **epidemia não se sustenta**. Para $k < 1$, a componente $I(t)$ decai gradativamente enquanto $S(t)$ preenche toda a população N.