Frisbee

Análise Matemática e Física

João Pedro Silva de Sousa
Pedro Henrique Honorio Saito
Marcos Henrique Junqueira

Universidade Federal do Rio de Janeiro

2025-07-28

Sumário

1. Introdução

1.1 Breve Histórico

- A história dos frisbees remonta ao final do século XIX, quando alunos da universidade de Yale arremessavam formas de torta da Frisbie Pie Company como uma brincadeira.
- Em 1958, Wham-O lançou a marca de discos de plástico voadores "Frisbee", e desde então o frisbee se tornou um brinquedo popular e até mesmo usado em modalidades esportivas, a exemplo do *Ultimate Frisbee* e do *Golf Disc*

1.1 Breve Histórico

Figura 1: Uma das formas de torta do Frisbie

1.2 Especificação do Problema

- Modelar o movimento de um Frisbee que é lançado no ar com alta rotação (*spin*).

- Como forças atuando sobre o disco, vamos considerar

1. Força da Gravidade sobre o disco
2. Força de arrasto, que é a resistência do ar ao movimento do disco.
3. Força de Sustentação, relacionada à aerodinâmica do disco.

- Considera-se um ambiente ideal sem vento em qualquer direção.

Razão: além do arrasto, também teríamos de considerar forças externas em outras direções, provocando torques, turbulências, e outras complicações.

1.2 Especificação do Problema

- O *Frisbee* será modelado como um corpo rígido em formato de disco, simétrico e de espessura desprezível.

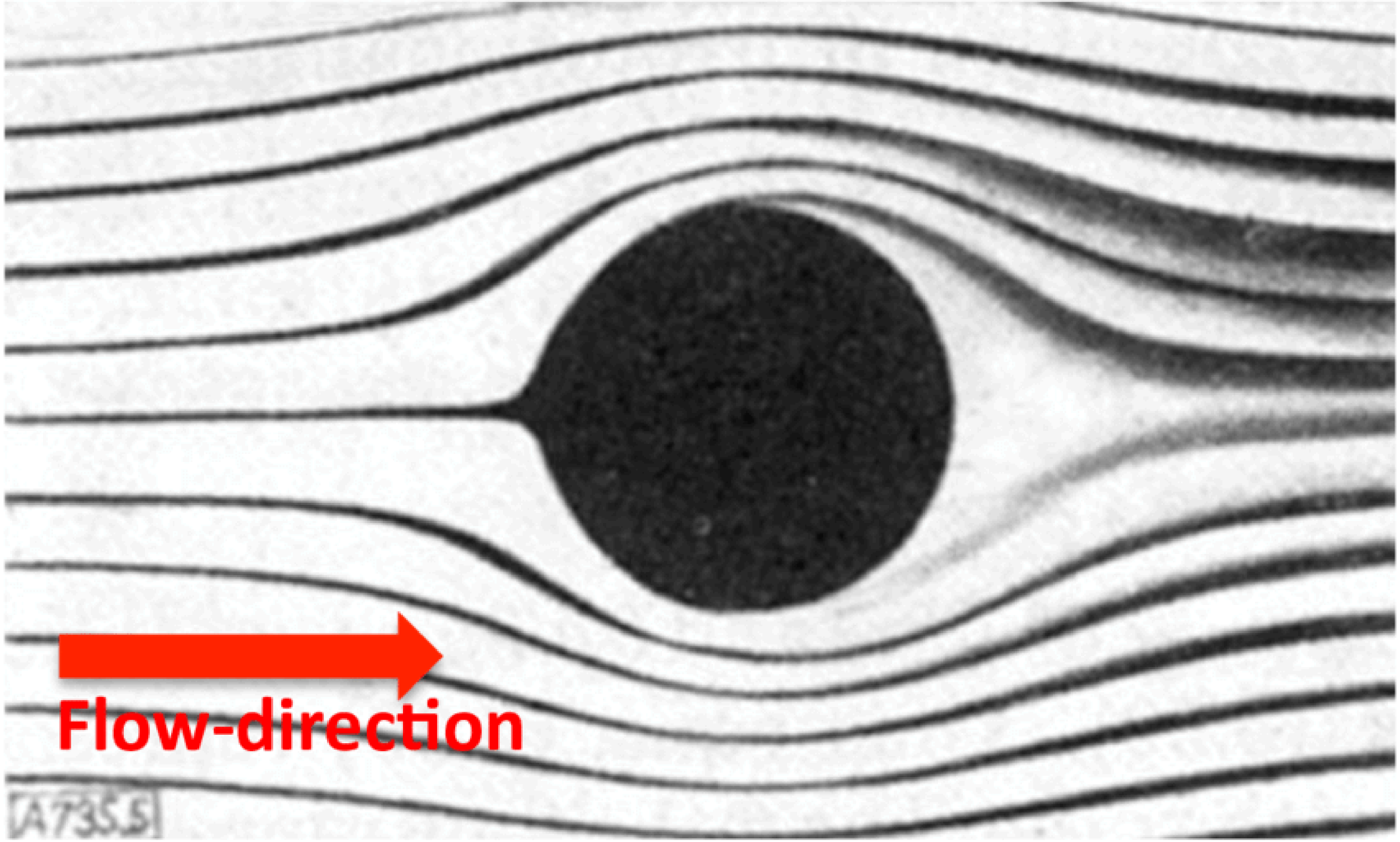
1.3 Objetivos

- Apresentar uma modelagem para o movimento do Frisbee sob as condições apresentadas.
- Introduzir os princípios da aerodinâmica do frisbee: o Princípio de Bernoulli e a Inércia Giroscópica.
- Derivar as equações para o movimento do frisbee através de equações diferenciais.
- Obter a solução do modelo de equações.
- Fazer comparações com outros resultados

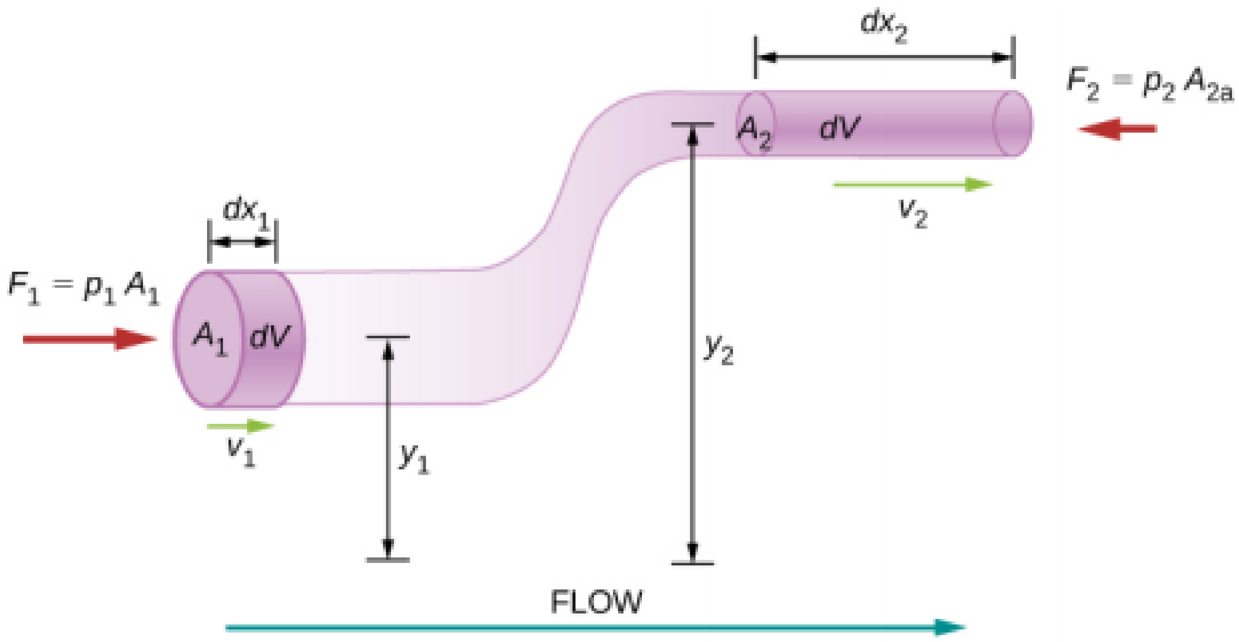
2. Princípio de Bernoulli

O princípio de Bernoulli busca descrever o comportamento de um fluido ideal ao longo de uma linha de corrente.

Definition 2.1.1: Uma linha de corrente é uma linha contínua traçada no fluido de forma que todos os seus pontos são tangenciais à velocidade.


Flow-direction
A735.5

Podemos derivá-lo calculando a diferença do trabalho por um fluido em escoamento em duas partes diferentes de um cano, desprezando forças de viscosidade.



Primeiramente, temos que:

$$\begin{aligned} dW &= F_1 dx_1 - F_2 dx_2 \\ &= p_1 A_1 dx_1 - p_2 A_2 dx_2 \\ &= p_1 dV - p_2 dV \\ &= (p_1 - p_2) dV \end{aligned} \tag{1}$$

Sabemos, também, que o trabalho realizado é resultado de alterações na energia cinética e potencial do fluido.

A diferença das energias cinéticas nas duas seções do tubo é:

$$dK = \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}\rho dV\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{2}$$

Enquanto diferença das energias potenciais nas duas seções é:

$$dU = m_2gy_2 - m_1gy_1 = \rho dV g(y_2 - y_1) \tag{3}$$

Substituindo na equação do trabalho, obtemos

$$
\begin{aligned}
dW &= (p_1 - p_2)dV \\
(p_1 - p_2)dV &= \frac{1}{2}\rho dV\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho dV g(y_2 - y_1)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Que, ao rearranjarmos, obtemos

$$
p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \tag{5}
$$

Concluíndo que, para um fluido incompressível e sem fricção, a combinação de pressão, energia cinética e potencial é constante não apenas em relação ao tempo, mas também para uma mesma linha de corrente.

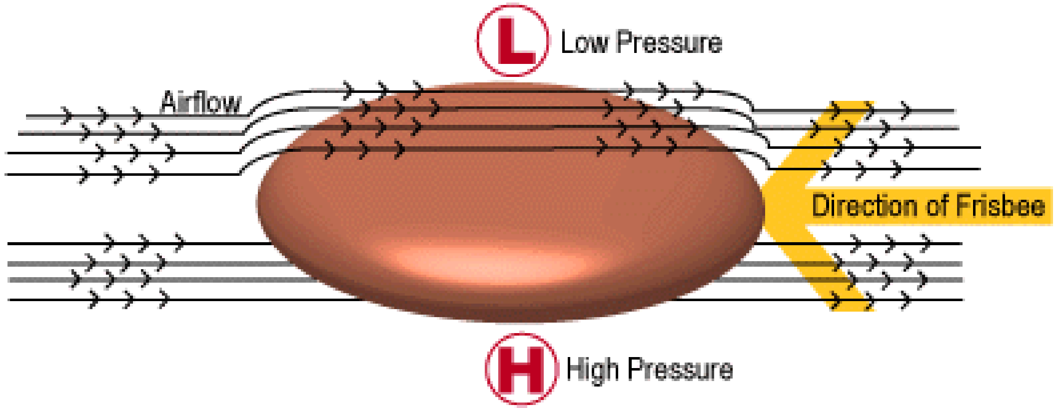
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \tag{6}$$

O princípio de Bernoulli nada mais é que a equação de Bernoulli para fluxos em altura constante, reforçando que a medida que a velocidade do fluido aumenta, há uma queda de pressão para a conservação da equação.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \tag{7}$$

2.2 Aplicação

No contexto do frisbee, o princípio de Bernoulli explica adequadamente a força de elevação observada.



O ar fluindo ao longo da face convexa do frisbee tem maior velocidade do que o ar fluindo na face de baixo. Assim, cria-se uma região de baixa pressão acima do frisbee que, justaposta à região de baixo, ocasiona em uma força de elevação.

3. Inércia Giroscópica

3.1 Definição

Definition 3.1.1: Resistência ao alterar o eixo de rotação de um corpo rotativo. Essa resistência é igual em módulo à magnitude do momento angular do corpo.

A inércia giroscópica garante a estabilidade no movimento do *Frisbee*. Com uma **velocidade angular** suficientemente elevada w, o *Frisbee* tende a manter seu eixo de rotação estável.

3.2 Demonstração

Proof : Considere uma partícula a uma distância r da origem e com momento linear p. O momento angular deste ponto em relação à origem é definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v}) \\ &= m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{8}$$

3.2 Demonstração

Para um corpo rígido em rotação com velocidade angular $\boldsymbol{w}$, a velocidade $\boldsymbol{v}$ da partícula na posição $\boldsymbol{x}$ é:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r} \tag{9}$$

Assim, o momento angular do corpo será dado por:

$$\mathbf{L} = m(\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r})) \tag{10}$$

3.2 Demonstração

Para um corpo rígido em rotação com velocidade angular $\boldsymbol{w}$, a velocidade $\boldsymbol{v}$ da partícula na posição $\boldsymbol{x}$ é:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r} \tag{9}$$

Assim, o momento angular do corpo será dado por:

$$\mathbf{L} = m(\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r})) \tag{10}$$

Pela **identidade do produto vetorial duplo**, temos que:

$$\mathbf{L} = m((\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{r})w - (\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{w})r) \tag{11}$$

3.2 Demonstração

Como $(\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{w})$ é uma função real, podemos reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m((\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{w} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}})\boldsymbol{w}) \\ &= m((\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{r})I - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}})) \cdot \boldsymbol{w} \end{aligned} \tag{12}$$

Assim, a contribuição diferencial de uma massa dm para o momento angular será:

$$d\mathbf{L} = dm((\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{r})I - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}})) \cdot \boldsymbol{w} \tag{13}$$

Nota: Em um corpo rígido, todas as partículas compartilham a mesma velocidade angular $\boldsymbol{w}$.

3.2 Demonstração

Integrando a equação Equação 13 obteremos que:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{w} \tag{14}$$

Em que o termo $\mathbf{I}$ corresponde ao tensor de inércia do corpo, expresso por:

$$\mathbf{I} = \int_V ((\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{r})I - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{t}}))dm \tag{15}$$

Nota: Na apostila, o tensor de inércia é derivado a partir da posição das partículas na base móvel, denotado por $\mathbf{B}$.

3.2 Demonstração

Relembrando : O torque $\boldsymbol{\tau}$ sobre uma partícula é a taxa de variação do momento angular, dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} \tag{16}$$

Portanto, substituindo na Equação 14 obtemos:

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{w} + \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{w}} \tag{17}$$

Assim, um torque $\boldsymbol{\tau}$ aplicado a um corpo rígido causa duas mudanças:

1. Mudança da orientação do corpo em relação ao eixo de rotação.
2. Variação no momento angular do corpo.

3.2 Demonstração

Na prática, o *Frisbee* rotaciona em relação a um eixo particular cujo **momento de inércia** é máximo. A representação clássica do *Frisbee* segue a baixo:

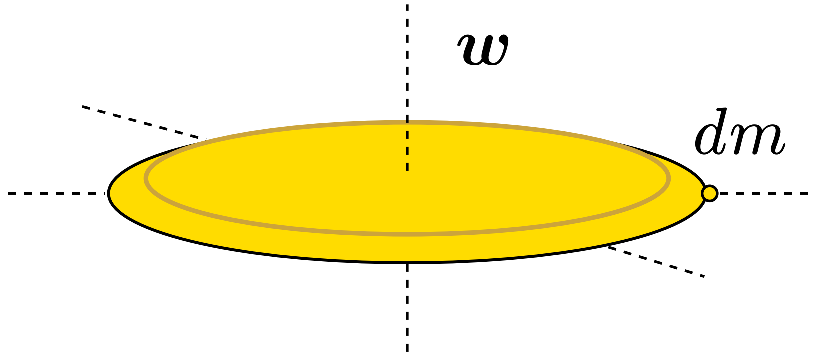


Figura 2: Frisbee e seus três eixos principais

Como podemos notar, o *Frisbee* possui três eixos de rotação principais, de modo que um deles possui momento de inércia máximo.

3.2 Demonstração

Analisando de cima, notamos que o momento de inércia máximo está atrelado ao eixo de rotação vertical na figura à direita.

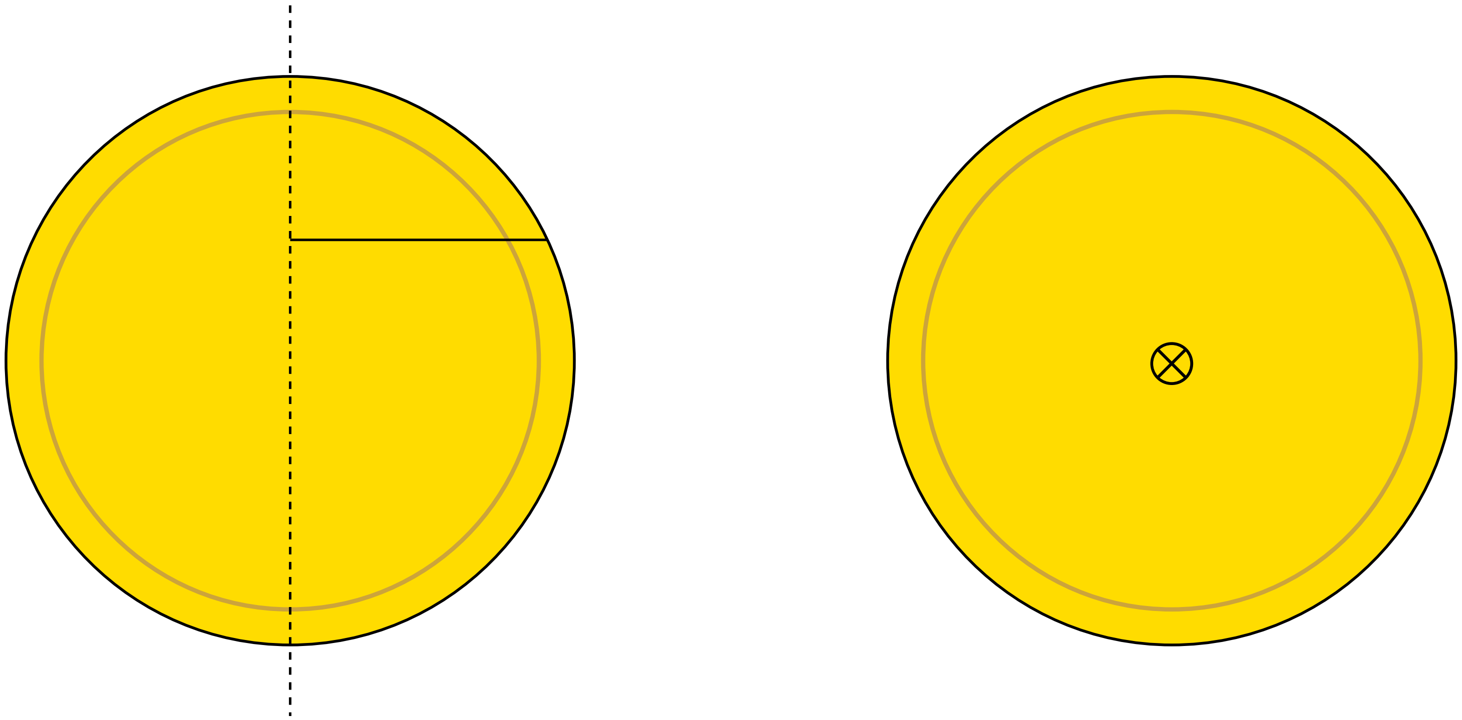


Figura 3: Frisbee visto de cima e dois eixos de rotação principais.

3.2 Demonstração

Assim, simplificaremos o tensor de inércia do *Frisbee*, considerando apenas o **escalar** I para representá-lo.

Relembrando : O tensor de inércia do *Frisbee* é calculado como:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Nota: Isso ocorre ao calcular a matriz do tensor de inércia no referencial móvel. A abordagem anterior impede sua diagonalização.

3.2 Demonstração

Para compreendermos o conceito de **Inércia Giroscópica** precisamos antes da seguinte hipótese:

Hipótese : Torque é aplicado perpendicularmente ao momento angular.

3.2 Demonstração

Retornando à Equação 17, conseguimos simplificá-la:

$$\begin{aligned} \tau &= \dot{\mathrm{I}} \cdot w + \cancel{\mathrm{I} \cdot \dot{w}} \\ \tau &= \dot{\mathrm{I}} \cdot w \end{aligned} \tag{19}$$

O torque pode alterar a orientação do corpo em relação ao eixo de rotação, reduzindo o **momento de inércia**.

No entanto, pelo princípio de conservação da energia cinética $\frac{Iw^2}{2}$, essa redução é impossível.

3.2 Demonstração

Assim, é preciso que o corpo mantenha seu eixo de rotação, de modo que a magnitude de $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{w}$ seja constante, o que ocorre com uma **velocidade angular elevada**.

Portanto, vamos escrever o momento angular como:

$$\mathbf{L} = I w \hat{\boldsymbol{w}} \tag{20}$$

Em que I é a magnitude do momento de inércia máximo, w a magnitude da velocidade angular, e $\hat{\boldsymbol{w}}$ o eixo de rotação.

3.2 Demonstração

Aplicando a Equação 16 na última expressão, encontramos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \dot{\mathbf{L}} \\ \boldsymbol{\tau} &= L\frac{d\hat{\boldsymbol{w}}}{dt} \end{aligned} \tag{21}$$

Portanto, o torque varia o eixo de rotação e é inversamente proporcional à magnitude do momento angular L, que representa a **inércia giroscópica**.

4. Modelagem

4.1 Forças Aerodinâmicas

Seja d_1 o vetor unitário na direção da projeção do vetor velocidade $\boldsymbol{v}$ no plano do disco. Seja d_2 outro vetor unitário no plano do disco que forma uma base com d_1, e $d_3 = d_1 \times d_2$ o vetor normal ao plano do disco.

Sob a hipótese de que o movimento do disco se dá em um plano, então $\{d_1, d_3\}$ forma uma base para esse plano.

Sobre o disco agem a força peso, de sustentação e de arrasto. Os vetores das forças de arrasto e sustentação sempre se mantém perpendiculares entre si, enquanto que o peso aponta para o solo.

4.1 Forças Aerodinâmicas

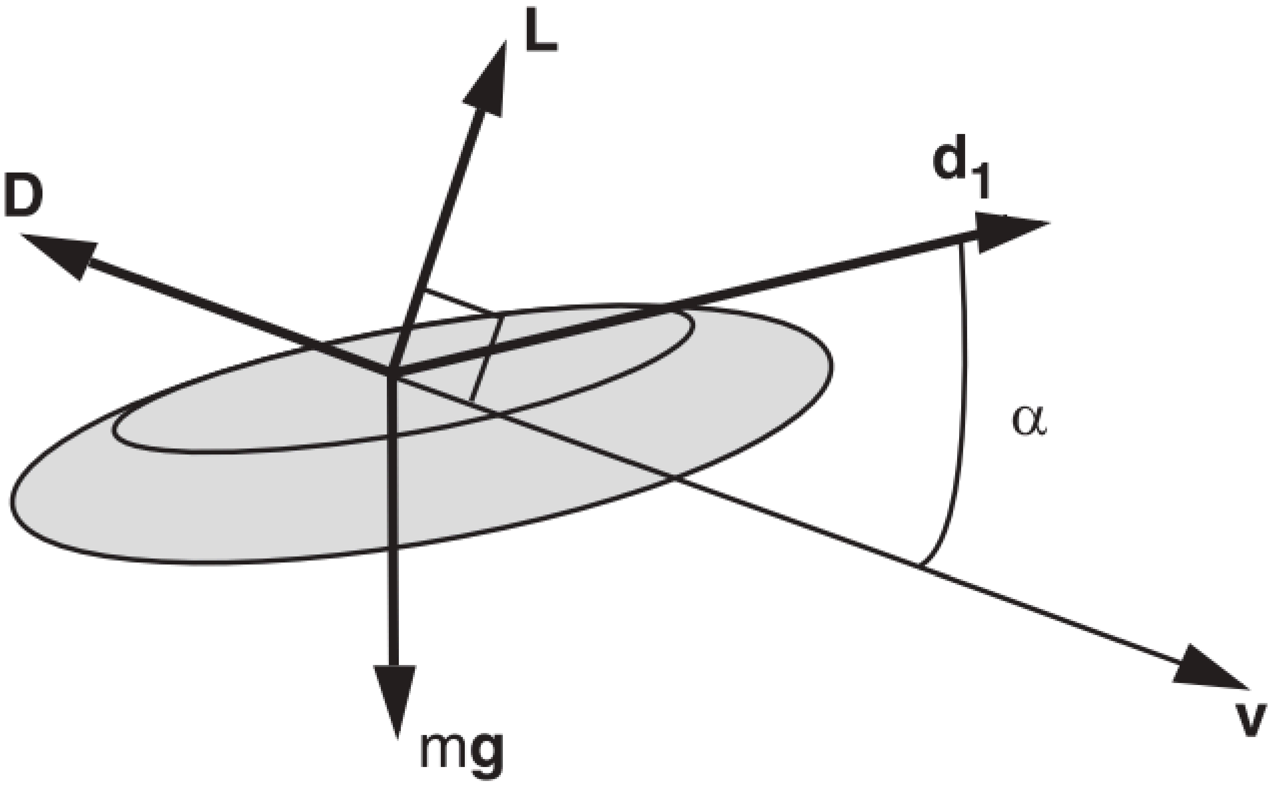


Figura 4: Representação das forças aerodinâmicas

4.1 Forças Aerodinâmicas

Por um exercício trigonométrico, podemos decompor as forças aerodinâmicas de modo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= (L \sin \alpha)\boldsymbol{d_1} + (L \cos \alpha)\boldsymbol{d_3} \\ \boldsymbol{D} &= (-D \cos \alpha)\boldsymbol{d_1} + (D \sin \alpha)\boldsymbol{d_3} \end{aligned} \tag{22}$$

Onde $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{D}$ são, respectivamente, os vetores das **forças de sustentação** e de **arrasto.** Desse modo, a força aerodinâmica que age sobre o disco é

$$\boldsymbol{F}_{\text{ad}} = (L \sin \alpha - D \cos \alpha)\boldsymbol{d_1} + (L \cos \alpha + D \sin \alpha)\boldsymbol{d_3} \tag{23}$$

4.2 Determinando as Forças Aerodinâmicas

A **força de arrasto** geralmente é modelada como

$$D = \frac{C_d \rho A v^2}{2} \tag{24}$$

Onde C_d é o coeficiente de arrasto, ρ é a densidade do ar, A a área da superfície de arrasto (Área do *Frisbee*) e v a velocidade relativa do fluído. Como estamos considerando o ar estacionário, então o módulo da velocidade é igual ao do frisbee.

O coeficiente C_d é dado como função do ângulo de ataque

$$C_d = C_{d_0} + C_{d_\alpha} \alpha^2 \tag{25}$$

4.2 Determinando as Forças Aerodinâmicas

Onde C_{d_α}, C_{d_0} e α_0 são coeficientes que dependem do disco.

- Já a **força de sustentação** pode ser modelada a partir do Princípio de Bernoulli. Pela equação abaixo,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \tag{26}$$

podemos obter, sob a hipótese de que a espessura do disco é desprezível, que

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{27}$$

4.2 Determinando as Forças Aerodinâmicas

Considerando que a velocidade do ar acima do disco é diretamente proporcional à que flui abaixo, temos $v_1 = Cv_2$.

Assim, pela definição de pressão $P = \frac{F}{A}$, temos que $(p_1 - p_2) = \frac{L}{A}$.

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ \frac{L}{A} + \frac{1}{2}\rho C^2 v^2 &= \frac{1}{2}\rho v^2 \\ \frac{L}{A} &= \frac{1}{2}\rho v^2 A(1 - C^2) \end{aligned} \tag{28}$$

4.2 Determinando as Forças Aerodinâmicas

Incorporando C ao **coeficiente de sustentação** denotado por C_L, obtemos:

$$L = \frac{\rho v^2 A C_L}{2} \tag{29}$$

De modo que C_L é uma função do ângulo de ataque.

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha \tag{30}$$

Nota: Os coeficientes C_{L_0} e C_{L_α} são constantes que dependem das propriedades físicas do *Frisbee*.

4.3 Obtendo a Força Total

- A força aerodinâmica foi escrita em termos da base de $\{d_1, d_3\}$. Para conseguimos as equações do movimento nos eixos x e z, então precisamos escrever essa força em termos da base canônica do plano x-z.

- Considere que o a inclinação entre d_1 e o eixo x seja φ. Desse modo, se $\boldsymbol{F'}_{\text{ad}}$ é a força aerodinâmica na base canônica, então

$$\boldsymbol{F'}_{\text{ad}} = QF_{\text{ad}} \tag{31}$$

onde Q é uma rotação de ângulo φ. Logo, para obter a força aerodinâmica na base canônica, basta computarmos QF_{ad}.

4.3 Obtendo a Força Total

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F'}_{\text{ad}} &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L\sin\alpha - D\cos\alpha \\ L\cos\alpha + D\sin\alpha \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{F'}_{\text{ad}} &= \begin{bmatrix} (L\sin\alpha - D\cos\alpha)\cos\varphi - (L\cos\alpha + D\sin\alpha)\sin\varphi \\ (L\sin\alpha - D\cos\alpha)\sin\varphi + (L\cos\alpha + D\sin\alpha)\cos\varphi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Abrindo as expressões e usando propriedades trigonométricas, obtemos

$$
\boldsymbol{F'}_{\text{ad}} = \frac{1}{2}A\rho v^2 \begin{bmatrix} C_L\sin(\alpha-\varphi) - C_D\cos(\alpha-\varphi) \\ C_L\cos(\alpha-\varphi) + C_D\sin(\alpha-\varphi) \end{bmatrix} \tag{33}
$$

4.3 Obtendo a Força Total

Se F_x e F_z são as forças nas componentes horizontal e vertical respectivamente, então

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2}A\rho v^2(C_L \sin(\alpha-\varphi) - C_D \cos(\alpha-\varphi)) \\ F_z &= \frac{1}{2}A\rho v^2(C_L \cos(\alpha-\varphi) + C_D \sin(\alpha-\varphi)) - mg \end{aligned} \tag{34}$$

4.4 Obtendo as Equações do Modelo

Hipótese: *O disco gira com momento angular o suficiente para manter uma trajetória estável e resistir a inclinações ao longo de sua trajetória.*

- A hipótese acima nos permite considerar φ constante ao longo de todo o trajeto do disco.

Hipótese: *O fluxo relativo de ar na vertical é desprezível em relação ao da horizontal*

- Essa hipótese por sua vez gera as seguintes implicações no modelo
  1. Considerando o ar estacionário, o módulo da velocidade do fluxo de ar relativo nas fórmulas das forças de sustentação e arrasto será igual ao módulo da velocidade horizontal do disco: $v = \dot{x}$.

4.4 Obtendo as Equações do Modelo

2. Se consideramos apenas o fluxo de ar na horizontal, então o ângulo de ataque α será igual a inclinação entre o vetor d_1 no plano do disco e o eixo horizontal, ou seja, igual à inclinação do plano do disco: $\alpha = \varphi$, e o disco mantém um ângulo de ataque constante ao longo da trajetória.

4.4 Obtendo as Equações do Modelo

Com essas novas hipóteses, as equações do movimento se reduzem para

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{C_D A \rho \dot{x}^2}{2} \\ m\ddot{z} &= \frac{C_L A \rho \dot{x}^2}{2} - mg \end{aligned} \tag{35}$$

Com isso, obtemos o seguinte sistema de EDOs de segunda ordem.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{C_D A \rho}{2m} \dot{x}^2 \\ \ddot{z} = \frac{C_L A \rho}{2m} \dot{x}^2 - g \end{cases} \tag{36}$$

4.5 Resumo das Hipóteses

1. O *Frisbee* é um corpo rígido, simétrico e com espessura desprezível em relação ao diâmetro.
2. O lançamento ocorre sem vento, torques externos, e em um fluído incompressível.
3. Sobre o disco só agem as força da gravidade e aerodinâmicas de arrasto e sustentação.
4. O disco é lançado com componente da velocidade lateral igual a zero.
5. O disco é lançado com momento angular suficiente para manter uma trajetória estável.
6. O fluxo de ar na vertical é desprezível em relação ao da horizontal.

5. Resolvendo o Modelo

5.1 Sistema de 1ª ordem

O sistema de segunda ordem, dependente de $\dot{x}$ e $\dot{z}$, pode ser reduzido para primeira ordem com $\dot{x} = v_x$ e $\dot{z} = v_z$.

Além disso, denotando os termos $\frac{C_D A \rho}{2m}$ e $\frac{C_L A \rho}{2m}$ por k_D e k_L.

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -k_D v_x^2 \\ \dot{v}_z = k_L v_x^2 \end{cases} \tag{37}$$

5.1 Sistema de 1ª ordem

Aplicando a separação de variáveis na primeira

$$\begin{aligned} -\frac{1}{v_x} &= -k_D t + C_1 \\ v_x &= \frac{1}{k_D t + C_1} \end{aligned} \tag{38}$$

Integrando os dois membros e lembrando que $\dot{x} = v_x$, obtemos

$$x = \frac{1}{k_D} \ln|k_D t + C_1| + C_2 \tag{39}$$

5.1 Sistema de 1ª ordem

Agora resolvendo para para v_y

$$\int \dot{v}_z dt = \int \left(\frac{k_L}{\left(k_D t + C_1\right)^2} - g \right) dt$$
$$v_z = -\frac{k_L}{k_D (k_D t + C_1)} - gt + C_3 \tag{40}$$

Integrando mais uma vez, obtemos

$$z = -\frac{k_L}{k_D^2} \cdot \ln|k_D t + C_1| - \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \tag{41}$$

5.1 Sistema de 1ª ordem

Solução Analítica do modelo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{k_D} \ln|k_D t + C_1| + C_2 \\ z = -\frac{k_L}{k_D^2} \cdot \ln|k_D t + C_1| - \frac{g t^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases} \tag{42}$$

Ao passo que as constantes de integração são dada em função das condições iniciais $x_0, y_0, v_{x_0}, v_{z_0}$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{v_{x_0}} & C_2 &= x_0 - \frac{1}{k_D} \ln\left|\frac{1}{v_{x_0}}\right| \\ C_3 &= v_{z_0} + \frac{k_L}{k_D} \cdot v_{x_0} & C_4 &= z_0 + \frac{k_L}{k_D^2} \ln\left|\frac{1}{v_{x_0}}\right| \end{aligned} \tag{43}$$

6. Simulação

6.1 Variáveis

Primeiramente, vamos definir as variáveis:

```python
# Condições iniciais
x0 = 0                    # Posição inicial no eixo x (m)
y0 = 1                    # Posição inicial no eixo y (m)
vx0 = 16                  # Velocidade inicial no eixo x (m/s)
vy0 = 0                   # Velocidade inicial no eixo y (m/s)
a = np.radians(10)        # Ângulo de ataque inicial em radianos (conversão de 10 graus)

# Propriedades Físicas
d = 0.22                  # Diâmetro do frisbee (m)
m = 0.175                 # Massa do frisbee (kg)
rho = 1.23                # Densidade do ar (kg/m³)
g = 9.81                  # Aceleração da gravidade (m/s²)
A = np.pi * (d / 2) ** 2  # Área frontal do frisbee (m²)
```

6.1 Variáveis

Definindo os coeficientes aerodinâmicos:

```python
# Coeficientes aerodinâmicos
CD0 = 0.08              # Coeficiente de arrasto (adimensional)
CDa = 2.72              # Variação do arrasto com o ângulo de ataque (adimensional)
CL0 = 0.15              # Coeficiente de sustentação (adimensional)
CLa = 1.4               # Variação da sustentação com o ângulo de ataque (adimensional)
a0 = np.radians(-4)  # Ângulo de ataque de referência para o arrasto (em radianos)
```

6.1 Variáveis

Funções para a encapsular as constantes nos termos k_l e k_d atrelados, respectivamente, à sustentação e ao arrasto:

```python
    def KD(a: np.radians):
        CD = CD0 + CDa * (a - a0) ** 2
        return CD * A * rho / (2 * m)

    def KL(a: np.radians):
        CL = CL0 + CLa * a
        return CL * A * rho / (2 * m)

kl = KL(a)
kd = KD(a)
```

6.1 Variáveis

Constantes de Integração e funções paramétricas para a posição do *Frisbee* ao longo do tempo:

```python
C1 = 1 / vx0                                        # Velocidade inicial no eixo x (s/m)
C2 = x0 - 1 / kd * np.log(np.abs(C1))              # Posição inicial no eixo x (m)
C3 = vy0 + kl / kd * vx0                            # Velocidade inicial no eixo y (m/s)
C4 = y0 + kl / kd**2 * np.log(np.abs(C1))           # Posição inicial no eixo y (m)

x = lambda t: 1 / kd * np.log(np.abs(kd * t + C1)) + C2
y = lambda t: -kl / kd**2 * np.log(np.abs(kd * t + C1)) - g / 2 * t**2 + C3 * t + C4
```

6.1 Variáveis

Mapeamento da trajetória em um CSV:

```python
delta_t = 0.01
t = 0.01
x_pos, y_pos = np.array([x0]), np.array([y0])
with open("frisbee_ours.csv", "w+") as csvfile:
    csvfile.write('t,x,y\n')          # Header do CSV
    while y(t) >= 0:
        x_v = x(t)
        y_v = y(t)
        x_pos = np.append(x_pos, x_v)
        y_pos = np.append(y_pos, y_v)
        t += delta_t
        csvfile.write(f"{t:.4f},{x_v},{y_v}\n")
```

6.2 Gráficos

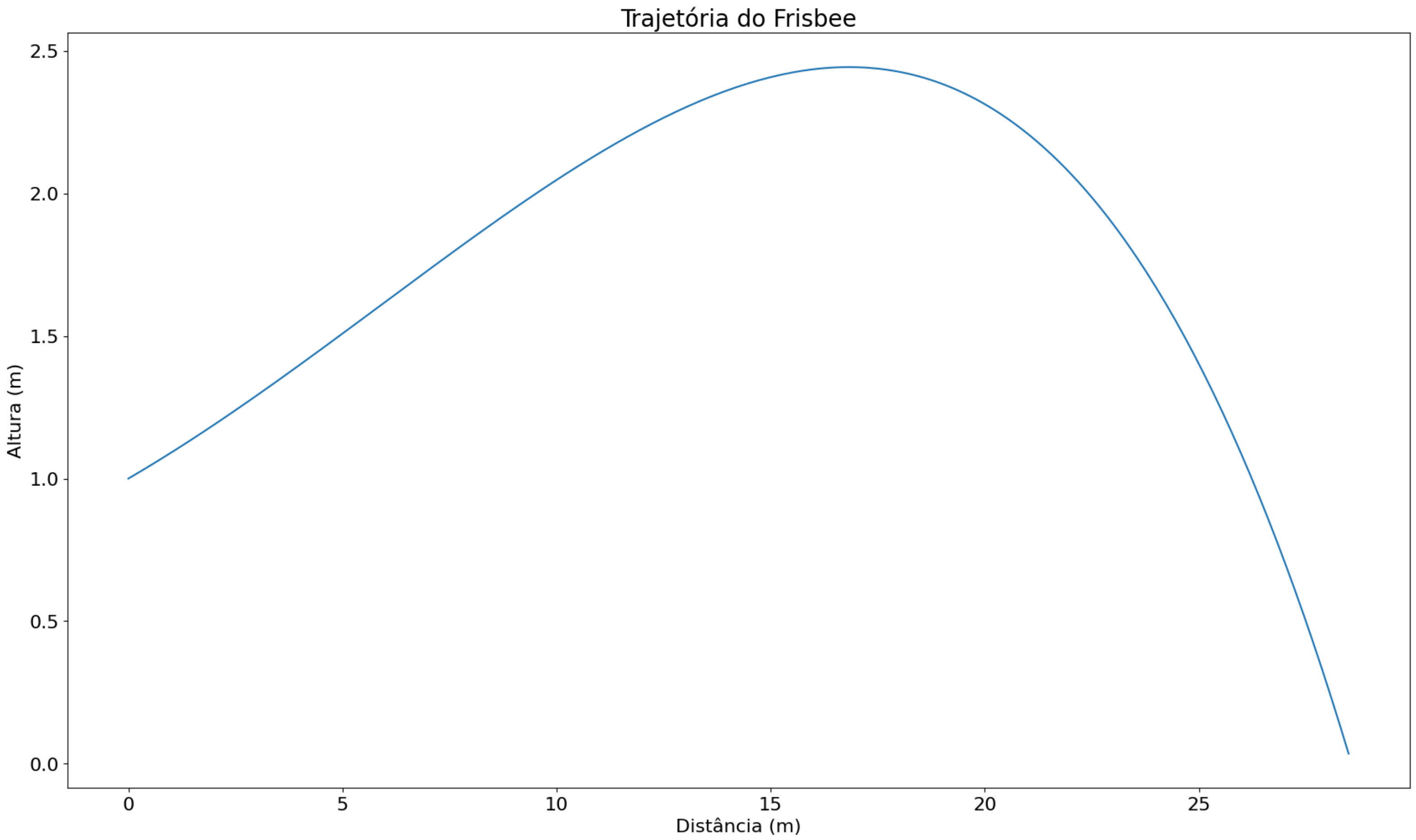


Figura 5: Trajetória do *Frisbee* com velocidade inicial 18 m/s e $\alpha = 5°$

6.2 Gráficos

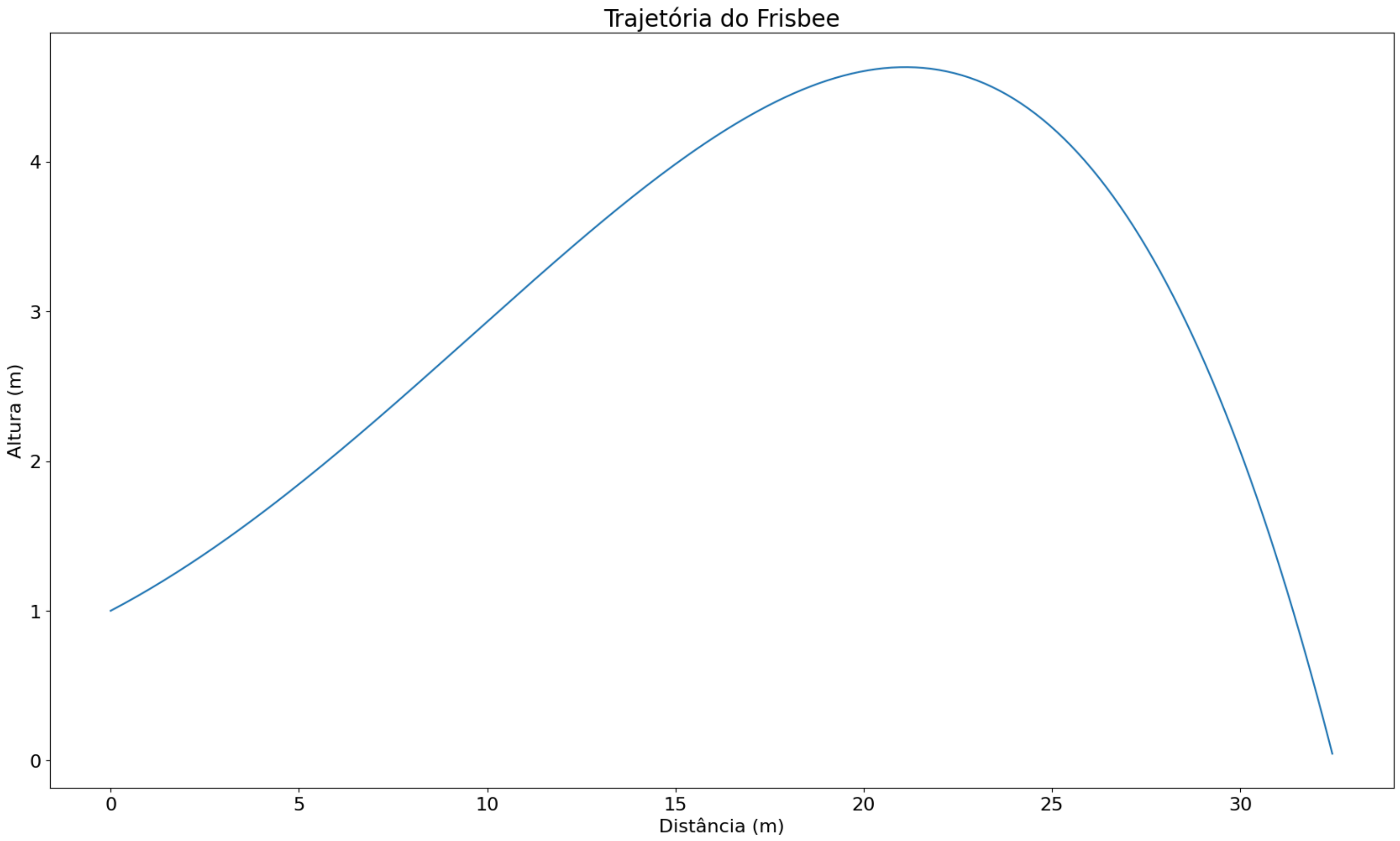


Figura 6: Trajetória do *Frisbee* com velocidade inicial 18 m/s e $\alpha = 7.5°$

6.2 Gráficos

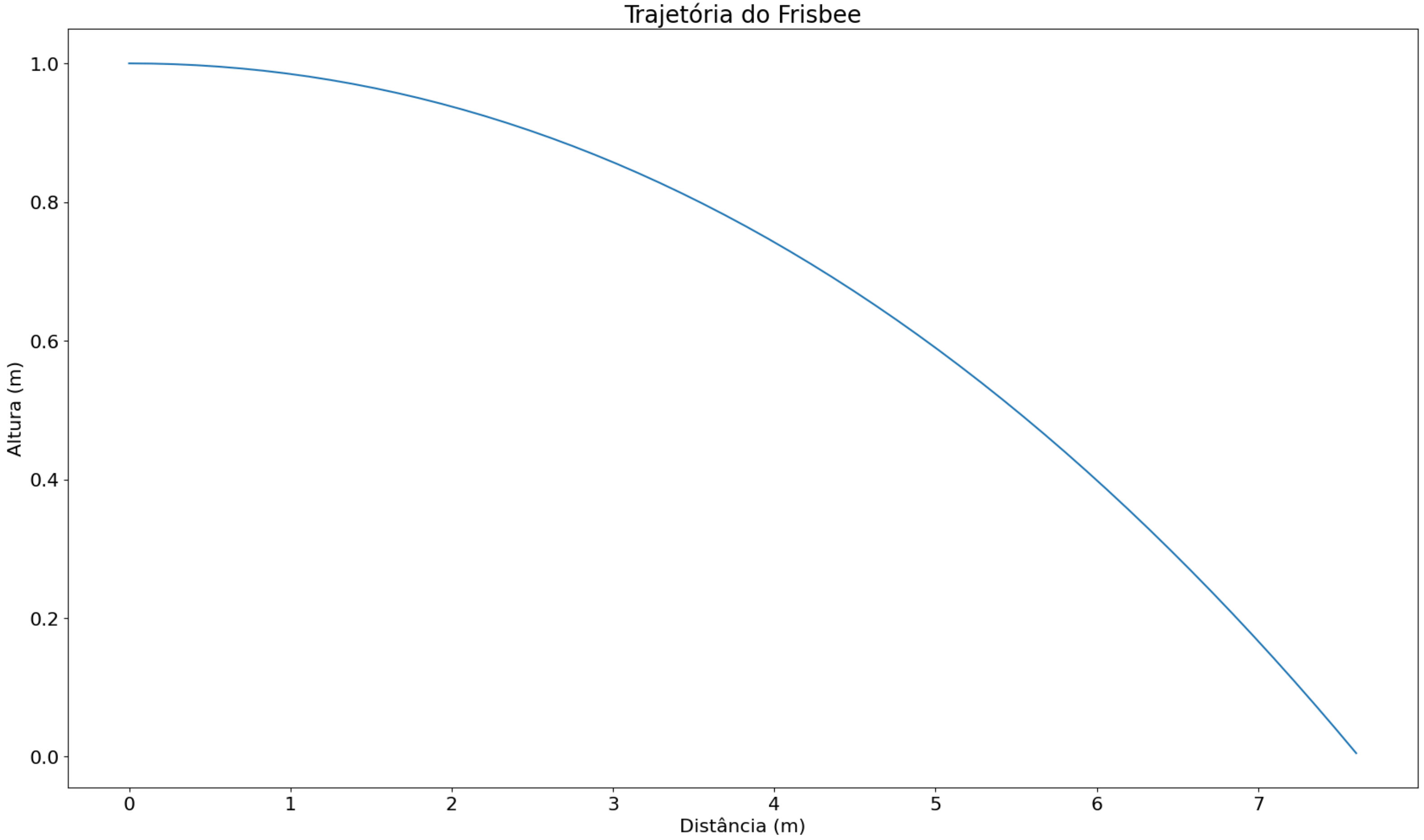


Figura 7: Trajetória do *Frisbee* com velocidade inicial 14 m/s e $\alpha = 0°$

7. Comparação

7.1 Solução *Physics of Frisbee*

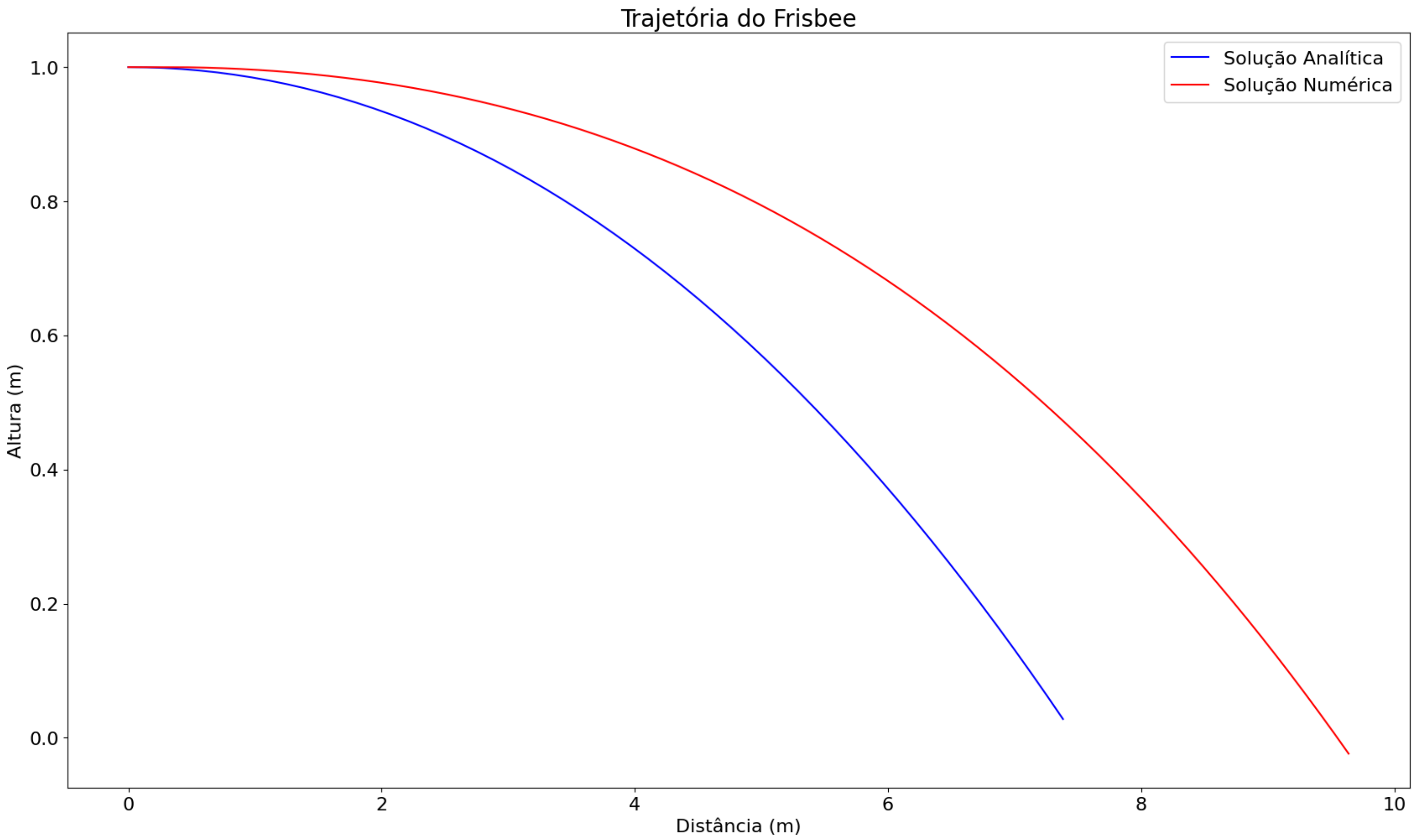


Figura 8: Trajetória do *Frisbee* com velocidade inicial 14 m/s e $\alpha = 0°$

7.2 Experimento

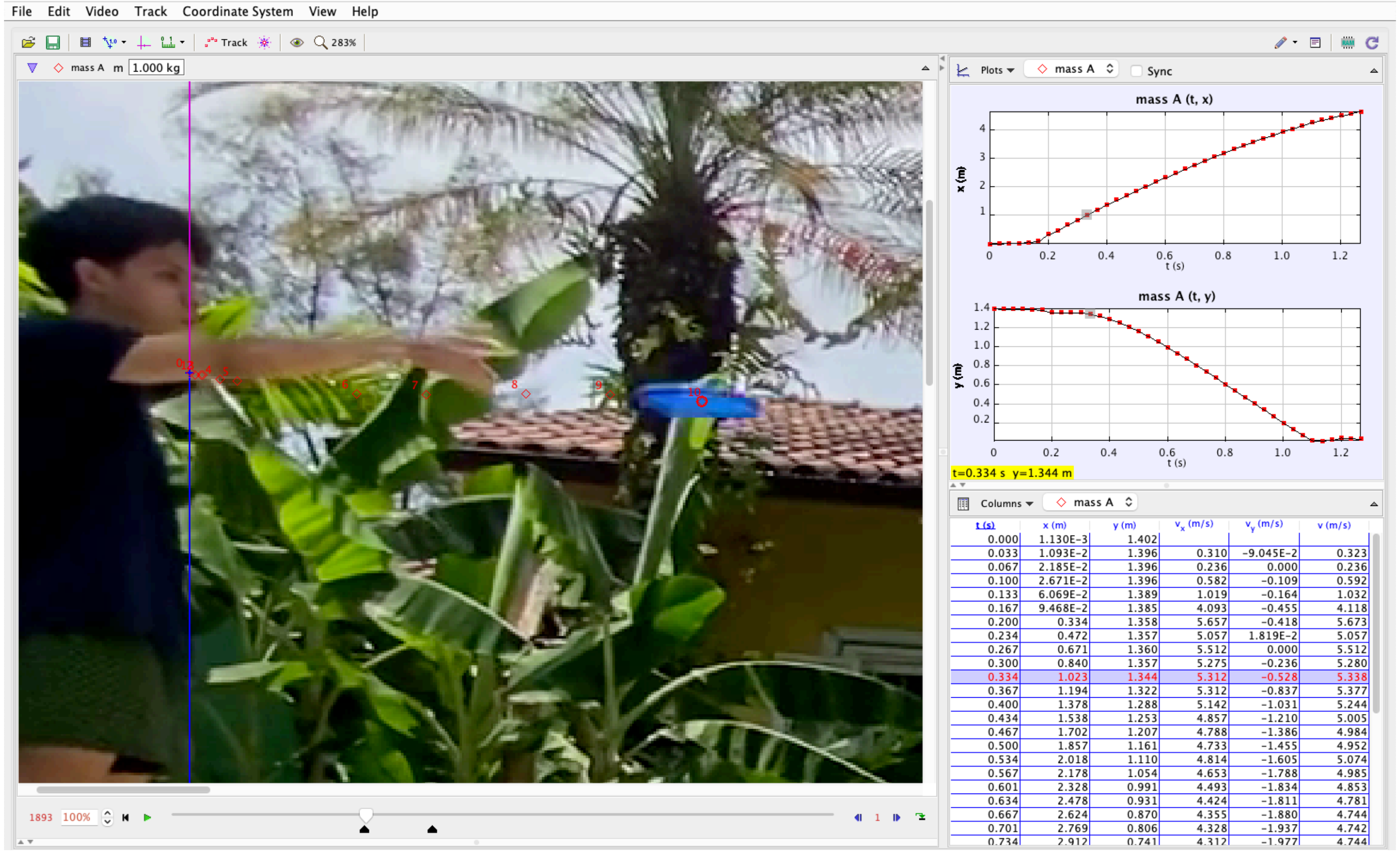


Figura 9: Captura do *Tracker* durante lançamento do *Frisbee*.

7.2 Experimento

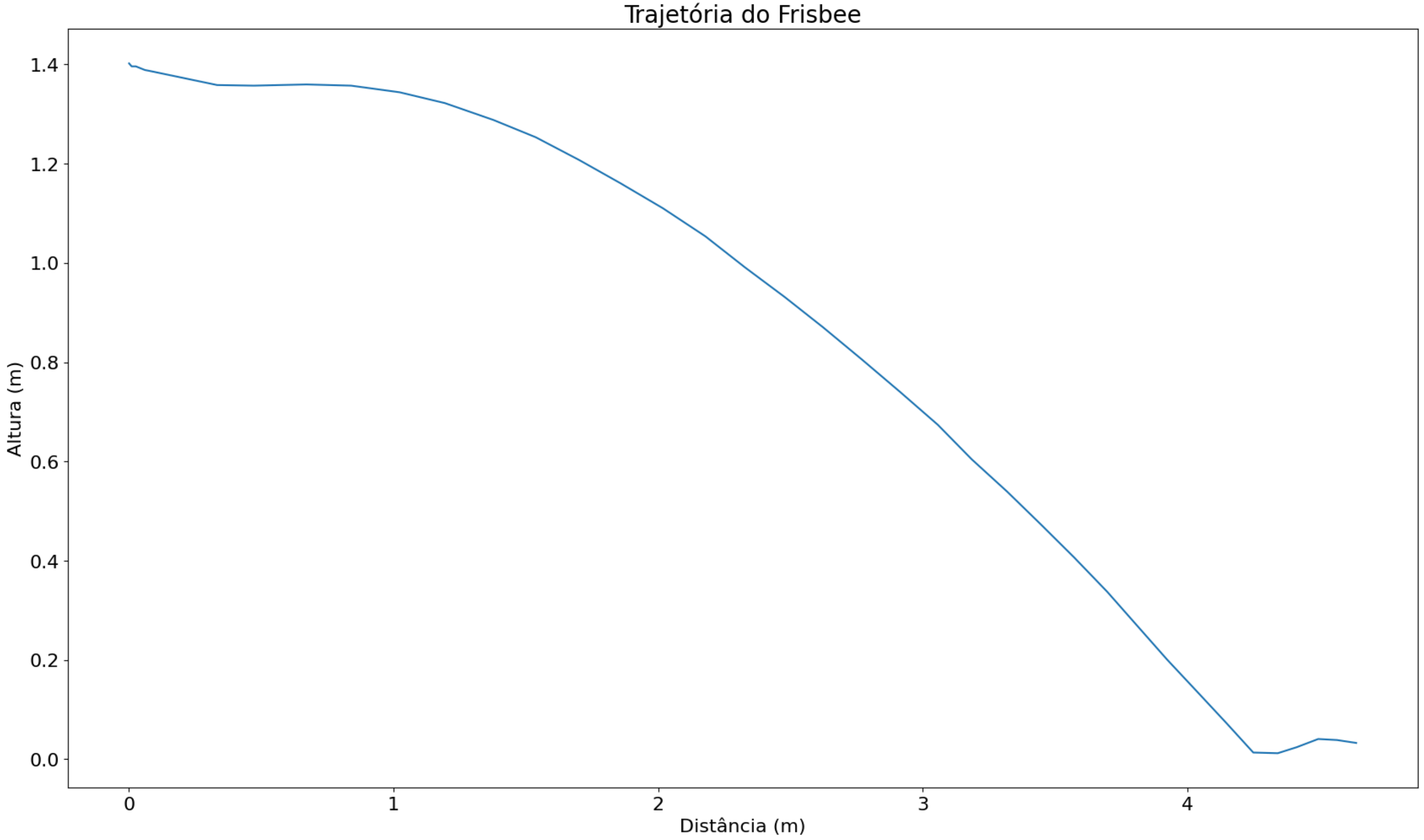


Figura 10: Trajetória do *Frisbee* com velocidade inicial 5.6 m/s e $\alpha \approx 3°$

7.3 Dados do Experimento

Variável	Valores
x_0	0.335 ± 0.005 m
z_0	1.358 ± 0.005 m
v_0	5.673 ± 0.0707 m/s
massa	0.080 ± 0.001 kg
diâmetro	0.21 ± 0.005 m
ângulo de ataque	3°
aceleração da gravidade	9.81 m/s²
densidade do ar	1.23 kg/m³

Tabela 1: Dados coletados no *Tracker* e incertezas dos aparelhos de medição.

7.3 Dados do Experimento

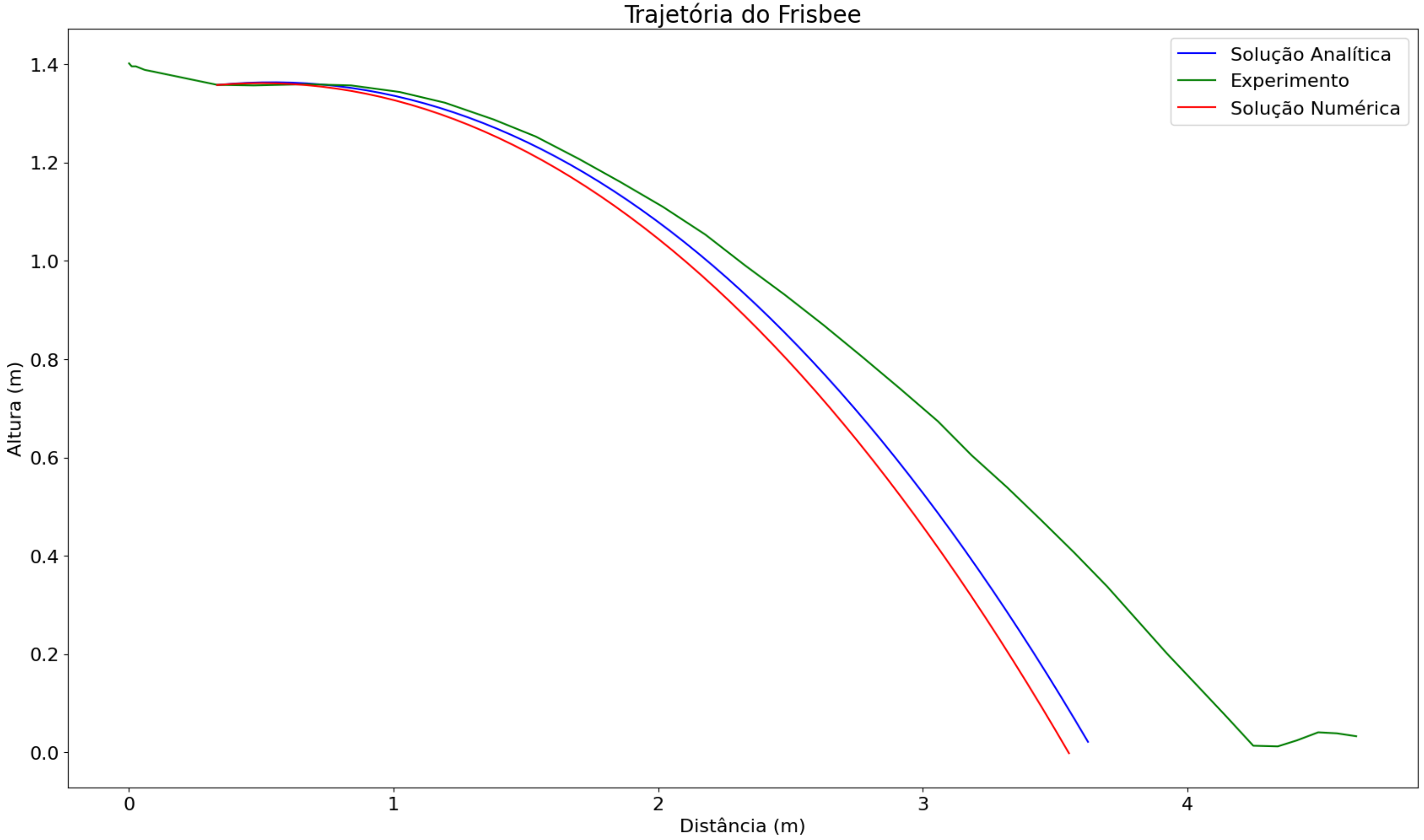


Figura 11: Trajetória do *Frisbee* com velocidade inicial 5.657 m/s e $\alpha \approx 3°$.

Bibliografia

[1] Morrison VR. The Physics of Frisbees. 2005;

[2] Motoyama E. The Physics of Flying Discs. 2002;. Internet: https://people.csail.mit.edu/jrennie/discgolf/physics.pdf

[3] Hubbard M, Hummel SA. Simulation of Frisbee Flight. Em: Proceedings of the Department of Mechanical and Aeronautical Engineering. University of California, Davis; 2010

[4] Baumback K. The Aerodynamics of Frisbee Flight. Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two 2010; 3: Article3. doi:10.5038/2326-3652.3.2.3

[5] Brown D, Hanson R, Christian W. Tracker Video Analysis and Modeling Tool. 2024;. Internet: https://physlets.org/tracker/