Pedro Henrique Honorio Saito DRE: 122149392

Equação

A equação que rege o movimento do pêndulo simples, sem a aproximação do ângulo pequeno, é descrita da seguinte forma:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Esta é uma equação não-linear, diferente da equação linear clássica do pêndulo, na qual o sistema é considerado um oscilador harmônico simples, obtido a partir da aproximação $\sin\theta \approx \theta$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{2}$$

Motivações

Para ângulos superiores a 20°, a aproximação linear não representa com precisão a dinâmica do pêndulo. Nesses casos, a não-linearidade do termo sin, θ permite captar a verdadeira oscilação do sistema.

Condições Adicionais do Modelo

Dentre as condições inicias, destacam-se:

- Ausência de atrito.
- Ausência de resistência da ar.
- Fio inextensível e sem massa.
- Movimento restrito a um plano.
- Deslocamento angular inicial diferente de zero.
- Velocidade angular inicial nula.

Essas hipóteses garantem o princípio da conservação de energia.

Solução Exata

Como discutido em [1], a solução da equação que rege o comportamento do pêndulo simples em regime não linear é dada pela expressão:

$$\omega(\theta_0) = \frac{\pi\sqrt{\frac{g}{l}}}{2K\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)} \tag{3}$$

Componentes da solução:

- $\omega(\theta_0)$: frequência angular, depende do ângulo inicial θ_0.
- g: Aceleração da gravidade.
- l: Comprimento do pêndulo.
- θ_0: Amplitude inicial (ângulo de lançamento do pêndulo).
- $K(x)$: Integral elíptica completa do primeiro tipo.
- $\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$: Seno quadrado da metade do ângulo inicial.

1. Dias, A.R.G. e Oliveira, T.P.d. (2021) O pêndulo simples em regime não linear: uma análise com funções elípticas de Jacobi e integrais elípticas. *Brazilian Journal of Development* 7, 96374–96389