Lista II

Pedro Henrique Honorio Saito
122149392

Milton Salgado
122169279

Questão 1

Enunciado: Dada uma assinatura $\mathcal{A}$ com dois símbolos para operações, sendo P unário e R binário. Provaremos ou refutaremos cada um dos itens abaixo.

Item B

Iremos refutar a fórmula $\varphi := P(x) \vDash P(y)$ por meio de um contraexemplo. Assim, considere:

- A estrutura ε com domínio $D(\varepsilon)$ dos números naturais $\mathbb{N}$.
- A especificação para relação unária dada por $P^\varepsilon = \text{é par}$.
- A atribuição a para x e y valendo, respectivamente, 2 e 3.

Portanto, sabemos que para a estrutura ε e atribuição a definidas, vale $P(x)[x \leftarrow 2]$ pois 2 é par, isto é, vale dizer que $\varepsilon, a[x \leftarrow 2] \vDash P(x)$. No entanto, é incorreto afirmar o consequente $P(y)[y \leftarrow 3]$ dado que 3 não consta no conjunto dos números pares. Donde concluímos que $\varepsilon, a[y \leftarrow 3] \nvDash P(y)$.

Item G

Novamente, vamos refutar a fórmula $\varphi := \forall x \exists y (xRy) \vDash \exists x \forall y (xRy)$ a partir de um contramodelo. Considere:

- A estrutura ε com domínio $D(\varepsilon)$ do conjunto $\{\{\square\}, \{\blacksquare\}\}$.
- A especificação para relação binária $R(x, y)$ equivale a dizer: "$x \subset y$" na noção usual de Teoria dos Conjuntos.

Nesse sentido, para a estrutura ε vale afirmar o antecedente $\forall x \exists y (xRy)$, ou seja, para cada um dos subconjuntos $\{\square\}$ e $\{\blacksquare\}$, existe um outro subconjunto que o contenha, isto é, $\forall x \exists y (xRy)$. Essa afirmação é válida pois podemos escolher o mesmo conjunto de modo que (xRx). Desempacotando:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon, a \vDash \forall x \exists y (xRy) \\
&\text{Para todo } d_0 \in D(\varepsilon), \text{existe } d_1 \in D(\varepsilon) \text{ tal que } \varepsilon, a[x \leftarrow d_0, y \leftarrow d_1] \vDash \forall x \exists y (xRy) \\
&\text{Para todo } d_0 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\}, \text{existe } d_1 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\} \text{ tal que } \left(x^{\varepsilon, a[x \leftarrow d_0]}\right) \subset \left(y^{\varepsilon, a[y \leftarrow d_1]}\right) \qquad (1) \\
&\text{Para todo } d_0 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\}, \text{existe } d_1 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\} \text{ tal que } (a[x \leftarrow d_0])(x) \subset (a[x \leftarrow d_1])(y) \\
&\text{Para todo } d_0 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\}, \text{existe } d_1 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\} \text{ tal que } d_0 \subset d_1
\end{aligned}$$

Portanto, se temos $d_0 = \{\square\}$ ou $d_0 = \{\blacksquare\}$, basta escolher $d_1 = d_0$ e assim satisfazemos o antecedente da fórmula. Dessa forma, a estrutura e atribuição escolhidas satisfazem a primeira parte da implicação. Agora, precisamos demonstrar que o consequente **não** é satisfeito. Novamente, desempacotando:

$$\varepsilon, a \vDash \exists x \forall y (xRy) \qquad (2)$$

Desse modo, deve existir $d_0 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\}$ tal que, para todo $d_1 \in \{\{\square\}, \{\blacksquare\}\}$, temos $d_0 \subset d_1$. Se fixarmos $d_0 = \{\square\}$, a fórmula exige que $\{\square\} \subset \{\square\}$ e $\{\square\} \subset \{\blacksquare\}$. Contudo, essa última afirmação é inválida, pois o conjunto $\{\blacksquare\}$ não contém $\{\square\}$.

Item K

Aqui provaremos a fórmula $\psi :=$ "Se x não ocorre livre em φ, então $\varphi \vDash \forall x \varphi$".

Por definição, para:

- Uma assinatura $\mathcal{A}$.
- Um conjunto de fórmulas Σ de $\mathcal{A}$.
- Uma uma fórmula φ de $\mathcal{A}$.

Dizemos que φ é *consequência semântica* de Σ, denotado $\Sigma \vDash \varphi$, se: Em qualquer estrutura ε para $\mathcal{A}$ e qualquer atribuição a para ε temos se para todo $\sigma \in \Sigma$ temos $\varepsilon, a \vDash \sigma$ então $\varepsilon, a \vDash \varphi$.

Sejam ε, a tais que $\varepsilon, a \vDash \varphi$ onde φ é uma fórmula na qual x não ocorre como variável livre, desejamos provar que $\varepsilon, a \vDash \forall x \varphi$. Primeiramente, vamos esclarecer esta última fórmula:

$$\varepsilon, a \vDash \forall x \varphi \Leftrightarrow \text{Para todo } d \in D(\varepsilon), \text{ temos } \varepsilon, a[x \leftarrow d] \vDash \varphi. \tag{3}$$

Como sabemos que x não ocorre como variável livre em φ, podemos separar a fórmula original em dois casos:

1. x não ocorre em φ : A adição do quantificador $\forall x$ não alterará o significado da proposição φ, pois x não ocorre em φ. A substituição $a[x \leftarrow d]$ também não afeta φ, pois x não aparece em φ. Assim,

$$\varepsilon, a[x \leftarrow d] \Leftrightarrow \varepsilon, a \vDash \varphi \tag{4}$$

   Logo, como isso vale para todo $d \in D(\varepsilon)$, concluímos que:

$$\varepsilon, a \vDash \forall x \varphi. \tag{5}$$

2. x ocorre ligada em φ : Isso nos diz que todas as ocorrências de x em φ estão sob o escopo de algum quantificador como $\exists x$ ou $\forall x$. Portanto, uma atribuição diferente para x como $a[x \leftarrow d']$ não modifica a interpretação de φ, pois a variável x já está internamente determinada na fórmula. Assim, novamente temos:

$$\varepsilon, a[x \leftarrow d] \Leftrightarrow \varepsilon, a \vDash \varphi \tag{6}$$

   para todo $d \in D(\varepsilon)$, o que implica:

$$\varepsilon, a \vDash \forall x \varphi. \tag{7}$$

Questão 2

Chamamos de *modelagem* o processo de formalizar (simbolizar) frases ou argumentos da linguagem natural para a LPO usando alguma assinatura apropriada. Deve-se indicar a correspondência entre os componentes da frase da linguagem natural e os símbolos da linguagem formal.

Item B

Frase: “Toda pessoa que tem um filho deveria ser carinhosa com ele”. Use a assinatura abaixo:

Linguagem natural	Simbólico
x é pai de y	$P(x, y)$
x deveria ser carinhoso com y	$C(x, y)$

Sendo x o pai, então a afirmação corresponde a dizer que todo pai (isto é, pessoa que tem filho) deve ser carinhoso com seu filho. Assim,

Tradução: $\forall x \forall y (P(x, y) \to C(x, y))$.

Explicação: Na minha formulação, procurei transmitir a noção: Para todo par de indivíduos x e y, se x é pai de y, então x deve ser carinhoso com y. Note que, na minha formulação nada impede "autopartenidade", isto é, $x = y$. Se for necessária essa restrição, bastaria modificar a fórmula para:

$$\forall x \forall y ((P(x, y) \land \neg(x = y)) \to C(x, y)). \tag{8}$$

Questão 3

Enunciado: Em cada item abaixo, defina uma assinatura e encontre uma sentença φ dessa assinatura com a propriedade desejada.

Item B

Enunciado: Os modelos de φ são **torneios** (grafos direcionados, sem laços, tais que entre qualquer par de vértices distintos existe exatamente uma aresta).

Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura que contenha um símbolo R para relação. Assim,

Formulação: $\forall x (\neg(xRx)) \land \forall x \forall y ((x \neq y) \to ((xRy) \oplus (yRx)))$

Onde a relação $\oplus$ é uma forma concisa de expressar a relação $A \oplus B = (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$.

Explicação: Neste exercício, precisamos garantir duas propriedades importantes mencionadas no enunciado, isto é, a ausência de laços e a existência de uma única aresta entre quaisquer dois vértices distintos. Para essa finalidade, defini a relação R que indica uma *arco* (aresta direcionada).

Com efeito, a primeira fórmula $\forall x (\neg(xRx))$ restringe que um mesmo vértice se ligue consigo mesmo. Além disso, a segunda parte da fórmula nos garante que se dois vértices são distintos, então existe uma aresta direcionada do "primeiro" para o "segundo" **ou** vice-versa. Vale ressaltar que o **ou** em questão é *exclusivo*.

Item F

Enunciado: Os modelos de φ tem exatamente n elementos, sendo $n \geq 2$ um número natural qualquer.

Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura vazia. Nesse sentido, temos precisamos garantir as seguintes propriedades:

- Existem pelo menos n elementos distintos.
- Existem no máximo n elementos distintos.

Portanto, teremos a seguinte sentença:

Formulação: $\exists x_1 \exists x_2 ... \forall x_n, \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \neq x_j) \land \forall y \bigvee_{i=1}^{n} (y = x_i) \right)$

Onde a relação $\neq (A, B)$ equivale a $\neg(A = B)$ e a notação com variável ligada $\bigwedge_{1 \leq i < j < n}$ corresponde a dizer: Substitua todas as combinações de i, j no intervalo $[1, n]$ com $i < j$ na fórmula $(x_i \neq x_j)$ e una-os por uma conjunção. Por fim, a notação $\bigvee_{i=1}^{n}$ realiza um procedimento semelhante, mas unindo as fórmulas por disjunções.

Explicação: Como solicitado, a primeira fórmula restringe a existência de pelo menos n elementos distintos $x_0, ..., x_n$, enquanto a segunda apenas nos informa que todo elemento do domínio será equivalente a um desses.

Item H

Enunciado: Os modelos de φ são infinitos.

Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura com um símbolo para relação binária R. Desse modo, para simplificar a fórmula final, denotaremos cada propriedade da seguinte forma:

- **Transitividade**: $\alpha \coloneqq \forall x \forall y \forall z((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))$.
- **Assimetria**: $\beta \coloneqq \forall x \forall y(R(x, y) \to \neg R(y, x))$.
- **Irreflexividade**: $\gamma \coloneqq \forall x(\neg(xRx))$.

Desse modo, obtemos:

Formulação: $(\alpha \land \beta \land \gamma \land \forall x \exists y R(x, y))$.

onde a relação $R(x, y)$ é uma relação de **ordem parcial estrita**.

Explicação: Nesta questão, precisamos definir o conceito de relação de ordem parcial estrita e, então, afirmar que para todo elemento do domínio x, existe um y de modo que $R(x, y)$, ou seja, “$x \text{ vem antes de } y$”. O objetivo é formular uma sentença que só possa ser satisfeita por estruturas cujo domínio seja infinito. Por definição, as relações de ordem parcial estrita satisfazem as seguintes propriedades:

- **Irreflexividade**: Assegura que nenhum elemento se relacione consigo mesmo, evitando a existência de “laços”, isto é, um elemento relacionado com si próprio.
- **Assimetria**: Impede ciclos de comprimento 2.
- **Transitividade**: Permite estender a “cadeia de comparações” indefinidamente e, assim, evitar a existência de ciclos como um todo. Por exemplo, se

$$x_0 \; R \; x_1 \; R \; ... \; R \; x_n \; R \; ... \tag{9}$$

  Por fim, a última proposição $\forall x \exists y(R(x, y))$ nos garante que todo elemento do domínio está relacionado com alguém.

  Em vista disso, escolha um elemento inicial x_0. Pela **irreflexividade** e pela condição $\forall x \exists y(xRy)$, existe $\neg(x_1 = x_0)$ tal que

$$x_0 \; R \; x_1. \tag{10}$$

  Novamente, pela **assimetria** não podemos ter $x_1 R x_0$. Aplicando novamente a última proposição à x_1, obtemos um $\neg(x_2 = x_1)$ de modo que

$$x_0 \; R \; x_1 \; R \; x_2, \tag{11}$$

  e assim sucessivamente. Com efeito, a **transitividade** permite construir uma única cadeia infinita de elementos relacionados unilateralmente com o próximo nesta ordem

$$x_0 \; R \; x_1 \; R \; x_2 \; R \; ... \; R \; x_n \; R \; ... \tag{12}$$

Questão 5

Enunciado: Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura com um símbolo para constante u, com dois símbolos para operações binárias $\oplus$, $\odot$ e um símbolo para relação binária $\lhd$. Seja $\varepsilon_{\mathbb{R}}$ a estrutura para essa assinatura que tem o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ como domínio e que interpreta u como 1, as operações $\oplus$, $\odot$ respectivamente como adição e multiplicação, e a relação $\lhd$ como "estritamente menor que".

Item A

Enunciado: Prove que todo número inteiro é definível em $\varepsilon_{\mathbb{R}}$.

Antes de mais nada, vamos recordar a definibilidade de um elemento d pertencente ao domínio $D(\varepsilon)$.

Definição: Seja $\mathcal{A}$ assinatura, ε estrutura para $\mathcal{A}$ e $d \in D(\varepsilon)$. Dizemos que d é definível em ε se existe uma fórmula φ de $\mathcal{A}$ com exatamente 1 variável livre (digamos x) tal que, para toda atribuição a para ε temos

$$\varepsilon, a \vDash \varphi \Leftrightarrow a(x) = d \tag{13}$$

Nesse caso, dizemos que φ define d em ε.

Dito isso, como temos a estrutura $\varepsilon_{\mathbb{R}}$ e a assinatura $\mathcal{A}$, vamos começar definindo o "zero" por meio da seguinte fórmula com a variável livre x:

$$\psi(0)(x) := (x = x \oplus x) \tag{14}$$

Onde $\psi(0)(x)$ é a fórmula que define o elemento 0 pertencente a $D(\varepsilon) = \mathbb{R}$ usando a variável livre x. A fórmula anterior é válida, pois sabemos que o 0 é o único elemento dos reais que satisfaz a equação. Feito isso, se quisermos definir valores positivos ou negativos, usaremos a fórmula abaixo:

$$\psi(n)(z) := \begin{cases} z = z \oplus z, & n = 0 \\ z = \underbrace{u \oplus \dots \oplus u}_{n}, & n > 0 \\ u = z \oplus \underbrace{u \oplus \dots \oplus u}_{|n|+1}, & n < 0 \end{cases} \tag{15}$$

Onde z corresponde a variável livre que define a unidade inteira desejada.

Explicação: Nesse contexto, começamos a partir da constante $u^{\varepsilon} = 1$. A ideia é que, se u representa a unidade, então é suficiente somar a constante u um total de n vezes para obter um número inteiro positivo. Alternativamente, podemos partir de um valor negativo e aplicar $|n| + 1$ incrementos com u até retornarmos ao zero, posto que z corresponde ao inverso aditivo.

Em termos formais, para representar o inteiro 4, definimos

$$\psi(4)(z) := \left(z = \underbrace{u \oplus u \oplus u \oplus u}_{4} \right) \tag{16}$$

Por outro lado, se tentarmos representar $\pi = 3.141592653589793...$, teríamos:

$$\psi(\pi)(z) := \left(z = \underbrace{u \oplus \dots \oplus u}_{\pi} \right), \tag{17}$$

no entanto como π não é inteiro, a Equação 17 não é "formável" e, portanto, não é capaz de definir o elemento $d = \pi \in \mathbb{R}$.

Item B

Enunciado: Um número *racional* é um número que pode ser escrito como uma fração com numerador e denominador inteiros. Prove que todo racional é definível em $\varepsilon_{\mathbb{R}}$.

Seja $r \in D(\varepsilon_{\mathbb{R}})$. Para caracterizar r como um número racional, introduzimos duas variáveis p e q que definem inteiros por meio das fórmulas $\psi(p)$ e $\psi(q)$, respectivamente. Além disso, exigimos que o denominador q não seja zero. Abaixo, definimos a fórmula $\omega(r)(z)$ que capta essas condições:

$$\omega(r)(z) := \exists p \exists q \Big(\psi(p) \wedge \psi(q) \wedge \neg(\psi(0)(q)) \wedge (p = z \otimes q)\Big) \tag{18}$$

onde a variável livre z representa o racional r que desejamos definir.

Explicação: Como solicitado no enunciado, obrigamos p e q a serem inteiros por meio das fórmulas $\psi(p)$ e $\psi(q)$. Além disso, asseguramos que o denominador q não seja zero e que z corresponda à $\frac{p}{q}$.

Item C

Enunciado: Prove que qualquer raiz de polinômio com coeficientes racionais é definível em $\varepsilon_{\mathbb{R}}$.

Primeiramente, definiremos a operação polinômio com aridade $n + 1$, sendo n o grau do polinômio e $+1$ equivalente à variável x que pode assumir qualquer valor. Portanto, denotando a operação do polinômio por $p(a_{n-1}, ..., a_0, a_1, x)$ temos:

$$p(a_n, ..., a_1, a_0, x) = a_n \otimes \underbrace{x \otimes ... \otimes x}_{n} \oplus ... \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 \tag{19}$$

Essa notação será útil para simplificar a formulação final da raiz. Dito isso, seja r_i a *i-ésima raiz* de um polinômio qualquer, vamos especificar a entrada e saída da operação da raiz com r_i livre:

$$\begin{aligned} &\underline{\text{Operação}}\ R(a_n, ..., a_0, i) \\ &\text{Entrada : Coeficientes racionais } a_n, ..., a_0 + \text{Inteiro } i\ (i\text{-é}sima\ raiz). \\ &\text{Saída : Fórmula satisfeita apenas pela atribuição } a(r_i) = r_i. \end{aligned} \tag{20}$$

Observação: As raízes estão ordenadas de forma não crescente começando em 0, isto é, se duas raízes tem índices $i < j$, então $r_i \geq r_j$. Em particular, para quaisquer i, $r_i \geq r_{i+1}$ e, caso $r_i = r_{i+1}$, sua ordem relativa é indiferente.

Nesse sentido, denotaremos cada propriedade da seguinte forma:

- A *i-ésima* raiz r_i de um polinômio com uma coeficientes racionais $a_{n-1}, ..., a_0$ deve satisfazer:

$$\alpha := p(a_n, ..., a_0, r_i) = 0. \tag{21}$$

- A *i-ésima* raiz r_i, em ordem não crescente, de um polinômio onde r_0 é maior e assim sucessivamente deve satisfazer:

$$\beta := (\neg(r_1 \lhd r_0) \wedge ... \wedge \neg(r_{i+1} \lhd r_i) \wedge ... \wedge \neg(r_{n+1} \lhd r_n)). \tag{22}$$

- Por fim, precisamos garantir que todas as fórmulas

  Desse modo, derivamos a seguinte fórmula:

$$R(a'_n, ..., a'_0, i)(r_i) = \exists a_n ... \exists a_0((a_n = \omega(a'_n)) \wedge ... \wedge (a_0 = \omega(a'_0)) \wedge \alpha \wedge \beta). \tag{23}$$

Questão 7

Enunciado: Prove que $\varphi, \psi \vdash \beta$ onde

$$\begin{aligned} \varphi &:= \forall x[(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow H(x)] \rightarrow \exists x[F(x) \wedge (\neg G(x))] \\ \psi &:= \forall x[F(x) \rightarrow G(x)] \vee \forall x[F(x) \rightarrow H(x)] \\ \beta &:= [(F(x) \wedge H(x)) \rightarrow G(x)] \rightarrow \exists x[\langle F(x) \wedge G(x)\rangle \wedge \neg H(x)]. \end{aligned} \tag{24}$$

Onde cada nós e sua restrição de constante seguem, respectivamente, os modelos abaixo

$$\textit{fórmula} : \textit{julgamento}(\textit{origem})^{\textit{índice}} \quad \text{tal que } \checkmark = \textit{mexido} \text{ e } \text{X} = \textit{fechado} \tag{25}$$

fórmula com constante atualmente restrita e fórmula sem constante ou sem constante restrita

Seja o conjunto de proposições da LPO $\Gamma = \{\varphi : \text{V}, \psi : \text{V}, \beta : \text{F}\}$, uma árvore para Γ é dada abaixo.

$\beta := \forall x[(F(x) \wedge H(x)) \rightarrow G(x)] \rightarrow \exists x[\langle F(x) \wedge G(x)\rangle \wedge \neg H(x)] : \text{F}(\Gamma)^{1} \checkmark$

$\forall x[(F(x) \wedge H(x)) \rightarrow G(x)] : \text{V}(1)^{2}$

$\exists x[\langle F(x) \wedge G(x)\rangle \wedge \neg H(x)] : \text{F}(1)^{3}$

$(F(c) \wedge H(c)) \rightarrow G(c) : \text{V}(2)^{4}$

$\langle F(c) \wedge G(c)\rangle \wedge \neg H(c) : \text{F}(3)^{5} \checkmark$

$\varphi := \forall x[(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow H(x)] \rightarrow \exists x[F(x) \wedge (\neg G(x))] : \text{V}(\Gamma)^{6}$

- $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \rightarrow H(x) : \text{F}(6)^{7}$
  - $(F(c) \wedge G(c)) \rightarrow H(c) : \text{F}(7)^{8} \checkmark$
  - $F(c) \wedge G(c) : \text{V}(8)^{9} \checkmark$
  - $H(c) : \text{F}(8)^{10}$
  - $F(c) : \text{V}(9)^{11}$
  - $G(c) : \text{V}(9)^{12}$
    - $\neg H(c) : \text{F}(5)^{13} \checkmark$
      - $H(c) : \text{V}(13)^{14}$
      - X 10, 14
    - $\langle F(c) \wedge G(c)\rangle : \text{F}(5)^{15} \checkmark$
      - $F(c) : \text{F}(15)^{16}$ — X 11, 16
      - $G(c) : \text{F}(15)^{17}$ — X 12, 17
- $\exists x[F(x) \wedge (\neg G(x))] : \text{V}(6)^{18}$
  - $F(d) \wedge (\neg G(d)) : \text{V}(18)^{19} \checkmark$
  - $F(d) : \text{V}(19)^{20}$
  - $\neg G(d) : \text{V}(19)^{21} \checkmark$
  - $G(d) : \text{F}(21)^{22}$
  - $\psi := \forall x[F(x) \rightarrow G(x)] \vee \forall x[F(x) \rightarrow H(x)] : \text{V}(\Gamma)^{23}$
    - $\forall x[F(x) \rightarrow G(x)] : \text{V}(23)^{24}$
      - $F(d) \rightarrow G(d) : \text{V}(24)^{25} \checkmark$
        - $F(d) : \text{F}(25)^{26}$ — X 20, 26
        - $G(d) : \text{V}(25)^{27}$ — X 22, 27
    - $\forall x[F(x) \rightarrow H(x)] : \text{V}(23)^{28}$
      - $F(c) \rightarrow H(c) : \text{V}(28)^{29} \checkmark$
        - $F(c) : \text{F}(29)^{30}$ — X 11, 30
        - $H(c) : \text{V}(29)^{31}$ — X 10, 31

Figura 1: *Árvore de avaliação totalmente fechada.*