ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра прикладной математики и искусственного интеллекта
Направление подготовки - «Прикладная математика»

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине: «Численные методы»

Система типа хищник-жертва. Модель Холлинга-Тернера.

Студент 2 курса
группы 09-221
«____» ________ 2024 г. ______________ М.А. Саитов
Научный руководитель
ассистент б.с.
«____» ________ 2024 г. ______________ О.В. Глазырина

Казань, 2024 год

Содержание

1 Цель работы

Целью работы является исследование модели взаимодейстия "Хищник - жертва", выявление зависимостей поведения модели в зависимости от значения параметров, описывающих систему, а так же применение метода

2 Теоретические основы выполнения работы

Модель Вольтерра используется для представления взаимодейстия двух типов. При моделировании системы "Хищник — Жертва" будем учиывать следующие ограничения:

1. Жертва может найти достаточно пищи для пропитания
2. При каждой встрече с хищником последний убивает жертву
3. Норма рождаемости жертв x_b, нормы естественной смертности жертв x_d и хищников c являются постоянными, $a = x_b - x_d > 0$.
4. Число случаев, когда хищник убивает жертву, зависит от вероятности их встречи и, следовательно, пропорционально произведению xy.
   В результате встреч с жертвами число хищников увеличивается.

Обозначим количества хищников и жертв в момент времени t через $y = y(t)$ и $x = x(t)$ соответственно. Тогда с учетом сделанных допущений, модель можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy \tag{1}$$

где коэффициенты b, d - коэффициенты убийства жертв и воспроизводства хищников, a - описывает рождаемость жертв, c - ествестенную смерть жертв.

Произведя в системе (1) замены:

$$X = \frac{d}{a}x,\ \ Y = \frac{b}{a}y,\ \ \tau = at,\ \ \sigma = \frac{c}{a} \tag{2}$$

уравнение (1) преобразуется к виду:

$$\frac{dX}{d\tau} = X - XY$$
$$\frac{dY}{d\tau} = -\sigma Y + XY \tag{3}$$

с начальными условиями:

$$X(0) = X_0,\ \ Y(0) = Y_0 \tag{4}$$

описывающими количество особей каждого из вида.

3 Метод Рунге-Кутты

Для решения систем дифференциалных уравнений будем использовать метод Рунге – Кутты 4-го порядка точности:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n),\\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{hk_1}{3}),\\
k_3 &= f(t_n + \frac{2h}{3}, y_n - \frac{hk_1}{3} + hk_2),\\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + h(k_1 - k_2 + k_3)),\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)}{8}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $y'(t, y) = k(t, y)$. Задано начльное условие $y(0) = y_0$. Этот метод является методом с постоянным шагом h на отрезке $[a, b]$, значения решения вычисляются в $n = \frac{b-a}{h}$ точках.

Используя приведенный выше метод решить тестовую задачу:

$$
y_1' = \frac{y_1}{2+2t} - 2ty_2, \quad y_2' = \frac{y_2}{2+2t} + 2ty_1, \tag{6}
$$

на отрезке [0, 2].

4 Задание

В ходе выполнения работы необходимо:

1. Решить тестовую задачу (6), написать процедуру интегрирования на произвольном отрезке $[a, b]$
2. Для тестовой задачи (6) построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и $\frac{e}{h^4}$ от шага h.
3. Для двух наборов начальных условий (4) и нескольких значений параметра σ расчитать динамику популяции. Привести графики решений в координатах (X, Y) и дать их интерпритацию.

5 Решение тестовой задачи

Тестовый вариант задачи будет решен методом Рунге - Кутты 4-го порядка точности. Дана система уравнений (6) с известным точным решением:

$$y_1 = \cos(t^2)\sqrt{1+t}, \quad y_2 = \sin(t^2)\sqrt{1+t} \tag{7}$$

Необходимо решить систему с начальными условиями $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ на отрезке [0; 2]. Перед вычислением коэффициентов стоит заметить, что $y_1' = y_1'(y_1, y_2, t)$ и $y_2' = y_2'(y_1, y_2, t)$, тогда:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= y_1'(t(i), y_1(i), y_2(i))\\
k_{12} &= y_2'(t(i), y_1(i), y_2(i))\\
k_{21} &= y_1'(t(i) + \frac{h}{3}, y_1(i) + \frac{h}{3}k_{11}, y_2(i) + \frac{h}{3}k_{12})\\
k_{22} &= y_2'(t(i) + \frac{h}{3}, y_1(i) + \frac{h}{3}k_{11}, y_2(i) + \frac{h}{3}k_{12})\\
k_{31} &= y_1'(t(i) + \frac{2h}{3}, y_1(i) - \frac{h}{3}k_{11} + hk_{21}, y_2(i) - \frac{h}{3}k_{12} + hk_{22})\\
k_{32} &= y_2'(t(i) + \frac{2h}{3}, y_1(i) - \frac{h}{3}k_{11} + hk_{21}, y_2(i) - \frac{h}{3}k_{12} + hk_{22})\\
k_{41} &= y_1'(t[i] + h, y_1(i) + h(k_{11} - k_{21} + k_{31}), y_2(i) + h(k_{12} - k_{22} + k_{32}))\\
k_{42} &= y_2'(t[i] + h, y_1(i) + h(k_{11} - k_{21} + k_{31}), y_2(i) + h(k_{12} - k_{22} + k_{32}))
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
y_1(i+1) &= y_1(i) + \frac{h}{8}(k_{11} + 3k_{21} + 3k_{31} + k_{41})\\
y_2(i+1) &= y_2(i) + \frac{h}{8}(k_{11} + 3k_{21} + 3k_{31} + k_{41})
\end{aligned} \tag{9}$$

где i = 1, . . . , $\frac{b-a}{h} - 1$

Получим график данных функций:

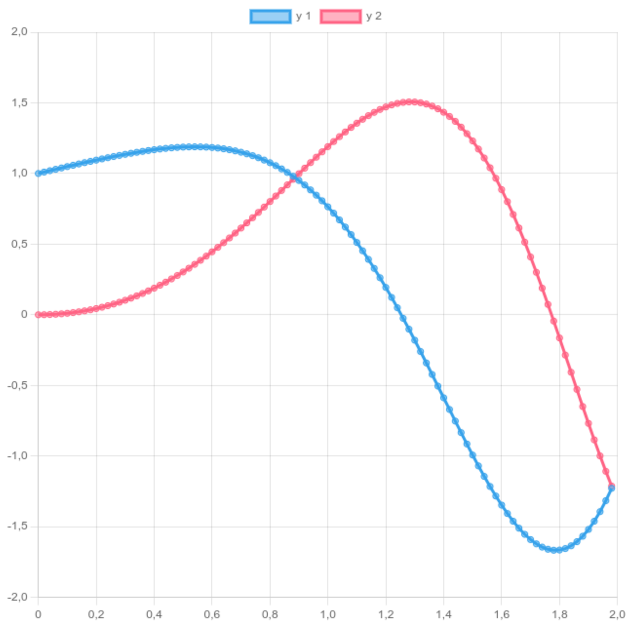


Рис.1 — График двух функций, полученных через метод Рунге - Кутты.

Решив таким образом систему, составим графики зависимости максимальной ошибки решения от шага h^4:

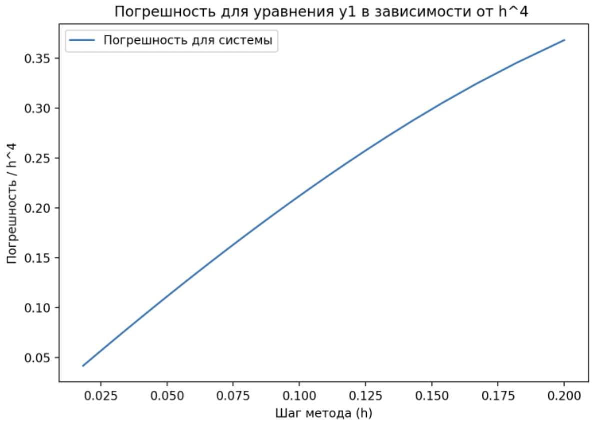


Рис.2 — Зависимость точности решения от шага h^4.

Исходя из вида графиков, описывающих зависимость точности решения, можно сделать вывод о зависимости точности решения от шага разбиения.

6 Модель Вольтерра

Теперь мы можем, используя правило (5) решить систему (3). Выберем начальные условия $X_0 = 3, Y_0 = 0.5$, начальное число жертв и хищников, соответственно. Исходя из вида системы, отметим, что динамика популяции зависит от параметра $\sigma = \frac{c}{a}$ - отношения смертности хищников к приросту жертв. Выбрав $\sigma = 1$, т.е. установив равное отношение прироста жертв к смертности хищников получим график описывающий размеры популяций жертв и хищников с течением времени (Рис.2). Размер популяции жертв в начальный момент превышает размер популяции хищников, из-за чего веротность встречи представителей двух видов возрастает, хищник убивает жертву. С уменьшением количества жертв, количество встреч с хищниками убывает. Когда хищники не охотятся, их популяция начинает вымирать. Уменьшение популяции хищников уменьшает вероятность встреч с жертвами, что для последних, при наличии бесконечного числа пищи является причиной резкого увеличения числа представителей вида. Резкое увеличение числа жертв предполагает возрастание числа хищников. Система приходит в циклиеское, устойчивое состояние.

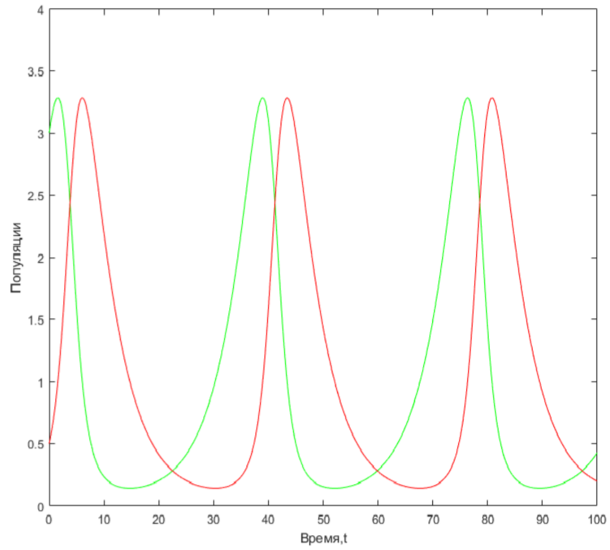


Рис.2 — Размер популяций жертв (зеленый) и хищников (красный) с течением времени.

Теперь выберем $\sigma = 3$, что определит троекратное увеличение убыли хищников к росту популяций жертв. Поведение популяций видов изменилось, численность популяций изменяется не так сильно, однако, за тот же промежуток времени происходит большее число "колебаний" числа представителей вида (Рис.3).

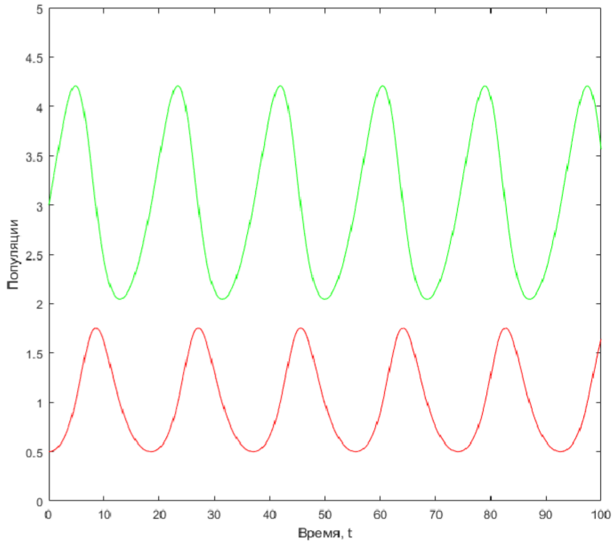
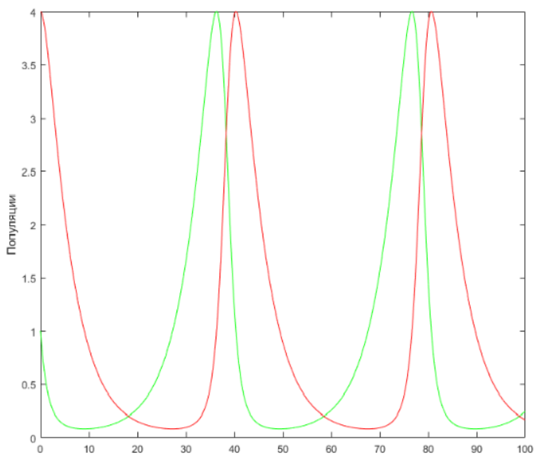


Рис.3 — Изменение популяций видов при $\sigma = 3$.

Применим те же параметры для системы с начальными условиями $X_0 = 1, Y_0 4$, что соответствует ситуации, когда в начальный момент число хищников в 4 раза превышает количество жертв. Тенденция стаблизации системы соханяется (Рис.3), однако при значении $\sigma = 3$ популяция хищников убывает сильнее из-за малого количества доступной изначально пищи и значения коэффициента.



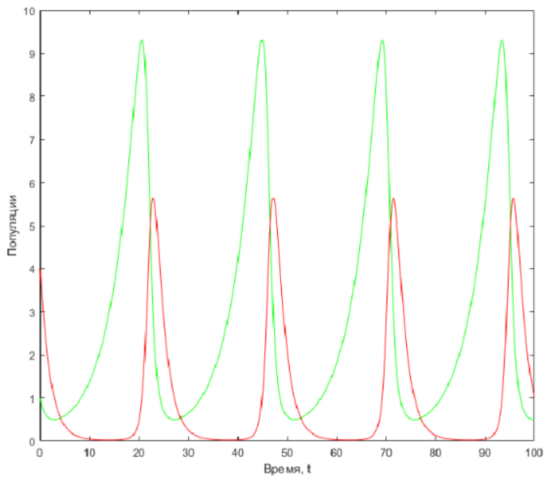


Рис.4 — Вид популяции при других начальных условиях.

Представим графики в координатах (X, Y) для двух расмотренных начальных условий (Рис. 5).

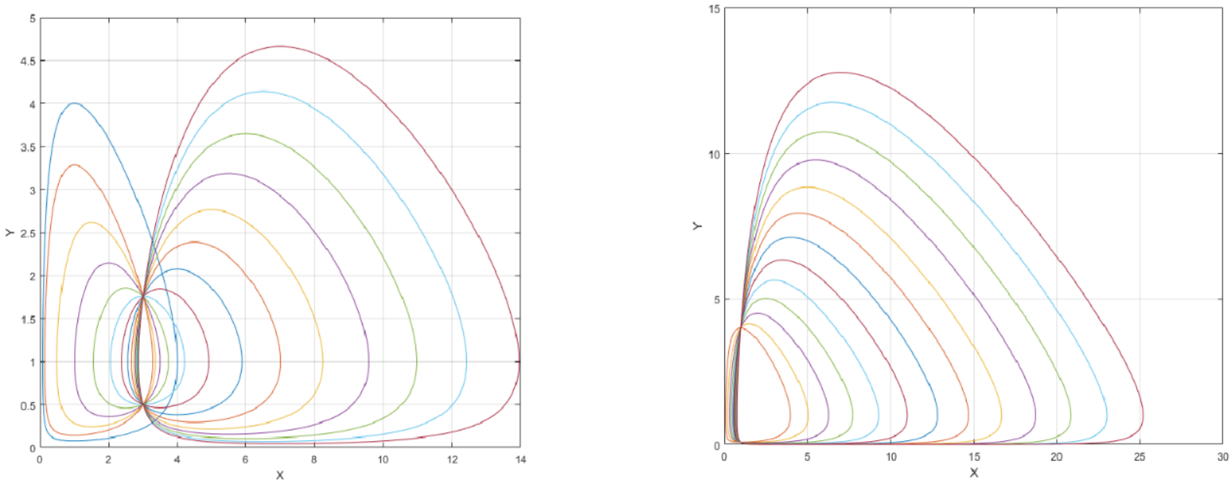


Рис.5 — Графики (X, Y) в зависимости от параметра σ. Линии проведены для значений лежащих в отрезке $[1, 7]$ через 0.5.

7 Заключение

Модель Вольтерра может быть использована для моделирования системы типа "Хищник–жертва". Наблюдая за моделью можно выявить основные закономерности поведения популяций. В ходе работы были рассмотрены модели с различными значениями начального размера популяций, коэффициентов определяющих отношение убыли одного вида к приросту другого. При выполнении задачи был использован метод Рунге–Кутты для решения систем дифференциалных уравнений. Метод позволяет решать уравнения с достаточной степенью точности, достаточной для корректного моделирования системы.

8 Список литературы

1. Глазырина Л.Л., Карчевский М.М. Численные методы: учебное пособие. — Казань: Казан. ун-т, 2012. — 122

2. Глазырина Л.Л.. Практикум по курсу «Численные методы». Решение систем линейных уравнений: учеб. пособие. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. — 52 с.

9 Листинг программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <iomanip>

#define a 0.0
#define b 2.0

double y1_test(double t, double y1, double y2) {
    return (y1 / (2 + 2 * t)) - 2 * t * y2;
}

double y2_test(double t, double y1, double y2) {
    return (y2 / (2 + 2 * t)) + 2 * t * y1;
}

void solve_test(double h, double x0, double y0, std::vector<double>&
   t, std::vector<double>& y1, std::vector<double>& y2) {
    int n = static_cast<int>((b - a) / h + 1);
    t = std::vector<double>(n);
    y1 = std::vector<double>(n);
    y2 = std::vector<double>(n);
    t[0] = double(a);
    y1[0] = x0;
    y2[0] = y0;

    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        t[i + 1] = t[i] + h;
        double k11 = y1_test(t[i], y1[i], y2[i]);
        double k12 = y2_test(t[i], y1[i], y2[i]);

        double k21 = y1_test(t[i] + h / 3, y1[i] + h * k11 / 3, y2[i]
            + h * k12 / 3);
        double k22 = y2_test(t[i] + h / 3, y1[i] + h * k11 / 3, y2[i]
            + h * k12 / 3);

        double k31 = y1_test(t[i] + 2 * h / 3, y1[i] - h * k11 / 3 +
           h * k21, y2[i] - h * k12 / 3 + h * k22);
        double k32 = y2_test(t[i] + 2 * h / 3, y1[i] - h * k11 / 3 +
           h * k21, y2[i] - h * k12 / 3 + h * k22);

        double k41 = y1_test(t[i] + h, y1[i] + h * (k11 - k21 + k31),
            y2[i] + h * (k12 - k22 + k32));
        double k42 = y2_test(t[i] + h, y1[i] + h * (k11 - k21 + k31),
            y2[i] + h * (k12 - k22 + k32));

        y1[i + 1] = y1[i] + h * (k11 + 3.0 * k21 + 3.0 * k31 + k41) /
            8.0;
        y2[i + 1] = y2[i] + h * (k12 + 3.0 * k22 + 3.0 * k32 + k42) /
            8.0;
    }
}
```

```

void exact(double h, std::vector<double>& y1, std::vector<double>& y2
    ) {
    int n = static_cast<int>((b - a) / h + 1);
    y1.resize(n);
    y2.resize(n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        double t = a + i * h;
        y1[i] = std::cos(t * t) * std::sqrt(1 + t);
        y2[i] = std::sin(t * t) * std::sqrt(1 + t);
    }
}

int main() {
    double x0 = 1;
    double y0 = 0;
    int n = 100;
    double h = (b - a) / n;

    // РешениеметодомРунгеКутты  - го4- порядка
    std::cout << "Метод РунгеКутты- го4- порядка" << std::endl;
    std::vector<double> t(n);
    std::vector<double> x(n);
    std::vector<double> y(n);
    solve_test(h, x0, y0, t, x, y);
    for(int i = 0; i < n; ++i) {
        std::cout << t[i] << " " << x[i] << " " << y[i] << std::endl;
    }


    // Точноерешение
    // std::cout << Точное" решение" << std::endl;
    // std::vector<double> x1, y1;
    // exact(h, x1, y1);
    // for(int i = 0; i < n; ++i) {
    //     std::cout << t[i] << " " << x1[i] << " " << y1[i] << std::
        endl;
    // }

    return 0;
}
```