Linearna algebra

Bojan Orel
Fakulteta za računalništvo in informatiko

2. marec 2015

CIP - Katažni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

512.64(075.8)(0.034.2)

OREL, Bojan
Linearna algebra [Elektronski vir] / Bojan Orel. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : Založba FE in FRI, 2012

Način dostopa (URL): http://matematika.fri.uni-lj.si/LA/la1.pdf\\ .

ISBN 978-961-6209-81-6 (pdf)

265434368

URL: matematika.fri.uni-lj.si/LA/la1.pdf

Recenzenta: prof. dr. Neža Mramor Kosta, doc. dr. Emil Žagar
Založnik: Založba FE in FRI, Ljubljana
Izdajatelj: UL Fakulteta za računalništvo in informatiko, Ljubljana
Urednik: mag. Peter Šega

1. izdaja

Kazalo

1 Vektorji in matrike **5**
1.1 Vektorji 5
1.1.1 Operacije z vektorji 6
1.1.2 Linearna kombinacija 8
1.1.3 Skalarni produkt in dolžina vektorja 10
1.1.4 Schwarzova in trikotniška neenačba, kot med vektorjema . 13
1.1.5 Vektorji v $\mathbb{R}^3$ 17
1.2 Matrike 31
1.2.1 Operacije z matrikami 33
1.2.2 Enotska matrika 46
1.3 Naloge 47

2 Sistemi linearnih enačb **56**
2.1 Vektorji in linearne enačbe 56
2.1.1 Dve enačbi z dvema neznankama 56
2.1.2 Tri enačbe s tremi neznankami (pa tudi več) 59
2.2 Gaussova eliminacija 61
2.2.1 Ko Gaussova eliminacija odpove 66
2.2.2 Matrična formulacija Gaussove eliminacije 68
2.3 Inverzna matrika 70
2.3.1 Lastnosti obrnljivih matrik 72
2.3.2 Izračun inverzne matrike — Gauss-Jordanova eliminacija 74
2.4 LU razcep kvadratne matrike 77
2.4.1 Simetrične matrike 81
2.4.2 Permutacijske matrike 82
2.4.3 LU-razcep s pivotiranjem 85
2.5 Naloge 86

3 Vektorski prostori **89**
3.1 Vektorski prostor 89
3.1.1 Vektorski podprostori 91
3.1.2 Stolpčni prostor matrike 95
3.1.3 Ničelni prostor matrike: rešujemo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 97
3.2 Pravokotni homogeni sistemi linearnih enačb 101

3.2.1 Stopničasta oblika matrike 102
3.2.2 Reducirana stopničasta oblika 104
3.3 Nehomogeni pravokotni sistemi 109
3.3.1 Razvrstitev enačb glede na dimenzijo in rang matrike . . 112
3.4 Linearna neodvisnost, baze, dimenzije 118
3.4.1 Linearna neodvisnost vektorjev 118
3.4.2 Vektorji, ki napenjajo podprostor 122
3.4.3 Baza vektorskega prostora 123
3.4.4 Dimenzija vektorskega prostora 126
3.4.5 Štirje osnovni podprostori matrike 127
3.4.6 Matrike ranga 1 130
3.5 Naloge 131

4 Ortogonalnost 135
4.1 Ortogonalnost vektorjev in njihovih podprostorov 135
4.1.1 Ortogonalnost podprostorov 135
4.1.2 Ortogonalnost osnovnih matričnih podprostorov 138
4.1.3 Ortogonalni komplement in osnovni izrek LA 140
4.2 Pravokotne projekcije 142
4.2.1 Projekcija na premico 143
4.2.2 Projekcija na podprostor 147
4.2.3 Projekcijske matrike 149
4.3 Predoločeni sistemi 151
4.4 Ortogonalne baze in Gram-Schmidtova ortogonalizacija 155
4.4.1 Ortogonalne baze 155
4.4.2 Ortogonalne matrike 157
4.4.3 Projekcija z ortogonalno bazo: Q namesto A 160
4.4.4 Gram-Schmidtov postopek 163
4.4.5 QR razcep matrike 164
4.5 Fourierove vrste 166
4.5.1 Neskončno dimenzionalni prostori 166
4.5.2 Fourierove vrste 170
4.5.3 Ortogonalni polinomi 172
4.6 Naloge 175

5 Determinante 178
5.1 Lastnosti determinant 179
5.1.1 Osnovne lastnosti determinant 179
5.1.2 Izpeljane lastnosti determinant 183
5.2 Računanje determinant 192
5.2.1 Pivotna formula 192
5.2.2 Velika formula za determinanto 194
5.2.3 Kofaktorji in kofaktorska formula 196
5.3 Uporaba determinant 199
5.3.1 Cramerjevo pravilo 199
5.3.2 Inverzna matrika 201

5.3.3 Ploščine in prostornine 203
5.4 Naloge 206

6 Lastne vrednosti in lastni vektorji 208
6.1 Definicija in računanje 209
6.2 Osnovne lastnosti 214
6.3 Diagonalizacija matrike 219
6.3.1 Potence matrike 221
6.3.2 Uporaba potenc matrike 222
6.4 Simetrične matrike 224
6.4.1 Spektralni izrek za simetrične matrike 228
6.4.2 Pozitivno definitne matrike 232
6.5 Razcep po singularnih vrednostih 238
6.5.1 SVD in 4 osnovni prostori matrike 240
6.5.2 Uporaba razcepa singularnih vrednosti 241
6.6 Naloge 241

Poglavje 1

Vektorji in matrike

Vektor in matrika sta osnovna objekta v linearni algebri. To poglavje je namenjeno njuni predstavitvi.

1.1 Vektorji

Vektorje (latinska beseda *vector* pomeni popotnik) so prvotno matematiki in fiziki uporabljali za opisovanje gibanja, kasneje pa se je njihova uporaba močno razširila. Vektorji nam omogočajo, da lahko osnovne operacije (seštevanje, odštevanje in množenje) istočasno izvajamo nad več števili, tako lahko, na primer, seštevamo tudi hruške in jabolka. Z njimi lahko opisujemo stanje zalog v skladišču, pa tudi vrednosti posameznih vrst blaga.

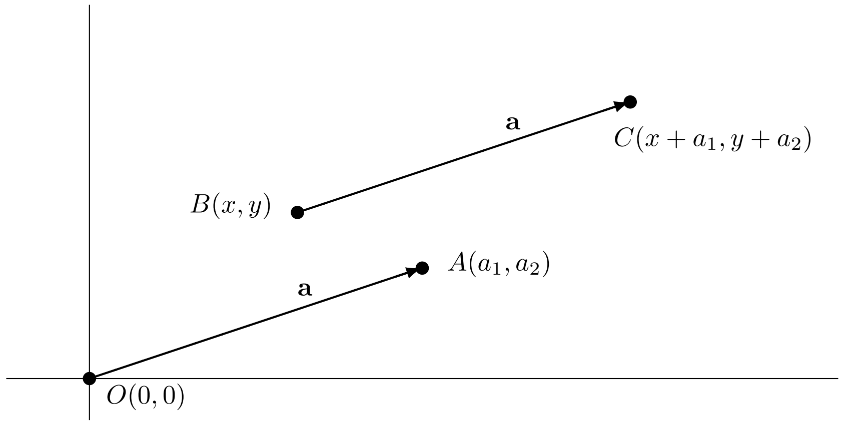
Definicija 1.1 [1] Vektor *je urejena n-terica števil, ki jo običajno zapišemo kot stolpec*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Števila $x_1, \ldots, x_n$ so *koordinate* ali *komponente* vektorja. Komponente vektorja so navadno realna ali kompleksna števila. V prvem primeru so vektorji elementi množice $\mathbb{R}^n$, v drugem množice $\mathbb{C}^n$.

Vektorje si lahko predstavljamo tudi kot *usmerjene daljice* v n-razsežnem prostoru. Dve usmerjeni daljici sta enaki, kadar imasta isto smer in enako dolžino, njuni začetni točki pa sta lahko različni. Tako lahko vektorje iz množice $\mathbb{R}^2$ narišemo v koordinatni ravnini tako, da usmerjena daljica poteka od koordinatnega izhodišča od točke A, katere koordinati sta komponenti vektorja.

[1] V 3. poglavju bomo pojem vektorja definirali splošneje.



Slika 1.1: Usmerjeni daljici $\overline{OA}$ in $\overline{BC}$ predstavljata isti vektor.

Vektorju v tej *osnovni legi* pravimo tudi *krajevni vektor* točke A in na ta način lahko identificiramo krajevni vektor neke točke s točko samo. Nato lahko vektor vzporedno premikamo po ravnini (slika 1.1).

Vektorje iz množice $\mathbb{R}^3$ si lahko predstavljamo kot usmerjene daljice v (trirazseženm) prostoru, vektorje iz $\mathbb{R}^n$ pa si za $n > 3$ nekoliko težje predstavljamo.

1.1.1 Operacije z vektorji

Z vektorji lahko računamo:

Definicija 1.2 Produkt *vektorja* $\mathbf{x}$ *s skalarjem* α *je vektor*

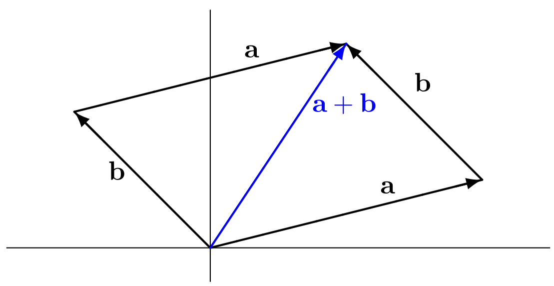
$$\alpha\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}.$$

Vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, za katera obstaja tak skalar α, da je $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ ali $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, imenujemo *kolinearna* vektorja. Kolinearni vektorji (kot ime pove) ležijo na vzporednih premicah.

Definicija 1.3 Vsota *vektorjev* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{y}$ *je vektor*

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Pozor! Vektorja, ki ju seštevamo, morata imeti enako število komponent!



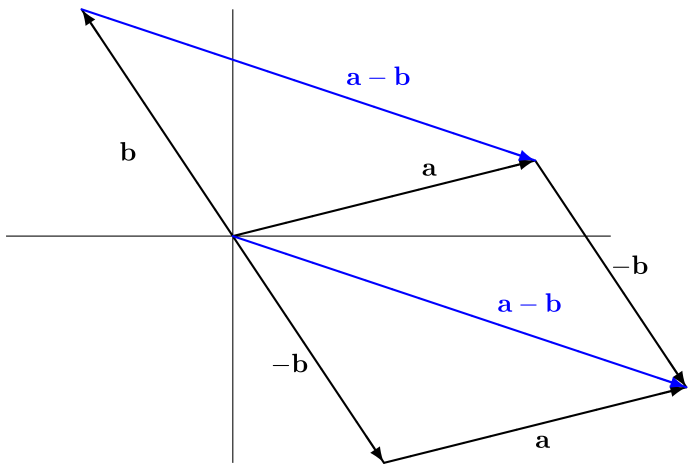
Slika 1.2: Vsota vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$.

Vsoto vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ kot usmerjenih daljic izračunamo s *paralelogramskim pravilom*. Usmerjeno daljico $\mathbf{b}$ postavimo tako, da se njen začetek ujema s koncem usmerjene daljice $\mathbf{a}$. Vsota $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ je usmerjena daljica, ki se začne v začetku $\mathbf{a}$-ja in konča na koncu $\mathbf{b}$-ja (slika 1.2).

Definicija 1.4 Ničelni vektor $\mathbf{0}$ *je tisti vektor, za katerega je* $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$ *za vsak vektor* $\mathbf{a}$*. Vse komponente ničelnega vektorja so enake* 0*. Vsakemu vektorju* $\mathbf{a}$ *pripada* nasprotni vektor $-\mathbf{a}$*, tako da je* $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$*. Razlika vektorjev* $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b}$ *je vsota* $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ *in jo navadno zapišemo kot* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ *(slika 1.3).*

Lastnosti vektorske vsote in produkta s skalarjem

Vektorska vsota in produkt vektorja s skalarjem imata nekaj podobnih lastnosti kot vsota in produkt števil:



Slika 1.3: Razlika vektorjev **a** in **b**.

Lastnost 1 *Vsota vektorjev je komutativna*

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}\,.$$

Lastnost 2 *Vsota vektorjev je asociativna*

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}\,.$$

Lastnost 3 *Množenje vektorja s skalarjem je distributivno glede na vsoto vektorjev*

$$a(\mathbf{a}+\mathbf{b})=a\mathbf{a}+a\mathbf{b}$$

in glede na vsoto skalarjev

$$(a+b)\mathbf{a}=a\mathbf{a}+b\mathbf{a}.$$

Dokaz: Vse tri lastnosti so preprosta posledica ustreznih lastnosti realnih ali kompleksnih števil.

1.1.2 Linearna kombinacija

Ko produkt s skalarjem združimo s seštevanjem vektorjev, pridemo do *linearne kombinacije* vektorjev.

Definicija 1.5 Linearna kombinacija *vektorjev* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{y}$ *je vsota*

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$$

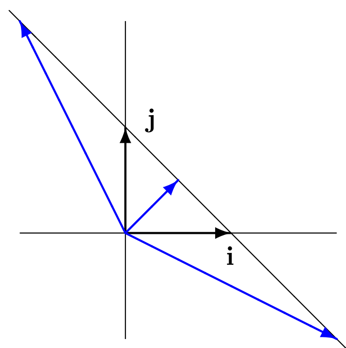
Podobno lahko sestavimo linearno kombinacijo več vektorjev, npr.

$$a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + \cdots + z\mathbf{z}$$

je linearna kobinacija vektorjev $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{z}$.

Pozor! Vsi vektorji v linerni kombinaciji morajo imeti isto število komponent!

Množica vseh linearnih kombinacij dveh vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ je ravnina, razen, ko sta vektorja kolinearna. V tem primeru je množica vseh linearnih kombinacij kar premica, na kateri ležita oba vektorja.



Slika 1.4: Linearne kombinacije $t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$.

Primer 1.1 Poglejmo, kje ležijo vektorji, ki jih lahko zapišemo kot linearno kombinacijo $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}$ za poljubno vrednost prarametra t, kjer sta $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Ko to zapišemo v koordinatah x in y, dobimo $x = t$ in $y = 1 - t$, torej končne točke vseh vektorjev linearne kombinacije ležijo na premici $y = 1 - x$.
Drugačen (*parametričen*) opis te iste premice dobimo, če linearno kombinacijo (1.1) zapišemo kot

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

kar lahko preberemo kot: "premica, ki poteka skozi točko $(0, 1)$ v smeri vektorja $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$".

Množica vseh linearnih kombinacij treh vektorjev je navadno tridimenzionalni prostor, razen če vsi trije vektorji ležijo v isti ravnini (v tem primeru je množica vseh lineanih kombinacij ta ravnina), ali ko vsi trije vektorji ležijo na isti premici (v tem primeru je množica vseh linearnih kombinacij ta premica).

1.1.3 Skalarni produkt in dolžina vektorja

Pomembna operacija nad dvema vektorjema je skalarni produkt.

Definicija 1.6 Skalarni produkt vektorjev $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ je število

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

.

Pozor! Vektorja, ki ju skalarno množimo, morata imeti isto število komponent!

Lahko je preveriti, da ima skalarni produkt naslednje lastnosti:

Lastnost 1 Komutativnost:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}\,.$$

Dokaz: Neposredna posledica komutativnosti produkta števil.

Lastnost 2 Aditivnost:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}.$$

Dokaz:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}.$$

Lastnost 3 Homogenost:

$$\mathbf{x} \cdot (a\mathbf{y}) = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}.$$

Dokaz: Neposredna posledica komutativnosti in asociativnosti števil.

Lastnost 4 Pozitivna definitnost: *za vsak vektor* $\mathbf{x}$ *velja* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$*. Če je* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$*, potem mora biti* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dokaz: Neposredno sledi iz definicije skalarnega produkta

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1.2}$$

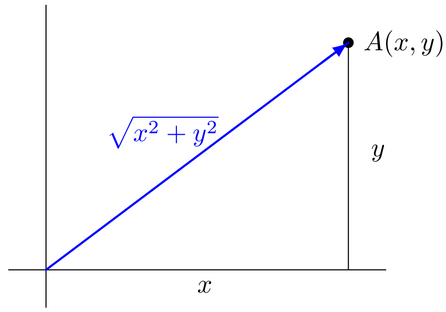
Primer 1.2 Skalarni produkt vektorjev $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = -3 + 8 = 5,$$

skalarni produkt vektorjev $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pa je enak

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0.$$

V množici $\mathbb{R}^2$ lahko s Pitagorovim pravilom enostavno izračunamo tudi dolžino vektorja (slika 1.5). Vektor skupaj z x-osjo in vzporednico k y-osi določa pravokotni trikotnik, katerega kateti sta koordinati x in y. Dolžina vektorja (hipotenuze pravokotnega trikotnika) je zato $\sqrt{x^2 + y^2}$.



Slika 1.5: Dolžina vektorja.

Za vektorje iz $\mathbb{R}^n$ lahko podobno izračunamo dolžino vektorja kot $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, kar lahko zaradi (1.2) zapišemo kot $\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Definicija 1.7 Dolžina vektorja $\mathbf{x}$ je

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\,.$$

Primer 1.3 Vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ima dolžino $||\mathbf{u}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pa ima dolžino $||\mathbf{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

Posebno vlogo med vektorji imajo vektorji z dolžino ena.

Definicija 1.8 Enotski vektor *je vektor z dolžino* 1*.*

Primer 1.4 Iz vsakega vektorja (razen iz ničelnega vektorja) lahko dobimo enotski vektor z isto smerjo tako, da ga pomnožimo z obratno vrednostjo njegove dolžine (včasih rečemo, da smo vektor *normirali*).

Ker ima vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ dolžino $||\mathbf{v}|| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$, je vektor $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{2}$ enotski vektor, ki ima isto smer kot vektor $\mathbf{v}$.

1.1.4 Schwarzova in trikotniška neenačba, kot med vektorjema

Skalarni produkt dveh vektorjev ne more biti večji od produkta njunih dolžin.

Izrek 1.9 [Cauchy-Schwarzova neenačba] *Za poljubna vektorja* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *velja*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||. \tag{1.3}$$

Enačaj velja le kadar sta vektorja kolinearna.

Dokaz: Kadar je vsaj eden vektorjev ničelni, neenačba očitno velja. Izberimo poljubna neničelna vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ ter sestavimo linearno kombinacijo $||\mathbf{u}||\mathbf{v} - ||\mathbf{v}||\mathbf{u}$. Kvadrat dolžine tega vektorja je vedno nenegativen:

$$0 \leq ||\ ||\mathbf{u}||\mathbf{v} - ||\mathbf{v}||\mathbf{u}\ ||^2. \tag{1.4}$$

Spomnimo se definicije 1.7 dolžine vektorja

$$0 \leq (||\mathbf{u}||\mathbf{v} - ||\mathbf{v}||\mathbf{u}) \cdot (||\mathbf{u}||\mathbf{v} - ||\mathbf{v}||\mathbf{u}),$$

skalarno zmnožimo

$$0 \leq ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 - 2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2$$

in dobimo

$$2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \leq 2||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2.$$

Krajšamo z $2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| > 0$ in že imamo

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \leq ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\,.$$

Tako smo neenačbo (1.3) dokazali za primer, ko je $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \geq 0$. Za $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$ pa je

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (-\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = ||-\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||.$$

V neenačbi (1.3) velja enačaj le, kadar velja enačaj v neenačbi (1.4), to pa je takrat, kadar je $||\mathbf{u}||\mathbf{v} = ||\mathbf{v}||\mathbf{u}$, torej takrat, kadar sta vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ kolinearna.

Vsota dveh vektorjev ne more biti daljša od vsote dolžin teh dveh vektorjev.

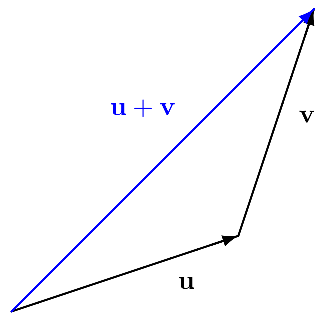
Izrek 1.10 [Trikotniška neenakost] *Za poljubna vektorja* $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *velja*

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||. \tag{1.5}$$

Dokaz:

$$\begin{array}{rcll} ||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 & = & (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) & \text{(dolžina vektorja)} \\ & = & ||\mathbf{u}||^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + ||\mathbf{v}||^2 & \\ & \leq & ||\mathbf{u}||^2 + 2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| + ||\mathbf{v}||^2 & \text{(ker je } a \leq |a| \text{ za vsak } a \in \mathbb{R}) \\ & \leq & ||\mathbf{u}||^2 + 2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{v}||^2 & \text{(Cauchy-Schwarzova neenačba)} \\ & = & (||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||)^2 & \end{array}$$

Trikotniška neenakost je vektorska formulacija znanega izreka iz geometrije, da v trikotniku nobena stranica ne more biti daljša od vsote ostalih dveh stranic



Slika 1.6: Trikotniška neenakost: dolžina katerekoli stranice v trikotniku ni daljša od vsote ostalih dveh stranic

(slika 1.6).

S pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo, kakšen kot oklepata dva vektorja. Če vektorja $\mathbf{i}$ in $\mathbf{j}$ iz primera 1.2, katerih skalarni produkt je 0, narišemo v koordinatni ravnini, vidimo, da sta pravokotna. Ta lastnost velja za vse vektorje:

Izrek 1.11 *Vektorja* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{y}$ *sta* ortogonalna (ali pravokotna) *natanko takrat, kadar je* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Dokaz: Kadar sta vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ pravokotna, sta kateti pravokotnega trikotnika s hipotenuzo $\mathbf{x}-\mathbf{y}$. Zaradi Pitagorovega izreka mora biti $||\mathbf{x}||^2+||\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2$. Po definiciji 1.7 je

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}||^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + ||\mathbf{y}||^2,$$

zato mora biti $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.
Po drugi strani, če je skalarni produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, je

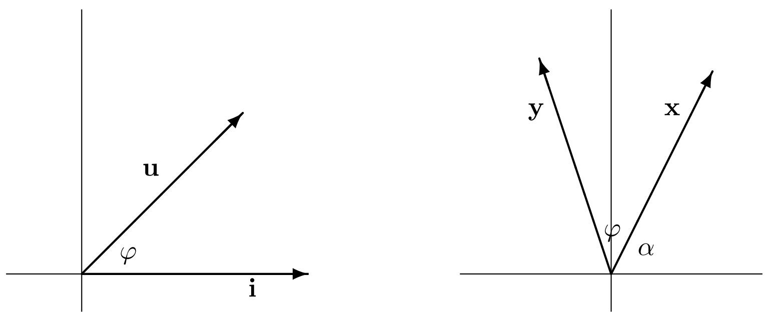
$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2,$$

zato je po Pitagorovem izreku trikotnik s stranicami $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ pravokoten in sta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ kateti, torej je med njima pravi kot.

Primer 1.5 Vektorja $\mathbf{i}$ in $\mathbf{j}$ iz Primera 1.2 sta ortogonalna, saj je njun skalarni produkt enak 0.

Prav tako sta pravokotna vektorja $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, pa tudi vektorja $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, saj je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, pa tudi $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

S pomočjo skalarnega produkta lahko izračunamo kot med vektorjema tudi, kadar skalarni produkt ni enak 0.



Slika 1.7: Kot med vektorjema

Začnimo z dvema enotskima vektorjema $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$. Njun skalarni produkt je enak $\mathbf{i} \cdot \mathbf{u} = \cos\varphi$, kot med njima pa je enak φ (Slika 1.7). Oba vektorja zavrtimo za kot α. Vektor $\mathbf{i}$ se pri tem zavrti v vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$, vektor $\mathbf{u}$ pa se zavrti v vektor $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\varphi) \\ \sin(\alpha+\varphi) \end{bmatrix}$. Pri tem vrtenju ostaja kot med vektorjema (prej $\mathbf{i}$ in $\mathbf{u}$, potem $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$) enak. Izračunajmo še skalarni produkt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \cos\alpha\cos(\alpha+\varphi) + \sin\alpha\sin(\alpha+\varphi)$. Iz trigonometrije se spomnimo adicijskega izreka za funkcijo cos, zato je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \cos(\alpha - (\alpha+\varphi)) = \cos\varphi$.

Za enotska vektorja je torej skalarni produkt vedno enak kosinusu kota med njima. Kadar pa vektor ni enotski, ga lahko delimo z njegovo dolžino, zato naslednji izrek velja splošno.

Izrek 1.12 *Če je φ* kot *med vektorjema $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$, potem je*

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||} = \cos\varphi\,.$$

Primer 1.6 Izračunajmo kot med vektorjema $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Ker je $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5$, dolžini vektorjev pa sta $||\mathbf{u}|| = \sqrt{5}$ in $||\mathbf{v}|| = \sqrt{10}$, imamo

$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

1.1.5 Vektorji v $\mathbb{R}^3$

Vsak vektor s tremi komponentami lahko enolično zapišemo kot linearno kombinacijo

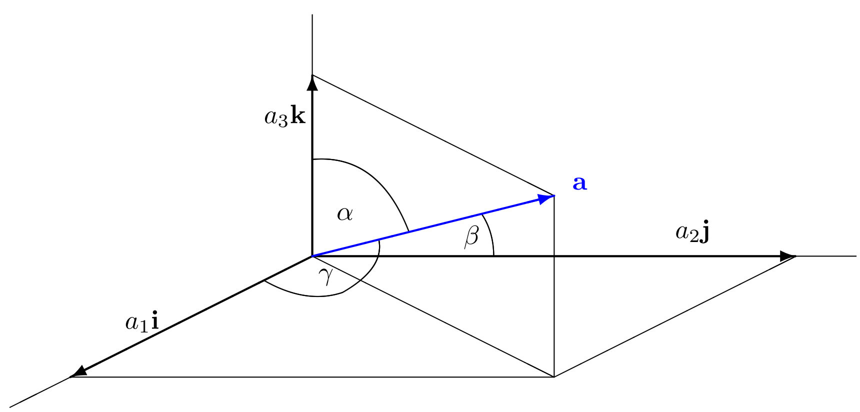
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Običajno uporabljamo oznake

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tako, da je

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$



Slika 1.8: Vektor v $\mathbb{R}^3$

Vektorji $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ in $\mathbf{k}$ imajo vsi dolžino 1 in so med seboj paroma ortogonalni, kažejo pa v smeri koordinatnih osi v prostoru. Pravimo jim *standardna baza* v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Če zapišemo normaliziran vektor $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$, so komponente enotskega vektorja $\mathbf{e}$ enake

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} a_1/||\mathbf{a}|| \\ a_2/||\mathbf{a}|| \\ a_3/||\mathbf{a}|| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

Pravimo jim *smerni kosinusi* vektorja $\mathbf{a}$, saj so koti α, β in γ koti, ki jih vektor $\mathbf{a}$ oklepa s koordinatnimi osmi, oziroma z vektorji standardne baze. Ker je $||\mathbf{e}|| = 1$, je tudi

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

Primer 1.7 Za vektor $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ izračunajmo smerne kosinuse. Najprej izračunamo dolžino $||\mathbf{a}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, nato pa smerne kosinuse

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{-2}{3} \quad \text{in} \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}\,.$$

Vektorski produkt

Vektorski produkt je še en način množenja dveh vektorjev, ki je definiran le v $\mathbb{R}^3$. Če sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^3$, potem je tudi njun vektorski produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor iz $\mathbb{R}^3$.

Definicija 1.13 Vektorski produkt *vektorjev* $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ *in* $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ *je vektor*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Primer 1.8 Vektorski produkt vektorjev $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ in $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Še en primer:

Primer 1.9 Medsebojni vektorski produkti vektorjev standardne baze so:

$$\begin{array}{rcc} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0} & \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{0} & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i} \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0} \end{array}$$

Zapišimo nekaj lastnosti vektorskega produkta:

Lastnost 1 Aditivnost:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) &= \begin{bmatrix} a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2) \\ a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+a_3) \\ a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2c_3-a_3c_2 \\ a_3c_1-a_1c_3 \\ a_1c_2-a_2c_1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} \end{aligned}$$

Lastnost 2 *Vektorski produkt* ni komutativen*, saj velja* $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

Dokaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}\times\mathbf{a} &= (b_2a_3-b_3a_2)\mathbf{i}+(b_3a_1-b_1a_3)\mathbf{j}+(b_1a_2-b_2a_1)\mathbf{k} \\ &= -\left((a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\right)\mathbf{k}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Lastnost 3 Homogenost:

$$(a\mathbf{a})\times\mathbf{b}=a(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(a\mathbf{b}).$$

Dokaz: To lastnost lahko zlahka preveri bralec sam.

Lastnost 4 *Vektorski produkt vsakega vektorja s samim seboj je ničelni vektor* $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Dokaz:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = (a_2a_3 - a_3a_2)\mathbf{i} + (a_3a_1 - a_1a_3)\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\mathbf{k} = \mathbf{0}\,.$$

Lastnost 5 *Vektorski produkt* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *je pravokoten na vektorja* $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b}$.

Dokaz: Preverimo, da je skalarni produkt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ enak nič:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2) + (a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3) + (a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1) = 0.$$

Pravokotnost vektorjev $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in $\mathbf{b}$ preverimo podobno.

Lastnost 6 *Dolžina vektorskega produkta* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *je*

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \sin\varphi, \tag{1.6}$$

kjer je φ *kot med vektorjema* $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b}$.

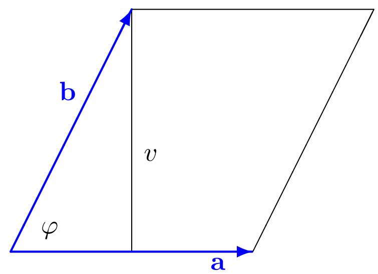
Dokaz: Dokaz te lastnosti zahteva precej algebrajskega potrpljenja:

$$\begin{aligned}
||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_2^2b_3^2 \\
&\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) \\
&\quad - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= ||\mathbf{a}||^2||\mathbf{b}||^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= ||\mathbf{a}||^2||\mathbf{b}||^2 - ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \cos^2\varphi \\
&= ||\mathbf{a}||^2||\mathbf{b}||^2 \sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

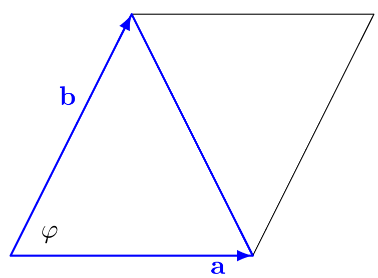
Ker za kot med dvema vektorjema vedno velja $0 \leq \varphi \leq \pi$, je $\sin\varphi \geq 0$, zato lahko zgornjo neenačbo korenimo, da dokažemo (1.6).

Ker je $||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \sin\varphi$ enako ploščini paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, (Slika 1.9) lahko zadnji dve lastnosti povzamemo v enem stavku:

Vektorski produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je vektor, ki je pravokoten na ravnino, v kateri ležita vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, njegova dolžina je enaka ploščini paralelograma, ki ga oklepata.



Slika 1.9: Ploščina paralelograma je enaka $||\mathbf{a}||v = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\sin\varphi$.



Slika 1.10: Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma.

Primer 1.10 Kolikšna je ploščina trikotnika z oglišči $A(1,-1,0)$, $B(2,1,-1)$ in $C(-1,1,2)$?
Vektor od A do B je $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, vektor od A do C pa $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Ploščina trikotnika $\triangle ABC$ je polovica ploščine paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ (slika 1.10), ta pa je enak dolžini vektorskega produkta $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, torej

$$pl_\triangle = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||/2.$$

Ker je vektorski produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$, je $pl_\triangle = \dfrac{\sqrt{6^2+6^2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Mešani produkt

Če imamo tri vektorje $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ v $\mathbb{R}^3$, lahko najprej dva pomnožimo vektorsko, rezultat pa skalarno pomnožimo s tretjim vektorjem.

Definicija 1.14 Mešani produkt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *vektorjev* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{c}$ *v* $\mathbb{R}^3$ *je skalarni produkt vektorjev* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *in* $\mathbf{c}$*:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{1.7}$$

Naj bodo

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Spomnimo se definicije 1.13 vektorskega produkta in izračunajmo mešani produkt

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\ &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Zapišimo nekaj lastnosti mešanega produkta:

Lastnost 1 *Vektorje v mešanem produktu lahko ciklično zamenjamo. Pri tem se vrednost mešanega produkta ne spremeni.*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})\,.$$

Dokaz: Enostavno sledi iz zapisa (1.8).

Lastnost 2 *Mešani produkt je* homogen*:*

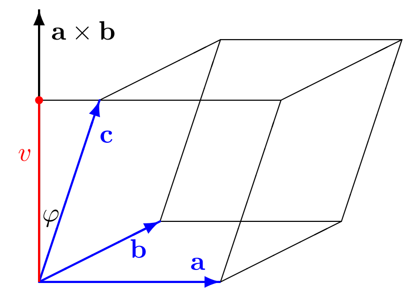
$$(x\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = x(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

in aditiven *za vsak faktor posebej*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{c})\,.$$

Dokaz: Obe lastnosti sta posledica aditivnosti in homogenosti skalarnega, aditivnosti in homogenosti vektorskega produkta ter cikličnosti mešanega produkta.

Lastnost 3 *Absolutna vrednost mešanega produkta* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *je enaka prostornini paralelepipeda, ki je napet na vektorje* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{c}$*.*



Slika 1.11: Mešani produkt je enak prostornini paralelepipeda.

Dokaz: Vektorski produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je vektor, pravokoten na ravnino, v kateri ležita $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, njegova dolžina pa je enaka ploščini osnovne ploskve paralelepipeda (Slika 1.11). Trditev sledi, ker je $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\,||\mathbf{c}|| \cos\varphi$, višina paralelepipeda $v = ||\mathbf{c}|| \cos\varphi$ in prostornina paralelepipeda enaka produktu ploščine osnovne ploskve in višine.

Primer 1.11 Izračunajmo prostornino paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ in $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$.
Prostornina paralelepipeda je enaka $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Izračunajmo najprej vektorski produkt (definicija 1.13)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\,,$$

nato pa še skalarni produkt (definicija 1.6) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 8$, torej je prostornina paralelepipeda enaka 8.

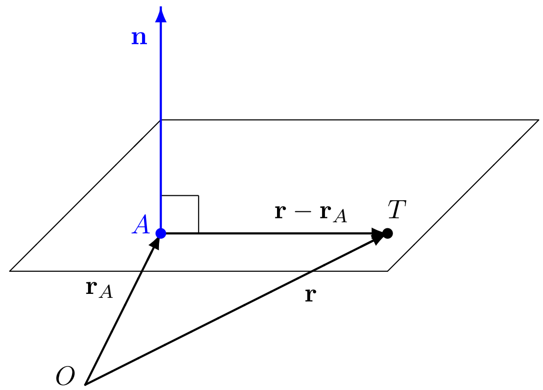
Ravnina v prostoru

Vektorju, ki je pravokoten na ravnino, pravimo *normalni vektor*. Normalni vektor $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ skupaj s točko $A(a_1, a_2, a_3)$, ki leži na ravnini, natanko določa lego ravnine. Z $\mathbf{r}_A$ označimo krajevni vektor točke A. Točka $T(x, y, z)$ s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$ leži na ravnini natanko tedaj, ko vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ leži v ravnini, torej ko je pravokoten na normalni vektor $\mathbf{n}$ (slika 1.12). Zato enačbo ravnine v vektorski obliki lahko zapišemo kot

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{1.9}$$

Če zgornjo enačbo preuredimo kot $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{n}$ in zapišemo po komponentah, dobimo *splošno obliko* enačbe ravnine

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = f, \tag{1.10}$$



Slika 1.12: Ravnina je določena s točko in normalnim vektorjem.

kjer je $f = \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{n} = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3$.

Kadar je $||\mathbf{n}|| = 1$, pravimo, da je enačba ravnine (1.10) v *normirani obliki.* V tem primeru so komponente normalnega vektorja $\mathbf{n}$ smerni kosinusi normale

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}.$$

Kadar je v splošni obliki enačbe ravnine (1.10) konstanta d enaka nič, ravnina vsebuje koordinatno izhodišče. Kadar pa je $d \neq 0$, lahko enačbo delimo z d in jo zapišemo v *segmentni obliki*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{1.11}$$

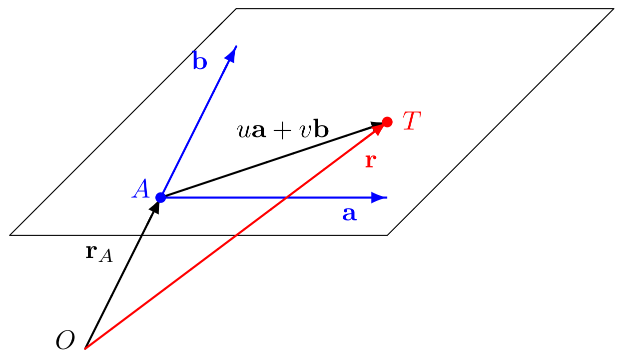
kjer so a, b in c *odseki* (ali *segmenti*), ki jih ravnina odreže na koordinatnih oseh.

Ravnina v prostoru je lahko določena s točko $A(a_1, a_2, a_3)$ s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_A$ in dvema nekolinearnima vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, ki sta ravnini vzporedna (Slika 1.13). Točka $T(x, y, z)$ s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$ leži v tej ravnini, če se njen krajevni vektor $\mathbf{r}$ izraža kot linearna kombinacija

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \tag{1.12}$$

kjer parametra u in v pretečeta vsa realna števila. Ravnina je določena z enačbo (1.12), ki ji pravimo *parametrična* oblika enačbe ravnine.

Ravnina v prostoru je lahko določena tudi s tremi točkami: A s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_A$, B s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_B$ in C s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_C$. Ker točke A, B in C ležijo v ravnini, tudi vektorja $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C$ in $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ ležita v tej ravnini. Normalni vektor torej lahko dobimo kot vektorski produkt $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C)$. To je z eno od točk ($A$, B ali C) dovolj, da lahko napišemo enačbo ravnine v splošni obliki (1.10).



Slika 1.13: Enačba ravnine v parametrični obliki.

Primer 1.12 Poiščimo enačbo ravnine, ki gre skozi točki $A(1, 2, 3)$ in $B(3, 2, 1)$ in je pravokotna na ravnino $4x - y + 2z = 7$.
Vektor $\overline{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, ki povezuje obe točki v ravnini, tudi leži v ravnini, prav tako pa normalni vektor $\mathbf{n}_1 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dane ravnine, ki mora biti pravokotna na iskano ravnino. Normalo $\mathbf{n}_2$ iskane ravnine zato lahko izračunamo kot vektorski produkt

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = -2\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\,.$$

Kot točko na ravnini izberimo točko A (če bi izbrali točko B bi dobili isti rezultat. Preveri!) in lahko zapišemo enačbe iskane ravnine v splošni obliki (1.10) kot

$$-2(x - 1) - 12(y - 2) - 2(z - 3) = 0,$$

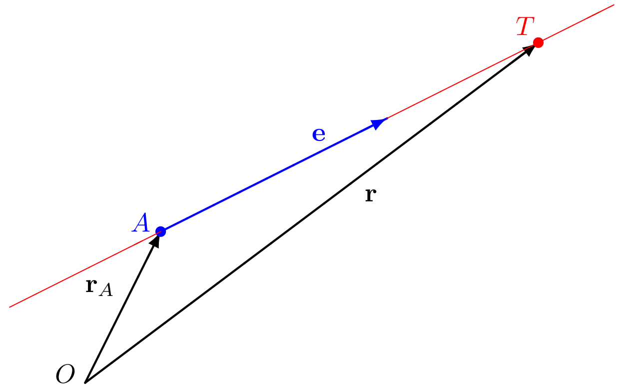
kar malo uredimo in pokrajšamo, da končno dobimo

$$x + 6y + z = 16.$$

Premica v prostoru

Premica v prostoru je določena s točko $A(a_1, a_2, a_3)$ in s smernim vektorjem $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$. Točka $T(x, y, z)$ s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$ leži na tej premici, če je vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ kolinearen s smernim vektorjem $\mathbf{e}$. Enačba premice v *parametrični obliki* je torej

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + t\mathbf{e}. \tag{1.13}$$



Slika 1.14: Enačba premice v prostoru.

Če namesto vektorske enačbe (1.13) napišemo tri skalarne enačbe

$$\begin{aligned} x &= a_1 + te_1 \\ y &= a_2 + te_2 \\ z &= a_3 + te_3 \end{aligned}$$

in iz vsake izrazimo parameter t, dobimo enačbo premice v *kanonični obliki* (pravzaprav gre za več enačb)

$$\frac{x - a_1}{e_1} = \frac{y - a_2}{e_2} = \frac{z - a_3}{e_3}\,. \tag{1.14}$$

Čeprav je enačba premice v tej obliki formalno korektna le, kadar so vse komponente smernega vektorja $\mathbf{e}$ (to so števila v imenovalcih) različne od nič, pogosto uporabljamo to obliko, tudi kadar se v imenovalcu pojavi kakšna ničla. Pri tem se moramo zavedati, da to pomeni le, da je ustrezna komponenta smernega vektorja enaka 0, in da mora biti tudi števec enak 0.

Premica v prostoru je lahko podana tudi kot presek dveh nevzporednih ravnin:

$$ax + by + cz = d \quad \text{in} \quad a'x + b'y + c'z = d',$$

kjer je

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{n}' \neq \mathbf{0}\,.$$

Za kanonično enačbo premice potrebujemo smerni vektor $\mathbf{e}$ in točko A na premici. Ker je $\mathbf{e}$ v preseku obeh ravnin, mora biti pravokoten na obe normali $\mathbf{n}$ in $\mathbf{n}'$, zato je

$$\mathbf{e} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}'\,.$$

Za točko A pa lahko vzamemo katerokoli točko, ki zadošča enačbama obeh ravnin. Najlaže jo določimo tako, da izberemo eno izmed koordinat enako 0 (tako bomo dobili točko, v kateri premica prebada eno izmed koordinatnih ravnin), ostali dve koordinati pa dobimo kot rešitev sistema dveh linearnih enačb (enačbi obeh ravnin).

Primer 1.13 Poiščimo kanonično enačbo premice, ki je dana kot presečišče ravnin

$$2x - y + z = 1 \quad \text{in} \quad 3x + y + z = 2\,.$$

Vektor v smeri premice je

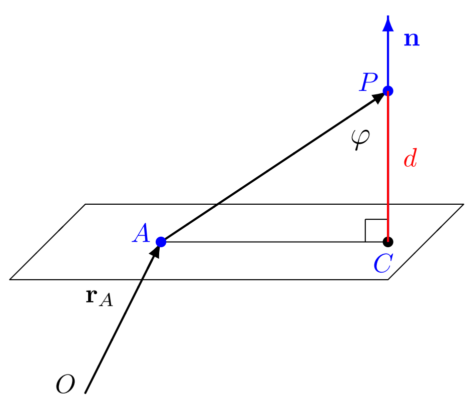
$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Točko A bomo poiskali kot prebodišče iskane premice s koordinatno ravnino $x = 0$. Njeni preostali koordinati dobimo kot rešitev sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} -y \quad +z &= \quad 1 \\ y \quad +z &= \quad 2\,, \end{aligned}$$

kar nam da $y = 1/2$ in $z = 3/2$, torej je točka $A(0, 1/2, 3/2)$. Enačba iskane premice je zato

$$\frac{x}{-2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{1} = \frac{z - \frac{3}{2}}{5}\,.$$



Slika 1.15: Razdalja d med točko in ravnino.

Razdalje

1. **Razdalja točke od ravnine:** razdalja d od točke P s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_P$ od ravnine z normalnim vektorjem $\mathbf{n}$, v kateri leži točka $A(a_1, a_2, a_3)$ s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_A$, je kateta PC pravokotnega trikotnika $\triangle APC$, kjer je C točka, kjer premica skozi točko P in smernim vektorjem $\mathbf{n}$ prebada ravnino (slika 1.15). Če s φ označimo kot pri oglišču P v tem trikotniku, je razdalja d enaka $||\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A|| \, |\cos\varphi|$. Ker je φ kot med vektorjema $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A$ in $\mathbf{n}$, je (Izrek 1.12)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)}{||\mathbf{n}||\,||\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A||}.$$

Razdaljo d med točko P in ravnino je torej enaka

$$d = \left|\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||}(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)\right|. \tag{1.15}$$

Spomnimo se še vektorske (1.9) in splošne (1.10) enačbe ravnine, pa pridemo do alternativne formule za razdaljo

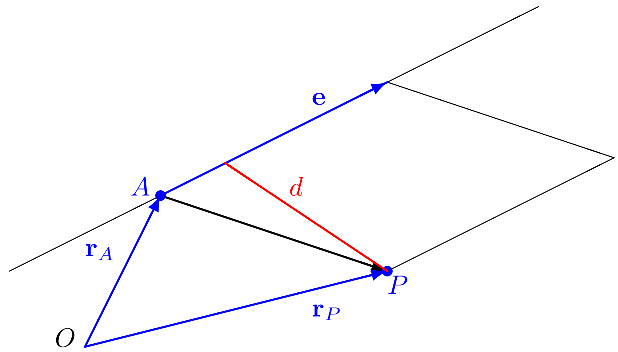
$$d = |n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 - f| \,/ ||\mathbf{n}||.$$

Primer 1.14 Izračunajmo, koliko je točka $A(1, 1, -2)$ oddaljena od ravnine $6x - 2y + 3z = 9$.
Najprej izračunajmo dolžino normalnega vektorja. Ker je $\mathbf{n} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, je $||\mathbf{n}|| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$. Enačba ravnine v normirani obliki je $\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{9}{7} = 0$. Ko za (x, y, z) vstavimo koordinate točke A, dobimo razdaljo

$$d = \left|\frac{6}{7}1 - \frac{2}{7}1 + \frac{3}{7}(-2) - \frac{9}{7}\right| = |-1| = 1.$$

2. **Razdalja od točke do premice:** Premica naj gre v smeri vektorja $\mathbf{e}$ skozi točko A (s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_A$), točka P zunaj premice naj ima krajevni vektor $\mathbf{r}_P$. Vektorja $\mathbf{e}$ in $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A$ določata paralelogram, katerega višina (na stranico $\mathbf{e}$) je razdalja d med premico in točko P. Ploščina tega paralelograma je po eni strani enaka (slika 1.9) $||\mathbf{e} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)||$, po drugi strani pa produktu višine in osnovnice $d||\mathbf{e}||$, zato mora biti

$$d = \frac{||\mathbf{e} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)||}{||\mathbf{e}||}.$$



Slika 1.16: Razdalja d med premico in točko.

Primer 1.15 Izračunajmo, koliko je premica

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

oddaljena od koordinatnega izhodišča!
Točka P je v tem primeru koordinatno izhodišče, za točko A na premici pa izberemo $(-1, 1, 0)$ zato je

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo vektorski produkt

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

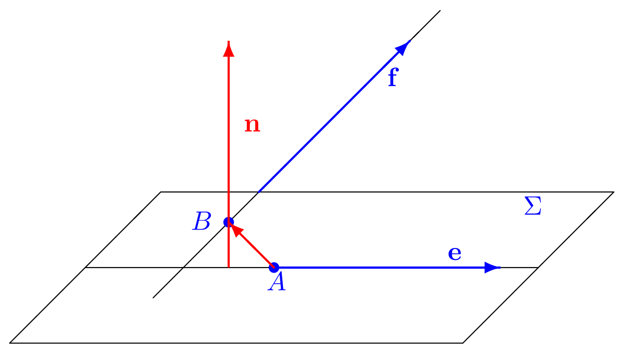
Tako je

$$d = \frac{||\mathbf{e} \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A)||}{||\mathbf{e}||} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. **Razdalja med dvema ravninama:** Kadar sta ravnini vzporedni, je vsaka točka na eni ravnini enako oddaljena od druge ravnine — dovolj je, da si izberemo eno točko na ravnini in izračunamo njeno oddaljenost od druge ravnine. Če pa ravnini nista vzporedni, se sekata, torej je njuna razdalja enaka 0.

4. **Razdalja med dvema premicama:** Kadar se premici sekata, je njuna

razdalja enaka 0, kadar sta vzporedni, je dovolj, da izračunamo razdaljo med poljubno točko ene premice do druge premice.



Slika 1.17: Razdalja med mimobežnima premicama

Ostane še najbolj zanimiva možnost: premici sta mimobežni. Naj bosta njuna smerna vektorja $\mathbf{e}$ in $\mathbf{f}$, ki seveda nista kolinearna. Naj bo A točka na prvi premici (krajevni vektor $\mathbf{r}_A$) in B točka na drugi (krajevni vektor $\mathbf{r}_B$). Najmanjša razdalja med premicama poteka v smeri, ki je pravokotna na obe premici, zato izračunamo vektorski produkt $\mathbf{n} = \mathbf{e} \times \mathbf{f}$. Ravnina Σ z normalo $\mathbf{n}$, ki vsebuje točko A, je vzporedna vektorju $\mathbf{f}$, zato je vsaka točka na premici s smernim vektorjem $\mathbf{f}$ oddaljena od ravnine Σ ravno za najkrajšo razdaljo med obema premicama. Izračunali bomo kar razdaljo od točke B do ravnine Σ. Iz enačbe (1.15) dobimo

$$d = \left| \frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||} (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \right| = \left| \frac{((\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A), \mathbf{e}, \mathbf{f})}{||\mathbf{e} \times \mathbf{f}||} \right| . \tag{1.16}$$

Primer 1.16 Izračunajmo razdaljo med mimobežnima premicama

$$x = 2y = z$$

in

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}\,.$$

Na prvi premici izberimo točko $A(0,0,0)$, na drugi $B(1,0,-1)$, pa imamo Tako imamo

$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Od tod izračunamo $||\mathbf{e} \times \mathbf{f}|| = \sqrt{5}/2$ in

$$d = \frac{1/2}{\sqrt{5}/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

1.2 Matrike

Najprej povejmo, kaj matrike so.

Definicija 1.15 Matrika *dimenzije* $m \times n$ *je tabela* $m \times n$ *števil, urejenih v* m *vrstic in* n *stolpcev:*

$$A^{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

ali krajše

$$A = [a_{ij}], \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\,.$$

Števila a_{ij} so *elementi* matrike, navadno realna, včasih pa tudi kompleksna števila.

Matrika z enim samim stolpcem

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}$$

ni nič drugega kot vektor. Pravimo ji *stolpčni vektor* ali *stolpec*. Matriki z eno samo vrstico

$$A = [a_{1,1}, \dots, a_{1,n}]$$

pravimo *vrstični vektor*.

Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots$, ležijo na *glavni diagonali* matrike. Kadar ima matrika enako število vrstic in stolpcev (kadar je $m = n$) pravimo, da je matrika *kvadratna*. Za kvadratno matriko je glavna diagonala res diagonala iz zgornjega levega do spodnjega desnega vogala.

Definicija 1.16 *Matrika, katere elementi so enaki nič povsod zunaj glavne diagonale, se imenuje* diagonalna matrika. *Za diagonalno matriko je* $a_{ij} = 0$ *kadarkoli je* $i \neq j$.

Posebno vlogo v naslednjih poglavjih bodo imele kvadratne matrike, ki imajo nad glavno diagonalo vse elemente enake 0.

Definicija 1.17 *Matrika* $A^{n\times n}$ *je* spodnjetrikotna, *kadar so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki* 0*:*

$$a_{ij} = 0 \quad \textit{kadar je} \quad i < j\,.$$

Podobno definiramo

Definicija 1.18 *Matrika* $A^{n\times n}$ *je* zgornjetrikotna, *kadar so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki* 0*:*

$$a_{ij} = 0\,, \quad \textit{kadar je} \quad i > j\,.$$

ali splošneje

Definicija 1.19 *Matrika je* trikotna, *če je zgornjetrikotna ali spodnjetrikotna.*

Primer 1.17 Naj bodo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad .$$

Matrika A je diagonalna, B spodnjetrikotna in C zgornjetrikotna.

1.2.1 Operacije z matrikami

Preden povemo, kako lahko z matrikami računamo, povejmo, kdaj bomo dve matriki smatrali za enaki:

Definicija 1.20 *Dve matriki A in B sta* enaki *natanko takrat, kadar imata enaki dimenziji in kadar so na istih mestih v obeh matrikah enaki elementi: $A^{m\times n} = B^{p\times q}$ natanko tedaj, kadar je*

$$m = p \quad in \quad n = q\,,$$

obenem pa je

$$a_{ij} = b_{ij} \quad za\ vsak \quad i = 1, \ldots, m \ in \ j = 1, \ldots, n\,.$$

Matrična vsota in produkt matrike s skalarjem

Operaciji množenja s skalarjem in seštevanja matrik sta podobni operacijama množenja vektorja s skalarjem (definicija 1.2)

Definicija 1.21 Produkt matrike s skalarjem *dobimo tako, da vsak element matrike pomnožimo s skalarjem:*

$$xA = \begin{bmatrix} xa_{11} & xa_{12} & \cdots & xa_{1n} \\ xa_{21} & xa_{22} & \cdots & xa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ xa_{m1} & xa_{m2} & \cdots & xa_{mn} \end{bmatrix}$$

in seštevanja vektorjev (definicija 1.3)

Definicija 1.22 Vsoto *dveh matrik enake dimenzije dobimo tako, da seštejemo istoležne elemente obeh matrik:*

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Pozor! Seštevamo lahko samo matrike, ki imajo enako število stolpcev in vrstic.

Lastnosti operacij, ki smo jih pravkar definirali, so podobne ustreznim operacijam nad vektorji (glej 1.1.1):

Lastnost 1 *Vsota matrik je komutativna:*

$$A + B = B + A\,.$$

Lastnost 2 *Vsota matrik je asociativna:*

$$(A + B) + C = A + (B + C)\,.$$

Lastnost 3 *Množenje matrike s skalarjem je distributivno glede na vsoto matrik*

$$a(A + B) = aA + aB$$

in glede na vsoto skalarjev

$$(a + b)A = aA + bA.$$

Lastnost 4 *Ničelna matrika*

$$O^{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

je ničla za seštevanje*: za poljubno matriko A reda $m \times n$ je $A + O = A$.*

Lastnost 5 *Matrika* $(-1)A = -A$ *je nasprotni element k* A *glede na seštevanje, saj je*

$$A + (-A) = O\,.$$

Lastnost 6 *Velja*

$$x(yA) = (xy)A \quad \textit{in} \quad 1 \cdot A = A.$$

Dokaz: Vse naštete lastnosti so preproste posledice podobnih lastnosti realnih (ali kompleksnih) števil.

Transponiranje

Definicija 1.23 Transponirana *matrika k matriki* A *reda* $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

je matrika

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

reda $n \times m$.

Pri transponiranju matrike se zamenja vloga stolpcev in vrstic: stolpci matrike A so vrstice matrike A^T in obratno: vrstice matrike A so stolpci matrike A^T. Transponiranje matrike si lahko predstavljamo tudi tako, da matriko "prekucnemo" preko glavne diagonale.

Če transponiramo spodnjetrikotno matriko, dobimo zgornjetrikotno, iz zgornjetrikotne matrike dobimo s transponiranjem spodnjetrikotno. Pri transponiranju diagonalne matrike pa spet dobimo diagonalno matriko.

Primer 1.18 Če transponiramo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

dobimo matriko

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Če je $B = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ vrstični vektor, je transponirana matrika

$$B^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

stolpčni vektor.

Poglejmo, kakšne lastnosti ima operacija transponiranja matrike:

Lastnost 1 *Transponirana matrika vsote je enaka vsoti transponiranih matrik*

$$(A + B)^T = A^T + B^T \,.$$

Lastnost 2 *Transponirana matrika produkta matrike s skalarjem je produkt transponirane matrike s skalarjem*

$$(xA)^T = xA^T \,.$$

Lastnost 3 *Dvakrat transponirana matrika je enaka prvotni matriki*

$$(A^T)^T = A \,.$$

Dokaz: Navedene lastnosti je preprosto preveriti.

Produkt matrike z vektorjem

V naslednjih poglavjih bomo potrebovali tudi produkt matrike z vektorjem in produkt dveh matrik. Ker sta ti dve operaciji nekoliko zahtevnejši od dosedanjih, se ju lotimo postopoma.

Že v definiciji 1.5 smo imeli opravka z linearno kombinacijo vektorjev. Če imamo tri vektorje

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

je njihova linearna kombinacija

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \begin{bmatrix} au_1 + bv_1 + cw_1 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 \end{bmatrix}.$$

Sedaj pa to linearno kombinacijo zapišimo z uporabo matrik. Vektorje $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ zložimo kot stolpce v matriko A, uteži a, b in c linearne kombinacije pa zapišimo kot komponente vektorja $\mathbf{x} = [a\ b\ c]^T$. Linearna kombinacija je produkt matrike A z vektorjem $\mathbf{x}$:

Definicija 1.24 *Produkt* matrike A in vektorja $\mathbf{x}$ *je linearna kombinacija stolpcev matrike A, uteži linearne kombinacije so komponente vektorja* $\mathbf{x}$*:*

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

Pozor! Matrika A mora imeti isto število stolpcev, kolikor komponent ima vektor $\mathbf{x}$.

Primer 1.19 Izračunajmo produkt matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

z vektorjem $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$.
Rezultat je linearna kombinacija stolpcev matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vektorja $\mathbf{x}$, torej

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}.$$

Na produkt matrike z vektorjem pogosto gledamo kot na učinek, ki ga ima matrika na vektor: Matriko smatramo kot fiksno, vektor kot spremenljivko. Poglejmo ta koncept na konkretnem zgledu.

Naj bo matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

in vektor $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2 \; x_3]$. Poglejmo, kaj matrika A naredi z vektorjem $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{x}$ je vhodni podatek, vektor $A\mathbf{x}$ rezultat. Komponente rezultata dobimo tako, da odštevamo zaporedne komponente vhodnega podatka (prva komponenta je $x_1 = x_1 - x_0 = x_1 - 0$). Zato bi matriko A lahko imenovali *odštevalna matrika*. Če za komponente vektorja $\mathbf{x}$ (vhodnega podatka) izberemo zaporedne kvadrate naravnih števil $x_i = i^2$, za komponente vektorja $A\mathbf{x}$ (rezultata) dobimo

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 4-1 \\ 9-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

zaporedna liha števila. Isti vzorec se nadaljuje tudi pri matrikah z več stolpci in vrsticami. Naslednji kvadrat je 16, naslednja razlika pa $16 - 9 = 7$, naslednje liho število.

Vzemimo matriko A z eno samo vrstico, $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Tako matriko lahko dobimo tako, da transponiramo stolpčni vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Tako je $A = \mathbf{x}^T$ oziroma, zaradi lastnosti dvojnega transponiranja, $\mathbf{x} = A^T$. Izračunajmo produkt matrike A z vektorjem $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = a_1 y_1 + \cdots a_n y_n\,,$$

kar ni nič drugega kot skalarni produkt (definicija 1.6) vektorjev $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$, kar lahko zapišemo tudi v matričnem jeziku kot

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}\,.$$

Primer 1.20 V primeru 1.2 smo izračunali, da je skalarni produkt vektorjev $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ enak 5. Če izračunamo produkt matrike (vrstičnega vektorja) $\mathbf{x}^T$ in vektorja $\mathbf{y}$, dobimo

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} = [1\ 2] \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = [-3 + 8] = [5],$$

kar je isti rezultat.

Na produkt matrike A z vektorjem $\mathbf{x}$ lahko pogledamo še drugače. Do sedaj smo $\mathbf{x}$ smatrali za znan vhodni podatek, $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$ pa kot rezultat. Ti dve vlogi pa lahko tudi zamenjamo: naj bo $\mathbf{b}$ znan vhodni podatek in poiščimo, kakšen mora biti vektor $\mathbf{x}$, da bo produkt $A\mathbf{x}$ enak $\mathbf{b}$. Ta problem poznamo kot *sistem linearnih enačb*. Z njegovim reševanjem se bomo ukvarjali v naslednjih dveh poglavjih.

Primer 1.21 Za odštevalno matriko iz primera 1.19 in vektor $\mathbf{b} = [1\ 2\ 3]^T$, moramo poiskati komponente vektorja $\mathbf{x}$, ki zadoščajo naslednjim pogojem

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & & & = 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & = 2 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = 3 \end{array} .$$

To je sistem linearnih enačb, katerega rešitev je

$$\begin{aligned} x_1 &= & & 1 \\ x_2 &= & 2 + x_1 & = 3 \\ x_3 &= & 3 + x_2 & = 6\,. \end{aligned}$$

Rešitev smo v tem primeru dobili dokaj preprosto. V veliko pomoč nam je bilo, da je matrika spodnjetrikotna (definicija 1.17). Tako smo lahko iz prve enačbe hitro ugotovili, da je $x_1 = 1$. Ko smo poznali x_1, ni bilo težko iz druge enačbe izračunati $x_2 = 3$, potem nam je ostala le še zadnja enačba z eno samo neznanko, iz katere nam je bilo hitro jasno, da je $x_3 = 6$. Seveda je sistem linearnih enačb precej težje rešiti, če matrika nima tako lepe trikotne strukture.

Podobno, kot smo definirali produkt matrike z vektorjem, lahko definiramo tudi produkt vrstičnega vektorja z matriko:

Definicija 1.25 *Produkt vrstice* $\mathbf{y}$ *z matriko* A *je linearna kombinacija vrstic matrike* A*, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice* $\mathbf{y}$*:*

$$\mathbf{y} \cdot A = [y_1,\ y_2,\ y_3] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\mathbf{u} \\ y_2\mathbf{v} \\ y_3\mathbf{w} \end{bmatrix}$$

Pozor! Matrika A mora imeti toliko vrstic, kolikor komponent ima vrstica $\mathbf{y}$.

Primer 1.22 Izračunajmo produkt vrstice $\mathbf{x} = [x_1,\ x_2,\ x_3]$ z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rezultat je linearna kombinacija vrstic matrike A, koeficienti linearne kombinacije so komponente vrstice $\mathbf{x}$, torej

$$\begin{aligned} \mathbf{x}A &= x_1\,[2,\ 1,\ 0] + x_2\,[-1,\ 4,\ 2] + x_3\,[4,\ 2\ -3] \\ &= [2x_1 - x_2 + 4x_3,\ x_1 + 4x_2 + 2x_3,\ 2x_2 - 3x_3]\,. \end{aligned}$$

Produkt matrik

Po tem uvodu lahko opišemo produkt dveh matrik:

Definicija 1.26 *Produkt matrik* A *in* B *je matrika, katere stolpci so zaporedoma produkti matrike* A *s stolpci matrike* B*:*

$$AB = A[\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n] = [A\mathbf{b}_1,\ A\mathbf{b}_2, \cdots, A\mathbf{b}_n]\,.$$

Pozor! Ker je za produkt matrike z vektorjem (definicija 1.24) potrebno, da ima matrika enako število stolpcev kot ima vektor komponent, mora imeti pri produktu dveh matrik leva matrika toliko stolpcev, kot ima desna matrika vrstic.

Pri produktu dveh matrik moramo posebej paziti na velikosti matrik. Če je matrika A reda $m \times n$ in matrika B reda $p \times q$, lahko produkt AB izračunamo le, kadar je $n = p$. Produkt AB je v tem primeru matrika reda $m \times q$.

Izračunajmo element c_{ij} v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike $C = AB$, torej i-ta komponenta produkta matrike A in j-tega stolpca $\mathbf{b}_j$ matrike B.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,.$$

Tako smo dokazali

Izrek 1.27 *Element c_{ij} v i-ti vrstici in j-tem stolpcu produkta $C = AB$ je skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\,.$$

Sedaj pa ni težko priti do zaključka, da lahko produkt dveh matrik opredelimo tudi na osnovi produkta vrstice z matriko:

Izrek 1.28 *Produkt matrik A in B je matrika, katere vrstice so zaporedoma produkti vrstic matrike A z matriko B:*

$$[i\text{-ta vrstica matrike } A]B = [i\text{-ta vrstica matrike } AB]\,.$$

Dokaz: Matriko, ki jo dobimo s tem postopkom, označimo s C. Element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu c_{ij} matrike C je skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B, tako da je po izreku 1.27 $C = AB$.

Primer 1.23 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo produkt AB.
Po definiciji 1.26 je

$$AB = [A\mathbf{b}_1,\ A\mathbf{b}_2].$$

Produkt matrike A z obema stolpcema bomo izračunali po definiciji 1.24

$$\begin{aligned} A\mathbf{b}_1 &= 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \\ A\mathbf{b}_2 &= -2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 28 \\ -7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zato je

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & 28 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Isti produkt izračunajmo po vrsticah (izrek 1.28). Tako je

$$AB = \begin{bmatrix} 2[3,\ -2] & +1[-2,\ 5] & +0[1,\ 3] \\ -1[3,\ -2] & +4[-2,\ 5] & +2[1,\ 3] \\ 4[3,\ -2] & +2[-2,\ 5] & -3[1,\ 3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & 28 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo isti rezultat, kot pri računanju po stolpcih.
Sedaj pa še enkrat, produkt AB izračunajmo še tako, da elemente produkta poiščemo kot skalarne produkte vrstice matrike A in stolpca matrike B (izrek 1.27):

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot(-2) + 0\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 5 + 0\cdot 3 \\ (-1)\cdot 3 + 4\cdot(-2) + 2\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) + 4\cdot 5 + 2\cdot 3 \\ 4\cdot 3 + 2\cdot(-2) + (-3)\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 2\cdot 5 + (-3)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -9 & 28 \\ 5 & -7 \end{bmatrix},$$

ponovno isti rezultat.

Oglejmo si še nekaj lastnosti matričnega produkta. Začnimo z lastnostjo, ki je matrični produkt nima:

Lastnost 1 *Matrični produkt (v splošnem) ni komutativen:*

$$AB \neq BA\,.$$

Dokaz: Pravzaprav le komentar: Naj bosta dimenziji matrik $A^{m\times n}$ in $B^{p\times q}$. Če naj bo produkt AB definiran, mora biti $n = p$, za produkt BA pa $m = q$. Kadar matriki lahko zmnožimo v obeh vrstnih redih, sta oba produkta kvadratni matriki, vedar lahko različnih dimenizij: AB je $m \times m$ in BA je $n \times n$. Tudi če $m = n$, oba produkta nista nujno enaka, kar lahko vidimo na primeru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

saj je

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastnost 2 *Matrični produkt je homogen: za vsak skalar x je*

$$(xA)B = x(AB) = A(xB)\,.$$

Dokaz: V vsakem od treh primerov so vsi elementi produkta AB pomnoženi s skalarjem x.

Lastnost 3 *Za matrični produkt veljata distributivnost z leve*

$$C(A + B) = CA + CB$$

in distributivnost z desne

$$(A + B)C = AC + BC\,.$$

Dokaz: Uporabimo definicijo 1.26. Dovolj je, da pokažemo, da je $A(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = A\mathbf{b}+A\mathbf{c}$, kar je preprosta posledica definicije 1.24 in distributivnosti množenja vektorja s skalarjem. Podobno velja za desno distributivnost.

Lastnost 4 *Matrični produkt je asociativen:*

$$A(BC) = (AB)C\,.$$

Dokaz: Naj ima matrika B stolpce $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. Poglejmo najprej primer, ko ima matrika C en sam stolpec $\mathbf{c} = [c_1, \ldots, c_n]^T$.

- Produkt AB ima stolpce $A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_n$, zato je $(AB)\mathbf{c} = c_1 A\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n A\mathbf{b}_n$.
- Produkt $B\mathbf{c}$ ima en sam stolpec $c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$, zato je $A(B\mathbf{c}) = A(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n)$, kar je isto kot $(AB)\mathbf{c}$.

Tako smo pokazali, da je $A(B\mathbf{c}) = (AB)\mathbf{c}$. Ker isto velja za vse stolpce matrike C, je tudi $A(BC) = (AB)C$.

Lastnost 5 *Transponirana matrika produkta dveh matrik je enaka produktu transponiranih matrik v obratnem vrstnem redu:*

$$(AB)^T = B^T A^T\,.$$

Dokaz: Najprej se prepričajmo, da ta lastnost velja, če je B stolpčni vektor.

- $A\mathbf{x}$ je (definicija 1.24) linearna kombinacija stolpcev matrike A s koeficienti, ki so komponente vektorja $\mathbf{x}$, zato je $(A\mathbf{x})^T$ vrstica z istimi elementi.
- $\mathbf{x}^T A^T$ je (definicija 1.25) linearna kombinacija vrstic matrike A^T, torej stolpcev matrike A, s koeficienti, ki so komponente vektorja $\mathbf{x}$.

$(A\mathbf{x})^T$ in $\mathbf{x}^T A^T$ sta torej enaki linearni kombinaciji istih vektorjev, zato velja $(A\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T A^T$.
Če ima matrika B stolpce $B = [\mathbf{x}_1 \ \ldots \ \mathbf{x}_n]$, potem je (definicija 1.26)

$$(AB)^T = [A\mathbf{x}_1 \ \ldots, \ A\mathbf{x}_n]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T A^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T A^T \end{bmatrix} = B^T A^T\,.$$

Brez dokaza navedimo še dva načina za množenje matrik.

Izrek 1.29 *Vrstice matrike A z n stolpci naj bodo $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$, stolpci matrike B z n vrsticami pa $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$. Potem je*

$$AB = \mathbf{a}^1\mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbf{a}^n\mathbf{b}_n\,.$$

Matrike lahko razrežemo na bloke (bloki so manjše matrike), včasih tudi na več kot en način. Naslednjo matriko s 4 vrsticami in 6 stolpci lahko razrežemo

$$\left[\begin{array}{rr|rr|rr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{array}\right],$$

kjer imamo 2×3 bločno matriko z bloki 2×2, lahko pa takole

$$\left[\begin{array}{rrr|rr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ \hline 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{array}\right],$$

kjer imamo spet 2×3 bločno matriko, tokrat z nepravilnimi bloki, ali pa še kako drugače.

Izrek 1.30 *Če delitev na bloke v matriki A ustreza delitvi v matriki B, potem lahko matriki pomnožimo bločno:*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

Povzemimo, kar smo ugotovili o produktu dveh matik. Produkt dveh matrik lahko opišemo na več načinov. Vsak način ima svoje prednosti.

- po stolpcih (definicija 1.26): če matriko B sestavljajo stolpci $b_1, b_2, \ldots, b_n$, potem je
$$A \cdot B = A \cdot [b_1\, b_2\, \cdots\, b_n] = [Ab_1\, Ab_2\, \cdots, Ab_n]\,.$$
  Produkt po stolpcih ima prednosti, ko hočemo razumeti, kako druga matrika deluje na stolpce prve matrike.

- po vrsticah (izrek 1.28): če matriko A sestavljajo vrstice $a^1, a^2, \ldots, a^m$, potem je
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} a^1B \\ a^2B \\ \vdots \\ a^mB \end{bmatrix}.$$
  Produkt po vrsticah nam pomaga razumeti, kako prva matrika deluje na vrstice druge matrike.

- Skalarni produkt matrike s stolpcem (izrek 1.27): v produktu $C = A \cdot B$ je element v i-ti vrstici in j-tem stolpcu skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B
$$c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}\,.$$

Produkt matrik kot skalarni produkt vrstic s stolpci je uporaben, kadar hočemo na papirju izračunati produkt dveh matrik.

- Vsota produktov vrstic in stolpcev (izrek 1.29): Vrstice $\mathbf{a}^i$ matrike A pomnožimo s stolpci $\mathbf{b}_i$ matrike B in te produkte seštejemo

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^i \mathbf{b}_i \,.$$

  Ta način množenja je uporaben pri kompresiji in rekonstrukciji podatkov.

- Bločno množenje (izrek 1.30): Obe matriki razrežemo na bloke, ki se dimezijsko ujemajo. Bloke potem med seboj množimo. Ta način je uporaben v računalništvu pri množenju zelo velikih matrik, ko z bloki lahko izkoristimo prednosti hitrih začasnih pomnilnikov.

1.2.2 Enotska matrika

Med realnimi števili ima 1 (enota) posebno vlogo pri množenju: za vsako realno število x je $1 \cdot x$ vedno enako x. Smiselno se je vprašati, ali imamo tako enoto tudi pri množenju matrik.

Zaradi posebnosti matričnega množenja

- produkt matrike $A^{m\times n}$ z matriko $B^{n\times p}$ je matrika reda $m \times p$ in
- matrični produkt ni komutativen,

moramo vprašanje (pravzaprav dve vprašanji) zastaviti nekoliko drugače:

1. Ali obstaja matrika I, da za vsako matriko $A^{m\times n}$ velja $AI = A$?
2. Ali obstaja matrika I, da za vsako matriko $A^{m\times n}$ velja $IA = A$?

Odgovor na obe vprašanji je pritrdilen.

Izrek 1.31 *Kvadratna matrika I_k reda $k \times k$, ki ima vse diagonalne elemente enake* 1*, vse ostale elemente pa* 0

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

ima lastnost, da za vsako matriko A reda $m \times n$ velja $AI_n = A$ in $I_m A = A$. Matrika I_k se imenuje enotska *ali* identična *matrika.*

Dokaz: Najprej preverimo, kaj množenje z matriko I_n naredi s poljubnim vektorjem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Produkt $I_n\mathbf{x}$ izračunamo kot linearno kombinacijo stolpcev matrike I_n:

$$I_n\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n ,$$

kjer so $\mathbf{e}_i$ zaporedni stolpci matrike I_n, to so vektorji, katerih vse komponente so 0, razen i-te, ki je enaka 1. Linearna kombinacijo $I_n\mathbf{x}$ je zato enaka $\mathbf{x}$.
Produkt I_nA računamo po stolpcih. Vsi stolpci matrike A ostanejo nespremenjeni, zato je tudi $I_nA = A$.
Da je produkt AI_n enak A dokažemo podobno, le da uporabimo množenje po vrsticah.

1.3 Naloge

1. V koordinatni ravnini nariši vektorje $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$!

2. Izračunaj in v koordinatni ravnini nariši vsote $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ in $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ ter razliko $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorjev iz prejšnje naloge.

3. V koordinatni ravnini nariši vektorja $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Izračunaj in nariši vektorja $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ in $-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.

4. Izračunaj linearni kombinacji $3\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$ in $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$, če sta vektorja $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5. Koliko morata biti vrednosti skalarjev a in b, da bo linearna kombinacija $a\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ enaka $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$?

6. Katero množico točk določajo naslednje linearne kombinacije vektorjev $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

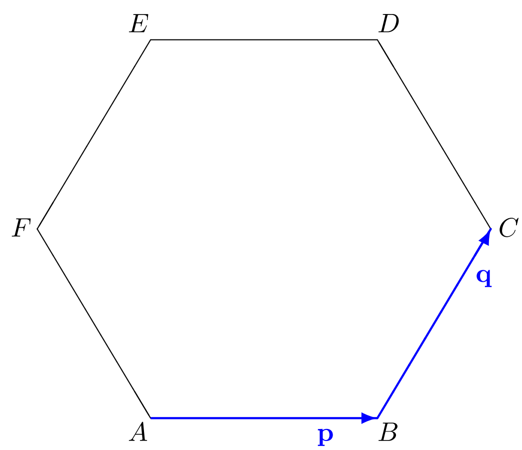
   (a) $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$;

   (b) $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, kjer je $0 \leq u \leq 1$ in $0 \leq u \leq 1$;

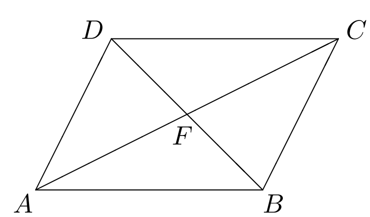
   (c) $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, kjer je $-1 \leq u \leq 1$ in $-1 \leq u \leq 1$;

   (d) $a\mathbf{u} + (1-a)\mathbf{v}$, kjer je $0 \leq a \leq 1$;

   (e) $a\mathbf{u} + (1-a)\mathbf{v}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$?



Slika 1.18: Pravilni šestkotnik

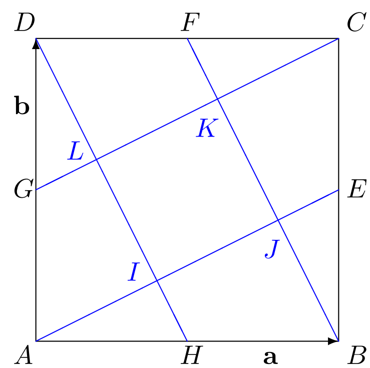


Slika 1.19: Diagonali v paralelogramu se razpolavljata

7. V pravilnem šesterokotniku $ABCDEF$ naj bo vektor $\mathbf{p} = \overline{AB}$ in $\mathbf{q} = \overline{BC}$ (slika 1.18). Z vektorjema $\mathbf{p}$ in $\mathbf{q}$ zapiši vektorje $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{DF}$ in $\overline{AE}$.

8. S pomočjo vektorjev se prepričaj, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.

   Namig: S pomočjo vektorjev $\mathbf{a} = \overline{AB}$ in $\mathbf{b} = \overline{AD}$ izrazi vektorja $\overline{AF}$ in $\overline{BF}$ ter izračunaj kolikšen del vektorja $\overline{AC}$ je vektor $\overline{AF}$ in kolikšen del vektorja $\overline{BD}$ je vektor $\overline{BF}$ (slika 1.19).



Slika 1.20: Iščemo ploščino manjšega kvadrata

9. V kvadratu, ki ima stranico dolžine 1 in z oglišči A, B, C in D naj bo točka E razpolovišče stranice BC, točka F razpolovišče stranice CD, točka g razpolovišče stranice DA in točka H razpolovišče stranice AB. Ko narišemo daljice AE, BF, CG in DH, nastane sredi kvadrata manjši kvadrat (slika 1.20). Kolikšna je njegova ploščina?

   Namig: S pomočjo vektorjev $\mathbf{a} = \overline{AB}$ in $\mathbf{b} = \overline{AD}$ izrazi vektorja $\overline{AJ}$ in $\overline{BJ}$.

10. Za vektorje $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ izračunaj skalarne produkte $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ in $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})$. Ali distributivnost velja tudi za razliko?

11. Izračunaj dolžino vsakega od naslednjih vektorjev:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

12. Koliko je dolžina vektorja $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, če je $||\mathbf{a}|| = 10$, $||\mathbf{b}|| = 20$ in dolžina vektorja $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ enaka 24?

13. Neničelna vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ sta pravokotna. Koliko mora biti parameter c, da bo linearna kombinacija $\mathbf{x} + c\mathbf{y}$ pravokotna na vsoto $\mathbf{x} + \mathbf{y}$?

14. Katere izmed naslednjih enakosti so A) vedno pravilne; B) vedno napačne; C) njihova pravilnost je odvisna od izbire vektorjev :

    (a) $\mathbf{a}\,||\,\mathbf{a}|| = ||\mathbf{a}||^2$;

    (b) $||\mathbf{a}||\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = ||\mathbf{a}||^3$;

    (c) $||\mathbf{a}||^2\,\mathbf{a} = ||\mathbf{a}||^3$;

    (d) $\mathbf{a}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = ||\mathbf{a}||^2\,\mathbf{b}$;

    (e) $\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\,||\mathbf{b}||^2$;

    (f) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = ||\mathbf{a}||^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||^2$;

    (g) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = ||\mathbf{a}||^2 - ||\mathbf{b}||^2$;

    (h) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = ||\mathbf{a}||^2\,||\mathbf{b}||^2$?

15. Izračunaj $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, če sta $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$ in $\mathbf{b} = \mathbf{u}+4\mathbf{v}$, kjer sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ pravokotna enotska vektorja!

16. V koordinatni ravnini nariši vektorje $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ter izračunaj kote med $\mathbf{i}$ in $\mathbf{x}$, $\mathbf{j}$ in $\mathbf{x}$, $\mathbf{j}$ in $\mathbf{y}$, $\mathbf{j}$ in $\mathbf{z}$, $\mathbf{x}$ in $\mathbf{z}$. Preveri, ali izračunani koti ustrezajo narisanim!

17. Izračunaj kosinus kota med vektorjema $\mathbf{a} = 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ in $\mathbf{b} = \mathbf{u} + 5\mathbf{v}$, kjer sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ pravokotna enotska vektorja!

18. V prostoru $\mathbb{R}^3$ imamo točke $A(-6,-4,2)$, $B(2,4,-2)$ in $C(8,1,0)$. Izračunaj dolžine stranic in kosinuse kotov trikotnika $\triangle ABC$!

19. Izračunaj dolžino vektorja $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$!

20. Izračunaj koordinate vektorja $\mathbf{x}$, o katerem vemo:

    (a) Dolžina $||\mathbf{x}|| = 14$;

    (b) $\mathbf{x}$ je pravokoten na vektorja $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ in $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$;

    (c) Kot med $\mathbf{x}$ in $\mathbf{i}$ je manjši kot $\pi/2$.

21. Vektorja $\mathbf{a}$ dolžine 7 in $\mathbf{b}$ dolžine 6 oklepata kot $\pi/6$. Izračunaj $||\mathbf{a}\times\mathbf{b}||$!

22. Trikotnik je določen z oglišči $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ in $C(1,3,-1)$. Izračunaj višino v_C!

23. Poenostavi naslednje izraze:

    (a) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}+\mathbf{k}) - \mathbf{j}\times(\mathbf{i}+\mathbf{k}) + \mathbf{k}\times(\mathbf{j}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$;

    (b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{c} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{b} + (\mathbf{b}-\mathbf{c})\times\mathbf{a}$;

(c) $(2\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

24. Vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ imata dolžino 5 in oklepata kot $\pi/4$. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga oklepata vektorja $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$ in $3\mathbf{a}+2\mathbf{b}$?

25. Kakšnim pogojem morata zadoščati vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, da bo enačba $\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{x}$ rešljiva glede na $\mathbf{x}$? Koliko rešitev obstaja?

26. Dokaži, da za poljubne tri vektorje $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ velja *Lagrangeova identiteta*
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,!$$

27. Preveri, če vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ ležijo v isti ravnini:

(a) $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$ in $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\4\\-4\end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\1\\-6\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-4\end{bmatrix}$ in $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$.

28. Izračunaj prostornino tetraedra z oglišči $A(1,3,-2)$, $B(-3,2,0)$, $C(4,9,-5)$ in $D(6,-7,3)$!

29. Točke $A(1,2,-4)$, $B(2,0,-1)$ in $C(1,1,2)$ so tri oglišča tetraedra. Četrto oglišče je na osi z. Določi ga tako, da bo imel tetraeder prostornino 1.

30. Kateri izmed naslednjih parov ravnin so vzporedni?

(a) $4x+2y-4z=7$ in $2x-y-2z-3=0$;

(b) $x-3y+2z=3$ in $-x+3y-2z=5$;

(c) $4x-6y+10z=8$ in $x-\frac{3}{2}y+2.5z=4$;

(d) $2x-3y+5z=7$ in $4x-3y-10z=14$.

31. Pod kolikšnim kotom se sekata ravnini $x-2y+2z=8$ in $x+z-6$?

32. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko $A(2,-1,3)$ in odseka od koordinatnih osi enake segmente!

33. Zapiši enačbo ravnine, v kateri ležita točka $A(2,-1,4)$ in $B(1,2,0)$ in je vzporedna vektorju $\mathbf{j}+2\mathbf{k}$!

34. V kateri točki se sekajo ravnine $2x-y+3z-9=0$, $x+2y+2z-3=0$ in $3x+y-4z+6=0$?

35. Izračunaj razdaljo od točke $A(1,2,1)$ do ravnin

(a) $2x - 3y + 6z = 9$;
(b) $2x - 2y - z = 13$;
(c) $4y + 3z = 0$.

36. Napiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko $A(3, 1, -1)$ in je pravokotna na ravnini $3x - y + 2z = 3$ in $x + 2y + z = 12$!

37. Napiši enačbo ravnine, ki vsebuje točki $A(1, 2, 0)$ in $B(1, 1, 2)$ in je pravokotna na ravnino $x + 2y = 7$!

38. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točke $A(1, 0, 2)$, $B(2, -1, 3)$ in $C(-3, 2, 2)$!

39. Izračunaj prostornino piramide, ki jo omejujejo vse tri koordinatne ravnine in ravnina $6x - 3y + 2z = 12$.

40. Katera točka na ravnini $3x + 4y - 2z = 12$ je najbližja koordinatnemu izhodišču?

41. Prva premica je določena kot presek ravnin $x - y + z = 4$ in $2x + y - 2z = -5$, druga kot presek ravnin $x + y + z = 4$ in $2x + 3y - z = 6$. Zapiši enačbi obeh premic, nato pa:

    (a) če se premici sekata, izračunaj kosinus kota;
    (b) če se ne sekata, izračunaj njuno razdaljo.

42. V kateri točki in pod kakšnim kotom premica $\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{-1}$ seka ravnino $3x - 2y + z = 3$?

43. Določi parameter c tako, da se bosta premici $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ in $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-c}{2}$ sekali!

44. Dani sta točka $A(0, 1, 2)$ in premica p

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{0},$$

    ki ne vsebuje točke A (preveri!).

    (a) Zapiši enačbo ravnine, ki vsebije premico p in točko A;
    (b) Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točko A in je pravokotna na premico p;
    (c) Zapiši enačbo premice, ki vseboje točko A in pravokotno seka premico p;
    (d) Izračunaj razdaljo točke A od premice p.

45. Za mimobežni (preveri!) premici p s kanonično enačbo $\frac{x+4}{4} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+7}{3}$ in q s kanonično enačbo $\frac{x+5}{-4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-21}{6}$

(a) Napiši enačbo ravnine, ki vsebuje premico p in je pravokotna na premico q;

(b) Napiši enačbo ravnine, ki vsebuje premico q in je vzporedna premici p;

(c) Izračunaj razdaljo med premicama p in q.

46. Za matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

izračunaj linearno kombinacijo $xA + yB$, ko je

(a) $x = 2$ in $y = 1$;

(b) $x = 4$ in $y = -3$.

47. Izračunaj produkte matrike z vektorjem:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 8 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}$.

48. Zapiši *magično* kvadratno matriko M_3 dimenzije 3, katere elementi so števila $1, 2, \ldots, 9$, razporejena tako, da je vsota števil v vsakem stolpcu, vsaki vrstici in na obeh diagonalah enaka 15. Koliko je produkt matrike M_3 z vektorjem $[1, 1, 1]^T$? Koliko je produkt magične matrike M_4 dimenzije 4 z vektorjem $[1, 1, 1, 1]^T$, če so elementi matrike M_4 števila $1, 2, \ldots, 16$?

49. Kvadratna *sudoku* matrika S reda 9 ima elemente iz množice $\{1, 2, \ldots, 9\}$ razporejeno tako, da so števila v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu med seboj različna. Koliko je produkt matrike S z vektorjem samih enk $[1, \ldots, 1]^T$?

50. Izračunaj produkte matrik

- po vrsticah (definicija 1.26);
- po stolpcih (izrek 1.28);
- kot skalarne produkte (izrek 1.27);

- kot vsoto produktov stolpcev in vrstic (izrek 1.29):

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

51. Izračunaj potence matrik:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^4$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -7 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}^3$;

52. Izračunaj potence matrik! Navodilo: najprej ugotovi pravilo, potem dokaži z matematično indukcijo, da pravilo velja za vsak $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$;

(b) $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}^n$;

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$.

53. Poiščite vse matrike, ki komutirajo z matriko:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

54. Poišči vse matrike reda 2×2, katerih kvadrat je enak ničelni matriki O_2!

55. Poišči vse matrike reda 2×2, katerih kvadrat je enak enotski matriki I_2!

56. Kako se spremeni produkt AB matrik A in B, če:

    (a) v matriki A zamenjamo i-to in j-to vrstico,

    (b) v matriki A prištejemo i-ti vrstici j-to vrstico, pomnoženo z x,

    (c) v matriki B zamenjamo i-ti in j-ti stolpec,

    (d) v matriki B prištejemo i-temu stolpcu z y pomnožen j-ti stolpec ?

Poglavje 2

Sistemi linearnih enačb

2.1 Vektorji in linearne enačbe

Reševanje sistemov linearnih enačb je osnovni problem linearne algebre. Enačbe so *linearne*, kadar je vsaka neznanka pomnožena le s številom, nikoli z drugo neznanko.

V tem poglavju se bomo ukvarjali z reševanjem sistemov n linearnih enačb z n neznankami, ki mu včasih rečemo *kvadratni sistem* linearnih enačb, v naslednjih poglavjih pa bomo pogledali, kako se lotiti reševanja sistemov linearnih enačb, če je neznank več kot enačb ali če je enačb več kot neznank.

Kvadratne sisteme linearnih enačb bomo reševali z metodo *Gaussove eliminacije*, ki jo bomo s pomočjo operacij nad matrikami preformulirali kot *LU* razcep.

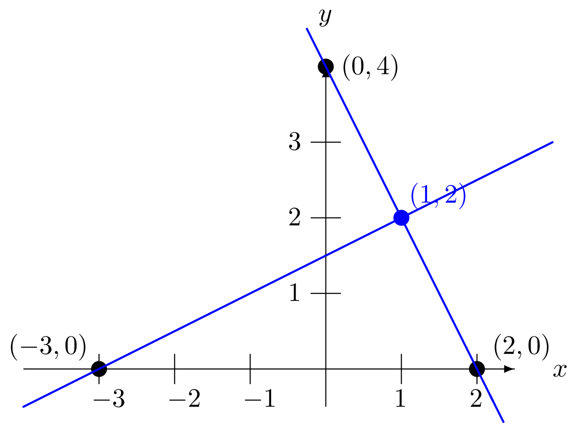
2.1.1 Dve enačbi z dvema neznankama

Za začetek si oglejmo zelo preprost sistem dveh enačb z dvema neznankama in poglejmo, kaj nam tak sistem enačb lahko pove:

$$\begin{array}{rrl} 2x & +y & = 4 \\ -x & +2y & = 3\,. \end{array} \tag{2.1}$$

Vrstična slika

Najprej si oglejmo ta sistem enačb *po vrsticah*, po eno enačbo naenkrat. Prva enačba $2x + y = 4$ predstavlja enačbo premice v ravnini xy. Premico najlaže narišemo, če najdemo dve točki, ki ležita na njej. Če si za vrednost spremenljivke x izberemo $x = 0$, potem iz enačbe ugotovimo, da je ustrezna vrednost druge spremenljivke $y = 4$, torej točka $(0, 4)$ leži na premici. Drugo točko dobimo, ča za x izberemo kakšno drugo vrednost, na primer $x = 2$ in iz enačbe ugotovimo, da je ustrezna vrednost druge spremenljivke $y = 0$, torej tudi točka $(2, 0)$ leži na premici. Obe točki narišemo v koordinatnem sistemu in skoznju narišemo



Slika 2.1: Sistem enačb (2.1), pogled skozi vrstice.

premico (slika 2.1.1). Vse točke na tej premici predstavljajo vse rešitve prve enačbe $2x + y = 4$.

Drugo premico ($-x + 2y = 3$) narišemo podobno. Če za x izberemo $x = 1$, dobimo ustrezen $y = 2$, torej točko $(1, 2)$, za $x = -3$ pa $y = 0$, torej točko $(-3, 0)$. Tudi ti dve točki narišemo skupaj s premico, na kateri ležita. Točke na tej premici predstavljajo vse rešitve druge enačbe $-x + 2y = 3$.

Rešitve sistema enačb (2.1) morajo hkrati rešiti obe enačbi, torej morajo ležati hkrati na obeh premicah, kar pomeni, da točka, ki je presečišče obeh premic, predstavlja rešitev sistema. Zlahka vidimo, da se obe premici sekata v točki $(1, 2)$. Ta točka leži na obeh premicah, torej vrednosti neznank $x = 1$ in $y = 2$ rešita obe enačbi, zato je to rešitev sistema enačb.

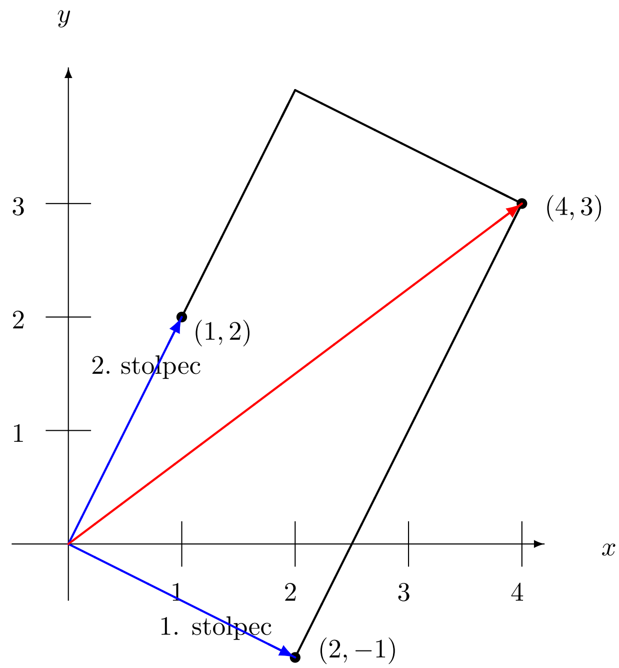
Če bi bili premici, ki ju določata enačbi, vzporedni ali pa bi se prekrivali, bi bila seveda slika drugačna. Dve vzporedni premici nimata skupnega presečišča zato sistem enačb ne bi imel rešitve. Če pa bi se premici prekrivali, bi bila vsaka njena točka skupna točka obeh premic, zato bi bila tudi vsaka rešitev ene izmed obeh enačb tudi rešitev druge; sistem enačb bi imel neskončno mnogo rešitev, ki bi vse ležale na tej premici.

Stolpčna slika

Poglejmo na sistem linearnih enačb (2.1) še po stolpcih, to je kot *vektorsko* enačbo. Namesto po vrsticah, ga lahko zapišemo po stolpcih. Tako dobimo eno vektorsko enačbo, ki je enakovredna obema enačbama sistema (2.1)

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Sestavili smo dva vektorja: komponente prvega so koeficienti neznanke x v sistemu enačb (2.1), komponente drugega so koeficienti neznanke y. Iščemo take uteži linearne kombinacije obeh vektorjev (slika 2.2), da bo rezultat enak



Slika 2.2: Sistem enačb (2.1), pogled skozi stolpce.

vektorju desnih strani sistema enačb **b**. Če za uteži izberemo $x = 1$ in $y = 2$ (ista rešitev kot v vrstičnem primeru), dobimo vektor **b**.

Vprašamo se lahko tudi, kaj je množica *vseh* linearnih kombinacij teh dveh vektorjev. V našem primeru je je množica vseh linearnih kombinacij

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ker sta vektorja neodvisna, cela ravnina $\mathbb{R}^2$, kar pomeni, da bo imel vsak sistem linearnih enačb, ki ima leve strani iste kot sistem (2.1) rešitev, ne glede na to, kakšen vektor stoji na desni strani.

Dokler sta vektorja, s katerima sta pomnoženi neznanki, nedovisna, lahko sestavimo njuno linearno kombinacijo tako, da bo enaka kateremukoli vektorju v $\mathbb{R}^2$, kar pomeni, da ima sistem enačb rešitev ne glede na to, kakšen vektor stoji na desni strani sistema. Težave pa se pojavijo, če vektorja nista linearno neodvisna. V tem primeru vse njune linearne kombinacije ležijo na premici, ki leži v smeri tega vektorja in poteka skozi koordinatno izhodišče. Sistem bo imel rešitev le v primeru, ko tudi vektor na desni strani sistema leži na tej premici.

Primer 2.1 Poglejmo si še sistem enačb

$$\begin{array}{rrl} x & +2y & = b_1 \\ 2x & +4y & = b_2\,. \end{array} \tag{2.3}$$

Najprej na ta sistem poglejmo po vrsticah: vsaka od enačb predstavlja premico v ravnini. Ker sta ti dve premici vzporedni, se ne sekata in sistem nima nobene rešitve, razen, kadar se premici pokrivata, kar se zgodi, če je $b_2 = 2b_1$. V tem primeru je skupnih točk neskončno, ravno tako pa je neskončno tudi rešitev sistema.
Če na ta isti sistem enačb pogledamo še skozi stolpčna očala, lahko ugotovimo, da sta vektor $\mathbf{a}_1 = [1, 2]^T$, ki je pomnožen z neznanko x in vektor $\mathbf{a}_2 = [2, 4]^T$, ki je pomnožen z neznanko y, linearno odvisna. Vse njune linearne kombinacije $x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2$ so mnogokratniki tega vektorja, torej lahko enaki vektorju desnih strani $\mathbf{b} = [b_1, b_2]^T$ le, kadar je tudi $\mathbf{b}$ mnogokratnik vektorja $\mathbf{a}_1$, torej kadar je $b_2 = 2b_1$. V tem primeru je rešitev neskončno, kot smo že ugotovili, ko smo na sistem pogledali skozi vrstice.

Matrični zapis

Sistem linearnih enačb, kot je (2.1), lahko bolj kompaktno zapišemo v *matrični obliki*. Koeficiente sistema enačb zapišemo v *matriko sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

neznanke v vektor $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ter desne strani enačb v *vektor desnih strani* $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

pa lahko, v skladu s definicijo 1.24, sistem zapišemo na kratko kot $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Za sistem linearnih enačb bomo v nadaljevanju najpogosteje uporabljali matrični zapis.

2.1.2 Tri enačbe s tremi neznankami (pa tudi več)

Podobno, kot smo obravnavali sistem dveh enačb z dvema neznankama, lahko vzamemo pod drobnogled primer sistema treh linearnih enačb s tremi neznankami:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 5 \\ -2x + y - z & = & -5 \\ 2x - 3y + z & = & 7\,. \end{array} \tag{2.4}$$

Vrstična slika

Enačbe v sistemu (2.4) lahko gledamo po vrsticah, po eno enačbo naenkrat. Vsaka od enačb določa ravnino v prostoru $\mathbb{R}^3$. Skupna rešitev vseh treh enačb ustreza točki, v kateri se vse tri ravnine sekajo. V tem primeru imamo eno samo rešitev sistema, to je $x = 1$, $y = -1$ in $z = 2$.

Če bi bile tri ravnine v drugačni medsebojni legi, npr. da bi bili dve ravnini vzporedni ali bi bila tretja ravnina vzporedna premici, v katerih se sekata ostali dve, se vse tri ravnine ne bi sekale, zato sistem enačb ne bi imel rešitve. V primeru, ko bi se vse tri ravnine sekale v skupni premici ali bi se celo pokrivale, bi imele več skupnih točk in tudi sistem enačb bi imel lahko več rešitev (eno- ali dvo-parametrično družino rešitev).

Stolpčna slika

Na enačbe v sistemu (2.4) lahko pogledamo tudi po stolpcih. Dobimo vektorsko enačbo (z vektorji iz $\mathbb{R}^3$), ki je enakovredna vsem trem enačbam

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Iščemo tako linearno kombinacijo treh vektorjev, da bomo dobili vektor na desni strani enačbe. Zopet lahko ugotovimo, da je to gotovo rešljiva naloga, kadar trije vektorji na levi strani ne ležijo v isti ravnini. Tedaj obstaja en sam nabor x, y in z koeficientov linearne kombinacije, ki nam da vektor na desni strani, to pomeni, da ima sistem enačb (2.4) natanko eno rešitev.

Kadar pa ležijo vsi trije vektorji v isti ravnini, ali pa celo na isti premici, takrat obstaja rešitev le, kadar na tej isti ravnini ali premici leži tudi vektor na desni strani enačbe (2.4), dobrih linearnih kombinacij je v tem primeru veliko, prav tako veliko je tudi rešitev sistema (2.4). Če pa vektor desnih strani ne leži na ravnini, na kateri so vektorji z leve strani enačbe (2.5), z rešitvijo te enačbe, kakor tudi z rešitvijo enačbe (2.4), ne bo nič.

Večji sistemi

Za sisteme linearnih enačb z $n > 3$ neznankami (in n enačbami) je slika podobna. Na sistem enačb lahko gledamo po vrsticah, vsako enačbo posebej. Vsaka enačba predstavlja $n-1$ razsežno *hiperravnino* v n razsežnem prostoru. Če se vseh n takih hiperravnin seka v eni sami točki, ta točka predstavlja edino rešitev tega sistema. Kadar pa hiperravnine nimajo nobene skupne točke, rešitev ne obstaja. Zgodi pa se lahko, da imajo hiperravnine skupno večk kot eno točko (skupno premico, ravnino, $\ldots$), v tem primeru ima sistem enačb eno- dvo- ali več-parametrično družino rešitev.

Če na sistem n enačb z n neznankami pogledamo po stolpcih, iščemo linearno kombinacijo n vektorjev z n komponentami, ki je enaka vektorju desnih strani. Obstoj rešitve je odvisen od tega, kakšno množico predstavlja množica vseh linearnih kombinacij stolpčnih vektorjev. Če je vektor desnih strani znotraj te množice, sistem ima rešitev, v nasprotnem primeru rešitve ni.

Pomembno vprašanje, ki ga bomo obravnavali v tem in naslednjem poglavju, lahko formuliramo kot:

- Ali ima sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešitev za vsak vektor $\mathbf{b}$?

Če na sistem pogledamo skozi stolpce, lahko isto vprašanje zastavimo drugače:

- Ali lahko vse linearne kombinacije stolpcev matrike napolnijo ves prostor $\mathbb{R}^n$?

Odgovor na to vprašanje je seveda odvisen od matrike A in ga bomo formulirali v naslednjem poglavju.

2.2 Gaussova eliminacija

V tem poglavju se bomo reševanja sistemov linearnih enačb lotili sistematično. Metoda, ki jo bomo uporabljali, se imenuje *eliminacija*, ker z njeno pomočjo sistematično izločamo (eliminiramo) neznanke iz enačb. Začnimo s primerom.

Primer 2.2 Poskusimo rešiti sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x \quad -2y &= \quad 1 \\ 3x \quad +2y &= \quad 11\,. \end{aligned}$$

Če prvo enačbo, pomnoženo s 3, odštejemo od druge enačbe, dobimo

$$\begin{aligned} x \quad -2y &= \quad 1 \\ 8y &= \quad 8\,. \end{aligned}$$

Tako smo prvo neznanko (x) iz druge enačbe eliminirali. Ostala je le neznanka y, zato drugo enačbo lahko rešimo, in dobimo $y = 1$. Ker vrednost za y že poznamo, imamo v prvi enačbi le še neznanko x (poleg znanke y). Tako dobimo iz prve enačbe $x - 2 = 1$ še vrednost neznanke $x = 3$.

Z eliminacijo smo sistem enačb prevedli v zgornjetrikotno obliko. Sistem enačb, ki je v zgornjetrikotni obliki rešimo od zadnje enačbe proti prvi. Na vsakem koraku moramo rešiti le eno enačbo z eno samo neznanko.

Poglejmo še en primer. Tokrat naj bo sistem treh enačb s tremi nezankami, ki ga bomo, zaradi boljše preglednosti, zapisali v matrični obliki. Da bi vse podatke o sistemu enačb zapakirali v matriko, bomo uporabili *razširjeno matriko*, ki jo naredimo tako, da matriki A sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dodamo vektor desnih strani kot poseben stolpec. Razširjena matrika je tako $R = [A|\mathbf{b}]$.

Primer 2.3 Eliminacija: Rešujemo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 3 \\ 3x + 8y - 5z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 7\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Razširjena matrika tega sistema je

$$R = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right].$$

Vse potrebne operacije bomo izvajali nad to razširjeno matriko, zato se spomnimo, da so v prvem stolpcu matrike koeficienti pri neznanki x, v drugem stolpcu koeficienti pri neznanki y in v tretjem stolpcu koeficienti pri neznanki z. Zadnji stolpec (ločen od ostale matrike z navpično črto) vsebuje desne strani sistema enačb.
V prvem koraku bomo iz druge enačbe znebili neznanke x, v drugem koraku pa se bomo x-a znebili še iz druge enačbe. Pri obeh korakih bo ključen element 1, prvi element v prvi vrstici. Ta element, s pomočjo katerega bomo eliminirali koeficiente v istem stolpcu v nižjih vrsticah, bomo imenovali *pivot*. Pivote bomo, zaradi boljše vidnosti, zaprli v kvadratke.
Število 3 v drugi vrstici, prvem stolpcu (element $(2,1)$ v matriki) eliminiramo tako, da od 2. vrstice odštejemo s 3 pomnoženo prvo vrstico

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{(2,1)} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right].$$

V naslednjem koraku (označili ga bomo z (3,1)) bomo eliminirali element $(3,1)$ (3. vrstica, 1. stolpec) tako, da bomo od prve vrstice odšteli z 2 pomnoženo prvo vrstico

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{(3,1)} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Ostane nam še zadnji korak eliminacije - odstraniti moramo število -2 na mestu $(3,2)$. To dosežemo tako, da uporabimo element $(2,2)$ kot pivot in od 3. vrstice odštejemo z 2 pomnoženo 2. vrstico

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3,2)} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 3 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \end{array}\right].$$

S tem smo matriko pretvorili v zgornjetrikotno obliko. Zapišimo še sistem linearnih enačb, ki ga opisuje zadnja matrika

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 3 \\ -y + z &= -1 \\ 3z &= 3\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

V primeru 2.3 smo razširjeno matriko sistema enačb preoblikovali v zgornjetrikotno obliko. Ker smo pri tem uporabljali samo operacije, ki bi jih lahko uporabljali tudi nad samim sistemom enačb (odštevanje mnogokratnika neke vrstice oz. enačbe od neka druge vrstice oz. enačbe), se pri tem preobikovanju rešitev sistema enačb ne spremani. Sistem enačb, ki ga opisuje zgornjetrikotna matrika, ki je končni rezultat Gaussove eliminacije, ima isto rešitev, kot prvotni sistem linearnih enačb. Da bi do te rešitve prišli, moramo iz dobljenih enačb v obratnem vrstnem redu (od zadnje enačbe do prve) izračunati vrednosti neznank, kar naredimo s postopkom *obratnega vstavljanja*.

Primer 2.4 Ko smo sistem enačb v primeru 2.3 preoblikovali v zgornjetrikotno obliko, ga lahko enostavno rešimo. Iz zadnje vrstice razširjene matrike (zadnje enačbe sistema) preberemo vrednost zadnje spremenljivke $z = 1$. Druga vrstica matrike (druga enačba) vsebuje neznanko y in sedaj že znanko z, zato lahko iz $-y + z = -1$ izračunamo, da je $y = 2$. Sedaj, ko poznamo vrednosti neznank y in z, prva vrstica matrike (prva enačba sistema) vsebuje le še neznanko x, torej lahko iz $x + 3y - 2z = 3$ izračunamo $x = -1$.

Sistem linearnih enačb lahko rešimo v dveh korakih: najprej z Gaussovo eliminacijo razširjeno matriko sistema preoblikujemo v zgornjetrikotno obliko, nato pa z obratnim vstavljanjem računamo vrednosti neznank od zadnje proti prvi.

Pri obeh postopkih imajo važno vlogo pivoti. Pri Gaussovi eliminaciji najprej s pomočjo pivota izračunamo *množitelje*

$$\text{množitelj} = \frac{\text{element, ki ga hočemo eliminirati}}{\text{pivot v istem stolpcu}}\,,$$

to so faktorji, s katerimi pomnožimo vrstico s pivotom, preden jo odštejemo od vrstice, v kateri hočemo eleminirati element.

Pri obratnem vstavljanju neznanko, ki jo v tem koraku računamo, dobimo kot

$$\text{neznanka} = \frac{\text{desna stran} - \text{vsota znank, pomnoženih s svojimi koeficienti}}{\text{pivot v isti vrstici}}\,.$$

Pri obeh postopkih, Gaussovi eliminaciji in obratnem vstavljanju, je pivot število, s katerim delimo, zato ne sme biti enak 0.

Pozor! Pivot nikoli ne sme biti enak 0.

Gaussova eliminacija — algoritem

Zapišimo algoritem za preoblikovanje matrike sistema v zgornjetrikotno obliko s pomočjo Gaussove eliminacije. Uporabili bomo notacijo programskega jezika *MATLAB*, ki je dobro prilagojen za manipulacije z matrikami.

Algoritem 2.1 Če je matrika A taka, da je $A(k,k)$ (pivot) v k-ti vrstici vedno različen od nič, potem algoritem

```
for k = 1 : n − 1
   for i = k + 1 : n
      M(i,k) = A(i,k)/A(k,k)
      for j = k + 1 : n
         A(i,j) = M(i,k) ∗ A(k,j)
      end
      b(i) = b(i) − M(i,k) ∗ b(k)
   end
end
```

sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ preoblikuje v ekvivalentni sistem (kar pomeni, da imata oba sistema iste rešitve) enačb $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$, kjer je matrika U zgornjetrikotna.

Gaussova eliminacija — število operacij

Za praktično uporabo kateregakoli algoritma je pomembno vprašanje njegova cena, oziroma število operacij, ki jih moramo pri izvajanju tega algoritma narediti. Veliki sistemi linearnih enačb se pri znanstvenem računanju pojavljajo pogosto, simulacija tridimenzionalnega problema, na primer obtoka zraka okoli letalskega krila ali vremenska napoved, nas zlahka pripelje do sistemov linearnih enačb z milijon ali več neznankami in pomembno je vedeti, ali lahko rešitev izračunamo preko noči, ali pa bomo potrebovali več let.

Za oceno praktične uporabnosti algoritmov je pomembno, da vemo, kako je število potrebnih operacij (in s tem čas izvajanja algoritma) odvisno od velikosti podatkov, v primeru sistemov linearnih enačb od števila neznank.

Preštejmo torej število operacij v algoritmu 2.1. V prvem koraku, ko eliminiramo elemente v prvem stolpcu, potrebujemo eno množenje in eno odštevanje za vsak nov element pod pivotno vrstico. Vsega skupaj moramo v prvem koraku na novo izračunati $n-1$ elementov v vsaki od $n-1$ vrstic, za kar je potrebno $2(n-1)^2$ operacij, poleg tega pa moramo izračunati še $n-1$ množiteljev ter $n-1$ krat popraviti desno stran $b(i)$, torej imamo v prvem koraku $2n(n-1)$ operacij. Ker nas zanima le vodilni člen končnega rezultata, lahko to poenostavimo v $2n^2$. V naslednjem koraku ponovimo eliminacijski korak na matriki, ki je za en stolpec in eno vrstico manjša od prvotne, torej imamo približno $2(n-1)^2$

operacij. Tako nadaljujemo do zadnjega koraka. Skupaj imamo približno

$$2\left(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\right) = \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1)$$

operacij. Ko je število neznank n veliko, je to približno enako $\frac{2n^3}{3}$, saj lahko člene nižjih redov zanemarimo. Tako lahko zaključimo, da za rešitev sistema z $2n$ neznankami potrebujemo približno 8 krat toliko operacij (in časa), kot za sistem z n neznankami, za sistem z $10n$ neznankami pa 1000 krat toliko, kot za sistem z n nezankami.

Obratno vstavljanje — algoritem

Zapišimo še algoritem za rešitev zgornjetrikotnega sistema z obratnim vstavljanjem.

Algoritem 2.2 Naslednji algoritem izračuna rešitev sistema linearnih enačb $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ z zgornjetrikotno matriko U:

$x(n) = c(n)/U(n,n)$
for $i = n-1 : -1 : 1$
  for $j = i+1 : n$
    $c(i) = c(i) - U(i,j) * x(j)$
  end
  $x(i) = c(i)/U(i,i)$
end

Rešitve sistema so ob izteku algoritma shranjene v vektorju $\mathbf{x}$.

Seveda je tudi za uspešen zaključek obratnega vstavljanja potrebno, da so vsi pivoti različni od 0.

Obratno vstavljanje — število operacij

Preštejmo operacije pri obratnem vstavljanju . V notranji zanki (spremenljivka j) vrednosti že izračunanih neznank, pomnoženih s koeficientom u_{ij}, odštejemo od desne strani c_i. Za to sta potrebni 2 operaciji, kar moramo ponoviti za vsak koeficient u_{ij}, $i > j$ v zgonjem trikotniku matrike U, teh je $n(n-1)$ zato je za prenos vseh že izračunanih neznank na desno stran potrebnih približno $2\frac{n^2}{2} = n^2$ operacij. V zunanji zanki imamo eno operacijo (deljenje desne strani c_i s pivotom u_{ii}), kar znese skupaj n operacij, kar lahko zanemarimo v primerjavi z n^2. Zunaj zanke imamo še eno operacijo, ki jo pri štetju prav tako lahko zanemarimo.

Obratno vstavljanje torej potrebuje približno n^2 operacij, da reši sistem enačb s zgornjetrikotno matriko.

Direktno vstavljanje — algoritem

V nadaljevanju bomo reševali tudi sisteme $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je matrika L spodnjetrikotna. Zapišimo še algoritem za rešitev takega sistema z direktnim vstavljanjem.

Algoritem 2.3 Naslednji algoritem izračuna rešitev sistema linearnih enačb $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s spodnjetrikotno matriko L:

$x(1) = b(1)/U(1,1)$
for $i = 2 : n$
  for $j = 1 : i-1$
    $b(i) = b(i) - U(i,j) * x(j)$
  end
  $x(i) = b(i)/U(i,i)$
end

Rešitve sistema so ob izteku algoritma shranjene v vektorju $\mathbf{x}$.

Seveda je tudi za uspešen zaključek direktnega vstavljanja potrebno, da so vsi pivoti različni od 0.

Število operacij za direktno vstavljanje je, prav tako kot pri obratnem vstavljanju, približno n^2.

2.2.1 Ko Gaussova eliminacija odpove

Običajno lahko z Gaussovo eliminacijo in obratnim vstavljanjem izračunamo rešitev sistema linearnih enačb, vendar je zmeraj možnost, da metoda odpove. Vzrok je seveda v tem, da se na mestu, kjer pričakujemo pivot, pojavi ničla. Tako težavo lahko pogosto enostavno odpravimo, včasih pa je usodna, kar pomeni, da rešitve ne moremo izračunati. Poglejmo si tri tipične primere.

Primer 2.5 Pri naslednjem sistemu enačb je 0 na mestu, kjer bi moral biti pivot:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjava vrstic}} \left[\begin{array}{rr|r} \boxed{3} & -2 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{array}\right].$$

Težavo lahko enostavno odpravimo tako, da zamenjamo vrstici v matriki, kar pomeni, da smo zamenjali vrstni red enačb v sistemu.

V zgornjem primeru je na pivotnem mestu ničla, v stolpcu pod njo pa element, različen od nič. Ko zamenjamo vrstici, na pivotno mesto pride od nič različen element, ki ga lahko uporabimo kot pivot in nadaljujemo z eliminacijo. Taka zamenjava vrstic med Gaussovo eliminacijo se imenuje *pivotiranje*. S pivotiranjem pripeljemo na pivotno mesto neničelen element, da lahko nadaljujemo z eliminacijo.

Primer 2.6 Po prvem koraku eliminacije se na pivotnem mestu pojavi 0

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{(2,1)} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Ker pod ničlo na pivotnem mestu ni neničelnega števila, se iz težave ne moremo izviti z zamenjavo vrstic. Druga enačba v tem sistemu enačb je $0x + 0y = 7$, enačba očitno nima rešitve. Tako tudi prvotni sistem nima rešitve. Vrstična slika tega sistema pokaže, da obe enačbi predstavljata vzporedni premici, ki se ne sekata.
Iz stolpčne slike ugotovimo, da sta stolpca matrike sistema kolinearna, vektor desnih strani pa ne leži na premici, ki jo določata oba stolpca, zato linearna kombinacija stolpcev matrike, ki bi bila enaka vektorju desnih strani ne obstaja.

V naslednjem primeru pa ima sistem več rešitev.

Primer 2.7 Če v sistemu iz prejšnjega primera namesto 11 na desni strani zadnje enačbe zapišemo 4, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Na mestu drugega pivota je ničla, boljšega kandidata za pivot ni, vendar je ničla tudi na desni strani druge enačbe $0x + 0y = 0$. To enačbo rešita vsak x in y, tako da nam ostane le prva enačba $x - 2y = 1$. Tukaj lahko vrednost neznanke y izberemo poljubno (zato rečemo, da je y *prosta neznanka*), potem je vrednost neznanke x doočena kot $x = 1 + 2y$.
Vrstični pogled na ta sistem enačb nam pokaže dve premici, ki se pokrivata. Vsaka točka na teju premici zadošča obema enačbama.
V stolpčni sliki so sedaj vsi trije vektorji (prvi in drugi stolpec matrike sistema in stolpec desnih strani) kolinearni, zato lahko najdemo več kot eno linearno kombinacijo obeh stolpcev, ki je enaka vektorju desnih strani.

Kadar se Gaussova eliminacija predčasno ustavi, ker je element na mestu, kjer bi moral biti pivot, enak 0, imamo dve možnosti.

- Če je v istem stolpcu pod pivotnim mestom kakšen element različen od 0, lahko s pivotiranjem (zamenjavo vrstic) na pivotno mesto pripeljemo element, ki je različen od 0 in z eliminacijo lahko nadaljujemo.
- Če so v stolpcu pod ničlo na pivotnem mestu same ničle, eliminacijo na-

daljujemo na naslednjem stolpcu. Ob koncu eliminacije dobimo eno ali več vrstic, ki imajo na levi strani same ničle.

- Če je v vrstici, kjer so na levi same ničle, na desni strani število, različno od nič, sistem enačb nima rešitve.
- Če so v vseh vrsticah, kjer so na levi same ničle, ničle tudi na desni strani, imamo eno ali več prostih neznank, katerih vrednosti lahko prosto izberemo. Vrednosti ostalih neznank so s tem določene.

2.2.2 Matrična formulacija Gaussove eliminacije

V prejšnjem razdelku smo Gaussovo eliminacijo opisali kot operacije nad elementi vrstic razširjene matrike sistema R. Ko smo eliminacijo zapisali v obliki algoritma (algoritem 2.1), smo uporabljali elementarne operacije nad elementi matrik, kar je ugodno, kadar hočemo izračunati zgornjetrikotno obliko sistema enačb.

Za razumevanje delovanja eliminacije bomo v tem razdelku celoten postopek opisali v jeziku linearne algebre, kot množenje matrik. To nam bo odprlo nov pogled na Gaussovo eliminacijo in omogočilo njen zapis v obliki LU-razcepa matrike A v produkt spondjetrikotne matrike L in zgornjetrikotne matrike U. To je oblika Gaussove eliminacije, ki se danes največ uporablja v računalniških programih.

Vsak korak Gaussove eliminacije je operacija nad vrsticami matrike A. Že v 1. poglavju, izrek 1.28 smo ugotovili, da v produktu BA matrik B in A matrika B deluje na vrstice matrike A. Zato bomo vsak posamezen korak Gaussove eliminacije opisali kot množenje matrike sistema A z leve strani s primerno *eliminacijsko matriko* E.

Začnimo s primerom:

Primer 2.8 Vzemimo matriko sistema enačb, ki smo ga rešili v primeru 2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

V prvem koraku eliminacije želimo dobiti ničlo na poziciji $(2,1)$. V ta namen moramo od druge vrstice odšteti z množiteljem 3 pomnoženo prvo vrstico. Da bi to dosegli, bomo matriko A z leve pomnožili z *elementarno eliminacijsko matriko* E_{21}. Množenje z matriko E_{21} mora ohraniti prvo in tretjo vrstico matrike A, od druge vrstice pa mora odšteti 3-kratnik prve vrstice, zato je

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preverimo

$$E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na naslednjem koraku moramo od 3. vrstice odšteti 2-kratnik prve vrstice, da se znebimo elementa na poziciji $(3,1)$:

$$E_{31}(E_{21}A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

V zadnjem koraku bomo 2-kratnik 2. vrstice odšteli od 3. vrstice, da se znebimo elementa na poziciji $(3,2)$:

$$E_{32}(E_{31}E_{21}A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tako smo dobili zgornjetrikotno matriko U kot produkt $U = E_{32}E_{31}E_{21}A$, enako kot v primeru 2.3.

Če hočemo rešiti sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, moramo tudi vektor $\mathbf{b}$ z leve pomnožiti s produktom eliminacijskih matrik $\mathbf{c} = E_{32}E_{31}E_{21}\mathbf{b}$, da dobimo sistem $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ z zgornjetrikotno matriko, ki je ekvivalenten začetnemu sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Posamezni korak Gaussove eliminacije lahko naredimo tako, da matriko pomnožimo z leve z elementarno eliminacijsko matriko. Element na poziciji (i,j), $(i > j)$ eliminira množenje z matriko E_{ij}, ki je enaka enotski matriki, razen na mestu (i,j), kjer je z -1 pomnožen množitelj, s katerim bomo pomnožili j-to vrstico, preden jo bomo odšteli od i-te vrstice.

Celotno Gaussovo eliminacijo bi lahko opisali kot

$$EA = U\,,$$

kjer je E celotna eliminacijska matrika, ki jo dobimo tako, da zmnožimo vse elementarne eliminacijske matrike. V primeru 2.8 je $E = E_{32}E_{31}E_{21}$.

Pozor! Pri množenju elementarnih eliminacijskih matrik E_{ij} moramo strogo paziti na vrstni red. Matrika, s katero smo naredili prvi eliminacijski korak je na desni, naslednje matrike dodajamo na levo v istem vrstnem redu, kot smo izvajali eliminacije.

Primer 2.9 V primeru 2.8

$$\begin{aligned} E &= E_{32}E_{31}E_{21} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Izračunajmo še produkt

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

V razdelku 2.4 bomo spoznali bolj pripraven način, kako Gaussovo eliminacijo opišemo v matričnem jeziku.

2.3 Inverzna matrika

Ugotovili smo že, da množenje dveh matrik lahko tolmačimo kot učinek prve matrike na drugo. Množenje matrike sistema A z elementarno eliminacijsko matriko E_{12} opisuje prvi korak Gaussove eliminacije, ko prvo vrstico matrike A, pomnoženo s primernim množiteljem, odštejemo od druge vrstice. Zanima nas, ali lahko učinek, ki ga ima množenje z matriko, izničimo tako, da rezultat spet pomnožimo z neko matriko.

Če je

$$EA = U\,,$$

ali lahko najdemo tako *inverzno matriko* E^{-1}, da bo

$$E^{-1}U = E^{-1}EA = A\,?$$

Množenje z matriko je podobno kot množenje s številom. Množenje s številom a lahko izničimo, če rezultat delimo z a, ali množimo z $1/a$. Številu a je inverzno število $1/a$, ki obstaja natanko takrat, ko je $a \neq 0$. Pri matrikah je to malo bolj zapleteno.

Definicija 2.1 *Kvadratna matrika A je* obrnljiva*, če obstaja taka matrika A^{-1}, da je*

$$AA^{-1} = I \quad \textit{in} \quad A^{-1}A = I\,. \tag{2.8}$$

Matrika A^{-1} (če obstaja) se imenuje matriki A inverzna *matrika. Matrika, ki ni obrnljiva, je* singularna*.*

Poglejmo primer obrnljive matrike.

Primer 2.10 V primeru 2.9 smo v prvem koraku Gaussove eliminacije od druge vrstice odšteli trikratnik prve vrstice. To smo dosegli z elementarno eliminacijsko matriko E_{2_1}. Da bi izničili učinek te operacije, moramo drugi vrstici spet prišteti, kar smo ji prej odšteli, torej ji moramo prišteti trikratni prve vrstice. Zato je

$$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da je to res, zlahka preverimo tako, da zmnožimo matriki E_{21} in E_{21}^{-1} in dobimo enotsko matriko.

Poglejmo še matriko, ki ni obrnljiva, torej je singularna.

Primer 2.11 Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

ima oba stolpca kolinearna vektorju $[1,\ 3]^T$. Zato ima tudi produkt s poljubno 2×2 matriko X zaradi definicij 1.24 in 1.26 oba stolpca kolinearna vektorju $[1,\ 3]^T$, torej ne more biti enak enotski matriki, ki ima linearno neodvisna stolpca. Matrika A je zato singularna.

2.3.1 Lastnosti obrnljivih matrik

Ali je matrika obrnljiva je najpogostejše vprašanje, ko govorimo o kvadratni matriki. To še ne pomeni, da moramo takoj izračunati njeno inverzno matriko. V večini primerov inverza nikoli ne izračunamo! Pomembno pa je poznati lastnosti obrnljivih matrik in njihovih inverzov.

Izrek 2.2 *Kvadratna matrika reda n je obrnljiva natanko tedaj, ko pri Gaussovi eliminaciji dobimo n pivotov.*

Dokaz: Naj bo A kvadratna matrika reda n. Njena inverzna matrika (označimo jo z X), je rešitev matrične enačbe

$$AX = I\,.$$

Če stolpce neznane matrike X označimo z $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, tako da je

$$X = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \cdots\ \mathbf{x}_2]\ ,$$

lahko matriko X izračunamo po stolpcih. Vsak od stolpcev je rešitev sistema linearnih enačb

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \ldots n\,,$$

kjer je $\mathbf{e}_i$ i-ti stolpec enotske matrike. Vsi ti sistemi enačb pa so rešljivi natanko takrat, kadar pri Gaussovi eliminaciji matrike A dobimo pivot v vsaki od vrstic in v vsakem od stolpcev.

Izrek 2.3 *Vsaka obrnljiva matrika ima samo eno inverzno matriko.*

Dokaz: Denimo, da ima matrika A dve inverzni matriki, X in Y. Če obe strani enačbe

$$AY = I$$

pomnožimo z leve z X, dobimo

$$XA \cdot Y = XI = X\,. \tag{2.9}$$

Ker je tudi X inverzna k matriki A, je $XA = I$, zato enačba (2.9) pomeni, da mora biti $X = Y$, torej je inverzna matrika ena sama.

Izrek 2.4 *Inverzna matrika inverzne matrike A^{-1} je matrika A*

$$(A^{-1})^{-1} = A\,.$$

Dokaz: V definiciji inverzne matrike (2.8) nastopata A in A^{-1} simetrično, zato sta ena drugi inverz.

Izrek 2.5 *Če je matrika A obrnljiva, potem ima sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ edino rešitev $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.*

Dokaz: Enačbo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z leve pomnožimo z A^{-1} in dobimo

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}\,.$$

Izrek 2.6 *Če obstaja neničelna rešitev $\mathbf{x}$ enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, matrika A ni obrnljiva (je singularna).*

Dokaz: Ničelni vektor $\mathbf{0}$ je vedno rešitev enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Če je matrika A obrnljiva, ima enačba $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zaradi izreka 2.5 eno samo rešitev, to je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Zato matrika A ne more biti obrnljiva, če ima enačba $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ neničelno rešitev.

Izrek 2.7 *Če sta matriki A in B istega reda obrnljivi, je obrnljiv tudi produkt $A \cdot B$ in*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}\,.$$

Dokaz: Preverimo neposredno:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I \cdot B = B^{-1}B = I\,.$$

Inverz produkta matrik je produkt inverznih matrik v obratnem vrstnem redu.

Za vsako obrnljivo matriko A lahko poleg potenc z nenegativnimi celimi eksponenti $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, obravnavamo tudi potence z negativnimi celimi potencami

$$A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1}, \quad A^{-3} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}, \ldots$$

Potence matrik z racionalnimi ali realnimi eksponenti se uporabljajo precej redkeje, saj običajne definicije potenc z racionalnimi eksponenti pogosto niso enolično določene.

Za računanje s celimi potencami matrik veljajo običajna pravila

$$A^pA^q = A^{p+q}\,,$$

$$(A^p)^q = A^{pq}, \quad p, q \in \mathbb{Z}\,.$$

Pozor! Pravilo
$$(AB)^p = A^p B^p$$
velja le v primeru, ko matriki A in B komutirata, torej $AB = BA$.

Kakšna pa je zveza med inverzom matrike A in inverzom njej transponirane matrike A^T?

Izrek 2.8 *Inverz transponirane matrike je transponirana matrika inverza*
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \, .$$

Dokaz: Uporabimo pravilo za transponiranje produkta
$$I = I^T = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T \, .$$

Zelo enostavno je izračunati inverz diagonalne matrike.

Izrek 2.9 *Inverz diagonalne matrike z diagonalnimi elementi a_{ii} je diagonalna matrika, ki ima na diagonali elemente a_{ii}^{-1}*
$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} .$$

Dokaz:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = I \, .$$

2.3.2 Izračun inverzne matrike — Gauss-Jordanova eliminacija

Naj bo A kvadratna matrika reda n. Poglejmo, kako bi lahko učinkovito izračunali njeno inverzno matriko A^{-1}. Inverzna matrika A^{-1} mora zadoščati matrični enačbi $AA^{-1} = I$.

Primer 2.12 Naj bo matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Njena inverzna matrika

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mora zadoščati enačbi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Ker so stolpci produkta dveh matrik (glej definicijo 1.24) zaporedoma enaki produktu prve matrike s stolpci druge, je matrična enačba ekvivalentna dvema sistemoma linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika je pri obeh sistemih ista, zato ju lahko rešujemo hkrati. Razširjeno matriko zapišemo z obema desnima stranema, torej s celotno enotsko matriko, in naredimo Gaussovo eliminacijo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(2,1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \tag{2.11}$$

Prvi stolpec inverzne matrike $[a\ \ c]^T$, bomo izračunali s pomočjo tretjega stolpca razširjene matrike $[1\ \ -3]^T$, zato je $c = 3/2$ in $a = -2$. Za drugi stolpec inverza $[b\ d]^T$ pa uporabimo zadnji stolpec razširjene matrike $[0\ 1]$, zato je $d = -1/2$ in $b = 2$. Inverzna matrika je tako

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Da je rezultat pravilen, se prepričaj tako, da zmnožiš AA^{-1}.

V zgornjem primeru smo izračunali inverzno matriko tako, da smo izvedli Gaussovo eliminacijo nad razširjeno matriko $[A|I]$ in z obratnim vstavljanjem izračunali rezultat.

Ideja *Gauss-Jordanove metode* pa je, da, ko pridemo do zgornjetrikotne matrike, nadaljujemo eliminacijo in eliminiramo še elemente nad diagonalo in vsako vrstico delimo z diagonalnim elementom. Tako na levi strani enačbe dobimo enotsko matriko, zato je na desni strani inverzna matrika.

Primer 2.13 (nadaljevanje primera 2.12) V (2.11) smo razširjeno matriko pripeljali do zgornjetrikotne oblike. Sedaj lahko dobimo diagonalno matriko, če drugo vrstico, pomnoženo z -1, odštejemo od prve vrstice

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \overset{(1,2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

in končno drugo vrstico delimo z -2

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right].$$

Na levi strani imamo sedaj enotsko, na desni strani inverzno matriko.

Gauss-Jordanovo eliminacijo nad razširjeno matriko $[A|I]$ torej izvedemo v treh korakih:

1. Običajna Gaussova eliminacija, s katero matriko A predelamo v zgornjetrikotno obliko. Elementi na diagonali so pivoti, torej vsi različni od 0;
2. Jordanova eliminacija, s katero pridelamo ničle tudi nad glavno diagonalo. Matrika je sedaj diagonalna, na diagonali so še vedno pivoti;
3. Vsako vrstico delimo s pivotom. Tako dobimo enotsko matriko I.

Vse operacije, ki jih vključuje Gauss-Jordanova metoda, so vrstične operacije. Zato vsako od njih lahko opišemo kot množenje elementarne eliminacijske matrike z razširjeno matriko $[A|I]$. Če produkt vseh elementarnih eliminacijskih matrik označimo z E, lahko z matrikami Gauss-Jordanovo eliminacijo zapišemo kot

$$E[A|I] = [I|X]\,, \quad \text{kar pomeni, da je} \quad EA = I \text{ in } EI = X\,.$$

Iz zveze $EA = I$ lahko ugotovimo, da mora biti celotna eliminacijska matrike E kar inverzna matrika A^{-1}, zato mora biti na desni strani (razširjeni del matrike) $X = A^{-1}$.

Gauss-Jordanovo metodo smo opisali kot metodo za računanje inverza matrike, tako da smo rešili matrično enačbo $AX = I$, katere rešitev je A^{-1}. Metoda pa je uporabna tudi za druge matrične enačbe, kot je $AX = B$. Za rešitev te enačbe moramo Gauss-Jordanovo metodo uporabiti na razširjeni matriki $[A|B]$, da jo preoblikujemo v $[I|X]$, kjer je X rešitev. Pri tem je matrika B lahko pravokotna s poljubnim številom stolpcev, seveda pa mora imeti isto število vrstic kot matrika A. Če ima matrika B le en stolpec, imamo sistem linearnih enačb, ki ga tudi lahko rešujemo z Gauss-Jordanovo eliminacijo. V tem primeru je prvi korak Gauss-Jordanove eliminacije (ničle nad diagonalo in deljenje enačb s pivoti) isti kot algoritem 2.1, drugi in tretji korak pa sta ekvivalentna obratnemu vstavljanju (algoritem 2.2).

2.4 LU razcep kvadratne matrike

Veliko ključnih idej v realni algebri lahko formuliramo kot racep matrike: prvotno matriko A lahko zapišemo kot produkt dveh ali več enostavnejših matrik. Prva od takih faktorizacij, ki je morda najpomembnejša, je tesno povezana z Gaussovo eliminacijo. Poglejmo si, kako lahko matriko A zapišemo kot produkt spodnjetrikotne matrike L in zgornjetrikotne matrike U, torej $A = LU$ ter kako lahko to uporabimo pri reševanju sistema linearnih enačb.

V razdelku 2.2 smo ugotovili, da lahko Gaussovo eliminacijo opišemo kot $EA = U$, kjer je U zgornjetrikotna in E spodnjetrikotna matrika, produkt elementarnih eliminacijskih matrik E_{ij}.

Primer 2.14 Če rešujemo sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, potrebujemo le en korak Gaussove eliminacije: dvakratnik prve vrstice moramo odšteti od druge vrstice. To lahko zapišemo z elementarno eliminacijsko matriko E_{21} kot $E_{21}A = U$ oziroma podrobneje

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

To enačbo pomnožimo z leve z E_{21}^{-1}. Ta je (glej primer 2.10) enaka

$$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

zato dobimo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tako smo matriko A zapisali kot produkt spodnjetrikotne matrike $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ in zgornjetrikotne matrike $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, torej $A = LU$.

Pri večjih sistemih enačb je celotna eliminacijska matrika E, s katero dosežemo zgornjetrikotno obliko $EA = U$, produkt več elementarnih eliminacijskih matrik E_{ij}. Pri sistemih 3×3, naprimer, je $E = E_{32}E_{31}E_{21}$. Z matriko $L = E^{-1}$ lahko to zapišemo kot $A = L \cdot U$. Matrika L je seveda, zaradi izreka 2.7, enaka $L = E^{-1} = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}$. Ker je E produkt elementarnih eliminacijskih matrik E_{ij}, ki so vse spodnjetrikotne, je tudi sama spodnjetrikotna, prav tako pa je spodnjetrikotna tudi njena inverzna matrika L.

Primer 2.15 V primeru 2.8 smo izračunali tri elementarne eliminacijske matrike za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

in sicer

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njihovi inverzi so, podobno kot v primeru 2.10, enaki

$$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{31}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi dobili matriko L, jih moramo zmnožiti v obratnem vrstnem redu, kot za matriko E, torej

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika L je torej spodnjetrikotna z enicami na diagonali. V spodnjem trikotniku pa je na poziciji (i, j) množitelj, s katerim smo eliminirali element na poziciji (i, j), ko smo prvotno matriko A transformirali na zgornjetrikotno obliko U.

Iz primerjave matrik E (primer 2.9) in njene inverzne matrike L (primer 2.15) lahko ugotovimo, da je matrika

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ m_{n,1} & m_{n,2} & & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

mnogo enostavnejša, saj so njeni poddiagonalni elementi $l_{ij},\ i > j$ kar množitelji, s katerimi smo eliminirali element na poziciji (i, j), pri matriki E pa so množitelji, zaradi drugačnega vrstnega reda množenja, bolj skriti.

Povzemimo dosedanje ugotovitve o LU razcepu:

Izrek 2.10 *Če je matrika A taka, da pri Gaussovi eliminaciji ni potrebno menjavanje vrstic, potem lahko A zapišemo kot produkt*

$$A = LU\,,$$

kjer je L spodnjetrikotna matrika z enkami na diagonali in množitelji pod diagonalo in U zgornjetrikotna matrika s pivoti na diagonali.

Algoritem za LU razcep

LU razcep matrike je glavno orodje za učinkovito reševanje sistemov linearnih enačb, zato zapišimo algoritem, ki nam za dano matriko A izračuna matriki L in U.

Algoritem 2.4 Če je kvadratna matrika A reda n taka, da pri Gaussovi eliminaciji niso potrebne zamenjave vrstic, potem algoritem

$L = \mathbf{eye}(n)$
for $k = 1 : n-1$
    for $i = k+1 : n$
        $L(i,k) = A(i,k)/A(k,k)$
        for $j = k+1 : n$
            $A(i,j) = A(i,j) - L(i,k) * A(k,j)$
        end
    end
end
$U = \mathbf{triu}(A)$

izračuna spodnjetrikotno matriko L z enicami na diagonali in zgornjetrikotno matriko U, obe kvadratni reda n in taki, da je $LU = A$.

Število operacij za LU razcep

Preštejmo torej število operacij v algoritmu 2.4. V prvem koraku, ko eliminiramo elemente v prvem stolpcu, potrebujemo eno množenje in eno odštevanje za vsak nov element pod pivotno vrstico. Vsega skupaj moramo v prvem koraku na novo izračunati $n-1$ elementov v vsaki od $n-1$ vrstic, za kar je potrebno $2(n-1)^2$ operacij, poleg tega pa moramo izračunati še $n-1$ množiteljev, torej imamo v prvem koraku $(n-1)(2n-1)$ operacij. Ker nas zanima le vodilni člen končnega rezultata, lahko to poenostavimo v $2n^2$. V naslednjem koraku ponovimo eliminacijski korak na matriki, ki je za en stolpec in eno vrstico manjša od prvotne, torej imamo približno $2(n-1)^2$ operacij. Tako nadaljujemo do zadnjega koraka. Skupaj imamo približno

$$2\left(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\right) = \frac{2}{6}n(n+1)(2n+1)$$

operacij. Ko je število neznank n veliko, je to približno enako $\frac{2n^3}{3}$, saj lahko člene nižjih redov zanemarimo. Zaključimo lahko, da je število operacij, potrebnih za LU razcep matrike, podobno kot število operacij, potrebnih za Gaussovo eliminacijo (algoritem 2.1).

Rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z LU razcepom

Ko poznamo razcep $A = LU$, je U zgornjetrikotna matrika, ki je končni rezultat Gaussove eliminacije, v matriki L pa je spravljena informacija o poteku eliminacije. Kako si s tema matrikama pomagamo pri reševanju sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

Namesto sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešujemo enakovreden sistem

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

kar lahko naredimo v dveh korakih. Najprej zamenjamo produkt $U\mathbf{x}$ z novo neznanko $\mathbf{y}$. To novo neznanko izračunamo tako, da rešimo spodnjetrikotni sistem

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}\,,$$

ki ga rešimo z algoritmom 2.3, potem pa nam ostane še zgornjetrikotni sistem

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}\,,$$

ki ga zlahka rešimo z algoritmom 2.2.

Število operacij, potrebnih za rešitev sistema enačb z LU razcepom je enako številu operacij z Gaussovo eliminacijo: za LU razcep in direktno vstavljanje skupaj potrebujemo enako število operacij kot za samo Gaussovo eliminacijo, v obeh primerih pa moramo na koncu rešiti zgornjetrikotni sistem z obratnim vstavljanjem.

2.4.1 Simetrične matrike

Simetrične so tiste matrike, ki so, ki se ne spremenijo pri transponiranju.

Definicija 2.11

$$\textit{Matrika } A \textit{ je simetrična } \Leftrightarrow \; A^T = A\,.$$

Za elemente a_{ij} *simetrične matrike velja* $a_{ij} = a_{ji}$.

Poglejmo primer:

Primer 2.16 Matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A^T \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = D^T$$

sta simetrični, medtem ko matrika

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \neq B^T$$

ni simetrična.

Izrek 2.12 *Če je A simetrična in obrnljiva, je tudi A^{-1} simetrična.*

Dokaz: Če je matrika A obrnljiva, je $(A^{-1})^T$ (zaradi izreka 2.8) enaka $(A^T)^{-1}$. Če je A še simetrična, je $(A^T)^{-1} = A^{-1}$, zato je tudi inverzna matrika A^{-1} simetrična.

Simetrične matrike nastopajo pri mnogo pomembnih primerih in so med najvažnejšimi skupinami matrik. Najpogosteje do simetričnih matrik pridemo, če zmnožimo poljubno matriko z njeno transponirano matriko.

Izrek 2.13 *Če je R poljubna (lahko tudi pravokotna) matrika, sta R^TR in RR^T simetrični matriki.*

Dokaz: Najprej za za R^TR:

$$(R^TR)^T = R^T(R^T)^T = R^TR\,,$$

nato še za RR^T:

$$(RR^T)^T = (R^T)^TR^T = RR^T\,.$$

Oglejmo si to še na primeru.

Primer 2.17 Če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

je

$$AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$$

in

$$A^TA = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}.$$

Obe matriki, AA^T in A^TA, sta simetrični.

2.4.2 Permutacijske matrike

Z elementarnimi eliminacijskimi matrikami E_{ij} lahko opišemo posamezne korake Gaussove eliminacije v matričnem jeziku. Kako pa v matričnem jeziku lahko opišemo zamenjavo dveh vrstic v matriki, ko je to potrebno, da se izognemo ničli na pivotnem mestu?

Definicija 2.14 Permutacijska matrika *ima vrstice enotske matrike v poljubnem vrstnem redu.*

Oglejmo si nekaj primerov permutacijskih matrik.

Primer 2.18 Pri matrikah z dvema vrsticama imamo dve možnosti: vrstici lahko pustimo v istem zaporedju ali jih zamenjamo. Zato imamo 2 permutacijski matriki 2×2

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obe matriki sta obrnljivi, vsaka je svoj inverz: $I^{-1} = I$ in $P_{12}^{-1} = P_{12}$.
Pri matrikah s tremi vrsticami imamo že 6 možnosti

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{231} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{312} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vse te matrike so obrnljive. Matrike, ki zamenjajo le dve vrstici so same sebi inverz, medtem ko je $P_{231}^{-1} = P_{312}$.
Pri matrikah z večjim številom vrstic število permutacijskih matrik hitro narašča. Pri matrikah z n vrsticami imamo $n!$ permutacijskih matrik.

Ko zmnožimo dve permutacijski matriki, spet dobimo permutacijsko matriko:

Izrek 2.15 *Produkt dveh permutacijskih matrik je permutacijska matrika.*

Dokaz: Elementi produkta P_1P_2 dveh permutacijskih matrik so skalarni produkti vrstic matrike P_1 in stolpcev matrike P_2. Ker sta P_1 in P_2 permutacijski, imata v vsaki vrstici natančno eno enko, vendar tako, da je tudi v vsakem stolpcu natančno ena enka. Izmed skalarnih produktov i-te vrstice matrike P_1 s stolpci matrike P_2 so torej enaki 0 vsi, razen produkta s tistim stolpcem, ki ima enko na istem mestu kot i-ta vrstica matrike P_1.
Zato ima produkt P_1P_2 v vsaki vrstici natanko eno ničlo. Ker isto velja tudi za njene stolpce, je produkt permutacijska matrika.

Vse permutacijske matrike so obrnljive, inverz permutacijske matrike je tudi permutacijska matrika.

Izrek 2.16 *Če je P permutacijska matrika, je obrnljiva in $P^{-1} = P^T$.*

Dokaz: V produktu PP^T množimo vrstice matrike P s stolpci matrike P^T, torej z vrsticami matrike P. Diagonalni elementi produkta so enaki 1, saj se enka v vrstici matrike P ujame z enko v istem stolpcu matrike P^T, izvendiagonalni elementi produkta pa so enaki 0, ker so enke v vrstici matrike P na drugih mestih kot enke v vseh ostalih stolcih matrike P^T.

Permutacijska matrika P_{ij}, s katero zamenjamo i-to in j-to vrstico, je matrika, ki jo dobimo, če v enotski matriki zamenjamo i-to in j-to vrstico.

Primer 2.19 Množenje permutacijske matrike

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

z matriko A zamenja drugo in tretjo vrstico v matriki A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

S permutacijsko matriko lahko zamenjamo tudi več kot dve vrstici naenkrat. Če v enotski matriki zamenjamo več vrstic med seboj, dobimo permutcijsko matriko P, s katero lahko zamenjamo iste vrstice v matriki A tako, da izračunamo produkt PA.

Primer 2.20 Če v enotski matriki ciklično zamenjamo vse vrstice: zadnjo vrstico na prvo mesto, vse ostale pa za eno mesto navzdol dobimo permutacijsko matriko P, ki bo na enak način učinkovala na vsako matriko A, s katero jo pomnožimo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n & o & p \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}.$$

S pomočjo permutacijske matrike lahko menjavamo tudi vrstni red stolpcev v matriki A, le da moramo v tem primeru matriko pomnožiti s permutacijsko matriko z desne, torej AP. Permutacijsko matriko dobimo iz enotske tako, da zamenjamo vrstni red stolpcev na isti način, kot hočemo zamenjati vrstni red stolpcev v matriki A.

Primer 2.21 Če hočemo v matriki A dimenzije 3×3 urediti stolpce v obratnem vrstnem redu (zamenjati prvi in zadnji stolpec), moramo matriko A pomnožiti s permutacijsko matriko, ki je enaka enotski matriki s stolpci v obratnem vrstnem redu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

2.4.3 LU-razcep s pivotiranjem

Če je pri Gaussovi eliminaciji potrebna zamenjava vrstic, potem razcep $A = LU$, kot v izreku 2.10, ne velja več.

Matriko L smo dobili kot produkt inverzov elementarnih eliminacijskih matrik $L = E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} \cdots E_{n,n-1}^{-1}$. Kadar moramo med eliminacijo menjavati vrstice, moramo med matrike E_{ij}^{-1} na primernih mestih dodati permutacijske matrike, tako da je $A = (E_{21}^{-1} \cdots P_1^{-1} \cdots E_{ij}^{-1} \cdots P_2^{-1} \cdots)U$.

Ker bi lahko vse potrebne zamenjave vrstic naredili *pred* Gaussovo eliminacijo, (če bi vedeli, katere bodo potrebne), lahko vse permutacije zberemo na začetku produkta, zato je $PA = LU$, kjer je P permutacijska matrika, ki določa potrebne menjave vrstic. Tako smo pokazali, da velja

Izrek 2.17 *Za vsako obrnljivo matriko A velja*

$$PA = LU\,,$$

kjer je P permutacijska matrika, ki opisuje vse potrebne menjave vrstic med Gaussovo eliminacijo, L spodnjetrikotna matrika z enojkami na diagonali in množitelji pod diagonalo in U zgornjetrikotna matrika s pivoti na diagonali.

Pivotiranje smo uporabili le v primerih, ko se je med eliminacijo na mestu, kjer smo pričakovali pivot, pojavila ničla. Pri reševanju večjih sistemov linearnih enačb z računalnikom, majhni pivoti povzročajo velike numerične napake, zato pri "resnem"računanju za pivot izberemo največji možni element (po absolutni vrednosti največje število v pivotnem stolpcu pod diagonalo). V tem primeru so v matriki P tudi permutacije, ki s stališča linearne algebre niso nujno potrebne.

2.5 Naloge

1. Reši naslednje sisteme linearnih enačb ter nariši vrstično in stolpčno sliko.

   (a) $$\begin{array}{rrcr} 3x & -5y & = & 13 \\ 2x & -7y & = & -17 \end{array}$$

   (b) $$\begin{array}{rrcr} 3x & -4y & = & 1 \\ 3x & +4y & = & 19 \end{array}$$

   (c) $$\begin{array}{rrcr} x & -5y & = & 13 \\ 2x & -11y & = & -17 \end{array}$$

2. Naslednje sisteme enačb reši z Gaussovo eliminacijo

   (a) $$\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +0z & = & 5 \\ x & +0y & +3z & = & 16 \\ 0x & +5y & -z & = & 10 \end{array}$$

   (b) $$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 6 \\ 2x & +3y & -7z & = & 16 \\ 5x & +2y & +z & = & 16 \end{array}$$

   (c) $$\begin{array}{rrrrcr} x & +y & -5z & +0u & = & -10 \\ 2x & +0y & +3z & -u & = & 10 \\ 0x & +3y & +2z & +0u & = & 1 \\ 4x & +4y & +5z & +5u & = & 0 \end{array}$$

3. Imamo sistem linearnih enačb

   $$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +3z & = & 7 \\ x & -3y & -z & = & -2 \\ 2x & -y & +2z & = & 4 \end{array} .$$

   (a) Ali je ta sistem rešljiv?

   (b) Ali sta katerikoli dve ravnini (od treh) med seboj vzporedni?

   (c) Izberi take vrednosti desnih strani, da bo sistem imel rešitev.

4. Za singularni sistem linearnih enačb

   $$\begin{array}{rrcr} 3x & -1y & = & 13 \\ -6x & +2y & = & c \end{array}$$

   izberi vrednost parametra c, da rešitve ne bo. Izberi še tako vrednost parametra c, da bo imel sistem več rešitev in zapiši dve rešitvi.

5. V sistemu linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 6x + ay &= b \end{aligned}$$

   izberi za parameter a tako vrednost, da bo matrika sistema singularna, nato za b izberi tako vrednost, da bo sistem rešljiv. Poišči dve rešitvi tega sistema.

6. Za katero število a pri reševanju sistema enačb

$$\begin{aligned} ax + 2y &= 8 \\ 2x + 4y &= b \end{aligned}$$

   dobimo na pivotnem mestu 0

   (a) tako da lahko nadaljujemo eliminacijo po zamenjavi vrstic;

   (b) ne moremo nadaljevati eliminacije (ni rešitve)?

7. Za katere vrednosti parametra a ima sistem enačb

$$\begin{aligned} ax + 4y &= 6 \\ x + ay &= 3 \end{aligned}$$

   (a) eno samo rešitev;

   (b) neskončno rešitev;

   (c) nima nobene rešitve?

8. Zakaj sistem linearnih enačb ne more imeti natanko dveh rešitev?

   Če sta $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ in $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ dve rešitvi sistema enačb z matriko A in desno stranjo $\mathbf{b}$, zapiši še kakšno rešitev tega sistema.

9. Poišči splošno rešitev sistema enačb ali ugotovi njegovo nerešljivost:

   (a) $$\begin{array}{rrrr} 2x & -y & +z & -2 \\ x & +2y & +3z & -1 \\ x & -3y & -2z & 3 \end{array}$$

   (b) $$\begin{array}{rrrrcr} 3x & -2y & -5z & +u & = & 3 \\ 2x & -3y & +z & +5u & = & -3 \\ x & +2y & +0z & -4u & = & -3 \\ x & -y & -4z & +9u & = & 22 \end{array}$$

   (c) $$\begin{array}{rrrrcrcr} 2x & -y & +z & +2t & = & +3u & = & 2 \\ 6x & -3y & +2z & +4t & = & +5u & = & 3 \\ 6x & -3y & +4z & +8t & = & +13u & = & 9 \\ 4x & -2y & +z & +t & = & +2u & = & 1 \end{array}$$

10. Ugotovi kako je rešljivost sistema enačb odvisna od parametra λ in zapiši splošno rešitev, kadar ta obstaja:

(a)
$$\begin{array}{rrrrcl} 5x & -3y & +2z & +4u & = & 3 \\ 4x & -2y & +3z & +7u & = & 1 \\ 8x & -6y & -z & -5u & = & 9 \\ 7x & -3y & +7z & +17u & = & \lambda \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rrrrcr} 4x & -y & +3z & +2u & = & 5 \\ 6x & -2y & +5z & +4u & = & 7 \\ 8x & -3y & +7z & 6u & = & 9 \\ 10x & -4y & +9z & +\lambda u & = & 11 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rrrcl} \lambda x & +y & +z & = & 1 \\ x & \lambda y & +z & = & 1 \\ x & +y & \lambda z & = & 1 \end{array}$$

11. S pomočjo Gauss-Jordanove metode izračunaj inverze naslednjih obrnljivih matrik:

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Poglavje 3

Vektorski prostori

Ozrimo se na kratko na pot, ki smo jo že prehodili. V prvem poglavju smo se seznanili z vektorji in matrikami. Spoznali smo operacije nad vektorji in matrikami. Videli smo, da so matrike sestavljene iz stolpcev (ki so vektorji) in da dobimo vektor $A\mathbf{x}$, če matriko A pomnožimo z vektorjem $\mathbf{x}$.

V tem poglavju bomo še globje pokukali v linearno algebro. Namesto s posameznimi vektorji, se bomo ukvarjali z množicami vektorjev. S pomočjo vektorskih prostorov in posebej vektorskih podprostorov, bomo lažje razumeli sisteme linearnih enačb in še marsikaj, kar nas čaka v nadaljevnaju.

3.1 Vektorski prostor

Vektorski prostor je naravni "dom", v katerem živijo vektorji, to pomeni, da so tudi produkti z vsemi skalarji in vsote poljubnih dveh vektorjev v tem vektorskem prostoru.

Definicija 3.1 Realni vektorski prostor *V je množica "vektorjev" skupaj s pravili za*

- *seštevanje vektorjev,*
- *množenje vektorja z realnim številom (skalarjem).*

Če sta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ poljubna vektorja v V, morajo biti v V tudi

- *vsota $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ in*
- *produkti $\alpha\mathbf{x}$ za vse $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Pozor! Ker so v vektorskem prostoru vsi mnogokratniki vektorjev iz V in vse vsote vektorjev iz V, morajo biti v vektorskem prostoru V tudi VSE linearne kombinacije $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$.

Pravila za operacije v vektorskih prostorih

Operaciji seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v vektorskem prostoru morajo zadoščati naslednjim pravilom:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (komutativnost seštevanja);
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (asociativnost seštevanja);
3. obstaja en sam *ničelni vektor* $\mathbf{0}$, da velja $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
4. za vsak $\mathbf{x}$ obstaja natanko en $-\mathbf{x}$, da je $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
6. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$;
7. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (distributivnost);
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.

Realni vektorski prostor je vsaka množica elementov (vektorjev), v kateri imamo operaciji seštevanja in množenja z realnim številom. Rezultati vseh operacij pa morajo tudi biti elementi v tem vektorskem prostoru. Obe operaciji morata ustrezati navedenim osmim pravilom.

Poglejmo si nekaj množic, ki so vektorski prostori.

Primer 3.1 Vse naslednje množice zadoščajo vsem navedenim kriterijem, torej so vektorski prostori:

- $\mathbb{R}^n$ - vektorski prostor stolpčnih vektorjev z n realnimi komponentami;
- $\mathbb{C}^n$ - vektorski prostor stolpčnih vektorjev z n kompleksnimi komponentami;
- $\mathbb{R}^{m\times n}$ - vektorski prostor vseh realnih matrik z m vrsticami in n stolpci;
- $C(a,b)$ - vektorski prostor vseh funkcij, zveznih na odprtem intervalu (a,b);
- $C^n(a,b)$ - vektorski prostor vseh funkcij, ki imajo na odprtem intervalu (a,b) zveznih prvih n odvodov;
- $\mathbb{P}_n$ - vektorski prostor vseh polinomov ene realne spremenljivke, stopnje ne več kot n;
- $\mathbb{P}$ - vektorski prostor vseh polinomov ene realne spremenljivke;
- Z - vektorski prostor, ki ga sestavlja samo ničelni vektor.

V vektorskih prostorih matrik so "vektorji" matrike, v prostorih funkcij so "vektorji" funkcije ali polinomi. Vektorski prostor Z vsebuje en sam vektor, ničelni vektor $\mathbf{0}$. Edino seštevanje v tem prostoru je $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, ki je spet vektor v Z. Prav tako lahko vektor $\mathbf{0}$ pomnožimo s poljubnim realnim številom in spet dobimo rezultat ničelni vektor: $a\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

3.1.1 Vektorski podprostori

V vektorskem prostoru lahko obstaja prava podmnožica, ki je sama zase vektorski prostor.

Definicija 3.2 *Podmnožica U vektorskega prostora V je* vektorski podprostor*, če je za vsak par vektorjev $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ iz U in vsako realno število α tudi*

- $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in U$ *in*
- $c\mathbf{x}\in U$.

Preprosta posledica te definicije je:

Posledica 3.3 *Množica vektorjev U je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je vsaka linearna kombinacija vektorjev iz U tudi v U.*

Z operacijama seštevanja vektorjev iz podprostora in množenja vektorja iz podprostora s skalarjem vedno ostanemo v podprostoru, zato večkrat rečemo, da je podprostor vektorskega prostora *zaprt* za seštevanje in množenje s skalarjem.

Za operacije v podprostoru velja istih osem pravil, kot za operacije v celem vektorskem prostoru. Da bi preverili, ali je neka podmnožica vektorskega prostora podprostor, moramo ugotoviti le, ali vsebuje vse linearne kombinacije svojih elementov.

Primer 3.2 Vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ sestavljajo vsi vektorji z dvema komponentama. Če si v njem izberemo nek vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, vsi njegovi mnogokratniki sestavljajo vektorski podprostor

$$X = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2; \mathbf{u} = a\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}^2\,,$$

(premica v smeri vektorja $\mathbf{x}$ skozi koordinatno izhodišče) saj so vse vsote mnogokratnikov vektorja $\mathbf{x}$ spet mnogokratniki vektorja $\mathbf{x}$

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{x} = (a+b)\mathbf{x} \in X,$$

prav tako pa tudi mnogokratniki mnogokratnikov vektorja $\mathbf{x}$

$$b(a\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x} \in X\,.$$

S podprostori je bogatejši, zato tudi zanimivejši, vektorski prostor $\mathbb{R}^3$.

Primer 3.3 Elementi tridimenzionalnega vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$ so vektorji s tremi komponentami. Če si izberemo en neničelni vektor, vsi njegovi mnogokratniki, tako kot v prejšnjem primeru, sestavljajo vektorski prostor (premico).
Izberimo še en vektor $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, ki ne leži na premici, ki jo določa $\mathbf{x}$. Vse linearne kombinacije vektorjev $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ sestavljajo ravnino, ki vsebuje vektor $\mathbf{0}$. Tudi ta ravnina je podprostor, saj vsota dveh vektorjev iz te ravnine vedno leži v tej ravnini, prav tako produkt vsakega vektorja iz te ravnine s katerikolim realnim številom.
Ta ravnina ni vektorski prostor $\mathbb{R}^2$, čeprav mu je podobna. Vektorji iz te ravnine imajo tri komponente, torej pripadajo prostoru $\mathbb{R}^3$. Ravnina je podprostor znotraj vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.
Ugotovimo lahko, da imamo v prostoru $\mathbb{R}^3$ štiri vrste podprostorov:

1. Z, ki ima le en element, ničelni vektor $\mathbf{0}$;
2. Premice skozi izhodišče;
3. Ravnine skozi izhodišče;
4. Cel prostor $\mathbb{R}^3$.

Preprosta posledica definicije vektorskega podprostora je tudi

Lastnost 1 *Vsak vektorski podprostor nujno vsebuje ničelni vektor* $\mathbf{0}$.

Dokaz: Ker morajo biti v podprostoru tudi vsi mnogokratniki vektorjev iz podprostora, mora biti tudi produkt vseh vektorjev s številom 0, torej ničelni vektor $\mathbf{0}$.

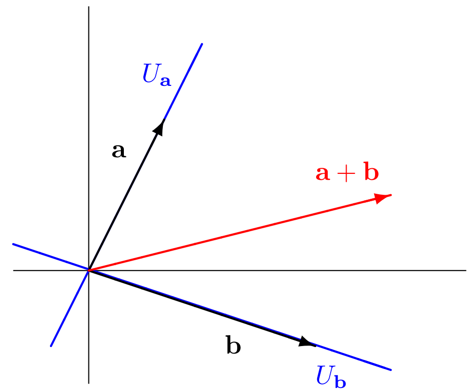
Zanimivo vprašanje je, ali je unija oziroma presek dveh vektorskih podprostorov tudi podprostor.

Primer 3.4 Vektorja $\mathbf{a} = [1\ \ 2]^T$ in $\mathbf{b} = [3\ \ -1]^T$ določata podprostora (premici)

$$U_{\mathbf{a}} = \{t\mathbf{a}\} \quad \text{in} \quad U_{\mathbf{b}} = \{t\mathbf{a}\}$$

v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$ (ravnini). Njuna unija $U = U_{\mathbf{a}} \cup U_{\mathbf{b}}$ sta dve premici v ravnini. Vzemimo vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, ki sta oba v uniji U in ju seštejmo. Vsota $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [4\ 1]^T$ ni v uniji, saj ne leži na nobeni od obeh premic (slika 3.1).

Iz primera 3.4 lahko ugotovimo, da unija dveh podprostorov ni podprostor. Kako pa je s presekom?



Slika 3.1: Unija podprostorov ni podprostor

Lastnost 2 *Presek dveh podprostorov vektorskega prostora je tudi podprostor.*

Dokaz: Naj bosta U_1 in U_2 podprostora vektorskega prostora V. Pokazati moramo, da je za poljubna vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ iz preseka $U_1 \cap U_2$ tudi poljubna linearna kombinacija $t_a\mathbf{a} + t_b\mathbf{b} \in U_1 \cap U_2$.
Ker je U_1 podprostor, je $t_a\mathbf{a} + t_b\mathbf{b} \in U_1$. Ker je U_2 tudi podprostor, je prav tako $t_a\mathbf{a}+t_b\mathbf{b} \in U_2$. Ker je $t_a\mathbf{a}+t_b\mathbf{b}$ v U_1 in v U_2, je tudi v preseku $U_1 \cap U_2$.

Poglejmo si še nekaj drugačnih primerov vektorskih podprostorov.

Primer 3.5

1. V prostoru matrik $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vse zgornjetrikotne matrike $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ sestavljajo podprostor U. Vsota dveh zgornjetrikotnih matrik je zgornjetrikotna, pa tudi produkt zgornjetrikotne matrike s skalarjem je zgornjetrikotna matrika.

2. Tudi vse simetrične matrike $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ sestavljajo podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, saj je vsota dveh simetričnih matrik vedno simetrična, prav tako vsak mnogokratnik simetrične matrike.

3. V vektorskem prostoru kvadratnih polinomov $p(x) = ax^2 + bx + c$ vsi polinomi, ki imajo za $x = 1$ vrednost 0 sestavljajo podprostor. Vsota dveh takih polinomov ima pri $x = 1$ tudi vrednost 0, prav tako produkt takega polinoma z realnim številom.

4. V prostoru $C[0, 1]$ funkcij, ki so zvezne na intervalu $[0, 1]$, funkcije, ki imajo na tem intervalu tudi zvezen prvi odvod, sestavljajo podprostor, saj je vsota dveh zvezno odvedljivih funkcij tudi zvezno odvedljiva, prav tako produkt zvezno odvedljive funkcije z realnim številom.

Da bi lahko bolje razumeli pojem vektorskega podprostora, si oglejmo še nekaj množic, ki niso podprostori.

Primer 3.6

1. Naj bo $U \subset \mathbb{R}^2$ množica tistih dvokomponentnih vektorjev, ki imajo obe komponenti pozitivni, na primer $[2, 3]^T$. Kljub temu, da je vsota dveh vektorjev iz U vedno v U, to ni podprostor, ker produkt z -1, to je vektor $[-2, -3]^T$ ni v U.

2. Tudi če v U vključimo še vse vektorje, ki imajo obe komponenti negativni, na primer $[-3, -2]$, to ne bo podprostor, ker vsota vektorjev $[2, 3]^T$ in $[-3, -2]^T$, to je $[-1, 1]^T$ ni v U.

3. V množici linearnih polinomov $p(x) = ax + b$ naj bo U podmnožica tistih polinomov, ki imajo v 0 vrednost 1. Ker ima vsota dveh takih polinomov v 0 vrednost 2, to ni podprostor.

3.1.2 Stolpčni prostor matrike

Najpomembnejši podprostori so tesno povezani z matrikami. Če matrika A ni obrnljiva, je sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za nekatere vektorje $\mathbf{b}$ rešljiv, za druge pa ne. Radi bi določili množico vektorjev, za katere je sistem rešljiv, to je množico vektorjev, ki jih lahko zapišemo kot produkt matrike A z nekim vektorjem $\mathbf{x}$.

Spomnimo se: produkt $A\mathbf{x}$ je vektor, ki je linearna kombinacija stolpcev matrike A. Za vse možne vektorje $\mathbf{x}$ dobimo vse vektorje $\mathbf{b}$, za katere je sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv.

Definicija 3.4 Stolpčni prostor $C(A)$ *matrike* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *je tisti podprostor vektorskega prostora* $\mathbb{R}^m$*, ki vsebuje natanko vse linearne kombinacije stolpcev matrike* A*.*

Pozor! Stolpčni prostor $C(A)$ za matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^m$.

Ker je produkt matrike A z vektorjem $\mathbf{x}$ linearna kombinacija stolpcev matrike A, je $C(A)$ ravno množica vseh produktov $A\mathbf{x}$ za vse možne $\mathbf{x}$.

Stolpčni prostor $C(A)$ je najmanjši vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^m$, ki vsebuje vse stolpce matrike A.

Izrek 3.5 *Sistem linearnih enačb* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *je rešljiv natanko tedaj, ko je vektor* $\mathbf{b} \in C(A)$*.*

Dokaz: Če je $\mathbf{b}$ v stolpčnem prostoru $C(A)$, ga lahko zapišemo kot linearno kombinacijo stolpcev matrike A. Koeficienti te linearne kombinacije so rešitev $\mathbf{x}$ enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Velja tudi obratno: če je $\mathbf{x}$ rešitev sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, potem je vektor $\mathbf{b}$ linearna kombinacija stolpcev matrike A, torej leži v stolpčnem prostoru $C(A)$.

Primer 3.7 Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

je stolpčni prostor $C(A)$ množica vseh linearni kombinacij stolpcev matrike A

$$C(A) = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ker sta stolpca kolinearna, je to premica v smeri vektorja $\mathbf{a} = [1\ 2]^T$ skozi izhodišče $\mathbf{0}$.
Sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima rešitev le, če vektor $\mathbf{b}$ tudi leži na tej premici, to je takrat, kadar je $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$.
Za matriko

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

ki ima nekolinearna stolpca, je množica vseh linearnih kombinacij vsa ravnina, torej $C(B) = \mathbb{R}^2$, zato je sistem enačb $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv za vsak vektor $\mathbf{b}$.

Do podprostorov vektorskega prostora $\mathbb{R}^m$ pridemo lahko tudi brez matrike. Dovolj je, da v $\mathbb{R}^m$ izberemo nekaj vektorjev $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$. Množica vseh njihovih linearnih kombinacij

$$U = \{t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_p\mathbf{a}_p\}$$

je podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^m$. Rečemu mu *linearna lupina* vektorjev $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$. Prav tako rečemo, da vektorji $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ *napenjajo* podprostor U. Ko so $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ vsi stolpci matrike A, je podprostor U seveda stolpčni prostor $C(A)$.

3.1.3 Ničelni prostor matrike: rešujemo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

V tem razdelku nas bodo zanimale vse rešitve sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kjer je matrika A lahko kvadratna $n \times n$ ali pravokotna $m \times n$. Takemu sistemu enačb, kjer so na desni strani same ničle, pravimo *homogen* sistem. Homogen sistem enačb ima očitno vedno vsaj eno rešitev, to je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (*ničelna rešitev*).

Če je matrika A kvadratna in obrnljiva, je to edina rešitev. Za singularne matrike A pa ima sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tudi neničelne rešitve.

Rešitve homogenega sistema linearnih enačb imajo zanimivo in pomembno lastnost: če sta $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_2$ rešitvi sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, potem je tudi njuna poljubna linearna kombinacija $t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2$ rešitev istega sistema. Z drugimi besedami:

Izrek 3.6 *Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Množica rešitev homogenega sistema linearnih enačb je podprostor v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz: Naj bosta $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_2$ rešitvi homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, torej

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}\,.$$

Potem je, zaradi homogenosti in distributivnosti matričnega produkta,

$$A(t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2) = t_1 A\mathbf{x}_1 + t_2 A\mathbf{x}_2 = (t_1 + t_2)\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

ne glede na to, koliko sta t_1 in t_2, kar pomeni, da so vse linearne kombinacije rešitev homogenega sistema tudi rešitve istega homogenega sistema, kar je zaradi posledice 3.3 dovolj.

Podprostor, ki ga sestavljajo vse rešitve homogenega sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zasluži svoje ime:

Definicija 3.7 *Množica vseh rešitev sistema linearnih enačb* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *se imenuje ničelni prostor matrike* A*. Označimo ga z* $N(A)$*.*

Pozor! Ničelni prostor $N(A)$ za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$

Ker je rešitev homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, v primeru, ko je matrika A obrnljiva, ena sama, velja

Posledica 3.8 *Če je matrika* A *kvadratna in obrnljiva, potem* $N(A)$ *vsebuje samo vektor* $\mathbf{0}$*.*

Primer 3.8 Naj bo A singularna matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo njen ničelni prostor!
Poiskati moramo *vse* rešitve homogenega sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Začnemo z Gaussovo eliminacijo in po prvem koraku dobimo

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da imamo eno samo enačbo (in en sam pivot), saj je druga $0x + 0y = 0$ na izpolnjena za vsako vrednost x in y. Vrednost zadnje spremenljivke si torej lahko izberemo poljubno, prva je njen (-2)-kratnik, saj je prva enačba $x + 2y = 0$.
Iz vrstične slike (razdelek 2.1.1) lahko ugotovimo, da je rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ premica $y = -x/2$, kar je tudi iskani ničelni prostor $N(A)$.

Zgornji primer je dovolj enostaven, da nimamo težav pri opisu ničelnega prostora. Kako pa opišemo ničelni prostor za večje matrike? Stolpčni prostor matrike smo opisali tako, da smo vsem stolpcem dodali še vse njihove linearne kombinacije. Podobno bi radi opisali tudi ničelni prostor, vendar za to potrebujemo nekaj vektorjev (*ogrodje podprostora*), katerih linearne kombinacije bodo sestavljale cel ničelni prostor.

V primeru 3.8 je potreben samo en vektor, $\mathbf{u} = [-2\ 1]^T$, vse ostale rešitve sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pa so mnogokratniki te rešitve $\mathbf{x} = t\mathbf{u}$.

Primer 3.9 Poiščimo še ničelni prostor matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Začnimo, kot ponavadi, z Gaussovo eliminacijo. Potrebni so trije koraki

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Končni rezultat eliminacije je matrika z dvema pivotoma. Stolpec oziroma vrstico, v kateri je pivot, imenujemo *pivotni stolpec* oziroma *pivotna vrstica*, stolpec oziroma vrstico brez pivota pa imenujemo *prosti stolpec* oziroma *prosta vrstica*. Vsakemu stolpcu matrike v sistemu linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pripada svoja neznanka. Neznanke, ki pripadajo pivotnim stolpcem, bomo imenovali *pivotne neznanke*, neznanke, ki pripadajo prostim stolpcem, pa *proste neznanke*.

Proste neznanke so tiste, ki jim lahko prosto izberemo vrednost. Ko izberemo vrednost prostih neznank, so vrednosti pivotnih neznank enolično določene. Da bi bila končna rešitev čim enostavnejša, bomo za vrednosti prostih neznank izbirali le vrednosti 0 in 1 in sicer za vsak vektor iz ogrodja ničelnega prostora bomo eni prosti neznanki izbrali vrednost 1 in ostalim vrednost 0. Z vsako izbiro prostih neznank dobimo eno rešitev homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Te rešitve bomo imenovali *posebne rešitve*. Vektor, ki ima za komponente vrednosti posebnih rešitev, je element ničelnega prostora $N(A)$. Vsi vektorji, ki pripadajo posebnim rešitvam, sestavljajo ogrodje ničelnega prostora, ves ničelni prostor pa sestavljajo vse linearne kombinacije posebnih rešitev.

Linearna kombinacija dveh ali več rešitev homogenega sistema je, zaradi izreka 3.6, spet rešitev istega homogenega sistema. Če vzamemo vse linearne kombinacije vseh posebnih rešitev iz prejšnjega odstavka, dobimo vse rešitve homogenega sistema. Zato bomo linearno kombinacijo vseh posebnih rešitev imenovali *splošna rešitev* homogenega sistema. Tako je ničelni prostor $N(A)$ matrike A enak splošni rešitvi homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Lahko ga opišemo tudi tako, da vse posebne rešitve zložimo kot stolpce v matriko X, ki ji rečemo *matrika ničelnega prostora*. Ničelni prostor matrike A je tako enak stolpčnemu prostoru matrike ničelnega prostora $N(A) = C(X)$.

Nadaljevanje primera 3.9 Ker iščemo ničelni prostor matrike, moramo (glej definicijo 3.7) izračunati rešitev homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ker sta tretji in četrti stolpec matrike prosta, sta prosti neznanki x_3 in x_4. Najprej izberemo za njuni vrednosti $x_3 = 1$ in $x_4 = 0$, od koder iz druge enačbe $x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ dobimo vredost (pivotne) neznanke $x_2 = -1$ ter nazadnje iz prve enačbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ še vrednost (pivotne) neznanke $x_1 = 0$. Tako smo dobili prvi vektor iz ogrodja ničelnega prostora $\mathbf{x} = [0 \ -1 \ 1 \ 0]^T$.
Drugi vektor bomo dobili z drugo izbiro vrednosti prostih neznank. Tokrat bomo izbrali $x_3 = 0$ in $x_4 = 1$. Iz druge enačbe dobimo, da mora biti $x_2 = -2$ ter iz prve enačbe $x_1 = 1$. Drugi vektor iz ogrodja ničelnega prostora je tako $\mathbf{y} = [1 \ -2 \ 0 \ 1]^T$.
Tako smo dobili obe posebni rešitvi. Splošna rešitev sestavljajo vse linearne kombinacije posebnih rešitev, to pa je tudi ničelni prostor $N(A)$

$$N(A) = \{c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ugotovili smo (izrek 3.6), da vse rešitve homogenega sistema linearnih enačb

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sestavljajo podprostor v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$. Poglejmo še, kako je z rešitvami nehomogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Najprej primer.

Primer 3.10 Naj bo A singularna matrika iz primera 3.8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

in vektor $\mathbf{b} = [-3\ 6]^T$ desna stran sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Poiščimo splošno rešitev.
Začnemo z Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki in po prvem koraku dobimo

$$\left[\begin{array}{rr|r} \boxed{1} & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|r} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Imamo eno samo neničelno vrstico, en pivotni in en prosti stolpec, neznanka x_1 je pivotna, x_2 pa prosta. Za vrednost proste neznanke izberemo $x_2 = c$ in s tem je vrednost pivotne neznanke določena. Iz prve enačbe $x_1 + 2x_2 = -3$ dobimo $x_1 = -2c - 3$. V vektorski obliki je rešitev

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 - 2c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Množica rešitev (3.1) za vse $c \in \mathbb{R}$ ne sestavlja vektorskega prostora ker (vsak od naslednjih razlogov je sam po sebi zadosten za to trditev):

- Ne vsebuje vektorja $\mathbf{0}$;
- Vsota dveh rešitev (3.1) ni rešitev;
- Produkt rešitve s katerimkoli številom $t \neq 1$ ni rešitev.

Tako vidimo, da rešitve nehomogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ niso vektorski podprostor, za razliko od rešitev homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ki so vektorski podprostor (ničelni prostor $N(A)$).

3.2 Pravokotni homogeni sistemi linearnih enačb

V tem razdelku si bomo ogledali rešitve sistemov linearnih enačb, pri katerih število enačb ni enako številu neznank. Naučili se bomo tudi čim učinkoviteje izračunati rešitve teh sistemov enačb. Ob tem bomo pozorni, kaj se dogaja s stolpčnim in ničelnim prostorom matrike sistema.

3.2.1 Stopničasta oblika matrike

Matrika A naj bo pravokotna $m \times n$. Kadar delamo Gaussovo eliminacijo nad pravokotno matriko A seveda ne moremo pričakovati, da bo končna matrika U zgornjetrikotna. Če je na pivotnem mestu ničla in pod njo ni primernega pivota, z eliminacijo nadaljujemo v naslednjem stolpcu.

Primer 3.11 Poglejmo, kaj nam prinese Gaussova eliminacija na matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tudi tokrat bomo pivote poudarili s kvadrati. Dobimo

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Vse tri vrstice so pivotne vrstice, prvi, tretji in četrti stolpec so pivotni stolpci, drugi in zadnji stolpec pa sta prosta.

Namesto zgornjetrikotne oblike matrike, kot smo jo srečali pri obrnljivih matrikah, imamo kot končni rezultat pri pravokotnih matrikah *stopničasto obliko*.

Definicija 3.9 *Matrika ima* stopničasto obliko*, kadar se vsaka od njenih vrstic začne z vsaj eno ničlo več kot prejšnja vrstica.*

Prvi element, različen od nič v vsaki vrstici, je pivot. Število pivotov v matriki je pomembno za število rešitev sistema enačb, kot tudi za velikost stolpčnega in ničelnega prostora matrike, zato zasluži posebno ime.

Definicija 3.10 *Število pivotov v matriki se imenuje* rang matrike*.*
Rang matrike A zapišemo $\mathrm{rang}(A)$*.*

Izrek 3.11 *Rang matrike ni večji od števila vrstic in ni večji od števila stolpcev matrike.*

Dokaz: Rang matrike je enak številu pivotov. Pivot pa je v vsaki vrstci ali stolpcu kvečjemu eden.

Poglejmo še, kako lahko poiščemo ničelni prostor pravokotne matrike:

Primer 3.12 Poiščimo ničelni prostor $N(A)$ za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

iz primera 3.11. Stopničasto obliko matrike A smo že izračunali

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrika A ima rang 3. Prosti neznanki sta x_2 in x_5. Njuni vrednosti določimo najprej kot $x_2 = 1$ in $x_5 = 0$ ter z obratnim vstavljanjem (podrazdelek 2.2) izračunajmo vrednosti pivotnih neznank $x_4 = 0$, $x_3 = 0$ in $x_1 = -3/2$.
Če pa za vrednosti prostih neznank izberemo $x_2 = 0$ in $x_5 = 1$, dobimo za pivotne neznanke $x_4 = -1$, $x_3 = -2$ in $x_1 = 7/2$.
Ogrodje ničelnega prostora tako sestavljata nekolinearna vektorja $\mathbf{x}_1 = [-3/2\ 1\ 0\ 0\ 0]^T$ in $\mathbf{x}_2 = [7/2\ 0\ -2\ -1\ 1]^T$, ničelni prostor pa sestavljajo vse njune linearne kombinacije (definicija 1.5)

$$N(A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ker pri Gaussovi eliminaciji delamo samo vrstične operacije, to so operacije, ki ohranjajo rešitve sistema linearnih enačb, se ohranja tudi ničelni prostor matrike. Tako ima začetna matrika A isti ničelni prostor kot končna stopničasta matrika U, ki jo dobimo po koncu Gaussove eliminacije. Ničelni prostor $N(A)$ zato dobimo kot linearno kombinacijo posebnih rešitev homogenega sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ker posebne rešitve dobimo tako, da vsakič eni prosti nezanki damo vrednost 1, ostalim pa vrednost 0, imamo toliko posebnih rešitev, kot je prostih neznank. Ker pa so proste neznanke vse razen pivotnih, ki jih je $r = \mathrm{rang}(A)$, je število prostih neznank enako $n - r$, to je razlika med številom vseh neznank (številom stolpcev matrike A) in rangom matrike A. S tem smo dokazali

Izrek 3.12

$$\textit{Število prostih neznank} = \textit{število stolpcev} - \textit{rang matrike}$$

Nasprotno od ničelnega prostora pa se stolpčni prostor matrike pri Gaussovi eliminaciji ne ohranja. Poglejmo si to na primeru:

Primer 3.13 Matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
ima stolpčni prostor
$$C(A) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$
to so vektorji, ki imajo enaki prvo in zadnjo komponento. Matrika U po Gaussovi eliminaciji
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$
pa ima stolpčni prostor
$$C(U) = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$
to so vektorji, ki imajo zadnjo komponento enako 0. Očitno $C(A) \neq C(U)$.

3.2.2 Reducirana stopničasta oblika

Iz stopničaste oblike lahko naredimo še en korak. Podobno kot smo v podrazdelku 2.3.2 z Gauss-Jordanovo eliminacijo iz polne matrike prek zgornjetrikotne oblike prišli do diagonalne matrike, lahko iz stopničaste oblike pridemo do *reducirane stopničaste oblike*. To naredimo v dveh korakih:

1. pivotne vrstice delimo s pivotom, da so na koncu vsi pivoti enaki 1,

2. z odštevanjem mnogokratnika pivotne vrstice od višje ležečih vrstic dosežemo, da so vsi elementi nad pivoti enaki 0.

Primer 3.14 V primeru 3.11 smo pravokotno matriko A že preoblikovali v stopničasto obliko

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \end{bmatrix} = U\,,$$

sedaj pa transformacijo nadaljujemo do reducirane stopničaste oblike. Najprej vsako vrstico delimo s svojim pivotom (prvo in tretjo vrstico z 2, v drugi je pivot že enak 1)

$$U \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3/2 & 2 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

nato pa eliminiramo še elemente nad pivoti. Najprej od druge vrstice odštejemo 3-kratnik tretje vrstice

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3/2 & 2 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

nato pa od prve vrstice odštejemo 2-kratnik druge vrstice in 2.5-kratnik zadnje vrstice

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3/2 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} = R\,.$$

V reducirani stopničasti matriki R imajo pivotni stolpci 1 na pivotnem mestu, drugod same 0. Še več: kvadratna matrika, sestavljena iz samo pivotnih stolpcev in pivotnih vrstic, je enotska matrika reda r, kjer je $r = \mathrm{rang}(A)$. Ker je število pivotov v prvotni matriki A, stopničasti matriki U in reducirani stopničasti matriki R enako, imajo vse te matrike isti rang r.

Če je rang r matrike manjši od števila vrstic m, imata stopničasta oblika U in reducirana stopničasta oblika R zadnjih $m - r$ vrstic sestavljenih iz samih ničel, kar pomeni, da se te vrstice v prvotni matriki dajo zapisati kot linearna kombinacija pivotnih vrstic. V sistemu linearnih enačb so enačbe, ki ustrezajo ničelnim vrsticam v stopničasti obliki razširjene matrike, linearna kombinacija prejšnjih enačb in zato pravzaprav odveč.

Podobno velja za stolpce matrike: proste stolpce v prvotni matriki lahko vedno zapišemo kot linearno kombinacijo pivotnih stolpcev. Nobenega od pivotnih stolpcev pa ne moremo zapisati kot linearno kombinacijo ostalih pivotnih stolpcev.

Posebne rešitve in reducirana stopničasta oblika

Do reducirane stopničaste oblike matrike A smo prišli v dveh korakih. Najprej smo matriko A z Gauusovo eliminacijo preoblikovali v stopničasto obliko U, nato pa smo po delitvi pivotnih vrstic s pivoti in eliminaciji elementov nad pivoti izračunali reducirano stopničasto obliko R. Iz te oblike zlahka preberemo posebne rešitve sistema $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Zaradi enostavnosti razlage vzemimo, da je prvih r stolpcev matrike R pivotnih[1]. Potem reducirano stopničasto obliko lahko zapišemo v bločni obliki kot

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

kjer je I enotska matrika reda r, matrika F dimenzije $r \times n - r$, ničelni matriki pa imata $m - r$ vrstic ter n in $n - r$ stolpcev. V bločni obliki lahko zapišemo homogen sistem enačb

$$\begin{bmatrix} I & F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{pivotne neznanke} \\ \text{proste neznanke} \end{bmatrix},$$

kar lahko zapišemo tudi kot

$$I \begin{bmatrix} \text{pivotne} \\ \text{neznanke} \end{bmatrix} = -F \begin{bmatrix} \text{proste} \\ \text{neznanke} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Za vrednosti prostih neznank izberemo vsakič eno 1 in ostale 0. Če vse izbire po stolpcih zložimo v matriko, je to enotska matrika: [proste neznanke] $= I$. Vstavimo v sistem (3.2) pa imamo

$$I \begin{bmatrix} \text{pivotne} \\ \text{neznanke} \end{bmatrix} = -FI\,,$$

od koder takoj dobimo

$$[\text{pivotne neznanke}] = -F\,.$$

Če si za vrednosti prostih neznank izberemo zaporedoma stolpce enotske matrike reda $n - r$, so ustrezne vrednosti pivotnih neznank zaporedoma stolpci matrike $-F$. Celotno rešitev torej lahko zapišemo kot matriko ničelnega prostora

$$X = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} r & \text{pivotnih neznank} \\ n - r & \text{prostih neznank} \end{matrix}\,. \tag{3.3}$$

[1] Če so med pivotne stolpce pomešani prosti stolpci, lahko s preureditvijo vrstnega reda neznank dosežemo, da so vse pivotne nezananke pred vsemi prostimi. S tem bodo tudi vsi pivotni stolpci pred vsemi prostimi.

Če smo menjali vrsti red neznank (stolpcev v matriki), da smo dobili vse pivotne stolpce levo od vseh prostih, moramo sedaj spraviti neznanke v prvotni vrstni red tako, da ustrezno zamenjamo vrstice matrike X. Stolpci matrike X tako postanejo posebne rešitve homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Splošna rešitev homogenega sistema so vse linearne kombinacije posebnih rešitev, torej stolpčni prostor $C(X)$ matrike ničelnega prostora X.

Primer 3.15 V primeru 3.12 smo ničelni prostor matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

poiskali tako, da smo matriko A najprej z Gaussovo eliminacijo preoblikovali v stopničasto obliko, sistematično izbrali za vrednosti prostih neznank stolpce enotske matrike in z obratnim vstavljanjem dobili $N(A)$.
Za isto matriko smo v primeru 3.14 izračunali reducirano stopničasto obliko

$$R = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3/2 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi v matriki R pivotne stolpce postavili pred proste, moramo neznanke $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]$ preurediti v $[x_1\ x_3\ x_4\ x_2\ x_5]$, s tem se tudi vrstni red stolpcev v matriki R spremeni v

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3/2 & -7/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prvi trije (pivotni) stolpci sestavljajo enotsko matriko, zadnja dva (prosta) pa matriko F. Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 7/2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi dobili rešitev kot v primeru 3.12, moramo le še urediti spremenljivke v pravi vrstni red, kar dosežemo, če predzadnjo vrstico prestavimo takoj za prvo vrstico, tako da je matrika ničelnega prostora

$$X = \begin{bmatrix} -3/2 & 7/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

To lahko preverimo tako, da izračunamo produkt RX.

Poglejmo si še en primer.

Primer 3.16 Tokrat poiščimo ničelni prostor (torej rešitve homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 5 & 8 & 13 \\ 6 & 11 & 17 \end{bmatrix}.$$

Najprej izračunamo stopničasto obliko U, potem pa še reducirano stopničasto obliko R

$$\underset{A \longrightarrow}{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 5 & 8 & 13 \\ 6 & 11 & 17 \end{bmatrix}} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \underset{U \longrightarrow}{\begin{bmatrix} \boxed{2} & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \longrightarrow \underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Rang matrike je enak 2, torej imamo 2 pivotni in eno prosto neznanko. Posebno rešitev lahko izračunamo (kot v primeru 3.12) iz stopničaste oblike U z obratnim vstavljanjem ali pa (kot v primeru 3.15) iz reducirane stopničaste oblike R. V obeh primerih dobimo isto matriko ničelnega prostora

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Nehomogeni pravokotni sistemi

Nehomogeni sistemi linearnih enačb se nekoliko razlikujejo od homogenih sistemov. Medtem ko je ničelni vektor $\mathbf{0}$ vedno rešitev homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ničelni vektor nikoli ni rešitev nehomogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Prav tako linearna kombinacija dveh rešitev nehomogenega sistema ni rešitev tega nehomogenega sistema enačbe, kar pomeni, da rešitve nehomogenega sistema enačb niso vektorski podprostor. Še več: nehomogen sistem mogoče sploh nima rešitve. To se zgodi (glej izrek 3.5) natanko tedaj, kadar desna stran $\mathbf{b} \notin C(A)$.

Vsekakor je pametno matriko sistema preoblikovati v stopničasto obliko, to pomeni, da bomo pri reševanju sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uporabili Gaussovo eliminacijo. Za razliko od homogenega sistema, kjer imamo na desni strani ničle in nam ni treba skrbeti zanje, saj vemo, da se med Gaussovo eliminacijo ne bodo spreminjale, moramo pri nehomogenih sistemih iste operacije, kot jih izvajamo nad vrsticami matrike, izvajati tudi nad desnimi stranmi. To pomeni, da je pametno Gaussovo eliminacijo narediti nad razširjeno matriko $[A|\mathbf{b}]$.

Če je $\mathbf{b} \in C(A)$, je linearni sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv. Ima lahko eno samo rešitev (pravimo, da je sistem *enolično rešljiv*) ali pa neskončno rešitev. *Splošna rešitev* nehomogenega sistema vsebuje nič ali več parametrov tako, da lahko z vsemi možnimi vrednostmi parametrov dobimo vse rešitve sistema. *Partikularna rešitev* je ena izmed rešitev, torej (fiksni) vektor $\mathbf{x}_p$, da je $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$.

Poglejmo si najprej na primeru, kako lahko izračunamo rešitve nehomogenega sistema linearnih enačb.

Primer 3.17 Izračunajmo rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 11x_5 &= 8 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 9 \end{aligned}$$

Najprej naredimo Gaussovo eliminacijo nad razširjeno matriko

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -8 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

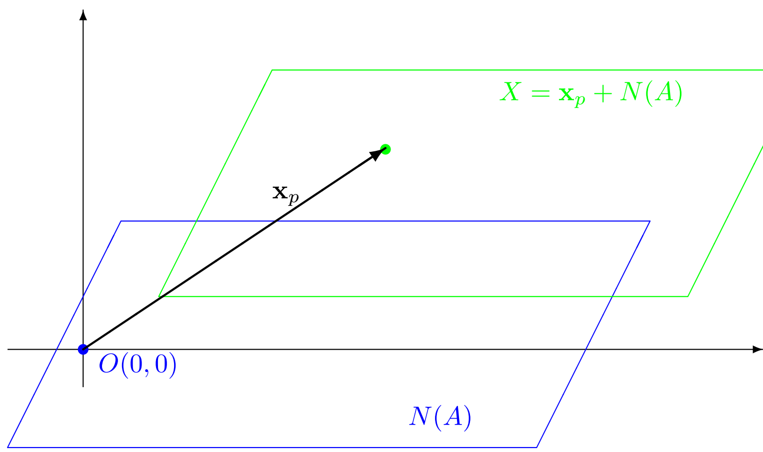
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & -3 \end{array}\right] = U\,.$$

Zadnja neznanka je prosta, zato njeno vrednost lahko poljubno izberemo, na primer $x_5 = c_1$. Iz zadnje enačbe lahko izračunamo $x_4 = -3/2 - c_1$, iz predzadnje pa $x_3 = 11/2 - 2c_1$. Neznanka x_2 je prosta, zato njeno vrednost lahko poljubno izberemo, na primer $x_2 = c_2$. Ostane še prva enačba, iz katere izračunamo $x_1 = 15/4 + 7c_1/2 - 3c_2/2$.
Rešitev zapišimo še v vektorski obliki

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -15/4 + 7c_1/4 - 3c_2/2 \\ c_2 \\ 11/2 - 2c_1 \\ -3/2 - c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15/4 \\ 0 \\ 11/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Splošna rešitev je sestavljena iz dveh delov. Prvi del splošne rešitve je vektor $[-15/4\ 0\ 11/2\ \ -3/2\ 0]^T$, ki je sam po sebi rešitev zgornjega nehomogenega sistema enačb (preveri!). Drugi del rešitve pa je linearna kombinacija dveh posebnih rešitev homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (tudi to preveri!).

Vzorec, ki smo ga opazili v primeru 3.17, velja pri vseh sistemih linearnih enačb.



Slika 3.2: Splošna rešitev (zelena ravnina) nehomogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je ničelni prostor (modra ravnina) $N(A)$, premaknjen za partikularno rešitev $\mathbf{x}_p$

Izrek 3.13 *Splošna rešitev X nehomogenega sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je vsota* partikularne rešitve $\mathbf{x}_p$ *nehomogenega sistema in splošne rešitve $N(A)$ homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (slika 3.2)*

$$X = \mathbf{x}_p + N(A)\,.$$

Dokaz: Naj bo $\mathbf{x}_p$ neka rešitev nehomogene enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in $N(A)$ ničelni postor matrike A. Potem je za vsak $\mathbf{x}_h \in N(A)$ tudi $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ rešitev enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, saj je

$$A(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_h = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}\,.$$

Po drugi strani pa velja: če je $\mathbf{x}$ poljubna rešitev enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, je razlika $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ v ničelnem prostoru matrike A, saj je

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}\,,$$

torej lahko $\mathbf{x}$ zapišemo kot $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ za neki $\mathbf{x}_h \in N(A)$.

Omenili smo že, da rešitve nehomogenega sistema enačb niso vektorski podprostor. Iz izreka 3.13 pa lahko ugotovimo, da množica rešitev nehomogene enačbe ni daleč od vektorskega prostora: če vsem rešitvam odštejemo neko (fiksno) rešitev, dobimo ničelni prostor $N(A)$ (slika 3.2).

3.3.1 Razvrstitev enačb glede na dimenzijo in rang matrike

Za konec teme o sistemih linearnih enačb si poglejmo še, kako so rešitve sistema odvisne od števila enačb, števila neznank in od ranga matrike sistema.

Rešujemo sistrem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Matrika A naj ima m vrstic (sistem ima prav toliko enačb) in n stolpcev (sistem ima prav toliko neznank), njen rang pa naj bo $\text{rang}(A) = r$. Iz same definicije ranga matrike (definicija 3.10) smo že ugotovili (izrek 3.11), da za rang matrike veljata omejitvi $r \leq m$ in $r \leq n$.

Definicija 3.14

1. *Visoka in ozka matrika* ($m > n$) *ima* poln stolpčni rang, *kadar je* $\text{rang}(A) = n$;
2. *Nizka in široka matrika* ($m < n$) *ima* poln vrstični rang, *kadar je* $\text{rang}(A) = m$;
3. *Kvadratna matrika* ($n = m$) *ima* poln rang, *kadar je* $\text{rang}(A) = m = n$.

Poglejmo si vsakega od teh primerov posebej.

Sistemi polnega stolpčnega ranga

Izrek 3.15 *Za vsako matriko A s polnim stolpčnim rangom $r = n \leq m$, velja:*

1. *Vsi stolpci A so pivotni stolpci;*
2. *Sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nima prostih neznank, zato tudi nima posebnih rešitev;*
3. *Ničelni prostor $N(A)$ vsebuje le ničelni vektor $N(A) = \{\mathbf{0}\}$;*
4. *Kadar ima sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešitev (kar ni vedno res!), je rešitev* ena sama*;*
5. *Reducirana vrstična oblika matrike (A) se da zapisati kot*

$$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \times n \textit{ enotska matrika} \\ m - n \textit{ vrstic samih ničel} \end{bmatrix}.$$

Dokaz:

1. Če je $\text{rang}(A) = n$ (definicija 3.10), imamo n pivotov, torej n pivotnih stolpcev.

2. Ker je n pivotnih stolpcev, ni nobenega prostega stolpca, torej nobene proste neznanke. Tako tudi posebnih rešitev ni.

3. Ker ni posebnih rešitev, ima homogen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ le ničelno rešitev $\mathbf{0}$.

4. Splošna rešitev nehomogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je vsota partikularne rešitve nehomogenega sistema in splošne rešitve ustreznega homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (izrek 3.13). Ker ima homogen sistem le ničelno rešitev, ima nehomogen sistem kvečjemu eno rešitev.

5. Ker je n pivotov, je tudi n pivotnih vrstic in zato $m - n$ vrstic samih ničel. Preostanek matrike je obrnljiva matrika dimenzije $n \times n$, katere reducirana stopničasta oblika je enotska matrika.

Primer 3.18 Vzemimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Da bi ugotovili število pivotnih stolpcev (ali so res vsi?) začnimo z Gaussovo eliminacijo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & -5 \\ 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-5}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U\,.$$

   Res sta oba stolpca pivotna.

2. Prostih stolpcev ni.

3. Edina rešitev homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je ničelni vektor.

4. Za vektor desnih strani $\mathbf{b} = [4\ 3\ 7\ 9\ ]^T$ sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nima nobene rešitve (preveri!), za vektor $[4\ 3\ 8\ 10]^T$ pa je edina rešitev $\mathbf{x} = [1\ 1]^T$ (preveri!)

5. Izračunajmo še reducirano stopničasto obliko

$$U = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-5}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,.$$

Sistemi polnega vrstičnega ranga

Izrek 3.16 *Za vsako matriko A s polnim vrstičniim rangom $r = m \leq n$ velja:*

1. *Vse vrstice so pivotne, ni prostih vrstic in U (stopničasta oblika) in R (reducirana stopničasta oblika) nimata ničelnih vrstic.*
2. *Sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je rešljiv za vsak vektor $\mathbf{b}$.*
3. *Sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima $n - r = n - m$ prostih neznank, zato tudi prav toliko posebnih rešitev.*
4. *Stolpčni prostor $C(A)$ je ves prostor $\mathbb{R}^m$.*

Dokaz:

1. Če je $\text{rang}(A) = m$ (definicija 3.10), imamo m pivotov, torej m pivotnih vrstic. Nobena vrstica torej ni prosta in stopničasta oblika in reducirana stopničasta oblika ne moreta imeti vrstic s samimi ničlami.
2. Ker v stopničasti obliki U ni nobene ničelne vrstice, lahko ne glede na vrednosti desnih strani rešimo vse enačbe z obratnim vstavljanjem.
3. Ker je m pivotov, je tudi m pivotnih neznank, torej ostane $n-m$ prostih neznank. Ker posebne rešitve izbiramo tako, da je vedno ena od prostih neznank enaka 1, ostale pa 0, dobimo $n - m$ posebnih rešitev.
4. Ker je sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv za vsak vektor $\mathbf{b}$, lahko vsak vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ zapišemo kot kombinacijo stolpcev matrike A.

Ker je pri sistemih enačb s polnim vrstičnim rangom ($r = m < n$) enačb manj kot neznank in rešitev vedno obstaja, take sisteme imeujemo *poddoločeni sistemi*.

Primer 3.19 Naj bo A transponirana matrika iz primera 3.18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Poiščimo rešitve sistema enačb $A\mathbf{x} = [b_1\ b_2]^T$.

1. Naredimo Gaussovo eliminacijo (dovolj bo en korak) na razširjeni matriki

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & b_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|r} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & \boxed{\text{-5}} & -4 & -6 & b_1 - 3b_2 \end{array}\right].$$

   Imamo dva pivota, poln vrstični rang, dve pivotni vrstici in nobene proste. Stopničasta oblika nima nobene ničelne vrstice.

2. Rešitev sistema obstaja: za prosti spremenljivki lahko izberemo vrednosti $x_3 = 0$ in $x_4 = 0$. Iz zadnje enačbe $-5x_2 = b_1 - 3b_2$ izračunamo $x_2 = \frac{-b_1}{5} + \frac{3b_2}{5}$ in nato iz prve enačbe $x_1 + 2x_2 = b_1$ pa $x_1 = \frac{7b_1}{5} - \frac{6b_2}{5}$. Rešitev torej obstaja za vse vrednosti b_1 in b_2.

3. Eno posebno rešitev dobimo, če si izberemo vrednosti prostih spremenljivk $x_3 = 1$ in $x_4 = 0$, drugo pa za vrednosti $x_3 = 0$ in $x_4 = 1$. Splošno rešitev lahko bralec izračuna sam.

4. Stolpčni prostor matrike A je množica vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike A, vendar že vse linearne kombinacije prvih dveh stolpcev $[1\ 3]$ in $[2\ 1]$ pokrijejo celo ravnino $\mathbb{R}^2$, saj prva dva stolpca nista kolinearna.

Kvadratni sistemi polnega ranga

Izrek 3.17 *Za vsako kvadratno matriko A polnega ranga* ($\mathrm{rang}(A) = m = n$) *velja:*

1. *Reducirana vrstična oblika matrike A je enotska matrika.*
2. *Sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima natančno eno rešitev za vsak vektor desnih strani $\mathbf{b}$.*
3. *Matrika A je obrnljiva.*
4. *Ničelni prostor matrike A je samo ničelni vektor $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.*
5. *Stolpčni prostor matrike A je cel prostor $C(A) = \mathbb{R}^m$.*

Dokaz: Naj bo A kvadratna matrika reda n in $r = \mathrm{rang}(A) = n$.

1. Matrika A ima rang n, torej je n pivotov. Vsaki vrstici in v vsakem stolpcu je po en pivot. Z zamenjavo vrstic lahko dosežemo, da so pivoti na diagonali. Stopničasta oblika matrike je zgornjetrikotna (definicija 1.18), v reducirani stopničasti obliki so vsi pivoti enaki 1 in vsi elementi v matriki nad pivoti enaki 0.
2. Matrika ima poln vrstični rang, zato (izrek 3.16) ima sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vedno rešitev. Ker je matrika tudi polnega stolpčnega ranga (izrek 3.15), sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ne more imeti več kot eno rešitev. Torej ima vedno natanko eno rešitev.
3. Naj bo $\mathbf{e}_i$ i-ti stolpec enotske matrike. Ker imajo vsi sistemi enačb $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ natanko eno rešitev, za matriko $X = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \cdots \mathbf{x}_n]$ velja, da je AX enotska matrika, torej je X inverz matrike A, ki je zato obrnljiva.
4. Ker je A polnega stolpčnega ranga (izrek 3.15), ima sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ le ničelno rešitev.
5. Ker ima matrika A poln vrstični rang, je (izrek 3.15) stolpčni prostor $C(A)$ cel prostor $\mathbb{R}^m$.

Povzetek

Še enkrat na kratko poglejmo možnosti, ki jih imamo pri reševanju sistemov linearnih enačb. Kadar rešujemo sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, je število rešitev odvisno od števila enačb m, števila neznank n in ranga matrike r. Imamo v glavnem štiri možnosti:

1. $m = n = r$ matrika A je kvadratna in obrnljiva, polnega ranga, $C(A) = \mathbb{R}^m$ in $N(A) = \{\mathbf{0}\}$. To je najbolj pogost in zato zelo pomemben primer. Reducirana stopničasta oblika je $R = I$. Enačba $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima vedno natančno eno rešitev. Podrobno smo take sisteme obravnavali v 2. poglavju.

2. $r = m < n$ matrika je široka in nizka, polnega vrstičnega ranga, $C(A) = \mathbb{R}^m$. Reducirana stopničasta oblika je $R = [I\ F]$ (običajno je potrebno spremeniti vrstni red neznank, sicer so stolpci matrik I in F premešani). Enačba $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima vedno neskončno mnogo rešitev, dobimo jih kot vsoto partikularne rešitve in linearne kombinacije $n - r$ posebnih rešitev homogene enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Take sisteme smo podrobeje obravnavali v razdelku 3.3.

3. $r = n < m$ matrika je ozka in visoka, polnega stolpčnega ranga, $N(A) = \{\mathbf{0}\}$. Reducirana stopničasta oblika je $R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Enačba $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima eno rešitev ali pa nobene. Take sisteme smo podrobneje obravnavali v razdelku 3.2.

4. $r < n$ in $r < m$ matrika ni polnega ranga. To je teoretično najbolj splošen in najbolj redek primer. Reducirana stopničasta oblika je $R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (običajno je potrebno spremeniti vrstni red neznank, sicer so stolpci matrik I in F premešani). Enačba $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ni rešljiva ali pa ima neskončno mnogo rešitev, dobimo jih kot vsoto partikularne rešitve in linearne kombinacije $n - r$ posebnih rešitev homogene enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3.4 Linearna neodvisnost, baze, dimenzije

Ta razdelek je pomemben, ker bomo v njem odgovorili na vprašanje o "velikosti" vektorskih prostorov in podprostorov. Za dobro definicijo "velikosti" vektorskega prostora bomo potrebovali "neodvisne" vektorje. Ko bomo sestavljali "ogrodje" vektorskega prostora, to je množica vektorjev, ki napenjajo prostor, bomo neodvisnost potrebovali, da bo ogrodje "baza" prostora. številu vektorjev v bazi bomo rekli "dimenzija" prostora in to je dobra mera za velikost prostora.

3.4.1 Linearna neodvisnost vektorjev

Intuitivno bi lahko rekli, da so vektorji v množici $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ "neodvisni", kadar nobenega izmed njih ne moremo izraziti kot linearno kombinacijo ostalih vektorjev v tej množici. Da bi se izognili težavam z ničelnim vektorjem, pa je bolj korektna naslednja definicija.

Definicija 3.18 *Vektorji* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *so* linearno neodvisni*, če je*

$$0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \cdots + 0\mathbf{x}_n$$

edina njihova linearna kombinacija, ki je enaka vektorju $\mathbf{0}$*.*
Vektorji $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *so* linearno odvisni*, če niso linearno neodvisni.*

Z drugimi besedami: če so vektorji $\mathbf{x}_i,\ i = 1, \ldots, n$ linearno neodvisni, je

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

samo tedaj, ko so *vsi* skalarji α_i enaki nič.

Posledica 3.19 *Če so vektorji odvisni, lahko vsaj enega izrazimo z ostalimi.*

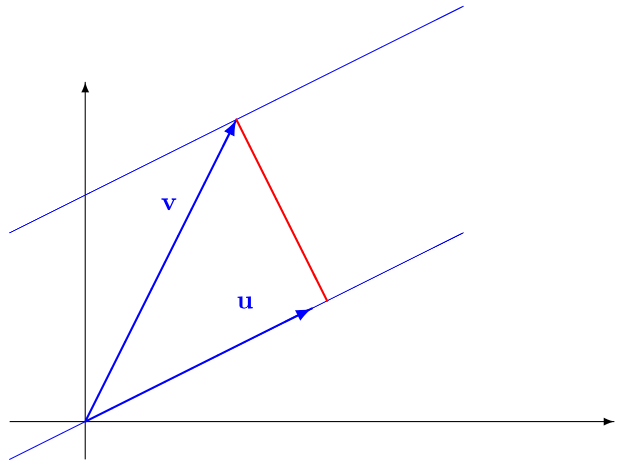
Dokaz: Če so vektorji $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno odvisni, potem obstaja vsaj ena njihova linearna kombinacija, da je

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}\,, \tag{3.4}$$

kjer niso vsi a_i enaki 0. Brez škode na splošnosti lahko predpostavimo, da je $a_1 \neq 0$. Potem lahko enačbo (3.4) delimo z a_1 in vektor $\mathbf{x}_1$ izrazimo z ostalimi

$$\mathbf{x}_1 = \frac{-a_2}{a_1}\mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\mathbf{x}_n\,.$$

Poglejmo si nekaj primerov linearno neodvisnih in linearno odvisnih vektorjev.



Slika 3.3: Če sta vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ iz prostora $\mathbb{R}^2$ nekolinearna, sta tudi linearno neodvisna

Primer 3.20 Najprej poglejmo vektorje v ravnini.

1. Naj bo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Ali sta vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}$ odvisna ali neodvisna?

   Ker je linearna kombinacija $2\mathbf{u} + -1\mathbf{v} = \mathbf{0}$, sta vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ odvisna.

2. Ali sta vektorja $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ in $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ linearno neodvisna?

   Ker je linearna kombinacija $0\mathbf{u} + c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ za vsak $c \in \mathbb{R}$, sta vektorja odvisna.

3. Naj bosta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ dva nekolinearna vektorja v prostoru $\mathbb{R}^2$. Ali sta linearno odvisna ali neodvisna (slika 3.3)?

   Koliko sta lahko koeficienta linearne kombinacije $\mathbf{a} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$, da bo enaka $\mathbf{a} = \mathbf{0}$? Ker je dolžina vektorja $x_2\mathbf{v}$ sorazmerna oddaljenosti vektorja $\mathbf{a}$ od premice, na kateri leži vektor $\mathbf{u}$, vektor $\mathbf{0}$ pa leži na tej premici, mora biti $x_2 = 0$, kar pomeni, da je $\mathbf{a} = x_1\mathbf{u}$. Sedaj je pa jasno, da mora biti tudi $x_1 = 0$. Linearna kombinacija dveh nekolinearnih vektorjev v $\mathbb{R}^2$ je torej enaka $\mathbf{0}$ samo če sta oba koeficienta linearne kombinacije enaka 0, torej sta vektorja neodvisna.

4. Vektorji $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ naj bodo iz $\mathbb{R}^2$in naj ne ležijo na isti premici. Ali so lahko linearno neodvisni?

   Tri vektorje zložimo v stolpce matrike A

   $$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

   pa lahko linearno kombinacijo treh vektorjev zapišemo kot produkt matrike A z vektorjem koeficientov linearne kombinacije

   $$x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = A\mathbf{x}\,.$$

   Vektorji so linearno neodvisni, kadar ima edina njihova kombinacija, ki je enaka vektorju $\mathbf{0}$ vse koeficiente x_i enake 0 (definicija 3.18), kar pomeni, da mora sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ samo ničelno rešitev, torej mora imeti matrika A v ničelnem prostoru le vektor $\mathbf{0}$. Vendar ima matrika A tri stolpce in le dve vrstici, torej je njen rang kvečjemu 2 (izrek 3.11). Zato ima vsaj en prosti stolpec in sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ima neničelne rešitve. Zato trije vektorji v $\mathbb{R}^2$ ne morejo biti neodvisni.

Iz prve točke primera 3.20 lahko sklepamo, da sta dva kolinearna vektorja vedno linearno odvisna, pa tudi večja množica vektorjev je linearno odvisna, kadar vsebuje par kolinearnih vektorjev. Iz 3. točke pa lahko ugotovimo, da sta dva nekolinearna vektorja linearno neodvisna. Zanimiva posledica druge točke pa je

Izrek 3.20 *Če je med vektorji $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tudi ničelni vektor, so vektorji linearno odvisni.*

Dokaz: V linearni kombinaciji vektorjev, med katerimi je tudi ničelni vektor, je lahko koeficient pri $\mathbf{0}$ različen od 0, vsi ostali pa enaki 0, da dobimo rezultat $\mathbf{0}$, torej so vektorji odvisni.

Tudi zadnjo točko primera 3.20 lahko posplošimo.

Izrek 3.21 *Vsaka množica n vektorjev iz $\mathbb{R}^m$ je odvisna, kadar je $n > m$.*

Dokaz: n vektorjev iz $\mathbb{R}^m$ lahko po stolpcih zložimo v matriko A reda $m \times n$, $m < n$. Sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ima rang manjši od n, zato (izrek 3.12) ima $n - \mathrm{rang}(A) > 0$ prostih neznank, torej ima neničelne rešitve. Zato je tudi linearna kombinacija $A\mathbf{x}$ stolpcev matrike A lahko enaka $\mathbf{0}$, ne da bi bili vsi koeficienti x_i enaki 0.

V dokazu izreka 3.21 smo vektorje kot stolpce zložili v matriko. Pogosto pa ravnamo tudi obratno: na stolpce matrike gledamo kot na vektorje. Tako smo spotoma dokazali tudi

Posledica 3.22 *Stolpci matrike A so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ima homogena enačba $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ edino rešitev $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Ker poznamo lastnosti matrik s polnim stolpčnim rangom (izrek 3.15), lahko z lahkoto preverimo tudi, da velja

Posledica 3.23 *Kadar je $\operatorname{rang}(A) = n$, so stolpci matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ linearno neodvisni.*
Kadar je $\operatorname{rang}(A) < n$, so stolpci matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ linearno odvisni.

Podobno kot velja za vrstice, velja tudi za stolpce matrike.

Posledica 3.24 *Kadar je $\operatorname{rang}(A) = m$ so vrstice matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ linearno neodvisne.*
Kadar je $\operatorname{rang}(A) < m$ so vrstice matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ linearno odvisne.

Dokaz: Posledico 3.23 uporabimo na matriki A^T.

3.4.2 Vektorji, ki napenjajo podprostor

Naj bodo vektorji $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ iz vektorskega prostora V. Vprašamo se lahko, kateri podprostor prostora V je "najmanjši" podprostor, ki vsebuje vse vektorje $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Že v podrazdelku 3.1.2 smo zapisali, da množica vektorjev $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ napenja vektorski prostor U natanko tedaj, ko je vsak vektor iz U linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Vektorji, ki napenjajo podprostor so *ogrodje* podprostora U, podprostor U pa je linearna lupina vektorjev $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Tako stolpci matrike A razpenja stolpčni prostor $C(A)$. Podobno lahko definiramo tudi za vrstice matrike.

Definicija 3.25 Vrstični prostor matrike A je podprostor v $\mathbb{R}^n$, ki ga razpenjajo vrstice matrike A.

Posledica 3.26 *Vrstični prostor matrike A je $C(A^T)$, stolpčni prostor matrike A^T.*

Dokaz: Vrstice matrike A so stolpci matrike A^T.

Vrstični prostor $C(A^T)$ matrike A je torej množica vseh linearnih kombinacij vrstic matrike A, ko jih zapišemo kot (stolpčne) vektorje.

3.4.3 Baza vektorskega prostora

Koncepta, ki smo ju srečali v prejšnjih dveh razdelkih, sta si deloma v nasprotju. Množica neodvisnih vektorjev bo še vedno neodvisna, tudi če ji kakšen vektor odvzamemo. Nasprotno pa lahko postane odvisna, če ji vektor dodamo. Torej je za neodvisnost bolje, da imamo čim manj vektorjev. Nasprotno pa, če množici vektorjev, ki napenja podprostor, kakšen vektor odvzamemo, mogoče ne bo več napenjala celega podprostora. Nič pa ne škodi, če ji dodamo kakšen vektor iz podprostora.

Primer 3.21 Dva vektorja ne moreta napenjati prostora $\mathbb{R}^3$; tudi če sta neodvisna, določata samo ravnino v $\mathbb{R}^3$. Po drugi strani štirje vektorji, tudi če napenjajo prostor $\mathbb{R}^3$, ne morejo biti neodvisni. V tem prostoru je najmanjše ogrodje, ki ga sestavljajo trije linearno neodvisni vektorji.

Definicija 3.27 Baza vektorskega prostora *je množica vektorjev, ki*

1. *je linearno neodvisna in*
2. *napenja cel prostor.*

Kombinacija teh dveh lastnosti je v linearni algebri ključna. Vsak vektor $\mathbf{x}$ iz vektorskega prostora V je linearna kombinacija baznih vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, ker bazni vektorji napenjajo cel prostor V. Velja še več: zaradi linearne neodvisnosti baznih vektorjev je taka linaearna kobinacija ena sama.

Posledica 3.28 *Vsak vektor iz vektorskega prostora lahko na en sam način izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.*

Dokaz: Naj bo $\mathbf{x}$ vektor iz vektorskega prostora V, v katerem so vektorji $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ baza. Ker so baza, je vsak vektor iz V, tudi $\mathbf{x}$, njihova linearna kombinacija, na primer

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n\,.$$

Vzemimo, da lahko vektor $\mathbf{x}$ zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\mathbf{v}_i$ še na kak drug način, na primer

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n\,.$$

Če ti dve enačbi odštejemo, dobimo

$$\mathbf{0} = (c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n\,,$$

kar pa pomeni, ker so bazni vektorji linearno neodvisni, da so vsi koeficienti $c_i - d_i$ enaki 0, torej so vsi $c_i = d_i$, zato je razvoj po baznih vektorjih en sam.

Kako dobiti bazo vektorskega prostora?

Primer 3.22 Poiščimo baze prostorov $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$:

1. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$ vektorjev v ravnini sta baza vektorja

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Tudi v prostoru $\mathbb{R}^3$ je enostavno poiskati bazne vektorje

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

V vsakem prostoru $\mathbb{R}^n$ je najbolj običajna baza (ne pa edina) sestavljena iz stolpcev enotske matrike. Taki bazi pravimo *standardna baza*.

Kako pa lahko preverimo, če je neka množica vektorjev baza? Odgovor nam daje naslednji izrek.

Izrek 3.29 *Vektorji $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ so baza prostora $\mathbb{R}^n$ natanko tedaj, kadar je matrika, sestavljena iz stolpcev $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, obrnljiva.*

Dokaz: Naj bo A obrnljiva matrika. Stolpci matrike A so linearno neodvisni, ker je edina rešitev sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ničelni vektor $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Stolpci tudi napenjajo cel prostor $\mathbb{R}^n$, ker je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešljiv za vsak $\mathbf{b}$.

Posledica 3.30 *Prostor $\mathbb{R}^n$ ima za $n > 0$ neskončno mnogo različnih baz.*

Poglejmo še nekaj baz različnih vektorskih podprostorov.

Primer 3.23

- Stolpci enotske matrike so baza (standardna baza) prostora $\mathbb{R}^n$;
- Pivotni stolpci matrike A so baza stolpčnega prostora $C(A)$;
- Pivotne vrstice matrike A so baza vrstičnega prostora $C(A^T)$;
- Baza vrstičnega prostora matrike A so tudi pivotne vrstice njene reducirane stopničaste oblike R.

Kako poiskati bazo podprostora, ki ga napenja množica vektorjev? Poglejmo kar na primeru.

Primer 3.24 Oglejmo si naslednji problem: imamo n vektorjev iz prostora $\mathbb{R}^m$. Kako poiščemo bazo podprostora, ki ga ti vektorji napenjajo?
Dani naj bodo vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Iščemo bazo linearne lupine (najmanjšega podprostora, ki vsebuje vse štiri vektorje).
Pravzaprav iščemo bazo stopčnega prostora $C(A)$ matrike A, katere stolpci so ti vektorji. Bazni vektorji stolpčnega prostora so pivotni stolpci (ker so pivotni stolpci med seboj neodvisni in ker proste stolpce lahko zapišemo kot linearno kombinacijo pivotnih stolpcev), zato matriko A v Gaussovo eliminacijo preoblikujemo v stopničasto obliko

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pivotna stolpca sta prvi in drugi, baza podprostora sta vektorja $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_2$.

3.4.4 Dimenzija vektorskega prostora

Ugotovili smo že, (posledica 3.30) da ima vsak vektorski prostor, razen prostora, ki vsebuje le vektor $\mathbf{0}$, veliko baz, vendar velja

Izrek 3.31 *Če sta množici vektorjev* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *in* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *obe bazi istega vektorskega prostora, potem je* $m = n$.
Povejmo še drugače: vse baze istega vektorskega prostora imajo isto število vektorjev.

Dokaz: Denimo, da imamo v vektorskem prostoru V dve bazi, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ in $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tako, da je $n > m$. Pokazali bomo, da nas taka predpostavka pripelje do protislovja.
Ker vektorji $\mathbf{v}_i$ sestavljajo bazo, lahko vektor $\mathbf{u}_1$ vapišemo kot njihovo linearno kombinacijo $\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m1}\mathbf{v}_m$, to je prvi stolpec matričnega produkta VA

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \ldots \ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \ldots \ \mathbf{v}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = VA\,.$$

Ostali stolpci so linearne kombinacije, ki so enake ostalim vektorjem $\mathbf{u}_i$. Matrika A ima torej več stolpcev kot vrstic, zato ima sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ rešitve $\mathbf{x}$, različne od $\mathbf{0}$. Vzemimo eno tako rešitev in izračunajmo $VA\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kar je isto kot $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kar pomeni, da je linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{u}_i$ enaka $\mathbf{0}$, torej vektorji $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ niso linearno neodvisni, kar je v protislovju s predpostavko, da sestavljajo bazo prostora.
Ker do podobnega protislovja pridemo tudi pri predpostavki, da je $n < m$, nam ostane le možnost, da je $m = n$.

Ker imajo vse baze istega vektorskega prostora isto število vektorjev, je to število značilno za sam prostor.

Definicija 3.32 Dimenzija *vektorskega prostora je število baznih vektorjev.*

Dimenzijo vektorskega prostora V bomo zapisali kot $\dim(V)$. Oglejmo si, kakšno dimenzijo imata stolpčni in vrstični prostor matrike.

Posledica 3.33 *Dimenziji stolpčnega prostora* $C(A)$ *in vrstičnega prostora* $C(A^T)$ *sta enaki rangu matrike* A

$$\dim(C(A)) = \dim(C(A^T)) = \mathrm{rang}(A)\,.$$

Dokaz: V primeru 3.24 smo že ugotovili, da pivotni stolpci sestavljajo bazo stolpčnega prostora $C(A)$. Ker je pivotnih stolpcev prav toliko kot pivotov, je (definicija 3.10) dimenzija $C(A)$ enaka $\operatorname{rang}(A)$.
Za vrstični prostor velja isti sklep za transponirano matriko A^T.

Koliko pa je dimezija ničelnega prostora $N(A)$?

Izrek 3.34 *Dimenzija ničelnega prostora $N(A)$ matrike A z n stolpci in ranga r je enaka $\dim(N(A)) = n - r$.*

Dokaz: Število neodvisnih rešitev homogenega sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ je enako številu prostih stolpcev, to pa so vsi stolpci razen pivotnih, torej $n-r$.

Poglejmo si še dimenzije nekaterih matričnih prostorov.

Primer 3.25

1. Prostor vseh 2×2 matrik ima dimenzijo 4. Ena izmed možnih baz je

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Matrike E_1, E_2, E_3 in E_4 so linearno neodvisne — zakaj?

   Po drugi strani pa vsako matriko z dvema vrsticama in dvema stolpcema lahko zapišemo kot linearno kombinacijo matrik E_1, E_2, E_3 in E_4. Tako sta obe zahtevi iz definicije 3.27 izpolnjeni, zato te štiri matrike sestavljajo bazo. Zaradi definicije 3.32 je dimenzija tega prostora enaka $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$

2. Dimenzija podprostora zgornjetrikotnih 2×2 matrik je 3. Za bazo podprostora lahko vzamemo E_1, E_2 in E_4.

3. Tudi dimenzija prostora simetričnih 2×2 matrik je 3. Možna baza je E_1, $E_2 + E_3$ in E_4.

4. Dimenzija prostora diagonalnih 2×2 matrik je 2. Bazni matriki sta E_1 in E_4.

3.4.5 Štirje osnovni podprostori matrike

Naj bo A neka matrika. Dobro že poznamo stolpčni prostor $C(A)$ (definicija 3.4) in ničelni prostor $N(A)$ (definicija 3.7). Omenili smo že tudi vrstični prostor $C(A^T)$, ki ni nič drugega kot stolpčni prostor matrike A^T. Če tem trem prostorom dodamo še ničelni prostor transponirane matrike $N(A^T)$, ki ga bomo imenovali *levi ničelni prostor* matrike A, bo slika zaokrožena.

Preden nadaljujemo, moramo še razložiti pomen izraza "levi ničelni prostor". Rekli smo, da je to ničelni prostor matrike A^T, torej množica rešitev homogenega sistema enačb $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Ko ta sistem enačb transponiramo, dobimo $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$. Levi ničelni prostor matrike A je torej množica rešitev sistema enačb $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$, kjer vektor neznank kot vrstico pomnožimo z matriko z *leve* strani.

Naj bo A matrika z m vrsticami in n stolpci. Njen rang naj bo r. Zanimali nas bodo štirje *osnovni podprostori matrike*

1. Stolpčni prostor $C(A)$, ki je podprostor v $\mathbb{R}^m$;
2. Vrstični prostor $C(A^T)$, ki je podprostor v $\mathbb{R}^n$;
3. Ničelni prostor $N(A)$, ki je podprostor v $\mathbb{R}^n$;
4. Levi ničelni prostor $N(A^T)$, ki je podprostor v $\mathbb{R}^m$.

Sedaj pa že imamo vse podrobnosti glavnega rezultata tega poglavja.

Izrek 3.35 (Osnovni ozrek linearne algebre, 1. del) *Stolpčni prostor $C(A)$ in vrstični prostor $C(A^T)$ imata oba dimenzijo r. Dimenzija ničelnega prostora $N(A)$ je $n - r$, Dimenzija levega ničelnega prostora $N(A^T)$ pa je $m - r$.*

Dokaz: Za stolpčni in vrstični prostor smo izrek že dokazali (posledica 3.33), za ničelni prostor tudi (izrek 3.34), za levi ničelni prostor pa je rezultat isti kot za ničelni prostor transponirane matrike.

Povejmo še, kako lahko za vsakega od štirih osnovnih prostorov matrike izberemo bazo. Naj bo R reducirana stopničasta oblika matrike A.

1. Baza prostora stolpčnega prostora $C(A)$ so pivotni stolpci matrike A (primer 3.24). Tukaj ne smemo vzeti pivotnih stolpcev matrike R, ker se stolpčni prostor matrike pri elementarnih vrstičnih operacijah ne ohranja.
2. Baza vrstičnega prostora $C(A^T)$ so pivotne vrstice matrike R (ali A). Pri vrstičnem prostoru je vseeno, ali vzamemo pivotne vrstice matrike R ali A, saj se vrstični prostor pri elementarnih vrstičnih operacijah ne spreminja.
3. Baza ničelnega prostora $N(A)$ so posebne rešitve homogenega sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (dobimo jih lahko iz matrike R kot v enačbi (3.2));
4. Pot do baze levega ničelnega prostora $N(A^T)$ je nekoliko daljša. Spomnimo se, kako smo v podrazdelku 3.33 z Gauss-Jordanovo eliminacijo

izračunali inverz matrike. Tudi v tem primeru bomo matriko A dopolnili z enotsko matriko I. Ker matrika A ni obrnljiva, se bomo zadovoljili z reducirano stopničasto obliko

$$[A_{m\times n}|I_{m\times m}] \longrightarrow [R_{m\times n}|E_{m\times m}]\,.$$

Tukaj smo z E označili matriko, v katero se je spremenila enotska matrika I, ko smo matriko A preoblikovali v reducirano stopničasto obliko. Zaradi

$$E[A|I] = [R|E]$$

je matrika E tista, ki prvotno matriko A spremeni v reducirano stopničasto obliko $EA = R$. Zapišimo to še v bločni obliki

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer smo s simbolom E_r označili prvih r vrstic matrike E, z E_{m-r} pa njenih zadnjih $m-r$ vrstic. Enačbi levega ničelnega prostora $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}^T$ torej ustreza zadnjih $m-r$ vrstic matrike E.

Recept za bazo levega ničelnega prostora je torej: Izračunamo reducirano stopničasto obliko razširjene matrike $[A|I]$, rezultat je $[R|E]$. Baza levega ničelnega prostora $N(A^T)$ je zadnjih $m-r$ vrstic matrike E, to so vrstice, ki ustrezajo ničelnim vrsticam matrike R.

Primer 3.26 Poiščimo baze vseh 4 osnovnih prostorov matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zaradi levega ničelnega prostora $N(A^T)$ je najbolje, da izračunamo reducirano stopničasto obliko razširjene matrike $[A|I]$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 10 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Rang matrike je $\operatorname{rang}(A) = 2$.

1. Pivotna stolpca sta prvi in drugi, torej sta baza stolpčnega prostora $C(A)$ vektorja $[1\ 1\ 2]^T$ in $[3\ 2\ 6]^T$.

2. Pivotni vrstici sta prva in druga, torej lahko za bazo vrstičnega prostora $C(A^T)$ vzamemo vektorja $[1\ 3\ 5\ 1]^T$ in $[0\ -1\ -2\ 3]^T$. Lahko bi pa vzeli tudi prvi dve vrstici reducirane stopničaste oblike, torej $[1\ 0\ -1\ 10]^T$ in $[0\ 1\ 2\ -3\ ]$.

3. Posebni rešitvi homogenega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sta $[1\ -2\ 1\ 0]^T$ in $[-10\ 3\ 0\ 1]$. To je tudi baza ničelnega prostora $N(A)$.

4. Baza levega ničelnega prostora $N(A^T)$ je vektor $[-2\ 0\ 1]^T$, vrstica, ki je nadaljevanje zadnje, ničelne vrstice reducirane stopničaste oblike matrike $[A|I]$.

3.4.6 Matrike ranga 1

Matrike, ki imajo rang enak 1, imajo posebno enostavno obliko in jih v linearni algebri pogosto uporabljamo kot gradnike, s katerimi lahko sestavimo matrike višjih rangov.

Če ima matrika rang 1, so vsi njeni stolpci mnogokratniki istega vektorja, prav tako so vse njene vrstice mnogokratnik iste vrstice, saj imata oba, stolpčni prostor $C(A)$ in vrstični prostor $C(A^T)$, dimenzijo 1. Zato je dovolj, da povemo, kakšna sta prvi stolpec in prva vrstica matrike. S tem so vsi ostali elementi v matriki natančno določeni.

Primer 3.27 Zapišimo matriko A ranga 1, ki ima prvi stolpec $\mathbf{u} = [1\ -2\ 3]^T$ in prvo vrstico $\mathbf{v}^T = [1\ -2\ -3\ 4]$!
Najprej zapišimo matriko s prvim stolpcem in prvo vrstico

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & . & . & . \\ 3 & . & . & . \end{bmatrix},$$

nato pa zapolnimo ostale elemente. Druga vrstice mora biti (-2)kratnik prve (v nasprotnem primeru bi bili vrstici neodvisni in matrika bi imela rang vsaj 2), tretja vrstica pa 3-kratnik prve:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 & -8 \\ 3 & -6 & -9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Matriko lahko zapišemo tudi kot produkt stolpca in vrstice $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Preveri!

Zapis matrike kot produkt stolpca in vrstice velja za vse matrike ranga 1:

Izrek 3.36 *Vsako matriko ranga 1 lahko zapišemo kot produkt (stolpčnega) vektorja z vrstičnim vektorjem* $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

Dokaz: Matrike ranga 1 imajo vse vrstice kolinearne, zato za $\mathbf{v}^T$ izberemo vrstico, ki je kolinearna z vrsticami matrike, vektor $\mathbf{u}$ pa vsebuje ustrezne mnogokratnike.

3.5 Naloge

1. Dani so vektorji

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix},$$

Poišči vektor $\mathbf{x}$, ki ustreza enačbi

(a) $2\mathbf{x} + 3\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{d} = \mathbf{0}$;

(b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 4\mathbf{x}$;

(c) $2(\mathbf{a} - \mathbf{x}) + 3(\mathbf{c} + \mathbf{x}) = \mathbf{0}$;

(d) $\mathbf{b} + 2\mathbf{x} + 2(\mathbf{d} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

2. Katere izmed naslednjih množic so podprostori vektorskega prostora $\mathbb{R}^{3\times 3}$ kvadratnih matrik reda 3?
   (a) Vse zgornjetrikotne matrike;
   (b) vse diagonalne matrike;
   (c) vse matrike s celoštevilskimi elementi;
   (d) vse matrike, ki imajo v prvem stolpcu v prvi vrstici število 1;
   (e) vse simetrične matrike;
   (f) vse permutacijske matrike;
   (g) vse matrike, ki imajo v zadnjem stolpcu zadnje vrstice ničlo;
   (h) vse obrnljive matrike.
3. Naj bo $\mathbb{P}^2$ vektorski prostor kavdratnih polinomov. Ali je množica kvadratnih polinomov $p(x) = ax^2 + bx + c$, za katere je
   (a) $a = 0$
   (b) $b = 0$
   (c) $a + c = 0$
   (d) $a + b = 1$
   (e) $a = c$
   (f) $a + b + c = 0$
   (g) $p(0) = 0$
   (h) $p(1) = 0$
   (i) $p(0) = 1$
   (j) $p(0) + p(1) = 0$
   (k) $p(0) + p(1) = 1$

   podprostor v $\mathbb{P}^2$?
4. Kateri izmed vektorjev
   (a) $[1\ 1\ 1]^T$
   (b) $[1\ 2\ 3]^T$
   (c) $[1\ 0\ 0]^T$
   (d) $[2\ 5\ 9]^T$

   so elementi stolpčnega prostora matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}?$$

   Kako ste to ugotovili?

5. Poišči vse vrednosti spremenljivke x, za katere lahko vektor $\mathbf{u} = [7\ -2\ \ x]^T$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}!$$

   V kakšni zvezi je ta naloga s stolpčnim prostorom matrike?

6. Ugotovi, ali so vektorji

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   linearno neodvisni!

7. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ imamo vektorje

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{in} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Prepričaj se, da so vektorji $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$ baza v prostoru $\mathbb{R}^3$.

   (b) Poišči koordinate vektorja $\mathbf{x} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ v tej bazi.

8. Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   izračunaj rang in bazo vseh štirih osnovnih prostorov.

9. Naj bo $M \subset \mathbb{R}^3$ množica takih vektorjev, da je vsota njihovih komponent enaka 0.

   (a) Ali je množica M podprostor v $\mathbb{R}^3$?

   (b) Kolikšna je njena dimenzija?

   (c) Zapiši vsaj eno bazo množice M.

   (d) Zapiši matriko, katere ničelni prostor je množica M.

   (e) Kakšen geometrijski objekt predstavlja množica M?

10. Koliko je dimenzija prostora kvadratnih matrik reda 3? Zapiši vsaj eno bazo tega prostora.

   (a) Koliko je dimenzija podprostora zgornjetrikotnih matrik? Zapiši bazo!

   (b) Koliko je dimenzija podprostora simetričnih matrik? Zapiši bazo!

(c) Koliko je dimenzija podprostora diagonalnih matrik? Zapiši bazo!

11. Koliko je dimenzija prostora kvadratnih matrik reda n?

    (a) Koliko je dimenzija podprostora zgornjetrikotnih matrik?
    (b) Koliko je dimenzija podprostora simetričnih matrik?
    (c) Koliko je dimenzija podprostora diagonalnih matrik?

Poglavje 4

Ortogonalnost

V tem poglavju nas bo zanimala ortogonalnost vektorjev, posebej baznih vektorjev, ter njihovih (pod)prostorov. Navadno nam dejstvo, da so vektorji v neki množici ortogonalni, precej olajša računanje.

Glavni del tega poglavja (obenem zadnji del obravnave sistemov linearnih enačb) bo posvečen obravnavi sistemov enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer vektor desnih strani ni v stolpčnem prostoru matrike $\mathbf{b} \notin C(A)$. Iz izreka 3.5 vemo, da tak sistem enačb sploh nima rešitve. Kljub temu, da rešitve ni, bomo poskušali dobiti tak vektor $\mathbf{x}$ (tako "rešitev"), da bo sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ čim bolj izpolnjen.

Nato bomo pogledali, kakšne prednosti imajo ortogonalne baze prostorov in ortogonalne matrike, naučili se bomo konstruirati take baze, spotoma pa bomo spoznali še, kako lahko matriko zapišemo kot produkt ortogonalne in trikotne matrike,

4.1 Ortogonalnost vektorjev in njihovih podprostorov

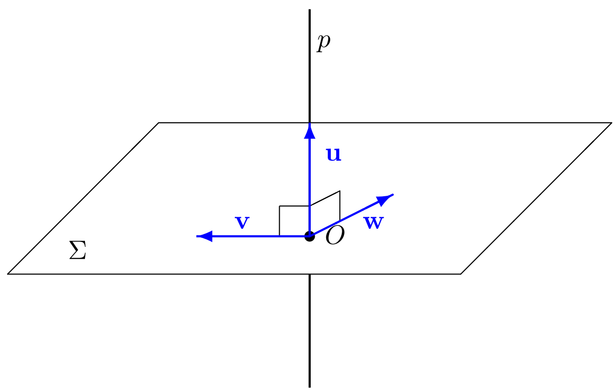
Že v 1. poglavju smo ugotovili (glej izrek 1.11), da sta dva vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ iz prostora $\mathbb{R}^n$ ortogonalna natanko tedaj, kadar je njun skalarni produkt $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$. V tem razdelku bomo pojem ortogonalnosti posplošili na ortogonalnost podprostorov in posebej pogledali, kako je z ortogonalnostjo štirih osnovnih matričnih prostorov.

4.1.1 Ortogonalnost podprostorov

Najprej povejmo, kdaj sta dva podprostora ortogonalna.

Definicija 4.1 *Podprostora U in V vektorskega prostora sta med seboj* ortogonalna*, če je vsak vektor $\mathbf{u} \in U$ ortogonalen na vsak vektor $\mathbf{v} \in V$.*

Dva podprostora, ki sta med seboj ortogonalna, imata en sam skupni vektor, to je ničelni vektor $\mathbf{0}$. Ta vektor je edini, ki je ortogonalen nase, ker je $\mathbf{0}^T\mathbf{0} = 0$.



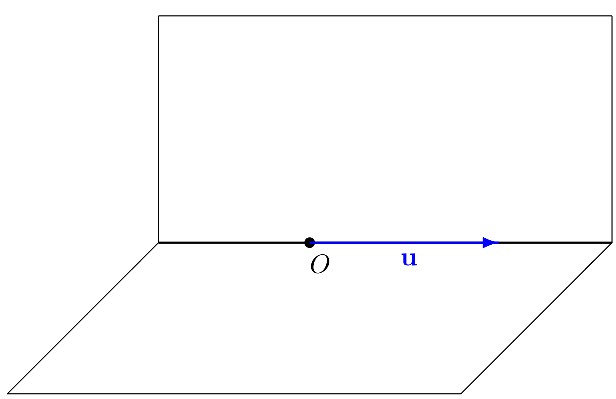
Slika 4.1: Premica p in ravnina Σ sta pravokotni, sekata se v koordinatnem izhodišču.

Primer 4.1 Podprostori v tridimenzionalnem prostoru $\mathbb{R}^3$ so

1. ničelni podprostor, ki vsebuje le vektor $\mathbf{0}$;
2. premice skozi izhodišče;
3. ravnine skozi izhodišče in
4. cel prostor $\mathbb{R}^3$.

Pri tem velja:

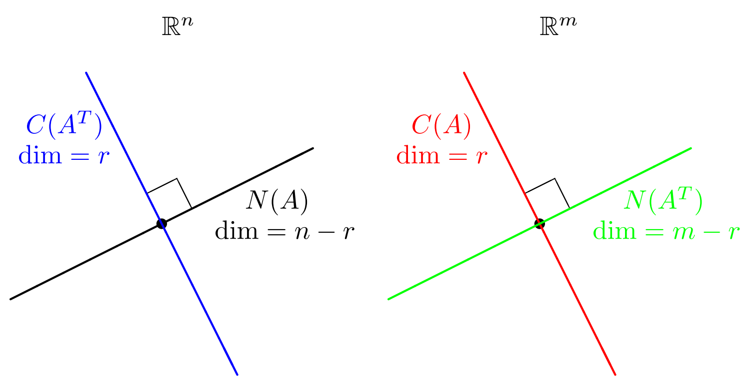
- Ničelni podprostor je vedno ortogonalen na katerikoli drug podprostor.
- Premica s smernim vektorjem $\mathbf{u}$ skozi izhodišče je pravokotna na premico s smernim vektorjem $\mathbf{v}$ skozi izhodišče, če sta oba smerna vektorja ortogonalna $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$, sicer enodimenzionalna podprostora nista ortogonalna.
- Premica s smernim vektorjem $\mathbf{u}$ skozi izhodišče je pravokotna na ravnino skozi izhodišče, ki jo določata linearno neodvisna vektorja $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$, kadar je $\mathbf{u}$ ortogonalen na oba vektorja v ravnini, $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$. To pomeni, da je $\mathbf{u}$ kolinearen z vektorskim produktom $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (glej sliko 4.1).
- Dve pravokotni ravnini nistra ortogonalna podprostora, tudi kadar sta med seboj pravokotni, saj se sekata v premici, ki leži v obeh ravninah. Neničelni vektor $\mathbf{u}$, ki določa smer presečne premice leži v obeh ravninah in ni pravokoten sam nase, saj je $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2 > 0$ (slika 4.2).



Slika 4.2: Dve ravnini skozi koordinatno izhodišče nista ortogonalna podprostora v $\mathbb{R}^3$, čeprav sta pravokotni

4.1.2 Ortogonalnost osnovnih matričnih podprostorov

Glavni primeri podprostorov v linearni algebri so osnovni matrični prostori. Za vsako matriko A se vrstični prostor $C(A^T)$ in ničelni prostor $N(A)$ stikata le v koordinatnem izhodišču $\mathbf{0}$, prav tako stolpčni prostor $C(A)$ in levi ničelni prostor $N(A^T)$. Velja pa še več:



Slika 4.3: Dva para ortogonalnih podprostorov matrike $A_{m\times n}$ ranga r

Izrek 4.2 *Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja:*

1. *Ničelni prostor $N(A)$ in vrstični prostor $C(A^T)$ sta ortogonalna podprostora prostora $\mathbb{R}^n$;*
2. *Levi ničelni prostor $N(A^T)$ in stolpčni prostor $C(A)$ sta ortogonalna podprostora prostora $\mathbb{R}^m$.*

Na sliki 4.3 so shematično predstavljeni vsi štirje osnovni prostori matrike A reda $m \times n$, ki ima rang r, skupaj z njihovimi dimenzijami.

Dokaz: Za dokaz točke 1 izreka si oglejmo produkt matrike A s poljubnim vektorjem $\mathbf{x}$ iz ničelnega prostora $N(A)$ matrike A. Zaradi lasnosti prostora $N(A)$ mora biti $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vsaka vrstica matrike A se v tem sistemu enačb pomnoži s stolpcem $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \text{1. vrstica } A \\ \vdots \\ m\text{-ta vrstica } A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prva enačba v tem sistemu trdi, da je skalarni produkt prve vrstice matrike A in stolpca $\mathbf{x}$ enak 0, kar pomeni, da je prva vrstica matrike A ortogonalna na vektor $\mathbf{x}$, ki spada v ničelni prostor $N(A)$. Ostale enačbe pomenijo, da so tudi vse ostale vrstice matrike A ortogonalne na $\mathbf{x}$. Zato je $\mathbf{x}$ ortogonalen tudi na vse linearne kombinacije vrstic matrike A, torej na celoten vrstični prostor $C(A^T)$. Ker smo za $\mathbf{x}$ vzeli poljuben vektor iz $N(A)$, mora biti vrstični prostor $C(A^T)$ ortogoanlen na $N(A)$.
Drugo točko izreka dokažemo na podoben način z enačbo $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$, kjer je $\mathbf{y}$ poljuben vektor iz levega ničelnega prostora $N(A^T)$.

Poglejmo primer.

Primer 4.2 Matrika A naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$. Bazo njenega ničelnega prostora $N(A)$ in njenega levega ničelnega prostora bomo našli, če izračunamo reducirano vrstično obliko razširjene matrike $[A|I]$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

od koder ugotovimo, da je rang matrike A enak 2, torej imata ničelni in levi ničelni prostor oba dimenzijo 1. Ničleni prostor $N(A)$ ima edini bazni vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, levi ničelni prostor $N(A^T)$ pa ima edini bazni vektor $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Prepričamo se lahko, da je bazni vektor ničelnega prostora $N(A)$ ortogonalen na vse vrstice matrike A, torej tudi na vrstični prostor $C(A^T)$, bazni vektor levega ničelnega prostora pa na vse stolpce matrike A, torej tudi na stolpčni prostor $C(A)$.

4.1.3 Ortogonalni komplement in osnovni izrek LA

Vrstični in ničelni prostor matrike nista samo ortogonalna (izrek 4.2). Tudi njuni dimenziji se seštejeta do dimenzije celega prostora (izrek 3.35). Ravno tako velja za levi ničelni in stolpčni prostor.

Primer 4.3 Dve premici, četudi sta ortogonalni, ne moreta biti vrstični in ničelni prostor v $\mathbb{R}^3$. Vsaka premica ima dimenzijo 1, vsota obeh dimenzij je 2, kar je manj kot 3, dimezija prostora $\mathbb{R}^3$.

Množica vseh vektorjev, ki so pravokotni na vse vektorje iz danega podprostora, zasluži posebno ime.

Definicija 4.3 Ortogonalni komplement $V^\perp$ *podprostora* V *vsebuje VSE vektorje, ki so ortogonalni na* V*.*

Sedaj pa že lahko dokončamo osnovni izrek linearne algebre.

Izrek 4.4 [Osnovni izrek linearne algebre 2. del] *Naj bo* A *matrika dimezije* $m \times n$*.*

1. *Ničelni prostor* $N(A)$ *je ortogonalni komplement vrstičnega prostora* $C(A^T)$ *v prostoru* $\mathbb{R}^n$*;*
2. *Levi ničelni prostor* $N(A^T)$ *je ortogonalni komplement stolpčnega prostora* $C(A)$ *v prostoru* $\mathbb{R}^m$*.*

Dokaz: Da bi dokazali točko 1, moramo pokazati:

a. da je vsak vektor iz ničelnega prostora $N(A)$ pravokoten na vse vektorje iz vrstičnega prostora $C(A^T)$ in

b. da so vsi vektorji, ki so ortogonalni na vrstični prostor $C(A^T)$ vsebovani v ničelnem prostoru $N(A)$.

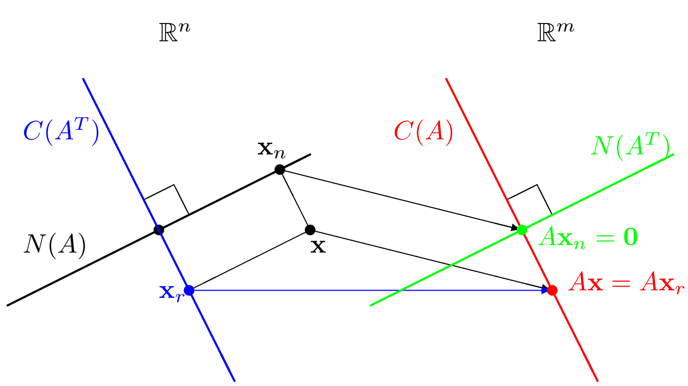
Točka a je posledica izreka 4.2.

Za dokaz točke b predpostavimo, da obstaja vektor $\mathbf{u}$, ki je ortogonalen na ničelni prostor $N(A)$ in ni v vrstičnem prostoru $C(A^T)$. Če bi vrstico $\mathbf{u}^T$ dodali matriki A, bi povečali dimenzijo vrstičnega prostora za 1, s tem pa bi prekršili izrek (Osnovni izrek LA 1. del), saj bi se povečala vsota $\dim(C(A^T)) + \dim(N(A))$, ki mora ostati enaka n. Ker nas je predpostavka o obstoju takega vektorja pripeljala do protislovja, zunaj vrstičnega prostora $C(A^T)$ ne more biti nobenega vektorja, ki bi bil ortogonalen na ničelni prostor $N(A)$.

Ker sta za vsako matriko A vrstični prostor $C(A^T)$ in ničelni prostor $N(A)$ ortogonalno komplementarna, lahko vsak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zapišemo kot vsoto dveh vektorjev, komponente $\mathbf{x}_r$ v smeri $C(A^T)$ in komponente $\mathbf{x}_n$ v smeri $N(A)$, torej $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$. Kaj se zgodi, ko matriko A pomnožimo z vektorjem $\mathbf{x}$?

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_r + \mathbf{0} = A\mathbf{x} \in C(A).$$

Rezultat množenja je vedno v stolpčnem prostoru in je odvisen le od komponente $\mathbf{x}_r$ vektorja $\mathbf{x}$ v smeri vrstičnega prostora $C(A^T)$ (slika 4.4).



Slika 4.4: Delovanje matrike A na vektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$ (dopolnitev slike 4.3)

Velja pa tudi obratno:

Izrek 4.5 *Za vsak vektor* $\mathbf{y}$ *v stolpčnem prostoru* $C(A)$ *obstaja v vrstičnem prostoru* $C(A^T)$ *en sam vektor* $\mathbf{x}$*, da je* $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$*.*

Dokaz: Naj bosta $\mathbf{x}_r$ in $\mathbf{x}'_r$ dva vektorja iz vrstičnega prostora $C(A^T)$, da je $A\mathbf{x}_r = A\mathbf{x}'_r$. Ker je

$$A(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r) = A\mathbf{x}_r - A\mathbf{x}'_r = \mathbf{0},$$

je njuna razlika $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r$ v ničelnem prostoru $N(A)$, hkrati pa tudi v vrstičnem prostoru $C(A^T)$. Ker sta ta dva prostora ortogonalna (izrek 4.4), mora biti $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r = \mathbf{0}$. Zato je $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}'_r$.

V vsaki matriki A z rangom $r > 0$ obstaja obrnljiva (kvadratna) podmatrika reda r. To podmatriko dobimo tako, da v matriki izberemo le pivotne vrstice in pivotne stolpce.

Primer 4.4 V primeru 4.2 smo za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

izračunali njeno reducirano stopničasto obliko

$$R = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

kjer smo matriko R razdelili tako, da sta levo od navpične črte pivotna stolpca, desno prosti stolpec. Nad navpičon črto sta pivotni vrstici, pod njo ničelna vrstica. Če v prvotni matriki izberemo pivotni vrstici in pivotna stolpca, dobimo obrnljivo matriko

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

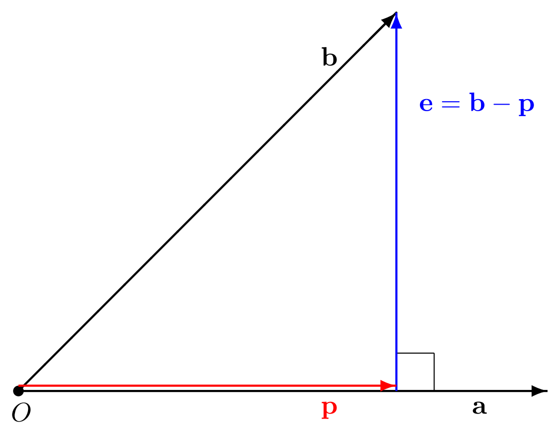
4.2 Pravokotne projekcije

V tem poglavju se bomo še zadnjič vrnili k reševanju sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. V 2. poglavju smo reševali sisteme, kjer je bila matrika A kvadratna in obrnljiva, zato je imel sistem vedno enolično rešitev. V 3. poglavju smo se ukvarjali s splošnejšimi sistemi, kjer je matrika A lahko pravokotna in ima sistem, kadar je rešljiv, več rešitev. Ugotovili smo tudi pogoj za rešljivost sistema

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: sistem je rešljiv natanko tedaj, kadar je vektor desnih strani $\mathbf{b}$ v stolpčnem prostoru $C(A)$ matrike A. Tukaj pa si bomo pogledali primer, ko vektor desnih strani $\mathbf{b}$ ni v stolpčnem prostoru $C(A)$, torej sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sploh nima rešitve. Kljub temu lahko poiščemo približno rešitev $\hat{\mathbf{x}}$, za katero je *napaka* $\mathbf{e} = A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ najmanjša.

4.2.1 Projekcija na premico

Za začetek poglejmo, kako bi lahko s pomočjo vektorjev rešili naslednjo preprosto geometrijsko nalogo. Dana sta nekolinearna vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$. Na premici skozi izhodišče v smeri vektorja $\mathbf{a}$ iščemo vektor $\mathbf{p}$, ki je najbližji vektorju $\mathbf{b}$.



Slika 4.5: Projekcija vektorja $\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}$ je vektor $\mathbf{p}$

Ključ za rešitev naloge (in razlog, da se s tem problemom ukvarjamo v poglavju o ortogonalnosti) je, da mora biti premica, ki povezuje $\mathbf{b}$ in $\mathbf{p}$, kot je razvidno iz slike 4.5, pravokotna na vektor $\mathbf{a}$.

Ker je vektor $\mathbf{p}$ v smeri vektorja $\mathbf{a}$, morata biti vektorja $\mathbf{p}$ in $\mathbf{a}$ kolinearna, torej $\mathbf{p} = \hat{x}\mathbf{a}$ za neko število $\hat{x}$, ki ga bomo določili tako, da bo vektor $\mathbf{e} := \mathbf{b} - \mathbf{p}$ pravokoten na smer, ki jo določa vektor $\mathbf{a}$, torej $\mathbf{e}^T\mathbf{a} = 0$. Tako pridemo do enačbe

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{b} - \hat{x}\mathbf{a}) = 0\,,$$

ki ji mora zadoščati $\hat{x}$. Njena rešitev je $\hat{x} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$, od koder najdemo še vektor $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}$. Vektor $\mathbf{p}$ bomo imenovali *pravokotna projekcija* vektorja $\mathbf{b}$ na premico, ki jo določa vektor $\mathbf{a}$.

Rezultat te naloge lahko predstavimo na tri načine:

1. Kot število $\hat{x}$, s katerim moramo pomnožiti vetor $\mathbf{a}$, da dobimo vektor $\mathbf{p}$

$$\hat{x} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\,, \tag{4.1}$$

2. Kot vektor, ki je rezultat projekcije

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} \tag{4.2}$$

in

3. Kot *projekcijsko matriko* P, ki jo moramo pomnožiti z vektorjem $\mathbf{b}$, da dobimo rezultat $\mathbf{p} = P\mathbf{b}$. Ker velja

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}\hat{x} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{b})}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}},$$

je projekcijska matrika enaka

$$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}. \tag{4.3}$$

Pozor! Matrika P ima rang 1, ker smo jo dobili kot produkt stolpca $\mathbf{a}$ in vrstice $\mathbf{a}^T$ (glej razdelek 3.4.6). Stolpčni prostor $C(P)$ matrike P pa je enak $\mathbf{a}$, vektorju, na katerega projeciramo.

Projekcijska matrika P je odvisna le od vektorja $\mathbf{a}$ na katerega projeciramo, neodvisna pa od vektorja $\mathbf{b}$, ki ga projeciramo. To pomeni, da lahko poljuben vektor $\mathbf{x}$ projeciramo na vektor $\mathbf{a}$ tako, da izračunamo produkt $P\mathbf{x}$.

Poglejmo si nekaj posebnih primerov.

Primer 4.5

1. Kaj se zgodi s projekcijo $\mathbf{p}$, če vektor $\mathbf{b}$ pomnožimo s skalarjem, na primer z 2?

   Če v enačbo (4.2) namesto $\mathbf{b}$ vstavimo $\mathbf{c} = 2\mathbf{b}$, dobimo

   $$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{q}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}^T 2\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} = 2\mathbf{p}\,.$$

   Projekcija vektorja z dvojno dolžino ima torej dvojno dolžino v primerjavi s prvotno projekcijo.

2. Kaj se zgodi s projekcijo $\mathbf{p}$, če namesto vektorja $\mathbf{a}$, na katerega projeciramo, vzamemo vektor $2\mathbf{a}$?

   $$\frac{2\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{2\mathbf{a}^T 2\mathbf{a}} 2\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{p}\,,$$

   torej projekcija ni odvisna od dolžine vektorja, na katerega projeciramo.

3. Kakšna je projekcija, če je vektor $\mathbf{b}$ kolinearen z vektorjem $\mathbf{a}$?

   Če v enačbo (4.1) namesto $\mathbf{b}$ vstavimo $\alpha\mathbf{a}$, potem je

   $$\hat{x} = \frac{\mathbf{a}^T\alpha\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \alpha\,,$$

   zato je $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Projekcija na vektor $\mathbf{a}$ torej ohranja vse vektorje, ki so kolinearni z vektorjem $\mathbf{a}$.

4. Kakšna je projekcija, če je vektor $\mathbf{b}$ pravokoten na $\mathbf{a}$?

   Za pravokotna (ortogonalna) vektorja je skalarni produkt (definicija 1.6) $\mathbf{b}^T\mathbf{a}$ enak 0. Zato je v enačbi (4.1) $\hat{x} = 0$, torej je $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Pravokotna projekcija nekega vektorja na pravokoten vektor je torej vedno ničelni vektor.

Pa še en računski primer.

Primer 4.6 Izračunajmo projekcijo vektorja $\mathbf{b} = [2\ 1\ 3]^T$ na vektor $\mathbf{a} = [1\ 1\ 1]^T$.
Rezultat bomo predstavili na vse tri načine:

1. Koeficient $\hat{x}$ je
$$\hat{x} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} = \frac{6}{3} = 2\,.$$

2. Projekcija $\mathbf{p}$ je
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a} = 2\mathbf{a} = [2\ 2\ 2]^T$$

3. Projekcijska matrika P je
$$P = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Projekcijska matrika P je simetrična (definicija 2.11), kar lahko preverimo, če izračunamo njeno transponirano matriko. Iz enačbe (4.3) je
$$P^T = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T)^T = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}(\mathbf{a}^T)^T\mathbf{a}^T = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = P\,,$$
torej res velja $P^T = P$, kar je definicija simetrične matrike.

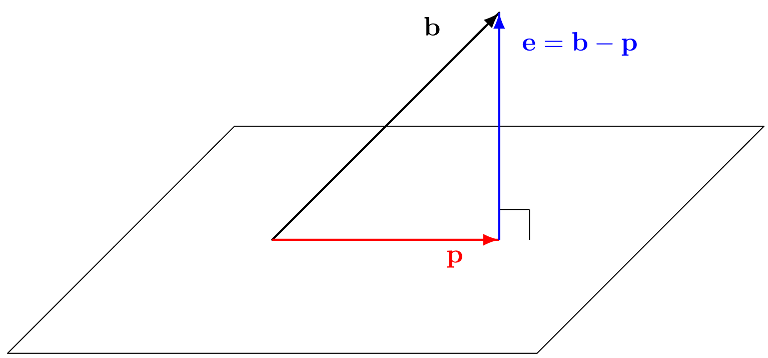
Kaj se zgodi, če projekcijo vektorja $\mathbf{b}$ na premico, ki jo določa vektor $\mathbf{a}$ naredimo večkrat zaporedoma, na primer dvakrat? S prvo projekcijo dobimo $\mathbf{p} = P\mathbf{b}$, z drugo pa $P\mathbf{p} = P(P\mathbf{b})$. Zanima nas torej, kakšna matrika je P^2. Iz geometrijske slike (glej sliko 4.5) lahko sklepamo: ker je vektor $\mathbf{p}$ kolinearen z vektorjem $\mathbf{a}$, je (glej primer 4.5, točka 3) $P\mathbf{p} = \mathbf{p}$, torej mora za projekcijsko matriko veljati $P^2 = P$. Izkazalo se bo, da ta lastnost projekcijske matrike skupaj s simetričnostjo $P^T = P$ popolnoma karakterizira projekcijske matrike.

Poglejmo še, kaj so osnovni prostori projekcijske matrike. Ker je matrika P simetrična, se ujemata vrstični $C(P^T)$ in stolpčni $C(P)$ prostor, kakor tudi ničelni $N(P)$ in levi ničelni $N(P^T)$ prostor. Najprej lahko iz enačbe (4.3) ugotovimo, koliko je njen rang. V imenovalcu imamo $\mathbf{a}^T\mathbf{a}$ produkt vrstice in stolpca, kar je skalarni produkt, torej število. V števcu $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ pa je produkt stolpca in vrstice, kar je (izrek 3.36) matrika ranga 1. Ker je projekcijska matrika P kvadratna reda n, je torej njen stolpčni prostor $C(P)$ dimenzije 1 (izrek 3.35), prav tako vrstični prostor $C(P^T)$, ničelni prostor $N(P)$ in levi ničelni prostor pa imata oba dimenzijo $n-1$.

Poglejmo še baze teh prostorov. Stolpčni prostor $C(P)$ ima samo en bazni vektor, to je kar vektor $\mathbf{a}$, na katerega projeciramo. Ničelni prostor $N(P)$ pa je ortogonalni komplement enorazsežnega prostora $\{x\mathbf{a}; x \in \mathbb{R}\}$. Njegovo bazo sestavlja $n-1$ linearno neodvisnih vektorjev, ki so vsi ortogonalni na vektor $\mathbf{a}$.

4.2.2 Projekcija na podprostor

Problem pravokotne projekcije na premico smo uspešno rešili. Zdaj pa si zastavimo malo težji, vendar podoben problem: v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^m$ imamo podprostor V dimenzije n, podan z bazo $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, in vektor $\mathbf{b}$, ki ni v podprostoru V. Iščemo vektor $\mathbf{p}$, ki je izmed vseh vektorjev v V najbližjevektorju $\mathbf{b}$, torej projekcijo vektorja $\mathbf{b}$ na podprostor V, ki je določen z bazo, sestavljeno iz vektorjev $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.



Slika 4.6: Projekcija vektorja $\mathbf{b}$ na podprostor V

Z drugimi besedami: iščemo linearno kombinacijo $\mathbf{p} = \hat{x}_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \hat{x}_n\mathbf{a}_n$, ki je najbližje danemu vektorju $\mathbf{b}$. Če vektorje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ zložimo kot stolpce v matriko A

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

lahko to linearno kombinacijo zapišemo kot $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$ in podprostor V je enak stolpčnemu prostoru $C(A)$.

Iščemo tako linearno kombinacijo stolpcev $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$ (pravokotno projekcijo), ki bo najbliže vektorju $\mathbf{b}$. To bo takrat, ko bo *vektor napake* $\mathbf{e} := \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ pravokoten na podprostor V. Da bi bil $\mathbf{e}$ pravokoten na V, mora biti pravokoten na vse bazne vektorje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ torej mora biti

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}\,,$$

kar zapišemo v obliki sistema linaernih enačb

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}\,, \tag{4.4}$$

ki ga imenujemo *normalni sistem* enačb. To je sistem enačb ki ga dobimo tako, da sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z leve pomnožimo z matriko A^T. Matrika A^TA je kvadratna dimenzije n in simetrična. Ker so stolpci matrike A neodvisni, je tudi obrnljiva, zato obstaja inverzna matrika $(A^TA)^{-1}$.

Izrek 4.6 *Če so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ obrnljiva.*

Dokaz: Naj bo A matrika reda $m \times n$, kjer so stolpci linearno neodvisni. Matrika $A^T A$ je torej reda $n \times n$. Naj bo vektor $\mathbf{x}$ iz $N(A^T A)$, torej je rešitev enačbe $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Če to enačbo z leve pomnožimo z $\mathbf{x}^T$, je

$$\mathbf{x}^T(A^T A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T)A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

kar pomeni, da je dolžina vektorja $A\mathbf{x}$ (definicija 1.7) enaka 0, torej je vektor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ker pa so stolpci matrike A linearno neodvisni, je to mogoče le, kadar je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kar pomeni, da ničelni prostor $N(A^T A)$ vsebuje le vektor $\mathbf{0}$. V tem primeru je rang matrike $A^T A$ (izrek 3.35) enak n, matrika je polnega ranga in zato (izrek 3.17) obrnljiva.

Za $n = 1$ je enačba (4.4) ista kot pri projekciji na premico, katere rešitev že poznamo. Rešitev tudi v primeru projekcije na podprostor, kot pri projekciji na premico, lahko predstavimo na tri načine:

1. kot vektor $\hat{\mathbf{x}}$ koeficientov linearne kombinacije
$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}\,; \tag{4.5}$$

2. kot vektor, ki je rezultat projekcije
$$\mathbf{p} = A(A^T A)^{-1}A^T\mathbf{b}\,; \tag{4.6}$$

3. in kot projekcijsko matriko P, ki nam poljuben vektor $\mathbf{b}$ preslika v pravokotno projekcijo $\mathbf{p} = P\mathbf{b}$ na podprostor V
$$P = A(A^T A)^{-1}A^T\,. \tag{4.7}$$

Pozor! Pogled na matriko $P = A(A^T A)^{-1}A^T$ je lahko zavajajoč. Če $(A^T A)^{-1}$ zapišemo kot $A^{-1}(A^T)^{-1}$ (izrek 2.7), dobimo $P = AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T = I$, kar je narobe.
Napako smo naredili, ker smo pozabili, da je matrika A pravokotna, torej ne more biti obrnljiva in A^{-1} ne obstaja.

Primer 4.7 Izračunajmo projekcijo vektorja $\mathbf{b} = [3\ 2\ 1]^T$ na podprostor, ki ga določata vektorja $\mathbf{a}_1 = [1\ 2\ 3]^T$ in $\mathbf{a}_2 = [2\ 3\ 2]^T$.
Rezultat bomo predstavili v vseh treh oblikah:.

1. Koeficiente $\hat{\mathbf{x}}$ linearne kombinacije $\hat{x}_1\mathbf{a}_1 + \hat{x}_2\mathbf{a}_2$ dobimo kot rešitev sistema linearnih enačb
$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}\,. \tag{4.8}$$
Ker je matrika A
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$
je
$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 14 & 17 \end{bmatrix}$$
in
$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix},$$
rešitev normalnega sistema $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ pa je $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -13 \\ 28 \end{bmatrix}$.

2. Projekcijo $\mathbf{p}$ dobimo kot linearno kombinacijo $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$, torej
$$\mathbf{p} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 43 \\ 58 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

3. Projekcijska matrika je $P = A(A^T A)^{-1}A^T$, torej
$$P = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 17 & 20 & -5 \\ 20 & 26 & 4 \\ -5 & 4 & 41 \end{bmatrix}.$$

4.2.3 Projekcijske matrike

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da so matrike, s katerimi projeciramo na podprostor, simetrične in njihov kvadrat je enak matriki sami. Matrikam, ki imajo ti dve lastnosti, bomo rekli projekcijske matrike.

Definicija 4.7 *Matrika P je* projekcijska*, kadar*

- *je simetrična: $P^T = P$ in*
- *velja $P^2 = P$.*

Najprej preverimo, če matrika iz enačbe (4.7) zadošča tema dvema lastnostima. Da bi preverili simetričnost, transponirajmo matriko, potem pa upoštevajmo transponirane matrike produkta in izrek 2.8 ter lastnost dvojnega transponiranja matrike

$$P^T = (A(A^TA)^{-1}A^T)^T = (A^T)^T((A^TA)^{-1})^TA^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P\,,$$

torej matrika P je simetrična.

Da bi preverili drugo lastnost, je potrebno izračunati P^2. Uporabili bomo asociativnost matričnega produkta

$$\begin{aligned} P^2 = PP &= (A(A^TA)^{-1}A^T)(A(A^TA)^{-1}A^T) \\ &= A(A^TA)^{-1}((A^TA)(A^TA)^{-1})A^T \\ &= A(A^TA)^{-1}IA^T = P\,, \end{aligned}$$

torej projekcija, ki jo naredimo dvakrat, drugič ne naredi ničesar.

Če je P projekcijska matrika, ki projecira na podprostor U, potem je tudi $I - P$ projekcijska matrika, ki projecira na ortogonalni komplement $U^\perp$.

S projekcijo smo vektor $\mathbf{b}$ razstavili na vsoto dveh pravokotnih vektorjev: pravokotne projekcije $\mathbf{p}$ vektorja $\mathbf{b}$, ki leži v podprostoru V in na vektor napake ali *ostanek* $\mathbf{e}$, ki je ortogonalen na podprostor V. Pri tem je $\mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{e}$.

Vektor pravokotne projekcije $\mathbf{p}$ lahko izračunamo kot $P\mathbf{b}$, potemtakem je $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p} = I\mathbf{b} - P\mathbf{b} = (I - P)\mathbf{b}$. Če je P projekcijska matrika na podprostor V, mora biti $I - P$ projekcijska matrika na ortogonalni komplement prostora V. Preverimo, da je tudi $I - P$ projekcijska matrika, če je P projekcijska. Preveriti moramo, da tudi za matriko $I - P$ veljata obe lastnosti iz definicije 4.7.

Najprej preverimo simetričnost. Uporabili bomo lastnosti transponiranja vsote matrik:

$$(I - P)^T = I^T - P^T = I - P\,,$$

torej matrika $I - P$ je simetrična. Poglejmo še, čemu je enaka matrika $(I - P)^2$.

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I - 2P + P^2 = I - P\,,$$

kjer smo upoštevali, da je P projekcijska matrika, za katero velja $P^2 = P$. Tako matrika $I - P$ izpolnjuje obe zahtevi iz definicije 4.7, zato je projekcijska matrika, ki projecira na ortogonalni komplement podprostora V. S tem smo dokazali

Izrek 4.8 *Če je P projekcijska matrika, ki projecira na podprostor U, potem je $I - P$ projekcijska matrika, ki projecira na $U^\perp$, ortogonalni komplement podprostora U.*

In v kakšni vzezi so pravokotne projekcije s štirimi osnovnimi prostori matrik? Projekcijo $\mathbf{p}$ smo dobili kot linearno kombinacijo $A\hat{\mathbf{x}}$ stolpcev matrike A (to je matrika, katere stolpci so baza podprostora, na katerega projeciramo), torej je $\mathbf{p} \in C(A)$ in (zaradi izreka 4.4) je $\mathbf{p}$ ortogonalen na levi ničelni prostor $N(A^T)$.

Nasprotno pa je vektor napake $\mathbf{e}$ pravokoten na stolpčni prostor $C(A)$, torej so skalarni produkti stolpcev matrike A (to je vrstic matrike A^T) z vektorjem $\mathbf{e}$ enak 0, kar pomeni $A^T\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Vektor napake $\mathbf{e}$ je torej v levem ničelnem prostoru matrike A.

4.3 Predoločeni sistemi

V matematiki je splošno znano dejstvo, da skozi dve točki v ravnini poteka natanko ena premica. Naj bosta $A = (x_A, y_A)$ in $B = (x_B, y_B)$ dve točki, podani s svojima koordinatama. Premico opišemo z linearno funkcijo $y = kx + n$. Kako izberemo parametra k in n, da bo premica potekala skozi točki A in B?

Če koordinati vsake od točk vstavimo v enačbo premice, dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} kx_A + n &= y_A \\ kx_B + n &= y_b\,. \end{aligned}$$

V tem sistemu enačb sta neznanki parametra k in n. Če zapišmo vektor neznank $\mathbf{x}$, vektor desnih strani $\mathbf{b}$ in matriko koeficientov A

$$A = \begin{bmatrix} x_A & 1 \\ x_B & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix},$$

lahko sistem linearnih enačb zapišemo v obliki $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kot smo vajeni. Kadar sta $x_A \neq x_B$ ima ta sistem natanko eno rešitev, ker je matrika A obrnljiva, ne glede na to, koliko sta vrednosti y_A in y_B.

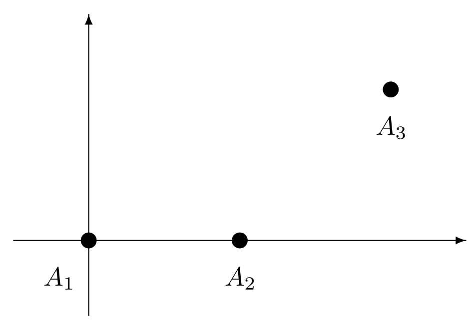
V teoriji torej problemov ni. So pa v praksi. Pogosto podatki (točke) niso povsem zanesljivi, prisotne so napake (šum v podatkih), ki so često posledice merskih napak (ko so podatki izmerjeni) ali računskih napak (ko so podatki izračunani). Pri reševanju praktičnih problemov iz realnega sveta zato pogosto kvaliteto (natančnost podatkov) nadomestimo s kvantiteto (povečamo število podatkov). Tako moramo premico pogosto potegniti skozi veliko (na primer m, več kot dve) točk, ki pogosto le približno ležijo na isti premici. To pomeni, da moramo rešiti sistem veliko linearnih enačb (vsak podatek oz. točka pomeni eno enačbo) z dvema neznankama (parametra k in n premice). Matrika A takega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima torej veliko število vrstic in le dva stolpca, torej ima rang največ 2.

Vektor $\mathbf{b}$ (desna stran sistema) ima m komponent, stolpčni prostor $C(A)$ pa ima dimenzijo enako 2, kar pomeni, da sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ne bo rešljiv (in običajno tudi ni). Ker točna rešitev ne obstaja, bi radi izračunali vsaj "približno" rešitev. Rešitev ne bo "približna v smislu, da bo "blizu" prave rešitve, saj ta sploh ne obstaja, ampak v smislu, da bodo z njo vse enačbe "približno" izpolnjene.

Namesto vektorja $\mathbf{b}$, ki ni v $C(A)$ je za desno stran sistema smiselno vzeti vektor, ki je vektorju $\mathbf{b}$ najbližji v stolpčnem prostoru $C(A)$, torej ortogonalno projekcijo $\mathbf{p}$ vektorja $\mathbf{b}$ na podprostor $C(A)$. Sistem enačb $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$, ki ga tako dobimo, je zagotovo rešljiv, ker je desna stran sistema $\mathbf{p} \in C(A)$.

Edino kar ostane je, da iz sistema enačb (4.4) izračunamo koeficiente $\hat{\mathbf{x}}$, ki so najboljši nadomestek za neobstoječo rešitev $\mathbf{x}$. Z drugimi besedami: kadar sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nima rešitve (kar pomeni $\mathbf{b} \notin C(A)$), rešujemo raje sistem $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$, ki nam da najmanjši ostanek $\mathbf{e} = A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$.

Povejmo isto še kot recept: enačbo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z leve pomnožimo z A^T, da dobimo $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$, kar je kvadraten sistem. Kadar so stolpci matrike A linearno neodvisni, je matrika $A^T A$ je obrnljiva, torej ima sistem eno samo rešitev $\hat{\mathbf{x}}$.



Slika 4.7: Tri točke, skozi katere bi radi narisali premico

Primer 4.8 Najpogosteje naletimo na predoločene sisteme enačb, ko iščemo premico, ki se kar najbolje prilagaja množici točk. Za ilustracijo tega problema, poskušajmo potegniti premico skozi tri točke: $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$ in $A_3 = (2,1)$.
Že ko tri točke narišemo v koordinatnem sistemu (slika 4.7) je jasno, da naloga ni rešljiva. Tudi če za premico $y = kx+n$ napišemo tri enačbe, ki bi jim morala zadoščati koeficienta k in n

$$\begin{array}{rrl} 0k & +n & = 0 \\ k & +n & = 0 \\ 2k & +n & = 1 \end{array}$$

in jih poizkušamo rešiti, je hitro jasno, da rešitve ni. Sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ni rešljiv. Namesto njega bomo raje rešili sistem $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$.
Ker je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

in

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

je normalni sistem enačb $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$, to je

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

katerega rešitev je

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{bmatrix}.$$

Tako smo dobili rezultat, da se danim trem točkam najbolje prilega premica $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{6}$ (slika 4.8).
Radovedni bralec je verjetno opazil, da je vektor desnih strani sistema $\mathbf{b}$ vektor ordinat točk, jih se jim želimo s premico čim bolj približati. Vprašamo pa se lahko, kje sta v tem primeru projekcija $\mathbf{p}$ na stolpčni prostor $C(A)$ in vektor napake $\mathbf{e}$.

Projekcija $\mathbf{p}$ so ordinate tistih točk na premici, ki ustrezajo abscisam točk A_1, A_2 in A_3. Če bi te imele ordinate $\mathbf{p}$ namesto ordinat $\mathbf{b}$, bi ležale na isti premici in naš problem iskanja premice skozi vse tri točke bi bil enostavno rešljiv. Koliko pa je $\mathbf{p}$? Ker smo projekcijo $\mathbf{p}$ zapisali kot linearno kombinacijo stolpcev matrike A, je

$$\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}.$$

Vektor napake $\mathbf{e}$ pa je

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ 5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix},$$

to so navpični odmiki točk na premici od prvotnih točk A_i (slika 4.8).
Na koncu lahko še preverimo, ali je vektor napake $\mathbf{e}$ res pravokoten na stolpčni prostor $C(A)$, kot tudi na projekcijo $\mathbf{p}$. V ta namen je dovolj izračunati produkt $A^T\mathbf{e}$, saj je tudi $\mathbf{p} \in C(A)$. Podrobnosti prepuščamo bralcu.

Predoločen sistem enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nima rešitve. S tem, ko desno stran tega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nadomestimo s $\mathbf{p}$, pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{b}$ na $C(A)$ dosežemo, da je novi sistem enačb $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ rešljiv, obenem pa je vektor napake $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p}$ najmanjši.

Ker je

$$A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p} - \mathbf{e} = \mathbf{e}\,,$$

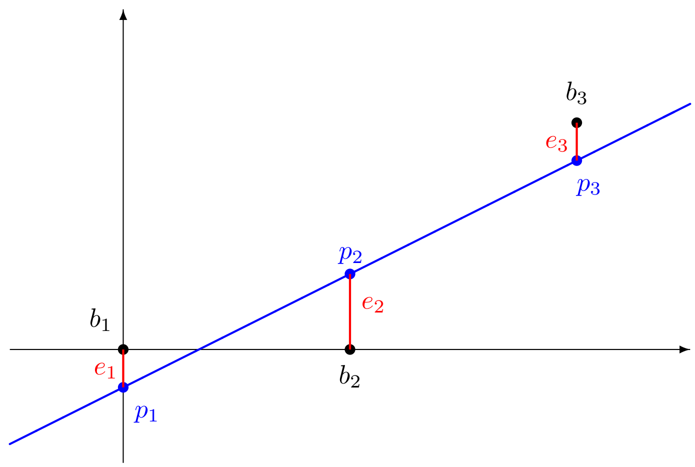
saj je $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$, smo dosegli tudi, da je kvadrat dolžine vektorja

$$||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}||^2 = ||\mathbf{e}||^2$$

najmanjši, s tem pa tudi sama dolžina najmanjša. Komponente vektorja $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ pomenijo napako pri posamezni enačbi, ko namesto neznanih (in neobstoječih $\mathbf{x}$) vstavimo rešitev $\hat{\mathbf{x}}$ normalnega sistema enačb. Zato je vsota kvadratov napak pri rešitvi posamezne enačbe najmanjša in pravimo, da smo s tem rešili *problem najmanjših kvadratov.*

Pokazali smo, kako lahko konstruiramo premico, ki se najbolje prilega množici $m > 2$ točk. Seveda pa lahko postpek, ki smo ga uporabili za premico, lahko uporabimo tudi pri konstrukciji bolj zapletenih krivulj, kot so

1. kvadratne parabole $y = ax^2 + bx + c$;
2. kubične parabole $y = ax^3 + x^2 + cx + d$;
3. polinomske krivulje stopnje n, kot je $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$;
4. linearne kombinacije elementarnih funkcij, kot je $y = a_1 + a_2 x + a_3 e^{0.2x} + a_4 \sin 3x + a_5 \cos 3x$.



Slika 4.8: Premica, ki se najbolje prilega trem točkam

Čeprav so vse te krivulje nelinearne, dobimo linearen normalni sistem enačb, če le neznani parametri a_i v njih nastopajo linearno. V vsakem od teh primerov ima normalni sistem enačb toliko neznank, kot je število parametrov, s katerimi smo opisali krivuljo.

4.4 Ortogonalne baze in Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Vektorji, ki sestavljajo bazo prostora, morajo biti neodvisni (definicija 3.27). Med seboj lahko oklepajo katerekoli kote, razen praznega (0° ali 0 radianov) ali iztegnjenega (180° ali 2π radianov). Kadarkoli pa narišemo koordinatni sistem, si koordinatne osi vedno prestavljamo med seboj pravokotne. Na ta način je slika preglednejša in računanje lažje.

4.4.1 Ortogonalne baze

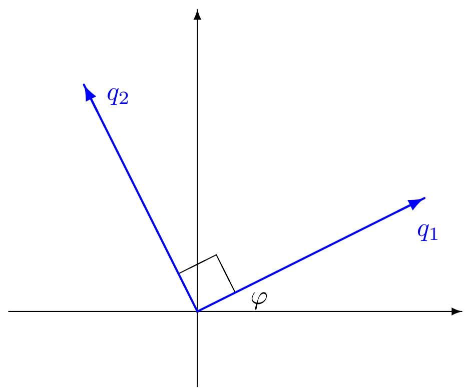
Vektorji $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ so med seboj *paroma ortogonalni*, kadar so skalarni produkti $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$, kadarkoli je $i \neq j$.

Če je v podprostoru dana baza iz ortogonalnih vektorjev, je tudi računanje veliko lažje. Kadar so stolpci matrike A paroma pravokotni, je matrika $A^T A$ diagonalna.

Definicija 4.9 *Vektorji* $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ *so* ortonormirani*, kadar so ortogonalni im imajo vsi dolžino* 1*, torej*

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \textit{ko je } i \neq j \quad \text{pravokotni } \textit{vektorji} \\ 1 & \textit{ko je } i = j \quad \text{enotski } \textit{vektorji} \end{cases}$$

Za matriko $Q = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \cdots\ \mathbf{q}_n]$ *velja* $Q^T Q = I$*.*



Slika 4.9: Ortonormalna baza prostora $\mathbb{R}^2$

Dva primera ortonormiranih baz v prostorih $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$:

Primer 4.9

1. Standardno bazo v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^m$ za vsak $m \in \mathbb{Z}$ sestavljajo ortonormirani vektorji. V $\mathbb{R}^3$ so to vektorji

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{in} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. V $\mathbb{R}^2$ je za vsako vrednost φ ortonormirana baza

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

   Parameter φ je kot med standardnim baznim vektorjem $\mathbf{i}$ in $\mathbf{q}_1$ (slika 4.9).

4.4.2 Ortogonalne matrike

Kakšne lastnosti ima matrika, katere stolpci so ortonormirani?

Izrek 4.10 *Vektorji $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ naj bodo ortonormirani v prostoru $\mathbb{R}^m$. Potem za matriko*

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

velja, da je $Q^T Q = I_n$ enotska matrika reda n.

Dokaz: Izračunamo produkt

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = I_n \,,$$

saj so $\mathbf{q}_i$ ortonormirani.

Matrike z ortonormiranimi stolpci so še posebej zanimive, kadar so kvadratne.

Definicija 4.11 *Matrika Q je* ortogonalna, *kadar je*

1. *kvadratna in*
2. *ima ortonormirane stolpce.*

Pri ortogonalnih matrikah je vprašanje obrnljivosti in inverzne matrike enostavno.

Izrek 4.12 *Če je Q ortogonalna matrika, potem je obrnljiva in $Q^{-1} = Q^T$.*

Dokaz: Če ima Q ortogonalne stolpce (izrek 4.10), je $Q^T Q = I$, torej je $Q^{-1} = Q^T$.

Primer 4.10 Permutacijska matrika (to je enotska matrika s premešanimi vrsticami) je ortogonalna, saj je

1. kvadratna
2. stolpci so enotski vektorji (definicija 1.8) in
3. stolpci so paroma ortogonalni.

Tako je, na primer

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I$$

Še nekaj primerov ortogonalnih matrik:

Primer 4.11 Ortogonalna je *rotacijska* matrika

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

za vsako vrednost spremenljivke φ, saj je kvadratna, stolpca sta ortogonalna in imata dolžino enako 1 (definicija 1.7).
Ortogonalna je tudi matrika

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

pa tudi matrike

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix}, \quad H_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix},$$

$$H_{16} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_8 & H_8 \\ H_8 & -H_8 \end{bmatrix}, \quad H_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_{16} & H_{16} \\ H_{16} & -H_{16} \end{bmatrix}$$

in vse matrike, ki jih dobimo z nadaljevanjem tega postopka

$$H_{2^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_{2^n} & H_{2^n} \\ H_{2^n} & -H_{2^n} \end{bmatrix}.$$

Matrike H_{2^n}, ki smo jih tako konstruirali, se imenujejo *Hadamardove* matrike. Ortogonalna matrika H_n reda n je Hadamardova, če so njeni elementi le 1 in -1. V računalništvu se uporabljajo pri *teoriji kodiranja*. Eden od zanimivih še odprtih problemov v linearni algebri je, za katera naravna števila n obstajajo Hadamardove matrike.

Še eno zanimivo lastnost ortogonalnih matrik opisuje naslednji izrek.

Izrek 4.13 *Množenje z ortogonalno matriko ohranja dolžino vektorjev in kote med njimi. Če je Q ortogonalna matrika, potem je*

$$||Q\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}|| \quad \textit{za vsak vektor } \mathbf{x} \textit{ in}$$

$$(Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} \quad \textit{za vsak vektor } \mathbf{x} \textit{ in } \mathbf{y}.$$

Dokaz: Za ortogonalno matriko Q je $Q^TQ = I$, zato je

$$||Q\mathbf{x}||^2 = (Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2$$

in

$$(Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}\,.$$

Produkt dveh ortogonalnih matrik je spet ortogonalna matrika.

Izrek 4.14 *Če sta Q_1 in Q_2 ortogonalni matriki, je tudi produkt $Q = Q_1Q_2$ ortogonalna matrika.*

Dokaz: Ker je $Q_1^TQ_1 = I$ in $Q_2^TQ_2 = I$, je

$$Q^TQ = (Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^T(Q_1^TQ_1)Q_2 = Q_2^TQ_2 = I\,.$$

4.4.3 Projekcija z ortogonalno bazo: Q namesto A

Kaj nam pomaga, če je baza podprostora sestavljena iz ortogonalnih ali celo ortonormiranih vektorjev? Če so bazni vektorji ortonormirani, potem se projekcija na podprostor zelo poenostavi.

Naj bodo vektorji $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ ortonormirana baza podprostora V v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^m$. Matrika Q naj bo sestavljena iz stolpcev

$$Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}\,.$$

V primeru, ko bazni vektorji niso bili ortonormirani, smo projekcijo vektorja $\mathbf{b}$ na podprostor V dobili kot $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}}$, kjer smo neznani vektor koeficientov $\hat{\mathbf{x}}$ izračunali iz normalnega sistema enačb (4.4). Za ortonormirane bazne vektorje pa imamo namesto normalnega sistema

$$Q^TQ\hat{\mathbf{x}} = I\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} = Q^T\mathbf{b}\,,$$

torej dobimo vektor koeficientov kar eksplicitno, brez reševanja sistema enačb. Prav tako dobimo za projekcijsko matriko P na podprostor namesto enačbe (4.7) dosti enostavnejšo formulo

$$P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QIQ^T = QQ^T\,,$$

kjer ni potrebno računati inverza matrike Q^TQ, saj je Q^TQ kar enotska matrika.

Pri ortonormalni bazi se zelo poenostavi tudi problem razvoja vektorja po bazi. Naj bo $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ poljubna baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$. Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *razvijemo po bazi*, kadar izračunamo koeficiente linearne kombinacije

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n\,, \tag{4.9}$$

s katero vektor $\mathbf{b}$ izrazimo z baznimi vektorji.

Primer 4.12 Da bi v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ izrazili vektor $\mathbf{b} = [7\ 1\ 5]^T$ kot linearno kombinacijo baznih vektorjev

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

moramo rešiti sistem linearnih enačb

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}\,,$$

katerega rešitev je $\mathbf{x} = [1\ \ -1\ 2]^T$.

Če je $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ ortonormirana baza vektorskega prostora in Q matrika s stolpci $\mathbf{q}_i$, potem je Q ortogonalna matrika. V tem primeru moramo poiskati rešitev sistema enačb $Q\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ki je, zaradi izreka 4.12, enaka $\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$. Posamezne komponente vektorja $\mathbf{x}$ (koeficiente linearne kombinacije 4.9) lahko tako izračunamo kot skalarne produkte

$$x_1 = \mathbf{q}_1^T\mathbf{b},\ \ldots,\ x_n = \mathbf{q}_n^T\mathbf{b}\,, \tag{4.10}$$

kar je mnogo lažje, kot rešiti sistem linearnih enačb.

Primer 4.13 Izračunajmo razvoj vektorja $\mathbf{b} = [1\ 2\ 3\ 4]^T$ po ortonormirani bazi, ki jo sestavljajo vektorji

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{q}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iz enačb (4.10) ta primer dobimo

$$x_1 = \frac{1}{2}[1\ 1\ 1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}[-1\ 1\ -1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}[-1\ -1\ 1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2$$

in

$$x_4 = \frac{1}{2}[1\ -1\ -1\ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$$

zato je

$$\mathbf{b} = 5\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + 2\mathbf{q}_3 + 0\mathbf{q}_4\,.$$

Preveri, če je res!

Kadar je baza, po kateri razvijamo, samo ortogonalna in njeni vektorji niso enotski, moramo vsakega od koeficientov deliti s kvadratom dolžine ustreznega baznega vektorja. Naj bodo $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ ortogonalna baza prostora $\mathbb{R}^n$. Potem lahko koeficiente razvoja vektorja $\mathbf{a}\mathbb{R}^n$ po ortogonalni bazi 4.10 izračunamo kot

$$x_1 = \frac{\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}}{\mathbf{q}_1^T\mathbf{q}_1},\ \cdots,\ x_n = \frac{\mathbf{q}_n^T\mathbf{a}}{\mathbf{q}_n^T\mathbf{q}_n}\,.$$

4.4.4 Gram-Schmidtov postopek

Ugotovili smo, da je računanje dostikrat znatno enostavnejše, če poznamo ortonormirano bazo prostora. Ostaja pa vprašanje, kako iz poljubne baze narediti ortonormirano bazo?

Idejo Gram-Schmidtovega postopka ortogonalizacije pokažimo na primeru, ko imamo tri linearno neodvisne (ne ortogonalne) vektorje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$. Pri tem bomo izkoristili dejstvo, da je ostanek $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p}$ pri pravokotni projekciji $\mathbf{p}$ vektorja $\mathbf{b}$ na podprostor V pravokoten na V.

Za smer prvega baznega vektorja sprejmemo kar prvi vektor $\mathbf{b}_1 := \mathbf{a}_1$. Druga smer mora biti pravokotna na $\mathbf{b}_1$, zato od $\mathbf{a}_2$ odštejemo njegovo projekcijo na smer, ki jo določa $\mathbf{b}_1$:

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 \,. \tag{4.11}$$

Tako smo zagotovili, da sta vektorja $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_2$ med seboj pravokotna.

Če hočemo, da bo tretja smer pravokotna na prvi dve, moramo od vektorja $\mathbf{a}_3$ odštejeti njegovi projekciji na $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_2$:

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{b}_1^T \mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2^T \mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2} \mathbf{b}_2 \,. \tag{4.12}$$

Tako smo dobili tri ortogonalne vektorje $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ in $\mathbf{b}_3$, ki jih moramo še deliti z njihovo dolžino, da dobimo ortonormirane vektorje

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{b}_1/||\mathbf{b}_1||, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{b}_2/||\mathbf{b}_2||, \quad \text{in} \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{b}_3/||\mathbf{b}_3|| \,.$$

S tem je proces ortogonalizacije zaključen, saj so vektorji $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ in $\mathbf{q}_3$ ortonormirana baza prostora, ki ga napenjajo vektorji $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$.

Primer 4.14 Pokažimo kako deluje gram-Schmidtova ortogonalizacija na primeru linearno neodvisnih vektorjev

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Smer prvega vektorja sprejmemo brez spremembe $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$, drugi vektor pa mora biti ortogonalen na to smer, zato v skladu z enačbo (4.11)

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Smer tretjega vektorja dobimo tako, da od $\mathbf{a}_3$ odštejemo njegovi projekciji na $\mathbf{b}_1$ in $\mathbf{b}_2$, v skladu z enačbo (4.12)

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{6}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-6}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Na koncu vektorje še normaliziramo (delimo z njihovo dolžino). Ortonormirana baza je torej

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

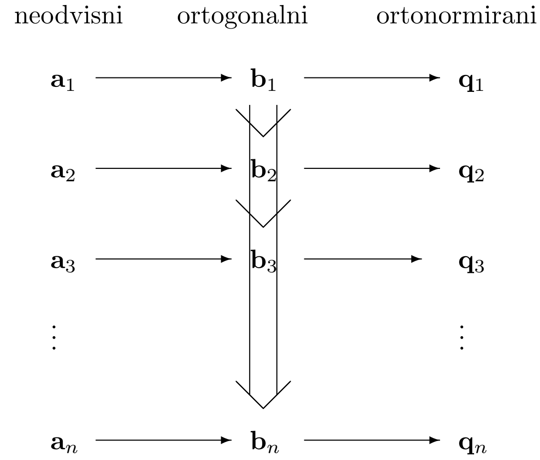
Ideja Gram-Schmidtovega procesa je torej preprosta: od vsakega novega vektorja odštejemo njegove projekcije na že določene smeri. Na koncu vsakega od vektorjev delimo z njegovo dolžino. Tako dobljeni vektorji so ortonormirani.

4.4.5 QR razcep matrike

V 2 poglavju smo Gaussovo eliminacijo opisali v matričnem jeziku kot razcep matrike A na produkt spodnjetrikotne matriko L in zgornjetrikotne U, torej $A = LU$. Podobno bomo sedaj naredili tudi za Gram-Schmidtov postopek ortogonalizacije baze.

V matriko A po stolpcih zložimo vektorje prvotne baze, v matriko Q pa, prav tako po stolpcih, vektorje ortonormirane baze, ki smo jo dobili z Gram-Schmidtovim postopkom. Kako sta ti dve matriki povezani?

Ker so vsi stolpci matrike Q linearne kombinacije stolpcev matrike A, obstaja taka matrika R, da je $A = QR$. To je *QR-razcep* matrike A. Ugotoviti moramo, kakšna je matrika R.



Slika 4.10: Tok podatkov pri Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji

Izrek 4.15 *Iz linearno neodvisnih vektorjev* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ *z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo ortonormirane vektorje* $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$*. Matriki* A *in* Q *s temi stolpci zadoščajo enačbi* $A = QR$*, kjer je* R *zgornjetrikotna matrika.*

Dokaz: Poglejmo najprej za matrike 3×3:
Enačbo $A = QR$ z leve pomnožimo z Q^T. Ker ima Q ortogonalne stolpce, je $Q^T Q = I$, zato je $Q^T A = R$, kar pomeni, da enačba $A = QR$ izgleda kot

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T\mathbf{a} & \mathbf{q}_1^T\mathbf{b} & \mathbf{q}_1^T\mathbf{c} \\ & \mathbf{q}_2^T\mathbf{b} & \mathbf{q}_3^T\mathbf{c} \\ & & \mathbf{q}_3^T\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Matrika R je zgornje trikotna, saj so skalarni produkti $\mathbf{q}_2^T\mathbf{a}$, $\mathbf{q}_3^T\mathbf{a}$ in $\mathbf{q}_3^T\mathbf{b}$ enaki 0, ker so kasnejši stolpci matrike Q ortogonalni na prejšnje stolpce matrike A. Za večje matrike velja podoben sklep.

Primer 4.15 V primeru 4.15 smo imeli vektorje, ki jih lahko zložimo v matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Tako je matrika R, za katero je $A = QR$ enaka

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

4.5 Fourierove vrste

V tem razdelku bomo naredili izlet iz končnodimenzionalnih vektorskih prostorov v prostore z neskončno dimenzijo. V končnodimenzionalnih prostorih smo začeli z vektorji, linearnimi kombinacijami in skalarnim produktom. Te osnovne koncepte bomo morali prilagoditi neskončni dimenziji.

4.5.1 Neskončno dimenzionalni prostori

Neskončno dimenzionalni prostori se zelo razlikujejo od končno dimenzionalnih, ki smo jih spoznavali do sedaj, vendar nekatere koncepte lahko, nekoliko spremenjene, še vedno s pridom uporabimo.

Kako lahko opišemo vektor v neskončno dimenzionalnem prostoru? Imamo dve možnosti:

1. vektorji so neskončna zaporedja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. Na primer
$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots\right).$$
2. vlogo vektorjev prevzamejo funkcije. Na primer $f(x) = \cos x$.

Pogledali si bomo obe možnosti.

Ko smo videli, kako izgledajo vektorji z neskončno dimenzijami, si poglejmo, kako lahko izračunamo skalarni produkt teh vektorjev.

Skalarni produkt za neskončna zaporedja

Naravna posplošitev skalarnega produkta dveh neskončnih vektorjev

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots) \quad \text{in} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots)$$

na neskončna zaporedja je vrsta

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_iv_i\,.$$

Problem nastane, če vrsta ne konvergira. V tem je največja razlika med končnodimenzionalnimi in neskončnodimenzionalnimi vektorji, saj pri končnodimenzionalnih vektorjih tega problema nismo srečali.

Primer 4.16 Če izberemo $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (1, 1, \ldots)$, vrsta prav gotovo ne konvergira, saj vrsta

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1 + 1 + \cdots$$

divergira. Ker sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ enaka, pravzaprav računamo $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2$, kvadrat dolžine. Vektor $(1, 1, \ldots)$ ima torej neskončno dolžino.

Zaradi težav s konvergenco skalarnega produkta se omejimo na vektorje $\mathbf{u}$, katerih dolžina $||\mathbf{u}||$ je končna:

Definicija 4.16 *Vektorski prostor ℓ_2 je množica vseh neskončnih zaporedij $\mathbf{u}$ s končno dolžino*

$$||\mathbf{u}||^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots < \infty\,.$$

Primer vektorja s končon dolžino:

Primer 4.17 Vektor $\mathbf{u} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots)$ je v prostoru ℓ_2, saj je kvadrat njegove dolžine enak

$$||\mathbf{u}||^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}\,.$$

To je geometrijska vrsta s kvocientom $\frac{1}{4}$, zato je $||\mathbf{u}||^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$ in $||\mathbf{u}|| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, torej končna dolžina.

Za vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ iz prostora ℓ_2 je tudi skalarni produkt končno število

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} < \infty\,.$$

Za tako definiran skalarni produkt še vedno velja *Schwarzova neenačba* (izrek

1.9)

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| <= ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\,,$$

prav tako je tudi kot med vektorjema $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ enak φ, za katerega je

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}\,.$$

Skalarni produkt za funkcije

Poglejmo še, kako lahko skalarni produkt in dolžino definiramo tudi za funkcije. Za funkcije na intervalu $[a, b]$ dobimo naravno posplošitev vektorskega produkta, če vsoto zamenjamo z integralom.

Definicija 4.17 Skalarni produkt *funkcij* $f(x)$ *in* $g(x)$ *na intervalu* $[a, b]$ *je*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx\,.$$

Podoben problem, kot smo ga imeli pri vektorjih z neskončnim številom komponent, srečamo tudi pri funkcijah. Funkcije morajo biti na $[a, b]$ integrabilne, integral njihovega kvadrata pa končen.

Definicija 4.18 *Vektorski prostor* $L_2[a, b]$ *je množica vseh funkcij* f*, definiranih na intervalu* $[a, b]$*, za katere je kvadrat norme* $||f||$

$$||f||^2 = \int_a^b f(x)\,dx < \infty\,.$$

V prostoru $L_2(a, b)$ imamo skalarni produkt, zato lahko izračunamo kot med poljubnima funkcijama iz tega prostora.

Primer 4.18 Izračunajmo kot med linearno odvisnima funkcijama $f(x) = x$ in $g(x) = ax$ na intervalu $[0, 1]$.
Ker je kot določen z $\cos\varphi = \frac{(f,g)}{||f||\cdot||g||}$ (glej izrek 4.18), moramo izračunati skalarni produkt (f, g) in obe normi $||f||$ in $||g||$:

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx = \int_0^1 ax^2\, dx = \frac{a}{3},$$

$$||f||^2 = \int_0^1 f^2(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3},$$

$$||g||^2 = \int_0^1 g^2(x)\, dx = \int_0^1 a^2x^2\, dx = \frac{a^2}{3}.$$

Zato je

$$\cos\varphi = \frac{(f, g)}{||f|| \cdot ||g||} = \frac{a/3}{(1/\sqrt{3})(a/\sqrt{3})} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0.$$

Kot med linearno odvisnima funkcija je tako, podobno kot pri vektorjih, enak 0.

Od vseh možnih kotov med funkcijami je, tako kot pri vektorjih, daleč najbolj zanimiv pravi kot. Funkciji f in g sta na intervalu $[a, b]$ *ortogonalni*, kadar je njun skalarni produkt enak 0:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx = 0.$$

Primer 4.19 Za trigonometrične funkcije $\cos x$, $\cos 2x, \ldots$ ter $\sin x$, $sin 2x$, je primeren interval $[-\pi, \pi]$. Norma funkcije $f(x) = \sin x$ na tem intervalu je

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 \, dx} = \sqrt{\pi}\,,$$

ker je

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{in} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} x|_{-\pi}^{\pi} = \pi\,.$$

Skalarni produkt $f(x)$ in $g(x) = \cos x$ pa je

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \, dx = 0\,,$$

torej sta $\sin x$ in $\cos x$ ortogonalni na $[-\pi, \pi]$.

Še več: vse funkcije zaporedja $1 = \cos 0x$, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos 3x$, $\sin 3x, \ldots$ so med seboj ortogonalne.

4.5.2 Fourierove vrste

Videli smo že, kako lahko v končnodimezionalnem prostoru poljuben vektor razvijemo po baznih vektorjih. Videli smo tudi, kako nam pomaga, kadar je baza prostora sestavljena iz ortogonalnih vektorjev (glej enačbo (4.10)).

Poglejmo, kako lahko funkcijo (iz neskončnodimenzionalnega prostora) razvijemo po sistemu ortogonalnih funkcij.

Če je funkcija $f(x)$ odsekoma integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi)$, jo lahko razvijemo po sinusih in kosinusih:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots\,. \tag{4.13}$$

Ker razvijamo po funkcijah, ki so ortogonalne na $[-\pi, \pi)$, lahko koeficiente izračunamo, podobno kot v enačbi (4.10)

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{(1,f)}{(1,1)} &&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,, \\
a_k &= \tfrac{(\cos kx, f)}{(\cos kx, \cos kx)} &&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \\
b_k &= \tfrac{(\sin kx, f)}{(\sin kx, \sin kx)} &&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots\,.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Primer 4.20 Po trigonometričnih funkcijah želimo razviti odsekoma konstantno funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

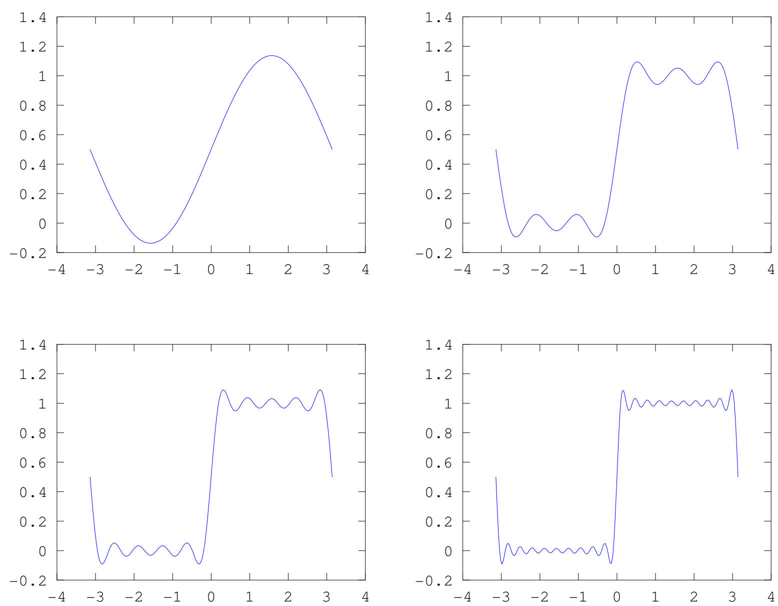
Najprej izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi dx &&= \frac{1}{2} \\ a_k &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos kx\, dx &&= \frac{1}{k\pi}\sin kx|_0^\pi = 0 \\ b_k &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin kx\, dx &&= \frac{-1}{k\pi}\cos kx|_0^\pi = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}\,. \end{aligned}$$

Zato je $b_{2k} = 0$ in $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$. Končno lahko zapišemo razvoj

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin{(2k-1)x}\,. \tag{4.15}$$

Grafi delnih vsot te Fourierove vrste so na sliki 4.11.



Slika 4.11: Delne vsote Fourierove vrste (4.15) z 2, 4, 6 in 11 členi.

Trigonometrične Fourierove vrste na intervalu $[-a, a]$

Z enačbami (4.14) si lahko pomagamo tudi, kadar imamo funkcijo, dano na intervalu, katerega dolžina ni enaka 2π.

S transformacijo $t \to \frac{\pi x}{a}$ iz funkcije $f(x)$, definirane na $[-a, a]$, dobimo funkcijo $f(x) = f(\frac{at}{\pi}) = g(t)$, definirano na $[-\pi, \pi]$. Zato f lahko zapišemo kot vsoto Fourierove vrste

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{a} + b_k \sin \frac{k\pi x}{a} \right) ,$$

kjer koeficiente izračunamo kot

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx \\ a_k &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{k\pi x}{a}\, dx \\ b_k &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx \,. \end{aligned}$$

4.5.3 Ortogonalni polinomi

Oglejmo si monžico polinomov

$$\mathbb{P} = \{p(x);\ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\} ,$$

definiranih na intervalu $[-1, 1]$. Množica $\mathbb{P}$ je vektorski prostor, saj zadošča vsem zahtevam definicije 3.1.

Kaj je baza prostora $\mathbb{P}$? Najenostavnejšo bazo sestavljajo *monomi*, to so polinomi z enim samim členom x^m, $m = 0, 1, \ldots$. Na intervalu $[-1, 1]$ monomi med seboj niso ortogonalni, saj je

$$(x^m, x^n) = \int_{-1}^{1} x^m x^n\, dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n}\, dx = \left. \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \right|_{-1}^{1} ,$$

kar je različno od 0, če je $m + n$ sodo število.

Primer 4.21 Iz monomske baze $a_0 = 1$, $a_1 = x$, $a_2 = x^2$ in $a_3 = x^3$ prostora polinomov $\mathbb{P}_3$ stopnje ne več kot 3 z Gram-Schmidtovim algoritmom (razdelek 4.4.4) izračunajmo bazo, ki bo ortogonalna na intervalu $[-1, 1]$.
Uporabili bomo podobne oznake kot v primeru 4.14: a_i so polinomi prvotne monomske baze in b_i ortogonalni polinomi. Tako je $b_0 = a_0 = 1$,

$$b_1 = a_1 - \frac{(b_0, a_1)}{(b_0, b_0)} b_0 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = x\,,$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_0, a_2)}{(b_0, b_0)} b_0 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} x = x^2 - \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 - \frac{(b_0, a_3)}{(b_0, b_0)} b_0 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2 \\ &= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^4\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x - \frac{\int_{-1}^{1} x^5\,dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})\,dx} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = x^3 - \frac{3}{5} x\,. \end{aligned}$$

Ortogonalnih polinomov v tem primeru nismo normirali, saj je pri polinomih v uporabi več različnih načinov "normiranja". Najpogostejši so

- vsi polinomi naj imajo normo enako 1. Polinom, ki ni normiran, delimo z njegovo normo;
- vsi polinomi naj imajo vrednosti 1 pri nekem x_0 za vse polinome. Polinom "normiramo" tako, da ga delimo z vrednostjo v x_0. Seveda mora biti x_0 točka, v kateri noben polinom nima ničle.
- vsi polinomi naj imajo vodilni koeficient enak 1. Polinomom, ki imajo vodilni koeficient enak 1, pravimo *monični polinomi*. Polinom "normiramo", če ga delimo z vodilnim koeficientom.

Definicija 4.19 *Polinomi* $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x), \ldots$ *sestavljajo* zaporedje ortogonalnih polinomov*, kadar*

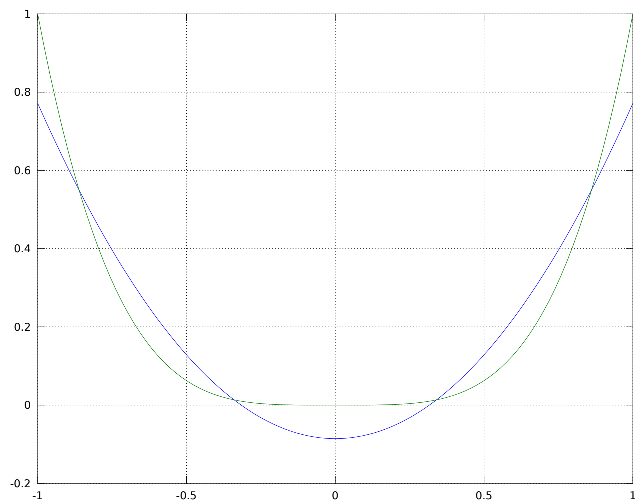
1. $p_i(x)$ *je polinom stopnje* i*;*
2. $(p_i(x), p_j(x)) = 0$*, kadarkoli je* $i \neq j$.

Ko imamo zaporedje ortogonalnih polinomov na intervalu $[a, b]$, lahko vsako integrabilno funkcijo projeciramo na podprostor polinomov stopnje k. Podobno kot v enačbi (4.13), lahko vsako integrabilno funkcijo f razvijemo v posplošeno Fourierovo vrsto po polinomih iz zaporedja ortogonalnih polinomov $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x), \ldots$

$$f(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \cdots + c_n p_n(x) + \cdots ,$$

kjer koeficiente c_i izračunamo kot

$$c_i = \frac{(p_i(x), f(x))}{(p_i(x), p_i(x))} = \frac{\int_a^b p_i(x) f(x)\, dx}{\int_a^b p_i^2(x)\, dx} . \tag{4.16}$$



Slika 4.12: Polinom x^4 (zelen) in njemu najbližji kubični polinom $p_3(x) = \frac{1}{5} + \frac{6}{7}(x^2 - \frac{1}{3}) + 0(x^3 - \frac{3}{5}x)$ (moder).

Primer 4.22 Izračunajmo pravokotno projekcijo polinoma x^4 na podprostor, ki ga določajo prvi štirje ortogonalni polinomi (na intervalu $[-1,1]$) iz primera 4.21, to je $b_0(x)=1$, $b_1(x)=x$, $b_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$ in $b_3(x)=x^3-\frac{3}{5}$.
Vsak kvadratni polinom lahko zapišemo kot linearno kombinacijo ortogonalnih polinomov $b_0(x)$, $b_1(x)$, $b_2(x)$ in $b_3(x)$, torej $c_0b_0(x)+c_1b_1(x)+c_2b_2(x)+c_3b_3(x)$, kjer koeficiente c_i izračunamo po formuli (4.16)

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{(b_0(x),x^4)}{(b_0(x),b_0(x))}=\frac{\int_{-1}^1 x^4\,dx}{\int_{-1}^1 dx}=\frac{2}{5}\\
c_1 &= \frac{(b_1(x),x^4)}{(b_1(x),b_1(x))}=\frac{\int_{-1}^1 x^5\,dx}{\int_{-1}^1 x^2\,dx}=0\\
c_2 &= \frac{(b_2(x),x^4)}{(b_2(x),b_2(x))}=\frac{\int_{-1}^1 (x^2-\frac{1}{3})x^4\,dx}{\int_{-1}^1 (x^2-\frac{1}{3})^2\,dx}=\frac{6}{7}\\
c_3 &= \frac{(b_3(x),x^4)}{(b_3(x),b_3(x))}=\frac{\int_{-1}^1 (x^3-\frac{3}{5}x)x^4\,dx}{\int_{-1}^1 (x^3-\frac{3}{5}x)^2\,dx}=0
\end{aligned}$$

tako, da je polinomu x^4 v prostoru kubičnih polinomov najbližji polinom $p_3(x)=\frac{1}{5}+0x+\frac{6}{7}(x^2-\frac{1}{3})+0(x^3-\frac{3}{5}x)$ (Slika 4.12).

4.6 Naloge

1. Zapiši baze stolpčnega, ničelnega, vrstičnega in levega ničelnega prostora naslednjih matrik in preveri veljavnost izreka 4.4:

   (a) $A=\begin{bmatrix}0&2&0\\2&1&0\\0&2&0\end{bmatrix}$

   (b) $B=\begin{bmatrix}1&1&4&1\\2&1&3&0\\3&1&2&1\\4&1&1&0\end{bmatrix}$

2. V prostoru $\mathbb{R}^4$ imamo podprostor V, ki je napet na vektorja

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}\quad\text{in}\quad\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

   Poišči bazo podprostora V in njegovega ortogonalnega komplementa.

3. Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{b}$ na premico, ki jo določa vektor $\mathbf{a}$, če je
   (a) $\mathbf{b} = [1\ 2]^T$ in $\mathbf{a} = [1\ 1]^T$;
   (b) $\mathbf{b} = [2\ 1\ 3]^T$ in $\mathbf{a} = [1\ 1\ 1]^T$;
   (c) $\mathbf{b} = [1\ -2\ -2\ 1]^T$ in $\mathbf{a} = [2\ -3\ 6\ 2]^T$.

4. izračunaj projekcijsko matriko P, ki projecira na premico, ki jo določa vektor $\mathbf{a}$, če je
   (a) $\mathbf{a} = [1\ -2]^T$;
   (b) $\mathbf{a} = [1\ 2\ 3]^T$;
   (c) $\mathbf{a} = [1\ -2\ -2\ 1]^T$.

5. Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{b} = [3\ 5\ 2\ 0]^T$ na podprostor, ki ga določajo bazni vektorji
   (a) $\mathbf{a}_1 = [1\ 0\ -1]^T$ in $\mathbf{a}_2 = [-1\ 2\ 1]^T$;
   (b) $\mathbf{a}_1 = [1\ 2\ 2\ 1]^T$ in $\mathbf{a}_2 = [1\ 1\ 4\ 5]^T$;
   (c) $\mathbf{a}_1 = [1\ 2\ 2\ 1]^T$, $\mathbf{a}_2 = [1\ 1\ 4\ 5]^T$ in $\mathbf{a}_3 = [1\ 2\ 1\ 0]^T$.

   Pomagajte si z računalnikom.

6. Izračunaj projekcijsko matriko, ki projecira na podprostor, ki ga določajo bazni vektorji
   (a) $\mathbf{a}_1 = [1\ 2\ -1]^T$ in $\mathbf{a}_2 = [1\ 2\ 1]^T$;
   (b) $\mathbf{a}_1 = [1\ 2\ 2\ 1]^T$ in $\mathbf{a}_2 = [1\ 1\ 5\ 3]^T$;
   (c) $\mathbf{a}_1 = [1\ 2\ 2\ 1]^T$, $\mathbf{a}_2 = [1\ 1\ 5\ 3]^T$ in $\mathbf{a}_3 = [1\ 0\ 1\ 0]^T$.

7. V formuli za projekcijsko matriko (4.7) imamo $A(A^TA)^{-1}A^T$. Če uporabimo izrek 2.7 za inverz produkta, potem pa še asociativnost matričnega produkta dobimo

$$A(A^TA)^{-1}A^T = A^T(A^{-1}(A^T)^{-1}A) = AA^{-1}(A^T)^{-1}A^T = I\,,$$

   kar bi pomenilo, da je vsaka projekcijska matrika enotska. Kaj je narobe pri tem sklepanju? V katerem posebnem primeru je ta sklep pravilen?

8. Z Gram-Schmidtovim algoritmom ortonormiraj naslednje baze v $\mathbb{R}^2$:

$$\text{a)}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}\quad \text{b)}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right\}\quad \text{c)}\left\{\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}\right\}.$$

9. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ enačba ravnine skozi koordinatno izhodišče $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$ določa podprostor. Določi ortonormirano bazo tega podprostora!

10. Vektorji $\mathbf{a}_1 = [2\ 3\ 5]^T$, $\mathbf{a}_2 = [0\ 2\ 1]^T$ in $\mathbf{a}_3 = [0\ 0\ 1]^T$ so linearno neodvisni (preveri!), zato so baza prostora $\mathbb{R}^3$.

    (a) Vektorje $\mathbf{u} = [1\ 1\ 1]^T$, $\mathbf{v} = [1\ \ -1\ 1]^T$ in $\mathbf{w} = [2\ \ -1\ \ -3]^T$ izrazi z vektorji baze $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

    (b) Z Gram-Schmidtovim postopkom poišči ortogonalno bazo $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ in vektorje $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ izrazi v tej ortogonalni bazi.

11. Polinomi $a_0(x) = 1$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = x(x-1)$ in $a_3(x) = x(x-1)(x-2)$ so linearno neodvisni (preveri!), zato so baza prostora polinomov stopnje 3. Polinom $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ izrazi v tej bazi.

Poglavje 5

Determinante

Vsaki (realni) kvadratni matriki pripada realno število, ki mu rečemo *determinanta* te matrike, kar bomo zapisali kot $\det(A)$, včasih tudi kot $|A|$. To število nam pove glavne informacije o sami matriki. Če je determinanta enaka 0, je matrika singularna. Kadar je vrednost determinante matrike A različna od 0, je matrika A obrnljiva in determinanta inverzne matrike $\det(A^{-1})$ je enaka $1/\det(A)$.

S pomočjo determinant lahko inverzno matriko tudi izračunamo, vendar je postopek računsko preveč zahteven, da bi bil uporaben. Prav tako lahko determinante uporabimo za reševanje sistema linearnih enačb s Cramerjevim pravilom; tudi to je zaradi zahetevnega računanja poleg zelo majhnih sistemov (dve enačbi z dvema neznankama) uporabno bolj kot teoretično orodje. Bolj pa se uporaba determinant obnese pri računanju ploščin in prostornin, tudi za večdimenzionalne objekte.

Kako lahko determinanto izračunamo? Spoznali bomo tri načine:

Pivotna formula: Z Gaussovim algoritmom matriko predelamo na trikotno obliko. Determinanto dobimo kot produkt pivotov;

Velika formula: Seštejemo $n!$ produktov po n števil;

Kofaktorska formula: Izračunamo linearno kombinacijo n determinant reda $n-1$.

Pri definiciji determinante imamo več možnosti. V večini učbenikov je determinanta definirana kar z veliko formulo, nekateri avtorji pa deteminante definirajo rekurzivno s kofaktorji ali pa, tako kot bomo storili tukaj, determinanto opredelimo z njenimi lastnostmi. Seveda so vse te definicije deteminante enakovredne, tako da lahko iz vsake od teh definicij ostale izpeljemo kot lastnosti.

Najlaže je izračunati determinanto dvovrstne kvadratne matrike

$$\text{Determinanta matrike} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{je} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \tag{5.1}$$

5.1 Lastnosti determinant

Determinanto bomo definirali tako, da bomo navedli tri osnovne lastnosti, ki jim mora vsaka imeti determinanta. Vse ostale lastnosti determinant bomo izpeljali kot posledice teh treh osnovnih lastnosti.

5.1.1 Osnovne lastnosti determinant

Vse lastnosti determinant so popolnoma določene s tremi osnovnimi lastnostmi, katerih veljavnost bomo sproti preverjali na determinanti reda 2, določeni z enačbo (5.1). Naštejmo tri osnovne lastnosti:

Lastnost 1 *Determinanta enotske matrike je* $\det(I) = 1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad in \quad \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Primer 5.1 Preverimo to lastnost na determinanti reda 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1\,.$$

Lastnost 2 *Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dve vrstici.*

Primer 5.2 Preverimo

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\,.$$

S pomočjo prvih dveh lastnosti lahko izračunamo determinanto vsake permutacijske matrike. S postopnimi menjavami vrstega reda vrstic iz permutacijske matrike vedno lahko dobimo enotsko matriko. Zato je determinanta permutacijske matrike enaka $+1$, če dobimo enotsko matriko po sodem številu zamenjav vrstic, če do enotske matrike pridemo po lihem številu zamenjav vrstic, je determinanta permutacijske matrike enaka -1.

Tretja lastnost determinante je bolj zapletena, zato jo bomo razdelili v dve "podlastanosti". Tretja lastnost (skupaj s prvima dvema) natanko določa vse deterimante.

Lastnost 3 *Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej. To pomeni da se*

a. *determinanta pomnoži s faktorjem t, če eno vrstico determinante (vsak element v tej vrstici) pomnožimo s faktorjem t*

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix};$$

b. *determinanta je vsota dveh determinant, ki se razlikujeta le v eni vrstici, če je v prvotni determinanti ta vrstica vsota obeh vrstic, ostale vrstice pa so enake v vseh treh determinantah:*

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Pozor! Kadar množimo matriko A s skalarjem t, se vsak element matrike pomnoži s skalarjem. Ko računamo determinanto produkta matrike s skalarjem tA, skalar t izpostavimo iz vsake vrstice posebej, zato je $\det(tA) = t^n \det(A)$, kjer je n število vrstic (ali stolpcev) determinante.

Primer 5.3 Preverimo obe lastnosti za determinante 2×2. Najprej množenje s skalarjem — leva stran je enaka

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = tad - tbc$$

desna stran pa

$$t\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = t(ad - bc)\,,$$

kar je enako na obeh straneh.
Preverimo še drugi del pravila. Najprej levo stran

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = (a+a')d - (b+b')c\,,$$

nato pa še desno stran

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc + a'd - b'd\,,$$

in spet se leva in desna stran ujemata.

Lastnosti 1–3 so pravzaprav aksiomi (zato jih nismo dokazovali), s katerimi je determinanta poljubne kvadratne matrike natanko določena. Poglejmo, kako s pomočjo teh treh lastnosti izpeljemo formulo (5.1).

Primer 5.4

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+0 & 0+b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Upoštevajmo lastnost $3b$, da dobimo dve determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c+0 & 0+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c+0 & 0+d \end{vmatrix}.$$

Še enkrat uporabimo lastnost $3b$, tokrat na drugi vrstici, da dobimo štiri determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}.$$

Sedaj lahko uporabimo lastnost $3a$ iz vsake vrstice vsake od determinant izpostavimo skupni faktor

$$D = ac\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + bd\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dobili smo štiri determinante, sestavljene le iz ničel in enic. Druga determinanta $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ je determinanta enotske matrike, torej je zaradi lastnosti 1 enaka 1. Če pri tretji determinanti $\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$ zamenjamo obe vrstici, se zaradi lastnosti 2 determinanti zamenja predznak, dobimo pa determinanto enotske matrike, ki je zaradi lastnosti 1 enaka 1, torej moramo faktor cd odšteti. Tako nam ostaneta še prva $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$ in zadnja $\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)$ determinanta. Če tema dvema determinantama zamenjamo obe vrstici, se determinanti ne spremenita, obenem pa, zaradi lastnosti 2 morata spremeniti predznak. Edino realno število, kateremu se vrednost ne spremeni, če mu zamenjamo predznak, je 0. Zato sta prva in zadnja determinanta obe enaki 0.
Končni rezultat torej je

$$D = ac \cdot 0 + ad \cdot 1 + bd \cdot (-1) + bd \cdot 0 = ad - bc\,,$$

kar se ujema z rezultatom, ki smo ga zapisali že v enačbi (5.1).

5.1.2 Izpeljane lastnosti determinant

Naslednje lastnosti determinant so posledice prvih treh lastnosti, opisanih v prejšnjem razdelku, zato moramo pri vsaki posebej pokazati, da njena veljavnost sledi iz prvih treh (osnovnih lastnosti).

Lastnost 4 *Matrika, ki ima dva enaki vrstici, ima determinanto enako* 0.

Dokaz: Če med seboj zamenjamo vrstici, ki sta enaki, se matrika (in s tem deteminanta) ne spremeni, obenem pa mora, zaradi lastnosti 2 spremeniti predznak. Edino realno število, kateremu se vrednost ne spremeni, če mu zamenjamo predznak, je 0, zato mora biti determinanta z dvema enakima vrsticama enaka 0.

Primer 5.5 Preverimo to lastnost na primeru determinante 2×2 z dvema enakima vrsticama

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0\,.$$

Lastnost 5 *Če v matriki od poljubne vrstice odštejem mnogokratnik neke druge vrstice, se njena determinanta ne spremeni.*

Dokaz: Determinanto, v kateri smo eni od vrstic odšteli (ali prišteli) mnogokratnik neka druge vrstice, lahko, zaradi lastnosti $3b$ razdelimo v dve determinanti: prvotno, nespremenjeno determinanto in determinanto, kjer je ena od vrstic mnogokratnik neke druge vrstice. Ko ta mnogokratnik izpostavimo (zaradi lastnosti $3a$), dobimo determinanto z dvema enakima vrsticama, ki je zaradi lastnosti 4 enaka nič. Tako nam ostane le prvotna detrerminanta.

Primer 5.6 Na primeru dvovrstične determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c - ta & d - tb \end{vmatrix} = a(d - tb) - b(c - ta) = ad - tab - bc + tab = ad - bc\,.$$

Na osnovi lastnosti 1–5 pridemo do pomembne ugotovitve, da se pri Gaussovi eliminaciji determinanta matrike ohranja ali kvečjemu spremeni predznak, če zamenjamo vrstni red vrstic:

Izrek 5.1 *Naj bo A poljubna kvadratna matrika $n \times n$ in U njena vrstično-stopničasta oblika, ki jo dobimo z Gaussovo eliminacijo. Potem je*

$$\det(A) = \pm \det(U)\,.$$

Dokaz: Operacije, ki jih uporabljamo pri Gaussovi eliminaciji so

- Odštevanje mnogokratnika neke vrstice od neke druge vrstice. Zaradi lastnosti 5 se pri tem determinanta ne spremeni.
- Zamenjava dveh vrstic. Zaradi lastnosti 2 se pri tem spremeni le predznak determinante.

Zaradi izreka 5.1, smo problem računanja determinante reducirali na problem računanja determinante zgornjetrikotne matrike.

Lastnost 6 *Matrika, ki ima vrstico samih ničel, je enaka* 0.

Dokaz: Naj ima matrika A ničelno vrstico. Če ničelni vrstici odštejemo neko drugo vrstico, pomnoženo z (-1), se zaradi lastnosti 5 determinanta ne spremeni, dobimo pa matriko, z dvema enakima vrsticama, katere determinanta je enaka 0. Torej je tudi determinanta matrike A enaka 0.

Primer 5.7 Preverimo lastnost determinante z ničelno vrstico na determinanti (5.1)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0\,.$$

Iz izreka 5.1 vemo, da je determinanta matrike (do predznaka) enaka determinanti zgornjetrikotne matrike, ki jo dobimo po Gaussovi eliminaciji. Ugotoviti moramo le še, koliko je determinanta zgornjetrikotne matrike.

Lastnost 7 *Determinanta trikotne matrike A je produkt diagonalnih elementov:*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,.$$

Dokaz: Naj bo A trikotna matrika. Ločiti moramo primera, ko so vsi diagonalni elementi različni od nič od primera, ko je vsaj en element ne diagonali enak nič.

- Če so vsi diagonalni elementi različni od 0, lahko zunaj diagonalne elemente eliminiramo po običajnem postopku:
  - V primeru, ko je A zgornjetrikotna matrika, elemente v zgornjem trikotniku eliminiramo tako, da odštevamo mnogokratnike spodnjih vrstic od zgornjih vrstic, kot pri Jordanovi eliminaciji v razdelku 2.3.2.
  - Ko je A spodnjetrikotna matrika, elemente v spodnjem trikotniku eliminiramo tako, da mnogokratnike zgornjih vrstic odštevamo od spodnjih vrstic, kot pri Gaussovi eliminaciji v razdelku 2.2.

  Pri teh postopkih se determinanta ne spremeni (izrek 5.1 oziroma lastnost 5), prav tako se ne spremenijo diagonalni elementi. V obeh primerih dobimo diagonalno matriko, v kateri v vsaki vrstici izpostavimo diagonalni element

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} .$$

  Ker je determinanta enotske matrike enaka 1, smo lastnost 7 dokazali za primer, ko so vsi diagonalni elementi različni od 0.

- Kaj, če je kakšen od diagonalnih elementov enak 0? V tem primeru lahko z Gaussovo eliminacijo dobimo ničelno vrstico, pri čemer se determinanta zaradi izreka 5.1 ne spremeni, zaradi lastnosti 6 pa je enaka 0, kar je spet enako produktu diagonalnih elementov (vsaj eden med njimi je enak 0.)

Primer 5.8 Poglejmo trikotno matriko 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - b \cdot 0 = ad \,,$$

kar je produkt diagonalnih elementov, ali pa

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad - 0 \cdot c = ad \,,$$

prav tako produkt diagonalnih elementov.

S pomočjo determinante lahko preverimo, ali je kvadratna matrika obrnljiva ali singularna.

Lastnost 8 *Determinanta singularne matrike je enaka* 0*, determinanta obrnljive matrike je različna od* 0*.*

Dokaz: Na matriki A izvedemo Gaussovo eliminacijo, da dobimo zgornjetrikotno matriko U.

- Če je A singularna, ima U vsaj eno ničelno vrstico. Zaradi lastnosti 6 je $\det(U) = 0$, zaradi izreka 5.1 je $\det(A) = \det(U)$, torej mora biti tudi $\det(A) = 0$.
- Če je A obrnljiva, ima U na diagonali n pivotov (različnih od 0), torej je zaradi lastnosti 7 tudi $\det(A) \neq 0$.

Primer 5.9 Kako ta lastnost izgleda pri determinanti 2×2? Na matriki $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ naredimo Gaussovo eliminacijo.

- Če je $a \neq 0$, prvo vrstico pomnoženo s c/a odštejemo od druge
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{vmatrix}.$$
Matrika je obrnljiva, kadar je element v spodnjem desnem vogalu $d - \frac{c}{a}b$ različen od 0, torej, kadar je $ad - bc = |A| \neq 0$ in singularna, kadar je $d - \frac{c}{a}b = 0$, torej, kadar je $ad - bc = |A| = 0$.
- Če je $a = 0$, zamenjamo vrstici
$$\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix} = -bc\,.$$
Kadar sta b in c oba različna od 0, je matrika obrnljiva in njena determinanta $|A| = -bc \neq 0$. Če pa je b ali c enak 0, je matrika singularna in njena determinanta enaka 0.

Zanimiva je tudi zveza med determinanto in produktom kvadratnih matrik.

Lastnost 9 *Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant obeh matrik:*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,.$$

Dokaz: Ločeno bomo obravnavali dva primera:

- Če je matrika B singularna, je $\det(B) = 0$ zaradi lastnosti 8. Ker pa je tudi produkt AB singularna matrika, je pravtako $\det(AB) = 0$ in lastnost 9 velja.
- Če je matrika B obrnljiva, potem je $\det B \neq 0$.

V tem primeru si podrobneje poglejmo, kakšne lastnosti ima kvocient $D(A) := \det(AB)/\det(B)$. Če za $D(A)$ veljajo osnovne lastosti 1, 2, $3a$ in $3b$, potem je $D(A)$ determinanta matrike A.

1 Za $A = I$ enotsko matriko je

$$D(I) = \det(IB)det(B) = \det(B)/\det(B) = 1\,.$$

2 Naj bo A' matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki A med seboj zamenjamo dve vrstici. Potem (zaradi izreka 1.28) tudi produkt $A'B$ dobimo iz produkta AB tako, da med seboj zamenjamo isti dve vrstici. Zato je

$$D(A') = \det(A'B)\det(B) = -\det(AB)\det(B) = -\det(A)$$

torej $D(A)$ spremeni predznak pri medsebojni zamenjavi dveh vrstic matrike A.

$3a$ Naj bo $\hat{A}$ matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki A eno izmed vrstic pomnožimo s številom t. Potem se (zaradi izreka 1.28) tudi ista vrstica matrike AB pomnoži s t. Zato je

$$D(\hat{A}) = \det(\hat{A}B)/\det(B) = t\det(AB)/\det(B) = tD(A)\,,$$

torej se $D(A)$ pomnoži s t, če eno od vrstic matrike A pomnožimo s t.

3b Naj bo $\bar{A}$ matrika, ki jo dobimo tako, da v ničelni matriki i-to vrstico $1 \leq i \leq n$ zamenjamo z poljubnim vrstičnim vektorjem $\mathbf{v}^T$, kjer je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ in $\tilde{A}$ matrika, ki jo dobimo, če v matriki A i-to vrstico zamenjamo z $\mathbf{v}^T$. Potem je $A + \bar{A}$ matrika, ki ima vse vrstice razen i-te iste kot A, i-ta vrstica pa je vsota prvotne i-te vrstice in dodanega vrstičnega vektorja.

Zaradi izreka 1.28 je tudi produkt $(A+\bar{A})B$ matrika, ki je v vseh vrsticah razen i-ti enaka matriki AB, i-ta vrstica pa je vsota i-te vrstice matrike AB in produkta $\mathbf{v}^T B$. Zato je

$$D(A+\bar{A}) = \frac{\det(A+\bar{A})B}{\det(B)} = \frac{\det(AB) + \det\tilde{A}B}{\det(B)} = D(A) + D(\tilde{A})\,,$$

torej kvocient $D(A)$ ustreza tudi osnovni lastnosti $3b$.

Ker $D(A)$ ustreza vsem osnovnim lastnostim determinant, je determinanta, torej $D(A) = \det(A)$, zato je tudi $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Primer 5.10 Preverimo lastnost 8 za dvovrstne determinante. Po eni strani najprej zmnožimo dve matriki in nato izračunamo determinanto:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} &= (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) \\ &= acef+adeh+bcfg+bdgh \\ &\quad -acef-adfg-bceh-bdgh \\ &= adeh+bcfg-adfg-bceh\,. \end{aligned}$$

Po drugi strani pa najprej izračunamo obe determinanti in ju nato zmnožimo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = (ad-bc)(eh-fg) = adeh-adfg-bceh+bcfg\,.$$

V obeh primerih smo dobili istri rezultat.

Ta lastnost ima dve uporabni posledici.

Posledica 5.2 *Determinanta inverzne matrike je enaka*

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$$

in determinanta potence A^n matrike A je

$$\det(A^n) = (\det(A))^n\,.$$

Dokaz: Ker je

$$1 = \det(I) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A)\,,$$

in ker je, če A^{-1} obstaja, zaradi lastnosti determinante obrnljive matrike $\det(A) \neq 0$,

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)\,.$$

Če hočemo izračunati $\det(A^n)$, moramo večkrat uporabiti lastnost determinante produkta dveh matrik.

Primer 5.11 Preverimo, če ta posledica velja za najenostavnejši primer - matriko 2×2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Najprej moramo izračunati inverzno matriko A^{-1}, najbolje z Gauss-Jordanovo eliminacijo (glej razdelek 2.3.2):

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & \frac{-c}{a} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right].$$

Tako smo prišli do inverzne matrike

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}].$$

njena determinanta je $\det(A^{-1}) = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad-bc}$.
Da velja $\det(A^2) = (\det(A))^2$ lahko preveri bralec sam (naloga 1).

Povezavo med determinanto in transponiranjem opisuje naslednja lastnost.

Lastnost 10 *Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A.*

Dokaz: Ločeno bomo obravnavali dva primera:

- Če je matrika A singularna, je singularna tudi A^T in obe imata determinanto 0;

- Če matrika A ni singularna, izračunamo njen LU-razcep $PA = LU$. Ker so permutacijske matrike ortogonalne, lahko to enačbo z leve pomnožimo s P^T, da dobimo $A = P^T LU$. Če obe strani transponiramo, dobimo $A^T = U^T L^T P$. Zaradi lastnosti 9 moramo primerjati

  $$\det(A) = \det(P^T)\det(L)\det(U) \text{ z } \det(A^T) = \det(U^T)\det(L^T)\det(P).$$

  Ugotovimo lahko, da

  1. ker je matrika P permutacijska, je $\det(P) = \det(P^T)$, saj pri obeh lahko z istim številom menjav vrstic pridemo do enotske matrike;
  2. ker je matrika L spodnjetrikotna in L^T zgornjetrikotna, obe z enicami na diagonali, je (po lastnosti 7) $\det(L) = 1 = \det(L^T)$;
  3. ker je matrika U zgornjetrikotna in U^T spodnjetrikotna, je (zopet zaradi lastnosti 7) determinanta obeh matrik enaka (saj so diagonalni elementi obeh matrik isti).

  Zato mora biti tudi $\det(A) = \det(A^T)$.

Primer 5.12 Poglejmo še to lastnost na primeru determinante 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc\,,$$

kar je isto.

Lastnost 10 ima zelo pomembno posledico:

Posledica 5.3 *Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene stolpce. Med drugim:*

- *Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dva stolpca;*

- *Determinanta je enaka* 0*, če sta dva stolpca enaka;*

- *Determinanta je enaka* 0*, če so v vsaj enem stolpcu same ničle.*

Dokaz: Namesto matrike A gledamo njeno transponirano matriko A^T, ki ima zaradi lastnosti 10 isto determinanto.

5.2 Računanje determinant

V tem razdelu se bomo posvetii računanju determinant. Podrobneje bomo pregledali tri načine, s katerimi lahko pridemo do $\det(A)$:

Pivotno formulo, ki je povezana z Gaussovo eliminacijo in z LU-razcepom in je običajno najbolj učinkovit način;

"Veliko formulo", s katero lahko eksplicitno zapišemo deteminanto matrike s pomočjo njenih elementov, vendar je za računanje večjih determinant veliko preveč zapletena in

Kofaktorsko formulo, s katero računanje determinante prevedemo na računanje večjega števila manjših determinant. Primerna je predvsem, kadar je veliko elementov v matriki enakih 0.

5.2.1 Pivotna formula

Že v dokazu lastnosti 10 smo ugotovili, da je za izračun determinante $\det(A)$ dovolj izračunati LU razcep $PA = LU$. Ker je L spodnjetrikotna matrika z enicami na glavni diagonali, je zaradi lastnosti 7 njena determinanta $\det(L) = 1$. Matrika P je permutacijska (dobljena iz enotske matrike I z zamenjavo vrstic), torej je zaradi lastnosti 1 in lastnosti 2 njena determinanta $\det(P)$ enaka 1 ali -1. Zato je determinanta do predznaka enaka produktu pivotov.

Izrek 5.4 *Če je $PA = LU$ LU razcep matrike A, je*

$$\det(A) = \pm \det(U) = \pm u_{11} u_{22} \cdots u_{nn} . \tag{5.2}$$

Predznak $+$ ali $-$ je odvisen od tega, koliko zamenjav vrstic je bilo potrebno za LU razcep matrike A. Če je bilo število zamenjav vrstic sodo, velja predznak $+$, za liho število zamenjav pa predznak $-$.

Primer 5.13 S pomočjo pivotne formule izračunajmo determinanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Uporabimo Gaussovo eliminacijo

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 11 \\ 0 & -7 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 11 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-67}} \end{bmatrix}.$$

Iskana determinanta je produkt pivotov, torej 67.

S pomočjo formule (5.2) lahko izračunamo determinanto matrike, če poznamo vse pivote in število zamenjav vrstic pri Gaussovi eliminaciji. Velja pa tudi obratno: s pomočjo determinant lahko izračunamo pivote. Poglejmo kako.

Definicija 5.5 *Če je A kvadratna matrika $n \times n$, potem je njena k-*ta glavna vodilna poddeterminanta *deteminanta, ki jo dobimo tako, da vzamemo iz matrike A prvih k vrstic in stolpcev.*

Primer 5.14 Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

ima 1-vo vodilno glavno poddeterminanto $|1|$, drugo vodilno glavno poddeterminanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

in tretjo vodilno glavno poddeterminanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}.$$

Naj bo A poljubna matrika dimenzije $n \times n$ in naj bodo $A_k,\ k = 1, \ldots n -$

1 njene podmatrike reda $k \times k$ v levem zgornjem kotu, tako da je $\det(A_k)$ k-ta vodilna glavna poddeterminanta. Če element $a_{11} \neq 0$, zamenjava prve vrstice ni potrebna in a_{11} je že prvi pivot d_1, hkrati pa tudi prva vodilna glavna poddeterminanta.

Če pri Gaussovi eleminaciji tudi pri naslednjih korakih ni zamenjav vrstic, je prvih k pivotov d_k odvisnih le od matrike A_k. Pri tem je produkt prvih k pivotov $d_1 \cdots d_k$ enak k-ti vodilni glavni poddeterminanti $\det(A_k)$

$$\det(A_k) = d_1 d_2 \cdots d_k \, .$$

Končno lahko k-ti pivot d_k izračunamo kot kvocient dveh determinant

$$d_k = \frac{d_1 \cdots d_{k-1} d_k}{d_1 \cdots d_{k-1}} = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} \, .$$

5.2.2 Velika formula za determinanto

Pivotna formula je dobra za računanje determinante, vendar bi v radi zapisali tudi eksplicitno formulo, ki bi vključevala elemente a_{ij} originalne matrike A. Začnimo najprej s formulo za determinanto reda 3.

Determinanta 3×3

V primeru 5.4 smo izračunali determinanto matrike reda 2 samo s pomočjo osnovnih lastnosti determinante. V tem razdelku bomo izračunali determinanto kvadratne matrike reda 3. Ker je to precej bolj zahteven primer, bomo uporabljali vse lastnosti determinant.

Podobno lahko izračunamo determinanto matrike 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vsako vrstico razčlenimo v 3 enostavnejše vrstice (npr. $[a_{11}\ 0\ 0]$) s pomočjo lastnosti 3b. Tako dobimo 27 enostavnih determinant. Ko spustimo tiste, ki imajo vsaj eno ničelno vrstico ali stolpec, nam ostane 6 determinant brez neničelnih vrstic in stolpcev

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
= &\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} \\
+ &\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Z upoštevanjem lastnosti 3b lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&+ a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Za vsako determinanto še preštejemo, s koliko menjavami vrstic dobimo enotsko matriko in končno

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}
$$

Determinanta reda $n \times n$

Podobno lahko naredimo za determinante reda $n \times n$. Od 0 različni bodo le prispevki enostavnih determinant, ki bodo imele le en od 0 različen element v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu. Zato iz vsake vrstice in iz vsakega stolpca izberemo po en element, izračunamo njihov produkt, ga opremimo s pravim predznakom, vse take produkte seštejemo in pridemo do eksplicitne formule.

Izrek 5.6 *Determinanta kvadratne matrike reda n je*

$$|A| = \sum \det(P) a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\omega}, \tag{5.3}$$

kjer seštevamo po vseh $n!$ permutacijah stolpcev $P = (\alpha, \beta, \ldots, \omega)$ enotske matrike.

Velika formula nam sicer daje eksplicitno zvezo med elementi matrike in determinanto, vendar je za praktično uporabo preveč zapletena, saj število produktov, ki jih moramo sešteti, z naraščajočim redom determinante zelo hitro narašča. Pri determinanti reda 2 sta dva, pri 3 jih je 6, pri 4 že 24, potem 120 in 720. Pri determinanto reda n je $n! = n(n-1)(n-2)\cdots, 3 \cdot 2 \cdot 1$ produktov, pri $n = 11$ je to že skoraj 40.000.000 produktov, kar pomeni, da je pri večjih n velika formula za računanje determinant popolnoma neuporabna. Pri pivotni formuli pridemo pri večjih determinantah veliko hitreje do rezultata.

Primer 5.15 Z veliko formulo (5.3) izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je veliko elementov v matriki enakih 0, v formuli (5.3) ostaneta le dva produkta, različna od 0. Dobimo ju, če vzamemo označene elemente

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & \boxed{4} \\ 5 & 0 & \boxed{6} & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 4 \\ \boxed{5} & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & \boxed{8} & 0 \end{bmatrix}$$

Prvi produkt je $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = 168$, potrebujemo eno zamenjavo vrstic, da elemente postavimo na diagonalo, zato je ustrezen predznak $-$. Drugi produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 240$, ker sta za postavitev na diagonalo potrebni dve zamenjavi vrstic, je usrezni predznak $+$. Determinanta je $\det(A) = -168 + 240 = 72$.

5.2.3 Kofaktorji in kofaktorska formula

S *kofaktorsko formulo* determinanto prevedemo na več determinant manjšega reda. Idejo, na kateri sloni kofaktorska formula za izračun determinante, si oglejmo na primeru determinante reda 3.

Primer 5.16 Veliko formulo (5.3) za determinanto 3×3

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

lahko preuredimo tako, da zberemo skupaj produkte, v katerih so posamezni elementi prve vrstice

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\,.$$

V tej formuli so *faktorji* a_{1j} pomnoženi s svojimi *kofaktorji* C_{1j}. Kofaktor C_{11} je tako $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$. Če uporabimo kofaktorje, je formula

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

Vse kofaktorje, skupaj s faktorji, lahko za determinanto reda 3 predstavimo kot

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & a_{23} \\ \cdot & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & \cdot & a_{23} \\ a_{31} & \cdot & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & \cdot \end{bmatrix}.$$

Kofaktorji C_{1j} so, do predznaka natančno, determinante A_{1j} dimenzije 2×2, ki jih dobimo, ko v prvotni determinanti izpustimo vrstico in stolpec, v katerih se nahaja faktor a_{1j}. Predznak kofaktorja je $+$ za C_{11} in C_{13} ter $-$ za C_{12}. Odločitev, da smo zbrali skupaj produkte, v katerih so posamezni elementi prve vrstice je bila poljubna. Ravno tako bi se odločili, da grupiramo produkte, v katerih so posamezni elementi druge ali tretje vrstice. Tako bi dobili

$$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

ali

$$a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}\,.$$

Zaradi lastnosti lastnosti determinante transponirane matrike, bi lahko grupirali tudi posamezne elemente kateregakoli stolpca. Tako bi dobili

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j}, \quad j = 1, 2, \text{ ali } 3.$$

Pri determinantah reda n je podobno kot pri determinantah reda 3. Kofaktor elementa a_{ij} v i-ti vrstici in j-tem stolpcu je C_{ij}, poddeterminanta, ki jo dobimo, ko v prvotni determinanti zbrišemo i-to vrstivo in j-ti stolpec, pomnožena z $(-1)^{i+j}$.

Izrek 5.7 (Kofaktorska formula) *Če je A kvadratna matrika reda n, njeno determinanto lahko izračunamo z* razvojem po i-ti vrstici

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}\,. \tag{5.4}$$

Kofaktorje C_{ij} izračunamo kot $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, kjer je D_{ij} determinanta, ki jo dobimo, če v A izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

Dokaz: Skica dokaza: V veliki formuli grupiramo produkte, ki vsebujejo posamezne elemente i vrstice in pogledamo kofaktorje, ki so z njimi pomnoženi.

Preizkusimo kofaktorsko formulo na dobro znanem primeru determinante drugega reda.

Primer 5.17 Če razvijamo po prvi vrstici

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d + b(-c)\,,$$

kar je že znan rezultat. Če razvijemo po drugem stolpcu,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = b(-c) + d \cdot a\,,$$

dobimo isti rezultat.

Razvoj po kofaktorjih je uporaben predvsem takrat, ko ima matrika veliko elementov enakih 0, posebej, kadar je veliko ničel v isti vrstici ali stolpcu.

Primer 5.18 Izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 13 & 12 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ker je v prvem stolpcu le en element različen do nič, determinanto razvijmo po prvem stolpcu

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 13 & 12 & 4 \end{vmatrix}.$$

Dobljeno determinanto razvijmo po drugem stolpcu

$$\det(A) = 1 \cdot (-2) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3|4| = -24\,,$$

kjer smo determinanto reda 2 razvili po prvi vrstici.

5.3 Uporaba determinant

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj problemov, pri katerih lahko pridemo do rešitve z uporabo determinante:

- Cramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb;
- izračun inverzne matrike;
- Izračun ploščine romboida in prostornine paralelepipeda.

V naslednjem poglavju pa se bomo spoznali z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji matrike, kjer determinante tudi igrajo važno vlogo.

5.3.1 Cramerjevo pravilo

S Cramerjevim pravilom lahko eksplicitno zapišemo rešitev sistema enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Na videz izgleda kot bližnjica, s katero se izognemo računanju rešitve z Gaussovo eliminacijo in LU razcepom, vendar se izkaže, da je Cramerjevo pravilo, čeprav privlačno na prvi pogled, precej daljša pot do rešitve od eliminacije, ki smo jo podrobno spoznali v 2 poglavju.

Do Cramerjevega pravila nas pripelje preprosta ideja: če prvi stolpec enotske matrike reda n nadomestimo z vektorjem neznank $\mathbf{x}$, dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

ki ima determinanto x_1. To matriko z leve pomnožimo z A. Prvi stolpec tako dobljene matrike je $A\mathbf{x}$, torej $\mathbf{b}$, ostali stolpci so isti kot v matriki A:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \text{A} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =: B_1$$

Ko izračunamo determinante teh treh matrik dobimo

$$\det(A)x_1 = \det(B_1) \qquad \text{torej} \qquad x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}\,.$$

Ker lahko v enotski matriki z $\mathbf{x}$ zamenjamo katerikoli stolpec, lahko podobno izračunamo tudi vrednosti vseh drugih neznank:

Izrek 5.8 (Cramerjevo pravilo) *Če je A kvadratna matrika reda n in $\det(A) \neq 0$, potem lahko rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zapišemo s pomočjo determinant:*

$$x_1 = \frac{B_1}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{B_2}{\det(A)}, \quad \cdots \quad x_n = \frac{B_n}{\det(A)}\,,$$

kjer je vsaka od matrik B_j dobljena tako, da v matriki A zamenjamo j-ti stolpec z vektorjem $\mathbf{b}$.

Primer 5.19 V primeru 2.3 smo izračunali rešitev sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 3 \\ 3x + 8y - 5z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 7 \end{aligned}$$

z eliminacijo. Za primerjavo ga rešimo še s Cramerjevim pravilom. Potrebujemo štiri determinante

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -3\,, \quad \det(B_1) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 8 & 8 & -5 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 3\,,$$

$$\det(B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = -6 \quad \text{in} \quad \det(B_3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} = -3\,.$$

Vrednosti neznank so zato

$$x_1 = \frac{3}{-3} = -1, \quad x_2 = \frac{-6}{-3} = 2 \quad \text{in} \quad x_3 = \frac{-3}{-3} = 1\,,$$

kar je enako, kot smo dobili v primeru 2.3.

Za rešitev sistema n enačb z n neznankami s Cramerjevim, moramo izračunati $n+1$ determinanto reda n. Čeprav za izračun determinante uporabimo najučinkovitejšo metodo, t.j. Gaussovo eliminacijo, je to veliko dela. Kot vemo, je za rešitev sistema enačb dovolj ena sama Gaussova eliminacija.

Pozor! Cramerjevo pravilo je za reševanje sistemov z več kot 3 neznankami zaradi prevelikega števila potrebnih operacij popolnoma neprimerno!

5.3.2 Inverzna matrika

S pomočjo determinant (in kofaktorjev) lahko dobimo tudi lepo formulo, s katero lahko eksplicitno zapišemo elemente inverzne matrike. Na žalost ima ta formula skupno lastnost s Cramerjevim pravilom: število potrebnih operacij zelo hitro narašča z naraščajočim redom matrike.

Za motivacijo s Cramerjevim pravilom poiščimo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

kot rešitev enačbe $AX = I$, ki jo zapišemo po stolpcih:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za izračun elementov matrike X po Cramerjevem pravilu potrebujemo pet determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix},$$

Zadnje štiri determinante so d, $-c$, $-b$ in a, kar so ravno *kofaktorji* elementov matrike A, zato je

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Sedaj pa že lahko "uganemo", kakšen je rezultat za determinante reda n.

Izrek 5.9 *Inverzna matrika A^{-1} matrike A je transponirana matrika kofaktorjev, deljena z determinanto $|A|$:*

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)},$$

kjer je C matrika kofaktorjev matrike A.

Dokaz: Izrek velja natanko tedaj, ko je $AC^T = \det(A)I$, zato bomo izrek dokazali tako, da bomo izračunali produkt AC^T.

$$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Element matrike AC^T na poziciji $(1, 1)$ je skalarni produkt elementov prve vrstice matrike A z njihovimi kofaktorji, zato je (izrek 5.7) enak $\det(A)$. Tudi vsi ostali diagonalni elementi matrike AC^T so, ravno tako zaradi kofaktorske formule, enaki determinanti matrike A.
Element matrike AC^T na poziciji $(2, 1)$ je skalarni produkt druge vrstice matrike A s kofaktorji prve vrstice. Ker je to isto, kot da s kofaktorsko formulo računamo determinanto matrike A, ki smo ji prvo vrstico prepisali z drugo (torej ima matrika enaki prvo in drugo vrstico), mora biti rezultat enak 0 zaradi lastnosti determinante z dvema enakima vrsticama. Zaradi istega razloga so enaki 0 tudi vsi ostali zunajdiagonalni elementi matrike AC^T, zato je AC^T enotska matrika, pomnožena z $\det(A)$ in izrek je dokazan.

Primer 5.20 Izračunajmo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunati moramo $\det(A) = 9$ in matriko kofaktorjev

$$C = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 1 \\ 27 & 18 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrika je

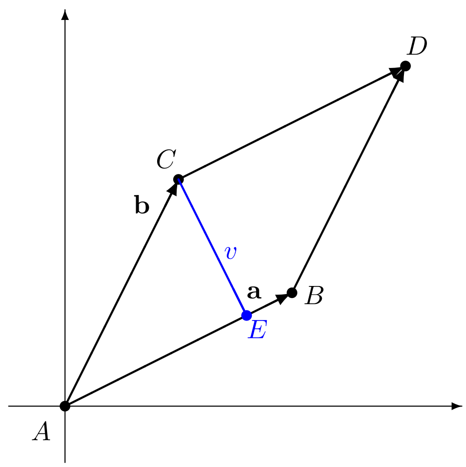
$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -10 & 27 & -1 \\ -8 & 18 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preizkusi, če je res!

5.3.3 Ploščine in prostornine

Naredimo še majhen skok v geometrijo. Eden najenostavnejših problemov, ki se jih spomnimo iz osnovne šole, je računanje ploščine pravokotnika. Za pravokotnik z osnovnico a in višino b je ploščina enaka ab. Nič težji ni problem ploščine paralelograma (romboida). Paralelogram z osnovnico a in višino v ima ploščino av. Ker je trikotnik polovica paralelograma, je ploščina trikotnika z osnovnico a in višino v enaka $av/2$.

Kaj pa če trikotnik ni podan s svojo osnovnico in višino, ampak poznamo le koordinate vseh treh oglišč? Seveda lahko iz oglišč z nekaj računanja dobimo osnovnico in višino, vendar to ni najboljša pot do ploščine. Tukaj nam lahko pomagajo determinante.



Slika 5.1: Ploščina paralelograma je produkt osnovnice in višine

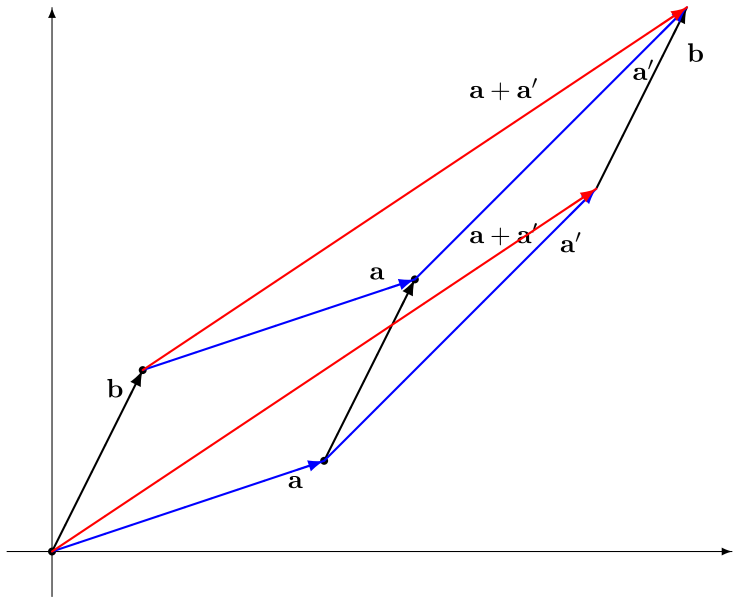
Primer 5.21 Izračunajmo ploščino paralelograma z oglišči v točkah $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(1,2)$ in $D(3,3)$ (slika 5.1).
Naj bo stranica AB osnovnica. Njena dolžina je $|AB| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Nekoliko več dela je z višino. Pravokotnica iz točke C seka osnovnico v točki E. Dobimo jo kot presečišče nosilke osnovnice $y = x/2$ in nosilke pravokotnice $y - 2 = -2(x-1)$. Ker reševanje sistemov linearnih enačb že obvladamo, povejmo le, da ima točka E koordinate $(8/5, 4/5)$. Višina paralelograma je $v = |CE| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{6}{5})^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Ploščina paralelograma je tako $|AB|v = \sqrt{5}\frac{3}{\sqrt{5}} = 3$.
Bolj preprosto do istega rezultata pridemo s pomočjo vektorjev in determinante. Paralelogram je določen z vektorjema $\mathbf{a} = \overline{AB} = [2\ 1]^T$ in $\mathbf{b} = \overline{AC} = [1\ 2]^T$, determinanta matrike A z stolpcema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ pa je

$$|A| = [\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,,$$

kar je isti rezultat, vendar dobljen po krajši in enostavnejši poti.

Rezultat, ki smo ga dobili s pomočjo determinante je sicer res pravilen, vendar se moramo vprašati, ali ni to naključje.

Izrek 5.10 *Ploščina paralelograma, določenega z vektorjema* $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ *je enaka* $\det([\mathbf{a}\ \mathbf{b}])$*, to je absolutni vrednosti determinante s stolpcema* $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b}$.



Slika 5.2: Ploščina paralelograma se sešteva, kot se sešteva vsaka stranica

Dokaz: Pokazali bomo, da ima ploščina iste tri osnovne lastnosti, s katerimi smo definirali determinante. Zato je ploščina enaka determinanti!

1. Ko je $A = I$, je paralelogram kvadrat s stranico 1. Njegova ploščina je 1.

2. Če zamenjamo dve vrstici, determinanta spremeni predznak, vendar absolutna vrednost ostane ista. Paralelogram pa tudi ostane isti.

3. Če vrstico pomnožimo s faktorjem t, se za ta faktor podaljša ena stranica paralelograma, zato se za faktor t poveča ploščina.

   Paralelogram naj bo napet na vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$. Če vektorju $\mathbf{a}$ prištejemo vektor $\mathbf{a}'$, dobimo paralelogram, ki ima isto ploščino, kot je vsota paralelogramov s stranicama $\mathbf{a}$ in $\mathbf{a}'$ (druga stranica vseh treh paralelogramov je isti vektor $\mathbf{b}$, glej sliko 5.2, saj je ploščina obeh trikotnikov z dvema modrima in eno rdečo stranico ista).

Zgornji dokaz izreka 5.10 lahko zlahka posplošimo na n dimenzionalne prostore. V $\mathbb{R}^n$ določa n linearno neodvisnih vektorjev n-dimenzionalno škatlo, katere n-dimenzionalna prostornina je enaka determinanti kvadratne matrike reda n, ki ima teh n vektorjev kot stolpce.

Tako je prostornina paralelepipeda, ki ga določajo linearno neodvisni vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ v $\mathbb{R}^3$ absolutna vrednost determinante $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]$. Prostornina tetraedra, ki ga napenjajo ti trije vektorji je $\frac{1}{6}$ prostornine paralelepipeda.

Do podobnega rezultata smo prišli, ko smo v poglavju obravnavali lastnosti mešanega produkta. To sploh ni čudno, saj velja

Lastnost 4 (lastnost mešanega produkta) *Mešani produkt vektorjev* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{c}$ *je enak determinanti matrike, ki ima te tri vektorje kot stolpce.*

Dokaz: Ta lastnost sledi iz lastnosti 3 mešanega produkta in iz izreka 5.10 in njegove posplošitve na n dimenzionalne prostore.

5.4 Naloge

1. Za matriko
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
preveri, da je $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

2. Izračunaj determinante
$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}, \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

3. Izračunaj determinante
$$\text{a)} \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} \frac{x}{1+x} & \frac{1-x}{1+x} \\ \frac{-1}{1+x} & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Za katere vrednosti spremenljivke x je determinanta $\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix}$ enaka 0?

5. Poiščite rešitve enačb
$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = 2, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1+x & 2x \\ 3-x & 1-x \end{vmatrix} + 8 = 0.$$

6. S pomočjo pivotne formule izračunaj determinante
$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

7. Skiciraj graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}.$$

8. Izračunaj determinanti

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \\ 3 & 7 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 1 & 6 \\ -1 & 7 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

9. S pomočjo "velike" formule izračunaj determinanti

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

10. S pomočjo kofaktorske formule izračunaj determinanti

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -5 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Poglavje 6

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Vzemimo neko kvadratno matriko A reda $n \times n$. Izberimo si še nek vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in izračunajmo produkt $A\mathbf{x}$. Večina vektorjev spremeni smer, ko jih pomnožimo z matriko. Lahko pa se zgodi, da smo pri izbiri vektorja imeli srečno roko in sta vektorja $\mathbf{x}$ in $A\mathbf{x}$ kolinearna, torej

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{6.1}$$

za neko realno število λ. Poglejmo si nekaj primerov:

Primer 6.1 Če za matriko izberemo enotsko matriko I, potem je za vsak vektor $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Enotska matrika torej ohranja smer vsakega vektorja. Ne samo smer, tudi dolžino, saj je v enačbi $I\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ število λ enako 1 za vsak vektor $\mathbf{x}$.

Primer 6.2 Če *permutacijsko matriko* $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pomnožimo z vektorjem $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dobimo

$$P\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Vektorja $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ in $P\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$ sta kolinearna le v dveh primerih:

1. Kadar sta x_1 in x_2 enaka. V tem primeru je $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$, torej je število λ iz enačbe (6.1) enako 1.

2. Kadar sta x_1 in x_2 nasprotna, $x_1 = -x_2$. V tem primeru je $\lambda = -1$.

Primer 6.3 Naj bo sedaj P projekcijska matrika, ki v $\mathbb{R}^3$ projecira na ravnino Σ. Kateri vektorji $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ so kolinearni s $P\mathbf{x}$?
Zaradi konstrukcije projekcijske matrike, ležijo vektorji $P\mathbf{x}$ v ravnini Σ. Velja še več: Vektorje, ki ležijo v ravnini Σ množenje z matriko P ohranja: $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ za vsak vektor $\mathbf{x} \in \Sigma$. Zato je za vse vektorje iz ravnine Σ enačba (6.1) izpolnjena za $\lambda = 1$.
Poseben primer pri projekcijski matriki P so vektorji, ki so pravokotni na ravnino Σ. Premica, pravokotna na Σ je namreč ničelni podprostor $N(P)$ matrike P. Tako je za vektor $\mathbf{x}$, ki je pravokoten na Σ, produkt $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tudi v tem primeru je enačba (6.1) izpolnjena in sicer za $\lambda = 0$.

6.1 Definicija in računanje

Vektorji, ki po množenju z matriko ohranjajo smer, so dovolj pomembni, da zaslužijo svoje ime:

Definicija 6.1 *Vektor* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*, za katerega je* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *je* lastni vektor*. Število* λ *je* lastna vrednost*.*

Pozor! Izraz *lastni vektor* je lahko zavajajoč, saj pomeni samo smer (enodimenzionalni podprostor). Vsak vektor v tej smeri je lastni vektor z isto lastno vrednostjo. Lastna vrednost pomeni, za koliko se pri množenju z matriko A vektorji v smeri $\mathbf{x}$ podaljšajo ali skrčijo.

Pozor! Ničelni vektor $\mathbf{0}$ ne more biti lastni vektor. Lahko pa je lastna vrednost enaka 0.

Primer 6.4 V primeru 6.1 smo ugotovili, da je lastna vrednost enotske matrike I enaka $\lambda = 1$, lastni vektor je vsak vektor iz $\mathbb{R}^n$.
V primeru 6.3 smo videli, da je za projekcijsko matriko P ena lastna vrednost enaka 1, lastni vektor je katerikoli vektor iz stolpčnega podprostora $C(P)$ (lastni podprostor). Druga lastna vrednost je 0, lastni vektor je katerikoli vektor iz ničelnega prostora $N(P)$ (spet lastni podprostor).

V zgornjem primeru smo za nekaj tipov matrik lastne vrednosti in lastne vektorje kar uganili iz znanih lastnosti matrik. Kako pa za neko matriko lahko izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje? V enačbi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ nastopata dve neznanki: vektor $\mathbf{x}$ in skalar λ. Enačba ni linearna (saj sta λ in $\mathbf{x}$ med seboj pomnožena), zato ne moremo uporabiti metod za reševanje linearnih enačb.

Enačbo za lastne vrednosti in lastne vektorje $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ lahko zapišemo tudi v obliki $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Da bi ta enačba kot enačba za lastni vektor $\mathbf{x}$ imela neničelno rešitev, mora biti matrika $A - \lambda I$ singularna. Lastne vrednosti so torej rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = 0\,. \tag{6.2}$$

Ta *karakteristična enačba* je algebrajska enačbe stopnje n, ker je $\det(A - \lambda I)$ polinom stopnje n, zato ima n korenov, nekateri koreni so lahko večkratni, kompleksni koreni nastopajo vedno kot par konjugiranih števil (dokler so koeficienti matrike realna števila).

Ko poznamo vse lastne vrednosti, lahko za vsako lastno vrednost λ lastne vektorje izračunamo kot ničelni podprostor matrike $A - \lambda I$. Za vsako k-kratno lastno vrednost je dimenzija ničelnega prostora največ k.

Na ta način smo ločili neznanki v nelinearni enačbi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Lastne vrednosti λ dobimo kot rešitev nelinearne karakteristične enačbe (6.2), za vsako lastno vrednost pa dobimo ustrezen lastni vektor kot rešitev homogenega sistema linearnih enačb $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Primer 6.5 Poiščimo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najprej zapišimo karakteristično enačbo, iz katere bomo dobili lastne vrednosti. Matrika, ki jo dobimo tako, da matriki A po diagonali odštejemo λ mora biti singularna, torej mora biti njena determinanta enaka nič:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0\,.$$

Izračunamo lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 4$.
Ko poznamo lastne vrednosti, se lotimo še računanja lastnih vektorjev. Za prvo lastno vrednost $\lambda_1 = -1$ dobimo homogen sistem enačb s singularno matriko

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Nadaljni postopek že obvladamo. Najprej matriko z eliminacijo predelamo na stopničasto obliko

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

od koder ugotovimo, da je prvi lastni vektor $\mathbf{x}_1 = [1,\ 2]^T$.
Za drugo lastno vrednost $\lambda_1 = 4$ dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Matriko (tudi ta je singularna) spet z eliminacijo preoblikujemo v stopničasto obliko, od koder dobimo še drugi lastni vektor $\mathbf{x}_2 = [-1,\ 3]^T$.
Matrika ima torej dve lastni vrednosti. Lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$ pripada lastni vektor $\mathbf{x}_1 = [1,\ 2]^T$, lastni vrednosti λ_2 pa lastni vektor $\mathbf{x}_2 = [-1,\ 3]^T$. Seveda so tudi vsi vektorji, kolinearni z lastnim vektorjem, lastni vektorji z isto lastno vrednostjo, saj je pri lastnom vektorju pomembna le *smer* in ne njegova dolžina.

Matrika reda n, pri kateri lahko najdemo n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kot v zgornjem primeru, je "lepa"matrika, ki nam pri reševanju problemov, na katere bomo naleteli v tem poglavju, ne bo povzročala večjih nevšečnosti.

Oglejmo si še en, nekoliko drugačen primer.

Primer 6.6 Izračunajmo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Spet najprej rešimo karaktreristično enačbo

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

od koder izračunamo eno samo, vendar dvojno lastno vrednost $\lambda_{12} = 2$. Nato poiščemo lastni vektor kot rešitev homogenega sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Lastni vektor je $\mathbf{x} = [1\ 1]^T$. Matrika B ima torej le eno (dvojno) lastno vrednost, ki ji pripada en lastni vektor. Matriko, ki ima ima manj lastnih vektorjev, kot je njen red, imenujemo *degenerirana matrika.*

Kasneje bomo videli, da so večkratne lasne vrednosti vir problemov pri uporabi lastnih vrednosti.

Tudi naslednji primer nam po pokazal novo plat problema lastnih vresdnosti:

Primer 6.7 Oglejmo si, kakšne lastne vrednosti in lastne vektorje ima *rotacijska matrika* Q, ki nam vsak vektor v ravnini zavrti za pravi kot

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lotimo se računanja lastnih vrednosti kot v prejšnjih dveh primerih. Karakteristična enačba

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

v realnih številih sploh nima rešitve, v kompleksnih številih pa najdemo lastni vrednosti $\lambda_1 = i$ in $\lambda_2 = -i$. Če želimo izračunati lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_1, moramo rešiti homogen sistem linearnih enačb, tokrat v kompleksnih številih

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Druga vrstica je ista, kot če bi prvo vrstico pomnožili z i, torej je odveč, lastni vektor je torej $\mathbf{x}_1 = [i\ 1]^T$. Za lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_2, moramo rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

in podobno kot prej dobimo $\mathbf{x}_2 = [-i\ 1]^T$.
Omenili smo že, da množenje z matriko Q vsak vektor v ravnini $\mathbb{R}^2$ zavrti za pravi kot, kar pomeni, da po množenju z matriko Q noben vektor iz $\mathbb{R}^2$ ne ohrani svoje smeri. Sicer smo našli dva lastna vektorja (po enega za vsako lastno vrednost), vendar ta dva vektorja nista iz prostora $\mathbb{R}^2$, temveč iz prostora $\mathbb{C}^2$, saj so njune komponente kompleksna števila.

V prjšnjih treh primerih smo si tri matrike, kjer smo našli tri različne tipe rezulatov:

1. V primeru 6.5 je imela matrika A dve lastni vrednosti, vsaki je pripadal svoj lastni vektor in oba lastna vektorja sta bila linearno neodvisna. Matrike, ki imajo toliko linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kolikor je red matrike, so "lepe", ker pri uporabi ne povročajo težav.

2. V primeru 6.6 je imela matrika B dvojno lastno vrednost in le en sam lastni vektor. Pri matrikah z večkratno lastno vrednostjo se lahko zgodi, da ima lastni podprostor manjšo dimenzijo, kot je večkratnost lastne vrednosti, kar pomeni, da ima matrika manj linearno neodvisnih lastnih vrednosti, kot je red matrike. Take matrike pri uporabi povzročajo težave, zato moramo biti pazljivi, ko jih uporabljamo.

3. V primeru 6.7 je imela matrika Q kompleksne lastne vrednosti. To pri uporabi ne povroča teržav, vendar se moramo zavedati, da se pravila računanja

s kompleksnimi vektorji nekoliko razlikujejo od pravil računanja z realnimi vektorji.

Pozor! Metoda za računanje lastnih vredosti, kot smo jo opisali (lastne vrednosti dobimo kot ničle karaterističnega polinoma), je uporabna le za matrike majhnega reda $n \leq 3$. Pri matrikah večjega reda je ta metoda neuporabna zaradi nestabilnosti. Za večje matrike je bolj priporočljivo uporabljati numerične metode.

6.2 Osnovne lastnosti

Poglejmo si nekaj lastnosti lastnih vrednosti in lastnih vektorjev, ki jih bomo potrerbovali v nadaljevanju. Najprej, kako so lastne vrednosti in lastni vektorji kvadrata matrike povezani z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji osnovne matrike.

Izrek 6.2 *Če ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\mathbf{x}$, potem ima matrika A^2 lastno vrednost λ^2 in isti lastni vektor $\mathbf{x}$.*

Dokaz: Če je $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, potem je

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}\,.$$

Preverimo ta rezultat še ne primeru:

Primer 6.8 V primeru 6.5 smo za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

izračunali lastno vrednost -1 z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_1 = [1\ 2]^T$ in lastno vrednost 4 z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_2 = [-1\ 3]^2$. Izračunajmo še lastni vrednosti matrike A^2.
Ker je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -18 & 10 \end{bmatrix}.$$

Njene lastne vrednosti dobimo iz karakteristične enačbe

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ -18 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 17\lambda + 16 = 0\,,$$

katere rešitvi sta $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 16$. Ustreznih lastnih vektorjev niti ni treba računati, prepričati se moramo le, da za lastna vektorja matrike A velja $A^2\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$ in $A^2\mathbf{x}_2 = 16\mathbf{x}_2$, kar prepuščamo prizadevnemu bralcu.

Iz izreka 6.2 lahko hitro ugotovimo, da imajo tudi višje potence matrike podobno lastnost.

Posledica 6.3 *Če ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\mathbf{x}$, potem ima matrika A^k lastno vrednost λ^k in isti lastni vektor $\mathbf{x}$.*

Dokaz:

$$A^k\mathbf{x} = A^{k-1}\lambda\mathbf{x} = A^{k-2}\lambda^2\mathbf{x} = \cdots A\lambda^{k-1}\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}.$$

Podobno lahko ugotovimo tudi lastne vektorje in lastne vrednosti za inverzno matriko:

Posledica 6.4 *Če ima matrika A lastno vrednost λ in lastni vektor $\mathbf{x}$, potem ima inverzna matrika lastno vrednost $1/\lambda$ in lastni vektor $\mathbf{x}$.*

Dokaz: Enačbo $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ z desne pomnožimo z A^{-1} in delimo z λ, da dobimo

$$A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}\,.$$

Poglejmo še ne primeru:

Primer 6.9 V primeru 6.5 smo za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

izračunali lastno vrednost -1 z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_1 = [1\ 2]^T$ in lastno vrednost 4 z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_2 = [-1\ 3]^T$. Sedaj izračunajmo še lastne vrednosti Inverzne matrike A^{-1}.
Ker je

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},$$

dobimo lastne vrednosti iz karakteristične enačbe

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0\,,$$

torej sta lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, ki sta res inverzni vrednosti lastnih vrednosti matrike A. Lastnih vrednosti spet ne bomo računali, temveč bomo samo preverili, ali sta $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_2$ (lastna vektorja matrike A) tudi lastna vektorja matrike A^{-1}. Podrobnosti prepuščamo bralcu.

Pred nadaljevanjem potrebujemo še eno novo besedo:

Definicija 6.5 Sled *kvadratne matrike A reda n je vsota njenih diagonalnih elementov*

$$\mathrm{sled}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}\,.$$

Zvezo med lastnimi vrednostmi in sledjo matrike nam odkriva naslednji izrek:

Izrek 6.6 *Sled matrike je enaka vsoti vseh lastnih vrednosti, štetih z njihovo večkratnostjo. Če so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike reda n, potem je sled matrike enaka vsoti*

$$\mathrm{sled}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \,,$$

determinanta matrike pa produktu lastnih vrednosti

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdots \lambda_n \,.$$

Dokaz: Zapišimo karakteristični polnom matrike A. Po eni strani je karakteristični polinom determinanta

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} .$$

Zanimata nas vodilna dva člena polinoma, to pomeni koeficienta pri potencah λ^n in pri λ^{n-1}. Ker je determinanta vsota produktov elementov, po enega iz vsake vrstice in vsakega stolpca, nas torej zanima le produkt diagonalnih elementov $(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$. Členi, v katerih je eden izmed faktorjev zunajdiagonalni element a_{ij} imajo namreč stopnjo največ $n-2$, saj ne more vsebovati vsaj dveh faktorjev z λ, to sta $a_{ii}-\lambda$ in $a_{jj}-\lambda$. Zato je začetek karakterističnega polinoma

$$(-\lambda)^n + \mathrm{sled}(A)(-\lambda^{n-1}) + \cdots \tag{6.3}$$

Po drugi strani pa je karakteristični polinom, če poznamo vse lastne vrednosti $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ enak produktu

$$(\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) = (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(-\lambda)^n + \cdots \,,$$

zato je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{sled}(A)$.
Drugi del izreka (produkt lastnih vrednosti je enak determinanti) dobimo, če v obeh oblikah karakterističnega polinoma izberemo $\lambda = 0$.

Poglejmo, kako je bilo s tem v dveh primerih, kjer smo izračunali lastne vrednosti matrike.

Primer 6.10

1. V primeru 6.5 smo za matriko
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$
izračunali lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 4$. Sled matrike je $\text{sled}(A) = 1 + 2 = 3 = \lambda_1 + \lambda_2$, determinanta pa $\det(A) = -4 = \lambda_1\lambda_2$.

2. Matrika
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
v primeru 6.6 je imela lastni vrednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, sled matrike je $\text{sled}(B) = 1 + 3 = 4 = \lambda_1 + \lambda_2$, determinanta pa $\det(B) = 4 = \lambda_1\lambda_2$.

Zanimiva in uporabna je tudi ta lastnost:

Izrek 6.7 *Če ima matrika A lastno vrednost λ, ki ji pripada lastni vektor $\mathbf{x}$, potem ima matrika $A + cI$ lastno vrednost $\lambda + c$ z istim lastnim vektorjem $\mathbf{x}$.*

Dokaz:
$$(A + cI)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + cI\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + c\mathbf{x} = (\lambda + c)\mathbf{x}$$

Pozor! Zgornji izrek seveda ne velja, če namesto enotske matrike I v zgornjem izreku vzamemo poljubno matriko B. Če poznamo lastne vrednosti in lastne vektorje matrik A in B, ne moremo sklepati o lastnih vrednostih matrike $A + B$.

Primer 6.11 Če matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

iz primera 6.5, ki ima lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 4$ z lastnima vektorjema $\mathbf{x}_1 = [1\ 2]^T$ in $\mathbf{x}_2 = [-1\ 3]^T$, prištejemo matriko $2I$, dobimo

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Njena karakteristična enačba

$$\left| \begin{matrix} 3-\lambda & -1 \\ -6 & 4-\lambda \end{matrix} \right] = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0\,,$$

katere rešitvi sta 1 in 6, kar je ravno za 2 več kot lastni vrednosti prvotne matrike A
Bralec lahko zlahka sam preveri, da sta lastna vektorja matrik A in $A + 2I$ ista.

Naslednji izrek nam omogoča, da pri trikotnih matrikah zelo enostavno najdemo lastne vrednosti.

Izrek 6.8 *Lastne vrednosti trikotne matrike so enake diagonalnim elementom.*

Dokaz: Naj bo A zgornjetrikotna matrika z elementi a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ na diagonali. Ker je tudi matrika $A - \lambda I$ zgornjetrikotna, je kartakteristična enačba $\det(A - \lambda I) = 0$ enaka

$$(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0\,,$$

njene rešitve pa so ravno diagonalni elementi $\lambda_i = a_{ii}$.

6.3 Diagonalizacija matrike

V tem razdelku bomo pokazali, kako lahko znanje o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih matrike uporabimo. Če je $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike A, potem se produkt $A\mathbf{x}$ poenostavi v množenje s številom $\lambda\mathbf{x}$. Tako lahko zelo enostavno izračunamo tudi produkt $A^{233}\mathbf{x}$, ki je enak $\lambda^{233}\mathbf{x}$ in ne potrebujemo množenja z matriko.

Kadar ima matrika dovolj linearno neodvisnih lastnih vektorjev, da lahko iz njih sestavimo bazo prostora $\mathbb{R}^n$, lahko bistveno poenostavimo množenje matrike s poljubnim vektorjem iz prostora, tudi če ta ni lastni vektor. Začnimo kar s ključnim rezultatom.

Izrek 6.9 *Denimo, da ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Če jih zložimo kot stolpce v matriko S*

$$S = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n]\,,$$

potem je $\Lambda =: S^{-1}AS$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi λ_i, $i = 1, \ldots, n$ na diagonali

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dokaz: V produktu AS matriko A množimo z vsakim stolpcem matrike S, torej z vsakim lastnim vektorjem. zato je

$$AS = A\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix}.$$

Sedaj pa ločimo lastne vrednosti λ_i od lastnih vektorjev $\mathbf{x}_i$. Ker so stolpci pomnoženi vsak s svojo lastno vrednostjo, moramo matriko S z desne pomnožiti z matriko lastnih vrednosti Λ

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = S\Lambda\,.$$

Matrika S je obrnljiva, ker ima n linearno neodvisnih stolpcev, zato lahko enačbo $AS = S\Lambda$ z leve pomnožimo z A^{-1}.

Pozor! Kadar so lastne vrednosti matrike med seboj vse različne, so lastni vektorji zagotovo neodvisni. Vsako matriko, pri kateri se nobena lastna vrednost ne ponovi, lahko torej diagonaliziramo po tem izreku.
Več pazljivosti je potrebno, kadar ima matrika večkratne lastne vrednosti. Tedaj moramo za vsako večkratno lastno vrednost pogledati dimenzijo ničelnega prostora $N(A-\lambda I)$. Če je ta manjša od večkratnosti lastne vrednosti za vsaj eno lastno vrednost, je lastnih vektorjev premalo, matrika S ni kvadratna in S^{-1} ne obstaja.

Primer 6.12 Matrika naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najprej iz karakteristične enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$ izračunamo lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 4$, potem lastna vektorja kot rešitev sistemov $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dobimo $\mathbf{x}_1 = [1\ 2]^T$ in $\mathbf{x}_2 = [-1\ 3]^T$.
Sestavimo matriko S in izračunamo njen inverz S^{-1}

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Končno izračunajmo $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \Lambda$.

Pozor! Lastni vektorji v matriki S morajo biti v istem vrstnem redu kot lastne vrednosti v matriki Λ.

V dokazu izreka 6.9 smo ugotovili, da je $AS = S\Lambda$. S tem smo dokazali trditev izreka, da je $S^{-1}AS = \Lambda$, diagonalna matrika, katere diagonalni elementi so lastne vrednosti. Isti rezultat pa lahko interpretiramo še drugače: matriko A lahko zapišemo kot produkt $A = S\Lambda S^{-1}$. Tako imamo poleg dveh dekompozicij, ki smo ju že obravnavali (LU razcep in QR razcep) sedaj še tretjo: *razcep lastnih vrednosti*.

6.3.1 Potence matrike

Pozor! Vse trditve o uporabi diagonalizacije v nadaljevanju tega poglavja veljajo le, če ima matrika toliko linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kot je red matrike.

Naslednji rezultat nam lahko bistveno pomaga pri računanju potenc matrike.

Izrek 6.10 *Če je $A = S\Lambda S^{-1}$, potem je $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Kot je

$$A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda(S^{-1}S)\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}\,,$$

je tudi

$$A^k = (S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1}) = S(\Lambda(S^{-1}S)\Lambda\cdots(S^{-1}S)\Lambda)S^{-1} = S\Lambda^k S^{-1}$$

za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Potence diagonalne matrike izračunamo preprosto:

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}\,,$$

zato lahko preprosto izračunamo tudi potence poljubne diagonalizabilne matrike.

Primer 6.13 V primeru 6.12 smo diagonalizirali matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = S\Lambda S^{-1}.$$

Izračunajmo matriko A^5
V skladu z izrekom 6.10 je $A^5 = S\Lambda^5 S^{-1}$, torej

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^5 & 0 \\ 0 & 4^5 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 409 & -205 \\ -1230 & 614 \end{bmatrix}.$$

Pravilnost rezultata lahko bralec preveri bodisi z direktniom računom, bodisi s pomočjo računalnika.

6.3.2 Uporaba potenc matrike

Vzemimo matriko A reda $n \times n$ z n linearno neodvisnimi vektorji (kar pomeni, da se da diagonalizirati). Vzemimo nek vektor $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Zanima nas, kako se obnaša zaporedje vektorjev, definirano rekurzivno s pravilom $\mathbf{y}_{k+1} = A\mathbf{y}_k$. Tako je $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{y}_0$, nato $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{y}_1 = A^2\mathbf{y}_0$ in tako dalje $\mathbf{y}_k = A\mathbf{y}_{k-1} = A^k\mathbf{y}_0$. Posebej nas zanima, ali to zaporedje konvergira in kaj je limitni vektor.

Obnašanje zaporedja $\mathbf{y}_k$ je predvsem odvisno od lastnih vrednosti λ_i, $i = 1, \ldots, n$ matrike A.

Izrek 6.11 *Naj bo A kvadratna matrika reda n, ki ima n linearno neodvisnih vektorjev in $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Zaporedje vektorjev iz $\mathbb{R}^n$ naj bo definirano z $\mathbf{y}_{k+1} = A\mathbf{y}_k$. Potem velja*

- *Če je za vsaj eno lastno vrednost $|\lambda_i| > 1$, potem zaporedje $\mathbf{y}_k$ neomejeno narašča.*
- *Če so vse lastne vrednosti $|\lambda| < 1$, potem zaporedje $\mathbf{y}_k$ konvergira proti ničelnemu vektorju $\mathbf{0}$.*
- *Če je ena lastna vrednost enaka $\lambda_i = 1$, vse ostale pa $|\lambda| < 1$, zaporedje $\mathbf{y}_k$ konvergira proti $c_i\mathbf{x}_i$.*

Dokaz: Najprej $\mathbf{y}_0$ razvijemo po bazi lastnih vektorjev

$$\mathbf{y}_0 = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$$

in pomnožimo z A

$$A\mathbf{y}_0 = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{x}_n\,.$$

Prav tako je

$$A^k\mathbf{y}_0 = c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n\,. \tag{6.4}$$

1. Če je vsaj ena lastna vrednost $|\lambda_i| > 1$, ta člen neomejeno narašča, zato tudi zaporedje $\mathbf{y}_k$ neomejeno narašča.
2. Če so vse lastne vrednosti $|\lambda| < 1$, potem vsi členi razvoja (6.4) konvergirajo proti 0, zato tudi zaporedje $\mathbf{y}_k \to \mathbf{0}$.
3. Če so vse lastne vrednosti po absolutni vrednosti manjše od 1, razen $\lambda_i = 1$, potem v razvoju (6.4) vsi členi konvergirajo proti $\mathbf{0}$, razen $c_i\mathbf{x}_i$, ki se ne spreminja.

Poglejmo si, kako lahko metode, ki smo jih odkrili, uporabimo, da ugotovimo, kako hitro narašča zaporedje Fibonaccijevih števil.

Definicija 6.12 *Zaporedje, ki zadošča rekurziji $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, se imenuje* zaporedje Fibonaccijevih števil *F_k.*

Da zaporedje Fibonaccijevih števil določimo, moramo poleg rekurzijske formule podati še prvi dve števili iz zaporedja. Ostala so potem popolnoma določena z rekurzijsko formulo.

Primer 6.14 Če izberemo $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$, so naslednja Fibonaccijeva števila $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Radi bi odgovorili na vprašanje kako hitro naraščajo Fibonaccijeva števila? Zanima nas, na primer, koliko je F_{365}?
F_{365} sicer lahko izračunamo s pomočjo rekurzije $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, vendar za to potrebujemo precej potrpežljivosti. Ker bi radi poleg odgovora dobili tudi nekaj vpogleda v sam problem, poglejmo, kako si lahko pomagamo z diagonalizacijo matrike.
Fibonaccijevo zaporedje, ki je dvočlenska (skalarna) rekurzija, lahko zapišemo kot enočlensko vektorsko rekurzijo $\mathbf{y}_{k+1} = A\mathbf{y}_k$, ki jo že obvladamo. Začetna vrednost naj bo $\mathbf{y}_0 = [F_0\ F_1]^T = [1\ 0]^T$. Naj bo $\mathbf{y}_k = [F_{k+1}\ F_k]^T$. Potem pravilo $\begin{array}{l} F_{k+2} = F_{k+1} \quad + \quad F_k \\ F_{k+1} = F_{k+1} \end{array}$ lahko zapišemo v matrični obliki kot

$$\mathbf{y}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}_k \,.$$

Izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje te matrike:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0\,,$$

torej $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ in $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$. Ustrezna lastna vektorja sta $\mathbf{x}_1 = [\lambda_1\ 1]^T$ in $\mathbf{x}_2 = [\lambda_2\ 1]^T$. Začetni vektor $\mathbf{y}_0 = [0\ 1]^T$ izrazimo kot kombinacijo lastnih vektorjev

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{ali} \quad \mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

Od tod

$$\mathbf{x}_{365} = \frac{\lambda_1^{365}\mathbf{x}_1 - \lambda_2^{365}\mathbf{x}_2}{\lambda 1 - \lambda_2}$$

Tako je $F_{365} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{365} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{365} \right] \approx 8.5311 \cdot 10^{75}$. Ker je $\lambda_1 > 1$ in $|\lambda_2| < 1$, je pri večjih k vrednost λ_2^k zanemarljivo majhna. Zato členi Fibonaccijevega zaporedja naraščajo približno tako hitro kot $\lambda_1^k \approx 1.618^k$, ne glede na to, kakšne so bile začetne vrednosti.

6.4 Simetrične matrike

Simetrične matrike (definicija 2.11) so v linearni algebri zelo pomembne, tako v teoriji, kot tudi pri uporabi. V tem razdelku nas bo zanimalo, kakšne so lastne vrednosti in lastni vektorji simetričnih matrik.

Izrek 6.13 *Vse lastne vrednosti realne simetrične matrike so realne.*

Dokaz: Enačbo

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\,, \tag{6.5}$$

konjugiramo

$$A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$$

transponiramo

$$\bar{\mathbf{x}}^T A = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T$$

ter pomnožimo z $\mathbf{x}$ z desne

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\,.$$

Enačbo, ki smo jo tako dobili, primerjajmo z enčbo, ki jo dobimo, če v (6.5) obe strani skalarno pomnožimo z $\bar{\mathbf{x}}$

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}\,.$$

Ker se levi strani obeh enačb ujemata, se morata ujemata tudi desni strani

$$\lambda\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$$

in ker je $\bar{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$ za $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, mora biti $\bar{\lambda} = \lambda$, torej realen.

Primer 6.15 Izračunajmo lastne vrednosti simetrične matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz karakteristične enačbe

$$\left| \begin{matrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{matrix} \right] = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = 0\,,$$

dobimo tri realne lastne vrednosti

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{in} \quad \lambda_3 = 4\,.$$

Pri simetričnih matrikah se nam torej ni treba bati, da bi dobili kompleksne lastne vrednosti. Tudi naslednji rezultat je pomemben za praktično uporabo simetričnih matrik.

Izrek 6.14 *Lastni vektorji realne simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.*

Dokaz: Naj bo A realna simetrična matrika, ki ima različni lastni vrednosti λ_1 (z lastnim vektorjem $\mathbf{x}$) in λ_2 (z lastnim vektorjem $\mathbf{y}$). Tako je

$$A\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} \quad \text{in} \quad A\mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{y}\,.$$

Prvo enačbo pomnožimo z leve z $\mathbf{y}^T$, drugo z $\mathbf{x}^T$:

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{y}^T \mathbf{x} \quad \text{in} \quad \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \lambda_2 \mathbf{x}^T \mathbf{y}\,.$$

Tako je

$$\mathbf{y}^T(\lambda_1 \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T(A\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = (A^T\mathbf{y})^T\mathbf{x}\,,$$

kjer smo pri zadnjem enačaju uporabili lastnost transponiranja produkta dveh matrik. Če upoštevamo, da je matrika A simetrična (definicija 2.11), je

$$(A^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} \; = (A\mathbf{y})^T\mathbf{x} \; = \lambda_2 \mathbf{y}^T\mathbf{x}\,.$$

Tako smo ugotovili, da je

$$\lambda_1 \mathbf{y}^T\mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{y}^T\mathbf{x}\,.$$

Ker je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je to mogoče le, če je $\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0$, torej morata biti $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ ortogonalna.

Primer 6.16 V primeru 6.15 smo izračunali lastne vrednosti simetrične matrike. Izračunajmo še pripadajoče lastne vektorje.

1. Izračunati moramo ničelni prostor matrike $A - \lambda_1 I = A + 2I$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Pripadajoči lastni vektor je torej $\mathbf{x}_1 = [-1\ 1\ 1]^T$.

2. Ničelni prostor matrike $A - \lambda_2 I = A$ dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Pripadajoči lastni vektor je $\mathbf{x}_2 = [0\ \ -1\ 1]^T$.

3. Še ničelni prostor matrike $A - \lambda_3 I = A - 4I$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Tretji lastni vektor je torej $\mathbf{x}_3 = [2\ 1\ 1]^T$.

Hitro se lahko prepričamo, da so vsi trije lastni vektorji ortogonalni.

Izrek 6.14 nam zagotavlja, da so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, med seboj ortogonalni. Ostane nam še vprašanje: kaj je z lastnimi vektorji, ki pripadajo isti večkratni lastni vrednosti?

V primeru 6.6 smo videli, da ima lahko matrika z dvojno lastno vrednostjo le en linearno neodvisen lastni vektor (enodimenzionalni lastni podprostor). Vendar matrika v tem primeru ni bila simetrična. Za simetrične matrike velja, da vsaki lastni vrednosti pripada toliko linearno neodvisnih lastnih vektorjev, kot je večkratnost lastne vrednosti. Do tega rezultata bomo prišli postopoma. Začnimo s Schurovim izrekom:

Izrek 6.15 Schurov izrek *Za vsako kvadratno matriko reda n, ki ima le realne lastne vrednosti, obstaja taka ortogonalna matrika Q, da je*

$$Q^T AQ = T$$

zgornjetrikotna matrika, ki ima lastne vrednosti (lahko so kompleksne) matrike A na diagonali.

Dokaz: Iščemo tako ortogonalno matriko Q, da bo $AQ = QT$, kjer mora biti matrika T zgornjetrikotna. Prvi stolpec $\mathbf{q}_1$ matrike Q mora biti lastni vektor matrike A, zato, da sta prva stolpca matrik AQ in QT enaka $A\mathbf{q}_1$ in $t_{11}\mathbf{q}_1$. Ostali stolpci matrike Q niso lastni vektorji, ker je T zgornjetrikotna in ne diagonalna. Stolpec $\mathbf{q}_1$ dopolnimo s poljubnimi $n-1$ stolpci, ki jih ortonormiramo z Gram-Schmidtovim postopkom (glej razdelek 4.4.4) do ortogonalne matrike Q_1. Zaenkrat imamo

$$Q_1^T AQ_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\mathbf{q}_1 \cdots A\mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots \\ 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Izrek bomo dokazali z indukcijo glede na red n matrike.
Za $n = 1$ izrek očitno velja.
Če izrek velja za matrike reda $n-1$, za matriko A_2, ki je reda $n-1$, obstaja ortogonalna matrika Q_2, da je

$$Q_2^T A_2 Q_2 = T_2$$

zgornjetrikotna matrika. Ker je tudi matrika

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

ortogonalna, je (glej izrek 4.14) ortogonalna matrika tudi produkt $Q = Q_2 Q_1$, za katero je $Q^T AQ$ zgornjetrikotna, tako da izrek velja tudi za matrike reda n. S tem, po indukciji, velja za matrike poljubnega reda.

6.4.1 Spektralni izrek za simetrične matrike

S pomočjo Schurovega izreka lahko pokažemo, da so vse simetrične matrike diagonalizabilne, kar pomeni tudi, da ima vsaka simetrična matrika toliko neodvisnih lastnih vektorjev, kolikor je red matrike.

Izrek 6.16 **[Spektralni izrek]** *Vsako realno simetrično matriko A lahko razcepimo v produkt $A = Q\Lambda Q^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, Λ pa diagonalna z lasnimi vrednostmi matrike A na diagonali.*

Dokaz: Simetrična matrika ima le realne lastne vrednosti, zato po Schurovem izreku (izrek 6.15) obstaja ortogonalna matrika Q, da je $Q^T AQ = T$ zgornjetrikotna matrika. Zaradi simetrije matrike A je

$$T^T = (Q^T AQ)^T = Q^T AQ = T\,,$$

torej je matrika T tudi simetrična. Ker je zgornjetrikotna in simetrična, mora biti diagonalna.

Primer 6.17 V primeru 6.15 smo izračunali lastne vrednosti -2, 0 in 4, v primeru 6.16 pa lastne vektorje

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz lastnih vektorjev, ki so ortogonalni, sestavimo ortogonalno matriko (lastne vektorje moramo le normalizirati — deliti z njihovo dolžimo)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

iz lastnih vrednosti sestavimo diagonalno matriko

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

in izračunamo

$$Q^T \Lambda Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A\,.$$

Ker je ortogonalna matrika Q po stolpcih sestavljena iz lastnih vektorjev, vidimo, da ima simetrična matrika reda n vedno n lastnih vektorjev, ki so med seboj ortogonalni. Videli smo že, da so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim (izrek 6.14), med seboj ortogonalni. Iz spektralnega izreka (izrek 6.16) pa lahko ugotovimo, da vsaki k-kratni lastni vrednosti simetrične matrike pripada k linearno neodvisnih lastnih vektorjev, ki jih lahko izberemo tako, da so med seboj ortogonalni.

Posledica 6.17 *Vsako realno simetrično matriko lahko zapišem kot linearno kombinacijo matrik ranga* 1

$$A = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T + \ldots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T\,,$$

kjer so $\mathbf{q}_i$ *stolpci matrike* Q *(torej lastni vektorji matrike* A*).*

Dokaz: Produkt $Q\Lambda Q^T$ iz izreka 6.16 lahko vedno zapišemo kot

$$Q\Lambda Q^T = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T + \ldots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T\,.$$

Matrike $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T$ so projekcijske matrike, ki projecirajo na premico, ki jo določa vektor $\mathbf{q}_i$. Tako lahko vsako simetrično matriko zapišemo kot linearno kombinacijo med seboj ortogonalnih projekcijskih matrik.

Primer 6.18 Matriko iz primerov 6.15, 6.15 in 6.17 zapišimo kot linearno kombinacijo ortogonalnih matrik ranga 1.
Iz posledice 6.17 vemo, da je

$$A = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T + \ldots + \lambda_n \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T\,,$$

torej

$$-2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[-1\ 1\ 1]/3 + 0\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}[0\ -1\ 1]/2 + 4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[2\ 1\ 1]/6 =$$

$$= \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar je res enako začetni matriki A.

Ko smo izvedeli, da imajo simetrične matrike vse lastne vrednosti realne, se lahko sprašujemo dalje: koliko lastnih vrednosti je pozitivnih, koliko lastnih vrednosti je enakih 0 in koliko je negativnih. Pri simetričnih matrikah lahko na ta vprašanja odgovorimo, ne da bi eksplictno računali lastne vrednosti.

Mnogo lažje, kot računati lastne vrednosti velike matrike, je izračunati njene pivote. Edina povezava med lastnimi vrednostmi in pivoti matrike, ki jo do sedaj poznamo, je

$$\text{produkt vseh lastnih vrednosti} = \text{produkt vseh pivotov}\,,$$

ker sta oba produkta enaka determinanti, če seveda matrika ima dovolj pivotov.

Zveza med pivoti in lastnimi vrednostmi pa je pri simetričnih matrikah precej močnejša:

Izrek 6.18 *Za simetrično nesingularno matriko A je število pozitivnih pivotov enako številu pozitivnih lastnih vrednosti.*

Dokaz: Nesingularna matrika A naj ima LU razcep $A = LU$. Matrika L je spodnjetrikotna z enojkami na diagonali, U pa zgornjetrikotna s pivoti na diagonali.
Če zunajdiagonalne elemente matrik L in U zmanjšujemo proti 0 in obe diagonali pustimo konstantni, matrika A konvergira proti diagonalni matriki, ki ima pivote matrike A na diagonali. Njene lastne vrednosti so enake pivotom (matrika je diagonalna!), torej je zanjo število pozitivnih lastnih lastnih vrednosti enako številu pozitivnih pivotov, prav tako je število negativnih lastnih vrednosti enako številu negativnih pivotov.
Pri tem, ko smo zunajdiagonalne elemente matrik U in L zmanjševali proti 0, so pivoti ostali isti in nobena lastna vrednost ni mogla spremeniti predznaka, ker bi se sicer morala premakniti preko ničle, pri tem pa bi matrika postala singularna, kar pa ne more, ker se pivoti ne spreminjajo.
Zato se tudi pri matriki A število pozitivnih lastnih vrednosti ujema s številom pozitivnih pivotov.

Primer 6.19 Preverimo trditev iz izreka 6.18 za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Najprej izračunamo pivote

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{bmatrix},$$

torej so pivoti enaki 1, 1 in -4 (dva pozitivna in en negativen).
Lastne vrednosti matrike A (izračunane z MATLABom) so

$$\lambda_1 \approx -1.70375, \quad \lambda_2 \approx 0.17352, \quad \lambda_3 \approx 13.53023\,,$$

torej dve pozitivni in ena negativna lastna vrednost.

S pomočjo izrekov 6.7 in 6.18 lahko izračunamo, koliko lastnih vrednosti matrike A leži na poljubnem intervalu (a, b). Število pozitivnih pivotov matrike $A - aI$ nam pove, koliko lastnih vrednosti matrike A je večjih od a, število pozitivnih pivotov matrike $A - bI$ pa, koliko lastnih vrednosti matrike A je večjih od b. Iz razlike vidimo, koliko lastnih vrednosti matrike A je med a in b.

6.4.2 Pozitivno definitne matrike

V tem razdelku si bomo ogledali lastnosti simetričnih matrik, ki imajo vse lastne vrednosti pozitivne. Če smo v prejšnjem razdelku videli, da imajo simetrične matrike kar nekaj lastnosti, ki nam močno olajšajo računanje z njimi (realne lastne vrednosti, ortogonalni lastni vektorji), velja to še toliko bolj, če so vse lastne vrednosti pozitivne.

Definicija 6.19 *Kvadratna matrika je* pozitivno definitna*, kadar so vse njene lastne vrednosti pozitivne.*

Primer 6.20 Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

je pozitivno definitna, ker sta njeni lastni vrednosti, ki sta rešitvi kvadratne enačbe

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

enaki $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$ in torej obe pozitivni.

Pri matrikah reda 2 niti ni potrebno računati njenih lastnih vrednosti, da bi ugotovili, ali je pozitivno definitna. Zaradi izreka 6.6 je dovolj, če preverimo, da sta pozitivni determinanta in sled matrike.

Posledica 6.20 *Kvadratna matrika reda 2 je pozitivno definitna natanko tedaj, kadar sta pozitivni sled in determinanta matrike.*

Dokaz: Sled matrike je enaka vsoti lastnih vrednosti (izrek 6.6), determinanta pa produktu. Če sta vsota $\lambda_1 + \lambda_2$ in produkt $\lambda_1\lambda_2$ pozitivni, sta pozitivni tudi lastni vrednosti λ_1 in λ_2.
Po drugi strani je sklep še lažji. Če sta pozitivni obe lastni vrednosti, sta pozitivni tudi njuna vsota in njun produkt, torej sled in determinanta

Tudi pri večjih simetričnih matrikah ni potrebno računati lastnih vrednosti, če hočemo ugotoviti, ali je matrika pozitivno definitna. Ker je pivote precej lažje izračunati kot lastne vrednosti, lahko uporabimo izrek 6.18 in preverimo, ali so vsi pivoti pozitivni.

Primer 6.21 Preveriti želimo, ali je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna.
Z Gaussovo eliminacijo bomo izračunali pivote. Ker je matrika simetrična, se predznaki pivotov ujemajo s predznaki lastnih vrednosti (izrek 6.18).

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix},$$

pivoti so vsi pozitivni, zato so pozitivne tudi vse lastne vrednosti, matrika A je torej pozitivno definitna.

Simetrične pozitivno definitne matrike imajo še eno zanimivo lastnost:

Izrek 6.21 *Simetrična matrika A reda n je pozitivno definitna natanko tedaj, ko je za vsak vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0\,.$$

Dokaz: Najprej pokažimo, da je matrika pozitivno definitna, če je za vsak neničelni vektor $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$. Za vektor $\mathbf{x}$ izberimo lastni vektor z lastno vrednostjo λ. Potem je

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda ||\mathbf{x}||^2 > 0\,.$$

Ker je $||\mathbf{x}|| > 0$, mora biti $\lambda > 0$. Ker je bila λ poljubna lastna vrednost, morajo biti vse lastne vrednosti pozitivne, torej je A pozitivno definitna matrika.
Pokazati moramo še obratno smer: če je matrika A simetrična in pozitivno definitna, mora za vsak neničelni vektor $\mathbf{x}$ veljati $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$. Ker je matrika A simetrična, obstaja ortogonalna baza $\{\mathbf{x}_i, i = 1, \ldots, n\}$, sestavljena iz lastnih vektorjev. To pomeni, da lahko vsak vektor $\mathbf{x}$ razvijemo po lastnih vektorjih $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i$. sedaj pa izračunajmo

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \left(\sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}_j^T\right) A \left(\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \lambda_i \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_i\,,$$

kar je zaradi ortogonalnosti vektorjev $\mathbf{x}_k$ enako $\sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i ||\mathbf{x}_i||^2 > 0$, saj so zaradi pozitivne definitnosti vse lastne vrednosti $\lambda_i > 0$.

Primer 6.22 Pokažimo, da za pozitivno definitno matriko iz primera 6.21

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

velja izrek 6.21.
Naj bo $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$. Potem je

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ko ta produkt izračunamo, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A\mathbf{x} &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x - 1x_3 + 16x_2x_3 + 14x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 > 0\,, \end{aligned}$$

ne glede na vrednosti komponent vektorja $\mathbf{x}$.

Izrek 6.21 ima tudi zanimivo posledico. Pri seštevanju dveh matrik je težko ugotoviti, kaj se dogaja z njihovimi pivoti in lastnimi vrednostmi. Za pozitivno definitne matrike pa velja:

Posledica 6.22 *Če sta matriki A in B pozitivno definitni, je pozitivno definitna tudi njuna vsota $A + B$.*

Dokaz: Ker sta A in B pozitivno definitni matriki, je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ in $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$ za vsak $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Zato je tudi

$$\mathbf{x}^T (A + B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0 \quad \text{za vsak} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\,.$$

Pozitivno definitnost matrike lahko ugotovimo tudi s pomočjo determinant.

Izrek 6.23 *Matrika A je pozitivno definitna, kadar so vse njene vodilne glavne poddeterminante pozitivne.*

Dokaz: k-ta glavna vodilana poddeterminanta je produkt prvih k pivotov (izrek 5.4).

V 4 poglavju smo imeli pri projekcijah precej opravka z matrikami oblike $A^T A$. Med drugim smo ugotovili, da je $A^T A$ obrnljiva matrika, če so le stolpci matrike A linearno neodvisni (izrek 4.6). Sedaj lahko povemo še več:

Izrek 6.24 *Če so stolpci matrike R linearno neodvisni, je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.*

Dokaz: Pokazali bomo, da je $\mathbf{x}^T (R^T R)\mathbf{x} > 0$ za vsak vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x}^T (R^T R)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T R^T)(R\mathbf{x}) = (R\mathbf{x})^T (R\mathbf{x}) = ||R\mathbf{x}||^2 > 0\,,$$

kar pomeni (glej izrek 6.21), da je matrika $A = R^T R$ pozitivno definitna.

Velja pa tudi obratno:

Izrek 6.25 *Za vsako simetrično pozitivno definitno matriko A obstaja zgornjetrikotna matrika R, da je $A = R^T R$.*

Dokaz: Naj bo A pozitivno definitna simetrična matrika. Naj bo $A = LU$ njen LU razcep. Iz zgornjetrikotne matrike U izpostavimo diagonalne elemente, pa dobimo simetrično verzijo LU razcepa $A = LDL^T$, kjer mora biti $DL^T = U$. Ker so elementi matrike D pivoti martike A, so vsi pozitivni (izrek 6.18), zato jih lahko korenimo.
Naj bo $\sqrt{D}$ diagonalna matrika, katere elementi so koreni pivotov, tako da je $(\sqrt{D}^2 = D)$. Naj bo matrika $R = (L\sqrt{D})^T$. Potem je

$$R^T R = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T = LDL^T = A\,.$$

Ker je matrika R zgornjetrikotna, so njeni stolpci neodvisni.

Primer 6.23 Izračunajmo zgornjetrikotno matriko R, za katero je

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = R^T R\,.$$

Najprej naredimo LU razcep matrike A

$$\begin{bmatrix} \boxed{9} & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{9} & 6 & 3 \\ \frac{2}{3} & \boxed{4} & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{9} & 6 & 3 \\ \frac{2}{3} & \boxed{4} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \boxed{1} \end{bmatrix},$$

in zapišemo oba trikotna faktorja

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{9} & 6 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Ko iz matrike U izpostavimo pivote, dobimo

$$A = LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sedaj pa še D razdelimo na oba trikotna faktorja, vsak dobi $\sqrt{D}$

$$A = R^T R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vse dosedanje ugotovitve o simetričnih, pozitivno definitnih matrikah lahko povzamemo na kratko:

Izrek 6.26 *Simetrična matrika reda n, ki ima eno od spodnjih lastnosti, ima tudi ostale štiri:*

1. *Vseh n pivotov je pozitivnih;*
2. *Vseh n vodilnih glavnih determinant je pozitivnih;*
3. *Vseh n lastnih vrednosti je pozitivnih;*
4. *Za vsak $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ je $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$;*
5. *$A = R^T R$ za neko matriko R z linearno neodvisnimi stolpci.*

Dokaz: Vse trditve smo že dokazali:

1. v izreku 6.18;
2. v izreku 6.23;
3. je definicija 6.19;
4. je izrek 6.21;
5. sta izreka 6.24 in 6.25.

6.5 Razcep po singularnih vrednostih

Za simetrično matriko A vemo, da obstaja razcep $A = Q\Lambda Q^T$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev in Λ diagonalna matrika lastnih vrednosti.

Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ pa so z diagonalizacijo $A = S\Lambda S^{-1}$ hude težave:

- če A ni kvadratna, potem enačba $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ sploh nima smisla. Lastne vrednosti in lastni vektorji pravokotnim matrikam "ne pripadajo".
- Tudi če je A kvadratna, nima nujno dovolj neodvisnih lastnih vektorjev.
- Tudi če ima A dovolj lastnih vektorjev, navadno med seboj niso pravokotni.

Kljub temu lahko poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonaliziramo. Za to potrebujemo *singularne vektorje*. Cena, ki jo moramo plačati za diagonalizacijo splošne matrike v primerjavi s simetrično, sta dve različni ortogonalni matriki namesto ene same $A = U\Sigma V^T$, kjer sta U in V ortogonalni matriki reda m in n, matrika Σ pa je diagonalna reda $m \times n$.

Izrek 6.27 *Vsako realno $m \times n$ matriko A lahko zapišemo kot produkt $A = U\Sigma V^T$, kjer je matrika U ortogonalna $m \times m$, Σ diagonalna $m \times n$ in V ortogonalna $n \times n$.*

Diagonalni elementi σ_i matrike Σ so *singularne vrednosti*, stolpci matrike U so *levi singularni vektorji*, stolpci matrike V pa *desni singularni vektorji*.

Namesto dokaza si raje poglejmo, kako je ta rezultat v zvezi z štirimi osnovnimi prostori matrike. Naj ima matrika A rang r. Vsak vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se pri množenju z matriko A preslika v nek vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Naj bo V ortogonalna matrika dimenzije $n \times n$, o kateri govori izrek 6.27. Njeni stolpci (označimo jih z $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$) so ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^n$. Stolpci matrike U dimenzije $m \times m$ (označimo jih z $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$) pa so baza prostora $\mathbb{R}^m$.

Zaradi $A = U\Sigma V^T$ in zaradi ortogonalnosti matrike V mora veljati $AV = U\Sigma$. Iščemo torej tako ortonormirano bazo V prostora $\mathbb{R}^n$, ki se pri množenju z matriko A preslika v ortogonalno bazo $U\Sigma$ prostora $\mathbb{R}^m$ (stolpci matrike $U\Sigma$ so stolpci matrike U pomnoženi s diagonalnimi elementi diagonalne matrike Σ, ki jih bomo označili s σ_i).

Ker se vektorji iz ničelnega prostora $N(A)$ pri monženju z A preslikajo v ničelni vektor, nas zanimajo predvsem vektorji iz vrstičnega prostora $C(A^T)$. Zato vektorje iz ortonormirane baze V preuredimo tako, da bo prvih r razpenjalo vrstični prostor, torej $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in C(A^T)$. Ostalih $n-r$ torej pripada ničelnemu prostoru $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \in N(A)$. Ker je $A\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ za $i = r+1, \dots, n$, so elementi $\sigma_i = 0$ za vse $i = r+1, \dots, n$.

Celotna slika je torej taka:

1. Vektorji $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, ki so baza vrstičnega prostora $C(A^T)$, se pri množenju z matriko A preslikajo v vektorje $\sigma_1\mathbf{u}_1, \dots, \sigma_r\mathbf{u}_r$, ki so baza stolpčnega prostora $C(A)$.

2. Vektorji $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$, ki so baza ničelnega prostora, se pri množenju z A preslikajo v ničelni vektor $\mathbf{0}$.

Poiskati moramo torej tako ortonormirano bazo vrstičnega prostora $C(A^T)$, ki se bo pri množenju z matriko A preslikala v ortogonalno bazo stolpčnega prostora $C(A)$. Ko to imamo, lahko ortonormirano bazo v $C(A^T)$ dopolnimo z vektorji iz ničelnega prostora $N(A)$ do ortonormirane baze celega prostora $\mathbb{R}^n$ in tako dobimo matriko V. Prav tako lahko ortogonalno bazo stolpčnega prostora $C(A)$ dopolnimo do ortogonalne baze celega prostora $\mathbb{R}^m$ z vektorji iz levega ničelnega prostora $N(A^T)$.

Kako določiti matriki U in V, oziroma ortonormirano bazo *levih singularnih vektorjev* prostora $\mathbb{R}^m$ in ortonormirano bazo *desnih singularnih vektorjev* prostora $\mathbb{R}^n$?

Pomagali si bomo podobno, kot smo si v razdelku 4.3, Če je $A = U\Sigma V^T$, potem je

$$A^T A = V\Sigma^T U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T\,,$$

kar je spektralni razcep simetrične matrike $A^T A$, saj je Σ diagonalna matrika, tako kot tudi $\Sigma^T\Sigma$. Prav tako tudi

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U = U\Sigma\Sigma^T U^T\,,$$

kar je spektralni razcep simetrične matrike AA^T.

To pomeni, da lahko izračunamo leve singularne vektorje (stolpce matrike U) kot lastne vektorje simetrične, pozitivne matrike AA^T, desne singularne vektorje (stolpce matrike VV) pa kot lastne vektorje prav tako simetrične in pozitivno defintne matrike $A^T A$. Singularne vrednosti pa lahko izračunamo bodisi kot korene lastnih vrednosti matrike AA^T, bodisi kot korene matrike $A^T A$.

Singularne vrednosti so koreni lastnih vrednosti matrike $A^T A$ (pa tudi AA^T), ki so vse realne in nenegativne. Iz njih sestavimo diagonalno matriko Σ. Navadno singularne vrednosti uredimo padajoče $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

Primer 6.24 Izračunajmo SVD razcep matrike $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Najprej izračunamo matriko $A^T A = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$, ki ima lastno vrednost $\lambda_1 = 32$ z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_1 = [1\ 0]^T$ in lastno vrednost $\lambda_2 = 18$ z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_2 = [0\ 1]^T$. Ortogonalna matrika V in diagonalna Σ sta tako

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix}$$

Matrika $AA^T = \begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}$ ima isti lastni vrednosti kot $A^T A$, $\lambda_1 = 32$ z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_1 = [1\ 1]^T$ in $\lambda_2 = 18$ z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_2 = [1 - 1]^T$. Tako dobimo še

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Celotni razcep po singularnih vrednostih je tako

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T\,.$$

6.5.1 SVD in 4 osnovni prostori matrike

Matriki U in V vsebujeta ortonormirana baza štirih osnovnih prostorov matrike A:

1. prvih r stolpcev V je baza vrstičnega prostora $C(A^T)$;
2. zadnjih $n-r$ stolpcev V je baza ničelnega prostora $N(A)$;
3. prvih r stolpcev U je baza stolpčnega prostora $C(A)$;
4. zadnjih $m-r$ stolpcev U je baza levega ničelnega prostora $N(A^T)$.

6.5.2 Uporaba razcepa singularnih vrednosti

Podobno kot pri spektralnem izreku za simetrične matrike, nam tudi SVD razcep omogoca, da matriko napišemo kot linearno kombinacijo matrik ranga 1: če je $A = U\Sigma V^T$ matrika ranga r, potem je

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T .$$

Ta enačba je osnova *analize glavnih komponent* (angl. Principal Component Analysis - PCA), metode ki so jo najprej uporabljali v statistiki, danes pa je nepogrešljiva med drugim v računalniškem vidu in kompresiji podatkov.

Pri procesiranju signalov in govora se razcep po singularnih vrednostih uporablja kot filter, s katerim lahko ločimo šum od signala. Pri govoru, naprimer, so med posameznimi govornimi enotami presledki tišine, ki lahko zasedajo tudi polovico časa. Takrat do mikrofona prihajajo predvsem moteči šumi iz okolja. S pomočjo razcepa po absolutnih vrednostih se da izboljšati razmerje med signalom (govorom) in šumom.

Pri računalniški obdelavi slik se razcep po singularnih vrednostih uporablja za kompresijo slik in za odstranjevanja šuma in s tem izboljšanje jasnosti slike.

Poleg tega je razcep po singularnih vrednostih zelo učinkovito orodje za reševanje sistemov predoločenih linearnih enačb z metodo majmanjših kvadratov.

6.6 Naloge

1. Matrika
$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
vsak vektor iz $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ prezrcali preko ravnine $z = 0$ v vektor $Z\mathbf{x}$.
   (a) Izračunaj lastne vektorje in lastne vrednosti;
   (b) Pojasni vlogo lastnih vektorjev in lastnih vrednosti za zrcaljenje z matriko Z
2. Za matrike
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$
A^2 in $A+I$ izračunaj lastne vrednosti. V kakšni zvezi so lastne vrednosti teh treh matrik?

3. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrik A, B in $A+B$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Ugotovi, ali so lastne vrednosti matrike $A+B$ enake vsoti lastnih vrednosti matrik A in B!

4. Poišči lastne vrednosti matrik A, B, AB in BA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Ali so lastne vrednosti matrike AB enake produktu lastnih vrednosti matrik A in B?

   (b) Ali so lastne vrednosti matrike AB enake lastnim vrednostim matrike BA?

5. (Strang) V primeru 4.6 smo ugotovili, da je matrika

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   projekcijska. Izračunaj njene lastne vektorje.

   Namig: Lastne vrednosti projekcijske matrike so lahko le 0 in 1.

6. (Strang) Vsaka permutacijska matrika ima eno astno vrednost $\lambda = 1$, saj ohranja vektor $\mathbf{x} = [1, \ldots, 1]$. Izračunaj ostali lastni vrednosti (lahko sta kompleksni) naslednjih dveh permutacijskih matrik

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje naslednjih matrik

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Prepričaj se, da sled produkta dveh matrik ni odvisna od vrstnega reda faktorjev. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj sled(AB) in sled(BA).

9. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje naslednjih matrik
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 5 & 10 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$
Koliko so lastne vrednosti matrik $A+I$, $B-2I$ in $C+7I$?

10. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje naslednjih matrik
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

11. Diagonaliziraj matrike (glej izrek 6.9)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

12. Vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ naj bosta ortonormirana baza (definicija 4.9) prostora $\mathbb{R}^2$, matrika A pa naj bo $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$. Kolikšni sta lastni vrednosti matrike A? Preveri, če je vsota lastnih vrednosti $\lambda_1 + \lambda_2$ enaka sledi matrike A.

13. Iščemo matriko A, ki ima lastni vrednosti $\lambda_1 = -2$ z lastnim vektorjem $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\lambda_2 = 3$ z $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Nasvet: poglej izrek 6.9 .

14. Za matriko
$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$
izračunaj A^2, A^3, A^{10} in $\lim_{k\to\infty} A^k$. Pomagaj si z diagonalizacijo matrike.

15. Za katere vrednosti parametra a se matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
ne da diagonalizirati? Zakaj?

16. Za matrike
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ in } D = \begin{bmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$
in vektor $\mathbf{x} = [1\ 1]^T$ izračunaj prvih pet členov zaporedij $(A^k\mathbf{x})$, $(B^k\mathbf{x})$, $(C^k\mathbf{x})$ in $(D^k\mathbf{x})$. Kaj lahko poveš o obnašanju teh zaporedij za velike k? Nasvet: najprej izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje.

17. Matrika, ki vsak vektor iz $\mathbb{R}^2$ zasuka za kot φ je

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

   (a) Izračunaj lastni vrednosti matrike R (pazi: obe lastni vrednosti sta kompleksni).

   (b) Izračunaj še oba lastna vektorja (prav tako kompleksna).

   (c) Diagonaliziraj matriko R.

   (d) Preveri, ali velja formula za računanje potenc matrike R

$$R^n = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}.$$

   Pri tem moraš upoštevati *Eulerjevo formulo*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

Verzije — Revizije

Verzija 1.0

Začetna verzija, izdana januarja 2013 pri založbi FE in FRI. Obsega

- 225 strani, razdeljenih na 6 poglavij;
- 105 nalog in
- 41 slik

Verzija 1.1

Popravljena in dopolnjena izdaja, ki vsebuje:

1. Popravke Emila Žagarja;
2. Popravke Kristjana Shirgoskega;
3. Vec nalog v 2. poglavju
4. Dopolnjeno 5. poglavje
5. Dopolnjeno 6. poglavje

Literatura

[1] R. A. Beezer: *A First Course in Linear Algebra*, http://linear.ups.edu/.

[2] J. Graselli: *Linearna algebra*, DMFA, Ljubljana 1986.

[3] J. Heferon: *Linear Algebra*, http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/.

[4] T. Košir: *Linearna algebra*, http://www.fmf.uni-lj.si/~kosir/poucevanje/linalg.html.

[5] F. Križanič: *Linearna algebra in linearna analiza*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1969.

[6] A. I. Mal'cev: *Osnovy linejnoj algebry*, Nauka, Moskva 1970.

[7] G. Strang: *Introduction to Linear Algebra, 4. izdaja*, Wellesley - Cambridge Press, Wellesley 2009.

[8] I. Vidav: Višja matematika I, 12. izdaja, DMFA, Ljubljana 2008.