Mathematical Programming: What is meant by mathematical programming?

Mathematical programming refers to **mathematical models used to solve problems such as decision problems**. The terms are meant to contrast with computer programming which solves such problems by implementing algorithms which may be designed specifically for a given problem.

Management science is characterized by a scientific approach to managerial decision making. It attempts to apply mathematical methods and the capabilities of modern computers to the difficult and unstructured problems confronting modern managers. It is a young and novel discipline. Although its roots can be traced back to problems posed by early civilizations, it was not until World War II that it became identified as a respectable and well defined body of knowledge. Since then, it has grown at an impressive pace, unprecedented for most scientific accomplishments; it is changing our attitudes toward decision-making, and infiltrating every conceivable area of application, covering a wide variety of business, industrial, military, and public-sector problems. Management science has been known by a variety of other names. In the United States, operations research has served as a synonym and it is used widely today, while in Britain operational research seems to be the more accepted name. Some people tend to identify the scientific approach to managerial problem solving under such other names as systems analysis, cost–benefit analysis, and cost-effectiveness analysis. We will adhere to management science throughout this book. Mathematical programming, and especially linear programming, is one of the best developed and most used branches of management science. It concerns the optimum allocation of limited resources among competing activities, under a set of constraints imposed by the nature of the problem being studied. These constraints could reflect financial, technological, marketing, organizational, or many other considerations. In broad terms, mathematical programming can be defined as a mathematical representation aimed at programming or planning the best possible allocation of scarce resources. When the mathematical representation uses linear functions exclusively, we have a linear-programming model. In 1947, George B. Dantzig, then part of a research group of the U.S. Air Force known as Project SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs), developed the simplex method for solving the general linear-programming problem. The extraordinary computational efficiency and robustness of the simplex method, together with the availability of high-speed digital computers, have made linear programming the most powerful optimization method ever designed and the most widely applied in the business environment.

Consider the problem of constructing the largest rectangle with perimeter equalling p. This is a constrained optimization problem where we are seeking for the largest rectangle subject to constraint on its perimeter. This can be formulated as follows. Let us assume that x is the length of rectangle and y its width. Then

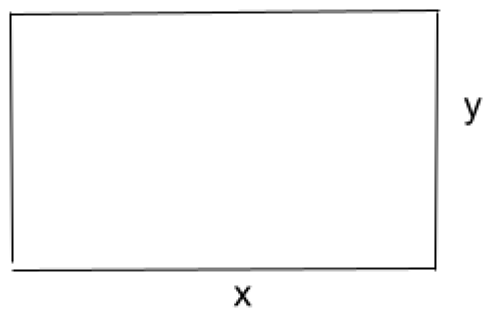
Maximize $f(x, y) = xy$

Subject to $2(x + y) = p$

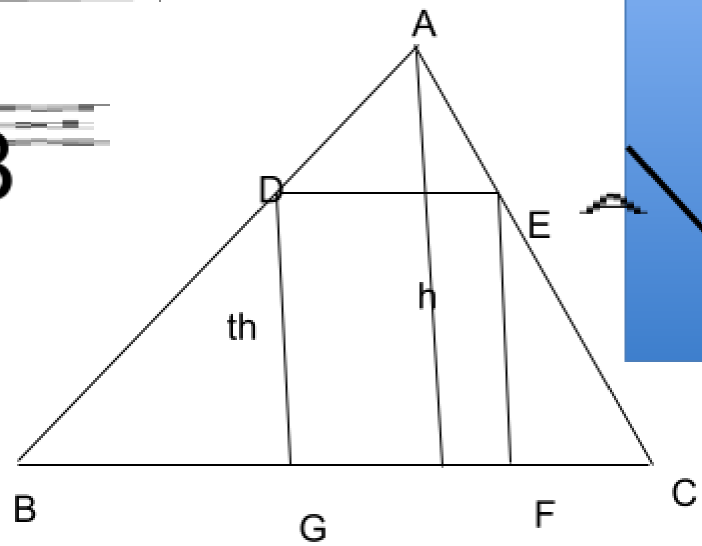
We get $y = \frac{p-2x}{2}$ Then $f_1(x) = f(x, y) = x\left(\frac{p-2x}{2}\right) = \frac{px}{2} - x^2$

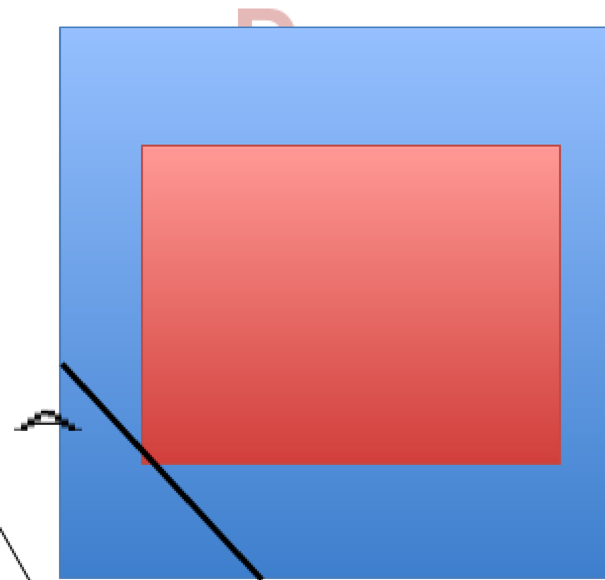
$f'(x) = \frac{p}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{4} \Rightarrow y = \frac{p}{4}$ implying it is a square.

B



BB





1.1

2. The second problem is to maximize area of a rectangle inscribed in an arbitrary triangle ABC. Let height of ABC be h and that of the desired rectangle be th. Then area of the rectangle DEFH is

$th(BC - BG - CF) = th(BC - thCotB - thCotC)$

Note that $BC = hCotB + hCotC$. So

$th(BC - (BG + CF)) = th(BC - tBC) = BCth(1 - t)$ is a function of t

So area of

$DEFG = f(t) = BCth(1 - t) \Rightarrow f'(t) = BCh(1 - 2t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

So rectangle having half the height of ABC has the largest area.

3. Let ABCD be a large rectangular building of length l and width w. Inside this building there is a room of length p and width q but located symmetrically with corridor of width $\frac{l-p}{2} = \frac{w-q}{2}$. The problem is to determine the largest length of a stick that can be crawled along the corridor through the corners. Let any such stick has endpoints in the corner as $(s, 0)$ and $(0, t)$ making its length equalling $\sqrt{s^2 + t^2}$ The equation of such a line can be written as

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1$$

This equation must satisfy lower left corner of the red rectangle for the stick to be of the largest length. So

$$\frac{(l-p)/2}{s} + \frac{(l-p)/2}{t} = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{2}{l-p}$$

So our optimization problem is to maximize

$$f(s,t) = s^2 + t^2$$

Subject to $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{2}{l-p}$

So this is a constrained optimization problem. We can express $t = \frac{1}{\frac{2}{l-p} - \frac{1}{s}}$ Putting the value of t in the formula for

$$f(s,t) = f_1(s) = s^2 + \left(\frac{1}{\frac{2}{l-p} - \frac{1}{s}}\right)^2 = s^2 + \left(\frac{s(l-p)}{2s+p-l}\right)^2$$

$$f_1'(s) = 2s + 2\left(\frac{s(l-p)}{2s+p-l}\right)\frac{(l-p)(2s+p-l) - s(l-p)2}{(2s+p-l)^2} = 0 \Longrightarrow 2s\,(2s + p - l$$

$$\Rightarrow (2s + p - l)^3 - (l - p)^2 (l - p) = 0$$

$\Rightarrow 2s + p - l = l - p \Rightarrow s = l - p$ From where $t = l - p$ and length of the largest stick will be $(l - p)\sqrt{2}$

4. Distance between two lines in 3D or higher dimensional space.

A straight line is a one dimensional object. A straight line can be defined by a point $P_0 = (x_0, y_0)$ and a slope m and

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 + a_0 s,\ y = y_0 + b_0 s, z = z_0 + c_0 s$ Let the equation of the other straight line be

$x = x_1 + a_1 t,\ y = y_1 + b_1 t, z = z_1 + c_1 t$

$f(L_0, L_1) = (x_0 + a_0 s - x_1 - a_1 t)^2 + (y_0 + b_0 s - y_1 - b_1 t)^2 + (z_0 + c_0$

$f'_s(s,t) = 2a_0(x_0 + a_0 s - x_1 - a_1 t)^1 + 2b_0(y_0 + b_0 s - y_1 - b_1 t) + 2c_0(z_0 + c_0 s - z_1 - c_1 t)$=0

$f'_t(s,t) = -2a_1(x_0 + a_0 s - x_1 - a_1 t)^1 - 2b_1(y_0 + b_0 s - y_1 - b_1 t) - 2c_1(z_0 + c_0 s - z_1 - c_1 t)$=0

$P = (x_1, x_2, ..., x_n), P_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

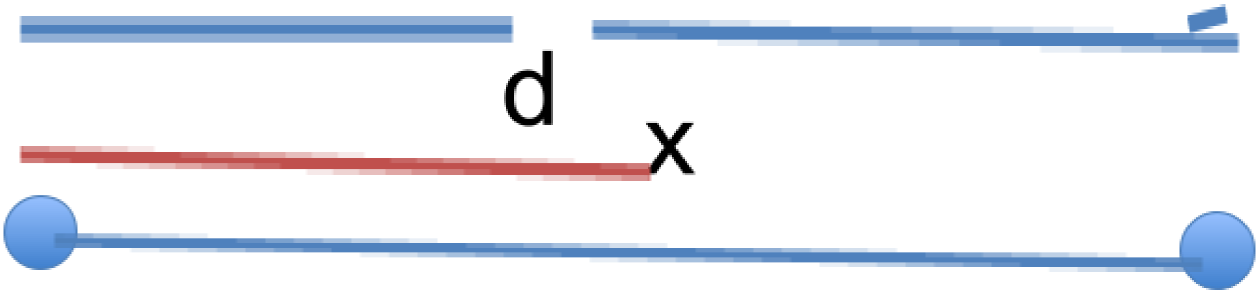
$x_1 = x_1^0 + a_1 s, x_2 = x_2^0 + a_2 s, ..., x_n = x_n^0 + a_n s,$

$x_1 = x_1^1 + b_1 t, x_2 = x_2^1 + b_2 t, ..., x_n = x_n^1 + b_n t,$

5a The Horse Problem

Two friends want to undertake the equation is a journey from hall to the playground of distance d with the only well trained horse they have that is capable to carry only one of them at a time. Speed of horse $v_h \gg v_m$

They want to start the journey together and reach the destination together in minimum time. How can they plan for the journey and what is the minimum time required for the journey?



In order for them to require the same amount of time both of them should walk the same distance and on horse top as well they will have to be the same amount of time. So

$$d - x = \frac{x}{v_h} v_m + \frac{\left(x - \frac{x}{v_h} v_m\right) v_m}{v_h + v_m}$$

$$\Rightarrow d - x = \frac{x}{v_h} v_m + \frac{x\left(v_h - v_m\right) v_m}{v_h\left(v_h + v_m\right)}$$

$$\Rightarrow d - x = \frac{x v_m\left[\left(v_m + v_h\right) + \left(v_h - v_m\right)\right]}{v_h\left(v_h + v_m\right)}$$

$$\Rightarrow d - x = \frac{2 x v_m v_h}{v_h\left(v_h + v_m\right)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2 x v_m v_h + x v_h\left(v_h + v_m\right)}{v_h\left(v_h + v_m\right)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{x v_h\left[2 v_m + \left(v_h + v_m\right)\right]}{v_h\left(v_h + v_m\right)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{d\, v_h (v_h + v_m)}{v_h[2v_m + (v_h + v_m)]}$$

$$\Rightarrow x = \frac{d\,(v_h + v_m)}{(v_h + 3v_m)}$$

5b. Solve the problem for 3 friends and one horse.

Solution: Horse will make backward movement equal amount of time for the 2nd and 3rd friends. Let d be the total distance and $v_h \gg v_m$ be the speeds of horse and friends respectively.

A--B

1st-- X============

2nd=====--======

3rd============-------------------------------------

2nd friend walks $\frac{x}{v_h} v_m + \frac{(x - \frac{x}{v_h} v_m) v_m}{v_m + v_h}$ the second fraction being for the horse to go back. So the third friend will again have to walk the same distance. So walking distance for the third friend will be equated to the first one

$$d - x = 2[\frac{x}{v_h}v_m + \frac{(x - \frac{x}{v_h}v_m)v_m}{v_m + v_h}]$$

$$d = x + 2[\frac{x}{v_h}v_m + \frac{(x - \frac{x}{v_h}v_m)v_m}{v_m + v_h}]$$

$$d = 2x[\frac{1}{2} + \frac{1}{v_h}v_m + \frac{(1 - \frac{1}{v_h}v_m)v_m}{v_m + v_h}]$$

$$x = \frac{d(v_h + v_m)}{v_h + 5v_m}$$

So if there are n friends then the equation is

$$d - x = (n - 1)[\frac{x}{v_h}v_m + \frac{(x - \frac{x}{v_h}v_m)v_m}{v_m + v_h}]$$

Hence $x = \frac{d(v_h + v_m)}{v_h + (2n-1)v_m}$

Exercise 1: Assume that the horse can carry 2 friends at a time, and you have n friends to undertake the journey. What is the solution?

Exercise 2. You have n persons to move from one place to another. You have k buses each can carry at a time m persons. What is the minimum time for giving lift to destination?

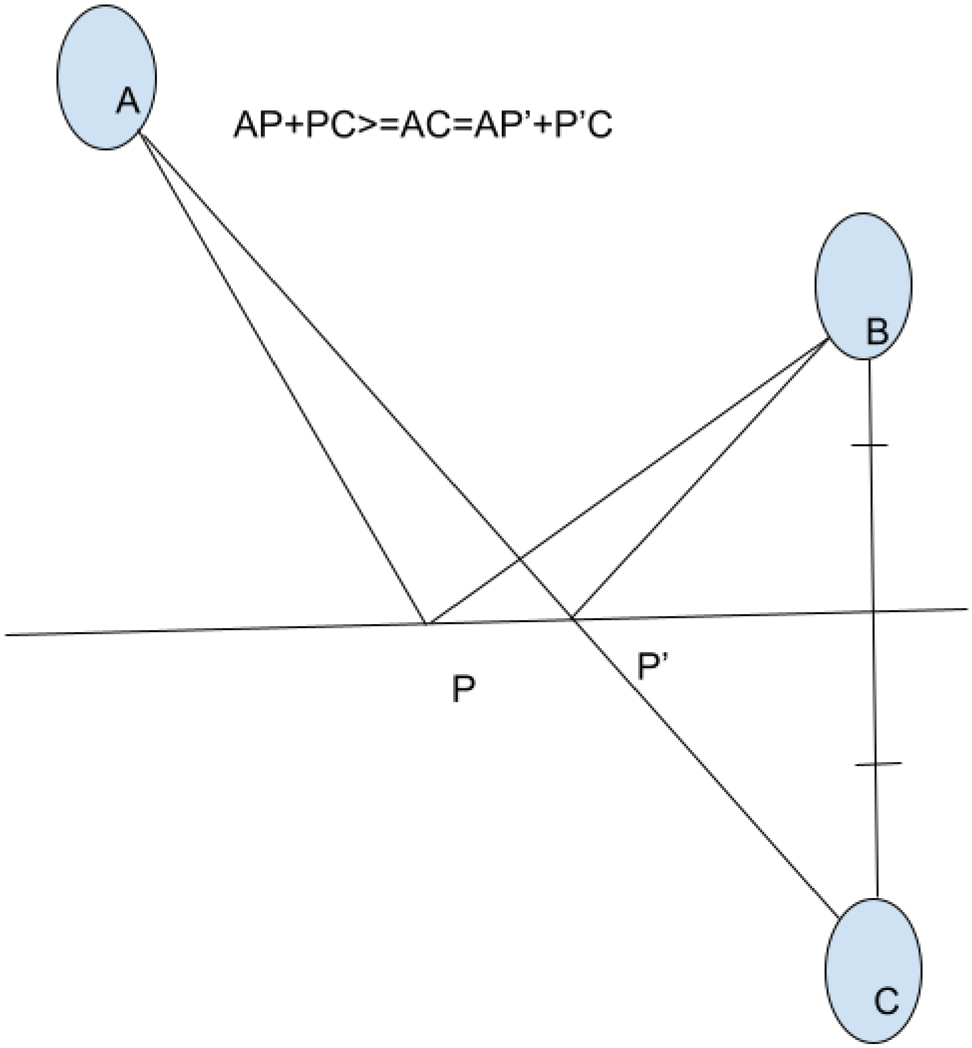
6. Shortest path from a point A to B touching a straight line L.

So you have an empty tub and now you walk to the bank of the river to fill it with water and then reach your piece of land B to water it. What is the minimum distance?

7. There are n sticks (n>1) in a stack. Two persons play the game with the first player in his first turn never removes all. Every subsequent player must remove at least one, if there is, and at most double the number of sticks his opponent removed in his last turn. Player emptying the stack wins the game. How should the game be played ?

I	You
8	7
6	5
4	3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
L L 1 L 1 2 L 1 2 3 L 1 2 3 4 5 L

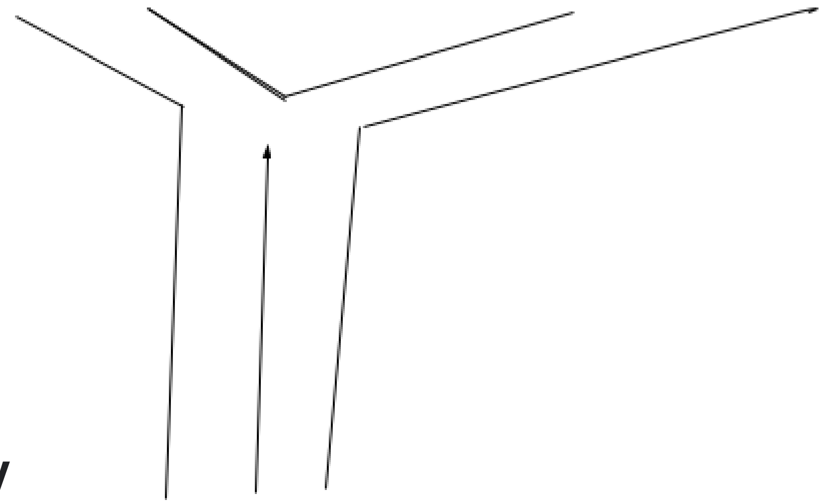


16.6.2021

1. There was a carpenter Ali in a village who built houses only for those who did

not build their own houses. Who built carpenter Ali’s house? Russell’s Paradox

2. Rahim says,”I am a liar.” What is Rahim actually? Paradox
3. You arrive at a place where the road got divided into two branches one leading to Post Office and the other to a university, which not known. A man standing on the fork speaks the truth and lies alternately.

What is the single question for finding the university  branch?

4.

Answer: Which way to post office are you going to show to the next person?

5. The horse problem can be generalized by having m horses and n friends for the journey with m<n.
   23.6.2021(Assignment)

6. A couple invited 4 couples to a dinner party. Those who did not know each other got acquainted by shaking hands. You can only assume that husband and wife know each other. At the end of the party while leaving land lord (host husband) asked

everybody else how many people he/she shook hands with, to which everybody responded with a different number. How many people did the host husband shake hands with?

7. Dirac’s mathematical problem. 3 friends caught fish and then being tired went to sleep. At night the first friend woke up and distributed fish equally and threw an extra fish into the sea, kept his share separately and all remaining together, and then fell asleep. The second repeated the same, so is the third friend. In the morning all of them woke up and found the same number of fish they caught. How many fish did they catch?

8. 5 friends gathered some coconuts. Being tired they fell asleep. At night 1st friend got up, divided the pile into equal shares, took his share and the extra one

coconut was given to the monkey. The piles were put together again. This was done exactly by all 5 friends. In the morning all of them woke up and divided the pile equally with one extra coconut to the monkey again. What is the minimum number of coconuts they gathered?

9. There are 50 coins on the table with 10 heads up. Now you are blindfolded. You are allowed to toggle the coins as you like. You are then supposed to divide them into two piles not necessarily having the same number of coins so that each pile has equal number of heads up.

স্বাধিকার৪। তুমি A বিন্দু থেকে ২০ কিমি উত্তরে যেয়ে B বিন্দুতে পৌঁছলে। B থেকে ২০ কিমি দক্ষিণে যেয়ে C বিন্দুতে পৌঁছলে। কীভাবে সম্ভব যে A থেকে C এর দূরত্ব ৩০ কিমি?

স্বাধিকার৬। দুই বোন একসঙ্গে বাসা থেকে স্কুলে রওয়ানা হলো। তাদের হাঁটার দ্রুতি সমান, দৌড়ানোর দ্রুতিও সমান। বড় বোন সমান সময় হাঁটে এবং সমান সময় দৌড়িয়ে স্কুলে পৌঁছলো। ছোটবোন সমান দূরত্ব হাঁটলো এবং সমান দূরত্ব দৌড়ালো। যুক্তিসহ বলো কে আগে পৌছঁবে?

স্বাধিকার৮। অনেক বছর পর দুই বন্ধুর দেখা। আলাপ আলোচনায় জানা গেল উভয়েই গণিতবেত্তা এবং বিবাহিত। প্রথম বন্ধু দ্বিতীয় বন্ধুকে জিজ্ঞাসা করলো তার ছেলেমেয়ের সংখ্যা। উত্তর আসলো তিন। বয়স জিজ্ঞাসা করাতে উত্তর করলো বয়সের যোগফল ১৩। প্রত্যেকের বয়স বের করার জন্য আরো কিছু তথ্য চাইলে বললো তাদের বয়সের গুণফল পাশের ভবনের জানালার সংখ্যার সমান। প্রথম বন্ধু আরো কিছু তথ্য চাইলে দ্বিতীয় বন্ধু বললো ছোট ছেলের চোখের মণি নীল। এরপর প্রথম বন্ধু প্রত্যেক সন্তানের বয়স জানতে পারলো। গাণিতিক বিশ্লেষণ করে তাদের বয়স বের কর।

Two friends meeting after long time came to learn that both of them married. The first friend asked the number of children of the 2nd who answered 3. When asked about their aged he answered sum of ages is 13. He asked for more information to which 2nd friend told that product of ages equals number of windows in the nearby building. He counted the number of windows and said he needs some more information to which he said that eldest child has blue eyes. Now the ages are clear. What are the ages?

স্বাধিকার১০। দশ জন কয়েদিকে জেল সুপার একটি সুযোগ দিলেন। তিনি তাদের ডেকে বললেন, " আগামীকাল সকালে তোমরা মাঠে আসবে। আমি আমার ইচ্ছামতো তোমাদের এমনভাবে দাঁড়া করাবো যে যে কেউ তার সামনের সবার মাথা দেখতে পারবে। আমার কাছে অনেকগুলো লাল এবং অনেকগুলো সাদা রঙের টুপি থাকবে। আমি তোমাদের মাথায় আমার ইচ্ছামতো টুপি পড়িয়ে দিব। এরপর লাইনের একদম শেষের জনকে তার টুপির রঙ জিজ্ঞাসা করবো। সঠিক উত্তর করতে পারলে তাকে মুক্তি দিব। না

পারলে জেলে। এবার নবম জনকে, অষ্টম জনকে এইভাবে প্রথম জনকে পালাক্রমে একই প্রশ্ন করবো। সঠিক উত্তর যে করতে পারবে তাকে মুক্তি দিব।” কয়েদিরা সেলে যেয়ে একটি বুদ্ধি করলো যাতে করে তাদের সর্বোচ্চ সংখ্যক মুক্তি পেতে পারে। বুদ্ধিটি কী? মনে রাখতে হবে টুপির রঙ বলার সময় অন্য কোনো তথ্য দেয়া যাবে না।

স্বাধিকার১৩। ছন্দা, আবির ও বর্ণিলের নতুন বন্ধু। তারা ছন্দার জন্ম দিন কবে জানতে চায়। ছন্দা সম্ভাব্য দশটি তারিখ বললো- মে ১৫, মে ১৬, মে ১৯, জুন ১৭, জুন ১৮, জুলাই ১৪, জুলাই ১৬, আগস্ট ১৪, আগস্ট ১৫, আগস্ট ১৭। ছন্দা আবিরকে কানে কানে জন্মের মাস বললো এবং বর্ণিলকে কানে কানে শুধু তারিখ বললো। আবির বললো,” আমি ছন্দার জন্ম দিন জানি না। তবে এটাও জানি যে বর্ণিলও জানে না।” বর্ণিল বললো,” প্রথমে আমি ছন্দার জন্মদিন জানতাম না তবে আবিরের কথার পর এখন জানি।” আবির বললো, “ তাহলে আমিও জানি।” ছন্দার জন্মদিন কবে ব্যাখ্যাসহ উত্তর কর।

স্বাধিকার১৪।   একই ধরণের ১২টি বলের মধ্যে একটি ওজনে ক্রুটিপূর্ণ। দাঁড়ি পাল্লা আছে বাটখারা নেই। তিনবার ওজন করে ক্রুটিপূর্ণ বলটি ক্রুটিসহ বের করতে হবে।

12 look alike balls have one defective in weight. You have pans to measure. In 3 measures you need to find the only defective ball with its defect.

Solution:

1. a)1 2 3 4 > 5 6 7 8   9 10 11 12 are fair
   2. a) 1 2 **5** > **3** 6 **9**   4 7 8 fair compare 1 and 2 ro find defective ball

b) 1 2 5= 3 6 9 then 4 7 8 contains defective ball. Compare 7 and 8 to find defective

c) **1 2** 5 < 3 **6 9**

b) 1 2 3 4= 5 6 7 8   9 10 11 12 has defective

1 2 3=9 10 11   12

1 2 3 > 9 10 11

1 2 3 < 9 10 11

স্বাধিকার১৫। ঘড়ির মিনিটের কাঁটা পূর্ণসংখ্যক মিনিটে দাঁড়িয়ে আছে এবং ঘন্টার কাঁটা মিনিটের কাঁটা থেকে দুই মিনিট দূরে। সময় কত?

স্বাধিকার১৬। একটি দৌড় প্রতিযোগিতায় একটি হাতির একজোড়া পা অন্য জোড়া পায়ের তুলনায় ৫০ ফুট বেশি দৌড়ালো। কীভাবে সম্ভব?

স্বাধিকার১৭। এক লোক এক বস্তা আলু নিয়ে বাসে যাচ্ছিল। দুর্ভাগ্যজনকভাবে চলন্ত বাস থেকি তাকে নামতে হবে। আলুসহ বস্তা নিয়ে সে কীভাবে নামবে যাতে করে আলুগুলো যথাসম্ভব নষ্ট না হয়। দুর্ঘটনা এড়াতে সে আলু নিয়ে বাস থেকে নামতে পারবে না।

স্বাধিকার১৮। একটি এক কিলোমিটার বাহুবিশিষ্ট বর্গাকৃতি ক্ষেত্রের প্রতি শীর্ষে একটি করে কুকুর দাঁড়িয়ে আছে। এরপর প্রতিটি কুকুর তার ডানের কুকুরের দিকে চোখ বন্ধ করে সরাসরি অর্ধেক দূরত্ব দৌড়িয়ে চোখ খুলে।

এরপর আবার ডানের কুকুরের দিকে চোখ বন্ধ করে অর্ধেক দূরত্ব দৌড়ে থেকে যায়। পরিশেষে প্রতিটি কুকুর কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?

স্বাধিকার১৯।১১টি খোলা ঝুড়ির প্রতিটিতে কমপক্ষে ১০টি করে আপেল আছে। দশটি ঝুড়ির প্রত্যেকটি আপেলের ওজন ১০০ গ্রাম করে। অন্য ঝুড়ির প্রত্যেক আপেলের ওজন ৯০ গ্রাম করে। ডিজিটাল স্কেলে ইচ্ছামতো পছন্দের আপেলগুলোকে মাত্র একবার ওজন করে অল্প ওজনের আপেলের ঝুড়ি বের করতে হবে।

স্বাধিকার২০। এক মহিলার চার সন্তান। তার কিছু নারিকেল রয়েছে। নারিকেলগুলো থেকে প্রথম সন্তানকে একটি এবং অবশিষ্ট নারিকেলের চার ভাগের এক ভাগ দিল। একইভাবে বাকী তিনজনকেও একইভাবে নারিকেল ভাগ করে দিল। প্রথম জন ও তৃতীয় জন মেয়ে বাকী দুইজন ছেলে। মেয়েরা দুইজন মিলে দুই ছেলের থেকে ১০০টি নারিকেল বেশি পেল। শুরুতে মহিলার কতগুলো নারিকেল ছিল?

স্বাধিকার২১। রহিম সাহেবের তিন ছেলে পাঁচ মেয়ে এবং সাত জন নাতি নাতনী। তিনি ছেলেদের মধ্যে তার টাকা ভাগ করে দিলে এক টাকা উদ্বৃত্ত থাকে, মেয়েদের মধ্যে ভাগ করে দিলে দুই টাকা অবশিষ্ট থাকে। নাতি নাতনীদের মধ্যে ভাগ করে দিলে ছয় টাকা অবশিষ্ট থাকে। রহিম সাহেবের কাছে সর্বনিম্ন কত টাকা আছে?

স্বাধিকার২২। দুই ভাইয়ের কিছু নারিকেল ছিল। প্রতিটি নারিকেল নারিকেলের সংখ্যার সমান টাকায় বিক্রয় করলো। প্রাপ্ত অর্থ থেকে বড় ভাই একটি ২০ টাকার নোট নিল, তারপর ছোট ভাই একটি ২০ টাকার নোট নিল। এইভাবে তারা পালাক্রমে একটি করে ২০ টাকার নোট নেয়ার পর বড়

ভাই দেখতে পেল সে অবশিষ্ট টাকার থেকে শেষ ২০ টাকার নোট নিলে ছোট ভাইএর জন্য পর্যাপ্ত টাকা থাকবে না। তখন সে তার পূর্ণ টাকায় কেনা ছুড়িটি ছোট ভাইকে দিয়ে ভাগাভাগি সমান করলো। ছুড়িটির দাম কত?

স্বাধিকার২৩। আলী সাহেব এবং বেগম আলী ১২০ কিমি দূর থেকে পরস্পরের দিকে সাইকেল চালিয়ে আসছেন। আলী সাহেব ২৫ কিমি এবং বেগম আলী ২০ কিমি বেগে সাইকেল চালাচ্ছিলেন। একটি মাছি ৬০ কিমি বেগে একবার আলী সাহেবের নাকে এবং বেগম আলীর নাকে বসেই উলটো দিকে উড়ে যায়। দুইজন দেখা হওয়ার আগে মাছিটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে?