



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات الدراسة الصباحية



دراسة الدوال غير المستمرة

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

فاطمة محسن

إشراف

ا.د. هاشم عبد الخالق كشكول

المحتويات

1	الملخص
2	مقدمة
	الفصل الأول : مفاهيم اساسية
3	1 - 1 العلاقات والدوال
4	2 - 1 الغاية و الاستمرارية
6	3 - 1 المشتقة
6	4 - 1 التقارب للدوال
	الفصل الثاني : الدوال غير المستمرة
8	2 - 1 نقاط عدم الاستمرارية
15	2 - 2 المشتقات عند الدوال غير المستمرة
17	3 - 2 الاستمرارية بالاجزاء
18	4 - 2 تكامل الدوال المستمرة بالاجزاء
20	5 - 2 التقارب للدوال غير المستمرة
21	المراجع

الملخص

في هذا البحث درسنا مفهوم عدم الاستمرارية للدوال الحقيقية. حيث قدمنا في الفصل الاول المفاهيم الاساسية للدوال و في الفصل الثاني درسنا نقاط عدم الاستمرارية للدوال الحقيقية وصنفناها الى عدة انواع و اعطينا امثلة لكل نوع ، ودرسنا ايضاً المشتقات عند الدوال غير المستمرة و كذلك التكامل لهذه الدوال وكيف يمكن ان دالة غير مستمرة تكون مستمرة بالتكامل. واخيرا درسنا التقارب للدوال غير المستمرة حيث يمكن ان تكون متتابعة من الدوال غير المستمرة تتقارب الى دالة مستمرة.

مقدمة

تعد الدوال من أهم المفاهيم الرياضية التي تعبر عن العلاقة بين المتغيرات، حيث تربط كل عنصر في مجموعة معينة بعنصر وحيد في مجموعة أخرى. تلعب الدوال دورًا أساسيًا في مختلف فروع الرياضيات، مثل التحليل والجبر والإحصاء، كما تمتد تطبيقاتها إلى العلوم الطبيعية والهندسية والاقتصادية. فهي تساعد في فهم التغيرات، التنبؤ بالاتجاهات، وحل المشكلات المعقدة في مجالات متعددة.

من بين الخصائص المهمة للدوال خاصية الاستمرارية، التي تحدد مدى سلاسة تغير القيم دون انقطاعات. ومع ذلك، هناك العديد من الظواهر التي لا يمكن تمثيلها بدوال مستمرة، مما يجعل دراسة الدوال غير المستمرة ضرورية. هذه الدوال هي التي تحتوي على نقاط يحدث فيها تغير مفاجئ في القيم، مما يعني أنها لا تأخذ مسارًا سلسًا كما هو الحال في الدوال المستمرة.

هذا النوع من الدوال له أهمية كبيرة في العديد من المجالات، حيث يمثل الظواهر التي تتغير بشكل مفاجئ أو غير منتظم. في الرياضيات، تعتبر دراسة الدوال غير المستمرة ضرورية في التحليل الرياضي ونظرية الدوال، حيث تساعد في فهم السلوكيات غير المتوقعة وحل المعادلات التي تتضمن تغيرات فجائية. وفي الفيزياء، تظهر الدوال غير المستمرة في النماذج التي تصف الانتقالات الطورية، والنبضات الكهربائية، والموجات غير المنتظمة. أما في الهندسة، فهي تُستخدم في تحليل الإشارات، ونظرية التحكم، والنظم الديناميكية. كما أن للاقتصاد دورًا في استخدام الدوال غير المستمرة في دراسة الأسواق المالية والتغيرات المفاجئة في الأسعار والطلب.

لذلك، فإن دراسة الدوال غير المستمرة لا تقل أهمية عن دراسة الدوال المستمرة، حيث تساهم في تحليل وفهم الظواهر الطبيعية والاصطناعية التي لا يمكن نمذجتها باستخدام الدوال المستمرة فقط.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1 - 1 العلاقات والدوال

تعريف 1 - 1 - 1

اي مجموعة من الأزواج المرتبة تسمى علاقة

ملاحظة

إذا كانت S علاقة. فإن مجموعة كل العناصر التي تكن في المسقط الأول تسمى بالمجال. ومجموعة كل العناصر التي تكون في المسقط الثاني تسمى بالمدى.

تعريف 2 - 1 - 1

الدالة F هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) بحيث لا يوجد زوجين مرتبين بنفس المسقط الأول. اي ان اذا كان $(x, y) \in F$ و $(x, z) \in F$ فإن $y = z$.

ملاحظة

تعريف الدالة يتطلب ان كل عنصر من المجال مثل x يجب ان يوجد عنصر واحد فقط مثل y بحيث $(x, y) \in F$.

نسمي y قيمة الدالة F عند x ونكتب

$$y = F(x)$$

مثال 1 - 1 - 1

كل مما يأتي يمثل دالة على \mathbb{R}

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sin \sqrt{x^2 - 1}\}$

ولكن المجموعات التالية لا تمثل دالة على \mathbb{R}

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 10\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = \cos y\}$

لان $(1, 0), (1, 2\pi) \in B$ و $(1, 3), (1, -3) \in A$

1 - 2 - 1 الغاية والاستمرارية

تعريف 1 - 2 - 1

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a, b) . نفرض ان $c \in (a, b)$ اذا كان $f(x) \rightarrow A$ عندما $x \rightarrow c$ من خلال قيم اكبر من c نقول ان A هي غاية اليمين للدالة f عند c ونكتب

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A$$

نرمز لغاية اليمين بالرمز $f(c^+)$. بشكل ادق لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(c^+)| < \epsilon, \quad \text{if } c < x < c + \delta < b$$

ملاحظة

غاية اليسار تعرف بشكل مشابه اذا كانت $c \in (a, b)$ فإن غاية اليسار تعرف بالشكل

$$f(c^-) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = B$$

حيث x تاخذ قيم اصغر من c .

تعريف 2 - 2 - 1

اذا كانت الدالة f معرفة عند c وكان $f(c^+) = f(c)$ نقول ان f مستمرة من اليمين عند c

مثال 1 - 2 - 1

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ تكون مستمرة من اليمين عند $x = 0$ لأن

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

تعريف 3 - 2 - 1

اذا كانت الدالة f معرفة عند c وكان $f(c^-) = f(c)$ نقول ان f مستمرة من اليسار عند c

مثال

الدالة $f(x) = \sqrt{-x}$ تكون مستمرة من اليسار عند $x = 0$ لأن

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0 = f(0)$$

تعريف 1 - 2 - 4

إذا كانت $a < c < b$. فإننا نقول ان f دالة مستمرة عند $x = c$ إذا وقطع إذا كان

$$f(c) = f(c^+) = f(c^-)$$

أي تكون للدالة غاية من اليمين واليسار عند c وكذلك تكون الدالة معرفة عند c .

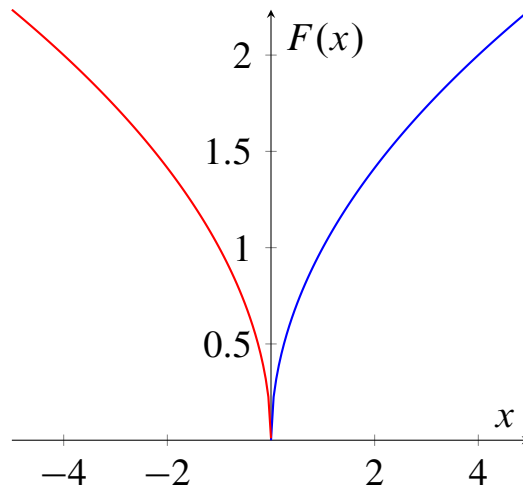
مثال 1 - 2 - 2

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غير مستمرة عند $x = 0$ لان غاية اليسار غير موجودة وكذلك الدالة $g(x) = -\sqrt{x}$ غير مستمرة عند $x = 0$ لان غاية اليمين غير موجودة. ولكن الدالة المعرفة بالشكل

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & x < 0 \end{cases}$$

تكون مستمرة عند $x = 0$ لان

$$f(0^+) = f(0^-) = 0 = f(0)$$



3 - 1 المشتقة

تعريف 1 - 3 - 1

لتكن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة (a, b) ولتكن $c \in (a, b)$ فإن f تكون قابلة للاشتقاق عند c إذا كانت النهاية

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة. وتسمى المشتقة للدالة f عند c .

مبرهنة 1 - 3 - 1

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند c فإنها تكون مستمرة عند c .

ملاحظة

عكس المبرهنة السابقة ليس بالضرورة أن يكون صحيح.

مثال 1 - 3 - 1

لنأخذ الدالة $f(x) = |x|$ التي تكون مستمرة لكل $x \in \mathbb{R}$ بالخصوص عند $x = 0$ ولكن

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

هذه النهاية غير موجودة لأن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

ملاحظة

عندما تكون الدالة f غير مستمرة عند النقطة c فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند c .

4 - 1 التقارب للدوال

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ونفرض أن لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد دالة $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ سوف نقول أن (f_n) متتابعة من الدوال على A .

تعريف 1 - 4 - 1 [التقارب النقطي]

لتكن (f_n) متتابعة من الدوال على $\mathbb{R} \subseteq A$. لتكن $A_0 \subseteq A$ ولتكن $f : A_0 \rightarrow \mathbb{R}$. نقول ان المتتابعة (f_n) تتقارب نقطياً الى الدالة f اذا كان لكل $x \in A_0$ فإن المتتابعة $f_n(x)$ تتقارب الى $f(x)$.

مثال 1 - 4 - 1

لتكن لدينا المتتابعة من الدوال

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

ولتكن $f(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$. نلاحظ ان لكل $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 = f(x)$$

مثال 2 - 4 - 1

لتكن لدينا المتتابعة

$$g_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

ولتكن $g(x) = x$ فإن لكل $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n} + x = x = g(x)$$

تعريف 2 - 4 - 1 [التقارب المنتظم]

متتابعة من الدوال (f_n) على $\mathbb{R} \subseteq A$ تقترب بشكل منتظم الى الدالة $f : A_0 \rightarrow \mathbb{R}$ اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $K(\epsilon)$ بحيث اذا كان $n \geq K(\epsilon)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad x \in A_0 \text{ لكل}$$

ملاحظة

التقارب المنتظم يحافظ على استمرارية الدالة. اي اذا كانت لدينا متتابعة من الدوال المستمرة فإن التقارب المنتظم لها هو دالة مستمرة.

الفصل الثاني

الدوال غير المستمرة

2 - 1 نقاط عدم الاستمرارية

تعريف 2 - 1 - 1

نقول ان $x = c$ هي نقطة عدم استمرارية اذا كانت f غير مستمرة عند c

ملاحظة

في هذه الحالة واحدة من الحالات الاتية متحقق

1. اما $f(c^+)$ او $f(c^-)$ غير موجودة.

2. كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجود ولكن لهما قيم مختلفة اي ان $f(c^+) \neq f(c^-)$

3. كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجودة ولكن $f(c^+) = f(c^-) \neq f(c)$

امثلة على الحالات الثلاثة

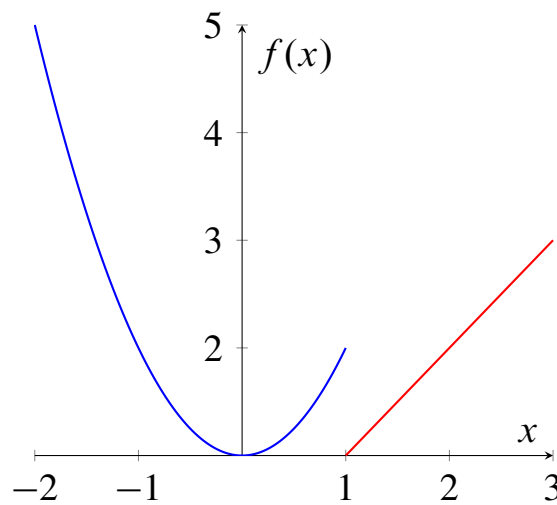
1. الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ معرفة على الفترة $[0, \infty)$ اي ان $f(0^-)$ غير موجودة وبالتالي $x = 0$

هي نقطة عدم استمرارية

2. الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

غير مستمرة عند $x = 1$ لان $f(1^+) = 1 \neq 2 = f(1^-)$

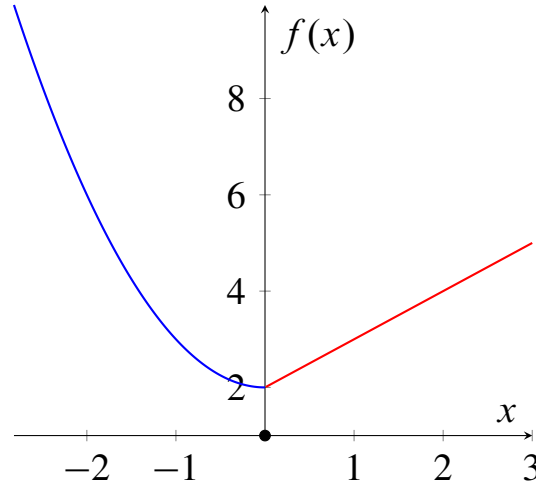


شكل 2 - 1 : Plot of $f(x)$

3. الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x + 2 & x > 0 \\ x^2 + 2 & x < 0 \end{cases}$$

غير مستمرة عند $x = -1$ لأن $f(0) = 1$ ولكن $f(0^-) = 2 = f(0^+)$



شكل 2 - 2: Plot of $f(x)$

تعريف 2 - 1 - 2

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a, b]$ و $c \in [a, b]$ فإن c تكون نقطة عدم استمرارية قابلة للحذف إذا كان $f(c^+) = f(c^-) \neq f(c)$. ويتم حذف عدم الاستمرارية بإعادة تعريف الدالة f عند c حيث يكون $f(c^+) = f(c^-) = f(c)$.

تعريف 3 - 1 - 2

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a, b]$ فإن c تكون نقطة عدم استمرارية غير قابلة للحذف إذا كانت $f(c^+) \neq f(c^-)$ أو $f(c^-)$ غير موجودة أو $f(c^+)$ غير موجودة.

تعريف 4 - 1 - 2

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا كانت كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجودة على نقطة داخلية مثل c فإن:

1. $f(c) - f(c^-)$ تسمى بالقفزة من اليسار

2. $f(c^+) - f(c)$ تسمى بالقفزة من اليمين

3. $f(c^+) - f(c^-)$ تسمى بالقفزة

إذا كانت واحدة من القيم الثلاثة اعلاه لاتساوي صفراً. فإن c تسمى نقطة عدم استمرارية قفزية

Jump Discontinuity

ملاحظة

بالنسبة لنهايتي الفترة a, b فقط القفزة من جهو واحدة تأخذ بعين الاعتبار. بالنسبة الى a نأخذ

$f(a^+) - f(a)$ وبالنسبة الى b نأخذ $f(b) - f(b^-)$

تعريف 2 - 1 - 5

تكون الدالة $f(x)$ تمتلك عدم استمرارية اساسية essential discontinuity عند $x = c$ اذا كانت الغاية $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ غير موجودة. وعلى الاقل واحدة من الغايات اليمينية او اليسارية ايضاً غير موجودة (ربما كليهما).

الآن نلخص انواع عدم الاستمرارية

1. عدم الاستمرارية قابلة للحذف removable discontinuity.

2. عدم الاستمرارية غير قابلة للحذف non-removable discontinuity.

3. عدم الاستمرارية القفزية jump discontinuity.

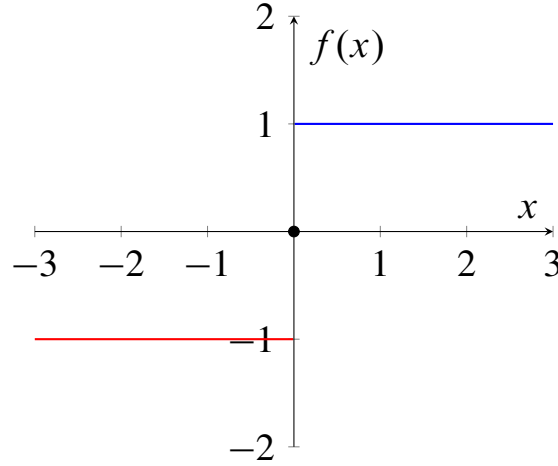
4. عدم الاستمرارية الاساسية essential discontinuity.

الآن نأخذ بعض الامثلة لنغطي على جميع الانواع.

مثال 2 - 1 - 1

الدالة $f(x) = x/|x|$ تمتلك عدم استمرارية قفزية عند $x = 0$ لأن

$$f(0^+) = 1, \quad f(0^-) = -1$$



شكل 2 - 3: Plot of $f(x) = x/|x|$

مثال 2 - 1 - 2

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية قابلة للحذف عند $x = 0$ لأن

$$f(0) = 0$$

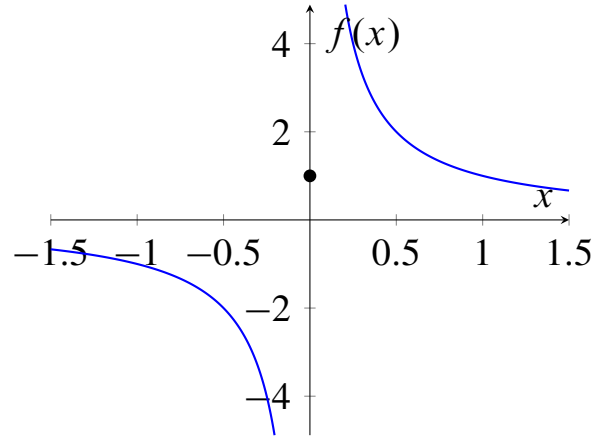
$$f(0^+) = f(0^-) = 1$$

مثال 2 - 1 - 3

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية غير قابلة للحذف عند $x = 0$ لأن $f(c^-), f(c^+)$ غير موجودة



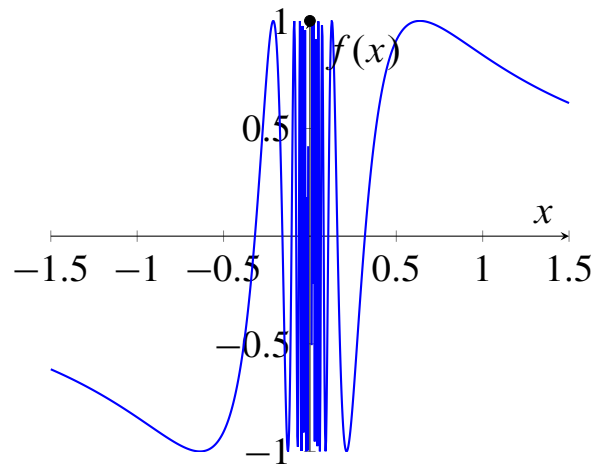
شكل 2 - 4: Plot of $f(x) = 1/x$ for $x \neq 0$

مثال 2 - 1 - 4

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية غير قابلة للحذف عند $x = 0$ لأن $f(0^+)$, $f(0^-)$ غير موجودة (لأن كلما كان قيمة x تقترب من الصفر سواء من اليمين أو من اليسار فإن قيمة الدالة f تتناوب بين -1 و 1 وكما موضح في الشكل 2 - 5)



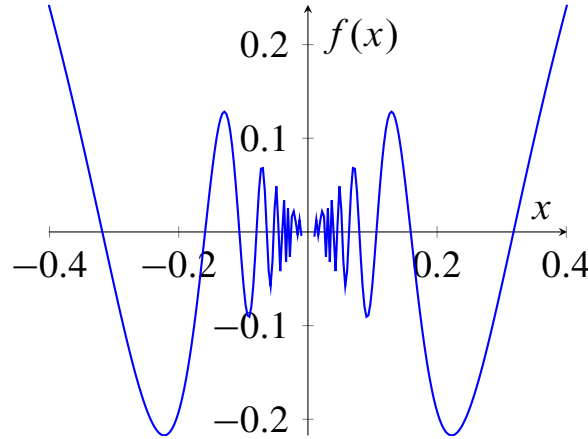
شكل 2 - 5: Plot of $f(x) = \sin(1/x)$ for $x \neq 0$

مثال 2 - 1 - 5

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية قابلة للحذف لأن $f(0+) = f(0-) = 0$ و $f(0) = 1$



شكل 2 - 6 : Plot of $f(x) = x \sin(1/x)$ for $x \neq 0$

مثال 2 - 1 - 6

الدالة $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ تمتلك عدم استمرارية أساسية عند $x = 0$ لأن الغايات

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$

غير موجودة ولكن

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

مثال 2 - 1 - 7

اوجد نقاط عدم الاستمرارية للدالة وصنفها

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

الحل

نلاحظ

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

ولكن $f(2) = 1$ اذن $x = 2$ نقطة عدم استمرارية قابلة للحذف. وذلك بأعادة تعريف الدالة عند $x = 2$ لتكون $f(2) = 4$.

مثال 2 - 1 - 8

اوجد نقاط عدم الاستمرارية وصنفها

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 2} & x > 1 \\ 3 & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x < 1 \end{cases}$$

الحل

نوجد غاية اليمين عند $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 3)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 3}{2} = -1$$

بينما غاية اليسار

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2$$

ولكن $f(1) = 3$ اذن $x = 1$ نقطة عدم استمرارية غير قابلة للحذف لأنه لا يمكن اعادة تعريف الدالة عند $x = 1$ لتكون الدالة مستمرة عند تلك النقطة وذلك لأن غاية اليمين لا تساوي غاية اليسار.

2 - 2 المشتقات عند الدوال غير المستمرة

لدراسة الدوال غير المستمرة في الاشتقاق. نقدم مفهوم المشتقة من اتجاه واحد والمشتقة اللاحقة.

تعريف 2 - 2 - 1

لنكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ نقول ان f تمتلك مشتقة يمينية عند c اذا كانت النهاية

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة كقيمة نهائية او ان النهاية هي $+\infty$ او $-\infty$ و نرمز لها بالرمز $f'_+(x)$. المشتقة اليسارية تعرف بنفس الاسلوب

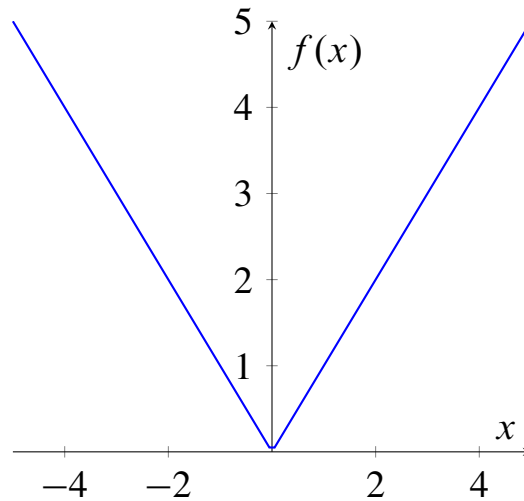
$$f'_-(c) := \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

مثال 2 - 2 - 1

لنكن الدالة $f(x) = |x|$ ، رأينا في المثال 1 - 3 - 1 ان الدالة لا تمتلك مشتقة عند $x = 0$ ولكن

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



شكل 2 - 7: $f(x) = |x|$

مثال 2 - 2 - 2

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

الدالة غير مستمرة عند $x = 2$ لأن

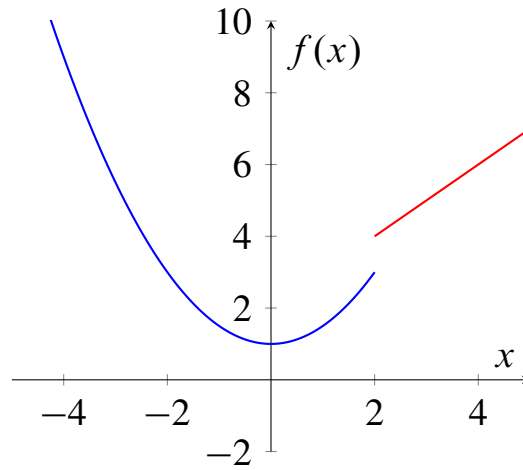
$$f(2^+) = 4 \neq 2 = f(2^-)$$

ولكن

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{x - 2} = -\infty \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{2}(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}(x + 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$



شكل 2 - 8 : Plot of $f(x)$

2 - 3 الاستمرارية بالاجزاء

تعريف 2 - 3 - 1

نقول ان الدالة $f(x)$ مستمرة بالاجزاء على الفترة المغلقة $[a, b]$ اذا كانت مستمرة عند عدد منته من نقاط عدم الاستمرارية القفزية

مثال 2 - 3 - 1

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ملاحظة

ليس مطلوب ان تكون الدالة $f(x)$ معرفة عند نقاط عدم الاستمرارية القفزية. لنفرض ان a_1, \dots, a_n مواقع عد الاستمرارية القفزية للدالة f في الفترة $[a, b]$ ونفرض ان $a_i < a_{i+1}$ لكل i ، على الفترة (a_i, a_{i+1}) يمكننا جعل $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a_i, a_{i+1}]$ من خلال تعريف

$$f(a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x), \quad f(a_{i+1}) = \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^-} f(x)$$

ولأن الدالة المستمرة على الفترة المغلقة تكون مقيدة لدينا المبرهنة التالية

مبرهنة 2 - 3 - 1

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a, b]$ فإن $f(x)$ تكون مقيدة.

2 - 4 تكامل الدوال المستمرة بالاجزاء

تعريف 2 - 4 - 1

إذا كانت $f(x)$ مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a, b]$ ونقاط عدم الاستمرارية عند $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ ، لتكن $a = a_0, b = a_{k+1}$. كما لاحظنا فإننا من الممكن جعل الدالة f مستمرة على $[a_i, a_{i+1}]$ وبالتالي من الممكن تعريف التكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a, b]$ كما يلي

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$$

مثال 2 - 4 - 1

نجد التكامل للدالة $f(x)$ المعرفة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

على الفترة $[0, t]$ حيث $t \in [0, \infty)$. لدينا احتمالان هنا:

1. إذا كان $t \in [0, 1)$ فإن

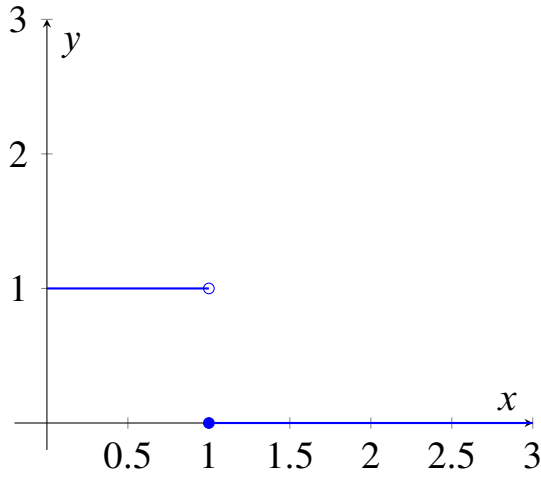
$$\int_0^t f(x) dx = \int_0^t 1 dx = t$$

2. إذا كان $t \in [1, \infty)$ فإن

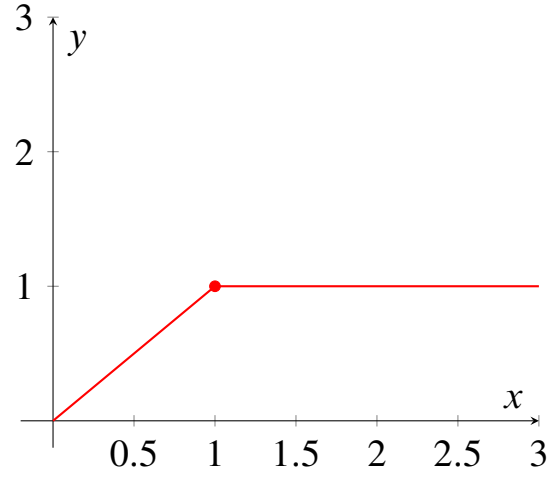
$$\begin{aligned} \int_0^t f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^t f(x) dx \\ &= \int_0^1 1 dx + \int_1^t 0 dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

اذن

$$\int_0^t f(x) dx = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$



(a) plot of $f(x)$



(b) plot of $\int_0^t f(x) dx$

ملاحظة

نلاحظ ان الدالة $\int_0^x f(u) du$ مستمرة على الرغم من كون الدالة $f(x)$ دالة غير مستمرة. وهذا دائماً صحيح مادام ان الدالة $f(x)$ تمتلك عدد منته من نقاط عدم الاستمرارية القفزية.

مبرهنة 2 - 4 - 1

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a, b]$ وأن $c, t \in [a, b]$. فإن التكامل $\int_c^t f(x) dx$ دالة مستمرة للمتغير t .

البرهان

لتكن

$$F(t) = \int_c^t f(x) dx$$

بما ان $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على $[a, b]$ اذن هي مقيدة. لنفرض $|f(x)| \leq B$ لبعض $B > 0$. نفرض $\epsilon > 0$. فإن

$$|F(t + \epsilon) - F(t)| \leq \int_t^{t+\epsilon} |f(x)| dx \leq \int_t^{t+\epsilon} B dx = B\epsilon$$

اذن $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(t + \epsilon) = F(t)$ ومنه $F(t^+) = F(t)$ بطريقة مماثلة $F(t^-) = F(t)$ وهذا يثبت استمرارية $F(t)$

2 - 5 التقارب للدوال غير المستمرة

سوف نناقش بعض الامثلة لدوال مستمرة تقترب بشكل نقطي الى دالة غير مستمرة. ومثال على متتابعة على من الدوال غير المستمرة تقترب نقطياً الى دالة مستمرة

مثال 2 - 5 - 1

لتكن لدينا المتتابعة من الدوال المستمرة $f_n(x) = x^n$. نلاحظ اذا كان $x = 1$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

بينما اذا كان $0 < x < 1$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

اي ان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

وهذه الدالة غير مستمرة عند $x = 1$.

مثال 2 - 5 - 2

لنأخذ المتتابعة من الدوال غير المستمرة

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

هذه الدالة غير مستمرة لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكن نلاحظ ان اذا كان $x \in \mathbb{Q}$ فإن $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$ و اذا كان $x \notin \mathbb{Q}$ فإن

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

اي ان المتتابعة تتقارب بشكل نقطي الى الدالة $f(x) = 0$ بشكل نقطي.

المراجع

- [1] William A. Adkins and Mark G. Davidson, Ordinary Differential Equations, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2012.
- [2] Tom M. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [3] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Wiley, 2000.
- [4] Gabriel Nagy, Ordinary Differential Equations, Michigan State University, 2021.
- [5] Brain S. Thomson, Judith B. Bruckner, and Andrew M. Bruckner, Elementary Real Analysis, Prentice-Hall, 2008.