

مسائل و تمارين

تمرين 1

Five digit number is formed using digits 1, 3, 5, 7 and 9 without repeating any one of them. What is the sum of all such possible numbers?

الحل

المطلوب ان نجمع كل الاعداد المتكونة من 5 مراتب و المختارة من الاعداد الفردية 1,3,5,7,9 بدون تكرار

$$(5 - 1)! \times (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \times (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) \\ = 24 \times 25 \times 11111 = 6666600$$

تمرين 2

If 2 red cards and 2 black cards are lying on a table face down, find the probability of guessing their color correctly.

الحل

هناك 4 بطاقات 2 منها حمراء و 2 سوداء موضوعة على طاولة و وجهها الى الاسف (اي لا يمكن رؤية الالوان) و المطلوب احتمالية تخمين الالوان الصحيحة. نجد اولاً عدد طرق ترتيب البطاقات على الطاولة:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

اي لدينا 6 تخمينات واحدة منها صحيحة اي ان

$$p = \frac{1}{6}$$

تمرين 3

A bag contains 100 tickets numbered 1, 2, ..., 100. If one ticket is picked at random, what is the probability that the number on the ticket is divisible by 2 or 3?

الحل

حقيقية تحتوي على تذاكر مرقمة 1,2,...,100 و التجربة هي اختيار بطاقة من الحقيقية بشكل عشوائي.

المطلوب هي احتمالية الرقم الظاهر هو قابل للقسمة على 2 أو 3
ليكن A الحدث حيث العدد يقبل القسمة على 2 و B الحدث حيث العدد يقبل القسمة على 3. المطلوب
 $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

عدد الاعداد التي تقبل القسمة على 2 يساوي $100/2 = 50$ و عدد الاعداد التي تقبل القسمة على 3 يساوي $100/3 = 33.3 = 33$ اي ان

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0.5, \quad P(B) = \frac{33}{100} = 0.33$$

$A \cap B$ هو الحدث حيث العدد يقبل القسمة على 2 و 3 اي يقبل القسمة على 6. عدد الاعداد التي تقبل القسمة على 6 يساوي $100/6 = 18.3 = 18$

$$P(A \cap B) = \frac{18}{100} = 0.18$$

اذن

$$P(A \cup B) = 0.5 + 0.33 - 0.18 = 0.65$$

تمرين 4

If A and B are two events such that $P(A) = 0.4$, $P(A|B) = 0.6$ and $P(B|A) = 0.3$, find $P(B)$.

الحل

حسب مبرهنة Bayes' Theorem:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

اذن

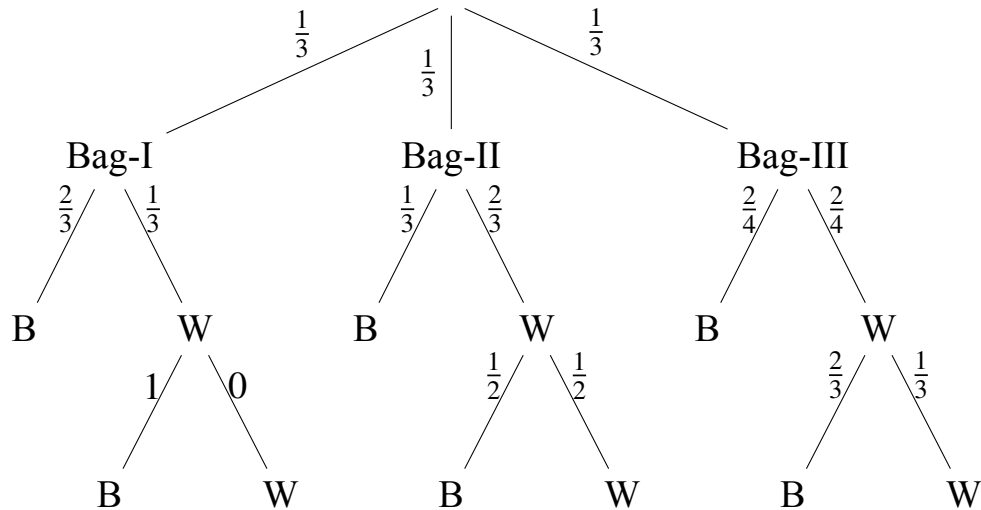
$$P(B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(A|B)} = \frac{0.3 \times 0.4}{0.6} = 0.2$$

تمرين 5

Three bags of the same appearance have the following proportion of balls: 2 black and 1 white in bag-I, 1 black and 2 white in bag-II, and 2 black and 2 white in bag-III. One of the bags is selected and one ball is drawn at random. If that turns out to be white, what is the probability of drawing white balls again if the first one drawn is not replaced?

الحل

لدينا 3 حقائب. الحقيبة الاولى فيها 2 كرة سوداء و 1 كرة بيضاء و الحقيبة الثانية فيها 1 كرة سوداء و 2 كرة بيضاء. و الحقيبة الثالثة فيها 2 كرة سوداء و 2 كرة بيضاء. التجربة هي اختيار حقيبة عشوائياً و سحب كرة منها. اذا كانت الكرة هي بيضاء ما احتمالية سحب كرة بيضاء اخرى:



$$p = 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$$

تمرين 6

How many ways can a set X containing 10 elements be partitioned into two cells?

الحل

لدينا المجموعة X تحتوي على 10 عناصر المطلوب عدد طرق تقسيم المجموعة الى مجموعتين

1. الاحتمال الاول احدى المجموعتين تحتوي على عنصر واحد. $\binom{10}{1} = 10$

2. الاحتمال الثاني احدى المجموعتين تحتوي على عنصرين. $\binom{10}{2} = 45$

3. الاحتمال الثالث احدى المجموعتين تحتوي على 3 عناصر. $\binom{10}{3} = 120$

4. الاحتمال الرابع احدى المجموعتين تحتوي على 4 عناصر. $\binom{10}{4} = 210$

5. الاحتمال الخامس احدى المجموعتين تحتوي على 5 عناصر. $\binom{10}{5} = 252$

لا توجد حالات اخرى لان لو قلنا احدى المجموعتين تحتوي على 6 عناصر فإن الاخرى سوف تحتوي على 4 عناصر و هذه الحالة غطيناها. اذن

$$Ans = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 637$$

تمرين 7

There are 3 questions in a question paper. If the questions have 4, 3, and 2 solutions respectively, find the total number of solutions.

الحل

لدينا 3 اسئلة. اذا كانت الاسئلة تمتلك 4,3,2 اجوبة على التوالي. ما مجموع عدد الاجوبة

$$Ans = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

تمرين 8

Find the number of arrangements of the letters of the word INDEPENDENCE. In how many of these arrangements, (i) do all the vowels always occur together, (ii) do the vowels never occur together?

الحل

لدينا الكلمة INDEPENDENCE و المطلوب ايجاد عدد التباديل للكلمة في حالتين: (i) كل احرف العلة تتواجد معاً، (ii) حروف العلة منفصلة عن بعضها، اولاً نجد عدد التباديل بدون قيود باستخدام القانون

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

لان لدينا تكرار في الاحرف حيث $n = 12$ و:

الحرف I مكرر مرة واحدة، اي ان $n_1 = 1$

الحرف P مكرر مرة واحدة، اي ان $n_2 = 1$

الحرف N مكرر 3 مرات، اي ان $n_3 = 3$

الحرف D مكرر مرتان، اي ان $n_4 = 2$

الحرف E مكرر 4 مرات، اي ان $n_5 = 4$

الحرف C مكرر مرة واحدة، اي ان $n_6 = 1$. اي ان:

$$\frac{12!}{1! \times 1! \times 3! \times 2! \times 4! \times 1!} = 1663200$$

(i) لدينا 5 احرف علة في الكلمة و هي: I,E,E,E,E يجب ان نعامل هذه الاحرف كجزء واحد لان المطلوب ان يكونوا معاً. مع الاحرف البقية N,N,N,D,D,P,C التي عددها 7 يكون لدينا $n = 8$

$$\frac{8!}{1! \times 1! \times 2! \times 3!} = 3360$$

اما عدد التباديل لاحرف العلة فقط

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

اذن الحل النهائي

$$Ans = 5 \times 3360 = 16800$$

(ii) لايجاد المطلوب هنا نطرح عدد التباديل الكلية و عدد التباديل في الفرع (i)

$$1663200 - 16800 = 1646400$$

تمرين 9

A student has to answer 10 questions, choosing at least 4 from each of Parts A and B. If there are 6 questions in Part A and 7 in Part B, in how many ways can the student choose 10 questions?

الحل

طالب يجب ان يجيب على 10 اسئلة. على الاقل 4 اسئلة من كلا الجزئين، اذا كان الجزء A يحوي 6 و الجزء B يحوي على 7. كم طريقة يمكن للطالب ان يجيب على 10 اسئلة

$$\begin{aligned} Ans &= \binom{6}{4} \binom{7}{6} + \binom{6}{5} \binom{7}{5} + \binom{6}{6} \binom{7}{4} \\ &= \binom{6}{2} \binom{7}{1} + \binom{6}{1} \binom{7}{2} + 1 \cdot \binom{7}{3} \\ &= \frac{6 \times 2}{2 \times 1} \cdot \frac{7}{1} + \frac{6}{1} \cdot \frac{7 \times 6}{2 \times 1} + \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 266 \end{aligned}$$

تمرين 10

In a hand of poker, 5 cards are dealt from a regular pack of 52 cards. In how many of these hands are there four of the same kind?

الحل

لدينا حزمة من بطاقات اللعب (52 بطاقة) و تم سحب 5 بطاقات منها. بكم طريقة يمكن ان يكون لدينا 4 بطاقات من نفس النوع
لدينا 13 تصنيف: Ace, 2, 3, ..., 10, Jack, Queen, King
اذن عدد طرق اختيار النوع الذي سوف يتكرر 4 مرات يساوي 13
عدد طرق تحديد البطاقة الخامسة يكون 12

$$Ans = 13 \times 12 \times 4 = 624$$

تمرين 11

Suppose an urn contains 8 balls. What is the number of ordered samples of size 3 with replacement?

الحل

اناء يحوي 8 كرات ما هو عدد العينات من ثلاث كرات مع الارجاع (اي اذا تم سحب كرة نقوم بإرجاعها)

$$Ans = 8^3 = 512$$

تمرين 12

In how many ways can 5 children be arranged in a line such that two particular children of them are never together?

الحل

كم طريقة يمكن ترتيب 5 اطفال بحيث 2 منهم لا يكونا معاً أبداً
اولاً نحسب عدد التباديل بدون شروط

$$5! = 120$$

الآن نحسب عدد التباديل بحيث هذان الطفلان معاً

$$4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

التباديل مع الشرط

$$Ans = 120 - 48 = 72$$

تمرين 13

Two digits are selected at random from the digits 1 through 9. If the sum is even, find the probability that both numbers are odd.

الحل

تجربة اختيار رقمين بشكل عشوائي من الارقام من 1 الى 9. اذا كان مجموعهما عدد زوجي، ما هي احتمالية كون الرقمين فرديان
عدد طرق اختيار رقمين

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

عدد طرق اختيار عددين فرديان

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

اذن عدد طرق اختيار رقمين مجموعهما عدد زوجي يساوي $16 = 10 + 6$. اذن احتمالية ان الرقمين فرديان:

$$p = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

تمرين 14

Find the value of n such that $\frac{P_4^n}{P_4^{n-1}} = \frac{5}{3}, n > 4$.

الحل

نكتب القانون أولاً:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

اذن

$$\frac{P_4^n}{P_4^{n-1}} = \frac{n!/(n-4)!}{(n-1)!/(n-5)!} = \frac{n!(n-5)!}{(n-1)!(n-4)!}$$

نبسط باستخدام خواص المضروب $n! = n(n-1)!$ و $(n-4)! = (n-4)(n-5)!$ اذن:

$$\frac{P_4^n}{P_4^{n-1}} = \frac{n(n-1)!(n-5)!}{(n-1)!(n-4)(n-5)!} = \frac{n}{n-4} = \frac{5}{3}$$

طرفين بوسطين:

$$3n = 5n - 20 \Rightarrow 2n = 20 \Rightarrow n = 10$$

تمرين 15

A question paper consists of 10 questions divided into two parts A and B. Each part contains five (5) questions. A candidate is required to attempt six (6) questions in all of which at least 2 should be from part A and at least 2 from part B. How many ways can the candidate select the questions if he can answer all questions equally well?

الحل

مشابه لسؤال 9 حيث هنا يجب ان يجيب الطالب على الاقل 2 سؤال من كل جزو يجب ان يجيب على 6 اسئلة كمجموع

$$\begin{aligned} Ans &= \binom{5}{2} \binom{5}{4} + \binom{5}{3} \binom{5}{3} + \binom{5}{4} \binom{5}{2} \\ &= \binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{5}{2} \binom{5}{2} + \binom{5}{1} \binom{5}{2} \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \cdot \frac{5}{1} + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \cdot \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{5}{1} \cdot \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \\ &= 50 + 100 + 50 = 200 \text{ ways} \end{aligned}$$

تمرين 16

If A and B are two independent events with both having probability p and $P(A \cup B) = \alpha$, find the value of p .

الحل

لدينا حدثان مستقلان A, B و $P(A) = P(B) = p$ و كذلك معطى ان $P(A \cup B) = \alpha$.
من القانون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نستخدم الاستقلالية $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و المعطيات

$$\alpha = p + p - p^2 \Rightarrow p^2 - 2p + \alpha = 0$$

بالدستور:

$$p = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\alpha}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \alpha}$$

تمرين 17

If A and B are two events of sample space such that $A \subset B$, find $P(B|A)$.

الحل

قانون الاحتمالية الشرطية:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

لأن هنا $A \subset B$ يؤدي الى ان $A \cap B = A$

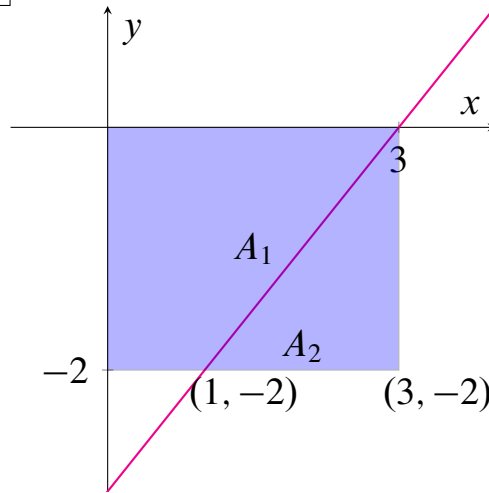
تمرين 18

If two points x and y are selected at random such that $0 \leq x \leq 3$ and $-2 \leq y \leq 0$, what is the probability that the distance between x and y is greater than 3?

الحل

$$d = |x - y| > 3 \Rightarrow x - y > 3 \text{ or } y - x > 3$$

$$y = x - 3$$



$$p = \frac{\text{Area of } A_2}{\text{Area of } A_1} = \frac{\frac{1}{2}(2)(2)}{(3)(2)} = \frac{1}{3}$$