وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

طريقة التفاضل التربيعي لحل مسائل القيم الحدودية

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالب

عباس حمود ضيدان

إشراف

ا.د. عبدالستار جابر علي

2025 م

1446 هـ

المحتويات

الخلاصة Abstract

قدمنا في هذا البحث كيفية عمل طريقة التفاضل التربيعي و تطبيقات على معادلات تفاضلية مختلفة و لاحظنا ان النتائج متقاربة للحل المضبوط مما يعني ان طريقة التفاضل التربيعي طريقة جيدة في التطبيقات العملية و لكن يؤخذ عليها بعض الامور منها ، عدم استقرارية الحلول عند زيادة عدد نـــقاط (N) ، أيضاً لاحظنا من الامثلة بأن دقة الطريقة في حل المعادلات عالية وبعدد قليل من النقاط.

مقدمة Introduction

تتحكم معظم المشكلات الهندسية بمجموعة من المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) بشروط حدودية مناسبة. على سبيل المثال، يتم نمذجة تدفقات الموائع النيوتونية بمعادلات نافييه-ستوكس [7]؛ بينما يحكم اهتزاز الألواح الرقيقة معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الرابعة [4]؛ في حين يمكن محاكاة الموجات الصوتية والموجات الدقيقة بمعادلة هلمهولتز [4]. بشكل عام، يصعب جدًا الحصول على الحل المغلق لهذه المعادلات. من ناحية أخرى، هناك حاجة دائمة لحلول هذه المعادلات بسبب الأهمية العملية. على سبيل المثال، عند تصميم طائرة، نحتاج إلى معرفة منحنى c_l (معامل الرفع) مقابل c_d (معامل السحب) لشكل جناح معين. يمكن الحصول على قيم c_l و c_d من حل معادلات نافييه-ستوكس. لذلك، من المهم تطوير حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية المعطاة.

في معظم الحالات، يتم تمثيل الحل التقريبي بقيم الدالة عند نقاط منفصلة معينة (نقاط الشبكة أو نقاط الشبكة). عند هذه المرحلة، قد يتساءل المرء عن العلاقة بين المشتقات في المعادلة التفاضلية الجزئية وقيم الدالة عند نقاط الشبكة. يبدو أن هناك جسرًا يربط بينهما. تقنية التقطيع العددي هي هذا الجسر، ويسمى الحل التقريبي المقابل بالحل العددي.

حاليًا، هناك العديد من تقنيات التقطيع العددي المتاحة. من بينها، تقع طرق الفروق المحدودة (FD) [7]، والعناصر المحدودة (FE)، والحجوم المحدودة (FV) [9] ضمن فئة الطرق منخفضة الرتبة، بينما تعتبر الطرق الطيفية والشبيهة بالطيفية طرقًا شاملة. تعتمد طريقة FD على متسلسلة تايلور أو التقريب متعدد الحدود، بينما تعتمد طريقة FE على المبدأ التبايني أو مبدأ البواقي الموزونة. تطبق طريقة FV قانون الحفظ الفيزيائي مباشرة على خلية محدودة. يمكن النظر إلى الطريقة الطيفية على أنها تطور متطرف لفئة مخططات التقطيع المعروفة باسم طرق البواقي الموزونة. العناصر الأساسية للطرق الطيفية هي دوال الأساس ودوال الترجيح. هناك علاقة وثيقة بين طرق FE والطرق الطيفية بمعنى أن كلا الطريقتين تستخدمان مجموعة من دوال الأساس لتقريب الحل. اختيار دوال الأساس هو أحد الميزات التي تميز الطريقة الطيفية عن طريقة .FE دوال الأساس للطرق الطيفية هي دوال قابلة للاشتقاق بشكل لانهائي ولها خصائص شاملة. في حالة طرق ،FE يتم تقسيم المجال إلى عناصر صغيرة،

ويتم تحديد دالة أساس في كل عنصر. وبالتالي، تكون دوال الأساس محلية في طبيعتها، ومناسبة جيدًا للتعامل مع الأشكال الهندسية المعقدة. يمكن اعتبار الطرق الطيفية امتدادًا لطرق ،FE ويمكن النظر إليها على أنها تقنية تقريب للفضاء الكامل.

يمكن إجراء معظم المحاكاة العددية للمشكلات الهندسية باستخدام الطرق منخفضة الرتبة FD وFE وFV باستخدام عدد كبير من نقاط الشبكة. ومع ذلك، في بعض التطبيقات العملية، تكون الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية مطلوبة فقط في عدد قليل من النقاط المحددة في المجال الفيزيائي. لتحقيق درجة مقبولة من الدقة، لا تزال الطرق منخفضة الرتبة تتطلب استخدام عدد كبير من نقاط الشبكة للحصول

على حلول دقيقة في هذه النقاط المحددة. يمكن العثور على مثال في تحليل الاهتزازات. عند التقطيع العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية الحاكمة، توفر القيم الذاتية لنظام المعادلات الجبرية الناتجة الترددات الاهتزازية للمشكلة. عادةً، يكون عدد نقاط الشبكة الداخلية مساويًا لبعد نظام المعادلات الجبرية الناتج، مما يعطي نفس عدد الترددات الذاتية. من بين جميع الترددات الذاتية المحسوبة، فقط الترددات المنخفضة هي ذات أهمية عملية. ومع ذلك، نظرًا لأن الترددات الذاتية المحسوبة لها نفس درجة الدقة، فلا يزال هناك حاجة إلى عدد كبير من نقاط الشبكة للحصول على هذه الترددات المنخفضة بدقة. نتيجة لذلك، يتطلب ذلك الكثير من التخزين الافتراضي والجهد الحسابي. يبدو أن عيوب الطرق منخفضة الرتبة المذكورة أعلاه يمكن تحسينها باستخدام الطرق عالية الرتبة والطرق الشاملة. بشكل عام، تتمتع الطرق عالية الرتبة بخطأ قطع عالي الرتبة. وبالتالي، لتحقيق نفس درجة الدقة، يمكن أن يكون تباعد الشبكة المستخدم في الطرق عالية الرتبة أكبر بكثير من ذلك المستخدم في الطرق منخفضة الرتبة. نتيجة لذلك، يمكن للطرق عالية الرتبة أن تنتج حلولًا عددية دقيقة باستخدام عدد قليل جدًا من نقاط الشبكة. الطريقة الطيفية هي الخيار الطبيعي لهذا الغرض. حاليًا، الطريقة الطيفية ناجحة للغاية في عدة مجالات: نمذجة الاضطراب، التنبؤ بالطقس، الموجات غير الخطية، نمذجة الزلازل، إلخ. يتطلب تطبيق الطريقة الطيفية معرفة رياضية كبيرة بالنظرية.

من ناحية أخرى، في البحث عن تقنية تقطيع فعالة للحصول على حلول عددية دقيقة باستخدام عدد صغير نسبيًا من نقاط الشبكة، قدم بلمان وآخرون (1971، 1972) [2] [1] [3] طريقة التربيع التفاضلي (DQ)، حيث يتم التعبير عن المشتق الجزئي للدالة بالنسبة لاتجاه إحداثي كمجموع خطي موزون لجميع قيم الدالة عند جميع نقاط الشبكة في ذلك الاتجاه. تم بدء طريقة DQ من فكرة التربيع التكاملي. مفتاح DQ هو تحديد معاملات الترجيح لتقطيع المشتقات من أي رتبة. اقترح بلمان وآخرون (1972) طريقتين لتحديد معاملات الترجيح للمشتق من الرتبة الأولى. الطريقة الأولى تحل نظام معادلات جبرية. الطريقة الثانية تستخدم صيغة جبرية بسيطة، ولكن مع اختيار إحداثيات نقاط الشبكة كجذور متعدد الحدود ليجاندر المزاح. معظم التطبيقات المبكرة لـ DQ في الهندسة (بلمان وآخرون 1971، 1972، 1974، 1975، 1986، كاشيف وبلمان 1974، هو وهو 1974، مينجل 1977، وانغ 1982، سيفان وسليبتشوفيتش 1983، 1984، نوديموثو وآخرون 1984، بيرت وآخرون 1988، 1989، جانغ وآخرون 1989) استخدمت طرق بلمان لحساب معاملات الترجيح. من بين طريقي بلمان، عادةً ما يتم تطبيق الطريقة الأولى لأنها تسمح باختيار إحداثيات نقاط الشبكة بشكل تعسفي. لسوء الحظ، عندما يكون ترتيب نظام المعادلات الجبرية كبيرًا،

تصبح مصفوفته سيئة التكييف. وبالتالي، من الصعب جدًا الحصول على معاملات الترجيح لعدد كبير من نقاط الشبكة باستخدام هذه الطريقة. هذا هو السبب على الأرجح وراء استخدام التطبيقات المبكرة لهذا المخطط عدد نقاط الشبكة أقل من أو يساوي 13 فقط.

الفصل الأول

طريقة التفاضل التربيعي

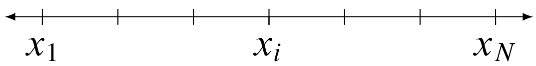
1 - 1 مقدمة Introduction

يُعد التفاضل التربيعي (Differential Quadrature) من الأساليب العددية الفعالة لتقريب المشتقات، حيث يعتمد على مبدأ تمثيل المشتقة كمجموعٍ موزونٍ لقيم الدالة عند نقاط محددة. يوفر هذا الأسلوب دقة عالية عند حل المعادلات التفاضلية الجزئية، مما يجعله بديلاً قوياً للطُرق التقليدية مثل الفروق المحدودة والعناصر المحدودة.

يتناول هذا الفصل الأسس الرياضية التي يقوم عليها التفاضل التربيعي، حيث يُستعرض عددٌ من الطرائق المختلفة لاشتقاق الصيغ الأساسية لتقريب المشتقة. كما يتم التطرق إلى كيفية حساب معاملات الوزن للمشتقات من الرتبة الأولى، والتي تُعد عنصراً جوهرياً في دقة الطريقة. بالإضافة إلى ذلك، يناقش الفصل أنواع نقاط الشبكة المستخدمة في التقريب، والتي تلعب دوراً مهماً في تحسين استقرار الحسابات وتقليل الخطأ العددي.

2 - 1 صيغ التفاضل التربيعي Differential Quadrature Formulas

تتلخص فكرة عمل طريقة التفاضل التربيعي في تقريب المشتقات الجزئية (أو الاعتيادية) بواسطة مجموع الاوزان لمتغيرات الدالة المعطاة في كل نقاط الشبكة وضمن المجال المحدد لحساب قيم الدالة. لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ حيث a,b ثوابت ولنفرض أن المنطقة قسمت إلى N من النقاط كما موضح في الشكل 1[4]



شكل 1: تقسيم الفترة $[a,b]$

لذلك يكون تقريب المشتقة الأولى و الثانية للدالة $f(x)$ عند النقطة x_i بالشكل

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} f(x_j) \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} f(x_j) \tag{1.2}$$

وبشكل عام

$$\left.\frac{d^ry}{dx^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(r)} f(x_j) \tag{1.3}$$

حيث $a_{ij}^{(r)}$ تمثل معاملات الوزن من الرتبة r^{th} وسنوضح في البند القادم كيف يتم حساب معاملات الوزن وبيان دورها في تحديد دقة الحلول الناتجة من استعمال طريقة التفاضل التربيعي.

1 - 3 معاملات الوزن من الرتبة الأولى Weight Coefficients of First Order

أن تحديد نقاط الشبكة و معاملات الوزن هما عاملان مهمان في تطبيق صيغ التفاضل التربيعي (1.3) وأن لمعاملات الوزن دوراً رئيسياً و مهماً في طريقة التفاضل التربيعي و تعد أحد مفاتيح هذه الطريقة لما لها من أهمية في التأثير على دقة الحلول العددية. الآن سوف نتطرق إلى طرق حساب معاملات الوزن من الرتبة الأولى

1 - 3 - 1 طريقة بيلمان الأولى [1] (Billman's First Approach)

في هذه الطريقة استخدم بيلمان دوال الاختبار التالية للحصول على معاملات الوزن على الشكل

$$g_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{1.4}$$

من الواضح أن معادلة (1.4) تعطي N من دوال الإختبار. معاملات الوزن $a_{ij}^{(1)}$ في (1.3) ، i و j تأخذ قيم من 1 إلى N وبالتالي مجموع معاملات الوزن هو $N \times N$. بتطبيق دوال الإختبار على نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ، نتيجة لذلك نحصل على $N \times N$ من المعادلات

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)}\, x_j = 1 \\
&\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)}\, x_j^k = k\, x_i^{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1
\end{aligned} \tag{1.5}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, N$. نظام المعادلات في (1.5) يملك حل وحيد لأن مصفوفة النظام تأخذ شكل **Vandermonde**. لسوء الحظ عندما تكون N كبيرة يصعب إيجاد حل لهذا النظام لهذا يتم إختيار قيم صغيرة إلى N (أقل من 13).

ملاحظة

لا توجد أي قيود على اختيار نقاط الشبكة x_i في طريقة بيلمان لحساب معاملات الوزن من الرتبة الأولى.

1 - 3 - 2 طريقة بيلمان الثانية [1] (Billman's Second Approach)

في هذه الطريقة أستخدم بيلمان دوال الإختبار التالية للحصول على معاملات الوزن

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k) L_N^{(1)}(x)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.6}$$

حيث $L_N(x)$ هي متعددة حدود ليجندر من الدرجة N و $L_N^{(1)}(x)$ هي المشتقة الأولى إلى $L_N(x)$. يتم في هذه الطريقة إختيار نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ لتكون جذور متعددة حدود ليجندر المُزاحة إلى الفترة [0, 1]. وبتطبيق دوال الإختبار في (1.6) على نقاط الشبكة. بيلمان توصل إلى أن صياغة جبرية بسيطة لحساب معاملات الوزن a_{ij}.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L_N^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \\ a_{ii} &= \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

رغم هذه البساطة إلا أن هذه الطريقة لبست بمرونة الطريقة الأولى والسبب يعود إلى إختيار نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ حيث لا نستطيع تحديدها بشكل إختياري ، بدلاً من ذلك يتم اختيارها كجذور متعددة حدود ليجندر من الدرجة N. لهذا السبب فإن الطريقة الأولى تُفَضّل في التطبيقات العملية.

ملاحظة

أن متعددات حدود ليجندر المُزاحة إلى الفترة [0, 1] تعطى بالصيغة

$$L_N^*(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^{N+k} \frac{(N+k)!}{(N-k)!(k!)^2} x^k$$

أول خمس متعددات حدود ليجندر هي

$$\begin{aligned} L_0^*(x) &= 1 \\ L_1^*(x) &= 2x - 1 \\ L_2^*(x) &= 6x^2 - 6x + 1 \\ L_3^*(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 \\ L_4^*(x) &= 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 \end{aligned}$$

1 - 3 - 3 طريقة كوان و جانك [8] (Quan & Chang's Approach)

لتطوير طُرق بيلمان في حساب معاملات الوزن ، العديد من المحاولات تمت بواسطة العديد من الباحثين. واحدة من أكثر الطرق فائدة هي الطريقة المقدمة من الباحثين كوان و جانك. حيث استعملا متعددات حدود لاكرانج كدوال إختيار

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x - x_k)M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.8}$$

حيث

$$M(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_N)$$
$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1,k\neq i}^{N} (x_i - x_k)$$

وبتطبيق هذه الدوال على N من نقاط الشبكة ، نحصل على الصيغ الجبرية لحساب معاملات الوزن $a_{ij}^{(1)}$.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1,k\neq i,j}^{N} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}, \quad i \neq j$$
$$a_{ii}^{(1)} = \sum_{k=1,k\neq i}^{N} \frac{1}{x_i - x_k} \tag{1.9}$$

ومن المهم معرفة أنه لا توجد أية قيود على اختيار نقاط الشبكة في هذه الطريقة

ملاحظة

طريقة كوان و جانك مكافئة لطريقة بيلمان الأولى لهذا هنا أيضاً لا توجد قيود في اختيار نقاط الشبكة x_i.

4 - 1 معاملات الوزن من الرتبة الثانية Weight Coefficients of Second Order

في هذا البند سوف نتعرف على طرق حساب معاملات الوزن من الرتبة الثانية حيث

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} f(x_j) \tag{1.10}$$

حيث $a_{ij}^{(2)}$ هي معاملات الوزن من الرتبة الثانية.

1 - 4 - 1 طريقة شو العامة [4] (Shu's General Approach)

بإستخدام تقريب متعددات الحدود و فضاء المتجهات توصل شو إلى صياغة لمعاملات الوزن من الرتبة الثانية ، كما يلي

$$a_{ij}^{(2)} = 2a_{ij}^{(1)}\left(a_{ii}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j}\right), \quad i \neq j \tag{1.11}$$

حيث نلاحظ من (1.11) إذا كانت $i \neq j$ فإن $a_{ij}^{(2)}$ يمكن أن تحسب بسهولة. يمكن تطبيق نظام المعادلات في (1.5) لـــ $k = 1$ ، نحصل على

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} = 0 \Longrightarrow a_{ii}^{(2)} = -\sum_{j=1, i\neq j}^{N} a_{ij}^{(2)}$$

1 - 4 - 2 طريقة ضرب المصفوفات [4] (Matrix Multiplication Method)

بما ان معاملات الوزن تمثل لنا مصفوفة مربعة ذات حجم N يمكن الاستفادة من معلوماتنا من التفاضل والجبر الخطي للتوصل الى صيغة لحساب معاملات الوزن من الرتبة الثانية ، اولاً من تعريف المؤثر التفاضلي

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

بتطبيق طريقة التفاضل التربيعي على الطرفين ، نحصل على

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} \cdot f(x_j) &= \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^{N} a_{kj}^{(1)} \cdot f(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot a_{kj}^{(1)}\right] \cdot f(x_j)
\end{aligned}$$

وبمقارنة الطرفين نحصل على

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot a_{kj}^{(1)} \tag{1.12}$$

وبلغة المصفوفات هذا يعني

$$[a_{ij}^{(2)}] = [a_{ij}^{(1)}] \times [a_{ij}^{(1)}] \tag{1.13}$$

ملاحظة

يُفضل استخدام طريقة شو العامة لأنها تتطلب عمليات حسابية أقل من طريقة ضرب المصفوفات

1 - 5 اختيار نقاط الشبكة Choice of Grid Points

أن اختيار نقاط الشبكة واحد من العوامل المهمة التي تؤثر على دقة التقريبات الناتجة من استعمال طريقة التفاضل التربيعي. لذلك ركز العديد من الباحثين منهم **شو (Shu)** على كيفية دراسة تأثير نقاط

الشبكة على دقة الحلول في هذه الطريقة. ولكن حين يمكننا التحكم بنقاط الشبكة ففي طريقة بيلمان الثانية لا يمكننا ذلك.

1 - 5 - 1 النقاط متساوية الأبعاد (Equally Spaced Grid Points)

تكون على الشكل

$$x_i = a + \frac{b-a}{N-1}(i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.14}$$

هذا النوع من النقاط كان قيد الإستعمال من قبل الكثير من الباحثين لبساطتها وملائمتها في حل الكثير من المسائل

1 - 5 - 2 نقاط شيبيشيف-كاوس-لوباتو (Chebyshev-Gauss-Lobatto Points)

ويطلق عليها اختصاراً **نقاط لوباتو (Lobatto Points)**

$$x_i = a + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right](b-a), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.15}$$

وتسمى في بعض الأحيان النقاط غير متساوية الأبعاد (Unequally Spaced Points). وقد أثبت العديد من الباحثين بأن هذا النوع من النقاط يعطي نتائج أكثر دقة من النقاط متساوية الأبعاد.

الفصل الثاني

تطبيق طريقة التفاضل التربيعي لحل مسائل القيم الحدودية

2 - 1 مقدمة Introduction

بعد أن بينّا في الفصل الأول كيفية الحصول على معاملات الوزن والفرق بين الطُرق الثلاثة وأيضاً بينّا طرق اختيار نقاط الشبكة. سوف نقوم في الفصل الثاني بتطبيق طريقة التفاضل التربيعي لحل المعادلات الجزئية على الشكل

$$u_t = F(u, x, t, u_x, u_{xx}) \tag{2.1}$$

مع الشرط الإبتدائي $u(x,0) = g(x)$. حيث $g(x)$ دالة في x.

2 - 2 بعض الامثلة العددية

مثال 2 - 1

لنحاول تطبيق التفاضل التربيعي على المعادلة

$$u_t = x^2 + \frac{1}{4}u_x^2 \tag{2.2}$$

مع الشرط الحدودي $u(x,0) = 0$. بتطبيق التفاضل التربيعي على المشتقة بالنسبة الى x بواسطة الصيغة (1.1) على نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ، نحصل على

$$u_t(x_i, t) = x_i^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} u(x_j, t)\right]^2, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2.3}$$

اصبح لدينا نظام مكون من N من المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية بالنسبة للمتغير المستقل t. سوف نستخدم طريقة رانج - كتا من الدرجة الرابعة (RK4) ، حيث نوجد الحل عند القيم $t_0, t_1, \ldots, t_M$ بخطوة مقدارها h حيث $t_{k+1} = t_k + h$ ، نفترض ان

$$\mathbf{u}_k = \langle u(x_1, t_k), u(x_2, t_k), \ldots, u(x_N, t_k)\rangle^T, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, M$$

$$\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_N\rangle^T$$

الان نفرض ان

$$G(t, \mathbf{u}) = \mathbf{x}.^2 + \frac{1}{4}(A\mathbf{u}).^2$$

حيث A مصفوفة معاملات الوزن a_{ij} ، صيغة رانج كتا من الدرجة الرابعة تكون

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{k}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \tag{2.4}$$

حيث في كل خطوة k نحسب

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= G(t_k, \mathbf{y}) \\ \mathbf{k}_2 &= G\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 &= G\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{k}_4 &= G(t_k + h, \mathbf{y} + h\mathbf{k}_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

الآن نحدد $N = 3, M = 11, h = 0.01$ ، نعين اولاً معاملات الوزن من الصيغ (1.9) نحصل على

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

الآن نجد نقاط الشبكة متساوية المسافة من خلال الصيغة (1.14)، نجد

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1$$

وعند ايجاد نقاط الشبكة غير متساوية المسافة بواسطة الصيغة (1.15) نجد ان النقاط مطابقة للنقاط متساوية المسافة، الآن نعوض نقاط الشبكة ومعاملات الوزن في (2.3) ونكمل الحل بطريقة رانج كتا من الدرجة الرابعة ، نبين النتائج في الجدول 2 - 1 حيث يبين القيمة الدقيقة لحل المعادلة المتمثل بالدالة $u(x,t) = x^2 \tan(t)$ والخطأ المطلق لطريقة التفاضل التربيعي.

t	x_i	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0
	x_2	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_3	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0
	x_2	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_3	0.10033467	8.3007×10^{-8}

جدول 2 - 1: مقارنة النتائج العددية مع التحليلية عندما $N = 3$

الآن عند نفس القيم $M = 11$ ، $h = 0.01$ ، نأخذ $N = 5$ ، نقاط الشبكة متساوية المسافة

تكون

$$x_1 = 0, x_2 = 0.25, x_3 = 0.5, x_4 = 0.75, x_5 = 1$$

و نقاط الشبكة غير متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.14645, x_3 = 0.5, x_4 = 0.85355, x_5 = 1$$

ومعاملات الوزن تكون

$$\begin{bmatrix} -8.3 & 16.0 & -12.0 & 5.3 & -1.0 \\ -1.0 & -3.3 & 6.0 & -2.0 & 0.3 \\ 0.3 & -2.7 & 0.0 & 2.7 & -0.3 \\ -0.3 & 2.0 & -6.0 & 3.3 & 1.0 \\ 1.0 & -5.3 & 12.0 & -16.0 & 8.3 \end{bmatrix}$$

عند تعويض هذه القيم في المعادلة (2.3) واكمال الحل بخوارزمية رانج كتا من الدرجة الرابعة ، نبين النتائج في الجدول 2 - 2

t	x_i	Equally Spacing Points		Unequally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00627092	5.1880×10^{-9}	0.00215184	1.7802×10^{-9}
	x_3	0.02508367	2.0752×10^{-8}	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_4	0.05643825	4.6692×10^{-8}	0.07309917	6.0475×10^{-8}
	x_5	0.10033467	8.3007×10^{-8}	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00062502	5.2081×10^{-14}	0.00021447	1.7871×10^{-14}
	x_3	0.00250008	2.0833×10^{-13}	0.00250008	2.0833×10^{-13}
	x_4	0.00562519	4.6873×10^{-13}	0.00728578	6.0710×10^{-13}
	x_5	0.01000033	8.3330×10^{-13}	0.01000033	8.3330×10^{-13}

جدول 2 - 2: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 5$

الآن عندما $N = 7$ ، نجد نقاط الشبكة متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.1667, x_3 = 0.3333, x_4 = 0.5, x_5 = 0.6667, x_6 = 0.8333, x_7 = 1$$

اما نقاط الشبكة غير متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.067, x_3 = 0.25, x_4 = 0.5, x_5 = 0.75, x_6 = 0.933, x_7 = 1$$

ومعاملات الوزن

$$\begin{bmatrix} -14.7 & 36.0 & -45.0 & 40.0 & -22.5 & 7.2 & -1.0 \\ -1.0 & -7.7 & 15.0 & -10.0 & 5.0 & -1.5 & 0.2 \\ 0.2 & -2.4 & -3.5 & 8.0 & -3.0 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 & -4.5 & -0.0 & 4.5 & -0.9 & 0.1 \\ 0.1 & -0.8 & 3.0 & -8.0 & 3.5 & 2.4 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 & -5.0 & 10.0 & -15.0 & 7.7 & 1.0 \\ 1.0 & -7.2 & 22.5 & -40.0 & 45.0 & -36.0 & 14.7 \end{bmatrix}$$

بطريقة مشابهة نعوض هذه القيم في المعادلة (2.3) ونكمل الحل برانج كتا من الدرجة الرابعة ، نبين النتائج في الجدول 2 - 3 أخيراً نأخذ $N = 9$ ، نجد نقاط الشبكة متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.125, x_3 = 0.25, x_4 = 0.375,$$
$$x_5 = 0.5, x_6 = 0.625, x_7 = 0.75, x_8 = 0.875, x_9 = 1$$

ونقاط الشبكة غير متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.0381, x_3 = 0.1464, x_4 = 0.3087,$$
$$x_5 = 0, x_6 = 0.6913, x_7 = 0.8536, x_8 = 0.9619, x_9 = 1$$

t	x_i	Equally Spacing Points		Unequally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00278707	2.3058×10^{-9}	0.00045023	3.7248×10^{-10}
	x_3	0.01114830	9.2230×10^{-9}	0.00627092	5.1880×10^{-9}
	x_4	0.02508367	2.0752×10^{-8}	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_5	0.04459319	3.6892×10^{-8}	0.05643825	4.6692×10^{-8}
	x_6	0.06967686	5.7644×10^{-8}	0.08734261	7.2259×10^{-8}
	x_7	0.10033467	8.3007×10^{-8}	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00027779	2.3147×10^{-14}	0.00004487	3.7393×10^{-15}
	x_3	0.00111115	9.2589×10^{-14}	0.00062502	5.2081×10^{-14}
	x_4	0.00250008	2.0833×10^{-13}	0.00250008	2.0833×10^{-13}
	x_5	0.00444459	3.7036×10^{-13}	0.00562519	4.6873×10^{-13}
	x_6	0.00694468	5.7868×10^{-13}	0.00870542	7.2540×10^{-13}
	x_7	0.01000033	8.3330×10^{-13}	0.01000033	8.3330×10^{-13}

جدول 2 - 3: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 7$

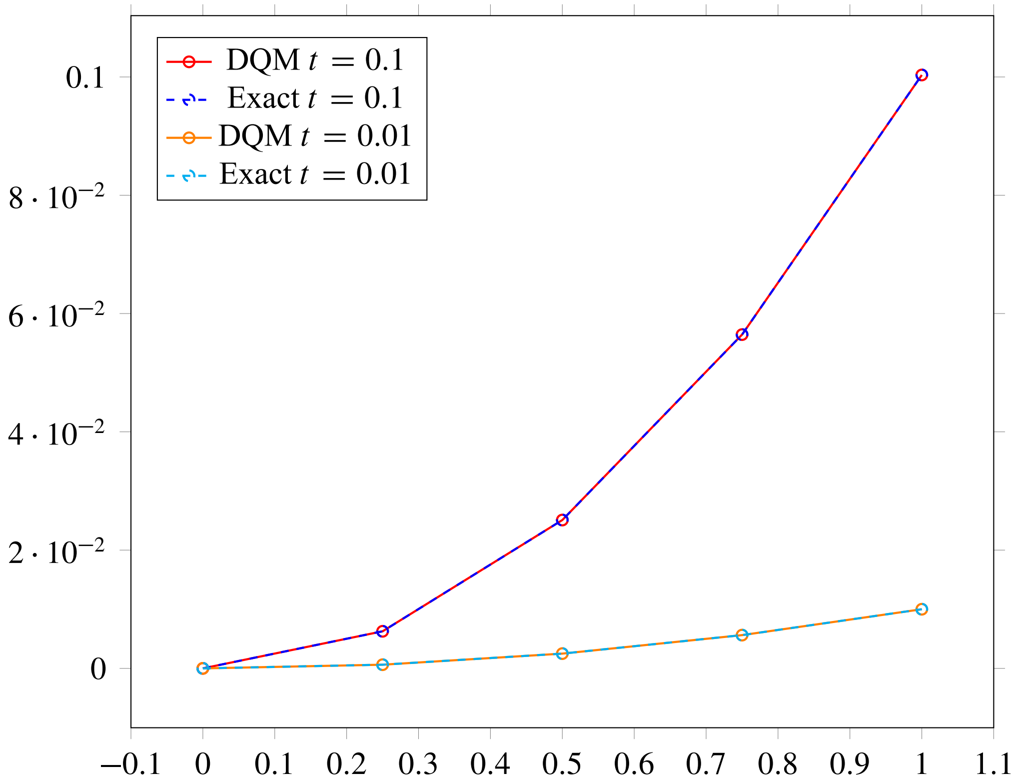
ومعاملات الوزن تكون

$$\begin{bmatrix} -21.7 & 64.0 & -112.0 & 149.3 & -140.0 & 89.6 & -37.3 & 9.1 & -1.0 \\ -1.0 & -12.7 & 28.0 & -28.0 & 23.3 & -14.0 & 5.6 & -1.3 & 0.1 \\ 0.1 & -2.3 & -7.6 & 16.0 & -10.0 & 5.3 & -2.0 & 0.5 & -0.0 \\ -0.0 & 0.6 & -4.0 & -3.6 & 10.0 & -4.0 & 1.3 & -0.3 & 0.0 \\ 0.0 & -0.3 & 1.6 & -6.4 & -0.0 & 6.4 & -1.6 & 0.3 & -0.0 \\ -0.0 & 0.3 & -1.3 & 4.0 & -10.0 & 3.6 & 4.0 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 2.0 & -5.3 & 10.0 & -16.0 & 7.6 & 2.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1.3 & -5.6 & 14.0 & -23.3 & 28.0 & -28.0 & 12.7 & 1.0 \\ 1.0 & -9.1 & 37.3 & -89.6 & 140.0 & -149.3 & 112.0 & -64.0 & 21.7 \end{bmatrix}$$

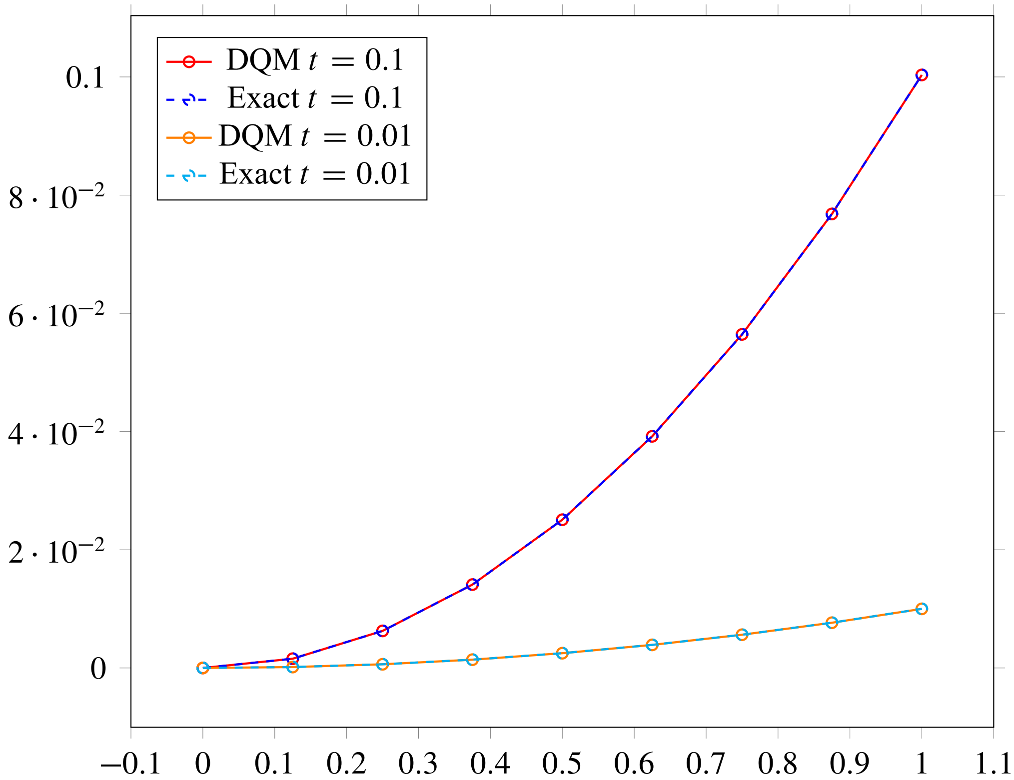
نجد النتائج في الجدول 2 - 4

t	x_i	Equally Spacing Points		Unequally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00156773	1.2970×10^{-9}	0.00014534	1.2024×10^{-10}
	x_3	0.00627092	5.1880×10^{-9}	0.00215184	1.7802×10^{-9}
	x_4	0.01410956	1.1673×10^{-8}	0.00955888	7.9081×10^{-9}
	x_5	0.02508367	2.0752×10^{-8}	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_6	0.03919323	3.2425×10^{-8}	0.04795529	3.9674×10^{-8}
	x_7	0.05643825	4.6692×10^{-8}	0.07309917	6.0475×10^{-8}
	x_8	0.07681873	6.3552×10^{-8}	0.09284249	7.6809×10^{-8}
	x_9	0.10033467	8.3007×10^{-8}	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00015626	1.3020×10^{-14}	0.00001449	1.2071×10^{-15}
	x_3	0.00062502	5.2081×10^{-14}	0.00021447	1.7871×10^{-14}
	x_4	0.00140630	1.1718×10^{-13}	0.00095273	7.9389×10^{-14}
	x_5	0.00250008	2.0833×10^{-13}	0.00250008	2.0833×10^{-13}
	x_6	0.00390638	3.2551×10^{-13}	0.00477969	3.9828×10^{-13}
	x_7	0.00562519	4.6873×10^{-13}	0.00728578	6.0710×10^{-13}
	x_8	0.00765651	6.3800×10^{-13}	0.00925359	7.7108×10^{-13}
	x_9	0.01000033	8.3330×10^{-13}	0.01000033	8.3330×10^{-13}

جدول 2 - 4: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 9$



شكل 1: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي و الحل العددي عندما $N = 5$



شكل 2: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي و الحل العددي عندما $N = 9$

مثال 2 - 2

لنحاول ايجاد حل للمعادلة

$$u_t + uu_x = x \tag{2.6}$$

مع الشرط الحدودي $u(x,0) = 2$ ، هذه المعادلة تمتلك الحل الدقيق $u(x,t) = 2\,\mathrm{sech}(t) + x\tanh(t)$، نطبق صيغة التفاضل التربيعي على المشتقة بالنسبة الى x على المعادلة (2.6) من اجل نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ، نجد

$$u_t(x_i,t) = -u(x_i,t)\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} u(x_j,t) + x_i, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{2.7}$$

كما في المثال الاول ، نكمل الحل بطريقة رانج كتا من الدرجة الرابعة RK4 ، للقيم $t_0, t_1, \ldots, t_M$ ، من اجل ذلك نفرض

$$G(t,\mathbf{u}) = -\mathbf{u}(A\mathbf{u}) + \mathbf{x}$$

حيث A مصفوفة معاملات الوزن من الرتبة الاولى و $\mathbf{x} = \langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ ، صيغة رانج كتا تكون

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{k}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad k = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{2.8}$$

حيث يتم حساب المعاملات المتجهة $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ من خلال الصيغ في (2.5)

قبل اكمال الحل ، نلاحظ ان نقاط الشبكة متساوية المسافة ونقاط الشبكة غير متساوية المسافة وكذلك معاملات الوزن لا تعتمد على شكل المعادلة التفاضلية وانما فقط على قيمة N لذلك يمكننا الاستعانة بالمثال 2 - 1 لكي نستخدم نقاط الشبكة ومعاملات الوزن

الان نحدد $M = 11, h = 0.01$ ونجد الحل من اجل القيم $N = 3,5,7,9$ ، النتائج المبينة في الجداول 2 - 5 ، 2 - 6 ، 2 - 7 ، 2 - 8

t	x_i	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_3	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_3	2.08970949	1.0184×10^{-7}

جدول 2 - 5: مقارنة النتائج العددية مع التحليلية عندما $N = 3$

t	x_i	Equally Spacing Points		Unequally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.01495850	3.9086×10^{-8}	2.00463754	3.0422×10^{-8}
	x_3	2.03987550	6.0004×10^{-8}	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_4	2.06479249	8.0922×10^{-8}	2.07511345	8.9587×10^{-8}
	x_5	2.08970949	1.0184×10^{-7}	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99990000	1.7986×10^{-14}	1.99990000	1.8208×10^{-14}
	x_2	2.00239992	2.2604×10^{-13}	2.00136442	1.4033×10^{-13}
	x_3	2.00489984	4.3476×10^{-13}	2.00489984	4.3476×10^{-13}
	x_4	2.00739975	6.4304×10^{-13}	2.00843525	7.2964×10^{-13}
	x_5	2.00989967	8.5132×10^{-13}	2.00989967	8.5132×10^{-13}

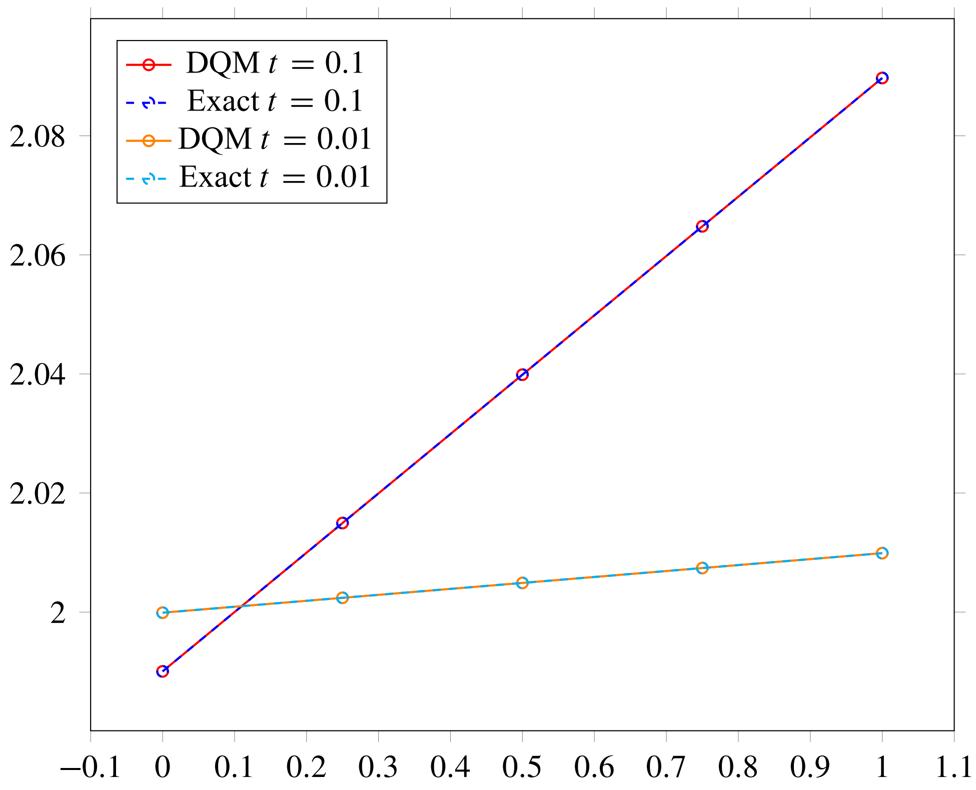
جدول 2 - 6: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 5$

t	x_i	Equally Spacing Points		Unequally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.00665283	3.2114×10^{-8}	1.99671799	2.3773×10^{-8}
	x_3	2.02326416	4.6059×10^{-8}	2.01495850	3.9086×10^{-8}
	x_4	2.03987550	6.0004×10^{-8}	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_5	2.05648683	7.3950×10^{-8}	2.06479249	8.0922×10^{-8}
	x_6	2.07309816	8.7895×10^{-8}	2.08303300	9.6235×10^{-8}
	x_7	2.08970949	1.0184×10^{-7}	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99990000	1.7097×10^{-14}	1.99990000	1.7764×10^{-14}
	x_2	2.00156662	1.5721×10^{-13}	2.00056985	7.3719×10^{-14}
	x_3	2.00323323	2.9576×10^{-13}	2.00239992	2.2649×10^{-13}
	x_4	2.00489984	4.3476×10^{-13}	2.00489984	4.3476×10^{-13}
	x_5	2.00656645	5.7332×10^{-13}	2.00739975	6.4304×10^{-13}
	x_6	2.00823306	7.1232×10^{-13}	2.00922982	7.9536×10^{-13}
	x_7	2.00989967	8.5043×10^{-13}	2.00989967	8.5132×10^{-13}

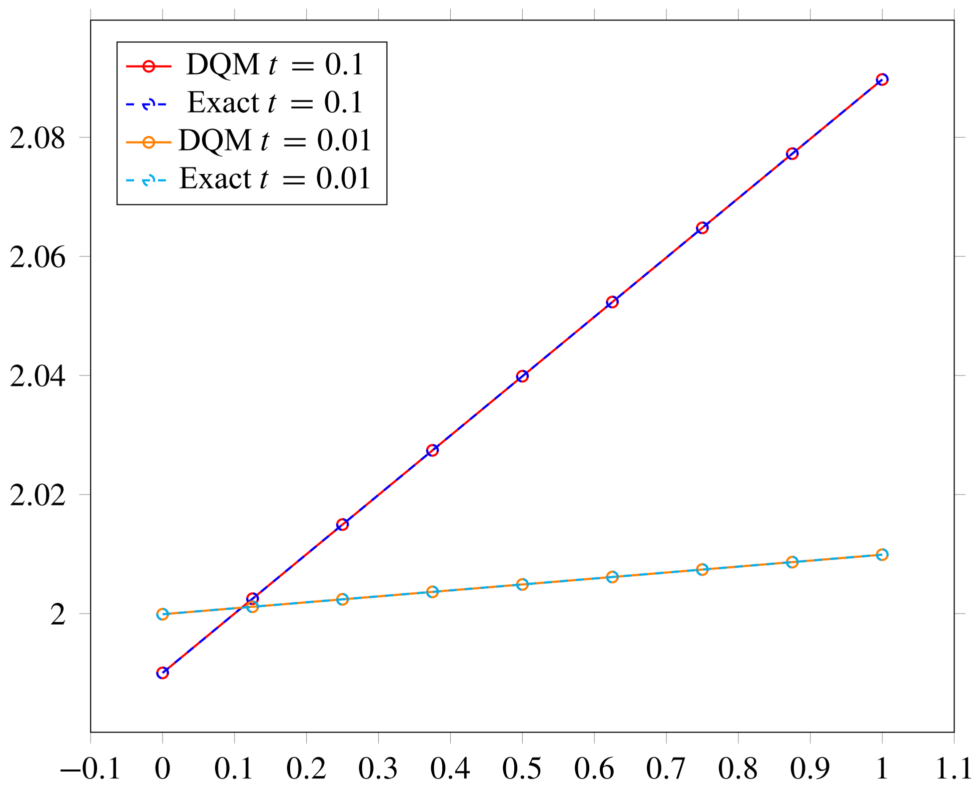
جدول 2 - 7: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 7$

t	x_i	Equally Spacing Points		Unequally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}	1.99004150	1.8169×10^{-8}
	x_2	2.00250000	2.8627×10^{-8}	1.99383489	2.1353×10^{-8}
	x_3	2.01495850	3.9086×10^{-8}	2.00463754	3.0422×10^{-8}
	x_4	2.02741700	4.9545×10^{-8}	2.02080485	4.3994×10^{-8}
	x_5	2.03987550	6.0004×10^{-8}	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_6	2.05233399	7.0463×10^{-8}	2.05894614	7.6014×10^{-8}
	x_7	2.06479249	8.0922×10^{-8}	2.07511345	8.9587×10^{-8}
	x_8	2.07725099	9.1381×10^{-8}	2.08591611	9.8656×10^{-8}
	x_9	2.08970949	1.0184×10^{-7}	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99990000	1.7764×10^{-14}	1.99990000	1.8874×10^{-14}
	x_2	2.00114996	1.2212×10^{-13}	2.00028059	4.9738×10^{-14}
	x_3	2.00239992	2.2604×10^{-13}	2.00136442	1.4033×10^{-13}
	x_4	2.00364988	3.3085×10^{-13}	2.00298648	2.7534×10^{-13}
	x_5	2.00489984	4.3476×10^{-13}	2.00489984	4.3476×10^{-13}
	x_6	2.00614980	5.3868×10^{-13}	2.00681319	5.9419×10^{-13}
	x_7	2.00739975	6.4304×10^{-13}	2.00843525	7.2919×10^{-13}
	x_8	2.00864971	7.4696×10^{-13}	2.00951908	8.1979×10^{-13}
	x_9	2.00989967	8.5043×10^{-13}	2.00989967	8.5176×10^{-13}

جدول 2 - 8: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 9$



شكل 3: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي والحل العددي عندما $N = 5$



شكل 4: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي والحل العددي عندما $N = 9$

2 - 3 مناقشة النتائج

في هذا البند سوف نناقش النتائج العددية التي حصلنا عليها من خلال تطبيق التفاضل التربيعي على الامثلة في البند السابق من حيث القيمة المطلقة للفرق بين القيمة الدقيقة والقيمة المُقربة بالتفاضل التربيعي.

طُبقت طريقة التفاضل التربيعي مع توزيع النقاط متساوية المسافة والنقاط غير متساوية المسافة ، واستعملنا الخطوة الزمنية (time step) $h = 0.01$ وللنقاط $N = 3, N = 5, N = 7, N = 9$ ، وكانت النتائج العددية متطابقة الى حد كبير مع الحل التحليلي (الدقيق) وهذا ما تأكده الرسوم البيانية (1 ، 2 ، 3 ، 4). حيث نرى ان الفرق كاد لا يذكر في الرسم. ومن خلال الجداول للحلول العددية التي حصلنا عليها (الجداول 2 - 1, 2 - 2, 2 - 3, 2 - 4 , 2 - 5, 2 - 6, 2 - 7, 2 - 8) نلاحظ ان طريقة التفاضل التربيعي مستقرة الى حد كبير ، حيث نرى ان مقدار الخطأ مستقر مع زيادة قيمة N. كما يمكن رؤية ان اختيار نقاط الشبكة اثر على النتائج ولكن بشكل طفيف الى حد ما ، ومن المعروف ان لطريقة رانج كتا من الدرجة الرابعة افضلية على طريقة الفروقات المحددة (انظر [9])وهذا يفسر دقة النتائج وتقاربها رغم اختلاف نقاط الشبكة.

استنتاجات و توصيات

استنتاجات

في نهاية البحث يمكن استنتاج ان طريقة التفاضل التربيعي هي طريقة جيدة في ايجاد نتائج قريبة من الحل الدقيق وبنقاط شبكة قليلة نسبياً مقارنةً بطرائق اخرى ، وكذلك يمكن استنتاج ان طريقة التفاضل التربيعي مستقرة عند قيم مختلفة من عدد نقاط الشبكة ، ولكن لا يمنع ان نعطي بعض التوصيات عند تطبيق طريقة التفاضل التربيعي في مختلف المجالات:

توصيات

1. يُوصى باختيار نوع نقاط الشبكة (منتظمة أو غير منتظمة مثل نقاط تشيبيشيف) بما يتناسب مع طبيعة المسألة المدروسة، إذ تؤدي النقاط غير المنتظمة إلى دقة أعلى في المسائل ذات التغيرات الحادة.
2. يُنصح بإجراء تحليل دقيق للاستقرارية والدقة العددية للطريقة، خاصة عند تطبيقها على المعادلات غير الخطية أو المعادلات الزمنية، لضمان موثوقية النتائج.
3. يُفضل مقارنة نتائج DQM مع طرق عددية أخرى كطريقة الفروق المنتهية والطريقة الطيفية، للتحقق من دقة الحل وتقييم فعالية الطريقة.
4. يُستحسن استخدام خوارزميات فعالة ودقيقة لحساب أوزان التفاضل التربيعي، مثل الطريقة التحليلية المشتقة من متعددات حدود لاغرانج، لتقليل الخطأ العددي وزيادة الكفاءة.
5. يُنصح بالاستفادة من البرمجيات المتقدمة مثل **MATLAB** أو **Python** والتي تتيح أدوات جاهزة لحساب الأوزان وتطبيق الطريقة بكفاءة عالية.
6. يُستحسن توسيع استخدام الطريقة في تطبيقات هندسية وعلمية متنوعة مثل ميكانيكا الموائع، تحليل الإجهادات، وانتقال الحرارة، نظراً لما أثبتته من دقة وكفاءة مقارنة بطرق عددية تقليدية.

المصادر

[1] Bellman RE, Kashef BG, Casti J, *Differential quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations*, J Comput Phys, Vol 10, pp 40-52, 1972.

[2] Bellman RE, Roth RS, *Methods in approximation: techniques for mathematical modelling*, D Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1986.

[3] Bert CW, Malik M, *Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures*, Compos. Struct., Vol 39, Iss 3-4, pp 179-189, 1997.

[4] Chang Shu, *Differential Quadrature and its Applications in Engineering*, Springer-Verlag London, 1999.

[5] Chang CT, Tsai CS, Lin TT, *The modified differential quadratures and their applications*, Chem. Eng. Comman., Vol 123, pp 135-164, 1993.

[6] LeVeque RJ, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Vol 31, pp 1-20, 2002.

[7] Girault V and Raviart PA, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol 1, pp 1-100, 1986.

[8] Quan JR, Chang CT, *New insights in solving distributed system of equations by the quadrature methods*, Comput. Chem. Engrg., Vol 13, pp 779-788, 1989.

[9] Smith GD, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: finite difference methods*, Oxford University Press, 1985.

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Basrah
College of Education for Pure Sciences
Department of Mathematics

Differential Quadrature Method for Solving Boundary Value Problems

Graduation research submitted to

Department of Mathematics, College of Education for Pure Sciences, and is part of the requirements for obtaining the Bachelor's degree in Mathematics

By
Abbas Humod Dhaidan

Supervisor
Dr. Abdullsattar Jabir Ali

1446 **2025**