وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

تحويل لابلاس و تطبيقاته الفيزياوية

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالب

عباس ناجح مزعل

إشراف

م. م. ياسر ناصر حسن

2025 م

1446 هـ

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

وَآخِرُ دَعواهُم أَنِ الحَمدُ لِلَّهِ رَبِّ العالَمينَ ﴿١٠﴾

سورة يونس

الإهداء

الى ...

النبي الأكرم معلم الامة الاعظم ، والى آل بيتة الطيبين الطاهرين ، الى من هم منبع العلم والدين ، عليهم صلوات الله وسلامة أجمعين .

الى امين الله وشمس الهدى أمام الخلق وبحر الندى الأمام المهدي المنتظر (عجل الله فرجه الشريف) .

الى شهداء العراق الابرار من الجيش و الشرطة ومجاهدي الحشد الشعبي الذين ضحوا من اجل تراب الوطن .

الى من علمونا حروفا من ذهب وكلمات كالدرر وعبارات من اسمى واجل عبارات في العلم (أساتذتنا الافاضل).

الى من سعى وشقي لانعم بالراحة والهناء الى الذي لم يبخل بشئ من اجل دفعي في طريق النجاح وان ارتقي سلم الحياة بحكمة وصبر (والدي الحبيب).

الى التي كلما نطقت شفاها كانت بالدعاء لنا ، نبع الحنان الصافي ورمز التفاني والتضحية وعموان المحبة (والدتي الحبيبة) .

الى رياحين حياتي وسند قلبي (اخواني واخواتي) .

شكر و تقدير

الحمد لله ما تناهى درب ولا ختم جهداً ولا تم سعي الا بفضله اللهم ليس بجهدي واجتهادي وانما بفضلك وتوفيق كرمك.

وقبل ان نمضي نقدم اسمى ايات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الى الذين حملوا اقدس رسالة في الحياة ، الى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة ، الى جميع اساتذتنا الافاضل.

ونخص بالشكر والتقدير الاستاذ (ياسر ناصر حسن).

اتشرف بوقوفي امام حضرتكم اليوم

المحتويات

الملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة تحويل لابلاس من حيث تعريفه النظري، واستكشاف أبرز خواصه الرياضية التي تجعل منه وسيلة مميزة في تبسيط المعادلات المعقدة. كما يتناول البحث تطبيقات التحويل في مجالات الفيزياء المختلفة، مثل حركة الأجسام، وانتقال الحرارة، والاهتزازات الميكانيكية، وتدفق الموائع. وتُبرز هذه الدراسة كيف يمكن تحويل مسائل الزمن المعقدة إلى مسائل جبرية أبسط باستخدام هذا التحويل، مما يوفر فهماً أدق للسلوك الديناميكي للأنظمة.

مقدمة

تحويل لابلاس هو أداة رياضية قوية تُستخدم لتحويل المعادلات التفاضلية، خاصة الخطية ذات المعاملات الثابتة، إلى معادلات جبرية أبسط في مجال التردد المركب. يُسهّل هذا التحويل عملية الحل، خصوصًا عندما تكون المعادلة مصحوبة بشروط ابتدائية، حيث يتم دمج هذه الشروط مباشرة في المعادلة المحوّلة، مما يلغي الحاجة إلى حساب الثوابت بشكل منفصل كما في الطرق التقليدية.[5]

يُستخدم تحويل لابلاس على نطاق واسع في مجالات متعددة مثل الهندسة الكهربائية لتحليل الدوائر الكهربائية، والهندسة الميكانيكية لدراسة الاهتزازات، وفي أنظمة التحكم لتحليل استجابات الأنظمة. بعد حل المعادلة الجبرية في مجال التردد، يتم استخدام تحويل لابلاس العكسي للعودة إلى الحل في المجال الزمني، مما يوفر فهمًا دقيقًا لسلوك النظام الأصلي.[3]

بفضل قدرته على تبسيط المعادلات المعقدة والتعامل مع الشروط الابتدائية بفعالية، يُعد تحويل لابلاس أداة لا غنى عنها في تحليل الأنظمة الديناميكية وحل المعادلات التفاضلية في مختلف التخصصات العلمية والهندسية.[2]

أهداف البحث

1. تقديم الأساس النظري لتحويل لابلاس
2. توضيح تطبيقاته في حل المعادلات التفاضلية
3. إبراز أهميته في التطبيقات الفيزيائية والهندسية

الفصل الأول

تحويل لابلاس وخواصه

المقدمة [1]

في هذا الفصل تقدم طريقة أخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة وأنظمة هذه المعادلات. تسعى هذه الطريقة بطريقة تحويل لايلاس. يهذه الطريقة، يتم تحويل مسألة القيمة الأولية إلى معادلة جبرية أو نظام معادلات يمكن حله باستخدام الطرق الجبرية وجدول تحويلات لايلاس. تشبه هذه الطريقة في بعض النواحي استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.

1.1 تحويل لايلاس [3]

تحويل لايلاس هو عملية أخرى على الدول الرياضية لتحويلها من مجال إلى آخر، عادة التحويل من مجال الزمن إلى مجال التردد. يستخدم أيضاً لحل المعادلات التفاضلية لأنه يحولها إلى معادلات جبرية. شمي هذا التحويل نسبة إلى العالم الفرنسي لايلاس الذي عاش في القرن التاسع عشر.

2.1 التعريف [3]

افترض أن الدالة f معرفة للقيم $t \geq 0$، فإن تحويل التكامل:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1.1}$$

يُسمى تحويل لايلاس للدالة f.

1.2.1 مثال

احسب تحويل لايلاس للدالة $f(t) = 1$.

الحل

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} (1)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\, dt\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt$$
$$= \lim_{t\to\infty} -\left[\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^{\infty}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{s}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right]$$
$$= \frac{-1}{s}\left[0-1\right]$$
$$= \frac{-1}{s}(-1) = \frac{1}{s}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{s}$$

إذا كان $s > 0$، فإن التكامل أعلاه موجود ونحصل على

3.1 تحويل لابلاس لبعض الدوال [3]

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \tag{1.2}$$
$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{1.3}$$
$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k} \tag{1.4}$$
$$\mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2} \tag{1.5}$$
$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2} \tag{1.6}$$
$$\mathcal{L}\{\sinh(kt)\} = \frac{k}{s^2-k^2} \tag{1.7}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2 - k^2} \tag{1.8}$$

1.3.1 مثال

احسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{kt}$

الحل

باستخدام تعريف تحويل لابلاس

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} e^{kt} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-k)t} dt \end{aligned}$$

بالتكامل نحصل على

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{-1}{s-k} [e^{-\infty} - 1] \end{aligned}$$

وبالتالي

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k}, \quad s < k$$

2.3.1 مثال

احسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = \cosh(kt)$

الحل

لنعبر عن الدالة $f(t)$ في شكلها الأسي ونأخذ تحويل لابلاس

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{kt} + e^{-kt}] \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{kt}] + \mathcal{L}[e^{-kt}]] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+k+s-k}{s^2-k^2}\right]$$

وبالتالي

$$\mathcal{L}[\cosh(kt)] = \frac{s}{s^2-k^2}$$

3.3.1 مثال

اوجد تحويل لابلاس للدالة الممثلة بالشكل

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le t_0 \\ 2t_0 - t & t_0 \le t \le 2t_0 \\ 0 & t > 2t_0 \end{cases}$$

الحل

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= \int_0^{t_0} te^{-st}dt + \int_{t_0}^{2t_0}(2t_0-t)e^{-st}dt \\
&= \Big[-\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big]_0^{t_0} + \Big[-\frac{1}{s}(2t_0-t)e^{-st} + \frac{1}{s^2}\Big]_{t_0}^{2t_0} \\
&= \frac{1}{s^2}[e^{-st_0}-1] + \frac{1}{s^2}[e^{-2st_0} - e^{-st_0}] \\
&= \frac{1}{s^2}[1-2e^{-st_0}+e^{-2st_0}] \\
&= \frac{1}{s^2}[1-e^{-st_0}]^2
\end{aligned}$$

4.1 الخاصية الخطية [4]

لمجموعة خطية من الدوال ، يمكن كتابة

$$\int_0^\infty [\alpha f(t) + \beta g(t)]e^{-st}dt = \alpha \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \beta \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \quad (1.9)$$

اذن

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] \quad (1.10)$$

وبالتالي يمكن القول ان تحويل لابلاس هو تحويل خطي.

5.1 تحويل لابلاس العكسي [5]

اذا كانت $F(s)$ هي تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ حيث $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ، فأنه يمكن القول ان $f(t)$ هي تحويل لابلاس العكسي لــ $F(s)$ ونكتب

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (1.11)$$

فيما يلي ، سنعرض بعض تحويلات لابلاس العكسية لبعض الدوال المعروفة

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad (1.12)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (1.13)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\} = e^{kt} \quad (1.14)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin kt \quad (1.15)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt \quad (1.16)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \sinh kt \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt \tag{1.18}$$

6.1 الخاصية الخطية لتحويل لابلاس العكسي [1]

تحويل لابلاس العكسي هو أيضاً تحويل خطي، حيث يمكن كتابة الثوابت α, β على النحو التالي

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \tag{1.19}$$

7.1 الكسور الجزئية [1]

تلعب الكسور الجزئية دوراً هاماً في تحويل لابلاس ، فهي تسهل عملية ايجاد تحويل لابلاس العكسي للكسور المركبة عن طريق تحويلها الى مجموعة من الكسور الجزئية المعروفة بتحويل لابلاس ، سنتعلم كيفية تطبيق الكسور الجزئية في تحويل لابلاس العكسي

1.7.1 مثال

احسب تحويل لابلاس العكسي

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right]$$

الحل

يمكن تحويل هذه الكسور الى مجموعة من الكسور الجزئية

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{-\frac{16}{5}}{s-1} + \frac{\frac{25}{6}}{s-2} + \frac{\frac{1}{30}}{s+4}$$

باستخدام الخاصية الخطية لـ $\mathcal{L}^{-1}$ نجد ان

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right]\\
&= \frac{-16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-10}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]\\
&= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}
\end{aligned}$$

8.1 نظرية الاشتقاق [2]

1.8.1 نظرية

اذا كان $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ فأن

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

2.8.1 مثال

احسب تحويل لابلاس $\mathcal{L}\{t \sin 2t\}$

الحل

باستخدام قوانين تحويل لابلاس

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

وحيث ان $k = 2$ و $n = 1$ نجد ان

$$\mathcal{L}\{t \sin 2t\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{k}{s^2 + k^2}\right] = \frac{4s}{(s^2 + 4)}$$

9.1 تطبيق تحويل لابلاس على المعادلات التفاضلية والأنظمة [4]

في بداية هذا الفصل أكدنا ان تحويلات لابلاس توفر لنا أداة مفيدة لحل انواع معينة من المعادلات التفاضلية ، نظريات القسم 1 - 9 - 1 تساعدنا في معالجة التحويلات. لتطبيق تحويلات لابلاس على المعادلات التفاضلية ، نحتاج الى معرفة تحويل لابلاس للمشتقة (او المشتقة الثانية أو اعلى) للدالة. النظريتان التاليتان توفر لنا المعلومات ، في كلتا النظريتين نفترض ان جميع دوال t التي تظهر تحقق فرضيات النظرية 1 من القسم 1 - 9 ، بحيث يكون تحويل لابلاس الخاص بها موجوداً.

1.9.1 نظرية [7]

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

البرهان

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة $u = e^{-st}, dv = f'(t)dt$ وبالتالي $v = f(t), du = -se^{-st}$ اذن

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})dt$$
$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$
$$= sF(s) - f(0)$$

في الحد $e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty$ نعلم ان $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$ لان f من رتبة اسية.

2.9.1 نظرية [7]

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

البرهان

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة $u = e^{-st}, dv = f''(t)dt$ اذن

$$du = -se^{-st}, \quad v = f'(t)$$

بالتالي

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = e^{-st} f'(t) - \int_0^\infty f'(t)(-se^{-st})dt$$
$$= -f'(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$
$$= -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\}$$
$$= -f'(0) + s\,[sF(s) - f(0)]$$
$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

3.9.1 مثال

حل مسألة القيمة الأولية التالية

$$y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1$$

الحل

نطبق تحويل لابلاس على المعادلة

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 3\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

وبما أن

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0),$$

نعوض قيمة $y(0) = 1$ فيصبح:

$$sY(s) - 1 + 3Y(s) = 0.$$

نحل المعادلة الجبرية بالنسبة لـ $Y(s)$

$$(s+3)Y(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s+3}.$$

نأخذ تحويل لابلاس العكسي نعلم أن:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}.$$

إذن

$$y(t) = e^{-3t}.$$

إذن، حل مسألة القيمة الأولية هو

$$y(t) = e^{-3t}.$$

الفصل الثاني

تطبيقات

1.2 معادلة الحركة Equation of Motion [6]

من قانون نيوتن الثاني لحركة جسم ما

$$\sum \vec{F} = ma \tag{2.1}$$

حيث

- $\sum \vec{F}$ مجموع القوى المؤثرة على الجسم.
- m كتلة الجسم.
- a تسارع الجسم $(a = \frac{d^2y}{dt^2})$

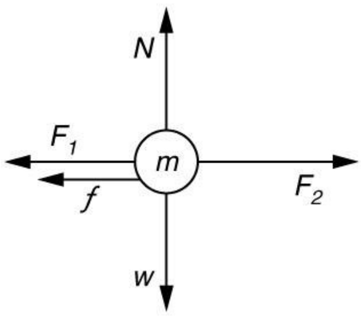

Figure 2.1: Equation of motion

نطبق هذه المعادلة على سقوط حر لجسم (نهمل قوة مقاومة الهواء) اذن هناك قوة واحدة تؤثر على الجسم وهي (وزن الجسم). يمكن حساب وزن الجسم من خلال القانون

$$\vec{F}_w = -mg$$

حيث g تعجيل الجاذبية الارضي. اذن بالتعويض في (2.1) نحصل على

$$-mg = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{2.2}$$

مع الشروط الابتدائية

- $y(0) = y_0$ موضع السقوط.
- $y'(0) = v_0$ السرعة الابتدائية.

الآن نطبق تحويل لابلاس على المعادلة وتعويض الشروط الابتدائية

$$\mathcal{L}\{y''\} = \mathcal{L}\{-g\}$$
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{-g}{s}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\left[\frac{-g}{s} + sy_0 + v_0\right]$$
$$Y(s) = \frac{-g}{s^3} + \frac{v_0}{s^2} + \frac{y_0}{s}$$

بتطبيق لابلاس العكسي نحصل على

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \tag{2.3}$$

هذه المعادلة تصف موضع الجسم بعد مرور t من السقوط.

مثال عددي

سقط جسم من ارتفاع $y_0 = 100\text{m}$ بسرعة ابتدائية $v_0 = 0$ المطلوب ايجاد الارتفاع بعد $t = 2\,\text{sec}$

الحل

تعجيل الجاذبية $g = 9.8\text{m}/\,\text{sec}^2$ اذن

$$y(2) = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times (2)^2 + 0 \times 2 + 100 = 80.4\text{m}$$

2.2 معادلة تدفق بوازوي Poiseuille's Flow Equation [7]

يعد قانون بوازوي من القوانين الاساسية في ميكانيكا الموائع. حيث يصف تدفق الموائع اللزجة داخل الانابيب الدقيقة. لكي نشتق هذا القانون نستخدم من معادلات نافير ستوكس (Navier Stokes Equations) للحالة الخاصة بتدفق طبقي منتظم لسائل لزج داخل انبوب اسطواني افقي.

الفرضيات

- السريان ثابت (لا يوجد تغير زمني).
- السريان طبقي ومتناظر حول محور الانبوب.

- السائل غير قابل للانضغاط.
- لا توجد قوة خارجية (مثل الجاذبية) والضغط فقط هو المؤثر.
- السرعة تعتمد فقط على نصف القطر وليس على الطول z او الزمن t.

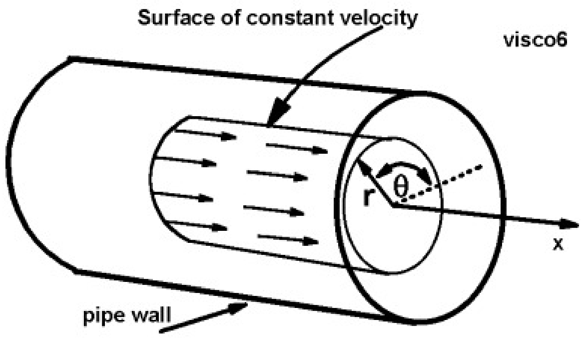

Figure 2.2: Poiseuille's Flow

معادلة نافير ستوكس المبسطة في الاتجاه z

نبدأ من معادلة نافير ستوكس العامة في الاتجاه z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla v_z\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 v_z \tag{2.4}$$

حيث

- ρ: الكثافة (Density) للمائع، وهي الكتلة لكل وحدة حجم.
- v_z: مركبة السرعة في اتجاه z.
- $\vec{v}$: متجه السرعة الكلي للمائع، ويشمل v_x، v_y، و v_z.
- $\partial v_z/\partial t$: التغير الزمني لمركبة السرعة v_z.
- $\vec{v}\cdot\nabla v_z$: التسارع الناتج عن الحمل (Convective acceleration)، أي تأثير التغير المكاني على السرعة.
- $-\partial p/\partial z$: تدرج الضغط في الاتجاه z، أي القوة الناتجة عن الضغط.
- μ: اللزوجة الديناميكية (Dynamic viscosity) للمائع.

- $\nabla^2 v_z$: لابلاسيان المركبة v_z، أي المشتقة الثانية مكانياً، وتعبر عن قوى الاحتكاك الداخلي في المائع.

لكن بالفرضيات التي ذكرناها تصبح المعادلة (2.4):

$$\frac{dp}{dz} = \mu \cdot \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)$$

ولكن dp/dz ثابت لأنه يعتمد فقط على z. والسريان غير متغير في z. نفرض

$$\frac{dp}{dz} = \frac{-\Delta p}{L}$$

حيث

- Δp فرق الضغط.
- L طول الانبوب.

اذن تصبح المعادلة

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{-\Delta p}{\mu L}r$$

$$r\frac{d^2v_z}{dr^2} + \frac{dv_z}{dr} = \frac{-\Delta p}{\mu L}r \tag{2.5}$$

مع الشروط الحدودية

$$v_z(0) = \text{finite}, \quad v_z(R) = 0$$

الآن نطبق تحويل لابلاس على (2.5) نحصل على

$$\mathcal{L}\left\{r\frac{d^2v_z}{dr^2} + \frac{dv_z}{dr}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{-\Delta p}{\mu L}r\right\}$$

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2V(s) - sv_z(0) - v_z'(0)\right] + \left[sV(s) - v_z(0)\right] = \frac{-\Delta p}{\mu L s^2}$$

$$-s^2V'(s) - 2sV(s) + v_z(0) + sV(s) - v_z(0) = \frac{-\Delta p}{\mu L s^2}$$

$$V'(s) + \frac{1}{s}V(s) = \frac{\Delta p}{\mu L s^4}$$

بإستخدام عامل التكامل

$$I(s) = \exp\left(\int \frac{1}{s}\right) = \exp(\ln s) = s$$

اذن يكون الحل

$$\begin{aligned} I(s)V(s) &= \int \frac{\Delta p}{\mu L s^4} I(s)\, ds \\ sV(s) &= \int \frac{\Delta p}{\mu L s^3}\, ds \\ sV(s) &= -\frac{\Delta p}{2\mu L s^2} + C \\ V(s) &= -\frac{\Delta p}{2\mu L s^3} + \frac{C}{s} \end{aligned}$$

بتطبيق لابلاس العكسي

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C$$

بما ان $v_z(R) = 0$

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2$$

اذن الحل النهائي

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)$$

الآن نستخرج معدل التدفق الحجمي Q بالقانون

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R v_z(r) \cdot 2\pi r\, dr \\ &= \int_0^R \left(\frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)\right) \cdot 2\pi r\, dr \end{aligned}$$

بالتكامل نحصل على

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}$$

تسمى هذه المعادلة بقانون بوازوي.

مثال تطبيقي

في الاوعية الدموية الصغيرة مثل الشرايين الدقيقة والشعيرات الدموية، يمكن اعتبار الدم كسائل لزج يتدفق تدفق طبقي. هنا نستخدم قانون بوازوي لتقدير معدل تدفق الدم عبر وعاء دموي دائري.

ملاحظات مهمة للتطبيق

- لان R^4 موجود في القانون فإن تغيراً بسيطاً في نصف القطر يؤدي الى تغير كبير في معدل التدفق.
- مثلاً، اذا تضاعف نصف القطر فإن Q يزيد بمقدار $2^4 = 16$.
- هذا يفسر كيف ان تضيق الشرايين (كما في حالة تصلب الشرايين) يؤدي الى انخفاض حاد في تدفق الدم.

مثال عددي بسيط

نصف القطر $R = 0.001\mathrm{m}$ ، وفرق الضغط $\Delta p = 100\mathrm{Pa}$ وطول الانبوب $L = 0.1\mathrm{m}$ و اللزوجة $\mu = 3 \times 10^{-3}\mathrm{Pa \cdot s}$ فإن معدل التدفق

$$Q = \frac{\pi (0.001)^4}{8 \times 3 \times 10^{-3}} \cdot \frac{100}{0.1} \approx 1.31\, \mu L/s$$

3.2 الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion [8]

الحركة التوافقية البسيطة هي نوع من الحركة التبذبية حيث يتحرك الجسم ذهاباً و اياباً حول موضع اتزان ، وتكون القوة المؤثرة عليه متناسبة طردياً مع الازاحة من موضع الاتزان ، لكنها تعاكسها في الاتجاه ، اي ان القوة المؤثرة عليه تحقق العلاقة

$$F = -kx$$

حيث F القوة المؤثرة على الجسم و x الازاحة من موضع الاتزان و k ثابت القوة (ثابت النابض في قانون هوك). والاشارة السالبة تعني ان القوة تعاكس اتجاه الزاوية.

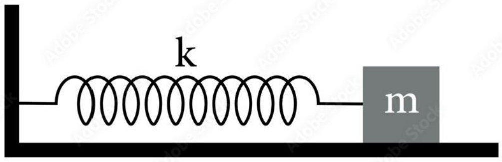

Figure 2.3: Simple Harmonic Motion

اشتقاق المعادلة التفاضلية

نبدأ من قانون نيوتن الثاني

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

وبما ان $F = -kx$ ، نكتب

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

بالقسمة على m

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

نسمي $\sqrt{k/m} = \omega$ ، حيث ω هو التردد الزاوي. فتصبح المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2.6}$$

حيث الشروط الابتدائية

- $x(0) = x_0$ الازاحة الابتدائية.
- $x'(0) = v_0$ السرعة الابتدائية.

الآن نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (2.6) نحصل على

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\right\}$$

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + \omega^2 X(s) = 0$$

$$(s^2+\omega^2)X(s) = sx_0 + v_0$$

$$X(s) = x_0\frac{s}{(s^2+\omega^2)} + v_0\frac{1}{s^2+\omega^2}$$

بتطبيق لابلاس العكسي نحصل على

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

يمكن اختزال هذه المعادلة الى

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$$

حيث

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{-v_0}{\omega x_0}\right)$$

حيث C تسمى السعة للحركة. و ϕ زاوية الطور

مثال عددي

جسم كتلته $m = 0.5\,\mathrm{Kg}$ مربوط بنابض ثابت مرونته $k = 2\ N/m$ عند الزمن $t = 0$ كان الجسم على بعد $x_0 = 0.1\mathrm{m}$ من موضع الاتزان ويتحرك بسرعة ابتدائية $v_0 = 0.2m/s$ نحو موضع الاتزان. احسب الآتي

- التردد الزاوي ω.
- موضع الجسم بعد مرور زمن $t = 2\sec$.
- السعة C و زاوية الطور ϕ.

الحل

1. التردد الزاوي

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.5}} = 2\,\mathrm{rad/s}$$

2. حساب الازاحة. بما ان

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

اذن

$$x(t) = 0.1\cos(2t) + \frac{0.2}{2}\sin(2t)$$

نعوض $t = 2$

$$x(2) = 0.1[\cos 4 + \sin 4] \approx -0.1410$$

اي ان الجسم عند $t = 2s$ يقع على بعد 0.141 متر على يسار موضع الاتزان.

3. نحسب السعة

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0.01 + \frac{0.04}{4}} \approx 0.1414$$

زاوية الطور

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-v_0}{\omega x_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0.2}{0.2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

النتائج و التوصيات

النتائج

1. تم حل ثلاث مشكلات فيزيائية رئيسية باستخدام تحويل لابلاس
2. أظهر التحويل كفاءة عالية في تبسيط الحلول
3. تم الحصول على نتائج تتوافق مع الحلول التحليلية المعروفة

التوصيات

1. التوسع في استخدام تحويل لابلاس لحل مشكلات أكثر تعقيدًا
2. دراسة تطبيقات إضافية في مجالات الهندسة المختلفة

الخاتمة

يؤكد هذا البحث على الأهمية النظرية والعملية لتحويل لابلاس في الرياضيات التطبيقية والفيزياء. تظهر النتائج أن التحويل يقدم طريقة منهجية وفعالة لحل مجموعة واسعة من المشكلات الرياضية والفيزيائية.

المصادر

[1] C. Jaeger and G. Newstead, *An introduction to the Laplace transformation with engineering applications*, 3rd ed., Methuen & Co., London, 1969.

[2] P. B. Guest, *Laplace Transforms and an Introduction to Distributions*, Ellis Horwood, 1991.

[3] Joel L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[4] Murry R. Spiegel, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms*, McGraw-Hill Inc., 1965.

[5] Phil Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, 2nd ed., Springer-Verlag, London, 2014.

[6] A. R. Paterson, *A First Course in Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1984.

[7] D. D. Joseph, *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, Springer, 1990.

[8] D. K. Jha, *Text Book of Simple Harmonic Motion and Wave Theory*, Discovery Publishing House, 2005.