وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

طريقة التفاضل التربيعي لحل مسائل القيم الحدودية

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالب

عباس حمود ضيدان

إشراف

ا.د. عبدالستار جابر علي

2025 م

1446 هـ

المحتويات

الخلاصة Abstract

قدمنا في هذا البحث كيفية عمل طريقة التفاضل التربيعي و تطبيقات على معادلات تفاضلية مختلفة و لاحظنا ان النتائج متقاربة للحل المضبوط مما يعني ان طريقة التفاضل التربيعي طريقة جيدة في التطبيقات العملية و لكن يؤخذ عليها بعض الامور منها ، عدم استقرارية الحلول عند زيادة عدد نقاط (N) ، أيضاً لاحظنا من الامثلة بأن دقة الطريقة في حل المعادلات عالية وبعدد قليل من النقاط.

مقدمة Introduction

أغلب المسائل الهندسية محكومة بمجموعة من المعادلات التفاضلية الجزئية **(PDEs)** مع شروط حدودية ، على سبيل المثال تدفقات السوائل النيوتونية محكومة بمعادلات نيفر-ستوكس **(Navier-Stockes equations) [7]**. بشكل عام أنه من الصعب جداً علينا الحصول على الحل الدقيق (الحل الحقيقي) لهكذا معادلات. لذا من المهم أن نطور بعض الحلول العددية التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية.

في معظم الحالات الحل التقريبي يُقدم على شكل قيم دالية عند نقاط متقطعة **(discrete points)** أو نقاط الشبكة **(grid points)**. في هذه المرحلة قد يسأل أحدهم عن العلاقة التي تربط بين المشتقات في المعادلة التفاضلية الجزئية و القيم الدالية عند نقاط الشبكة يبدو أن هناك جسر يربط بينهم.

تقنية التقدير العددية **(numerical discretization technique)** هي الجسر المنشود، كثير من الحلول و الطرائق طُوِرت من الباحثين أبرزها الفروقات المحددة **(finite differences) [9]** و الحجومات المحددة **(finite volumes) [6]**.

أغلب المسائل العددية في الهندسة قد تُحل بواسطة هذه الطرائق و لكنها تتطلب عدد كبير من نقاط الشبكة بينما الحلول المطلوبة تكون عند عدد محدد من نقاط الشبكة.

في الجهة الأخرى ، في السعي نحو الحصول على طريقة تحقق حلول عددية دقيقة إلى حد كبير مع عدد قليل من نقاط الشبكة. قدم بلمان **(Bellman) [1]** سنة (1971 , 1972) طريقة التفاضل التربيعي **(differential quadrature method)**، حيث المشتقات الجزئية تُمثل على شكل مجموع خطي موزون لكل القيم الدالية عند كل نقاط الشبكة على طول ذلك الاتجاه. أن فكرة التفاضل التربيعي مستوحاة من فكرة التكامل التربيعي **(integral quadrature)**.

مفتاح طريقة **DQM** هي تحديد معاملان الوزن التي سوف تحدد دقة الطريقة، ان هذه الطريقة تستخدم عدد قليل من نقاط الشبكة للحصول على دقة عالية مقارنة مع الطرائق الاخرى مثل طريقة الفروقات المتنهية **(finite differences) [9]**.

هنا تم تطبيق طريقة التفاضل التربيعي لحل مسائل قيم حدودية متنوعة . و تم حساب مقدار الخطأ للحلول التقريبية التي حصلنا عليها . فكان مقدار الخطأ صغير مما يدل على دقة الطريقة . و ايضاً من خلال مقارنة حلول الطريقة مع الحل المضبوط وجدنا أن تقارب الطريقة جيد و الجداول و الرسومات للنتائج التي حصلنا عليها تبين ذلك.

الفصل الأول

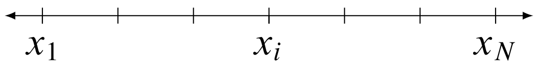
طريقة التفاضل التربيعي

1 - 1 مقدمة Introduction

في هذا الفصل سنوضح كيفية الحصول على الصيغ الأساسية لتقريب المشتقة الأولى و المشتقات من الرتب العليا بإستعمال طريقة التفاضيل التربيعي (DQM), بعد ذلك سوف نذكر الصيغ التي يمكن حساب معاملات الوزن من خلالها و دورها في تحديد دقة الحلول العددية.

1 - 2 صيغ التفاضل التربيعي Differential Quadrature Formulas

تتلخص فكرة عمل طريقة التفاضل التربيعي في تقريب المشتقات الجزئية (أو الاعتيادية) بواسطة مجموع الاوزان لمتغيرات الدالة المعطاة في كل نقاط الشبكة وضمن المجال المحدد لحساب قيم الدالة. لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ حيث a, b ثوابت ولنفرض أن المنطقة قسمت إلى N من النقاط كما موضح في الشكل 1[4]



شكل 1: تقسيم الفترة $[a, b]$

لذلك يكون تقريب المشتقة الأولى و الثانية للدالة $f(x)$ عند النقطة x_i بالشكل

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} f(x_j) \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} f(x_j) \tag{1.2}$$

وبشكل عام

$$\left.\frac{d^ry}{dx^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(r)} f(x_j) \tag{1.3}$$

حيث $a_{ij}^{(r)}$ تمثل معاملات الوزن من الرتبة r^{th} وسنوضح في البند القادم كيف يتم حساب معاملات الوزن وبيان دورها في تحديد دقة الحلول الناتجة من استعمال طريقة التفاضل التربيعي.

1 - 3 معاملات الوزن من الرتبة الأولى Weight Coefficients of First Order

أن تحديد نقاط الشبكة و معاملات الوزن هما عاملان مهمان في تطبيق صيغ التفاضل التربيعي (1.3) وأن لمعاملات الوزن دوراً رئيسياً و مهماً في طريقة التفاضل التربيعي و تعد أحد مفاتيح هذه

الطريقة لما لها من أهمية في التأثير على دقة الحلول العددية. الآن سوف نتطرق إلى طرق حساب معاملات الوزن من الرتبة الأولى

1 - 3 - 1 طريقة بيلمان الأولى [1] (Billman's First Approach)

في هذه الطريقة استخدم بيلمان دوال الاختبار التالية للحصول على معاملات الوزن

$$g_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{1.4}$$

من الواضح أن معادلة (1.4) تعطي N من دوال الإختبار. معاملات الوزن $a_{ij}^{(1)}$ في (1.3) ، i و j تأخذ قيم من 1 إلى N وبالتالي مجموع معاملات الوزن هو $N \times N$. بتطبيق دوال الإختبار على نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ، نتيجة لذلك نحصل على $N \times N$ من المعادلات

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} = 0 \\ &\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} x_j = 1 \\ &\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} x_j^k = k\, x_i^{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1 \end{aligned} \tag{1.5}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, N$. نظام المعادلات في (1.5) يملك حل وحيد لأن مصفوفة النظام تأخذ شكل **Vandermonde**. لسوء الحظ عندما تكون N كبيرة يصعب إيجاد حل لهذا النظام لهذا يتم إختيار قيم صغيرة إلى N (أقل من 13).

ملاحظة

لا توجد أي قيود على اختيار نقاط الشبكة x_i في طريقة بيلمان لحساب معاملات الوزن من الرتبة الأولى.

2 - 3 - 1 طريقة بيلمان الثانية [1] (Billman's Second Approach)

في هذه الطريقة أستخدم بيلمان دوال الإختبار التالية للحصول على معاملات الوزن

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k) L_N^{(1)}(x)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.6}$$

حيث $L_N(x)$ هي متعددة حدود ليجندر من الدرجة N و $L_N^{(1)}(x)$ هي المشتقة الأولى إلى $L_N(x)$. يتم في هذه الطريقة إختيار نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ لتكون جذور متعددة حدود ليجندر المُزاحة إلى الفترة $[0, 1]$. وبتطبيق دوال الإختبار في (1.6) على نقاط الشبكة. بيلمان توصل إلى أن صياغة

جبرية بسيطة لحساب معاملات الوزن a_{ij}.

$$a_{ij} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L_N^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j$$
$$a_{ii} = \frac{1-2x_i}{2x_i(x_i-1)} \tag{1.7}$$

رغم هذه البساطة إلا أن هذه الطريقة لبست بمرونة الطريقة الأولى والسبب يعود إلى إختيار نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ حيث لا نستطيع تحديدها بشكل إختياري ، بدلاً من ذلك يتم اختيارها كجذور متعددة حدود ليجندر من الدرجة N. لهذا السبب فإن الطريقة الأولى تُفَضّل في التطبيقات العملية.

ملاحظة

أن متعددات حدود ليجندر المُزاحة إلى الفترة $[0, 1]$ تعطى بالصيغة

$$L_N^*(x) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^{N+k}\frac{(N+k)!}{(N-k)!(k!)^2}\,x^k$$

أول خمس متعددات حدود ليجندر هي

$$\begin{aligned}
L_0^*(x) &= 1\\
L_1^*(x) &= 2x-1\\
L_2^*(x) &= 6x^2-6x+1\\
L_3^*(x) &= 20x^3-30x^2+12x-1\\
L_4^*(x) &= 70x^4-140x^3+90x^2-20x+1
\end{aligned}$$

1 - 3 - 3 طريقة كوان و جانك [8] (Quan & Chang's Approach)

لتطوير طُرق بيلمان في حساب معاملات الوزن ، العديد من المحاولات تمت بواسطة العديد من الباحثين. واحدة من أكثر الطرق فائدة هي الطريقة المقدمة من الباحثين كوان و جانك. حيث استعملا متعددات حدود لاكرانج كدوال إختيار

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x-x_k)M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.8}$$

حيث

$$M(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N)$$
$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1,k\neq i}^{N}(x_i - x_k)$$

وبتطبيق هذه الدوال على N من نقاط الشبكة ، نحصل على الصيغ الجبرية لحساب معاملات الوزن $a_{ij}^{(1)}$.

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1, k \neq i,j}^{N} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}, \quad i \neq j \\ a_{ii}^{(1)} &= \sum_{k=1, k \neq i}^{N} \frac{1}{x_i - x_k} \end{aligned} \tag{1.9}$$

ومن المهم معرفة أنه لا توجد أية قيود على اختيار نقاط الشبكة في هذه الطريقة

ملاحظة

طريقة كوان و جانك مكافئة لطريقة بيلمان الأولى لهذا هنا أيضاً لا توجد قيود في اختيار نقاط الشبكة x_i.

4 - 1 معاملات الوزن من الرتبة الثانية Weight Coefficients of Second Order

في هذا البند سوف نتعرف على طرق حساب معاملات الوزن من الرتبة الثانية حيث

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} f(x_j) \tag{1.10}$$

حيث $a_{ij}^{(2)}$ هي معاملات الوزن من الرتبة الثانية.

1 - 4 - 1 طريقة شو العامة [4] (Shu's General Approach)

بإستخدام تقريب متعددات الحدود و فضاء المتجهات توصل شو إلى صياغة لمعاملات الوزن من الرتبة الثانية ، كما يلي

$$a_{ij}^{(2)} = 2a_{ij}^{(1)} \left(a_{ii}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \tag{1.11}$$

حيث نلاحظ من (1.11) إذا كانت $i \neq j$ فإن $a_{ij}^{(2)}$ يمكن أن تحسب بسهولة. يمكن تطبيق نظام المعادلات في (1.5) لــ $k = 1$ ، نحصل على

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} = 0 \Longrightarrow a_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^{N} a_{ij}^{(2)}$$

1 - 4 - 2 طريقة ضرب المصفوفات [4] (Matrix Multiplication Method)

من تعريف المؤثر التفاضلي لدينا

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

بتطبيق طريقة التفاضل التربيعي على الطرفين ، نحصل على

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} \cdot f(x_j) &= \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^{N} a_{kj}^{(1)} \cdot f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot a_{kj}^{(1)}\right] \cdot f(x_j)\end{aligned}$$

وبمقارنة الطرفين نحصل على

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot a_{kj}^{(1)} \tag{1.12}$$

وبلغة المصفوفات هذا يعني

$$[a_{ij}^{(2)}] = [a_{ij}^{(1)}] \times [a_{ij}^{(1)}] \tag{1.13}$$

ملاحظة

يُفضل استخدام طريقة شو العامة لأنها تتطلب عمليات حسابية أقل من طريقة ضرب المصفوفات

1 - 5 اختيار نقاط الشبكة Choice of Grid Points

أن اختيار نقاط الشبكة واحد من العوامل المهمة التي تؤثر على دقة التقريبات الناتجة من استعمال طريقة التفاضل التربيعي. لذلك ركز العديد من الباحثين منهم **شو (Shu)** على كيفية دراسة تأثير نقاط الشبكة على دقة الحلول في هذه الطريقة. ولكن حين يمكننا التحكم بنقاط الشبكة ففي طريقة بيلمان الثانية لا يمكننا ذلك.

1 - 5 - 1 النقاط متساوية الأبعاد (Equally Spaced Grid Points)

$$x_i = a + \frac{b-a}{N-1}(i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.14}$$

هذا النوع من النقاط كان قيد الإستعمال من قبل الكثير من الباحثين لبساطتها وملائمتها في حل الكثير من المسائل

1 - 5 - 2 نقاط شيبيشيف-كاوس-لوباتو (Chebyshev-Gauss-Lobatto Points)

ويطلق عليها اختصاراً **نقاط لوباتو (Lobatto Points)**

$$x_i = a + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right](b-a), \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (1.15)$$

وتسمى في بعض الأحيان النقاط غير متساوية الأبعاد (Unequally Spaced Points). وقد أثبت العديد من الباحثين بأن هذا النوع من النقاط يعطي نتائج أكثر دقة من النقاط متساوية الأبعاد.

الفصل الثاني

تطبيق طريقة التفاضل التربيعي لحل مسائل القيم الحدودية

2 - 1 مقدمة Introduction

بعد أن بيّنا في الفصل الأول كيفية الحصول على معاملات الوزن والفرق بين الطُرق الثلاثة وأيضاً بيّنا طرق اختيار نقاط الشبكة. سوف نقوم في الفصل الثاني بتطبيق طريقة التفاضل التربيعي لحل المعادلات الجزئية على الشكل

$$u_t = F(u, x, t, u_x, u_{xx}) \tag{2.1}$$

مع الشرط الإبتدائي $u(x,0) = g(x)$. حيث $g(x)$ دالة في x.

مثال 2 - 1

لنحاول تطبيق التفاضل التربيعي على المعادلة

$$u_t = x^2 + \frac{1}{4}u_x^2 \tag{2.2}$$

مع الشرط الحدودي $u(x,0) = 0$. بتطبيق التفاضل التربيعي على المشتقة بالنسبة الى x بواسطة الصيغة (1.1) على نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ، نحصل على

$$u_t(x_i,t) = x_i^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} u(x_j,t)\right]^2, \quad i = 1,2,\ldots,N \tag{2.3}$$

اصبح لدينا نظام مكون من N من المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية بالنسبة للمتغير المستقل t. سوف نستخدم طريقة رانج - كتا من الدرجة الرابعة (RK4) ، حيث نوجد الحل عند القيم $t_0, t_1, \ldots, t_M$ بخطوة مقدارها h حيث $t_{k+1} = t_k + h$ ، نفترض ان

$$\mathbf{u}_k = \langle u(x_1,t_k), u(x_2,t_k), \ldots, u(x_N,t_k)\rangle^T, \quad k = 0,1,2,\ldots,M$$

$$\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_N\rangle^T$$

الان نفرض ان

$$G(t,\mathbf{u}) = \mathbf{x}.^2 + \frac{1}{4}(A\mathbf{u}).^2$$

حيث A مصفوفة معاملات الوزن a_{ij} ، صيغة رانج كتا من الدرجة الرابعة تكون

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{k}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad k = 0,1,2,\ldots,M-1 \tag{2.4}$$

حيث في كل خطوة k نحسب

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= G(t_k, \mathbf{y}) \\
\mathbf{k}_2 &= G\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \\
\mathbf{k}_3 &= G\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\
\mathbf{k}_4 &= G(t_k + h, \mathbf{y} + h\mathbf{k}_3)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

الآن نحدد $N = 3, M = 11, h = 0.01$ ، نعين اولاً معاملات الوزن من الصيغ (1.9) نحصل على

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

الآن نجد نقاط الشبكة متساوية المسافة من خلال الصيغة (1.14)، نجد

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1$$

وعند ايجاد نقاط الشبكة غير متساوية المسافة بواسطة الصيغة (1.15) نجد ان النقاط مطابقة للنقاط متساوية المسافة، الآن نعوض نقاط الشبكة ومعاملات الوزن في (2.3) ونكمل الحل بطريقة رانج كتا من الدرجة الرابعة ، نبين النتائج في الجدول 2 - 1 حيث يبين القيمة الدقيقة لحل المعادلة المتمثل بالدالة $u(x,t) = x^2 \tan(t)$ والخطأ المطلق لطريقة التفاضل التربيعي.

t	x_i	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0
	x_2	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_3	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0
	x_2	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_3	0.10033467	8.3007×10^{-8}

جدول 2 - 1: مقارنة النتائج العددية مع التحليلية عندما $N = 3$

الآن عند نفس القيم $M = 11$,$h = 0.01$ ، نأخذ $N = 5$ ، نقاط الشبكة متساوية المسافة تكون

$$x_1 = 0, x_2 = 0.25, x_3 = 0.5, x_4 = 0.75, x_5 = 1$$

و نقاط الشبكة غير متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.14645, x_3 = 0.5, x_4 = 0.85355, x_5 = 1$$

ومعاملات الوزن تكون

$$\begin{bmatrix} -8.3 & 16.0 & -12.0 & 5.3 & -1.0 \\ -1.0 & -3.3 & 6.0 & -2.0 & 0.3 \\ 0.3 & -2.7 & 0.0 & 2.7 & -0.3 \\ -0.3 & 2.0 & -6.0 & 3.3 & 1.0 \\ 1.0 & -5.3 & 12.0 & -16.0 & 8.3 \end{bmatrix}$$

عند تعويض هذه القيم في المعادلة (2.3) واكمال الحل بخوارزمية رانج كتا من الدرجة الرابعة ، نبين النتائج في الجدول 2 - 2

t	x_i	Equally Spacing Points		Equally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00627092	5.1880×10^{-9}	0.00215184	1.7802×10^{-9}
	x_3	0.02508367	2.0752×10^{-8}	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_4	0.05643825	4.6692×10^{-8}	0.07309917	6.0475×10^{-8}
	x_5	0.10033467	8.3007×10^{-8}	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00062502	5.2081×10^{-14}	0.00021447	1.7871×10^{-14}
	x_3	0.00250008	2.0833×10^{-13}	0.00250008	2.0833×10^{-13}
	x_4	0.00562519	4.6873×10^{-13}	0.00728578	6.0710×10^{-13}
	x_5	0.01000033	8.3330×10^{-13}	0.01000033	8.3330×10^{-13}

جدول 2 - 2: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 5$

الآن عندما $N = 7$ ، نجد نقاط الشبكة متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.1667, x_3 = 0.3333, x_4 = 0.5, x_5 = 0.6667, x_6 = 0.8333, x_7 = 1$$

اما نقاط الشبكة غير متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.067, x_3 = 0.25, x_4 = 0.5, x_5 = 0.75, x_6 = 0.933, x_7 = 1$$

ومعاملات الوزن

$$\begin{bmatrix} -14.7 & 36.0 & -45.0 & 40.0 & -22.5 & 7.2 & -1.0 \\ -1.0 & -7.7 & 15.0 & -10.0 & 5.0 & -1.5 & 0.2 \\ 0.2 & -2.4 & -3.5 & 8.0 & -3.0 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 & -4.5 & -0.0 & 4.5 & -0.9 & 0.1 \\ 0.1 & -0.8 & 3.0 & -8.0 & 3.5 & 2.4 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 & -5.0 & 10.0 & -15.0 & 7.7 & 1.0 \\ 1.0 & -7.2 & 22.5 & -40.0 & 45.0 & -36.0 & 14.7 \end{bmatrix}$$

بطريقة مشابهة نعوض هذه القيم في المعادلة (2.3) ونكمل الحل برانج كتا من الدرجة الرابعة ، نبين النتائج في الجدول 2 - 3 أخيراً نأخذ $N = 9$ ، نجد نقاط الشبكة متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.125, x_3 = 0.25, x_4 = 0.375,$$
$$x_5 = 0.5, x_6 = 0.625, x_7 = 0.75, x_8 = 0.875, x_9 = 1$$

ونقاط الشبكة غير متساوية المسافة

$$x_1 = 0, x_2 = 0.0381, x_3 = 0.1464, x_4 = 0.3087,$$
$$x_5 = 0, x_6 = 0.6913, x_7 = 0.8536, x_8 = 0.9619, x_9 = 1$$

t	x_i	Equally Spacing Points		Equally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00278707	2.3058×10^{-9}	0.00045023	3.7248×10^{-10}
	x_3	0.01114830	9.2230×10^{-9}	0.00627092	5.1880×10^{-9}
	x_4	0.02508367	2.0752×10^{-8}	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_5	0.04459319	3.6892×10^{-8}	0.05643825	4.6692×10^{-8}
	x_6	0.06967686	5.7644×10^{-8}	0.08734261	7.2259×10^{-8}
	x_7	0.10033467	8.3007×10^{-8}	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00027779	2.3147×10^{-14}	0.00004487	3.7393×10^{-15}
	x_3	0.00111115	9.2589×10^{-14}	0.00062502	5.2081×10^{-14}
	x_4	0.00250008	2.0833×10^{-13}	0.00250008	2.0833×10^{-13}
	x_5	0.00444459	3.7036×10^{-13}	0.00562519	4.6873×10^{-13}
	x_6	0.00694468	5.7868×10^{-13}	0.00870542	7.2540×10^{-13}
	x_7	0.01000033	8.3330×10^{-13}	0.01000033	8.3330×10^{-13}

جدول 2 - 3: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 7$

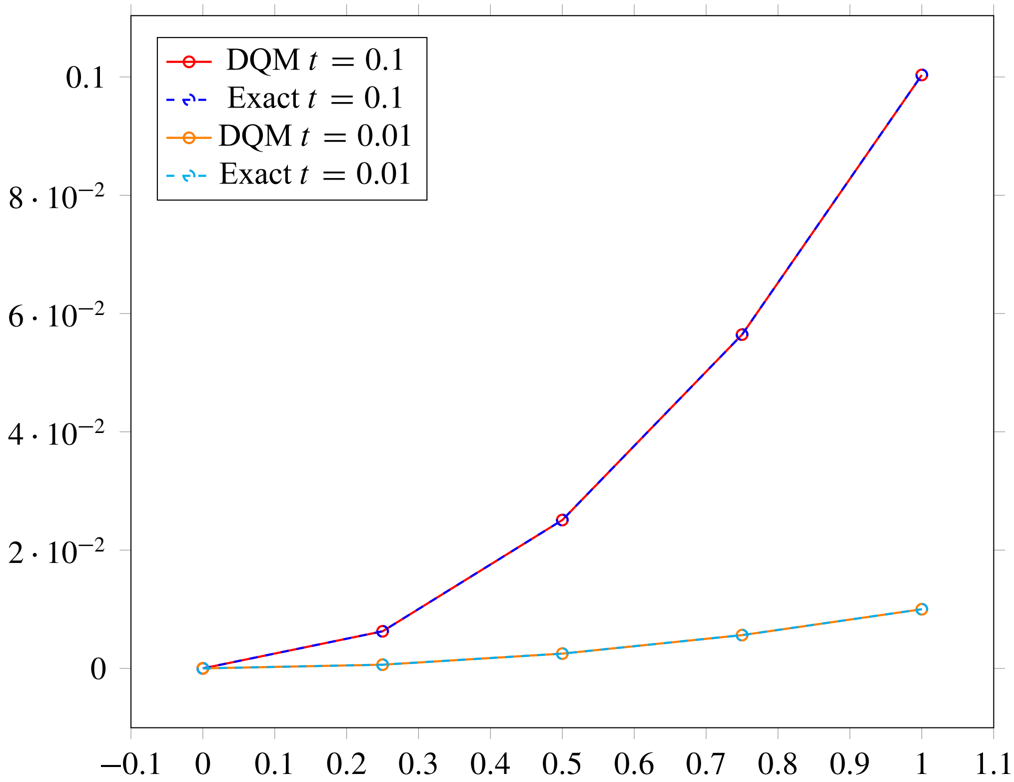
ومعاملات الوزن تكون

$$\begin{bmatrix} -21.7 & 64.0 & -112.0 & 149.3 & -140.0 & 89.6 & -37.3 & 9.1 & -1.0 \\ -1.0 & -12.7 & 28.0 & -28.0 & 23.3 & -14.0 & 5.6 & -1.3 & 0.1 \\ 0.1 & -2.3 & -7.6 & 16.0 & -10.0 & 5.3 & -2.0 & 0.5 & -0.0 \\ -0.0 & 0.6 & -4.0 & -3.6 & 10.0 & -4.0 & 1.3 & -0.3 & 0.0 \\ 0.0 & -0.3 & 1.6 & -6.4 & -0.0 & 6.4 & -1.6 & 0.3 & -0.0 \\ -0.0 & 0.3 & -1.3 & 4.0 & -10.0 & 3.6 & 4.0 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 2.0 & -5.3 & 10.0 & -16.0 & 7.6 & 2.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1.3 & -5.6 & 14.0 & -23.3 & 28.0 & -28.0 & 12.7 & 1.0 \\ 1.0 & -9.1 & 37.3 & -89.6 & 140.0 & -149.3 & 112.0 & -64.0 & 21.7 \end{bmatrix}$$

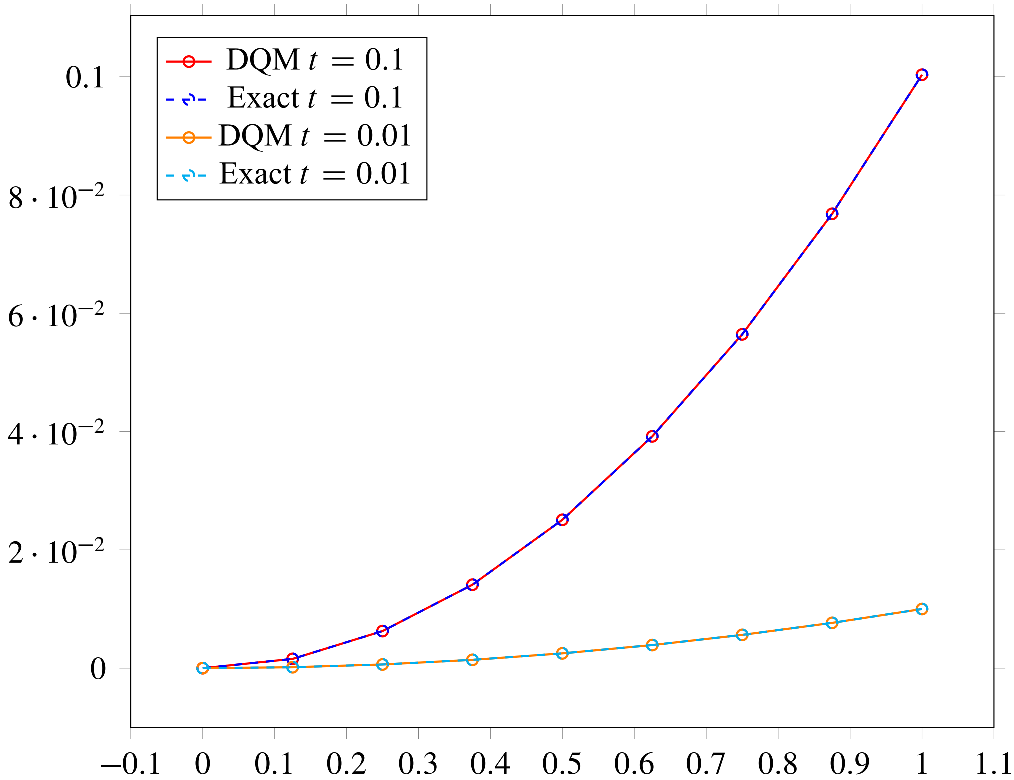
نجد النتائج في الجدول 2 - 4

t	x_i	Equally Spacing Points		Equally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00156773	1.2970×10^{-9}	0.00014534	1.2024×10^{-10}
	x_3	0.00627092	5.1880×10^{-9}	0.00215184	1.7802×10^{-9}
	x_4	0.01410956	1.1673×10^{-8}	0.00955888	7.9081×10^{-9}
	x_5	0.02508367	2.0752×10^{-8}	0.02508367	2.0752×10^{-8}
	x_6	0.03919323	3.2425×10^{-8}	0.04795529	3.9674×10^{-8}
	x_7	0.05643825	4.6692×10^{-8}	0.07309917	6.0475×10^{-8}
	x_8	0.07681873	6.3552×10^{-8}	0.09284249	7.6809×10^{-8}
	x_9	0.10033467	8.3007×10^{-8}	0.10033467	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.00000000	0	0.00000000	0
	x_2	0.00015626	1.3020×10^{-14}	0.00001449	1.2071×10^{-15}
	x_3	0.00062502	5.2081×10^{-14}	0.00021447	1.7871×10^{-14}
	x_4	0.00140630	1.1718×10^{-13}	0.00095273	7.9389×10^{-14}
	x_5	0.00250008	2.0833×10^{-13}	0.00250008	2.0833×10^{-13}
	x_6	0.00390638	3.2551×10^{-13}	0.00477969	3.9828×10^{-13}
	x_7	0.00562519	4.6873×10^{-13}	0.00728578	6.0710×10^{-13}
	x_8	0.00765651	6.3800×10^{-13}	0.00925359	7.7108×10^{-13}
	x_9	0.01000033	8.3330×10^{-13}	0.01000033	8.3330×10^{-13}

جدول 2 - 4: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 9$



شكل 1: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي و الحل العددي عندما $N = 5$



شكل 2: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي و الحل العددي عندما $N = 9$

مثال 2 - 2

لنحاول ايجاد حل للمعادلة

$$u_t + uu_x = x \tag{2.6}$$

مـــع الشـــــرط الحـــــدودي $u(x,0) = 2$ ، هذه المـــعادلـــة تـمـــتـلك الحــــل الدقيـــق $u(x,t) = 2\,\mathrm{sech}(t) + x\tanh(t)$، نطبق صيغة التفاضل التربيعي على المشتقة بالنسبة الى x على المعادلة (2.6) من اجل نقاط الشبكة $x_1, x_2, \dots, x_N$ ، نجد

$$u_t(x_i,t) = -u(x_i,t)\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} u(x_j,t) + x_i, \quad i = 1,2,\dots,N \tag{2.7}$$

كما في المثال الاول ، نكمل الحل بطريقة رانج كتا من الدرجة الرابعة RK4 ، للقيم $t_0, t_1, \dots, t_M$ ، من اجل ذلك نفرض

$$G(t,\mathbf{u}) = -\mathbf{u}(A\mathbf{u}) + \mathbf{x}$$

حيث A مصفوفة معاملات الوزن من الرتبة الاولى و $\mathbf{x} = \langle x_1, \dots, x_N\rangle$ ، صيغة رانج كتا تكون

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{k}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad k = 0,1,2,\dots,M-1 \tag{2.8}$$

حيث يتم حساب المعاملات المتجهة $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ من خلال الصيغ في (2.5)
قبل اكمال الحل ، نلاحظ ان نقاط الشبكة متساوية المسافة ونقاط الشبكة غير متساوية المسافة وكذلك معاملات الوزن لا تعتمد على شكل المعادلة التفاضلية وانما فقط على قيمة N لذلك يمكننا الاستعانة بالمثال 2 - 1 لكي نستخدم نقاط الشبكة ومعاملات الوزن
الان نحدد $M = 11, h = 0.01$ ونجد الحل من اجل القيم $N = 3,5,7,9$ ، النتائج المبينة في الجداول 2 - 5 ، 2 - 6 ، 2 - 7 ، 2 - 8

t	x_i	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_3	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_3	2.08970949	1.0184×10^{-7}

جدول 2 - 5: مقارنة النتائج العددية مع التحليلية عندما $N = 3$

t	x_i	Equally Spacing Points		Equally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.01495850	3.9086×10^{-8}	2.00463754	3.0422×10^{-8}
	x_3	2.03987550	6.0004×10^{-8}	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_4	2.06479249	8.0922×10^{-8}	2.07511345	8.9587×10^{-8}
	x_5	2.08970949	1.0184×10^{-7}	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99990000	1.7986×10^{-14}	1.99990000	1.8208×10^{-14}
	x_2	2.00239992	2.2604×10^{-13}	2.00136442	1.4033×10^{-13}
	x_3	2.00489984	4.3476×10^{-13}	2.00489984	4.3476×10^{-13}
	x_4	2.00739975	6.4304×10^{-13}	2.00843525	7.2964×10^{-13}
	x_5	2.00989967	8.5132×10^{-13}	2.00989967	8.5132×10^{-13}

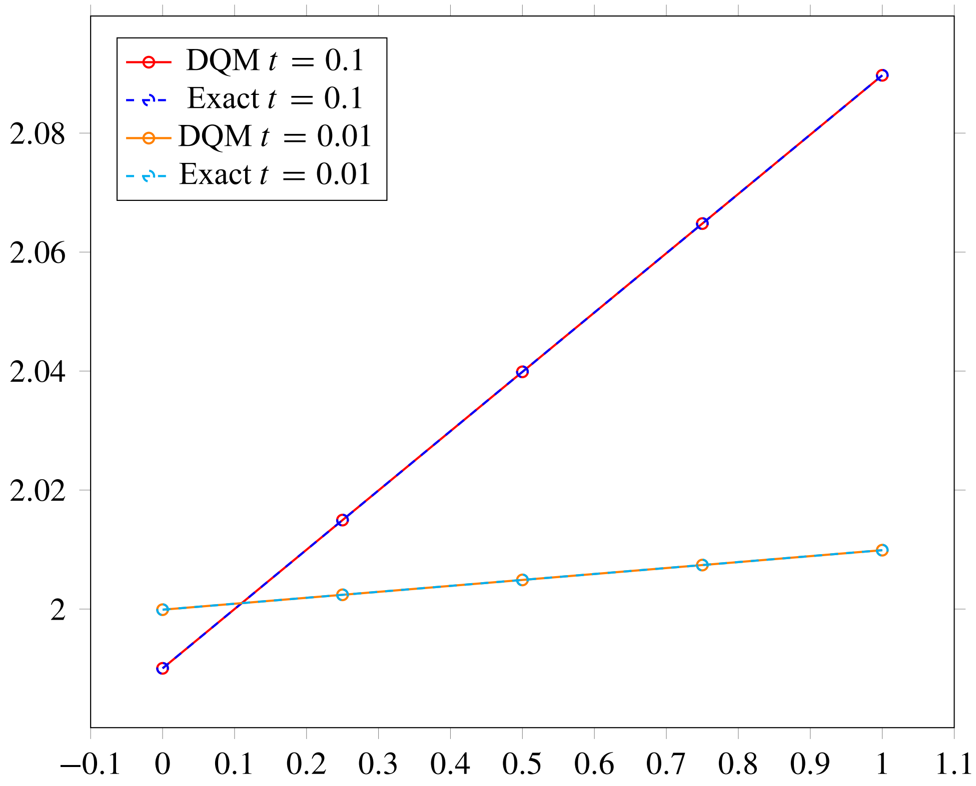
جدول 2 - 6: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 5$

t	x_i	Equally Spacing Points		Equally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}	1.99004150	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.00665283	3.2114×10^{-8}	1.99671799	2.3773×10^{-8}
	x_3	2.02326416	4.6059×10^{-8}	2.01495850	3.9086×10^{-8}
	x_4	2.03987550	6.0004×10^{-8}	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_5	2.05648683	7.3950×10^{-8}	2.06479249	8.0922×10^{-8}
	x_6	2.07309816	8.7895×10^{-8}	2.08303300	9.6235×10^{-8}
	x_7	2.08970949	1.0184×10^{-7}	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99990000	1.7097×10^{-14}	1.99990000	1.7764×10^{-14}
	x_2	2.00156662	1.5721×10^{-13}	2.00056985	7.3719×10^{-14}
	x_3	2.00323323	2.9576×10^{-13}	2.00239992	2.2649×10^{-13}
	x_4	2.00489984	4.3476×10^{-13}	2.00489984	4.3476×10^{-13}
	x_5	2.00656645	5.7332×10^{-13}	2.00739975	6.4304×10^{-13}
	x_6	2.00823306	7.1232×10^{-13}	2.00922982	7.9536×10^{-13}
	x_7	2.00989967	8.5043×10^{-13}	2.00989967	8.5132×10^{-13}

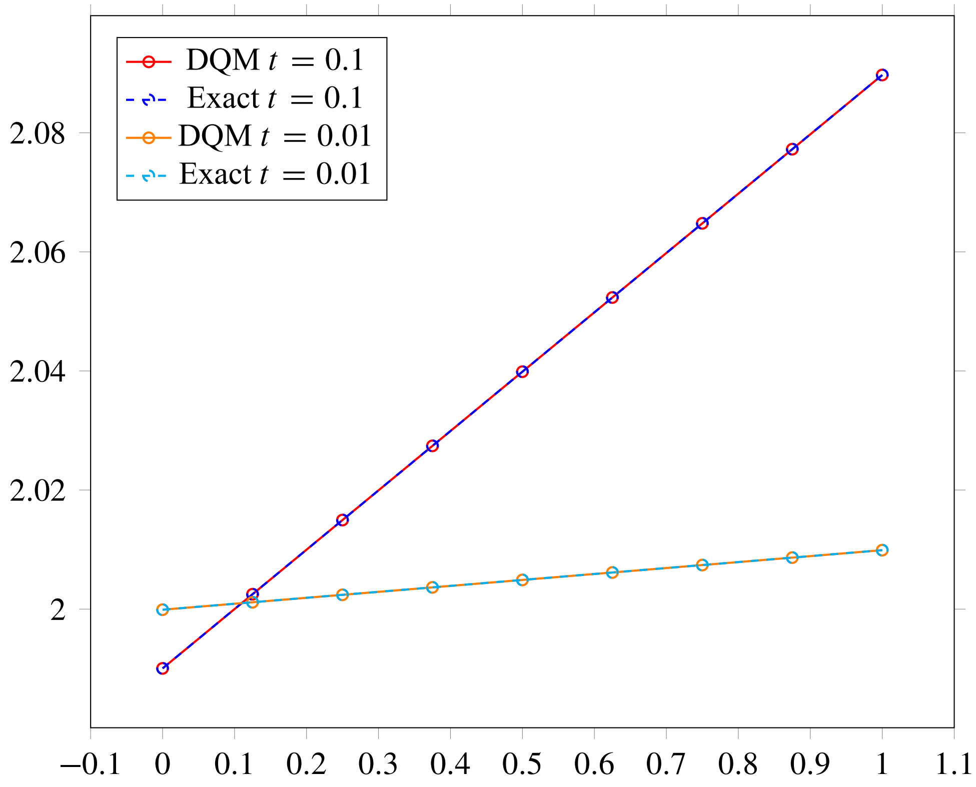
جدول 2 - 7: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 7$

t	x_i	Equally Spacing Points		Equally Spacing Points	
		Exact	Error	Exact	Error
0.1	x_1	1.99004150	1.8168×10^{-8}	1.99004150	1.8169×10^{-8}
	x_2	2.00250000	2.8627×10^{-8}	1.99383489	2.1353×10^{-8}
	x_3	2.01495850	3.9086×10^{-8}	2.00463754	3.0422×10^{-8}
	x_4	2.02741700	4.9545×10^{-8}	2.02080485	4.3994×10^{-8}
	x_5	2.03987550	6.0004×10^{-8}	2.03987550	6.0004×10^{-8}
	x_6	2.05233399	7.0463×10^{-8}	2.05894614	7.6014×10^{-8}
	x_7	2.06479249	8.0922×10^{-8}	2.07511345	8.9587×10^{-8}
	x_8	2.07725099	9.1381×10^{-8}	2.08591611	9.8656×10^{-8}
	x_9	2.08970949	1.0184×10^{-7}	2.08970949	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.99990000	1.7764×10^{-14}	1.99990000	1.8874×10^{-14}
	x_2	2.00114996	1.2212×10^{-13}	2.00028059	4.9738×10^{-14}
	x_3	2.00239992	2.2604×10^{-13}	2.00136442	1.4033×10^{-13}
	x_4	2.00364988	3.3085×10^{-13}	2.00298648	2.7534×10^{-13}
	x_5	2.00489984	4.3476×10^{-13}	2.00489984	4.3476×10^{-13}
	x_6	2.00614980	5.3868×10^{-13}	2.00681319	5.9419×10^{-13}
	x_7	2.00739975	6.4304×10^{-13}	2.00843525	7.2919×10^{-13}
	x_8	2.00864971	7.4696×10^{-13}	2.00951908	8.1979×10^{-13}
	x_9	2.00989967	8.5043×10^{-13}	2.00989967	8.5176×10^{-13}

جدول 2 - 8: مقارنة النتائج العددية عند نقاط الشبكة متساوية المسافة وعند نقاط الشبكة غير متساوية المسافة عندما $N = 9$



شكل 3: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي و الحل العددي عندما $N = 5$



شكل 4: يوضح مقارنة بين الحل التحليلي و الحل العددي عندما $N = 9$

استنتاجات و توصيات

استنتاجات

في نهاية البحث يمكن استنتاج ان طريقة التفاضل التربيعي هي طريقة جيدة في ايجاد نتائج قريبة من الحل الدقيق وبنقاط شبكة قليلة نسبياً مقارنةً بطرائق اخرى ، وكذلك يمكن استنتاج ان طريقة التفاضل التربيعي مستقرة عند قيم مختلفة من عدد نقاط الشبكة ، ولكن لا يمنع ان نعطي بعض التوصيات عند تطبيق طريقة التفاضل التربيعي في مختلف المجالات:

توصيات

1. يُوصى باختيار نوع نقاط الشبكة (منتظمة أو غير منتظمة مثل نقاط تشيبيشيف) بما يتناسب مع طبيعة المسألة المدروسة، إذ تؤدي النقاط غير المنتظمة إلى دقة أعلى في المسائل ذات التغيرات الحادة.
2. يُنصح بإجراء تحليل دقيق للاستقرارية والدقة العددية للطريقة، خاصة عند تطبيقها على المعادلات غير الخطية أو المعادلات الزمنية، لضمان موثوقية النتائج.
3. يُفضل مقارنة نتائج DQM مع طرق عددية أخرى كطريقة الفروق المنتهية والطريقة الطيفية، للتحقق من دقة الحل وتقييم فعالية الطريقة.
4. يُستحسن استخدام خوارزميات فعالة ودقيقة لحساب أوزان التفاضل التربيعي، مثل الطريقة التحليلية المشتقة من متعددات حدود لاغرانج، لتقليل الخطأ العددي وزيادة الكفاءة.
5. يُوصى باستخدام تقنيات الفصل الاتجاهي (Direction Splitting) عند التعامل مع مسائل ذات بعدين أو أكثر، لتقليل تعقيد العمليات الحسابية.
6. يُنصح بالاستفادة من البرمجيات المتقدمة مثل **MATLAB** أو **Python** والتي تتيح أدوات جاهزة لحساب الأوزان وتطبيق الطريقة بكفاءة عالية.
7. يُستحسن توسيع استخدام الطريقة في تطبيقات هندسية وعلمية متنوعة مثل ميكانيكا الموائع، تحليل الإجهادات، وانتقال الحرارة، نظراً لما أثبتته من دقة وكفاءة مقارنة بطرق عددية تقليدية.

المصادر

[1] Bellman RE, Kashef BG, Casti J, *Differential quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations*, J Comput Phys, Vol 10, pp 40-52, 1972.

[2] Bellman RE, Roth RS, *Methods in approximation: techniques for mathematical modelling*, D Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1986.

[3] Bert CW, Malik M, *Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures*, Compos. Struct., Vol 39, Iss 3-4, pp 179-189, 1997.

[4] Chang Shu, *Differential Quadrature and its Applications in Engineering*, Springer-Verlag London, 1999.

[5] Chang CT, Tsai CS, Lin TT, *The modified differential quadratures and their applications*, Chem. Eng. Comman., Vol 123, pp 135-164, 1993.

[6] LeVeque RJ, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Vol 31, pp 1-20, 2002.

[7] Girault V and Raviart PA, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol 1, pp 1-100, 1986.

[8] Quan JR, Chang CT, *New insights in solving distributed system of equations by the quadrature methods*, Comput. Chem. Engrg., Vol 13, pp 779-788, 1989.

[9] Smith GD, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: finite difference methods*, Oxford University Press, 1985.

Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Basrah
College of Education for Pure Sciences
Department of Mathematics

Differential Quadrature Method for Solving Boundary Value Problems

Graduation research submitted to

Department of Mathematics, College of Education for Pure Sciences, and is part of the requirements for obtaining the Bachelor's degree in Mathematics

By
Abbas Humod Dhaidan

Supervisor
Dr. Abdullsattar Jabir Ali

1446 **2025**