وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

طريقة التغاير التكراري لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

عذراء

إشراف

م.م. رغد كريم مسلم

2025 - 2024

الإهداء

إلى الكهف الحصين وغياث المضطر المستكين وملاذ المؤمنين ومنقذ العالمين حضرة جناب الموقر صاحب الزمان (عج).

إلى من بها أعلوا وعليها ارتكز ، إلى الينبوع الذي لا يمل من العطاء ، والدعاء المستجاب (والدتي العزيزة).

إلى والدي المبجل أطال الله في عمره وأمده بالصحة والعافية.

إلى خير سند (اخوتي واخواتي).

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر الجزيل و الثناء الجميل إلى **م.م. رغد كريم مسلم** كان لها الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا ملاحظاتها وإنجازها لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاه الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

مقدمة

طريقة التغاير التكراري (Variational Iteration Method) هي واحدة من الطرق الرياضية الحديثة التي تستخدم لحل المعادلات التفاضلية، سواء كانت خطية أو غير خطية. تعتبر هذه الطريقة من الأساليب الفعّالة التي تتيح إيجاد حلول تقريبية للمعادلات المعقدة التي يصعب حلها باستخدام الطرق التقليدية.

تم تطوير طريقة التغاير التكراري في أوائل التسعينات بواسطة الباحثين J. H. He و H. S. Zhang، وهي تقوم على فكرة استخدام تكرارات لتحسين تقريب الحلول للمعادلات التفاضلية. تعتمد هذه الطريقة على تعديل المعادلة التفاضلية الأصلية بشكل يسمح بتطوير سلسلة تكرارية تؤدي إلى تقريب الحل بفعالية مع كل خطوة.

تتميز طريقة التغاير التكراري بقدرتها على توفير حلول دقيقة، حتى عندما تكون المعادلات التفاضلية غير خطية أو تحتوي على معقدات متعددة. يمكن استخدامها لحل مجموعة واسعة من المعادلات التفاضلية الجزئية والعادية، بما في ذلك معادلات بواسون، معادلات لايبنز، معادلات فاراداي، وغيرها.

المستخلص

في هذا البحث سوف نتطرق لدراسة طريقة التغاير التكراري في حل المعادلات التفاضلية. ونتتطرق في الفصل الاول للمفاهيم الاساسية للمعادلات التفاضلية من تعاريف ومفاهيم والتمييز بين المعادلات التفاضلية الاعتيادية و المعادلات التفاضلية الجزئية وانواع الحلول. أما في الفصل الثاني نتعمق في دراسة طريقة التغاير التكراري لحل المعادلات التفاضلية الجزئية بالتحديد ومعرفة مدى دقة الطريقة.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1 - 1 المعادلة التفاضلية الاعتيادية [1]

هي علاقة بين المتغير المعتمد ومتغير مستقل واحد وتدخل فيها المشتقات او التفاضلات. الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0 \tag{1}$$

حيث y المتغير المعتمد و x المتغير المستقل و F اي دالة. الان سوف نعطي بعض الامثلة على المعادلات التفاضلية الاعتيادية

$$\frac{dy}{dx} + y = 3x^2 \tag{2}$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + (2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = (3 - x^2)y \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{4}$$

$$(x - y)dx + (x + y)dy = 0 \tag{5}$$

1 - 2 تصنيف المعادلات التفاضلية الاعتيادية [1]

سوف نصنف المعادلات التفاضلية الاعتيادية حسب الاتي

1. رتبة المعادلات التفاضلية الاعتيادية

اذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي اعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية الاعتيادية قيل أن هذه المعادلة من الرتبة n.

مثال: لدينا المعادلات (2) و (5) معادلات تفاضلية من الرتبة الاولى. اما المعادلة (2) هي من الرتبة الثانية و المعادلة (4) من الرتبة الثالثة.

2. درجة المعادلة التفاضلية الاعتيادية

هي الاس المرفوع اليها اعلى مشتقة تظهر بالمعادلة التفاضلية. وقبل تحديد درجة المعادلة يجب وضعها على صورة قياسية وصحيحة من حيث المشتقات.

مثال: المعادلات من (2) الى (5) كلها من الدرجة الاولى اما المعادلة

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^2 = e^x \sin x \tag{6}$$

فهي معادلية تفاضلية من الرتبة الثانية و الدرجة الثالثة.

3. المعادلة التفاضلية الخطية

هي المعادلة التفاضلية التي تكون خطية في المتغير المعتمد ومشتقاته جميعاً

مثال: المعادلة

$$x^2y'' + xy' + x^2y = \sin x \tag{7}$$

هي معادلة خطية من الرتبة الثانية حيث ان كلاً من المتغير المعتمد y ومشتقاته y', y'' خطية

اذا لم تكن المعادلية التفاضلية خطية فانها معادلة تفاضلية لا خطية

مثال: المعادلات التفاضلية التالية غير خطية

$$yy'' + y' = 0 \tag{8}$$

$$y' + x\sqrt{y} = \sin x \tag{9}$$

$$y''' + x^2y'' + \sin y = 0 \tag{10}$$

4. المعادلة التفاضلية الاعتيادية الخطية المتجانسة

تكون على الصيغة

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0 \tag{11}$$

مثال: المعادلة

$$x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0 \tag{12}$$

معادلة تفاضلية اعتيادية خطية متجانسة من الرتبة الثانية.

1 - 3 المعادلة التفاضلية الجزئية [2]

المعادلة التفاضلية الجزئية هي معادلة تتضمن متغير معتمد ذات متغيرين او اكثر ، والمشتقات الجزئية لهذه بالنسبة الى بعض تلك المتغيرات او كلها

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية هي

$$F(x, y, z, t, \ldots, u_x, u_y, u_z, u_t, \ldots) = 0 \tag{1}$$

حيث u هو المتغير المعتمد و $x, y, z, t, \ldots$ هي المتغيرات المستقلة.

مثال: كل مما يأتي معادلة تفاضلية جزئية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t \tag{2}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - t\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \tag{3}$$

$$(x^2+t^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^4 = e^x \tag{4}$$

$$x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 - y\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}\right)^2 = 6x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5}$$

1 - 4 تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية[2]

كما الحال في المعادلات التفاضلية الاعتيادية سوف نصنف المعادلات التفاضلية الجزئية كالآتي

1. رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية

كما في حالة المعادلات التفاضلية الاعتيادية تعرف رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية بانها اعلى مشتقة فيها كما ان درجة المعادلة التفاضلية الجزئية هي اس اعلى مشتقة فيها بشرط ان يكون عدداً صحيحاً غير سالب.

مثال: المعادلتان (2) و (3) في المثال اعلاه من الرتبة الاولى و الدرجة الاولى والمعادلة (4) من الرتبة الثانية والدرجة الاولى والمعادلة (5) من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

2. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية خطية اذا كان مجموع اسس المتغير المعتمد ومشتقاته في كل من حدوده لا يزيد على (1) بشرط ان تكون الاسس اعداداً صحيحة غير سالبة وعلى سبيل المثال فإن المعادلة:

$$(x-t)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+4x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\frac{\partial u}{\partial t}+tu=e^x$$

خطية، ولكن المعادلات

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-5xu=0$$

غير خطية

3. المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية متجانسة اذا كانت كل المشتقات الجزئية فيها متساوية في الرتبة. وعلى سبيل المثال فإن المعادلتين الاتيتين

$$u_{xx}-xu_{tx}=4x^2$$

$$x^2u_{xxx}+5xtu_{txx}-u_{xxx}=x^2+t^2$$

متجانستين، ولكن المعادلتين

$$x^2u_{xxx} + 5xtu_{txx} + u_{xx} = x^2$$

$$u_x + xu = t$$

غير متجانستين

1 - 5 عدد المتغيرات و الانماط الثلاث الاساسية [3]

سوف نهتم بدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية بمتغيرين مستقلين والتي تأخذ الشكل العام

$$au_{xx} + 2bu_{tx} + cu_{tt} + du_x + eu_t + fu + g = 0 \qquad (6)$$

حيث a, b, c, d, e, f دوال للمتغيرين x, t. سوف ندرس المعادلة (6) من خلال المقدار المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad (7)$$

1. المعادلة التفاضلية الجزئية المكافئية

تكون المعادلة (6) مكافئية اذا كان $\Delta = 0$

مثال:

$$u_{xx} - u_y = 0$$

2. المعادلة التفاضلية الجزئية الناقصية

تكون المعادلة (6) ناقصية اذا كان $\Delta < 0$

مثال:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

3. المعادلة التفاضلية الجزئية الزائدية

تكون المعادلة (6) زائدية اذا كان $\Delta > 0$

مثال:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

1 - 6 الشروط الابتدائية والشروط الحدودية [7]

1. الشرط الابتدائي

يتم تفسير احد المتغيرات المستقلة على انه الزمن t. و نفرض الشروط عند لحظة معينة. على سبيل المثال $u(x, t_0) = u_0(x)$

2. الشرط الحدودي

نفرض الشروط على حدود المجال Ω. على سبيل المثال $u|_{\partial\Omega} = \phi$ حيث $\partial\Omega$ هي حدود المجال Ω.

الفصل الثاني

طريقة التغاير التكراري

2 - 1 تعريف طريقة التغاير التكراري

طريقة التغاير التكراري هي اجراء تكراري للحصول على حل تقريبي (بالغالب متقارب بسرعة) لمعادلة تفاضلية خطية او غير خطية. وتتلخص فكرتها الاساسية في انشاء دالة تصحيحية تعمل على تحسين التخمين الاولي من خلال دمج مضروب لاكرانج المحدد من نظرية التغاير.

2 - 2 عرض الطريقة

لتكن لدينا المعادلة الدالية من الشكل

$$L[u(x)] + N[u(x)] = g(x)$$

حيث

- L المؤثر الخطي.
- N المؤثر غير الخطي.
- $g(x)$ دالة معروفة.
- $u(x)$ الدالة المجهولة التي يجب تحديدها.

المخطط التكراري

طريقة التغاير التكراري تولد متتابعة من الدوال $u_n(x)$ تتقارب الى الحل $u(x)$ من خلال انشاء دالي تصحيحي كالآتي

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_a^b \lambda(s)\big[L[u_n(s)] + N[\tilde{u}_n(s)] - g(s)\big]\, ds$$

حيث

- $u_n(x)$ هي التقريب الحالي.
- $\lambda(s)$ مضروب لاكرانج الذي يتحدد من خلال نظرية التغاير.
- $\tilde{u}_n(s)$ يمثل التغاير المقيد لـ $u_n(x)$، اي ان من خلال الاجراء التكراري نعتبر $\delta\tilde{u}_n(s) = 0$

طريقة التغاير التكراري للمعادلات التفاضلية الجزئية

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من الشكل

$$L[u(x,t)] + N[u(x,t)] = g(x,t)$$

حيث

- L المؤثر الخطي.
- N المؤثر غير الخطي.
- $g(x,t)$ دالة معروفة.
- $u(x,t)$ الدالة المجهولة التي يجب تحديدها.

الصيغة التكرارية تكون على الصورة

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\big[L[u_n(x,s)] + N[\tilde{u}_n(x,s)] - g(x,s)\big]\,ds \quad (1)$$

حيث

- $u_n(x,t)$ هي التقريب الحالي.
- $\lambda(s)$ مضروب لاكرانج الذي يتحدد من خلال نظرية التغاير.
- $\tilde{u}_n(x,s)$ يمثل التغاير المقيد لــ $u_n(x)$، اي ان من خلال الاجراء التكراري نعتبر $\delta\tilde{u}_n(x,s) = 0$

2 - 3 بعض الامثلة

مثال 2 - 3 - 1

حل المعادلة التالية بإستخدام طريقة التغاير التكراري

$$u_t + uu_x = 0, \qquad u(x,0) = -x$$

الحل

من خلال (1) الصيغة التكرارية تكون

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\left[\frac{\partial u_n}{\partial s} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right] ds \tag{2}$$

بأخذ التغاير لطرفي المعادلة (2) نحصل على

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1} &= \delta u_n + \int_0^t \lambda(s)\left[\delta\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}\right) + \delta\left(\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right)\right] ds \\ &= \delta u_n + \int_0^t \lambda(s)\delta\left(\frac{\partial u_n}{\partial s}\right) ds + \int_0^t \lambda(s)\delta\left(\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right) ds \qquad (3)\end{aligned}$$

وبما ان $\delta\tilde{u}_n = 0$ فإن التكامل الثاني يساوي صفراً. اذن الصيغة (3) تصبح

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \int_0^t \lambda(s)\frac{\partial(\delta u_n)}{\partial s} ds \tag{4}$$

بإجراء التكامل بالاجزاء على التكامل في (4) نحصل على

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1} &= \delta u_n + \lambda(t)\delta u_n - \int_0^t \frac{d\lambda}{ds}\delta u_n\, ds \\ &= [1+\lambda(t)]\delta u_n - \int_0^t \frac{d\lambda}{ds}\delta u_n\, ds\end{aligned}$$

الآن بجعل $\delta u_{n+1} = 0$ يجب ان نجعل معاملات δu_n تساوي صفراً في الطرف الايمن نحصل على الشروط

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{ds} = 0 \\ 1+\lambda(t) = 0\end{cases} \tag{5}$$

بحل النظام (5) نحصل على مضروب لاكرانج $\lambda(s) = -1$. بالتعويض في (2) نحصل على الصيغة التكرارية

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x}\, ds \tag{6}$$

الآن نفرض $u_0(x,t) = -x$ و نحسب $u_1(x,t)$ من خلال العلاقة التكرارية (6)

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= u_0(x,t) - \int_0^t \frac{\partial u_0}{\partial s} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}\, ds \\
&= -x - \int_0^t 0 + (-x)(-1)\, ds \\
&= -x - \int_0^t x\, ds \\
&= -x - sx\Big|_0^t \\
&= -x - tx \\
&= -x(1+t)
\end{aligned}$$

نجد $u_2(x,t)$

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= u_1(x,t) - \int_0^t \frac{\partial u_1}{\partial s} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\, ds \\
&= -x(1+t) - \int_0^t -x + \big[-x(1+s)\big]\big[-(1+s)\big]\, ds \\
&= -x(1+t) - \int_0^t -x + x(1+s)^2\, ds \\
&= -x(1+t) - \left[-sx + \frac{x(1+s)^3}{3}\right]_0^t \\
&= -x(1+t) - \left[-tx + \frac{x(1+t)^3}{3} - \frac{x}{3}\right]
\end{aligned}$$

$$= -x - xt + tx - \frac{x(1+3t+3t^2+t^3)}{3} + \frac{x}{3}$$

$$= -x - x\left(\frac{1}{3} + t + t^2 + \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -x\left(1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3}\right)$$

نلاحظ عندما $n \to \infty$ فإن

$$u_n(x,t) \to -x(1+t+t^2+t^3+t^4+\cdots) = \frac{-x}{1-t}, \quad |t| < 1$$

وهو يمثل الحل الحقيقي ويمكننا التحقق من ذلك كالآتي

$$u_t + uu_x = \frac{-x}{(1-t)^2} + \left(\frac{-x}{1-t}\right)\left(\frac{-1}{1-t}\right) = \frac{-x}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-t)^2} = 0$$

مثال 2 - 3 - 2

اوجد حل المعادلة التفاضلية بطريقة التغاير التكراري

$$u_t = x^2 + \frac{1}{4}u_x^2, \quad u(x,0) = 0$$

الحل

من خلال الصيغة (1) لدينا الصيغة التكرارية

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^t \lambda(s)\left[\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right)^2 - x^2\right] ds \qquad (7)$$

بأخذ التغاير لطرفي المعادلة (7) ، نحصل على

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \int_0^t \lambda(s)\left[\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right)^2 - x^2\right] ds$$

بطريقة مشابهة للمثال 1 - 2 ، نحصل على الشروط

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda}{ds} = 0 \\ 1 + \lambda(t) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

ومنه نحصل على $\lambda(s) = -1$ ، بالتعويض في الصيغة التكرارية (7)

$$u_{n+1} = u_n - \int_0^t \left[\frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right)^2 - x^2 \right] ds \qquad (9)$$

الآن نفرض $u_0 = 0$ و نحسب u_1 من خلال العلاقة التكرارية (9) عندما $n = 0$

$$u_1 = u_0 - \int_0^t \left[\frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x}\right)^2 - x^2 \right] ds$$

$$= 0 - \int_0^t -x^2\, dt = x^2 s\Big|_0^t = x^2 t$$

عندما $n = 1$

$$u_2 = u_1 - \int_0^t \left[\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\right)^2 - x^2 \right] ds$$

$$= x^2 t - \int_0^t x^2 - \frac{1}{4}(2xs)^2 - x^2\, ds$$

$$= x^2 t - \int_0^t x^2 s^2\, ds$$

$$= x^2 t + x^2 \frac{t^3}{3}$$

$$= x^2 \left[t + \frac{t^3}{3} \right]$$

عندما $n = 2$

$$u_3 = u_2 - \int_0^t \left[\frac{\partial u_2}{\partial s} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x}\right)^2 - x^2 \right] ds$$

$$= x^2 \left[t + \frac{t^3}{3} \right] - \int_0^t x^2(1 + s^2) - \frac{1}{4}\left[2x(s + \frac{s^3}{3}) \right] - x^2\, ds$$

$$= x^2 \left[t + \frac{t^3}{3} \right] - \int_0^t x^2 + x^2 s^2 - x^2 \left[s^2 + \frac{2s^4}{3} + \frac{s^6}{9} \right] - x^2\, ds$$

$$= x^2\left[t+\frac{t^3}{3}\right]-\int_0^t -\frac{2}{3}x^2s^4-\frac{1}{9}x^2s^6\,ds$$

$$= x^2\left[t+\frac{t^3}{3}\right]+\left[\frac{2}{15}x^2s^5+\frac{1}{63}x^2s^7\right]_0^t$$

$$= x^2\left[t+\frac{t^3}{3}\right]+\left[\frac{2}{15}x^2t^5+\frac{1}{63}x^2t^7\right]$$

$$= x^2\left[t+\frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{15}+\frac{t^7}{63}\right]$$

نلاحظ عندما $n \to \infty$ فإن

$$u_n(x,t) \to x^2\tan(t)$$

وهو يمثل الحل الدقيق للمعادلة التفاضلية الاصلية.

للتحقق من ذلك

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-x^2 &= x^2\sec^2 t-\frac{1}{4}(2x\tan t)^2-x^2\\ &= x^2\sec^2 t-x^2\tan^2 t-x^2\\ &= x^2(\sec^2 t-\tan^2 t)-x^2\\ &= x^2-x^2\\ &= 0\end{aligned}$$

الخلاصة

في نهاية البحث قد تعرفنا على طريقة التغاير التكراري (**VIM**) في حل المعادلات التفاضلية الجزئية و طبقناها على حل مثال. حيث هذه الطريقة تستخدم مفهوم مضروب لاكرانج في نظرية التغاير للحصول حل امثلي (**optimal solution**) وعرفنا ان التكرارات في هذه الطريقة هي عبارة عن دوال تقترب الى الحل الحقيقي (**exact solution**). وفي كثير من الحالات يكون افضل من الطرق العددية التي تعطي حلول عددية بدل من الدوال.

المصادر

[1] اسماعيل بوقفة و عايش المناودة, المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات, Unknown year. Unknown publisher,

[2] عطاالله ثامر االعاني, مقدمة الى المعادلات التفاضلية الجزئية, جامعة بغداد, 1990.

[3] E.C. Zachmanoglou and Dale W. Thoe, Introduction to Partial Differential Equations with Applications, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[4] J.H. He, A new approach to nonlinear partial differential equations, Comm. in Nonlinear Sci. and Nummer. Simul.2, 1997.

[5] J.H. He, Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives, Comp. Methods Appl. Merch. Engg, 1998.

[6] J.H. He, Approximate solution for non linear differential equations with convolution product non-linearities, Comp. Methods Appl. Merch. Engg, 1998.

[7] Victor Ivrii, Partial Differential Equations, University of Toronto, 2022.