التشاكل في الزمر والحلقات

الطالبة : حنين عدنان اسماعيل

اشراف : م. جاسم محمد جواد

الملخص

قدمنا في هذا البحث نبذة عن نظرية الزمر ونظرية الحلقات حيث درسنا في الفصل الاول مفاهيم أولية في نظرية الزمر وكذلك في نظرية الحلقات ، اما في الفصل الثاني درسنا مفهوم التشاكل الزمري والتشاكل الحلقي وأهم المبرهنات النتائج التي تخصهما.

الفصل الاول
مفاهيم اولية في الزمر والحلقات

تعريف الزمرة

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة Group اذا كان كل عنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية $*$. او نقول ان $(G, *)$ زمرة اذا تحققت الشروط التالية

1. مغلقة بالنسبة للعملية $*$ اي : $a * b \in G, \forall a, b \in G$.
2. العملية $*$ تجميعية : $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$.
3. G تمتلك عنصر محايد مثل e : $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.
4. كل عنصر $a \in G$ يمتلك معكوس : $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

تعريف الزمرة

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة Group اذا كان كل عنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية $*$. او نقول ان $(G, *)$ زمرة اذا تحققت الشروط التالية

1. مغلقة بالنسبة للعملية $*$ اي : $a * b \in G, \forall a, b \in G$.
2. العملية $*$ تجميعية : $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$.
3. G تمتلك عنصر محايد مثل e : $a * e = e * a = a, \forall a \in G$.
4. كل عنصر $a \in G$ يمتلك معكوس : $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

تعريف

الزمرة $(G, *)$ تسمى زمرة ابدالية اذا كانت العملية $*$ عملية ثنائية ابدالية.

تعريف الزمرة

لتكن $(G,*)$ شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة Group اذا كان كل عنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية $*$. او نقول ان $(G,*)$ زمرة اذا تحققت الشروط التالية

1. مغلقة بالنسبة للعملية $*$ اي : $a*b \in G, \forall a,b \in G$.
2. العملية $*$ تجميعية : $a*(b*c)=(a*b)*c, \forall a,b,c \in G$.
3. G تمتلك عنصر محايد مثل e : $a*e=e*a=a, \forall a \in G$.
4. كل عنصر $a \in G$ يمتلك معكوس : $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

تعريف

الزمرة $(G,*)$ تسمى زمرة ابدالية اذا كانت العملية $*$ عملية ثنائية ابدالية.

تعريف

لتكن $(G,*)$ زمرة و H مجموعة غير خالية جزئية من G فإن $(H,*)$ تسمى زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ اذا كانت H هي زمرة كذلك ونكتب $(H,*) \leq (G,*)$

مبرهنة

لتكن $(G,*)$ زمرة و $G \subseteq H \neq \emptyset$ اذن $(H,*)$ تكون زمرة جزئية من $(G,*)$ اذا وفقط اذا حققت الشرط

$$a * b^{-1} \in H, \forall a, b \in H$$

مبرهنة

لتكن $(G,*)$ زمرة و $G \supseteq H \neq \varnothing$ اذن $(H,*)$ تكون زمرة جزئية من $(G,*)$ اذا وفقط اذا حققت الشرط

$$a*b^{-1} \in H, \forall a,b \in H$$

تعريف

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وأن $a \in G$، تسمى المجموعة المعرفة بالشكل التالي $a*H = \{a*h : h \in G\}$ بالمجموعة المشاركة (المصاحبة) اليسارية لـ H في G ، وتسمى $H*a = \{h*a : h \in G\}$ بالمجموعة المشاركة (المصاحبة) اليمينية.

مبرهنة

لتكن $(G,*)$ زمرة و $\emptyset \neq H \subseteq G$ اذن $(H,*)$ تكون زمرة جزئية من $(G,*)$ اذا وفقط اذا حققت الشرط

$$a * b^{-1} \in H, \forall a, b \in H$$

تعريف

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G,*)$ وأن $a \in G$، تسمى المجموعة المعرفة بالشكل التالي $a * H = \{a * h : h \in G\}$ بالمجموعة المشاركة (المصاحبة) اليسارية لـ H في G ، وتسمى $H * a = \{h * a : h \in G\}$ بالمجموعة المشاركة (المصاحبة) اليمينية.

تعريف

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ فإن $(H,*)$ تسمى زمرة جزئية ناظمية (سوية) اذا وفقط اذا كان $a * H = H * a$ لكل $a \in G$ ونكتب $H \trianglelefteq G$.

تعريف

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ ، نعرف العملية الثنائية $\circledast$ على G/H بالشكل التالي
$(a*H)\circledast(b*H)=(a*b)*H, \forall a,b\in G$ ويسمى الزوج المرتب $(G/H,\circledast)$ بزمرة القسمة.

تعريف

لتكن $(H,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$ ، نعرف العملية الثنائية $\circledast$ على G/H بالشكل التالي
$(a*H)\circledast(b*H)=(a*b)*H, \forall a,b\in G$ ويسمى الزوج المرتب $(G/H,\circledast)$ بزمرة القسمة.

تعريف الحلقة

الحلقة هي ثلاثي مرتب $(R,+,\cdot)$ مكون من مجموعة غير خالية R وعمليتي الجمع والضرب بحيث

1. $(R,+)$ زمرة ابدالية.
2. $(R,\cdot)$ شبه زمرة.
3. العملية $\cdot$ تتوزع على العملية $+$ ، أي أن:

(التوزيع من اليسار) $$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

(التوزيع من اليمين) $$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$$

لكل $a,b,c\in R$

تعريف

لتكن $(R, +, \cdot)$ حلقة مع عنصر محايد لعملية الضرب ، نقول ان $(R, +, \cdot)$ ساحة تامة اذا لم تحوي على قواسم الصفر وكانت ابدالية بالنسبة لعملية الضرب.

تعريف

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة مع عنصر محايد لعملية الضرب ، نقول ان $(R,+,\cdot)$ ساحة تامة اذا لم تحوي على قواسم الصفر وكانت ابدالية بالنسبة لعملية الضرب.

تعريف

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و أن $R \supseteq S \neq \varnothing$ ، اذا كانت $(S,+,\cdot)$ حلقة بحد ذاتها نقول بأنها حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$ و اختصاراً نقول S حلقة جزئية من R.

تعريف

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة مع عنصر محايد لعملية الضرب ، نقول ان $(R,+,\cdot)$ ساحة تامة اذا لم تحوي على قواسم الصفر وكانت ابدالية بالنسبة لعملية الضرب.

تعريف

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و أن $\varnothing \neq S \subseteq R$ ، اذا كانت $(S,+,\cdot)$ حلقة بحد ذاتها نقول بأنها حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$ و اختصاراً نقول S حلقة جزئية من R.

تعريف

لتكن R حلقة و I مجموعة جزئية من R ، نقول ان I هي مثالية في R اذا تحققت الشروط

1. $a-b \in I, \forall a,b \in I$.
2. $r\cdot a \in I$ و $a\cdot r \in I$ لكل $r \in R, a \in I$.

الفصل الثاني
التشاكل الزمري والتشاكل الحلقي

تعريف

لتكن كل من $(G_1, *)$ و $(G_2, \circ)$ زمرة ، تسمى الدالة $f : G_1 \to G_2$ انها تشاكل زمري اذا حققت الشرط $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ لكل $a, b \in G_1$

تعريف

لتكن كل من $(G_1, *)$ و $(G_2, \circ)$ زمرة ، تسمى الدالة $f : G_1 \to G_2$ انها تشاكل زمري اذا حققت الشرط
$f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ لكل $a, b \in G_1$

مثال

لتكن $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_n, +_n)$ دالة معرفة بالشكل التالي $f(a) = [a], \forall a \in \mathbb{Z}$. بين هل ان f تمثل تشاكل

الحل

لكل $a, b \in \mathbb{Z}$

$$f(a + b) = [a + b] = [a] +_n [b] = f(a) +_n f(b)$$

بالتالي f دالة تشاكل.

مبرهنة

ليكن $f:(G_1,*)\to(G_2,\circ)$ تشاكل زمري ، فإن

1. $f(e_1)=e_2$.
2. $f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}$.

مبرهنة

ليكن $(G_2, \circ) \rightarrow (G_1, *) : f$ تشاكل زمري ، فإن

1. $.f(e_1) = e_2$
2. $.f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

تعريف

ليكن $(G_2, \circ) \rightarrow (G_1, *) : f$ تشاكل زمري ، فإن مجموعة كل عناصر المجموعة G_1 التي تكون صورتها عنصر المحايد للزمرة G_2 تسمى نواة التشاكل ويرمز لها بالرمز $\ker f$ اي

$$\ker f = \{a \in G : f(a) = e_2\}$$

مبرهنة

ليكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل زمري ، فإن

1. $f(e_1) = e_2$.
2. $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

تعريف

ليكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل زمري ، فإن مجموعة كل عناصر المجموعة G_1 التي تكون صورتها عنصر المحايد للزمرة G_2 تسمى نواة التشاكل ويرمز لها بالرمز $\ker f$ اي

$$\ker f = \{a \in G : f(a) = e_2\}$$

مبرهنة

ليكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل زمري ، فإن $\ker f \leq G_1$.

مبرهنة

ليكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل زمري ، فإن

1. $f(e_1) = e_2$.
2. $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

تعريف

ليكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل زمري ، فإن مجموعة كل عناصر المجموعة G_1 التي تكون صورتها عنصر المحايد للزمرة G_2 تسمى نواة التشاكل ويرمز لها بالرمز $\ker f$ اي

$$\ker f = \{a \in G : f(a) = e_2\}$$

مبرهنة

ليكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل زمري ، فإن $\ker f \leq G_1$.

مبرهنة

ليكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل زمري ، فإن $\ker f = \{e_1\}$ اذا وفقط اذا كانت f دالة متباينة.

مبرهنة التشاكل الاساسية في الزمر

لتكن $(G_2, \circ) \to (G_1, *) : f$ تشاكل شامل فإن $(G_2, \circ) \cong (G/\ker f, \otimes)$

مبرهنة التشاكل الاساسية في الزمر

لتكن $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ تشاكل شامل فإن $(G/\ker f, \otimes) \cong (G_2, \circ)$

تعريف التشاكل الحلقي

لنفترض ان R و S حلقتان ، تسمى الدالة $f : R \to S$ تشاكل حلقي اذا وفقط اذا كان

1. $f(a+b) = f(a) + f(b).$
2. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$

مبرهنة التشاكل الاساسية في الزمر

لتكن $(G_2, \circ) \to (G_1, *) : f$ تشاكل شامل فإن $(G_2, \circ) \cong (G/\ker f, \otimes)$

تعريف التشاكل الحلقي

لنفترض ان R و S حلقتان ، تسمى الدالة $f : R \to S$ تشاكل حلقي اذا وفقط اذا كان

1. $f(a+b) = f(a) + f(b).$
2. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$

ملاحظة

1. اذا كانت f دالة شاملة فإن التشاكل يسمى تشاكل شامل.
2. اذا كانت f دالة متباينة فإن التشاكل يسمى تشاكل متباين.
3. اذا كانت f دالة تقابل فإن التشاكل يسمى تشاكل تقابلي.

مثال

افترض ان R حلقة ، نعرف الدالة $f : R \to R$ بالشكل $f(a) = a, \forall a \in R$ تكون تشاكل تقابلي.

الحل

(1) $f(a+b) = a+b = f(a)+f(b)$.

(2) $f(a\cdot b) = a\cdot b = f(a)\cdot f(b)$.

اذا كان $f(x) = f(y)$ لبعض $x, y \in R$ فأن $x = y$. اذن f تباين.

الآن لكل $y \in R$ فأن $f(y) = y$ اذن f شاملة. بالتالي f تشاكل تقابلي.

مثال

افترض ان R حلقة ، نعرف الدالة $f : R \to R$ بالشكل $f(a) = a, \forall a \in R$ تكون تشاكل تقابلي.

الحل

(1) $f(a+b) = a+b = f(a)+f(b)$.

(2) $f(a \cdot b) = a \cdot b = f(a) \cdot f(b)$.

اذا كان $f(x) = f(y)$ لبعض $x, y \in R$ فأن $x = y$. اذن f تباين.

الآن لكل $y \in R$ فأن $f(y) = y$ اذن f شاملة. بالتالي f تشاكل تقابلي.

تعريف

لتكن f تشاكل من الحلقة R الى الحلقة S. فإن المجموعة

$$\ker f = \{a \in R : f(a) = 0\}$$

تسمى بنواة التشاكل f.

مبرهنة

لتكن f تشاكل من الحلقة R الى الحلقة S. فإن $\ker f$ هي مثالية في R.

مبرهنة

لتكن f تشاكل من الحلقة R الى الحلقة S. فإن $\ker f$ هي مثالية في R.

تعريف

نفرض ان R, S حلقتان بحيث $f : R \to S$ تشاكل تقابلي ، نقول ان R تماثل S ونكتب $R \simeq S$.

مبرهنة

لتكن f تشاكل من الحلقة R الى الحلقة S. فإن $\ker f$ هي مثالية في R.

تعريف

نفرض ان R, S حلقتان بحيث $f : R \to S$ تشاكل تقابلي ، نقول ان R تماثل S ونكتب $R \simeq S$.

تعريف

ليكن I مثاليًا (ideal) في الحلقة $(R, +, \cdot)$، نُعرِّف التشاكل الطبيعي $\pi : R \to R/I$ بالشكل التالي:

$$\pi(r) = r + I$$

ويسمى هذا التشاكل بالتشاكل الطبيعي.

مبرهنة

لتكن f تشاكل من الحلقة R الى الحلقة S. فإن $\ker f$ هي مثالية في R.

تعريف

نفرض ان R, S حلقتان بحيث $f : R \to S$ تشاكل تقابلي ، نقول ان R تماثل S ونكتب $R \simeq S$.

تعريف

ليكن I مثاليًا (ideal) في الحلقة $(R, +, \cdot)$، نُعرِّف التشاكل الطبيعي $\pi : R \to R/I$ بالشكل التالي:

$$\pi(r) = r + I$$

ويسمى هذا التشاكل بالتشاكل الطبيعي.

مبرهنة التشاكل الاساسية في الحلقات

لتكن $f : (R, +, \cdot) \to (S, +, \cdot)$ تشاكل شامل بين حلقتين، فإن $(S, +, \cdot) \cong (R/\ker f, +, \cdot)$.

شكراً لحسن استماعكم