وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

طريقة التفاضل التربيعي لحل مسائل القيم الحدودية

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

عباس

إشراف

ا.د. عبدالستار جابر علي

2025 - 2024

المحتويات

الخلاصة Abstract

قدمنا في هذا البحث كيفية عمل طريقة التفاضل التربيعي و تطبيقات على معادلات تفاضلية مختلفة و لاحظنا ان النتائج متقاربة للحل المضبوط مما يعني ان طريقة التفاضل التربيعي طريقة جيدة في التطبيقات العملية و لكن يؤخذ عليها بعض الامور منها ، عدم استقرارية الحلول عند زيادة عدد نقاط (N) ، أيضاً لاحظنا من الامثلة بأن مقدار الخطأ يزداد مع زيادة قيمة N (اكثر من $N = 17$) بشكل خاص في عملها.

مقدمة Introduction

أغلب المسائل الهندسية محكومة بمجموعة من المعادلات التفاضلية الجزئية **(PDEs)** مع شروط حدودية ، على سبيل المثال تدفقات السوائل النيوتونية محكومة بمعادلات نيفر-ستوكس **(Navier-Stockes equations) [7]**. بشكل عام أنه من الصعب جداً علينا الحصول على الحل الدقيق (الحل الحقيقي) لهكذا معادلات. لذا من المهم أن نطور بعض الحلول العددية التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية.

في معظم الحالات الحل التقريبي يُقدم على شكل قيم دالية عند نقاط متقطعة **(discrete points)** أو نقاط الشبكة **(grid points)**. في هذه المرحلة قد يسأل أحدهم عن العلاقة التي تربط بين المشتقات في المعادلة التفاضلية الجزئية و القيم الدالية عند نقاط الشبكة يبدو أن هناك جسر يربط بينهم.

تقنية التقدير العددية **(numerical discretization technique)** هي الجسر المنشود، كثير من الحلول و الطرائق طُوِرت من الباحثين أبرزها الفروقات المحددة **(finite differences) [9]** و الحجومات المحددة **(finite volumes) [8]**.

أغلب المسائل العددية في الهندسة قد تُحل بواسطة هذه الطرائق و لكنها تتطلب عدد كبير من نقاط الشبكة بينما الحلول المطلوبة تكون عند عدد محدد من نقاط الشبكة.

في الجهة الأخرى ، في السعي نحو الحصول على طريقة تحقق حلول عددية دقيقة إلى حد كبير مع عدد قليل من نقاط الشبكة. قدم بلمان **(Bellman) [2]** سنة (1971 , 1972) طريقة التفاضل التربيعي **(differential quadrature method)**، حيث المشتقات الجزئية تُمثل على شكل مجموع خطي موزون لكل القيم الدالية عند كل نقاط الشبكة على طول ذلك الاتجاه. أن فكرة التفاضل التربيعي مستوحاة من فكرة التكامل التربيعي **(integral quadrature)**.

مفتاح طريقة **DQM** هي تحديد معاملان الوزن التي سوف تحدد دقة الطريقة، ان هذه الطريقة تستخدم عدد قليل من نقاط الشبكة للحصول على دقة عالية مقارنة مع الطرائق الاخرى مثل **(finite differences) [9]**.

هنا تم تطبيق طريقة التفاضل التربيعي لحل مسائل قيم حدودية متنوعة . و تم حساب مقدار الخطأ للحلول التقريبية التي حصلنا عليها . فكان مقدار الخطأ صغير مما يدل على دقة الطريقة . و ايضاً من خلال مقارنة حلول الطريقة مع الحل المضبوط وجدنا أن تقارب الطريقة جيد و الجداول و الرسومات للنتائج التي حصلنا عليها تبين ذلك.

الفصل الأول

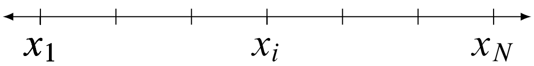
طريقة التفاضل التربيعي

1 - 1 مقدمة Introduction

في هذا الفصل سنوضح كيفية الحصول على الصيغ الأساسية لتقريب المشتقة الأولى و المشتقات من الرتب العليا بإستعمال طريقة التفاضيل التربيعي (DQM), بعد ذلك سوف نذكر الصيغ التي يمكن حساب معاملات الوزن من خلالها و دورها في تحديد دقة الحلول العددية.

2 - 1 صيغ التفاضل التربيعي Differential Quadrature Formulas

تتلخص فكرة عمل طريقة التفاضل التربيعي في تقريب المشتقات الجزئية (أو الاعتيادية) بواسطة مجموع الاوزان لمتغيرات الدالة المعطاة في كل نقاط الشبكة وضمن المجال المحدد لحساب قيم الدالة. لتكن الدالة $y = f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ حيث a, b ثوابت ولنفرض أن المنطقة قسمت إلى N من النقاط كما موضح في الشكل 1 - 1[1]



شكل 1 - 1: تقسيم الفترة $[a, b]$

لذلك يكون تقريب المشتقة الأولى و الثانية للدالة $f(x)$ عند النقطة x_i بالشكل

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} f(x_j) \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} f(x_j) \tag{1.2}$$

وبشكل عام

$$\left.\frac{d^ry}{dx^r}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(r)} f(x_j) \tag{1.3}$$

حيث $a_{ij}^{(r)}$ تمثل معاملات الوزن من الرتبة r^{th} وسنوضح في البند القادم كيف يتم حساب معاملات الوزن وبيان دورها في تحديد دقة الحلول الناتجة من استعمال طريقة التفاضل التربيعي.

3 - 1 معاملات الوزن من الرتبة الأولى Weight Coefficients of First Order

أن تحديد نقاط الشبكة و معاملات الوزن هما عاملان مهمان في تطبيق صيغ التفاضل التربيعي (1.3) وأن لمعاملات الوزن دوراً رئيسياً و مهماً في طريقة التفاضل التربيعي و تعد أحد مفاتيح هذه الطريقة لما لها من أهمية في التأثير على دقة الحلول العددية. الآن سوف نتطرق إلى طرق حساب معاملات الوزن من الرتبة الأولى

1 - 3 - 1 طريقة بيلمان الأولى [2] (Billman's First Approach)

في هذه الطريقة استخدم بيلمان دوال الاختبار التالية للحصول على معاملات الوزن

$$g_k(x) = x^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{1.4}$$

من الواضح أن معادلة (1.4) تعطي N من دوال الإختبار. معاملات الوزن $a_{ij}^{(1)}$ في (1.3) ، i و j تأخذ قيم من 1 إلى N وبالتالي مجموع معاملات الوزن هو $N \times N$. بتطبيق دوال الإختبار على نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ، نتيجة لذلك نحصل على $N \times N$ من المعادلات

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} = 0 \\
&\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} x_j = 1 \\
&\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(1)} x_j^k = k\, x_i^{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1
\end{aligned} \tag{1.5}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, N$. نظام المعادلات في (1.5) يملك حل وحيد لأن مصفوفة النظام تأخذ شكل **Vandermonde**. لسوء الحظ عندما تكون N كبيرة يصعب إيجاد حل لهذا النظام لهذا يتم إختيار قيم صغيرة إلى N (أقل من 13).

ملاحظة

لا توجد أي قيود على اختيار نقاط الشبكة x_i في طريقة بيلمان لحساب معاملات الوزن من الرتبة الأولى.

1 - 3 - 2 طريقة بيلمان الثانية [2] (Billman's Second Approach)

في هذه الطريقة أستخدم بيلمان دوال الإختبار التالية للحصول على معاملات الوزن

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k) L_N^{(1)}(x)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.6}$$

حيث $L_N(x)$ هي متعددة حدود ليجندر من الدرجة N و $L_N^{(1)}(x)$ هي المشتقة الأولى إلى $L_N(x)$. يتم في هذه الطريقة إختيار نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ لتكون جذور متعددة حدود ليجندر المُزاحة إلى الفترة [0, 1]. وبتطبيق دوال الإختبار في (1.6) على نقاط الشبكة. بيلمان توصل إلى أن صياغة جبرية بسيطة لحساب معاملات الوزن a_{ij}.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) L_N^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \\ a_{ii} &= \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

رغم هذه البساطة إلا أن هذه الطريقة لبست بمرونة الطريقة الأولى والسبب يعود إلى إختيار نقاط الشبكة $x_1, x_2, \ldots, x_N$ حيث لا نستطيع تحديدها بشكل إختياري ، بدلاً من ذلك يتم اختيارها كجذور متعددة حدود ليجندر من الدرجة N. لهذا السبب فإن الطريقة الأولى تُفَضّل في التطبيقات العملية.

ملاحظة

أن متعددات حدود ليجندر المُزاحة إلى الفترة [0, 1] تعطى بالصيغة

$$L_N^*(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^{N+k} \frac{(N+k)!}{(N-k)!(k!)^2} x^k$$

أول خمس متعددات حدود ليجندر هي

$$\begin{aligned} L_0^*(x) &= 1 \\ L_1^*(x) &= 2x - 1 \\ L_2^*(x) &= 6x^2 - 6x + 1 \\ L_3^*(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 \\ L_4^*(x) &= 70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1 \end{aligned}$$

1 - 3 - 3 طريقة كوان و جانك [3] (Quan & Chang's Approach)

لتطوير طُرق بيلمان في حساب معاملات الوزن ، العديد من المحاولات تمت بواسطة العديد من الباحثين. واحدة من أكثر الطرق فائدة هي الطريقة المقدمة من الباحثين كوان و جانك. حيث استعملا متعددات حدود لاكرانج كدوال إختيار

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x-x_k)M^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.8}$$

حيث

$$M(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N)$$
$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k\neq i}^{N} (x_i - x_k)$$

وبتطبيق هذه الدوال على N من نقاط الشبكة ، نحصل على الصيغ الجبرية لحساب معاملات الوزن $a_{ij}^{(1)}$.

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1, k\neq i,j}^{N} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}, \quad i \neq j \\ a_{ii}^{(1)} &= \sum_{k=1, k\neq i}^{N} \frac{1}{x_i - x_k} \end{aligned} \tag{1.9}$$

ومن المهم معرفة أنه لا توجد أية قيود على اختيار نقاط الشبكة في هذه الطريقة

ملاحظة

طريقة كوان و جانك مكافئة لطريقة بيلمان الأولى لهذا هنا أيضاً لا توجد قيود في اختيار نقاط الشبكة x_i.

1 - 4 معاملات الوزن من الرتبة الثانية Weight Coefficients of Second Order

في هذا البند سوف نتعرف على طرق حساب معاملات الوزن من الرتبة الثانية حيث

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} f(x_j) \tag{1.10}$$

حيث $a_{ij}^{(2)}$ هي معاملات الوزن من الرتبة الثانية.

1 - 4 - 1 طريقة شو العامة [1] (Shu's General Approach)

بإستخدام تقريب متعددات الحدود و فضاء المتجهات توصل شو إلى صياغة لمعاملات الوزن من الرتبة الثانية ، كما يلي

$$a_{ij}^{(2)} = 2a_{ij}^{(1)}\left(a_{ii}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j}\right), \quad i \neq j \tag{1.11}$$

حيث نلاحظ من (1.11) إذا كانت $i \neq j$ فإن $a_{ij}^{(2)}$ يمكن أن تحسب بسهولة. يمكن تطبيق نظام المعادلات في (1.5) لـــ $k = 1$ ، نحصل على

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} = 0 \Longrightarrow a_{ii}^{(2)} = -\sum_{j=1, i\neq j}^{N} a_{ij}^{(2)}$$

2 - 4 - 1 طريقة ضرب المصفوفات [1] (Matrix Multiplication Method)

من تعريف المؤثر التفاضلي لدينا

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

بتطبيق طريقة التفاضل التربيعي على الطرفين ، نحصل على

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(2)} \cdot f(x_j) &= \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^{N} a_{kj}^{(1)} \cdot f(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot a_{kj}^{(1)}\right] \cdot f(x_j)
\end{aligned}$$

وبمقارنة الطرفين نحصل على

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^{(1)} \cdot a_{kj}^{(1)} \tag{1.12}$$

وبلغة المصفوفات هذا يعني

$$[a_{ij}^{(2)}] = [a_{ij}^{(1)}] \times [a_{ij}^{(1)}] \tag{1.13}$$

ملاحظة

يُفضل استخدام طريقة شو العامة لأنها تتطلب عمليات حسابية أقل من طريقة ضرب المصفوفات

1 - 5 اختيار نقاط الشبكة Choice of Grid Points

أن اختيار نقاط الشبكة واحد من العوامل المهمة التي تؤثر على دقة التقريبات الناتجة من استعمال طريقة التفاضل التربيعي. لذلك ركز العديد من الباحثين منهم **شو (Shu)** على كيفية دراسة تأثير نقاط الشبكة على دقة الحلول في هذه الطريقة. ولكن حين يمكننا التحكم بنقاط الشبكة ففي طريقة بيلمان الثانية لا يمكننا ذلك.

1 - 5 - 1 النقاط متساوية الأبعاد (Equally Spaced Grid Points)

$$x_i = a + \frac{b-a}{N-1}(i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.14}$$

هذا النوع من النقاط كان قيد الإستعمال من قبل الكثير من الباحثين لبساطتها وملائمتها في حل الكثير من المسائل

1 - 5 - 2 نقاط شيبيشيف-كاوس-لوباتو (Chebyshev-Gauss-Lobatto Points)

ويطلق عليها اختصاراً **نقاط لوباتو (Lobatto Points)**

$$x_i = a + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right](b-a), \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.15}$$

وتسمى في بعض الأحيان النقاط غير متساوية الأبعاد (Unequally Spaced Points). وقد أثبت العديد من الباحثين بأن هذا النوع من النقاط يعطي نتائج أكثر دقة من النقاط متساوية الأبعاد.

الفصل الثانـي

امثلة عدديـة

2 - 1 مقدمة Introduction

بعد أن بينّا في الفصل الأول كيفية الحصول على معاملات الوزن والفرق بين الطُرق الثلاثة وأيضاً بينّا طرق اختيار نقاط الشبكة. سوف نقوم في الفصل الثاني بحل معادلات جزئية أحادية البعد التي تكون بالصيغة

$$u_t = F(u, x, t, u_x, u_{xx}) \tag{2.1}$$

مع الشرط الإبتدائي $u(x,0) = g(x)$.

و في هذا الفصل سوف نرمز إلى معاملات الوزن من الرتبة الأولى بالرمز a_{ij}.

مثال 2 - 1

بإستخدام طريقة التفاضل التربيعي حل المعادلة

$$u_t = x^2 + \frac{1}{4}u_x^2, \quad u(x,0) = 0 \tag{2.2}$$

الحل

نقوم بتطبيق التفاضل التربيعي على المشتقة بالنسبة الى x. حيث

$$u_x(x_i,t) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}u(x_j,t)$$

نعوض في(2.2) نحصل على

$$u_t(x_i,t) = x_i^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u(x_j,t)\right]^2, i = 1,2,\ldots,N \tag{2.3}$$

لنأخذ $N = 3$ ونقاط الشبكة المتساوية المسافة $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1$. بإستخدام صيغ كوان و جانك (1.9) لايجاد معاملات الوزن a_{ij} نجد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

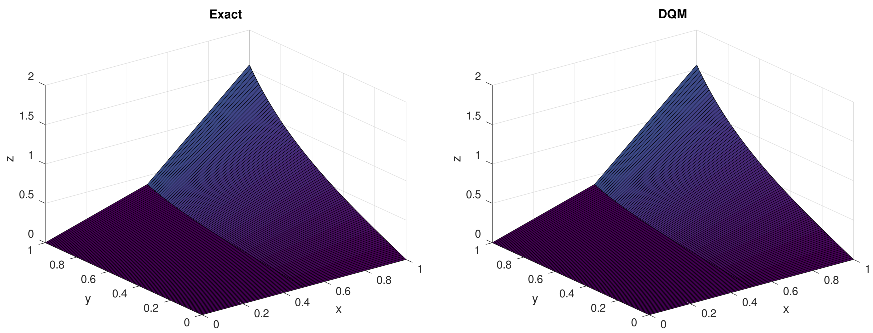
الآن يمكن كتابة المعادلة (2.3) على الشكل

$$\begin{bmatrix} u_t(0,t) \\ u_t(0.5,t) \\ u_t(1,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0,t) \\ u(0.5,t) \\ u(1,t) \end{bmatrix} \right\}^2$$

وهذا نظام من المعادلات التفاضلية الاعتيادية غير الخطية يمكن حلها بطريقة رانج كتا من الدرجة الرابعة **(RK4)** والنتائج ظاهرة في الجدول 2 - 1 بالمقارنة مع الحل الحقيقي $u(x,t) = x^2 \tan(t)$

t	x_i	DQM	Exact	Error
0.1	x_1	0.0000	0.0000	0.0000
	x_2	0.0251	0.0251	2.0752×10^{-8}
	x_3	0.1003	0.1003	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	0.0000	0.0000	0.0000
	x_2	0.0025	0.0025	2.0833×10^{-13}
	x_3	0.0100	0.0100	8.3330×10^{-13}

Table 2 - 1: $N = 3$



(a) Exact (b) DQM

Figure 2 - 1: $N = 3$ for the equation $u_t = x^2 + \frac{1}{4}u_t^2$

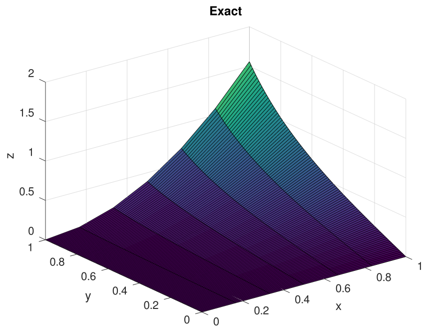
الآن نأخذ $N = 7$. نحسب معاملات الوزن من (1.9)

$$\begin{bmatrix} -14.7 & 36 & -45 & 40 & -22.5 & 7.2 & -1 \\ -1 & -7.7 & 15 & -10 & 5 & -1.5 & 0.2 \\ 0.2 & -2.4 & -3.5 & 8 & -3 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 & -4.5 & -2.6645e-15 & 4.5 & -0.9 & 0.1 \\ 0.1 & -0.8 & 3 & -8 & 3.5 & 2.4 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 & -5 & 10 & -15 & 7.7 & 1 \\ 1 & -7.2 & 22.5 & -40 & 45 & -36 & 14.7 \end{bmatrix}$$

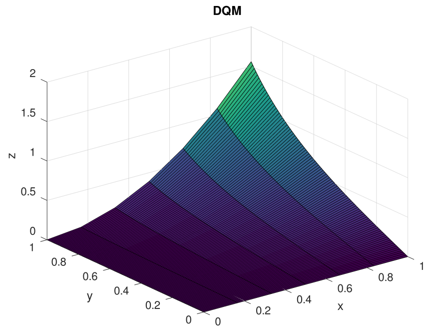
نعوض في (2.3) ونكمل الحل بواسطة **(RK4)** ينتج الحل في الجدول 2 - 2.

t	x_i	DQM	Exact	Error
0.1	x_1	4.7266×10^{-34}	0.0000	4.7266×10^{-34}
	x_2	0.0028	0.0028	2.3058×10^{-9}
	x_3	0.0111	0.0111	9.2230×10^{-9}
	x_4	0.0251	0.0251	2.0752×10^{-8}
	x_5	0.0446	0.0446	3.6892×10^{-8}
	x_6	0.0697	0.0697	5.7644×10^{-8}
	x_7	0.1003	0.1003	8.3007×10^{-8}
0.01	x_1	9.2911×10^{-37}	0.0000	9.2911×10^{-37}
	x_2	0.0003	0.0003	2.3147×10^{-14}
	x_3	0.0011	0.0011	9.2589×10^{-14}
	x_4	0.0025	0.0025	2.0833×10^{-13}
	x_5	0.0044	0.0044	3.7036×10^{-13}
	x_6	0.0069	0.0069	5.7868×10^{-13}
	x_7	0.0100	0.0100	8.3330×10^{-13}

Table 2 - 2: $N = 7$



(a) Exact



(b) DQM

Figure 2 - 2: $N = 7$ for the equation $u_t = x^2 + \frac{1}{4}u_t^2$

مثال 2 - 2

جد حل المعادلة باستخدام طريقة التفاضل التربيعي

$$u_t + uu_x = x, \quad u(x,0) = 2 \tag{2.4}$$

الحل

نقوم باعادة ترتيب المعادلة ونعوض التفاضل التربيعي للمشتقة بالنسبة الى x في (2.4) نحصل على

$$u_t(x_i,t) = -u(x_i,t)\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u(x_j,t) + x_i, \quad i = 1\ldots,N \tag{2.5}$$

لنأخذ $N = 5$ وبواسطة (1.9) نحسب معاملات الوزن

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} -8.3333 & 16 & -12 & 5.3333 & -1 \\ -1 & -3.3333 & 6 & -2 & 0.33333 \\ 0.33333 & -2.6667 & 0 & 2.6667 & -0.33333 \\ -0.33333 & 2 & -6 & 3.3333 & 1 \\ 1 & -5.3333 & 12 & -16 & 8.3333 \end{bmatrix}$$

بطريقة مماثلة في المثال الاول. نعوض معاملات الوزن في (2.5) وينتج نظام من المعادلات التفاضلية غير الخطية نحلها بطريقة RK4 ينتج الحل في الجدول 2 - 3. الآن لهدف المقارنة نأخذ $N = 7$

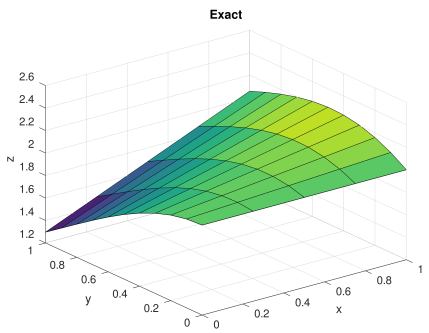
t	x_i	DQM	Exact	Error
0.1	x_1	1.9900	1.9900	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.0150	2.0150	3.9086×10^{-8}
	x_3	2.0399	2.0399	6.0004×10^{-8}
	x_4	2.0648	2.0648	8.0922×10^{-8}
	x_5	2.0897	2.0897	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.9999	1.9999	1.7986×10^{-14}
	x_2	2.0024	2.0024	2.2604×10^{-13}
	x_3	2.0049	2.0049	4.3476×10^{-13}
	x_4	2.0074	2.0074	6.4304×10^{-13}
	x_5	2.0099	2.0099	8.5132×10^{-13}

Table 2 - 3: $N = 5$

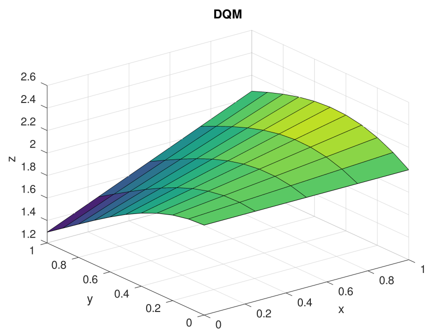
ونحسب معاملات الوزن

$$\begin{bmatrix} -14.7 & 36 & -45 & 40 & -22.5 & 7.2 & -1 \\ -1 & -7.7 & 15 & -10 & 5 & -1.5 & 0.2 \\ 0.2 & -2.4 & -3.5 & 8 & -3 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 & -4.5 & -2.6645e-15 & 4.5 & -0.9 & 0.1 \\ 0.1 & -0.8 & 3 & -8 & 3.5 & 2.4 & -0.2 \\ -0.2 & 1.5 & -5 & 10 & -15 & 7.7 & 1 \\ 1 & -7.2 & 22.5 & -40 & 45 & -36 & 14.7 \end{bmatrix}$$

ونحصل على الحل في الجدول 2 - 4



(a) Exact

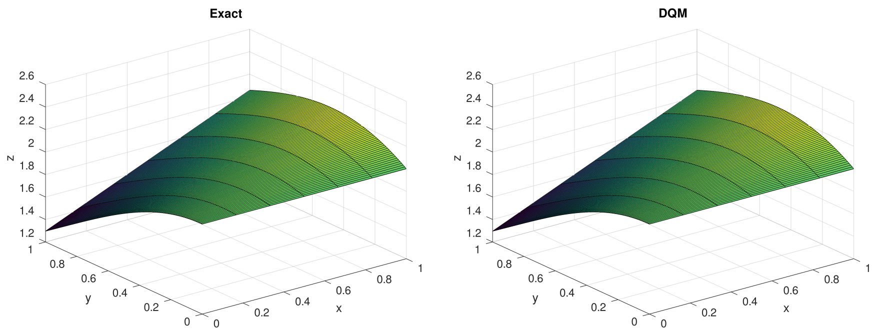


(b) DQM

Figure 2 - 3: $N = 5$ for the equation $u_t + uu_x = x$

t	x_i	DQM	Exact	Error
0.1	x_1	1.9900	1.9900	1.8168×10^{-8}
	x_2	2.0067	2.0067	3.2114×10^{-8}
	x_3	2.0233	2.0233	4.6059×10^{-8}
	x_4	2.0399	2.0399	6.0004×10^{-8}
	x_5	2.0565	2.0565	7.3950×10^{-8}
	x_6	2.0731	2.0731	8.7895×10^{-8}
	x_7	2.0897	2.0897	1.0184×10^{-7}
0.01	x_1	1.9999	1.9999	1.7097×10^{-14}
	x_2	2.0016	2.0016	1.5721×10^{-13}
	x_3	2.0032	2.0032	2.9576×10^{-13}
	x_4	2.0049	2.0049	4.3476×10^{-13}
	x_5	2.0066	2.0066	5.7332×10^{-13}
	x_6	2.0082	2.0082	7.1232×10^{-13}
	x_7	2.0099	2.0099	8.5043×10^{-13}

Table 2 - 4: $N = 7$



(a) Exact (b) DQM

Figure 2 - 4: $N = 7$ for the equation $u_t + uu_x = x$

توصيات Recommendations

بشكل عام طريقة التفاضل التربيعي جيدة في التطبيقات كما شاهدنا في الفصل الثاني ولكن نقدم التوصيات الآتية لمساعدة الباحثين على اتخاذ القرارات الصحيحة و الملائمة

1. إذا كان مجال التطبيق يتطلب بيانات كثيرة و توجد طريقة أخرى مختلفة عن التفاضل التربيعي يجب مقارنة الطريقتين لنرى أي منهما أكثر كفاءة.
2. كما شاهدنا في معادلة الحرارة فإن النتائج أقل دقة من نظيرها في المعادلات من الرتبة الأولى ، أي لا ينصح استخدام التفاضل التربيعي في المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية و أعلى.
3. كذلك لا ينصح بأخذ كميات كبيرة لقيمة x حيث نتوقع أن الخطأ سوف يزداد و بالتالي تقل دقة الطريقة.
4. لا ينصح بأخذ مقادير ضخمة لــ N حيث أن الطريقة لا تتحمل هذا القدر من البيانات ومن الممكن عدم الحصول على نتيجة أو أن تكون النتائج غير دقيقة تماماً و بعيدة كل البعد عن الواقع.

المصادر

[1] Chang Shu, *Differential Quadrature and its Applications in Engineering*, Springer, 1999.

[2] Bellman RE and Casti J, *Differential quadrature: a technique for the rapid solution of non-linear partial differential equations*, J Comput Phys, 1972.

[3] Quan JR and Chang CT, *New insights in solving distributed system of equations by the quadrature methods*, Comput Chem Engrg, 1989.

[4] Bert CW and Malik M, *Differential quadrature: a powerful new technique for analysis of composite structures*, Compos Struct, 1997.

[5] Chang CT, Tsai CS, and Lin TT, *The modified differential quadratures and their applications*, Chem Eng Comman, 1993.

[6] Bellman RE and Roth RS, *Methods in approximation: techniques for mathematical modelling*, D Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1986.

[7] V. Girault and P.A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*, Springer Series in Computational Mathematics, 1986.

[8] LeVeque and Randall, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, 2002.

[9] Smith GD, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: finite difference methods*, Oxford University Press, 1985.