وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

دراسة الدوال غير المستمرة

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة
فاطمة محسن

إشراف
ا.د. هاشم عبدالخالق كشكول

2025 - 2024

المحتويات

الفصل الأول

مفاهيم اساسية

1 - 1 العلاقات والدوال

تعريف 1 - 1 - 1

اي مجموعة من الازواج المرتبة تسمى علاقة

ملاحظة

اذا كانت S علاقة. فإن مجموعة كل العناصر التي تكن في المسقط الاول تسمى بالمجال. ومجموعة كل العناصر التي تكون في المسقط الثاني تسمى بالمدى.

تعريف 1 - 1 - 2

الدالة F هي مجموعة الازواج المرتبة (x, y) بحيث لا يوجد زوجين مرتبين بنفس المسقط الاول. اي ان اذا كان $(x, y) \in F$ و $(x, z) \in F$ فإن $y = z$.

ملاحظة

تعريف الدالة يتطلب ان كل عنصر من المجال مثل x يجب ان يوجد عنصر واحد فقط مثل y بحيث $(x, y) \in F$.

نسمي y قيمة الدالة F عند x ونكتب

$$y = F(x)$$

مثال 1 - 1 - 1

كل مما يأتي يمثل دالة على $\mathbb{R}$

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sin \sqrt{x^2 - 1}\}$

ولكن المجموعات التالية لا تمثل دالة على $\mathbb{R}$

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 10\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = \cos y\}$

لان $(1, 3), (1, -3) \in A$ و $(1, 0), (1, 2\pi) \in B$

1 - 2 الغاية و الاستمرارية

تعريف 1 - 2 - 1

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a,b). نفرض ان $c \in (a,b)$ اذا كان $f(x) \to A$ عندما $x \to c$ من خلال قيم اكبر من c نقول ان A هي غاية اليمين للدالة f عند c ونكتب

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = A$$

نرمز لغاية اليمين بالرمز $f(c^+)$. بشكل ادق لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(c^+)| < \epsilon, \quad \text{if } c < x < c + \delta < b$$

ملاحظة

غاية اليسار تعرف بشكل مشابه اذا كانت $c \in (a,b)$ فإن غاية اليسار تعرف بالشكل

$$f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) = B$$

حيث x تاخذ قيم اصغر من c.

تعريف 1 - 2 - 2

اذا كانت الدالة f معرفة عند c وكان $f(c^+) = f(c)$ نقول ان f مستمرة من اليمين عند c

مثال 1 - 2 - 1

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ تكون مستمرة من اليمين عند $x = 0$ لأن

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

تعريف 1 - 2 - 3

اذا كانت الدالة f معرفة عند c وكان $f(c^-) = f(c)$ نقول ان f مستمرة من اليسار عند c

مثال

الدالة $f(x) = \sqrt{-x}$ تكون مستمرة من اليسار عند $x = 0$ لان

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0 = f(0)$$

تعريف 1 - 2 - 4

اذا كانت $a < c < b$. فإننا نقول ان f دالة مستمرة عند $x = c$ اذا وفقط اذا كان

$$f(c) = f(c^{+}) = f(c^{-})$$

اي تكون للدالة غاية من اليمين واليسار عند c وكذلك تكون الدالة معرفة عند c.

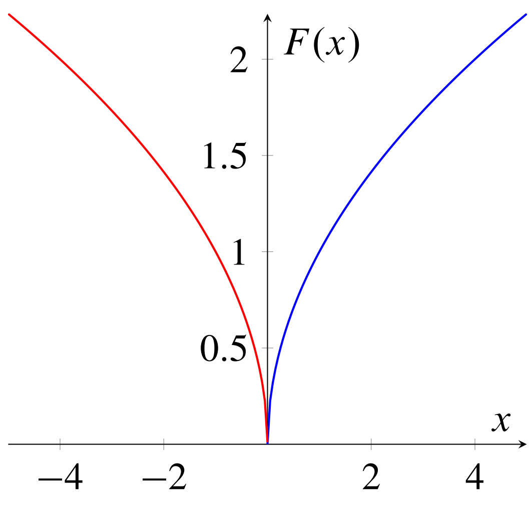
مثال 1 - 2 - 2

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غير مستمرة عند $x = 0$ لان غاية اليسار غير موجودة وكذلك الدالة $g(x) = -\sqrt{x}$ غير مستمرة عند $x = 0$ لان غاية اليمين غير موجودة. ولكن الدالة المعرفة بالشكل

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & x < 0 \end{cases}$$

تكون مستمرة عند $x = 0$ لان

$$f(0^{+}) = f(0^{-}) = 0 = f(0)$$



1 - 3 المشتقة

تعريف 1 - 3 - 1

لتكن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة (a,b) ولتكن $c \in (a,b)$ فإن f تكون قابلة للاشتقاق عند c اذا كانت الغاية

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة. وتسمى المشتقة للدالة f عند c.

مبرهنة 1 - 3 - 1

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند c فإنها تكون مستمرة عند c.

ملاحظة

عكس المبرهنة السابقة ليس بالضرورة ان يكون صحيح.

مثال 1 - 3 - 1

لنأخذ الدالة $f(x) = |x|$ التي تكون مستمرة لكل $x \in \mathbb{R}$ بالخصوص عند $x = 0$ ولكن

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

هذه الغاية غير موجودة لأن

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

ملاحظة

عندما تكون الدالة f غير مستمرة عند النقطة c فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند c.

1 - 4 التقارب للدوال

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ونفرض ان لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد دالة $f_n : A \to \mathbb{R}$ سوف نقول ان (f_n) متتابعة من الدوال على A.

تعريف 1 - 4 - 1 [التقارب النقطي]

لتكن (f_n) متتابعة من الدوال على $A \subseteq \mathbb{R}$. لتكن $A_0 \subseteq A$ ولتكن $f : A_0 \to \mathbb{R}$. نقول ان المتتابعة (f_n) تتقارب نقطياً الى الدالة f اذا كان لكل $x \in A_0$ فإن المتتابعة $f_n(x)$ تتقارب الى $f(x)$.

مثال 1 - 4 - 1

لتكن لدينا المتتابعة من الدوال

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

ولتكن $f(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$. نلاحظ ان لكل $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 = f(x)$$

مثال 1 - 4 - 2

لتكن لدينا المتتابعة

$$g_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

ولتكن $g(x) = x$. فإن لكل $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + nx}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} + x = x = g(x)$$

تعريف 1 - 4 - 2 [التقارب المنتظم]

متتابعة من الدوال (f_n) على $A \subseteq \mathbb{R}$ تقترب بشكل منتظم الى الدالة $f : A_0 \to \mathbb{R}$ اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $K(\epsilon)$ بحيث اذا كان $n \geq K(\epsilon)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad x \in A_0 \text{ لكل}$$

ملاحظة

التقارب المنتظم يحافظ على استمرارية الدالة. اي اذا كانت لدينا متتابعة من الدوال المستمرة فإن التقارب المنتظم لها هو دالة مستمرة.

الفصل الثاني

الدوال غير المستمرة

2 - 1 نقاط عدم الاستمرارية

تعريف 2 - 1 - 1

نقول ان $x = c$ هي نقطة عدم استمرارية اذا كانت f غير مستمرة عند c

ملاحظة

في هذه الحالة واحدة من الحالات الاتية متحقق

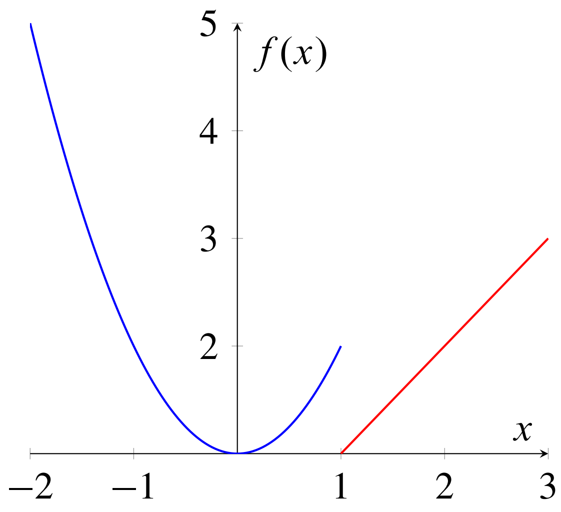
1. اما $f(c^+)$ او $f(c^-)$ غير موجودة.
2. كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجود ولكن لهما قيم مختلفة اي ان $f(c^+) \neq f(c^-)$
3. كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجودة ولكن $f(c^+) = f(c^-) \neq f(c)$.

امثلة على الحالات الثلاثة

1. الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ معرفة على الفترة $[0, \infty]$ اي ان $f(0-)$ غير موجودة وبالتالي $x = 0$ هي نقطة عدم استمرارية
2. الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

غير مستمرة عند $x = 1$ لان $f(1^+) = 1 \neq 2 = f(1^-)$

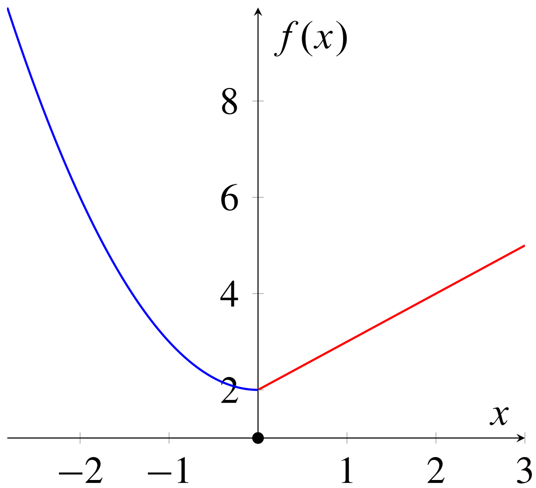


شكل 2 - 1: Plot of $f(x)$

3. الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x+2 & x > 0 \\ x^2+2 & x < 0 \end{cases}$$

غير مستمرة عند $x = -1$ لان $f(0) = 1$ ولكن $f(0^+) = 2 = f(0^-)$



شكل 2 - 2: Plot of $f(x)$

تعريف 2 - 1 - 2

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ و $c \in [a,b]$ فإن c تكون نقطة عدم استمرارية قابلة للحذف اذا كان $f(c^+) = f(c^-) \neq f(c)$. ويتم حذف عدم الاستمرارية بإعادة تعريف الدالة f عند c حيث يكون $f(c^+) = f(c^-) = f(c)$.

تعريف 2 - 1 - 3

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ فإن c تكون نقطة عدم استمرارية غير قابلة للحذف اذا كانت $f(c^+)$ غير موجودة او $f(c^-)$ غير موجودة او $f(c^+) \neq f(c^-)$

تعريف 2 - 1 - 4

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ اذا كانت كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجودة على نقطة داخلية مثل c فإن:

1. $f(c) - f(c^-)$ تسمى بالقفزة من اليسار

2. $f(c^+) - f(c)$ تسمى بالقفزة من اليمين
3. $f(c^+) - f(c^-)$ تسمى بالقفزة

اذا كانت واحدة من القيم الثلاثة اعلاه لاتساوي صفراً. فإن c تسمى نقطة عدم استمرارية قفزية Jump Discontinuty

ملاحظة

بالنسبة لنهايتي الفترة a, b فقط القفزة من جهو واحدة تأخذ بعين الاعتبار. بالنسبة الى a ناخذ $f(a^+) - f(a)$ وبالنسبة الى b ناخذ $f(b) - f(b^-)$

تعريف 2 - 1 - 5

تكون الدالة $f(x)$ تمتلك عدم استمرارية اساسية essential discontinuty عند $x = c$ اذا كانت الغاية $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة. وعلى الاقل واحدة من الغايات اليمينية او اليسارية ايضاً غير موجودة (ربما كليهما).

الآن نلخص انواع عدم الاستمرارية

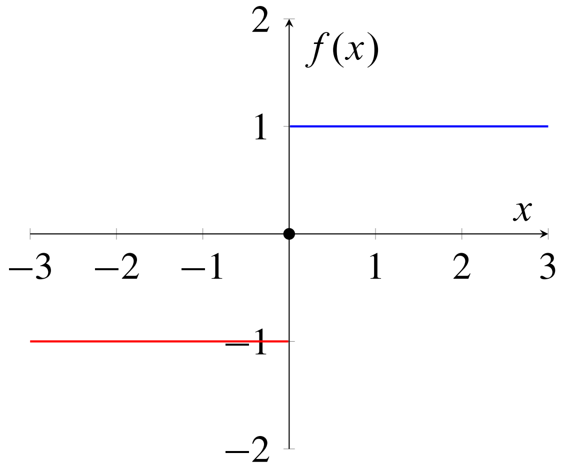
1. عدم الاستمرارية قابلة للحذف removable discontinuty.
2. عدم الاستمرارية غير قابلة للحذف non-romvable discontinuty.
3. عدم الاستمرارية القفزية jump discontinuty.
4. عدم الاستمرارية الاساسية essential discontinuty.

الآن نأخذ بعض الامثلة لنغطي على جميع الانواع.

مثال 2 - 1 - 1

الدالة $f(x) = x/|x|$ تمتلك عدم استمرارية قفزية عند $x = 0$ لان

$$f(0^+) = 1, \quad f(0^-) = -1$$



شكل 2 - 3: Plot of $f(x) = x/|x|$

مثال 2 - 1 - 2

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية قابلة للحذف عند $x = 0$ لان

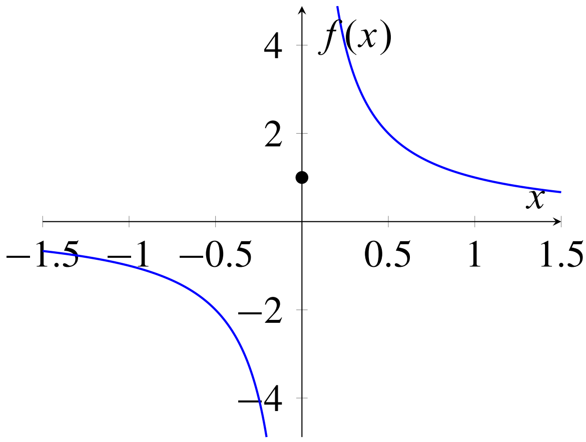
$$\begin{aligned} &f(0) = 0 \\ &f(0^+) = f(0^-) = 1 \end{aligned}$$

مثال 2 - 1 - 3

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية غير قابلة للحذف عند $x = 0$ لان $f(c^-), f(c^+)$ غير موجودة



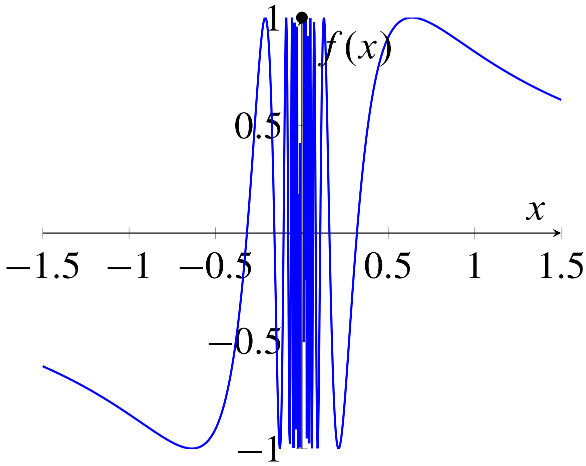
شكل 2 - 4: Plot of $f(x) = 1/x$ for $x \neq 0$

مثال 2 - 1 - 4

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية غير قابلة للحذف عند $x = 0$ لان $f(0^-), f(0^+)$ غير موجودة (لان كلما كان قيمة x تقترب من الصفر سواء من اليمين او من اليسار فإن قيمة الدالة f تتناوب بين -1 و 1 وكما موضح في الشكل 2 - 5)



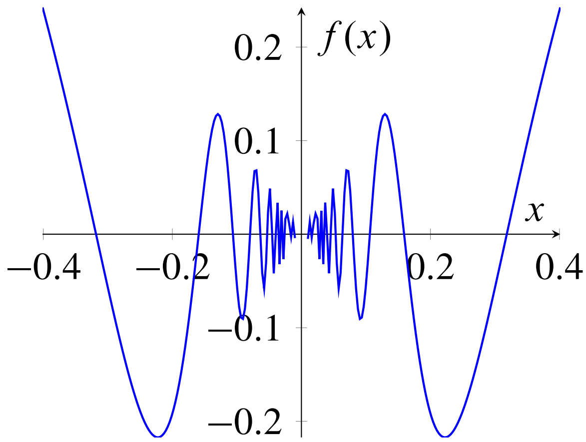
شكل 2 - 5: Plot of $f(x) = \sin(1/x)$ for $x \neq 0$

مثال 2 - 1 - 5

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية قابلة للحذف لان $f(0-) = f(0+) = 0$ و $f(0) = 1$



شكل 2 - 6: Plot of $f(x) = x\sin(1/x)$ for $x \neq 0$

مثال 2 - 1 - 6

الدالة $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ تمتلك عدم استمرارية اساسية عند $x = 0$ لأن الغايات

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$

غير موجودة ولكن

$$\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

2 - 2 المشتقات عند الدوال غير المستمرة

لدراسة الدوال غير المستمرة في الاشتقاق. نقدم مفهوم المشتقة من اتجاه واحد و المشتقة اللا نهائية.

تعريف 2 - 2 - 1

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ نقول ان f تمتلك مشتقة يمينية عند c اذا كانت الغاية

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة كقيمة نهائية او ان الغاية هي $+\infty$ او $-\infty$ و نرمز لها بالرمز $f'_+(x)$. المشتقة اليسارية تعرف بنفس الاسلوب

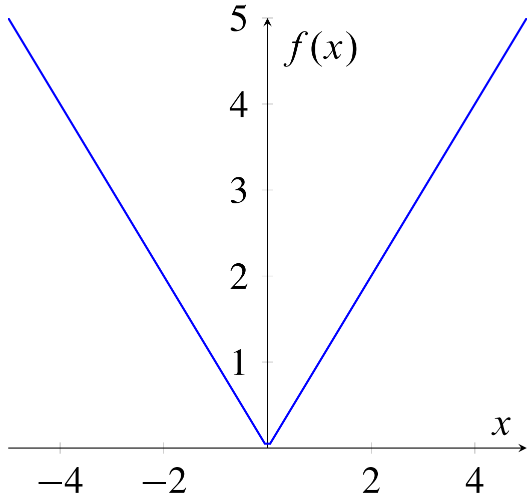
$$f'_-(c) := \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

مثال 2 - 2 - 1

لتكن الدالة $f(x) = |x|$، رأينا في المثال 1 - 3 - 1 ان الدالة لا تمتلك مشتقة عند $x = 0$ ولكن

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



شكل 2 - 7: $f(x) = |x|$

مثال 2 - 2 - 2

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & x \leq 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

الدالة غير مستمرة عند $x = 2$ لأن

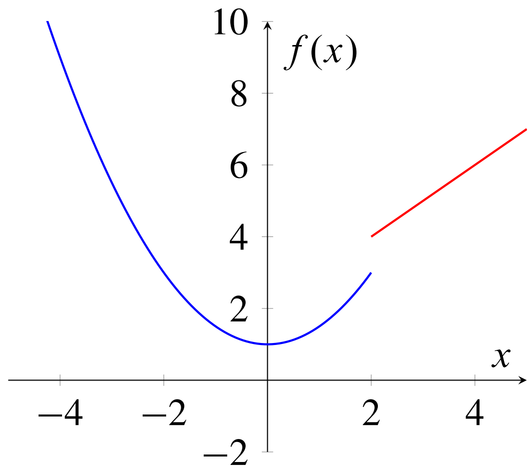
$$f(2^+) = 4 \neq 2 = f(2^-)$$

ولكن

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{x + 2 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 1}{x - 2} = -\infty \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{\frac{1}{2}(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{2}(x + 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$



شكل 2 - 8: Plot of $f(x)$

2 - 3 الاستمرارية بالاجزاء

تعريف 2 - 3 - 1

نقول ان الدالة $f(x)$ مستمرة بالاجزاء على الفترة المغلقة $[a,b]$ اذا كانت مستمرة عند عدد منتهِ من نقاط عدم الاستمرارية القفزية

مثال 2 - 3 - 1

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 1-x & 1 \le x \le 2 \\ 1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

ملاحظة

ليس مطلوب ان تكون الدالة $f(x)$ معرفة عند نقاط عدم الاستمرارية القفزية. لنفر ض ان $a_1, \dots, a_n$ مواقع عد الاستمرارية القفزية للدالة f في الفترة $[a,b]$ ونفرض ان $a_i < a_{i+1}$ لكل i، على الفترة (a_i, a_{i+1}) يمكننا جعل $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a_i, a_{i+1}]$ من خلال تعريف

$$f(a_i) = \lim_{x\to a_i^+} f(x), \quad f(a_{i+1}) = \lim_{x\to a_{i+1}^-} f(x)$$

ولأن الدالة المستمرة على الفترة المغلقة تكون مقيدة لدينا المبرهنة التالية

مبرهنة 2 - 3 - 1

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a, b]$ فإن $f(x)$ تكون مقيدة.

2 - 4 تكامل الدوال المستمرة بالاجزاء

تعريف 2 - 4 - 1

اذا كانت $f(x)$ مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a, b]$ ونقاط عدم الاستمرارية عند $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$، لتكن $a = a_0, b = a_{k+1}$. كما لاحظنا فإننا من الممكن جعل الدالة f مستمرة على $[a_i, a_{i+1}]$ وبالتالي من الممكن تعريف التكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a, b]$ كما يلي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$$

مثال 2 - 4 - 1

نجد التكامل للدالة $f(x)$ المعرفة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

على الفترة $[0, t]$ حيث $t \in [0, \infty)$. لدينا احتمالان هنا:

1. اذا كان $t \in [0, 1)$ فإن

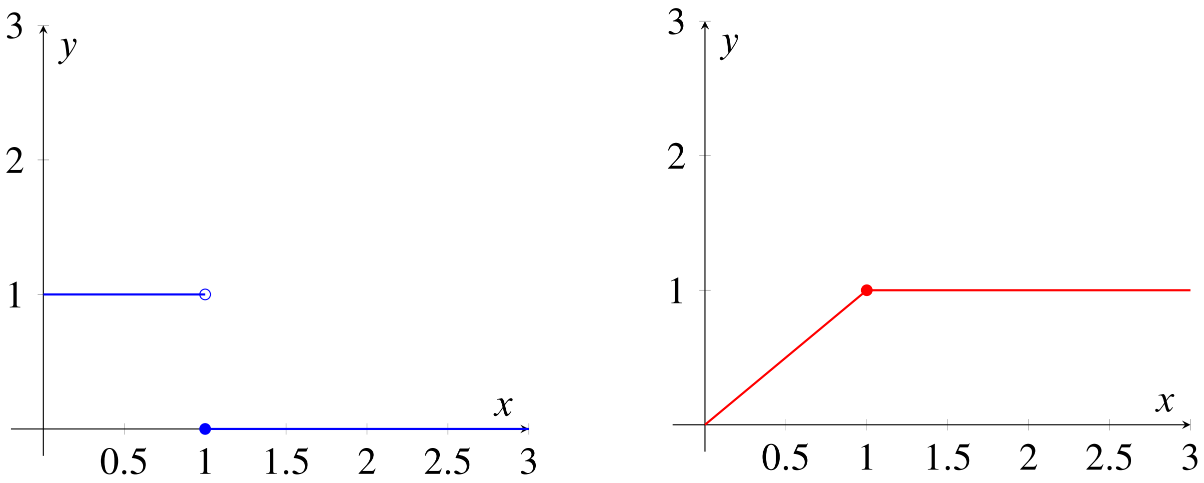
$$\int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t 1\,dx = t$$

2. اذا كان $t \in [1, \infty)$ فإن

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^t f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 1\,dx + \int_1^t 0\,dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

اذن

$$\int_0^t f(x)\,dx = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t < \infty \end{cases}$$



(a) plot of $f(x)$ (b) plot of $\int_0^t f(x)\,dx$

ملاحظة

نلاحظ ان الدالة $\int_0^x f(u)\,du$ مستمرة على الرغم من كون الدالة $f(x)$ دالة غير مستمرة. و هذا دائماً صحيح مادام ان الدالة $f(x)$ تمتلك عدد منتهٍ من نقاط عدم الاستمرارية القفزية.

مبرهنة 2 - 4 - 1

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a,b]$ وأن $c, t \in [a,b]$. فإن التكامل $\int_c^t f(x)\,dx$ دالة مستمرة للمتغير t.

البرهان

لتكن

$$F(t) = \int_c^t f(x)\,dx$$

بما ان $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على $[a,b]$ اذن هي مقيدة. لنفرض $|f(x)| \le B$ لبعض $B > 0$. نفرض $\epsilon > 0$. فإن

$$|F(t+\epsilon) - F(t)| \le \int_t^{t+\epsilon} |f(x)|\,dx \le \int_t^{t+\epsilon} B\,dx = B\epsilon$$

اذن $F(t) = F(t + \epsilon)$ $\lim_{\epsilon \to 0}$ ومنه $F(t^+) = F(t)$ بطريقة مماثلة $F(t^-) = F(t)$ وهذا يثبت استمرارية $F(t)$

2 - 5 التقارب للدوال غير المستمرة

سوف نناقش بعض الامثلة لدوال مستمرة تقترب بشكل نقطي الى دالة غير مستمرة. ومثال على متتابعة على من الدوال غير المستمرة تقترب نقطياً الى دالة مستمرة

مثال 2 - 5 - 1

لتكن لدينا المتتابعة من الدوال المستمرة $f_n(x) = x^n$. نلاحظ اذا كان $x = 1$ فإن

$$\lim_{n \to \infty} f_n(1) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

بينما اذا كان $0 < x < 1$ فإن

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$$

اي ان

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

وهذه الدالة غير مستمرة عند $x = 1$.

مثال 2 - 5 - 2

لنأخذ المتتابعة من الدوال غير المستمرة

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

هذه الدالة غير مستمرة لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكن نلاحظ ان اذا كان $x \in \mathbb{Q}$ فإن $f_n(x) = 0 \to 0$ و اذا كان $x \notin \mathbb{Q}$ فإن

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{as } x \to \infty$$

اي ان المتتابعة تتقارب بشكل نقطي الى الدالة $f(x) = 0$ بشكل نقطي.

المراجع

[1] William A. Adkins and Mark G. Davidson, Ordinary Differential Equations, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2012.

[2] Tom M. Apostol, Mathemtical Analysis, Addision-Wesley Publishing Company, 1981.

[3] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, Introduction to Real Analysis, Wiley, 2000.

[4] Gabriel Nagy, Ordinary Differential Equations, Michigan State University, 2021.

[5] Brain S. Thomson, Judith B. Bruckner, and Andrew M. Bruckner, Elementary Real Analysis, Prentice-Hall, 2008.