التشاكل في الزمر والحلقات

الطالبة: حنين عدنان اسماعيل

اشراف: م. جاسم محمد جواد

الملخص

قدمنا في هذا البحث نبذة عن نظرية الزمر ونظرية الحلقات حيث درسنا في الفصل الاول مفاهيم أولية في نظرية الزمر وكذلك في نظرية المرية النتائج التشاكل الخلقي وأهم المبرهنات النتائج التي تخصهما.

الفصل الاول مفاهيم اولية في الزمر والحلقات

تعريف الزمرة

لتكن (G, *) شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة Group اذا كان كل عنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية * او نقول ان (G, *) زمرة اذا تحققت الشروط التالية

- $a*b \in G, \forall a,b \in G$: اي النسبة للعملية العملية $a*b \in G$
- $a*(b*c) = (a*b)*c, \forall a, b, c \in G$: العملية * تجميعية a*(b*c) = (a*b)*c
 - a*e=e*a=a. $\forall a\in G:e$ ممتالك عنصر محايد مثل G
- $\forall a \in G. \ \exists a^{-1} \in G: a*a^{-1} = a^{-1}*a = e:$ کل عنصر $a \in G. \ \exists a^{-1} \in G: a*a^{-1} = a^{-1}*a = e:$

الطالبة: حنين عدنان اسماعيا

تعريف الزمرة

لتكن (*, G) شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة وطالتالية G تسمى زمرة بعنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية (G, *) زمرة اذا تحققت الشروط التالية

- $a*b\in G, \forall a,b\in G:$ مغلقة بالنسبة للعملية * اي
- $a*(b*c)=(a*b)*c, \forall a,b,c\in G$: العملية * تجميعية
 - $a*e=e*a=a, \forall a\in G:e$ تمتلك عنصر محايد مثل G
- . $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e :$ کل عنصر $a \in G$ یمتلك معکوس

ً تعریف

الزمرة (*,*) تسمى زمرة ابدالية اذا كانت العملية * عملية ثنائية ابدالية.

تعريف الزمرة

لتكن (G,*) شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة Group اذا كان كل عنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية * او نقول ان (G, *) زمرة اذا تحققت الشروط التالية

- $a*b\in G, \forall a,b\in G:$ مغلقة بالنسبة للعملية * اى
- $a*(b*c) = (a*b)*c, \forall a, b, c \in G$: leading * leading *
 - a*e=e*a=a. $\forall a\in G:e$ تمثلك عنصر محايد مثل G
- $\forall a \in G. \ \exists a^{-1} \in G: a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ کل عنصر $a \in G. \ \exists a^{-1} \in G: a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

تعریف

الزمرة (G,*) تسمى زمرة ابدالية اذا كانت العملية * عملية ثنائية الدالية

تعریف

لتكن (G,*) زمرة و H مجموعة غير خالية جزئية من G فإن (H,*) تسمى زمرة جزئية من الزمرة (G,*) اذا (H,*) < (G,*) کانت H هي زمرة کذلك و نکتب

الطالبة : حنين عدنان اسماعيل

لتكن
$$(G,*)$$
 زمرة و G $\neq H$ $\subseteq G$ اذن $(H,*)$ تكون زمرة جزئية من $(G,*)$ اذا وفقط اذا حققت الشرط $a*h^{-1}\in H, \forall a,h\in H$

مبرهنة

لتكن (G,*) زمرة و $G \subseteq H \subseteq \emptyset$ اذن (H,*) تكون زمرة جزئية من (G,*) اذا وفقط اذا حققت الشرط $a*b^{-1} \in H, \forall a,b \in H$

تعريف

لتكن (H,*) زمرة جزئية من الزمرة (G,*) و أن G ، تسمى المجموعة المعرفة بالشكل التالي $a*H=\{a*h:h\in G\}$ ، وتسمى H بالمجموعة المشاركة (المصاحبة) اليسارية H في H ، وتسمى H , H

مبرهنة

لتكن (G,*) زمرة و $G \subseteq H \subseteq \emptyset$ اذن (H,*) تكون زمرة جزئية من (G,*) اذا وفقط اذا حققت الشرط $a*b^{-1} \in H, \forall a,b \in H$

تعريف

لتكن (H,*) زمرة جزئية من الزمرة (G,*) و أن $G\in G$ ، تسمى المجموعة المعرفة بالشكل التالي $a*H=\{a*h:h\in G\}$ ، وتسمى $H:H:A*H=\{a*h:h\in G\}$ ، وتسمى $H:A*H=\{a*h:h\in G\}$. المجموعة المشاركة (المصاحبة) اليمينية.

التعریف ا

لتكن (H,*) زمرة جزئية من (G,*) فإن (H,*) تسمى زمرة جزئية ناظمية (سوية) اذا وفقط اذا كان H = H * A

لتكن (H,*) زمرة جزئية من (G,*) ، نعرف العملية الثنائية \circledast على G/H بالشكل التالي

يسمى الزوج المرتب $(G/H, \circledast)$ بزمرة القسمة. $(a*H) \circledast (b*H) = (a*b)*H, \forall a,b \in G$

لتكن (H,*) زمرة جزئية من (G,*) ، نعرف العملية الثنائية \circledast على G/H بالشكل التالي

ويسمى الزوج المرتب $(G/H,\circledast)$ بزمرة القسمة. $(a*H)\circledast(b*H)=(a*b)*H, \forall a,b\in G$

تعريف الحلقة

الحلقة هي ثلاثي مرتب $(R,+,\cdot)$ مكون من مجموعة غير خالية R وعمليتي الجمع والضرب بحيث

- زمرة ابدالية. (R,+)
 - شبه زمرة. (R,\cdot) شبه
- العملية . تتوزع على العملية + ، أي أن:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$
 (التوزيع من اليسار)

$$(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$$
 (التوزيع من اليمين)

 $a,b,c\in R$ لکل

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة مع عنصر محايد لعملية الضرب ، نقول ان $(R,+,\cdot)$ ساحة تامة اذا لم تحوي على قو اسم الصفر وكانت ابدالية بالنسبة لعملية الضرب.

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة مع عنصر محايد لعملية الضرب ، نقول ان $(R,+,\cdot)$ ساحة تامة اذا لم تحوى على قواسم الصفر وكانت ابدالية بالنسبة لعملية الضرب

تعریف

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و أن $S \subseteq S \subseteq R$ ، اذا كانت $(S,+,\cdot)$ حلقة بحد ذاتها نقول بأنها حلقة جزئية من R و اختصاراً نقول S حلقة جزئية من R

الطالبة : حنين عدنان اسماعيل

تعريف

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة مع عنصر محايد لعملية الضرب ، نقول ان $(R,+,\cdot)$ ساحة تامة اذا لم تحوي على قو اسم الصفر وكانت ابدالية بالنسبة لعملية الضرب.

تعريف

لتكن $(R,+,\cdot)$ حلقة و أن $S\subseteq S$ ، اذا كانت $(S,+,\cdot)$ حلقة بحد ذاتها نقول بأنها حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$ و اختصاراً نقول S حلقة جزئية من $(R,+,\cdot)$

تعریف ٔ

لتكن R حلقة و I مجموعة جزئية من R ، نقول ان I هي مثالية في R اذا تحققت الشروط

- $a b \in I, \forall a, b \in I$
- $r \in R, a \in I$ ککل $a \cdot r \in I$ و $r \cdot a \in I$

الفصل الثاني التشاكل الحلقي التشاكل الزمري والتشاكل الرمري

تعريف

لتكن كل من $(*, G_1, \circ)$ و (G_2, \circ) زمرة ، تسمى الدالة $G_1 \to G_1 \to G_2$ انها تشاكل زمري اذا حققت الشرط

$$a,b \in G_1$$
 ککل $f(a*b) = f(a) \circ f(b)$

لتكن كل من (*,*) و (G_2,\circ) زمرة ، تسمى الدالة $f:G_1 \to G_2$ انها تشاكل زمري اذا حققت الشرط $a,b \in G_1$ لكل $f(a*b)=f(a)\circ f(b)$

مثال

لتكن f اين هل ان f دالة معرفة بالشكل التالي f التالي f التكن f دالة معرفة بالشكل التالي f دالة معرفة بالشكل التالي التالي f

الحل

 $a,b\in\mathbb{Z}$ لکل

$$f(a+b) = [a+b] = [a] +_n [b] = f(a) +_n f(b)$$

بالتالي f دالة تشاكل.

ليكن
$$(G_2, \circ) o (G_1, *)$$
 تشاكل زمري ، فإن

$$f(e_1) = e_2$$

$$f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$$

لیکن
$$(G_2, \circ) o (G_1, *)$$
 تشاکل زمري ، فإن

- $f(e_1) = e_2$
- $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

ليكن
$$(G_2,\circ) o G_1$$
 تشاكل زمري ، فإن مجموعة كل عناصر المجموعة G_1 التي تكون صورتها عنصر المحايد للزمرة G_2 تسمى نواة التشاكل ويرمز لها بالرمز G_1 اي ker f تسمى نواة التشاكل ويرمز G_2 الجمال بالرمز G_2 الحمالية المحايد للزمرة G_2 التي تكون صورتها G_2 التي تكون صورتها بالمحايد للزمرة G_2 التي تكون صورتها بالمحايد المحايد للزمرة G_2 التي تكون صورتها بالمحايد التي تكون صورتها بالمحايد التي تكون صورتها بالمحايد المحايد التي تكون صورتها بالمحايد التي تكون التي تكون صورتها بالمحايد التي تكون التي تكون المحايد التي تكون التي تكون المحايد التي تكون المحايد التي تكون المحايد التي تكون الت

ليكن
$$(G_2,\circ) o (G_1,*)$$
 تشاكل زمري ، فإن

- $f(e_1) = e_2$
- $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

ليكن
$$(G_2,\circ) o G_1$$
 تشاكل زمري ، فإن مجموعة كل عناصر المجموعة G_1 التي تكون صورتها عنصر المحايد للزمرة G_2 تسمى نواة التشاكل ويرمز لها بالرمز G_2 المحايد للزمرة G_2 تسمى نواة التشاكل ويرمز G_3 المحايد للزمرة G_2 المحايد للزمرة G_3 المحايد للزمرة والتشاكل ويرمز لها بالرمز G_3 المحايد للزمرة والتشاكل ويرمز لها بالرمز G_3 المحايد للزمرة والتشاكل ويرمز لها بالرمز والتشاكل ويرمز والتشاكل ويرمز ويرمز لها بالرمز والتشاكل ويرمز والتشاكل ويرمز والتشاكل ويرمز ويرمز والتشاكل ويرمز و

مبرهنة

.ker $f \leq G_1$ نشاكل زمري ، فإن $f:(G_1,*) o (G_2,\circ)$ ليكن

لیکن
$$(G_2,\circ) o (G_1,*)$$
 تشاکل زمري ، فإن

- $f(e_1) = e_2$
- $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

لیکن $(G_2, \circ) o G_1$ التی تکون صورتها $f: (G_1, *) o (G_2, \circ)$ لیکن ایکن $f: (G_1, *) o (G_2, \circ)$ عنصر المحايد للزمرة G_2 تسمى نو اة التشاكل و بر مز لها بالر مز G_2 اى

 $\ker f = \{a \in G : f(a) = e_2\}$

مبر هنة

.ker $f < G_1$ فإن $f: (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ ليكن

مبر هنة

ليكن $(G_2, \circ) o f$ اذا وفقط اذا كانت $f: (G_1, *) o (G_2, \circ)$ ليكن اينة.

مبرهنة التشاكل الاساسية في الزمر $(G/\ker f,\otimes)\cong (G_2,\circ)$ تشاكل شامل فإن $f:(G_1,*) o (G_2,\circ)$ لتكن

الطالبة : حنين عدنان اسماعيل

مبرهنة التشاكل الاساسية في الزمر

$$(G/\ker f,\otimes)\cong (G_2,\circ)$$
 لتكن $f:(G_1,*) o (G_2,\circ)$ لتكن

تعريف التشاكل الحلقي

لنفترض ان R و S حلقتان ، تسمى الدالة f:R o S تشاكل حلقي اذا وفقط اذا كان

- f(a+b) = f(a) + f(b).
- $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$

مبرهنة التشاكل الاساسية في الزمر

 $(G/\ker f,\otimes)\cong (G_2,\circ)$ نشاکل شامل فإن $f:(G_1,*) o (G_2,\circ)$ لتکن

تعريف التشاكل الحلقي

لنفترض ان R و S حلقتان ، تسمى الدالة f:R o S تشاكل حلقي اذا وفقط اذا كان

- f(a+b) = f(a) + f(b).
- $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$

ملاحظة

- اذا كانت f دالة شاملة فإن التشاكل يسمى تشاكل شامل.
- اذا كانت f دالة متباينة فإن التشاكل يسمى تشاكل متباين.
 - اذا کانت f دالهٔ تقابل فإن التشاکل یسمی تشاکل تقابلی f

افترض ان R حلقة ، نعرف الدالة f:R o R بالشكل f:R o R تكون تشاكل تقابلي.

الحل

$$f(a + b) = a + b = f(a) + f(b)$$
 (1)

$$f(a \cdot b) = a \cdot b = f(a) \cdot f(b)$$
(2)

. اذن f نباین. x=y فأن $x,y\in R$ ابعض f(x)=f(y) اذا كان

. الآن لكل f فأن $y \in R$ اذن f اناملة. بالتالي $y \in R$ الآن لكل

مثال

افترض ان R حلقة ، نعرف الدالمة f:R o R بالشكل f:R o R تكون تشاكل تقابلي.

الحل

$$.f(a + b) = a + b = f(a) + f(b)$$
 (1)

$$f(a \cdot b) = a \cdot b = f(a) \cdot f(b)$$
(2)

. اذن f(y) اذن x=y اذن $x,y\in R$ اندن f(x)=f(y) اذا کان

. الآن لكل f فأن $y \in R$ اذن f انن f(y) = y فأن و بالتالي أيناكل تقابلي.

تعریف

لتكن f تشاكل من الحلقة R الى الحلقة f. فإن المجموعة

 $\ker f = \{ a \in R : f(a) = 0 \}$

f تسمى بنواة التشاكل

مبرهنة لتكن f تشاكل من الحلقة R الى الحلقة S. فإن f هي مثالية في R.

تعریف

 $R \simeq S$ ونكتب ونفرض ان R حلقتان بحيث $S \to S$ تشاكل تقابلي ، نقول ان نقر ماثل و ونكتب نفرض ان

مبرهنة

R هي مثالية في R الى الحلقة R الى الحلقة R فإن الحلقة عن الحلقة الحية في R

تعریف

 $R \simeq S$ ونكتب S ونكتب R نفرض ان R ماثل R ونكتب $f: R \to S$ نفرض ان

تعریف

التالي: $\pi:R o R/I$ في الحلقة $(R,+,\cdot)$ ، نُعرِّف التشاكل الطبيعي ideal) في الحلقة (ideal) في الحلقة التالي: $\pi(r) = r + I$

ويسمى هذا التشاكل بالتشاكل الطبيعي

 $R \simeq S$ ونكتب S ونكتب R نفرض ان R ماثل R ونكتب $f: R \to S$ نفرض ان

تعریف

المثاليًا (ideal) في الحلقة $(R, +, \cdot)$ ، نُعرِّف النشاكل الطبيعي $\pi: R \to R/I$ التالي: $\pi(r) = r + I$

ويسمى هذا التشاكل بالتشاكل الطبيعي

مبرهنة التشاكل الاساسية في الحلقات

 $(R/\ker f,+,\cdot)\cong (S,+,\cdot)$ فإن $(S,+,\cdot)$ نشاكل شامل بين حلقتين، فإن $f:(R,+,\cdot)\to (S,+,\cdot)$

شكراً لحسن استماعكم

الطالبة : حنين عدنان اسماعيل