وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

الرياضيات المتقطعة

Discrete Mathmematics

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

فاطمة كفاء

إشراف

د. مضر عباس مجيد

2025 - 2024

الإهداء

إلى الكهف الحصين وغياث المضطر المستكين وملاذ المؤمنين ومنقذ العالمين حضرة جناب الموقر صاحب الزمان (عج).

إلى من بها أعلوا وعليها ارتكز ، إلى الينبوع الذي لا يمل من العطاء ، والدعاء المستجاب (والدتي العزيزة).

إلى والدي المبجل أطال الله في عمره وأمده بالصحة والعافية.

إلى خير سند (اخوتي واخواتي).

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر الجزيل و الثناء الجميل إلى **د. مضر عباس مجيد** كان له الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا ملاحظاته وإنجازه لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاه الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

مقدمة

الرياضيات المتقطعة هي فرع من فروع الرياضيات التي تهتم بدراسة الكيانات المنفصلة والمحدودة، مثل الأعداد الصحيحة والمجموعات والمنطق. تختلف الرياضيات المتقطعة عن الرياضيات التحليلية التي تركز على الكيانات المستمرة كالزمن أو المسافة. وتعتبر الرياضيات المتقطعة حجر الزاوية في العديد من التطبيقات العملية في علوم الكمبيوتر، نظرية المعلومات، والذكاء الصناعي، حيث تُستخدم في معالجة البيانات واتخاذ القرارات وتنظيم المعلومات.
من بين المواضيع الأساسية في الرياضيات المتقطعة، نجد نظرية البيان و الجبر البولياني، اللتين تلعبان دورًا محوريًا في بناء أساسيات العديد من التطبيقات الحديثة.
نظرية البيان هي فرع من فروع الرياضيات التي تدرس مجموعات البيانات وكيفية تمثيل هذه البيانات بطريقة منظمة وفعالة. تهتم بتحديد العناصر المميزة للمجموعات، علاقات التداخل بينها، وكيفية دمجها وتقسيمها. هذه النظرية تعد حجر الزاوية في تطوير أنظمة إدارة البيانات، والخوارزميات المستخدمة في تصنيف البيانات وتحليلها.
أما الجبر البولياني فهو فرع آخر يعنى بدراسة العمليات المنطقية التي تتعامل مع القيم الثنائية (صواب وخطأ، 1 و0). يعتمد الجبر البولياني على العمليات الأساسية مثل الاتحاد، التقاطع، والفرق، وهي مفاهيم تُستخدم بكثرة في تصميم الدوائر الكهربائية الرقمية وكتابة الخوارزميات في البرمجة.

المستخلص

يتناول هذا البحث موضوعين من الرياضيات المتقطعة وهما: الجبر البولياني و نظرية البيان وسوف نركز على اهم الموضوعات المتعلقة بهما واهم النظريات المترابطة حيث سنقسم البحث الى فصلين كالآتي:

الفصل الأول : في هذا الفصل سوف ندرس الجبر البولياني وكيف يتشكل النظام البولياني والعمليات على عناصر هذا النظام و كذلك الدوال البوليانية.

الفصل الثاني : سوف نركز في هذا الفصل على نظرية البيان وكيفية تشكيل النظام البياني وسوف ندرس اهم النظريات التي تخص نظرية البيان.

الفصل الأول

الجبر البولياني

1 - 1 التعاريف الاساسية

نفرض B مجموعة غير خالية معرف عليها عمليتان ثنائيتان $(+)$ و $(.)$ و عملية أحادية يرمز لها بالرمز $(^{-})$ و معها عنصران مختلفان هما 0 و 1.

عندئذ نسمي B جبراً بوليانياًاذا تحققت المسلمات التالية حيث x, y, z عناصر من B

1. قوانين التبديل

$$\forall x, y \in B \Rightarrow \begin{cases} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases}$$

2. قوانين التوزيع

$$\forall x, y, z \in B \Rightarrow \begin{cases} x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \end{cases}$$

3. قوانين التطابق (العنصر المحايد)

$$\forall x \in B \Rightarrow x + 0 = 0 + x = x$$

نقول أن العنصر (0) هو عنصر محايد بالنسبة للعملية $(+)$.

$$\forall x \in B \Rightarrow x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

نقول أن العنصر (1) هو عنصر محايد بالنسبة للعملية $(\cdot)$.

4. قوانين الاتمام

$$\forall x \in B \exists \bar{x} : \begin{cases} x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1 \\ x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0 \end{cases}$$

ملاحظة

في بعض الاحيان نرمز للجبر البولياني بالرمز

$$\langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1 \rangle$$

عندما نريد التأكيد على أجزائه الستة

قاعدة الأسبقية

اذا لم تكتب اقواس فإن العملية ($^-$) يكون لها الاسبقية على العملية ($\cdot$) و العملية ($\cdot$) يكون لها الاسبقية على العملية (+)

مثال

$x + y \cdot z$ تعني $x + (y \cdot z)$ و ليس $(x + y) \cdot z$

$x \cdot \bar{y}$ تعني $x \cdot (\bar{y})$ و ليس $\overline{(x \cdot y)}$

1 - 2 الجبر البولياني بقيمتين

يعرف الجبر البولياني بقيمتين على مجموعة من عنصرين $B = \{0, 1\}$ حيث العمليتان الثنائيتان (+) و ($\cdot$) و عملية الاتمام معطاة كما يلي:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ملاحظة

إن العمليات السابقة هي نفسها العمليات المنطقية:

(+) تقابل ($\vee$) or و ($\cdot$) تقابل ($\wedge$) and و ($^-$) تقابل ($\sim$) not .

مثال

لنثبت صحة قانون التوزيع التالي

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

x	y	z	$y+z$	$x\cdot(y+z)$	$x\cdot y$	$x\cdot z$	$(x\cdot y)+(x\cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

بمطابقة العمود الخامس و الاخير ينتج صحة القانون

1 - 3 الدوال البوليانية

من أجل تعريف الدالة البوليانية نعرف أولاً المتغير البولياني

المتغير البولياني

نقول أن المتغير x انه متغير بولياني اذا كان يأخذ قيمة من المجموعة $B=\{0,1\}$ فقط. أي أن اذا كانت قيمته 0 أو 1.

من التعريف السابق يكون قد تحدد لدينا المجال المقابل. الآن نحدد المجال

نأخذ الضرب الديكارتي للمجموعة B بنفسها n من المرات أي $\underbrace{B\times B\times\cdots\times B}_{n\text{ من المرات}}$

نحصل على B^n حيث

$$B^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_i\in B;1\leq i\leq n\}$$

الدالة البوليانية

هي تعبير جبري يتألف من المتغيرات الثنائية و الثوابت 0 و 1 و العمليات المنطقية، مجاله المجموعة B^n و مجاله المقابل B. و نحدد درجة الدالة حسب قيمة n.

مثال

الدالة $F_1 = x + \bar{y} + \bar{x} \cdot y$ هي دالة بوليانية من الدرجة الثانية لأنها يقرن كل زوج (x, y) من B^2 بـــ $x + \bar{y} + \bar{x} \cdot y$

أما الدالة $F_2 = x + \bar{y} \cdot z$ هي دالة من الدرجة الثالثة لأنها تقرن كل ثلاثي (x, y, z) من B^3 بـ $x + \bar{y} \cdot z$

4 - 1 كيفية تحديد قيم الدالة البوليانية

من أجل تحديد قيم الدالة البوليانية ننشئ جدول الصواب للتعبير الذي يمثل الدالة.

مثال

لنوجد قيم الدالة البوليانية المعطاة كما يلي: $F(x, y, z) = x \cdot y + \bar{z}$

x	y	z	$x \cdot y$	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = x \cdot y + \bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

تساوي الدوال البوليانية

تتساوى الدالتان البوليتيان F, G بـــ n من المتغيرات اذا و فقط اذا

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \forall (x_1, x_2, \ldots . x_n) \in B^n$$

ملاحظة

نقول عن تعبيرين بوليانيي مختلفين انهما متكافئان اذا كان كل منهما يمثل الدالة البوليانية نفسها

مثال

التعابير: $xy, xy + 0, xy \cdot 1$ هي تعابير بوليانية متكافئة

ملاحظة

ان عدد الدوال البوليانبة المختلفة من الدرجة n الممكنة هو 2^{2^n} لان عدد عناصر الضرب الديكارتي B^n هو 2^n و بما اننا نسند للدالة القيمة 0 أو 1 الى كل من المتعددات ذات الطول n و المختلفة.

1 - 5 العمليات على الدوال البوليانية

1- الجمع البولياني للدوال

نعرف عملية الجمع للدالتين البوليانيتين F, G كمايلي:

$$(F + G)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2- الضرب البولياني للدوال

نعرف عملية الضرب للدالتين البوليانيتين F, G كمايلي:

$$(F \cdot G)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

3- متمم الدالة البوليانية

اذا كانت F دالة بوليانية من B^n الى B. فإننا نعرف متمم هذه الدالة بالعلاقة

$$\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

كيفية الحصول على متمم الدالة البوليانية F

نرمز له بــ $\overline{F}$ نحصل عليه بإستبدال الاصفار بواحدات و الواحدات بأصفار في قيم الدالة F وهذا يمكن اشتقاق متمم الدالة جبرياً من خلال قانوني ديمورغان حيث نستطيع تحديد هذه القوانين لأكثر من متغيرين.

مثال

لتكن لدينا الدالة البوليانية

$$F(x, y, z) = x + y + z$$

اوجد متمم هذه الدالة.

الحل

من اجل ايجاد $\overline{F(x,y,z)} = \overline{(x+y+z)}$ نفرض $y+z=A$ ونعوض

$$\overline{(x+y+z)} = \overline{(x+A)}$$

حسب قانون ديمورغان:

$$\overline{(x+A)} = \overline{x}\cdot\overline{A} = \overline{x}\cdot\overline{(y+z)} = \overline{x}\cdot(\overline{y}\cdot\overline{z}) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$$

اذن

$$\overline{F(x,y,z)} = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$$

1 - 6 قوانين الجبر البولياني

الاسم	القانون
الاتمام المضاعف	$\overline{\overline{x}} = x$
قوانين تساوي القوى	$x+x=x,\quad x\cdot x = x$
قوانين المحايد	$x+0=x,\quad x\cdot 1 = x$
قوانين الهيمنة	$x\cdot 0 = 0,\quad x+1=1$
قوانين الابدال	$x+y=y+x,\quad x\cdot y = y\cdot x$
قوانين التجميع	$x+(y+z)=(x+y)+z,\quad x(yz)=(xy)z$
قوانين التوزيع	$x+yz=(x+y)\cdot(x+z),\quad x(y+z)=xy+xz$
قوانين ديمورغان	$\overline{xy}=\overline{x}+\overline{y},\quad \overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$
قوانين الامتصاص	$x+xy=x,\quad x(x+y)=x$
الخاصية الواحدية	$x+\overline{x}=1$
الخاصية الصفرية	$x\cdot\overline{x}=0$

1 - 7 مُرافق التعبير البولياني

ان التعبير المُرافق لأي تعبير في الجبر البولياني هو التعبير الذي نحصل عليه بتبديل عملية (+) بعملية (.) ونبدل ايضاً (1) بـ (0) ونبدل (0) بـ (1).

مثال

اوجد التعابير المرافقة للتعابير التالية

1. $(1 + x) \cdot (y + 0) = y$
2. $x + (y \cdot 1)$
3. $(\overline{x} + 0) \cdot (\overline{y} z)$

الحل

1. $(0 \cdot x) + (y \cdot 1) = y$
2. $x \cdot (y + 0)$
3. $(\overline{x} \cdot 1) + (\overline{y} + z)$

ملاحظة

نرمز لمرافق الدالة البوليانية F بالرمز $\overline{F}$ حيث يمثل مرافق الدالة البوليانية F من خلال تعبير بولياني هو دالة مرافق لهذا التعبير.

1 - 8 تحويل الدوال والتعابير البوليانية الى عبارات منطقية

تتم عملية التحويل وفق الجدول التالي

القضايا والعبارات المنطقية	المساويات
p, q, r	x, y, z
$\wedge$ and	$\cdot$
$\vee$ or	$+$
T	1
F	0
$\equiv$	$=$

مثال

حول قانون التوزيع $x + yz = (x + y)(x + z)$ الى تكافؤ منطقي

الحل

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

1 - 9 العمليات البتية

البتية: معنى كلمة بتية تأتي من الرقم الثنائي لان الاصفار والواحدات هي ارقام تستخدم في النظام الثنائي.

البت: ان لرمز البت قيمتين ممكنتين هما الصفر (0) والواحد (1) ويمكن ان يستخدم البت لتمثيل القيمة الحقيقة لان قيمتي الحقيقة هما الصح والخطأ لذلك نستطيع ان نستخدم البت (1) ليمثل الصح ونستخدم الصفر (0) ليمثل الخطأ وعليه نستطيع تنظيم الجدول التالي

البت	قيمة الحقيقة
1	T
0	F

1 - 10 المتحول البولياني

نقول عن متحول انه متحول بولياني اذا كانت قيمة هذا المتحول اما الصح او الخطأ لذلك نستطيع ان نستخدم البت لتمثيل المتحول البولياني.

مما سبق نجد ان العمليات البتية الحاسوبية تماثل الارتباطات المنطقية وذلك باستبدال الصح بالواحد (1) والخطأ بالصفر (0).

مما سبق نستطيع ان نوضح العمليات البتية XoR ، OR ، AND في الجدول التالي

x	y	x OR y	x AND y	x XoR y
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

1 - 11 الاشرطة البتية

نستخدم الاشرطة البتية لتمثيل المعلومات ، وهي عبارة عن لوائح من الواحدات و الاصفار وبالتالي يمكن ان تستخدم لضبط هذه المعلومات.
والشريط البتي هو متتالية مكونة من صفر او اكثر من البتات حيث يتحدد طوله بعدد البتات الموجودة فيه.

مثال

الشريط البتي التالي 110101001100 من الطول 12.

ملاحظة

يمكن ان نوسع استخدام العمليات البتية الى الشرائط البتية من خلال تعريف العمليات:

bitwize OR, bitwize AND, bitwize XoR

وذلك على شريطين لهما نفس الطول ويكون الناتج اشرطة البتات الناتجة عن العمليات XoR, OR, AND على البتات المتقابلة في الشريطين على الترتيب.
سنستخدم الرموز السابقة التي استخدمناها للعمليات المنطقية للعمل على المؤثرات الجديدة bitwize OR, bitwize AND, bitwize XoR وندعوها AND البتية و OR البتية و XoR البتية.
سنوضح ما سبق من خلال المثال التالي

مثال

اوجد العمليات AND البتية و OR البتية و XoR البتية على الشريطين البتيين التاليين:
01101101110 و 11000111101.

الحل

	01101101110
	11000111101
bitwize AND	01000101100
bitwize OR	11101111111
bitwize XoR	10101010011

الفصل الثاني

نظرية البيان

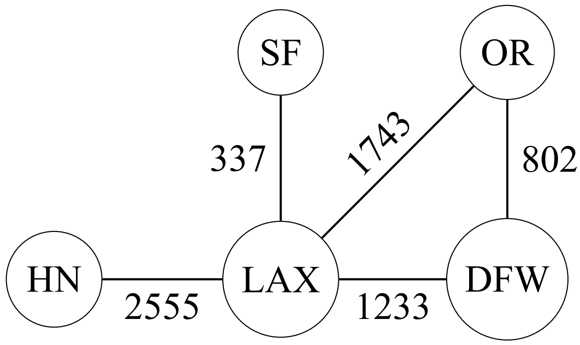
2 - 1 تعاريف و امثلة

تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

مثال

ليكن لدينا مجموعة من المطارات في دولة ما. بعض تلك المطارات يرتبط برحلات مباشرة مع مطارات اخرى من نفس البلد او مع بلدان اخرى و البعض الاخر يرتبط مع باقي المطارات.



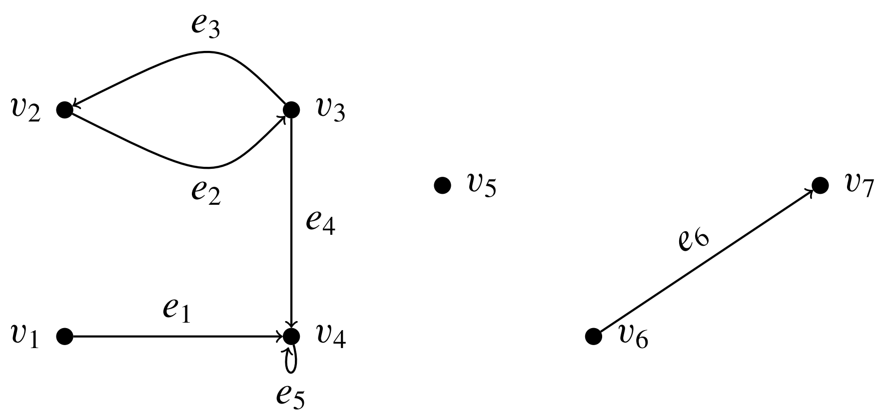
في الشكل اعلاه عبرنا عن كل مطار بنقطة و اذا كان مطاران مرتبطان برحلة مباشرة نمثلها بخط و على الخط يمكن ان نضع المسافة بين المطارين.

ملاحظات

1. كل سهم له عقدة او عقدتين مرتبطتين تسمى أطراف السهم Endpoints.
2. يسمى السهم الذي له عقدة واحدة مرتبطة به بالحلقة Loop.
3. تسمى الاسهم التي تتشارك بنفس النهايات بالاسهم المتوازية Parallel.
4. تسمى العقدتين المرتبطتين بالسهم على انهما متجاورتين Adjacent.
5. تسمى العقدة التي ليس لها اسهم واردة بالمعزولة Isolated.

مثال

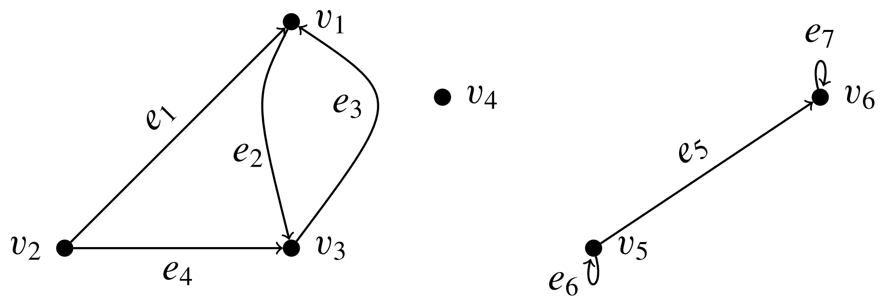
ليكن لدينا البيان



في الشكل اعلاه السهم e_5 مثال على الحلقة و e_2, e_3 أسهم متوازية و العقدة v_5 مثال على العقدة المعزولة و العقدتان v_6, v_7 مثال على العقد المتجاورة.

مثال

ليكن لدينا البيان التالي



مجموعة العقد $= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
مجموعة الأسهم $= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

السهم	نهايتي السهم
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_3\}$
e_3	$\{v_1, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_3\}$
e_5	$\{v_5, v_6\}$
e_6	v_5
e_7	v_6

نلاحظ أن e_6, e_7 هي حلقات و v_4 عقدة معزولة

ملاحظة

يمكن لمجموعة العقد V للبيان G أن تكون غير منتهية $|V| = \infty$ نسمي البيان الذي له عدد غير منته من العقد أو عدد غير منته من الاسهم بالبيان غير المنتهي Infinite Graph.

2 - 2 خواص البيانات

2 - 2 - 1 البيان البسيط

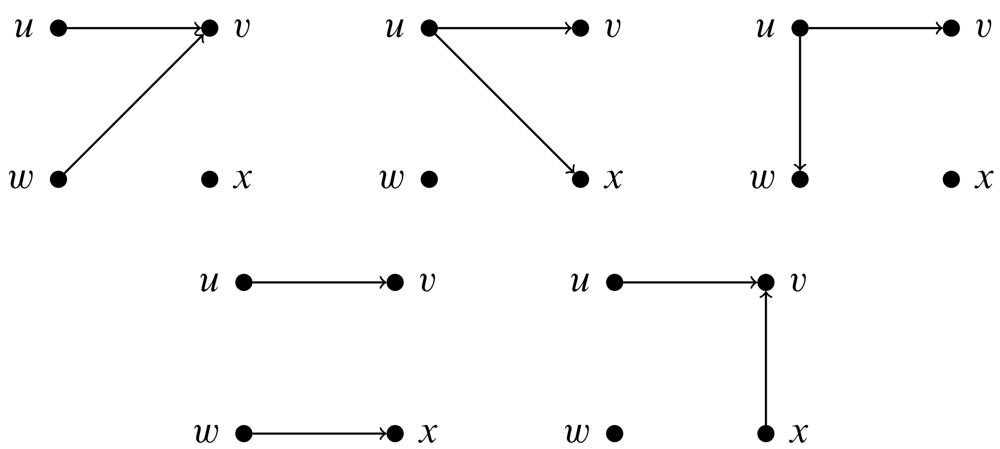
ليكن G بيان، يسمى G بيان بسيط اذا كان لا يحتوي أية حلقات أو أسهماً متوازية. في البيان البسيط نرمز للسهم المحدد بالطرفين v, w بـــ $\{v, w\}$

مثال

لتكن $V = \{u, v, wx\}$ مجموعة عقد و لدينا سهمان احدهما $\{u, v\}$، عدد الاسهم الممكنة من اربعة عقد هي 6 اسهم كما يلي

$$\{u, v\}, \{u, w\}, \{u, x\}, \{v, w\}, \{v, x\}, \{w, x\}$$

واحد منها هو $\{u, v\}$ بالتالي السهم الثاني يمكن ان يكون واحد من الاسهم الخمسة المتبقية



2 - 2 - 2 البيان الموجه

البيان $G = (V, E)$ حيث V مجموعة غير خالية من العقد و E هي مجموعة الاسهم الموجهة، حيث كل سهم يرتبط بزوج مرتب من العقد ندعوها طرفي السهم Endpoints.

مثال

في البيان الموجه اذا وجد سهم من v الى w فليس من الضروري ان يوجد سهم من w الى v اي لدينا زوج مرتب $\{v, w\}$ بمعنى $\{v, w\} \neq \{w, v\}$ نسمي العقدة v بالذيل tail و w بالرأس head

2 - 2 - 3 درجة العقدة

هي عدد الاسهم التي تصل الى العقدة، و اذا كان السهم حلقة نعيده مرتين. و نرمز لها بالرمز $\deg(v)$

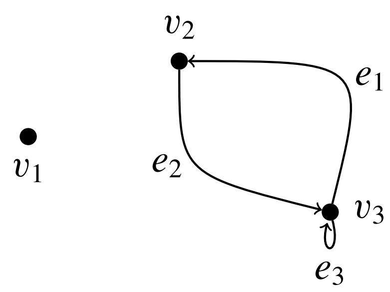
2 - 2 - 4 الدرجة الكلية

هي مجموع درجات العقد التي يتألف منها

$$\deg(G) = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

مثال

ليكن لدينا البيان



$$\Rightarrow \deg(v_1) = 0, \quad \deg(v_2) = 2, \quad \deg(v_3) = 4$$

$$\Rightarrow \deg(G) = 0 + 2 + 4 = 6$$

مبرهنة

ليكن في البيان $G = (V, E)$ غير الموجه n من الاسهم. يكون لدينا

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2n$$

نتيجة

الدرجة الكلية لبيان هي عدد زوجي.

مبرهنة

في البيان غير الموجه يوجد عدد زوجي من العقد التي درجتها عدد فردي.

الدرجة الواردة in-degree: لعقدة v في بيان موجه هي عدد الاسهم التي تصل هذه العقدة و نرمز لها بالرمز $\deg_{-}(v)$

الدرجة الصادرة (الخارجة) out-degree: لعقدة v في بيان موجه هي عدد الاسهم التي تخرج من هذه العقدة و نرمز لها بالرمز $\deg_{+}(v)$

مبرهنة

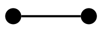
ليكن في البيان $G = (V, E)$ الموجه n من الاسهم يكون لدينا

$$\sum_{v\in V} \deg_{-}(v) = \sum_{v\in V} \deg_{+}(v) = n$$

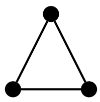
2 - 3 انواع خاصة من البيانات

2 - 3 - 1 البيانات التامة Complete Graphs

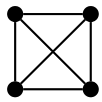
هي عبارة عن بيانات بسيطة بــ n من العقد بحيث انها تحتوي على سهم واحد بين كل زوج من العقد المختلفة. و نرمز لها بــ K_n كما في الشكل التالي:



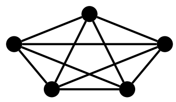
(a) K_2



(b) K_3



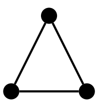
(c) K_4



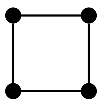
(d) K_5

2 - 3 - 2 البيانات الدائرية Cycles

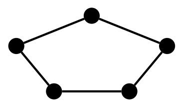
هي عبارة عن بيانات بسيطة بــ n من العقد حيث $(n \geq 3)$ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ و $n-1$ من الاسهم $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}$ ونرمز لها بالرمز C_n كما في الشكل التالي



(a) C_3



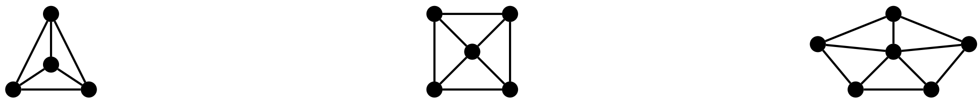
(b) C_4



(c) C_5

2 - 3 - 3 البيانات الدولابية Wheels

يتم الحصول عليها بإضافة عقدة الى البيانات الدائرية $(n \geq 3)$ و اضافة سهم من العقدة الجديدة الى كافةالعقد الاخرى. ونرمز لها بـ W_n كما في الشكل التالي



(a) W_3 (b) W_4 (c) W_5

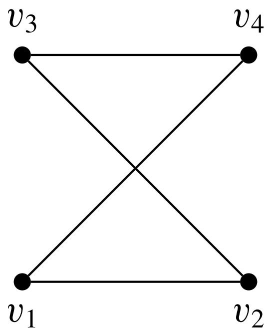
2 - 4 تمثيل البيانات Representing Graphs

2 - 4 - 1 مصفوفة الجوار Adjacency Matrix

ليكن لدينا البيان غير الموجه $G = (G, V)$ المكون من مجموعة العقد $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ نعرف مصفوفة الجوار للبيان G على انها المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات البعد $n \times n$ المعرفة على النحو التالي a_{ij} يساوي عدد الاسهم التي تربط العقدة v_i بالعقدة v_j.

مثال

اوجد مصفوفة الجوار للبيان التالي

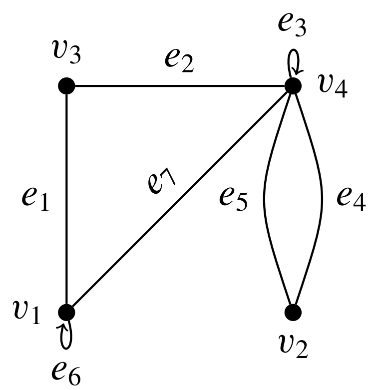


الحل

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال

اوجد مصفوفة الجوار للبيان التالي



الحل

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

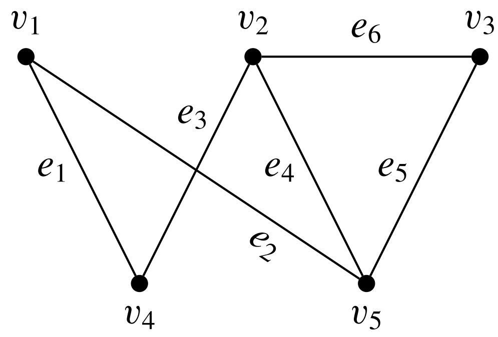
2 - 4 - 2 مصفوفة الورود Incidence Matrix

ليكن لدينا البيان غير الموجه $G = (G, V)$ المكون من مجموعة العقد $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و مجموعة الاسهم $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ نعرف مصفوفة الورود للبيان G على انها المصفوفة $M = [m_{ij}]$ ذات البعد $n \times m$ على النحو التالي

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{عندما السهم } e_j \text{ يصل العقدة } v_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

مثال

اوجد مصفوفة الورود للبيان التالي



الحل

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال

اوجد البيان الموجه الذي مصفوفة جواره

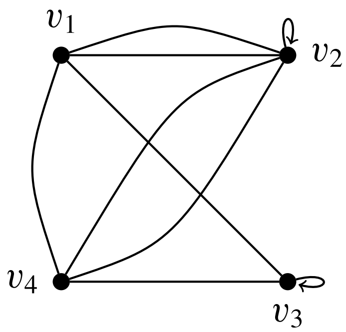
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل

ليكن G البيان الموافق لمصفوفة الجوار اعلاه. وليكن v_1, v_2, v_3, v_4 مجموعة عقد البيان G

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

وبالتالي يكون البيان الموجه الموافق للمصفوفة هو التالي



5 - 2 الترابطية Connectivity

الترابطية في البيانات غير الموجهة

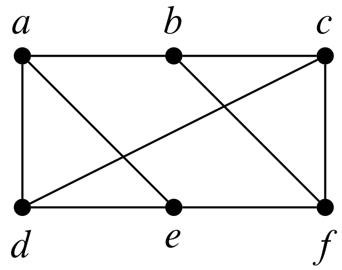
نعرف المسار Path بطول $n \geq 0$ من العقدة u الى العقدة v ضمن بيان غير موجه G على انه سلسلة مكونة من n من الاسهم $e_1, \ldots, e_n$ من البيان G وحيث ان

$$\{x_0 = u, x_1\} = e_0, \{x_1, x_2\} = e_2, \ldots, \{x_{n-1}, x_n = v\} = e_n$$

عندما يكون المسار بسيط نرمز للمسار بسلسلة العقد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ونسمي مساراً على انه دائرة اذا كان يبدأ وينتهي بنفس العقدة ، اي ان $u = v$ كما ندعوا مساراً بسيطاً اذا كان لا يحوي على نفس السهم اكثر من مرة ولحدة.

مثال

ليكن البيان البسيط التالي



a, b, c, d, e, f عبارة عن مسار بسيط طوله 4.

a, c, e, d ليست مساراً.

b, c, f, e, b عبارة عن دائرة طولها 4.

a, b, e, d, a, b عبارة عن مسار طوله 4 ولكنه غير بسيط لانه يحوي السهم $\{a, b\}$ مرتين.

تعريف

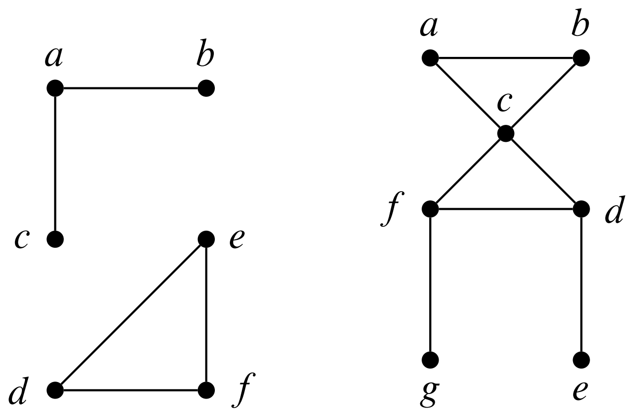
نقول عن بيان غير موجه على انه مترابط connected اذا وجد مسار بين كل زوج من عقد البيان المختلفة.

مبرهنة

يوجد مسار بسيط بين اي عقدتين مختلفتين في بيان مترابط غير موجه.

مثال

ليكن لدينا البيانين التاليين



G_2 (ب) G_1 (ا)

من الواضح ان البيان G_1 مترابط لانه يوجد بين اي زوج من العقد المختلفة مسار. بينما البيان G_2 غير مترابط لانه لا يوجد مسار بين العقدتين a, d

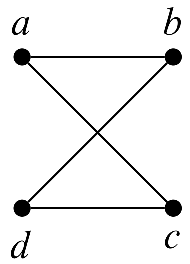
عدد المسارات بين العقد Counting paths betwwn vertices

مبرهنة

ليكن G بيان مصفوفة جواره A بالنسبة لمجموعة العقد $v_1, v_2, \ldots, v_n$ التي يتكون منها ، ان عدد المسارات المختلفة بطول r من العقدة v_i الى العقدة v_j يساوي العنصر (i, j) من المصفوفة A^r.

مثال

ما هو عدد المسارت بطول 4 من العقدة a الى العقدة b في البيان البسيط التالي



الحل

ان مصفوفة الجوار للبيان بالنسبة للعقد a, b, c, d هي

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بالتالي فان عدد المسارت بطول 4 من العقدة a الى العقدة d هو العنصر $8 = (1,4)$ من المصفوفة A^4

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

المسارات الثمانية هي التالية

$$a, b, a, b, d \rightarrow a, b, a, c, d \rightarrow a, b, d, b, d \rightarrow a, b, d, c, d$$

$$a, c, a, b, d \rightarrow a, c, a, c, d \rightarrow a, c, d, b, d \rightarrow a, c, d, c, d$$

الخلاصة

تناول هذا البحث موضوعين من الرياضيات المتقطعة وهما: الجبر البولياني ونظرية البيان. تم التركيز على أهم الموضوعات المتعلقة بهما وأهم النظريات المترابطة، حيث تم تقسيم البحث إلى فصلين على النحو التالي:

الفصل الأول : في هذا الفصل تم دراسة الجبر البولياني وكيفية تشكيل النظام البولياني والعمليات على عناصر هذا النظام، وكذلك الدوال البوليانية.

الفصل الثاني : تم التركيز في هذا الفصل على نظرية البيان وكيفية تشكيل النظام البياني، كما تم دراسة أهم النظريات التي تخص نظرية البيان.

المراجع

[1] سليم شفيق الأشهب، الرياضيات المتقطعة لطلبة العلوم والحاسوب، دار المناهج للنشر والتوزيع، 2013.

[2] روحي ابراهيم الخطيب، الرياضيات المتقطعة، دار المسيرة للنشر و التوزيع، 2013.

[3] ميسم أحمد جديد، الرياضيات المتقطعة، منشورات جامعة الشام الخاصة، 2021.

[4] احمد عبدالعزيز، المختصر المفيد في اساسيات ومفاهيم الجبر البولياني والبواباتالمنطقية، 2018.

[5] رامي شاهين و سهيل محفوض، نظرية البيان، جامعة تشرين - كلية العلوم، 2011.