وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

نظرية المعيار
Module Theory

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة
زينب هامل

إشراف
م.م. جنان عبدالامام نجم

2025 - 2024

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

يَرفَعِ اللَّهُ الَّذينَ آمَنوا مِنكُم وَالَّذينَ أوتُوا العِلمَ
دَرَجاتٍ وَاللَّهُ بِما تَعمَلونَ خَبيرٌ ﴿١١﴾

(سورة المجادلة)

الإهداء

الى منارة العلم والامام المصطفى الأمي سيد الخلق
رسولنا الكريم سيدنا
(مُـحَـمَّـد)
صلى الله عليه وآله وسلم

الى صاحب روحي والزمان ... إمامي وأماني ... الامام الحجة المنتظر عجل الله فرجه الشريف ...

الى النور الذي انار دربي والسراج الذي لا ينطفئ نوره أبداً والذي بذل جهد السنين من اجل ان اعتلي سلالم النجاح والدي العزيز

الى من اخص الله الجنة تحت قدميها وغمرتني بالحب والحنان واشعرتني بالسعادة والامان هي حياتي وكل عمري والدتي العزيزة ...

الى القلوب الرقيقة والنفوس البريئة اخوتي ...

الى جميع الاهل و الاصدقاء ...

زينب هامل

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر

الجزيل و الثناء الجميل إلى م.م. **جنان عبدالامام نجم** كان لها الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا

ملاحظاتها وإنجازها لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاها الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

مقدمة

سوف ندرس في هذا البحث المكونات الرياضية التي تسمى بالمعايير **Modules**. كان الاستخدام الاول لهذه المكونات من انجازات احد المع علماء الرياضيات في النصف الاول من هذا القرن **Emmy Noether** التي مهدت الطريق لاظهار قوة واناقة هذه البنية. سوف نرى ان الفضاءات المتجهة ليست الا اشكالاً خاصة من المعايير. اي ان المعيار هو تعميم لمفهوم فضاء المتجهات فبدلاً من البناء على حقل سوف نبني النظام المعياري على حلقة.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1 - 1 العلاقات والدوال

تعريف 1 - 1 - 1

العلاقة بين مجموعتين A, B هي مجموعة جزئية R من $A \times B$. ونقرأ $(a, b) \in R$:
"a مرتبط بالعنصر b" ونكتب aRb

تعريف 1 - 1 - 2

الدالة ϕ من X الى Y هي علاقة بين X و Y مع الخاصية لكل $x \in X$ يظهر كعنصر اول في زو ج مرتب واحد (x, y) في ϕ ونكتب $\phi : X \to Y$

1 - 2 العملية الثنائية وخصائصها

تعريف 1 - 2 - 1

العملية الثنائية $*$ على مجموعة S هي دالة من $S \times S$ الى S لكل $(a, b) \in S \times S$. نرمز الى العنصر $*\big((a, b)\big)$ بالرمز $a * b$

تعريف 1 - 2 - 2

العملية الثنائية * على S تكون ابدالية اذا وفقط اذا $a * b = b * a$ لكل $a, b \in S$.

تعريف 1 - 2 - 3

العملية الثنائية * على S تكون تجميعية اذا كان $(a * b) * c = a * (b * c)$ لكل $a, b, c \in S$.

مثال 1 - 2 - 1

العمليتان $+$ (الجمع) و $\cdot$ (الضرب) ابداليتيين و تجميعتين على مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

1 - 3 الزمرة

تعريف 1 - 3 - 1

الزمرة $(G, *)$ هي مجموعة G غير خالية تكون مغلقة تحت العملية * مع تحقيق البديهيات التالية

1. (التجميعية) لكل $a, b, c \in G$ لدينا

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2. (العنصر المحايد) يوجد عنصر $e \in G$ بحيث ان لكل $x \in G$

$$e * a = a * e = a$$

3. (العنصر النظير) لكل $a \in G$ يوجد عنصر مثل $a' \in G$ بحيث

$$a * a' = a' * a = e$$

تعريف 1 - 3 - 2

الزمرة G تكون تبديلية (Abilian) اذا كانت العملية الثنائية تبديلية.

مثال 1 - 3 - 1

المجموعة $\mathbb{Z}^+$ تحت عملية الجمع + لا تشكل زمرة. لعدم وجود عنصر ممحايد.

مثال 1 - 3 - 2

المجموعة $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ مجموعة كل المصفوفات مع عملية جمع المصفوفات مع العنصر المحايد (المصفوفة الصفرية) تتشكل زمرة ابدالية.

1 - 4 الزمرة الجزئية

تعريف 1 - 4 - 1

اذا كانت H مجموعة جزئية من الزمرة $(G,*)$ ومغلقة تحت العملية الثنائية للزمرة فإذا كانت $(H,*)$ زمرة فإن H زمرة جزئية من G ونكتب $H \le G$.

تعريف 1 - 4 - 2

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية منها. وليكن $x \in G$. المجموعة المصاحبة اليسارية xH تعرف بالشكل

$$x * H = \{x * h : h \in H\}$$

اما المصاحبة اليمينية Hx تعرف بالشكل

$$H * x = \{h * x : h \in H\}$$

العمليات على المجموعات المصاحبة [2]

لتكن G زمرة. و H زمرة جزئية منها وليكن $x \in G$ سوف نرمز الى مجموعة كل المجموعات المصاحبة اليسارية بالرمز G/H اي ان

$$G/H = \{x * H : x \in G\}$$

نعرف العملية $\otimes$ على G/H بالشكل

$$(a * H) \otimes (b * H) = (a * b) * H$$

1 - 5 الزمر السوية و زمرة القسمة

تعريف 1 - 5 - 1

لتكن G زمرة. الزمرة الجزئية H تسمى زمرة جزئية سوية اذا تحقق الشرط $x * H = H * x$ لكل $x \in G$. و نكتب $H \lhd G$

تعريف 1 - 5 - 2

لتكن G زمرة و $H \lhd G$ فإن G/H تكون زمرة مع العملية $\otimes$ المعرفة بالشكل

$$(a * H) \otimes (b * H) = (a * b) * H$$

نسمي الزوج $(G/H, \otimes)$ بزمرة القسمة.

1 - 6 الحلقة وبعض خصائصها

تعريف 1 - 6 - 1

الحلقة $(R, +, \cdot)$ هي مجموعة R مع عمليتان ثنائيتيان. الجمع $(+)$ و الضرب $(\cdot)$ مع البديهيات التالية

1. $(R, +)$ زمرة ابدالية.
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ لكل $a, b, c \in R$.
3. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ و $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (a \cdot b)$ لكل $a, b, c \in R$.

تعريف 1 - 6 - 2

لتكن R حلقة. فإن R تكون حلقة ابدالية اذا كان $a \cdot b = b \cdot a$ لكل $a, b \in R$.

تعريف 1 - 6 - 3

لتكن R حلقة. المحايد هو العنصر $1 \in R$ بحيث ان $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ لكل $x \in R$.

مثال 1 - 6 - 1

$(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ حلقات ابدالية ذات محايد.

مثال 1 - 6 - 2

$(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة ذات محايد ولكن غير ابدالية.

الحل

نثبت اولا ان $(M_{n\times n}, +)$ زمرة ابدالية:

1. المجموعة $M_{n\times n}$ مغلقة بالنسبة للعملية +
2. لكل $A, B, C \in M_{n\times n}$

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= [a_{ij}] + \Big([b_{ij}] + [c_{ij}]\Big) \\ &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] \\ &= \Big([a_{ij}] + [b_{ij}]\Big) + [c_{ij}] \\ &= (A + B) + C \end{aligned}$$

3. المصفوفة الصفرية تكون العنصر المحايد لأن لكل $A \in M_{n\times n}$ لدينا $A + 0 = 0 + A = A$.
4. لكل $A \in M_{n\times n}$ النظير الجمعي يكون $-A = [-a_{ij}]$.
5. العملية + تكون ابدالية

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A$$

اذن $(M_{n\times n}, +)$ زمرة ابدالية.

نلاحظ أن العملية $\cdot$ تكون تجميعية. اي ان $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

ايضا نلاحظ ان العملية $\cdot$ تتوزع على العملية + من اليمين و من اليسار اي ان

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

والمصفوفة الواحدية (المحايدة) I تمثل العنصر المحايد لعملية الضرب اي ان $A \cdot I = I \cdot A = A$

اذن $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة ذات محايدة ولكن غير تبديلية لان في $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -11 \\ 18 & -23 \end{bmatrix}$$

ولكن

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -12 & -14 \end{bmatrix}$$

الفصل الثاني

المعيار

مقدمة

سنتناول في هذا الفصل التعريف الرياضي للمعيار و بعض الامثلة عليه و كذلك اهم النظريات التي تخص المعيار، وكذلك سنتعرف على مفهوم المعيار الجزئي وبعض النتائج التي تخص المعيار الجزئي و أيضاً سندرس التشاكل المعياري والمبرهنات الاساسية له.

2 - 1 تعاريف و أمثلة

تعريف 2 - 1 - 1

لتكن R حلقة (ليس من الضروري تبديلية او تمتلك محايد) المعيار اليساري على R هو مجموعة M مع الشروط التالية

1. عملية ثنائية + على M بحيث $(M, +)$ زمرة ابدالية
2. تأثير R على M (دالة $R \times M \to M$) يرمز لها عادة بـ rm, لكل $r \in R$ و $m \in M$ و تحقق

a) $(r+s)m = rm + sm$ لكل $r, s \in R$ و $m \in M$.

b) $(rs)m = r(sm)$ لكل $r, s \in R$ و $m \in M$.

c) $r(m+n) = rm + rn$ لكل $r \in R$ و $m, n \in M$.

اذا الحلقة R تمتلك محايد 1 نضيف الشرط

d) $1m = m$ لكل $m \in M$.

تعريف المعيار اليميني يكون مشابه تماماً و لكن بتعريف التأثير لـــ R على M بالشكل mr لكل $r \in R$ و لكل $m \in M$.

مثال 2 - 1 - 1

لتكن $G = (G, +)$ زمرة ابدالية، اذا كان $n \in \mathbb{Z}$ و $x \in G$ فإن nx يعرف بالشكل

$$nx = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \underbrace{x + x + \cdots + x}_{\text{من المرات } n}, & n > 0 \\ \underbrace{(-x) + (-x) + \cdots + (-x)}_{\text{من المرات } n}, & n < 0 \end{cases}$$

اثبت ان G معيار يساري على $\mathbb{Z}$ بواسطة دالة الضرب

$$\cdot : \mathbb{Z} \times G \to G, \quad (n, x) \mapsto nx$$

لكل $m,n \in \mathbb{Z}$ و لكل $x,y \in G$

الحل

(a

$$\begin{aligned}(m+n)x &= \underbrace{x+x+\cdots+x}_{\text{من المرات } m+n} \\ &= \underbrace{(x+x+\cdots+x)}_{\text{من المرات } m}+\underbrace{(x+x+\cdots+x)}_{\text{من المرات } n} \\ &= mx+nx\end{aligned}$$

(b

$$\begin{aligned}(mn)x &= \underbrace{x+x+\cdots+x}_{\text{من المرات } mn} \\ &= \underbrace{\underbrace{(x+x+\cdots+x)}_{\text{من المرات } n}+\underbrace{(x+x+\cdots+x)}_{\text{من المرات } n}+\cdots+\underbrace{(x+x+\cdots+x)}_{\text{من المرات } n}}_{\text{من المرات } m} \\ &= m(nx)\end{aligned}$$

(c

$$\begin{aligned}m(x+y) &= \underbrace{(x+y)+(x+y)+\cdots+(x+y)}_{\text{من المرات } m} \\ &= \underbrace{(x+x+\cdots+x)}_{\text{من المرات } m}+\underbrace{(y+y+\cdots+y)}_{\text{من المرات } m} \\ &= mx+my\end{aligned}$$

$1x = x$ (d

مثال 2 - 1 - 2

لتكن S حلقة جزئية من R، اذن بواسطة الدالة

$$(s,r) \mapsto sr, \forall r \in R, s \in S$$

الحل

الحلقة R تصبح معيار يساري على S لأن:

R حلقة اذن $(R,+)$ زمرة ابدالية. الآن نطبق البديهيات: لكل $x,y \in R$ و لكل $r,s \in S$

$(r+s)x = rx+sx$ (a لأن R حلقة و بالتالي العملية . تتوزع على $+$ من اليمين

b) $(rs)x = r(sx)$ لأن R حلقة اذن $(R,\cdot)$ شبه زمرة و بالتالي العملية · تجميعية

c) $r(x+y) = rx + ry$ لأن R حلقة و بالتالي العملية · تتوزع على $+$ من اليسار

2 - 2 المعيار الجزئي

تعريف 2 - 2 - 1

ليكن M هو معيار يساري على R فإن $\varnothing \neq U \subseteq M$ يسمى معيار جزئي من M اذا تحقق

1. $(U,+) \leq (M,+)$ (زمرة جزئية)
2. لكل $a \in R$ و لكل $u \in U$ فـــإن $au \in U$

مثال 2 - 2 - 1

في الزمرة الابدالية $(G,+)$ و المعيار اليساري المعرف على $\mathbb{Z}$ في المثال 2 - 1 - 1. فإن المعايير الجزئية من G هي الزمر الجزئية من $(G,+)$

الحل

لتكن $(H,+)$ زمرة جزئية من $(G,+)$ يجب ان نثبت H معيار جزئي من G على $\mathbb{Z}$

1. $(H,+) \leq (G,+)$ (حسب الفرض)
2. ليكن $n \in \mathbb{Z}$ و $x \in H$ فإن

$$nx = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ من المرات}}, & n > 0 \\ \underbrace{(-x) + (-x) + \cdots + (-x)}_{n \text{ من المرات}}, & n < 0 \end{cases} \in H$$

لان H مغلقة تحت العملية + بالتالي H معيار جزئي من G على الحلقة $\mathbb{Z}$.

مثال 2 - 2 - 2

ليكن M معيار يساري على الحلقة R فإن المجموعة $R_x = \{ax \mid a \in R\}$ هو معيار جزئي من M لكل $x \in M$.

الحل

ليكن $x \in M$ يجب ان نثبت R_x معيار جزئي من M على الحلقة R.

1. لكل $a, b \in R$:

$$ax - bx = \underbrace{(a-b)}_{\in R} x \in R_x$$

فإن $(R_x,+) \leq (M,+)$

2. لكل $a,b \in R$:

$$b(ax) = \underbrace{(ba)}_{\in R} x \in R_x$$

مبرهنة 2 - 2 - 1

لتكن R حلقة و ليكن M معيار يساري على R فإن $N \subseteq M$ يكون معيار جزئي من M اذا و فقط اذا

1. $N \neq \varnothing$
2. $x+ry \in N$ لكل $r \in R$ و لكل $x,y \in N$

البرهان

نفرض N هو معيار جزئي من M ← $0 \in N$ ← $N \neq \varnothing$ و من تعريف المعيار الجزئي فإن $ry \in N$ لكل $y \in N, r \in R$ و بما أن $(N,+)$ زمرة ← $x+ry \in N$ لكل $x,y \in N, r \in R$.

عكسياً نفرض أن $N \neq \varnothing$ و $x+ry \in N$ لكل $x,y \in N, r \in R$ ليكن $r=-1$ ← $x-y \in N$ لكل $x,y \in N$ أي أن $(N,+) \leq (M,+)$، و اذا كان $x=0$ فإن $ry \in N$ لكل $y \in N, r \in R$ أي أن N يصبح معيار جزئي من M. □

2 - 3 التشاكل المعياري

تعريف 2 - 3 - 1

لتكن R حلقة و ليكن كل من M و N معيار يساري على R فإن الدالة $\phi : M \to N$ تسمى تشاكل معياري يساري اذا كان

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ لكل $x,y \in M$.
2. $\phi(rx) = r\phi(x)$ لكل $x \in M, r \in R$.

ملاحظة

1. التشاكل المعياري اليساري يسمى تماثل معياري isomorphism اذا كانت الدالة $\phi : M \to N$ تباين و شاملة و نقول M و N متماثلين isomorphic و نكتب $M \cong N$.
2. تسمى المجموعة

$$\ker\phi = \{m \in M \mid \phi(m) = 0\}$$

بنواة التشاكل ϕ و المجموعة

$$\phi(M) = \{n \in N \mid n = \phi(M), \exists m \in M\}$$

بصورة التشاكل ϕ

3. التشاكل المعياري اليميني يعرف بشكل مشابه ولكن على عملية الضرب xr حيث $x \in M, r \in R$

2 - 4 معيار القسمة

مبرهنة 2 - 4 - 1

ليكن U معيار جزئي من المعيار اليساري M على الحلقة R. لتكن M/U زمرة القسمة، نعرف عملية الضرب

$$\cdot : R \times M/U \to M/U, \quad a(x+U) := ax + U$$

M/U مع عملية الضرب المعرفة أعلاه يكون معيار معرف على R و يسمى معيار القسمة. في M/U لدينا العمليات

$$(x+U)+(y+U) = (x+y)+U$$

و

$$a(x+U) = ax + U$$

البرهان

لكل $\alpha, \beta \in R$ و لكل $x, y \in M$

.1

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(x+U) &= (\alpha+\beta)x + U \\ &= (\alpha x + \beta x) + U \\ &= (\alpha x + U) + (\beta x + U) \\ &= \alpha(x+U) + \beta(x+U)\end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned}\alpha[(x+U)+(y+U)] &= \alpha[(x+y)U] \\ &= \alpha(x+y) + U \\ &= (\alpha x + \beta y) + U \\ &= (\alpha x + U) + (\alpha y + U) \\ &= \alpha(x+U) + \alpha(y+U)\end{aligned}$$

.3

$$(\alpha\beta)(x+U) = (\alpha\beta)x + U$$

$$= \alpha(\beta x) + U$$
$$= \alpha[\beta x + U]$$
$$= \alpha[\beta(x + U)]$$

مبرهنة 2 - 4 - 2

لتكن R حلقة، M معيار يساري على R و N هو معيار جزئي منه. فإن التطبيق الطبيعي

$$\pi : M \to M/N, \quad \pi(x) = x + N$$

يمثل تشاكل معياري

البرهان

لكل $r \in R, x, y \in M$

$$\begin{aligned}\pi(x + y) &= (x + y) + N \\ &= (x + N) + (y + N) \\ &= \pi(x) + \pi(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(rx) &= rx + N \\ &= r(x + N) \\ &= r\pi(x)\end{aligned}$$

مبرهنة 2 - 4 - 3

ليكن M, N معايير يسارية على الحلقة R، فإن الدالة $\phi : M \to N$ تكون تشاكل معياري اذا و فقط اذا كان

$$\phi(rx + y) = r\phi(x) + \phi(y)$$

لكل $x, y \in M$ و لكل $r \in R$

البرهان

نفرض ϕ تشاكل فإن

$$\phi(rx + y) = \phi(rx) + \phi(y) = r\phi(x) + \phi(y)$$

لكل $x, y \in M$ و لكل $r \in R$.

عكسياً نفرض $\phi(rx + y) = r\phi(x) + \phi(y)$ لكل $x, y \in M$ و لكل $r \in R$. نأخذ $r = 1$ ينتج $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ لكل $x, y \in M$ و لو أخذنا $y = 0$ ينتج $\phi(rx) = r\phi(x)$ و بالتالي $\phi : M \to N$ يكون تشاكل معياري . □

تعريف 2 - 4 - 1

ليكن كل من A, B معيار جزئي من المعيار اليساري M على الحلقة R نعرف الجمع لـــــ A و B على انه المجموعة

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

2 - 5 مبرهنات التماثل

مبرهنة 2 - 5 - 1

ليكن كل من M, N معيار يساري على الحلقة R و لتكن الدالة $\phi : M \to N$ تشاكل معياري يساري فإن $\ker\phi$ هو معيار جزئي من M و $M/\ker\phi \cong \phi(M)$

البرهان

نفرض $K = \ker\phi$. نثبت K معيار جزئي من M. نلاحظ

$$\phi(0) = \phi(0 + 0) = \phi(0) + \phi(0) \Rightarrow \phi(0) = 0$$

أي أن $0 \in K \Leftarrow K \neq \varnothing$. الآن لكل $x, y \in K$ و لكل $r \in R$ نلاحظ

$$\phi(rx + y) = r\phi(x) + \phi(y) = r \cdot 0 + 0 = 0$$

اذن $rx + y \in K$ و بالتالي K معيار جزئي من M. الآن نعرف الدالة

$$f : M/K \to \phi(M), \quad f(x + K) = \phi(x), \forall x \in M$$

نثبت أولاً ان f معرفة تعريفاً حسناً. اذا كان $x + K = y + K$ اذن $x - y \in K$ و من ثم

$$\begin{aligned} \phi(x - y) = 0 \Rightarrow \phi(x) - \phi(y) = 0 &\Rightarrow \phi(x) = \phi(y) \\ &\Rightarrow f(x + K) = f(y + K) \end{aligned}$$

الآن نثبت f تشاكل معياري يساري، لكل $x, y \in M$ و $r \in R$

$$\begin{aligned} f[r(x + K) + (y + K)] &= f[(rx + y) + K] \\ &= \phi(rx + y) \\ &= r\phi(x) + \phi(y) \\ &= rf(x + K) + f(y + K) \end{aligned}$$

الآن نثبت f دالة تقابل [تباين و شاملة]

$$f(x + K) = f(y + K) \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$$

$$\Rightarrow \phi(x-y)=0$$
$$\Rightarrow x-y\in K$$
$$\Rightarrow x+K=y+K$$

بالتالي f دالة تباين

$$\forall y\in\phi(M)\Rightarrow \exists x\in M: y=\phi(x)=f(x+K)$$

اذن الدالة f شاملة و بالتالي f تماثل معياري و من ثم $M/K\cong\phi(M)$

مبرهنة 2 - 5 - 2

ليكن كل من A, B معيار جزئي من المعيار اليساري M على الحلقة R فإن

$$(A+B)/B\cong A/(A\cap B)$$

البرهان

سوف نستخدم مبرهنة التماثل الأولى حيث نعرف الدالة

$$f: A+B\to A/(A+B),\quad f(a+b)=a+(A\cap B)$$

نثبت اولاً أن f معرفة تعريفاً حسناً. لو كان $a_1+b_1=a_2+b_2$ فإن $a_1-a_2=b_2-b_1$ و حيث أن $a_1-a_2\in A$ و $b_2-b_1\in B$ يكون لدينا $a_1-a_2\in A\cap B$ و بالتالي

$$a_1+(A\cap B)=a_2+(A\cap B)\Rightarrow f(a_1+b_1)=f(a_2+b_2)$$

الآن نثبت أن f تشاكل معياري يساري. لكل $a_1,a_2\in A$ و لكل $b_1,b_2\in B$ و لكل $r\in R$

$$\begin{aligned} f[r(a_1+b_1)+(a_2+b_2)] &= f[\underbrace{(ra_1+a_2)}_{\in A}+\underbrace{(rb_1+b_2)}_{\in B}] \\ &= (ra_1+a_2)+(A\cap B) \\ &= r[a_1+(A\cap B)]+[a_2+(A\cap B)] \\ &= rf(a_1+b_1)+f(a_2+b_2) \end{aligned}$$

الآن نثبت f دالة شاملة

$$\forall y\in A/(A\cap B)\to \exists a\in A: y=a+(A\cap B)=f(a+b), b\in B \text{ لبعض}$$

الآن نوجد نواة التشاكل

$$\begin{aligned} \ker f &= \{a+b \mid f(a+b)=A\cap B\}=\{a+b\mid a+(A\cap B)=A\cap B\} \\ &= \{a+b\mid a\in A\cap B\}=\{a+b\mid a\in B\}=B \end{aligned}$$

اذن من مبرهنة التماثل الاولى نحصل على

$$\boxed{(A+B)/\ker f \cong A/(A\cap B)} \Rightarrow \boxed{(A+B)/B \cong A/(A\cap B)}$$

مبرهنة 2 - 5 - 3

ليكن M معيار على الحلقة R و كل من A, B معيار جزئي منه مع $A \subseteq B$ فإن

$$(M/A)/(B/A) \cong M/B$$

البرهان

نعرف الدالة

$$f : M/A \to M/B, \quad f(x+A) = x+B, \forall x \in M$$

نثبت f معرفة تعريفاً حسناً. لو كان $x+A = y+A$ فإن $x-y \in A$ و بما أن $A \subseteq B$ فإن $x-y \in B$ و بالتالي

$$x+B = y+B \Rightarrow f(x+A) = f(y+A)$$

نثبت الآن f تشاكل معياري يساري. لكل $x, y \in M$ و لكل $r \in R$

$$\begin{aligned} f[r(x+A)+(y+A)] &= f[(rx+y)+A] \\ &= (rx+y)+B \\ &= r(x+B)+(y+B) \\ &= rf(x+A)+f(y+A) \end{aligned}$$

الآن نثبت f دالة شاملة

$$\forall y \in M/B \to \exists x \in M : y = x+B = f(x+A)$$

الآن نوجد نواة التشاكل f

$$\begin{aligned} \ker f &= \{x+A \mid f(x+A) = B\} \\ &= \{x+A \mid x+B = B\} \\ &= \{x+A \mid x \in B\} = B/A \end{aligned}$$

اذن من مبرهنة التماثلل الأولى

$$(M/A)/(B/A) \cong M/B$$

المصادر

[1] John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley Publishing, 2003.

[2] Jonathon K. Hodge, Steven Schlicker, and Ted Sundstrom. *Abstract Algebra*. CRC Press, 2024.

[3] Gerhard Rosenborg, Annika Schuernborg, and Leonard Wienke. *Abstract Algebra With Applications to Galois Theory, Algebraic Geometry, Representation Theory and Cryptography*. Mathematics Subject Classification, 2020.

[4] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. University of Vermont, 2004.