الفصل الأول

المتغير العشوائي

Random Variable

1 - 1 التعريف

المتغير العشوائي X هو فكرة تربط فضاء العينة بالاعداد الحقيقية. حيث اذا كان لدينا تجربة عشوائية ما فإن المتغير العشوائي سوف يربط كل عنصر من فضاء العينة بعدد حقيقي

مثال

Consider the experiment of tossing a coin twice, then

تجربة قلب عملة معدنية مرتين فضاء العينة فيها

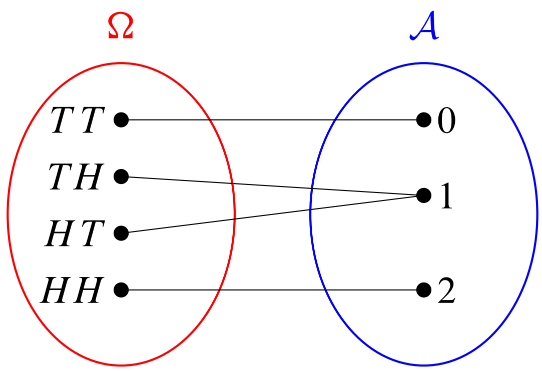
$$\Omega = \{TT, TH, HT, HH\}$$

Let X be the r.v. denote the number of heads

هنا فرضنا ان X هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الوجوه التي تظهر H، أي أن

$$X(w) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad w = TT \\ 1 & \text{if} \quad w = TH, HT \\ 2 & \text{if} \quad w = HH \end{cases}$$

اذن فضاء المتغير X هو $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$



ملاحظة

هناك نوعان رئيسيان للمتغير العشوائي

1. **النوع المستمر Continous type:** هو المتغير الذي يأخذ قيم بين عددين (فترة) مثل $1 < X < 3$
2. **النوع المتقطع Discrete type:** هو المتغير الذي يأخذ قيم معدودة مثل $X = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1 - 2 الدالة الاحتمالية Probability Function (*p.f.*)

الدالة الاحتمالية هي تمثل الاحتمالية للمتغير العشوائي X الذي يأخذ قيم حقيقية من فضاء العينة. و هناك نوعان من الدالة الاحتمالية:

1. دالة الكتلة الاحتمالية Probability Mass Function (*p.m.f.*)

عندما يكون X متغير عشوائي متقطع و يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن الدالة الاحتمالية تعرف بالشكل

$$f(x) = P_r(x) = \begin{cases} P_r(X = x_i) & i = 1, 2, \ldots, n \\ o & \text{otherwise} \end{cases}$$

مع الخصائص الآتية

1. $P_r(x_i) \geq 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ اي بمعنى ان الدالة غير سالبة.
2. $\sum_i P_r(x_i) = 1$.
3. $P_r(x \in A) = \sum_{x \in A} P_r(x)$. حيث ان A مجموعة جزئية من X.

مثال

Let X be a random variable of discrete type with

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{15} & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Is $f(x)$ a *p.m.f.*
2. If $A = \{2, 3\}$ find $P(A)$

المطلب الاول هو هل ان الدالة المعطاة تمثل دالة احتمالية ام لا و المطلب الثاني ايجاد احتمالية المجموعة A.

الحل

1. يجب ان نطبق الشرطان. الاول ان الدالة غير سالبة اي نجد قيم الدالة عند المجال ونرى

$$f(1)=\frac{1}{15}, f(2)=\frac{2}{15}, f(3)=\frac{3}{15}, f(4)=\frac{4}{15}, f(5)=\frac{5}{15}$$

$$f(x)=0, \text{otherwise}$$

اذن $f(x)\geq 0$. الآن نجد مجموع الدالة لكل قيم المجال و يجب ان يكون الناتج 1:

$$\begin{aligned}\sum_x f(x) &= \sum_x \frac{x}{15}\\ &= \frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}\\ &= \frac{15}{15}=1\end{aligned}$$

اذن الدالة $f(x)$ هي دالة كتلة احتمالية $\therefore\ f(x)$ is $p.m.f$

2. لنجد احتمالية المجموعة A نجد مجموع الدالة على عناصر A.

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{x\in A} P_r(x)\\ &= P_r(X=2)+P_r(X=3)\\ &= \frac{2}{15}+\frac{3}{15}\\ &= \frac{5}{15}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

2- دالة الكثافة الاحتمالية .Probability Density Function *p.d.f.*

عندما يكون X متغير عشوائي مستمر أي يأخذ قيم بين عددين $x_1 < X < x_2$. اذن $f(x)$ هي .*p.d.f* و تمتلك الخواص الآتية:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{\forall x} f(x)\,dx = 1$
3. $P_r(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

مثال

Let X be r.v. of continuous type with

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Is $f(x)$ *p.d.f.* of X? graph $f(x)$

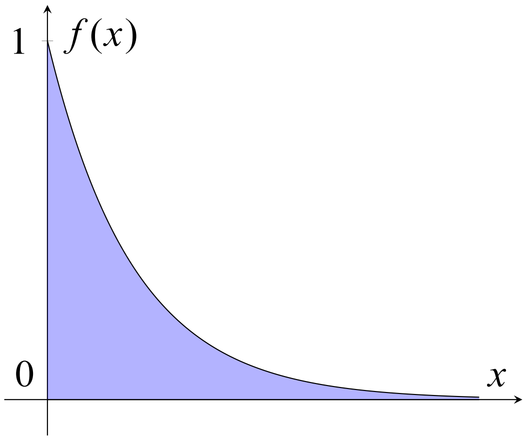
لدينا متغير عشوائي مستمر مع الدالة $f(x)$ هل أن الدالة تمثل دالة كتلة احتمالية؟ مع رسم الدالة.

الحل

نبطق التكامل

$$\int_{\forall x} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -[e^{-x}]_0^\infty = -[0-1] = 1$$

اذن الدالة تمثل دالة كتلة احتمالية.



مثال

Let

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

be the *p.d.f.* of X.

1) Find the value of c

2) Compute $P(X < \frac{1}{2})$

3) Compute $P(X > \frac{1}{2})$

المعطيات: دالة كتلة احتمالية (اي تحقق الشروط) و المطلوب ايجاد قيمة المجهول c و بعد ذلك ايجاد الاحتماليات

الحل

1) بما أن الدالة تحقق الشروط اذن تكاملها على المجال $= 1$ و بالتالي:

$$\therefore \int_{\forall x} f(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 cx^2\,dx = 1 \Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow c\left[\frac{1}{3} - 0\right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

2) هنا الاحتمالية اقل اي حدود التكامل من اقل قيمة في المجال (هي 0) الى الحد $\frac{1}{2}$

$$P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} 3x^2\, dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

3) هنا الاحتمالية اكبر اي حدود التكامل من الحد الادنى $\frac{1}{2}$ الى اعلى قيمة في المجال وهي 1

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} 3x^2\, dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$