



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات



تحويل لابلاس

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالب

عباس ناجح

إشراف

2025 - 2024

المحتويات

الفصل الأول : تحويل لابلاس وخواصه

- 3 1 - 1 تحويل لايلاس
- 3 2 - 1 التعريف
- 4 3 - 1 تحويل لايلاس لبعض الدوال

الفصل الثاني : تطبيقات

- 7 1 - 2 معادلة الحركة Equation of Motion
- 8 2 - 2 معادلة تدفق بوازوي Poiseuille's Flow Equation
- 12 3 - 2 الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion

الفصل الأول

تحويل لابلاس وخواصه

المقدمة

في هذا الفصل تقدم طريقة أخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة وأنظمة هذه المعادلات. تسعى هذه الطريقة بطريقة تحويل لايلاس. بهذه الطريقة، يتم تحويل مسألة القيمة الأولية إلى معادلة جبرية أو نظام معادلات يمكن حله باستخدام الطرق الجبرية وجدول تحويلات لايلاس. تشبه هذه الطريقة في بعض النواحي استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.

1 - 1 تحويل لايلاس

تحويل لايلاس هو عملية أخرى على الدول الرياضية لتحويلها من مجال إلى آخر، عادة التحويل من مجال الزمن إلى مجال التردد. يستخدم أيضاً لحل المعادلات التفاضلية لأنه يحولها إلى معادلات جبرية. سمي هذا التحويل نسبة إلى العالم الفرنسي لايلاس الذي عاش في القرن التاسع عشر.

2 - 1 التعريف

افترض أن الدالة f معرفة للقيم $t \geq 0$ ، فإن تحويل التكامل:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

يُسمى تحويل لايلاس للدالة f .

مثال 1 - 2 - 1

احسب تحويل لايلاس للدالة $f(t) = 1$.

الحل

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (1) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} - \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{s} [e^{-\infty} - e^0] \\
&= \frac{-1}{s} [0 - 1] \\
&= \frac{-1}{s} (-1) = \frac{1}{s} \\
\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt &= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

إذا كان $s > 0$ ، فإن التكامل أعلاه موجود ونحصل على

3 - 1 تحويل لايبلاس لبعض الدوال

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s - k} \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2} \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}\{\sinh(kt)\} = \frac{k}{s^2 - k^2} \quad (1.6)$$

$$\mathcal{L}\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2 - k^2} \quad (1.7)$$

مثال 1 - 3 - 1

احسب تحويل لابلاس للدالة $f(t) = e^{kt}$

الحل

باستخدام تعريف تحويل لابلاس

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

=

الفصل الثاني

تطبيقات

2 - 1 معادلة الحركة Equation of Motion

من قانون نيوتن الثاني لحركة جسم ما

$$\sum \vec{F} = ma \quad (2.1)$$

حيث

• $\sum \vec{F}$ مجموع القوى المؤثرة على الجسم.

• m كتلة الجسم.

• a تسارع الجسم ($a = \frac{d^2y}{dt^2}$)

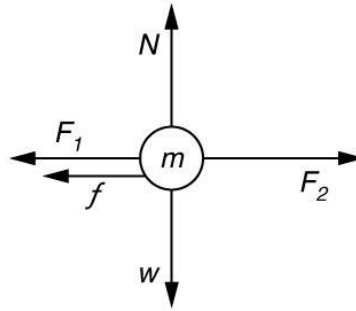


Figure 2 - 1: Equation of motion

نطبق هذه المعادلة على سقوط حر لجسم (نهمل قوة مقاومة الهواء) اذن هناك قوة واحدة تؤثر على الجسم وهي (وزن الجسم). يمكن حساب وزن الجسم من خلال القانون

$$\vec{F}_w = -mg$$

حيث g تعجيل الجاذبية الارضي. اذن بالتعويض في (2.1) نحصل على

$$-mg = m \frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (2.2)$$

مع الشروط الابتدائية

• $y(0) = y_0$ موضع السقوط.

• $y'(0) = v_0$ السرعة الابتدائية.

الآن نطبق تحويل لابلاس على المعادلة وتعويض الشروط الابتدائية

$$\mathcal{L}\{y''\} = \mathcal{L}\{-g\}$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{-g}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \left[\frac{-g}{s} + sy_0 + v_0 \right]$$

$$Y(s) = \frac{-g}{s^3} + \frac{v_0}{s^2} + \frac{y_0}{s}$$

بتطبيق لابلاس العكسي نحصل على

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \quad (2.3)$$

هذه المعادلة تصف موضع الجسم بعد مرور t من السقوط.

مثال عددي

سقط جسم من ارتفاع $y_0 = 100\text{m}$ بسرعة ابتدائية $v_0 = 0$ المطلوب إيجاد الارتفاع بعد $t = 2 \text{ sec}$

الحل

تسريع الجاذبية $g = 9.8\text{m/sec}^2$ اذن

$$y(2) = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times (2)^2 + 0 \times 2 + 100 = 80.4\text{m}$$

2 - 2 معادلة تدفق بوازوي Poiseuille's Flow Equation

يعد قانون بوازوي من القوانين الأساسية في ميكانيكا الموائع. حيث يصف تدفق الموائع اللزجة داخل

الانابيب الدقيقة. لكي نشق هذا القانون نستخدم من معادلات نافير ستوكس

(Navier Stokes Equations) للحالة الخاصة بتدفق طبقي منتظم لسائل لزج داخل انبوب اسطواني

افقي.

الفرضيات

- السريان ثابت (لا يوجد تغير زمني).
- السريان طبقي ومتناظر حول محور الانبوب.

- السائل غير قابل للانضغاط.
- لا توجد قوة خارجية (مثل الجاذبية) والضغط فقط هو المؤثر.
- السرعة تعتمد فقط على نصف القطر وليس على الطول z او الزمن t .

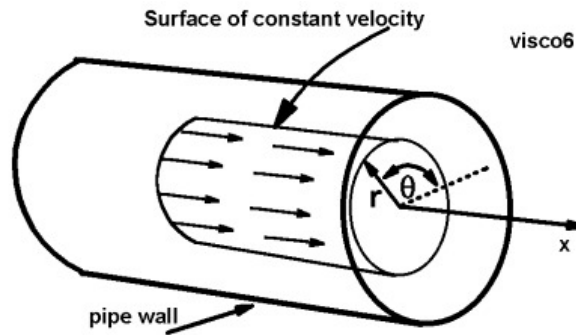


Figure 2 - 2: Poiseuille's Flow

معادلة نافير ستوكس المبسطة في الاتجاه z

نبدأ من معادلة نافير ستوكس العامة في الاتجاه z .

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \quad (2.4)$$

لكن بالفرضيات التي ذكرناها تصبح المعادلة (2.4):

$$\frac{dp}{dz} = \mu \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

ولكن dp/dz ثابت لأنه يعتمد فقط على z . والسريان غير متغير في z . نفرض

$$\frac{dp}{dz} = \frac{-\Delta p}{L}$$

حيث

- Δp فرق الضغط.
- L طول الأنبوب.

اذن تصبح المعادلة

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) &= \frac{-\Delta p}{\mu L} r \\ r \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{dv_z}{dr} &= \frac{-\Delta p}{\mu L} r\end{aligned}\quad (2.5)$$

مع الشروط الحدودية

$$v_z(0) = \text{finite}, \quad v_z(R) = 0$$

الآن نطبق تحويل لابلاس على (2.5) نحصل على

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left\{ r \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{dv_z}{dr} \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{-\Delta p}{\mu L} r \right\} \\ -\frac{d}{ds} [s^2 V(s) - s v_z(0) - v'_z(0)] + [s V(s) - v_z(0)] &= \frac{-\Delta p}{\mu L s^2} \\ -s^2 V'(s) - 2s V(s) + v_z(0) + s V(s) - v_z(0) &= \frac{-\Delta p}{\mu L s^2} \\ V'(s) + \frac{1}{s} V(s) &= \frac{\Delta p}{\mu L s^4}\end{aligned}$$

باستخدام عامل التكامل

$$I(s) = \exp \left(\int \frac{1}{s} \right) = \exp(\ln s) = s$$

اذن يكون الحل

$$\begin{aligned}I(s)V(s) &= \int \frac{\Delta p}{\mu L s^4} I(s) ds \\ sV(s) &= \int \frac{\Delta p}{\mu L s^3} ds \\ sV(s) &= -\frac{\Delta p}{2\mu L s^2} + C \\ V(s) &= -\frac{\Delta p}{2\mu L s^3} + \frac{C}{s}\end{aligned}$$

بتطبيق لابلاس العكسي

$$v_z(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C$$

بما ان $v_z(R) = 0$

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2$$

اذن الحل النهائي

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

الآن نستخرج معدل التدفق الحجمي Q بالقانون

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R v_z(r) \cdot 2\pi r \, dr \\ &= \int_0^R \left(\frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2) \right) \cdot 2\pi r \, dr \end{aligned}$$

بالتكامل نحصل على

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L}$$

تسمى هذه المعادلة بقانون بوازوي.

مثال تطبيقي

في الاوعية الدموية الصغيرة مثل الشرايين الدقيقة والشعيرات الدموية، يمكن اعتبار الدم كسائل لزج يتدفق تدفق طبقي. هنا نستخدم قانون بوازوي لتقدير معدل تدفق الدم عبر وعاء دموي دائري.

ملاحظات مهمة للتطبيق

- لان R^4 موجود في القانون فإن تغيراً بسيطاً في نصف القطر يؤدي الى تغير كبير في معدل التدفق.
- مثلاً، اذا تضاعف نصف القطر فإن Q يزيد بمقدار $2^4 = 16$.
- هذا يفسر كيف ان تضيق الشرايين (كما في حالة تصلب الشرايين) يؤدي الى انخفاض حاد في تدفق الدم.

مثال عددي بسيط

نصف القطر $R = 0.001\text{m}$ ، وفرق الضغط $\Delta p = 100\text{Pa}$ وطول الأنبوب $L = 0.1\text{m}$ و اللزوجة $\mu = 3 \times 10^{-3}\text{Pa} \cdot \text{s}$ فإن معدل التدفق

$$Q = \frac{\pi(0.001)^4}{8 \times 3 \times 10^{-3}} \cdot \frac{100}{0.1} \approx 1.31 \mu\text{L/s}$$

3 - 2 الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion

الحركة التوافقية البسيطة هي نوع من الحركة التذبذبية حيث يتحرك الجسم ذهاباً و اياباً حول موضع اتزان ، وتكون القوة المؤثرة عليه متناسبة طردياً مع الازاحة من موضع الاتزان ، لكنها تعاكسها في الاتجاه ، اي ان القوة المؤثرة عليه تحقق العلاقة

$$F = -kx$$

حيث F القوة المؤثرة على الجسم و x الازاحة من موضع الاتزان و k ثابت القوة (ثابت النابض في قانون هوك). والاشارة السالبة تعني ان القوة تعاكس اتجاه الزاوية.

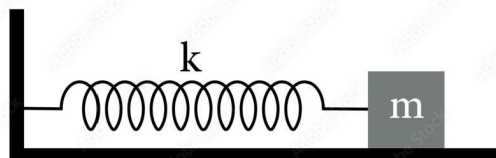


Figure 2 - 3: Simple Harmonic Motion

اشتقاق المعادلة التفاضلية

نبدأ من قانون نيوتن الثاني

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

وبما ان $F = -kx$ ، نكتب

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

بالقسمة على m

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

نسمي $\omega = \sqrt{k/m}$ ، حيث ω هو التردد الزاوي. فتصبح المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (2.6)$$

حيث الشروط الابتدائية

$$\bullet \quad x(0) = x_0 \text{ الازاحة الابتدائية.}$$

$$\bullet \quad x'(0) = v_0 \text{ السرعة الابتدائية.}$$

الآن نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (2.6) نحصل على

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \right\}$$

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + \omega^2X(s) = 0$$

$$(s^2 + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0$$

$$X(s) = x_0 \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} + v_0 \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

بتطبيق لابلاس العكسي نحصل على

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

يمكن اختزال هذه المعادلة الى

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi)$$

حيث

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-v_0}{\omega x_0} \right)$$

حيث C تسمى السعة للحركة. و ϕ زاوية الطور

مثال عددي

جسم كتلته $m = 0.5 \text{ Kg}$ مربوط بنابض ثابت مرونته $k = 2 \text{ N/m}$ عند الزمن $t = 0$ كان الجسم على بعد $x_0 = 0.1 \text{ m}$ من موضع الاتزان ويتحرك بسرعة ابتدائية $v_0 = 0.2 \text{ m/s}$ نحو موضع الاتزان. احسب الآتي

- التردد الزاوي ω .
- موضع الجسم بعد مرور زمن $t = 2 \text{ sec}$.
- السعة C و زاوية الطور ϕ .

الحل

1. التردد الزاوي

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.5}} = 2 \text{ rad/s}$$

2. حساب الازاحة. بما ان

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

اذن

$$x(t) = 0.1 \cos(2t) + \frac{0.2}{2} \sin(2t)$$

نعوض $t = 2$

$$x(2) = 0.1[\cos 4 + \sin 4] \approx -0.1410$$

اي ان الجسم عند $t = 2 \text{ s}$ يقع على بعد 0.141 متر على يسار موضع الاتزان.

3. نحسب السعة

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0.01 + \frac{0.04}{4}} \approx 0.1414$$

زاوية الطور

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-v_0}{\omega x_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-0.2}{0.2} \right) = -\frac{\pi}{4}$$