وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات ـ للدراسة المسائية

انواع فضاءات المتجهات

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

دعاء مجيد

اشراف

م. صفاء عبدالشهيد عبدالحميد

1446 هـ

2025 م

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

يَرفَعِ اللَّهُ الَّذينَ آمَنوا مِنكُم وَالَّذينَ أوتُوا العِلمَ
دَرَجاتٍ وَاللَّهُ بِما تَعمَلونَ خَبيرٌ ﴿١١﴾

(سورة المجادلة)

الإهداء

إلى سيدي ومولاي، صاحب العصر والزمان (عج)، وإلى أهل بيت النبوة (عليهم السلام)، منبع العلم والحكمة، الذين علمونا معنى الصبر والتضحية، أهدي ثمرة جهدي هذا، سائلًا الله القبول والتوفيق.

إلى أمي الحبيبة
نبع الحنان والعطاء، التي كانت لي السند والداعم الأول، دعواتها سر نجاحي وابتسامتها النور الذي أضاء دربي.

إلى أبي العزيز
رمز القوة والتضحية، الذي علّمني الصمود والعمل بجد، فله مني كل الامتنان والتقدير.

إلى زملائي وأصدقائي
الذين تقاسمنا معًا التعب والسهر، وكنتم خير معين في هذه المسيرة، شكرًا لوقوفكم بجانبي.

وأخيرًا، إلى نفسي
لكل الجهد الذي بذلته، والساعات التي قضيتها بين الكتب، ولكل لحظة تحديت فيها الصعاب، هذا الإهداء هو عربون فخر وامتنان لما وصلت إليه.

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر

الجزيل و الثناء الجميل إلى **م. صفاء عبدالشهيد عبدالحميد** كان لها الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا

ملاحظاتها وإنجازها لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاها الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

ملخص

قدمنا في هذا البحث

الفصل الاول: التعريف الاساسي للمتجهات والعمليات على المتجهات وكذلك مفهوم الزاوية بين المتجهات.

الفصل الثاني: في هذا الفصل عرفنا فضاء المتجهات وايضا عرفنا الفضاء الجزئي واخذنا الجمع المباشر للفضاءات الجزئية ومفهوم الاستقلال والارتباط الخطي.

الفصل الثالث: ناقشنا بعض الانواع الخاصة للفضاءات المتجهة وطبقنا شروط فضاء المتجهات على كل منها.

مقدمة

المتجهات هي كميات رياضية تتميز بامتلاكها مقدارًا واتجاهًا، وتُستخدم على نطاق واسع في العديد من المجالات العلمية والهندسية. تتمثل أهميتها في الحياة العملية في وصف الظواهر الفيزيائية مثل القوة والسرعة والتسارع، حيث تعتمد العديد من التطبيقات الهندسية والتقنية على تحليل المتجهات لفهم حركة الأجسام والتفاعل بين القوى المختلفة. بالإضافة إلى ذلك، تلعب المتجهات دورًا أساسيًا في الرسومات الحاسوبية، والملاحة الجوية، والذكاء الاصطناعي، وحتى في الاقتصاد والتمويل عند تحليل البيانات واتجاهات السوق.

أما **فضاء المتجهات،** فهو مفهوم رياضي يُعرّف على أنه مجموعة من المتجهات التي تخضع لعمليات الجمع والضرب العددي، ويمثل الأساس للعديد من النظريات الرياضية مثل الجبر الخطي والتحليل العددي. يُستخدم فضاء المتجهات في حل المعادلات التفاضلية، والنمذجة العلمية، والتشفير، مما يجعله عنصرًا جوهريًا في فهم وتطوير العديد من العلوم والتقنيات الحديثة.

الفصل الأول

المتجهات

1 - 1 مقدمة

المتجهات او ما يطلق عليها الكمية المتجهة هي طريقة يتم من خلالها قياس الكميات والتعرف على مقادير الاشياء. وقد تكون معرفة الكمية المتجهة من الامور الطبيعية في حياتنا والتي لها فوائد متعددة في جميع المجالات الحياتية

1 - 2 تعريف المتجهات [1]

هي كميات رياضية لها مقدار واتجاه. تستخدم المتجهات في العديد من المجالات مثل: الملاحة والطيران والطقس. تتميز المتجهات بخصائص مثل: الجمع والطرح والضرب.

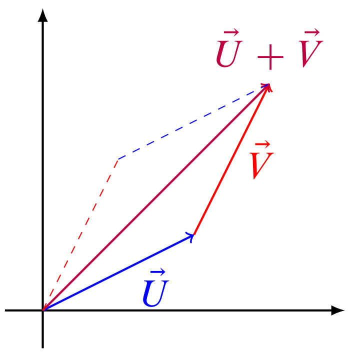
1 - 3 العمليات على المتجهات (العمليات الجبرية)

1. جمع المتجهات

عند جمع متجهين معاً يصبح عندها متجه جديد يختلف عنهما بالمقدار والاتجاه. ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة

$$\begin{aligned}\vec{U}+\vec{V} &= (U_1, U_2, \ldots, U_n) + (V_1, V_2, \ldots, V_n) \\ &= (U_1+V_1, U_2+V_2, \ldots, U_n+V_n)\end{aligned}$$

الشكل 1 - 1 يبين التمثيل الهندسي لعملية جمع المتجهات.



شكل 1 - 1: التمثيل الهندسي لجمع النتجهات

مثال

لجمع المتجهين

$\vec{W} = (3, -2)$ و $\vec{V} = (5, 4)$ نتبع الخطوات التالية

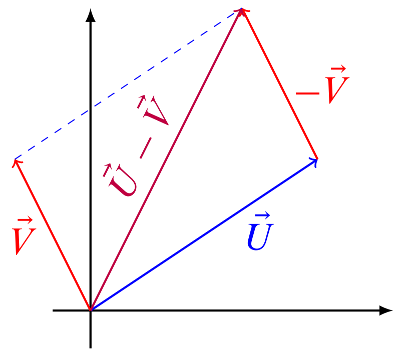
$$\begin{aligned}\vec{W} + \vec{V} &= (5,4) + (3,-2)\\ &= (5+3, 4-2)\\ &= (8,2)\end{aligned}$$

2. طرح المتجهات

يعطى بالعلاقة التالية

$$\vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V})$$

الشكل 1 - 2 يبين التمثيل الهندسي لطرح المتجهات.



شكل 1 - 2: التمثيل الهندسي لطرح النتجهات

مثال

ليكن $\vec{V} = (5,7), \vec{W} = (4,2)$ فإن

$$\begin{aligned}\vec{V} - \vec{W} &= (5,7) + (-4,-2)\\ &= (5-4, 7-2)\\ &= (1,5)\end{aligned}$$

اي بمعنى اخذ النظير الجمعي للمتجه الثاني وتصبح العملية كأنها عملية جمع.

3. ضرب عدد في متجه

عند ضرب عدد في متجه يتغير الطول فقط. وعند ضرب المتجه في عدد سالب يتغير الاتجاه، للتعبير عنه يعطى بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} k\vec{U} &= k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \\ &= (kU_1, kU_2, \ldots, kU_n) \end{aligned}$$

مثال

جد ناتج $12\vec{V}$ حيث $\vec{V} = (1, -9, 0, 2)$

الحل

$k = 12, \vec{V} = (1, -9, 0, 2)$

$$\begin{aligned} k\vec{V} &= 12(1, -9, 0, 2) \\ &= (12 \times 1, 12 \times -9, 12 \times 0, 12 \times 2) \\ &= (12, -108, 0, 24) \end{aligned}$$

1 - 4 خواص المتجهات [2]

لتكن $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ متجهات في $\mathbb{R}^n$ و c, k ثوابت

1. $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$
2. $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$
3. $\vec{U} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{U} = \vec{U}$
4. $\vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$
5. $(ck)\vec{U} = c(k\vec{U})$
6. $k(\vec{U} + \vec{V}) = k\vec{U} + k\vec{V}$
7. $(c + k)\vec{U} = c\vec{U} + k\vec{U}$
8. $1 \cdot \vec{U} = \vec{U}$

1 - 5 متجه الوحدة [1]

هو متجه ذو مقدار وحدة واحدة، يستخدم عادةً للاشارة الى الاتجاه. يعطى بالعلاقة التالية

$$\vec{U} = \frac{1}{||\vec{V}||} \cdot \vec{V}$$

مثال

ليكن $\vec{W} = (4, -2, 1)$ متجه. جد متجه الوحدة

الحل

$$\vec{U} = \frac{1}{||\vec{W}||} \cdot \vec{W}$$

$$\begin{aligned} ||W|| &= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 1} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (4, -2, 1) = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

1 - 6 الضرب العددي النقطي [4]

ليكن $\vec{U}, \vec{V}$ متجهين في $\mathbb{R}^n$ فإن الضرب النقطي لهما يعطى بالعلاقة

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

لضرب متجهين جبرياً نقطياً. نقوم بضرب العدد الاول من المتجه الاول في العدد الاول من المتجه الثاني، العدد الثاني من المتجه الاول في العدد الثاني من المتجه الثاني وهكذا...

مثال

ليكن $\vec{U} = (-8, 0, -12), \vec{V} = (5, 7, 1)$ اوجد $\vec{U} \cdot \vec{V}$.

الحل

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$
\begin{aligned}
&= (-8)(5) + (0)(7) + (-12)(1) \\
&= -40 + 0 - 12 \\
&= -52
\end{aligned}
$$

خواص الضرب النقطي

1. $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
2. $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$
3. $k(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (k\vec{U}) \cdot \vec{V}$
4. $\vec{V} \cdot \vec{V} = ||\vec{V}||^2$
5. $\vec{V} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

1 - 7 الزاوية بين المتجهين [2]

تعطى بالعلاقة التالية

$$\cos\alpha = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{||\vec{U}|| \cdot ||\vec{V}||}$$

من العلاقة السابقة نستطيع ان نحصل على

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = ||\vec{U}|| \cdot ||\vec{V}|| \cdot \cos\alpha$$

مثال

ليكن $\vec{U} = (1, 0, 0), \vec{V} = (0, 0, 1)$ جد الزاوية بين هذين المتجهين

الحل

$$
\begin{aligned}
\vec{U} \cdot \vec{V} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\
&= (1)(0) + (0)(0) + (0)(1) \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$||\vec{U}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$||\vec{V}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{||\vec{U}||\cdot||\vec{V}||} = \frac{0}{1} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

1 - 8 الضرب الاتجاهي [3]

ليكن $\vec{U}, \vec{V}$ متجهين في $\mathbb{R}^3$ فإن الضرب الاتجاهي لهما يكون كالاتي

$$\vec{U}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$
$$= i(U_2V_3 - U_3V_2) - j(U_1V_3 - U_3V_1) + k(U_1V_2 - U_2V_1)$$

مثال

ليكن $\vec{U} = (2,3,-2), \vec{V} = (1,-1,0)$ اوجد $\vec{U}\times\vec{V}$

الحل

$$\vec{U}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= i[(3)(0) - (-2)(-1)] - j[(2)(0) - (-2)(1)] + k[(2)(-1) - (3)(1)]$$
$$= i(0-2) - j(0+2) + k(-2-3)$$
$$= -2i - 2j - 5k$$

خصائص الضرب الاتجاهي

1. $\vec{U}\times\vec{V} = -(\vec{V}\times\vec{U})$
2. $\vec{U}\times(\vec{V}+\vec{W}) = (\vec{U}\times\vec{V}) + (\vec{U}\times\vec{V})$
3. $(\vec{U}+\vec{V})\times\vec{W} = (\vec{U}\times\vec{W}) + (\vec{U}\times\vec{W})$
4. $c(\vec{U}\times\vec{V}) = (c\vec{U})\times\vec{V} = \vec{U}\times(c\vec{V})$

5. $\vec{U} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{U} = \vec{0}$
6. $\vec{U} \times \vec{U} = \vec{0}$

متطابقة لاكرانج

$$||\vec{U} \times \vec{V}||^2 = ||\vec{U}||^2 \cdot ||\vec{V}|| - (\vec{U} \cdot \vec{V})^2$$

مثال

ليكن $\vec{U} = (-2, 1, 0), \vec{V} = (4, 2, -5)$ طبق متطابقة لاكرانج عليهما

الحل

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= i(-5-0) - j(10-0) + k(-4-4)$$
$$= -5i - 10j - 8k$$

$$||\vec{U} \times \vec{V}||^2 = (-5)^2 + (-10)^2 + (-8)^2$$
$$= 25 + 100 + 64$$
$$= 189$$

$$||\vec{U}||^2 = (-2)^2 + 1^2 + 0^2$$
$$= 4 + 1 + 0$$
$$= 5$$

$$||\vec{V}|| = 4^2 + 2^2 + (-5)^2$$
$$= 16 + 4 + 25$$

$$= 45$$

$$\begin{aligned}(\vec{U}\cdot\vec{V})^2 &= [(-2,1,0)\cdot(4,2,-5)]^2\\ &= (-8+2+0)^2\\ &= (-6)^2\\ &= 36\end{aligned}$$

نطبق العلاقة

$$189 = 5\times 45 - 36$$
$$189 = 225 - 36$$
$$189 = 189$$

اذن نلاحظ ان الطرف الايمن يجب ان يساوي الطرف الايسر لكي يحقق المتطابقة.

الفصل الثاني

فضاء المتجهات

مقدمة

تلعب الفضاءات المتجهة (الخطية) دوراً هاماً في العلوم الرياضية وتطبيقاتها وعناصرها قد تكون دوال او متتاليات عددية ... الخ ، يمكن جمعها و اجراء عمليات حسابية عليها وتكون نتيجة هذه العمليات من الفضاء نفسه.

2 - 1 تعريف فضاء المتجهات [1]

الفضاء المتجهي على الحقل F هو مجموعة غير خالية V من العناصر $\{x, y, \ldots\}$ (تدعى متجهات) و هذه المجموعة مزودة بعمليتين جبريتين:

العملية الاولى: داخلية نرمز لها بـ "+" اي الجمع المتجهي حيث يربط كل عنصرين x, y من V بعنصر ثالث $x + y$ ينتمي الى V.
العملية الثانية: خارجية نرمز لها بـ "." اي الضرب المتجهي الذي ينتج من ضرب عنصر x من الفضاء V بعنصر من الحقل التبديلي F.
نسمي الثلاثي $(V, +, \cdot)$ فضاء متجهي او فضاء خطي على F ونرمز له بـ $V(F)$ اذا حقق الشروط التالية:

لكل V, U, W متجهات و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $U + V = V + U$
2. $U + (V + W) = (U + V) + W$
3. $U + 0 = 0 + U = U$
4. $U + (-U) = 0$
5. $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$
6. $(\alpha + \beta) \cdot U = \alpha U + \beta U$
7. $(\alpha\beta) \cdot U = \alpha \cdot (\beta U)$
8. $1 \cdot U = U$

مثال

اذا فرضنا $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ لنعرف على $\mathbb{R}^n$ العمليتين "+" و "." بالشكل

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, x_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

$$\begin{aligned} 1)\ x + y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) = y + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ x + (y + z) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)] \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \ldots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1 + z_2, \ldots, z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

يوجد عنصر محايد وهو الصفر $(0, 0, \ldots, 0) = 0$ بحيث

$$\begin{aligned} 3)\ x + 0 &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) \\ &= x \end{aligned}$$

لكل متجه $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ نظيرهه $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$4)\ x + (-x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} 5)\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 1 \cdot x &= 1 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \alpha(x + y) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\ &= \alpha x + \alpha y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\alpha+\beta)\cdot x &= (\alpha+\beta)\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, \ldots, (\alpha+\beta)x_n)\\ &= (\alpha x_1+\beta x_1, \alpha x_2+\beta x_2, \ldots, \alpha x_n+\beta x_n)\\ &= \alpha x+\beta x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\alpha\beta)\cdot x &= (\alpha\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \ldots, \alpha\beta x_n)\\ &= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n))\\ &= \alpha\cdot(\beta x)\end{aligned}$$

2 - 2 الفضاء الجزئي [1]

ليكن $V(F)$ فضاءاً متجهياً على الحقل F و $\varnothing \neq W \subseteq V$ نسمي W فضاء متجه جزئي من فضاء المتجهات $V(F)$ اذا كان W فضاءاً متجهياً بحد ذاته بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب.

ويكون W فضاء متجهي اذا تحقق :

1. W مغلقة بالنسبة لعملية الجمع : $\forall x, y \in W \Rightarrow x+y \in W$
2. W مغلقة بالنسبة لعملية الضرب : $\forall \alpha \in F, \forall x \in W \Rightarrow \alpha\cdot x \in W$

ويمكن دمج الشرطين بشرط واحد :

$$\forall \alpha, \beta \in F, \forall x, y \in W \Rightarrow \alpha x+\beta y \in W$$

ملاحظة

ان كل فضاء متجهي $V(F)$ يحوي فضائين متجهين جزئيين على الاقل هما $W=\{0\}$ و $W=V(F)$.

مثال

هل ان $W=\{(x, y, 0) : x, y \in R\}$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.

الحل

$\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ عندئذٍ تأخذ العناصر الشكل

$$x=(a, b, 0), y=(c, d, 0)$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \alpha x+\beta y &= \alpha(a,b,0)+\beta(c,d,0) \\ &= (\alpha a,\alpha b,0)+(\beta c,\beta d,0) \\ &= (\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta dc,0)\in W \end{aligned}$$

اذن W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.

مبرهنة 2 - 2 - 1 [4]

تقاطع اي فضائين متجهين جزئين هو فضاء جزئي.

البرهان

لنفرض W_1, W_2 فضائين متجهين جزئين من فضاء المتجهات $V(F)$ ونبرهن ان $W_1\cap W_2$ فضاء جزئي من $V(F)$.

$$\forall\alpha,\beta\in F;\forall x,y\in W_1\cap W_2$$

$$\Rightarrow \alpha,\beta\in F;x,y\in W_1,x,y\in W_2$$

$$\Rightarrow \alpha x+\beta y\in W_1,\alpha x+\beta y\in W_2$$

$$\Rightarrow \alpha x+\beta y\in W_1\cap W_2.$$

ومنه$W_1\cap W_2$ فضاء متجهات جزئي.

2 - 3 الجمع المباشر [1]

ليكن M_1, M_2 فضائين متجهين جزئيين من الفضاء V نقول ان V هو الجمع المباشر لـ M_1 و M_2

$$V=M_1\oplus M_2$$

اذا تحقق الشرطان

1. تقاطع M_1 و M_2 يحتوي فقط المتجه الصفري

$$M_1\cap M_2=\{0\}$$

2. كل عنصر في V يمكن كتابته بشكل (وحيد) كمجموع عنصرين احداهما من M_1 و الآخر من M_2

$$v = m_1 + m_2, \forall v \in V$$

مثال

ليكن $V = \mathbb{R}^2$ و $M = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ و $N = \{(0.b) : b \in \mathbb{R}\}$ هل ان $V = M \oplus N$؟

الحل

1. نوجد التقاطع

$$\forall (x, y) \in M \cap N \Rightarrow (x, y) \in M \wedge (x, y) \in N$$

$$\Rightarrow y = 0 \wedge x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$M \cap N = \{0\}$$

2. لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ نلاحظ

$$(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in M} + \underbrace{(0, y)}_{\in N}$$

اذن $\mathbb{R}^2 = M \oplus N$.

2 - 4 التركيب الخطي [1]

ليكن V فضاء متجهات وان $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ متجهات في V يقال للمتجه $\vec{v}$ بأنه تركيب خطي من $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ اذا امكن التعبير عن $\vec{v}$ بالشكل

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n$$

حيث $k_1, k_2, \ldots, k_n$ اعداد حقيقية

مثال

ليكن $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$ و $\vec{v}_2 = (1, 0, -3)$ و $\vec{v}_3 = (-1, 0, 0)$ متجهات من $\mathbb{R}^3$
هل ان $\vec{v} = (2, -2, 5)$ تركيب خطي من $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

الحل

لتكن k_1, k_2, k_3 اعداد حقيقية بحيث

$$\vec{v} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$$
$$(2,-2,5) = k_1(1,2,1) + k_2(1,0,-3) + k_3(-1,0,0)$$
$$(2,-2,5) = (k_1, 2k_1, k_1) + (k_2, 0, -3k_2) + (-k_3, 0, 0)$$
$$(2,-2,5) = (k_1 + k_2 - k_3, 2k_1, k_1 - 3k_2)$$

نحصل على نظام من 3 معادلات في 3 متغيرات

$$k_1 + k_2 - k_3 = 2 \quad (1)$$
$$2k_1 = -2 \quad (2)$$
$$k_1 - 3k_2 = 5 \quad (3)$$

من المعادلة (2) نحصل على $k_1 = -1$ نعوض في المعادلة (3)

$$-1 - 3k_2 = 5 \Rightarrow -3k_2 = 6 \Rightarrow k_2 = -2$$

الان نعوض في (1)

$$-1 - 2 - k_3 = 2 \Rightarrow -k_3 = 5 \Rightarrow k_3 = -5$$

اذن للمنظومة حل و $\vec{v}$ تركيب خطي من $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ حيث

$$\vec{v} = -\vec{v}_1, -2\vec{v}_2 - 5\vec{v}_3$$

2 - 5 مولد فضاء المتجهات [1]

ليكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء المجهات V ، تكون S مولد لـ V اذا كان كل المتجهات هي تركيب خطي من S اي ان

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$$

مثال

ليكن $V = \mathbb{R}^3$ و $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ حيث

$$v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,0,2), v_3 = (1,1,0)$$

هل ان S تولد V؟

الحل

لكي نثبت ان S تولد V يجب اثبات ان كل متجه ينتمي الى V هو تركيب خطي من عناصر S ، كما يلي نفرض $v = (a, b, c)$ و $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ ، حسب تعريف التركيب الخطي فإن

$$\begin{aligned} v &= k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 \\ (a, b, c) &= k_1(1, 2, 1) + k_2(1, 0, 2) + k_3(1, 1, 0) \\ (a, b, c) &= (k_1, 2k_1, k_1) + (k_2, 0, 2k_2) + (k_3, k_3, 0) \\ (a, b, c) &= (k_1 + k_2 + k_3, 2k_1 + k_3, k_1 + 2k_2) \end{aligned}$$

بالتالي نحصل على نظام المعادلات

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= a \\ 2k_1 + k_3 &= b \\ k_1 + 2k_2 &= c \end{aligned}$$

نأخذ مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نأخذ لها المحدد

ملاحظات

1. اذا كان محددها يساوي صفراً فإنها غير قابلة للانعكاس وبالتالي ليس لها معكوس ، اي ان النظام ليس له حل ومنه نحصل على ان S لا تولد V.
2. اذا كان محددها لايساوي صفراً فإن المصفوفة تكون قابلة للانعكاس اي ان يوجد معكوس ومنه نحصل على المعاملات لها وبالتالي فإن S تولد V.

$$\begin{aligned} |A| &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \\ &= 0 + 1 + 4 - (0 + 2 + 0) \end{aligned}$$

$$= 5 - 2$$
$$= 3 \neq 0$$

بما إن محدد المصفوفة لا يساوي صفر ، اذن S تولد V.

2 - 6 الاستقلال الخطي و الارتباط الخطي [1]

في الجبر الخطي تدعى مجموعة من المتجهات مجموعة مستقلة خطياً اذا كان من المستحيل كتابة اي من المتجهات في المجموعة كتركيبة خطية من عدد نهائي من المتجهات الاخرى في المجمعوعة. اذا لم يتحقق ذلك ، تسمى هذه المجموعة مجموعة تابعة خطياً (مرتبطة خطياً).

تعريف

لتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء المتجهات V ، تكون S:

1. **مستقلة خطياً** اذا وجدت العناصر $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ كلها اصفاراً بحيث $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$.
2. **مرتبطة خطياً** اذا وجدت العناصر $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ ليست كلها اصفاراً بحيث $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$.

مثال

ليكن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ بحيث

$$v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (0, -1, 3), v_3 = (-2, 0, 1)$$

متجهات في $\mathbb{R}^3$ حدد فيما اذا كانت S مستقلة ام مرتبطة خطياً ؟

الحل

لتكن $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = (0, 0, 0)$$

$$k_1(1, 0, 2) + k_2(0, -1, 3) + k_3(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

ومن حل هذه المعادلات نحصل على المعادلات الخطية التالية

$$k_1 - 2k_3 = 0$$

$$-k_2 = 0$$

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0$$

وبحل المعادلات اعلاه نحصل على $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ اذن S مستقلة خطياً.

الفصل الثالث

انواع فضاء المتجهات

3 - 1 متجه الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ [4]

مجموعة العناصر على الشكل

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

حيث تعرف عمليتي الجمع و الضرب كالآتي

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + x_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

اثبات ان $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهات

حسب التعريف 2 - 1 لكي يكون فضاء متجهات يجب ان يحقق ما يلي

$$\begin{aligned}
1)\ x + y &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, x_n)\\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\\
&= (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) = y + x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\ x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [(y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)]\\
&= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)\\
&= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n)\\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1 + z_2, \dots, z_n)\\
&= (x + y) + z
\end{aligned}$$

يوجد عنصر محايد و هو الصفر $(0, 0, \dots, 0) = 0$ بحيث

$$\begin{aligned}
3)\ x + 0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0)\\
&= x
\end{aligned}$$

لكل متجه $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ نظيره $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$4)\ x + (-x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) = 0$$

$$
\begin{aligned}
5)\ \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 1 \cdot x &= 1 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \alpha(x + y) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\
&= \alpha x + \alpha y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\alpha + \beta) \cdot x &= (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \ldots, (\alpha + \beta)x_n) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) \\
&= \alpha x + \beta x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\alpha\beta) \cdot x &= (\alpha\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \ldots, \alpha\beta x_n) \\
&= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n)) \\
&= \alpha \cdot (\beta x)
\end{aligned}
$$

مثال

لتكن $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. أثبت أن W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.

الحل

للتحقق من أن W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$، نتحقق من الشرطين:

أولاً، إذا كانت $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in W$ و $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in W$، فإن:

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \quad \text{و} \quad x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

وبالتالي:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

ومجموع مركباته:

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$$

أي أن $\vec{u} + \vec{v} \in W$.

ثانياً، إذا كانت $\vec{u} = (x, y, z) \in W$ و $c \in \mathbb{R}$، فإن:

$$cx + cy + cz = c(x + y + z) = c \cdot 0 = 0 \quad \text{و} \quad c\vec{u} = (cx, cy, cz)$$

إذاً $c\vec{u} \in W$.

بما أن الشروط الثلاثة محققة، فإن W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.

3 - 2 فضاء المصفوفات $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ [2]

تعرف $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ على انها مجموعة كل المصفوفات ذات البعد $m \times n$ على حقل الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

الجمع: لتكن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفات من $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ فإن

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}], 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

الضرب: ليكن $c \in \mathbb{R}$ و $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ فإن

$$cA = [c\, a_{ij}], 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

اثبات ان $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ فضاء متجهات

حسب التعريف 2 - 1 لكي يكون فضاء متجهات يجب ان يحقق ما يلي

$$\begin{aligned}
1.\ A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] \\
&= [a_{ij} + b_{ij}] \\
&= [b_{ij} + a_{ij}] \\
&= B + A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.\ A + (B + C) &= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) \\
&= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] \\
&= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] \\
&= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \\
&= (A + B) + C
\end{aligned}$$

المصفوفة الصفرية $[0] = 0$ تمثل العنصر المحايد

3. $A + 0 = [a_{ij}] + [0] = A$

لكل $A = [a_{ij}]$ نظيرها المصفوفة $-A = [-a_{ij}]$ بحيث

4. $A + (-A) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [0] = 0$

5. $\forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) : 1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}]$
$$= [a_{ij}] = A$$

6. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) : \alpha(A + B) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}]$
$$\begin{aligned} &= [\alpha(a_{ij} + b_{ij})] \\ &= [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] \\ &= [\alpha a_{ij}] + [\alpha b_{ij}] \\ &= \alpha A + \alpha B \end{aligned}$$

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) : (\alpha + \beta)A = (\alpha + \beta)[a_{ij}]$
$$\begin{aligned} &= [(\alpha + \beta)a_{ij}] \\ &= [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] \\ &= \alpha A + \beta A \end{aligned}$$

8. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R}) : (\alpha\beta)A = (\alpha\beta)[a_{ij}]$
$$\begin{aligned} &= [(\alpha\beta)a_{ij}] \\ &= [\alpha(\beta a_{ij})] \\ &= \alpha(\beta A) \end{aligned}$$

مثال

لتكن $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. أثبت أن W فضاء جزئي من $M_2(\mathbb{R})$.

الحل

للتحقق من أن W فضاء جزئي من $M_2(\mathbb{R})$، نتحقق من الشرطين:

أولاً، إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

فإن:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

لأن مجموع الصف السفلي يبقى صفراً.

ثانياً، إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W \quad \text{و} \quad c \in \mathbb{R}$$

فإن:

$$cA=\begin{bmatrix} ca & cb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

بما أن الشرطين محققان، فإن W فضاء جزئي من $M_2(\mathbb{R})$.

3 - 3 فضاء كثيرات الحدود P_n [3]

مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة n او اقل تعرف كالآتي

$$P_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\}$$

الجمع: لكل $p(x), q(x) \in P_n$ لدينا $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$

الضرب: لكل $\alpha \in \mathbb{R}$ ولكل $p(x) \in P_n$ لدينا $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$

اثبات ان P_n فضاء متجهات

حسب التعريف 2 - 1 لكي يكون فضاء متجهات يجب ان يحقق ما يلي

1. $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = q(x) + p(x) = (q+p)(x)$
2. $[p+(q+r)](x) = p(x) + (q+r)(x)$
$$= p(x) + q(x) + r(x)$$
$$= (p+q) + r(x)$$
$$= [(p+q)+r](x)$$

كثيرة الحدود الصفرية $0(x) = 0$ تمثل العنصر المحايد

3. $(p+0)(x)=p(x)+0(x)=p(x)+0=p(x)$

لكل $p(x)\in P_n$ نظيرها كثيرة الحدود $(-p)(x)=-p(x)$

4. $(p+(-p))(x)=p(x)+(-p)(x)=p(x)-p(x)=0$

5. $\forall p(x)\in P_n:(1\cdot p)(x)=1\cdot p(x)=p(x)$

6. $$\begin{aligned}\forall\alpha\in\mathbb{R},\forall p,q\in P_n:(\alpha(p+q))(x)&=\alpha(p+q)(x)\\&=\alpha[p(x)+q(x)]\\&=\alpha p(x)+\alpha q(x)\\&=(\alpha p)(x)+(\alpha q)(x)\\&=[\alpha p+\alpha q](x)\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall p\in P_n:[(\alpha+\beta)p](x)&=(\alpha+\beta)p(x)\\&=\alpha p(x)+\beta p(x)\\&=(\alpha p)(x)+(\beta p)(x)\\&=(\alpha p+\beta p)(x)\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall p\in P_n:[(\alpha\beta)p](x)&=(\alpha\beta)p(x)\\&=\alpha(\beta p(x))\\&=\alpha[\beta p](x)\\&=[\alpha(\beta p)](x)\end{aligned}$$

مثال

لتكن $W=\{p(x)\in P_2\mid p(1)=0\}$. أثبت أن W فضاء جزئي من P_2.

الحل

للتحقق من أن W فضاء جزئي من P_2، نتحقق من الشرطين:

أولاً، إذا كانت $p(x),q(x)\in W$، أي أن $p(1)=0$ و$q(1)=0$، فإن:

$$(p+q)(1)=p(1)+q(1)=0+0=0$$

إذًا $p(x)+q(x)\in W$. ثانياً، إذا كانت $p(x)\in W$ و$c\in\mathbb{R}$، فإن:

$$(cp)(1)=c\cdot p(1)=c\cdot 0=0$$

إذًا $cp(x)\in W$. بما أن الشرطين محققان، فإن W فضاء جزئي من P_2.

المصادر

[1] بيرتون د.م. "مقدمة في الجبر الحديث" ترجمة عبدالعال جاسم محمد وسناء عبدمحمد، جامعة الموصل، الطبعة الأولى، 1982.

[2] د. عمران قوبا "كتاب الجبر الجزء الاول مبادئ الجبر المجرد".

[3] هادي جبر مصطفى وآخرون "الجبر" ، جامعة البصرة الطبعة الاولى ، 1993.

[4] David M. Burton "Abstract Algebra" , WM.C. Brown Publishers, 1988.