وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة البصرة

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

بعض مؤثرات لوباس

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

زهراء حسين سموم عجه

إشراف

م.م. تهاني عبدالمجيد

2025 - 2024

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

وَآخِرُ دَعواهُم أَنِ الحَمدُ لِلَّهِ رَبِّ العالَمينَ ﴿١٠﴾

سورة يونس

الإهداء

إلى سيدي ومولاي، صاحب العصر والزمان (عج)، وإلى أهل بيت النبوة (عليهم السلام)، منبع العلم والحكمة، الذين علمونا معنى الصبر والتضحية، أهدي ثمرة جهدي هذا، سائلًا الله القبول والتوفيق.

إلى أمي الحبيبة

التي كانت لي وطنًا وسكنًا، وصبرها كان قوتي، وحنانها كان بلسمًا يخفف عني عناء الأيام. يا نبع الحب والحنان، لو كان للعرفان شكلٌ، لكنتِ أنتِ صورته الأجمل

إلى أبي العزيز

السند والقوة، الذي لم يبخل يومًا بتقديم العون والنصيحة،يا من كنت دائمًا سندي لك كل الشكر والتقدير.

إلى أخواتي الغاليات

اللواتي كنَّ لي العائلة التي لا تُعوَّض، والصديقات اللاتي لم يفارقنني في دربي، دعمكنَّ منحني القوة للاستمرار، وشراكتكنَّ في هذه الرحلة زادتها جمال

إلى أصدقائي وصديقاتي

الذين كانوا سندًا في كل مرحلة من مراحل دراستي لاتقتصر الرحلة الدراسية على الكتب فقط، بل على الأشخاص الذين يحيطون بنا ويساعدوننا في تخطي الصعاب أنتم جزء من أجمل ذكرياتي، وستبقون دائمًا في قلبي."

أخيرًا، إلى نفسي...

إلى كل لحظة شعرتُ فيها بالتعب، إلى كل ليلة سهرتُ فيها لأصل إلى هذه اللحظة، لكل الجهد الذي بذلته، والساعات التي قضيتها بين الكتب ،إلى كل دمعة نزلت يأسًا، ولكل ابتسامة رسمتها رغم الصعوبات، إلى كل مرة شعرت فيها بالرغبة في الاستسلام لكنني قاومت، إلى كل جهد بذلته، وكل حلم تمسكت به... اليوم أهديكِ هذا الإنجاز، فهو ثمرة صبركِ وكفاحكِ. قد لا يكون الطريق كان سهلًا، لكنه كان يستحق كل خطوة فيه. شكرًا لكِ لأنكِ لم تستسلمي، ولأنكِ وقفتِ من جديد كلما تعثرتِ. هذا الإهداء لكِ، لأنكِ كنتِ تستحقينه دائمًا.

شكر و تقدير

الحمد لله ما تناهى درب ولا ختم جهداً ولا تم سعي الا بفضله اللهم ليس بجهدي واجتهادي وانما بفضلك وتوفيق كرمك.

وقبل ان نمضي نقدم اسمى ايات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الى الذين حملوا اقدس رسالة في الحياة ، الى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة ، الى جميع اساتذتنا الافاضل.

ونخص بالشكر والتقدير الاستاذة (تهاني عبدالمجيد).

اتشرف بوقوفي امام حضرتكم اليوم

المحتويات

الفصل الأول

مفاهيم اساسية

1 - 1 نظرية التقريب (Approximation theory) [1]

في الكثير من التطبيقات العلمية في الرياضيات أو الهندسة والتكنولوجيا، يمكن أن نحصل على دوال معقدة وأحيانًا غير مألوفة، وبذلك تصبح عملية دراسة هذه الدوال من حيث اتصالها وقابليتها للتفاضل أو التكامل وغيره من الموضوعات الصعبة جدًا والتي تستغرق الكثير من الوقت. كذلك يمكن أن نتقابل مع ما يسمى **الدوال المجدولة أو دوال البيانات** وهي تلك الدوال التي تعطى على شكل الثنائيات المرتبة:

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$$

حيث يكون المطلوب هو معرفة شكل العلاقة أو الدالة التي تربط بين فئة العقد $\{x_i\}$ وفئة قيم الدالة $\{y_i\}$ عند هذه العقد.

لكل هذه الأسباب وغيرها، يكون من الضروري والمفيد استبدال دالة بسيطة وغير معقدة بدالة ذات شكل رياضي معقد أو دالة بيانات بحيث يمكن اعتبارها بديلاً للدالة المعطاة. في الواقع، أن **نظرية التقريب** تتعامل مع كل المفاهيم السابقة.

والتقريب يمكن أن يكون بواسطة الدوال كثيرات حدود جبرية أو غير جبرية أو بواسطة دوال أسية أو دوال مثلثية وغيرها.

2 - 1 الدالة (Function) [5]

تعريف: هي علاقة من المجموعة A الى المجموعة B يقترن فيها كل عنصر في A بعنصر واحد فقط في B وتكتب بالصورة $f : A \to B$ وتسمى المجموعة A بمجال الدالة و المجموعة B (نطاق مصاحب) ، والمجموعة الجزئية B التي تتألف من جميع صور عناصر A في الدالة f تسمى مدى الدالة ويرمز له بالرمز $f(A)$ بحيث

$$f(A) = \{a \in A : f(a) \in B\}$$

3 - 1 الدالة الخطية (Linear function) [3]

تعريف: هي علاقة تربط عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي ax تسمى دالة خطية معاملها هو a ، والعدد ax صورة العدد x بالدالة الخطية التي نرمز له بالرمز f ونكتب $f(x) = ax$ هي صورة الدالة الخطية.

1 - 4 المؤثر (Operator) [3]

تعريف: المجال D للمؤثر S عبارة عن مجموعة غير خالية من الدوال الحقيقية جميعها لها نفس المجال X، ولكل $f \in D$ تكون $S(f)$ دالة حقيقية في المجال X.

1 - 5 المؤثر الخطي (Linear operator) [3]

تعريف: المؤثر F من X إلى Y يقال إنه خطي إذا تحقق:

$$F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ويرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X إلى Y بالرمز $L(X, Y)$.

1 - 6 فضاء المتجهات (Vector space) [4]

تعريف: لتكن V مجموعة غير خالية معرف عليها عمليتا الجمع والضرب بعدد ثابت. يقال إن V فضاء متجهات إذا تحققت البديهيات التالية لكل متجه u, v, w ولكل عدد حقيقي c, d:

1) $u + v \in V$

2) $u + v = v + u$

3) $u + (v + w) = (u + v) + w$

يوجد متجه صفري في V بحيث ان لكل $u \in V$

4) $0 + u = u + 0 = u$

لكل $u \in V$ يوجد متجه $(-u \in V)$ بحيث

5) $u + (-u) = (-u) + u - 0$

6) $cu \in V$

7) $c(u + v) = cu + cv$

8) $(c + d)u = cu + du$

9) $c(du) = (cd)u$

10) $1 \cdot u = u$

1 - 7 الفضاء الجزئي Subspace [4]

تعريف: لتكن M مجموعة جزئية من فضاء المتجهات V يقال ان M فضاء جزئي من V اذا كان M هو فضاء متجهات بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب بعدد معرف على V.

1 - 8 فضاء $C_h[0,\infty)$

$$C_h[0,\infty) = \{f \in C[0,\infty) : |f(t)| \le m(1+t)^h \text{for some } m > 0, h > 0\}$$

1 - 9 مبرهنة كوروفكن (Korovkin's Theorem) [6]

لتكن $S_n(f(x);x)$ متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة $L.P.O$ و الشروط التالية متحققة:

1. $S_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$
2. $S_n(t;x) = x + \beta_n(x)$
3. $S_n(t^2;x) = x^2 + \delta_n(x)$

حيث $\alpha_n(x), \beta_n(x), \delta_n(x)$ متتابعات متقاربة إلى 0 في الفترة $[a,b]$، فإن:

$$S_n(f(t);x) \to f(x) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

الفصل الثانـي

تحسين مؤثر لوباس الاعتيادي

2 - 1 مؤثر لوباس (Lupas) الاعتيادي [2]

تعرف متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة من الفضاء $C_h[0,\infty)$ إلى نفسه كما يلي:

$$L_n(f(t);x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)f(k/n)$$

حيث:

$$p_{n,k}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-(n+k)},\quad x\in[0,\infty)$$

بعض النتائج المباشرة للدالة $p_{n,k}(x)$

1) $\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)=1$

2) $\sum_{k=0}^{\infty}kp_{n,k}(x)=nx$

3) $\sum_{k=0}^{\infty}k^2p_{n,k}(x)=n^2x^2+nx^2+nx$

البرهان

$$1)\ \sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-(n+k)}$$

$$=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k$$

$$=\frac{1}{(1+x)^n}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-n}=1.$$

$$2)\ \sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(n+k-1)!}{k(k-1)!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^{k+1} (1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$= \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (n+k) p_{n,k}(x)$$

$$I = \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} n p_{n,k}(x) + I$$

$$(1+x)I = x(n+I)$$

$$I + xI = nx + xI$$

$$I = nx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}(x) = nx$$

$$3)\ \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(n+k-1)!}{k(k-1)!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(n+k)(n+k-1)!}{(k!(n-1)!} x^{k+1} (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(n+k) p_{n,k}(x)$$

$$= \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + (1+n)k + n) p_{n,k}(x)$$

$$= \frac{x}{1+x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k} + (1+n) \sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k} + n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} \right)$$

$$I = \frac{x}{x+1} (I + (1+n)nx + n)$$

$$(1+x)I = Ix + nx^2 + n^2x^2 + nx$$

$$I + Ix = Ix + nx^2 + n^2x^2 + nx$$

$$I = nx^2 + n^2x^2 + nx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k} = n^2x^2 + nx^2 + nx$$

2 - 2 تعريف المؤثر $\tilde{L}_n(f(t);x)$

تعرف متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة من الفضاء $C_h[0,\infty)$ الى نفسه كما يلي

$$\tilde{L}_n(f(t);x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

حيث

$$p_{n,k}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-(n+k)},\quad x\in[0,\infty)$$

3 - 2 مبرهنة كورفكن للمؤثر $\tilde{L}_n(f(t);x)$

لتكن $\tilde{L}_n(f(t);x)$ متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة $L.P.O$ و الشروط التالية متحققة

$$1)\;\; \tilde{L}_n(1;x)=1$$

$$2)\;\; \tilde{L}_n(t;x)=\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\to x$$

$$3)\;\; \tilde{L}_n(t^2;x)=\frac{n^2x^2+nx^2+2\alpha nx+\alpha^2}{n^2+2n\beta+\beta^2}\to x^2$$

$$\Rightarrow \tilde{L}_n(f(t);x)\to f(x)\quad \text{as}\quad n\to\infty$$

البرهان

$$1)\; \tilde{L}_n(1;x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-(n+k)}$$

$$=1$$

$$2)\ \tilde{L}_n(t;x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \cdot \frac{k+\alpha}{n+\beta}$$

$$= \frac{1}{n+\beta} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\,(k+\alpha)$$

$$= \frac{1}{n+\beta} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}(x) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \right]$$

$$= \frac{1}{n+\beta}\,[nx+\alpha] = \frac{nx+\alpha}{n+\beta} \to x$$

$$3)\ \tilde{L}_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} \right)^2$$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\,(k+\alpha)^2$$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\,(k^2+2\alpha k+\alpha^2)$$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k}(x) + 2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}(x) + \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \right]$$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left[n^2x^2 + nx^2 + nx + 2\alpha nx + \alpha^2\right]$$

$$= \frac{n^2x^2 + nx^2 + nx + 2\alpha nx + \alpha^2}{n^2 + 2n\beta + \beta^2} \to x^2$$

الفصل الثالث

مؤثر لوباس من نوع مجموع - تكامل

3 - 1 تعريف المؤثر $B_n(f(t);x)$

متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة من الفضاء $C_h[0,\infty)$ الى نفسه كما يلي

$$B_n(f(t);x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt$$

حيث $0 \le \alpha \le \beta$

ملاحظة

$$\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) t^m \, dt = \frac{(k+m)(k-m-2)!}{k!(n-1)!}$$

اثبات ان المؤثر $B_n(f(t);x)$ خطي وموجب

1) نثبت ان المؤثر $B_n(f(t);x)$ هو خطي

$$B_n((af+bg)(t);x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)(af+bg)\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[a\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \right.$$

$$\left. + b\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) g\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt\right]$$

$$= a(n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt\right]$$

$$+ b(n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) g\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt\right]$$

$$= aB_n(f(t);x) + bB(g(t);x)$$

اذن المؤثر خطي.

2) نثبت ان المؤثر $B_n(f(t);x)$ هو موجب

$$B_n(f(t);x) \geq 0 \iff f(t) \geq 0$$

$(\Leftarrow)$ نفرض ان $B_n(f(t);x) \geq 0$ ونبرهن $f(t) \geq 0$

بما ان $p_{n,k}(x) \geq 0$

$$\Rightarrow (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) \geq 0$$

$(\Rightarrow)$ نفرض ان $f(t) \geq 0$ ونبرهن $B_n(f(t);x) \geq 0$

$$\Rightarrow f(t) \geq 0$$

بما ان $p_{n,k}(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow B_n(f(t);x) \geq 0$$

3 - 2 مبرهنة كورفكن للمؤثر $B_n(f(t);x)$

لتكن $B_n(f(t);x)$ متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة $L.P.O$ و الشروط التالية متحققة

1) $B_n(1;x)=1$

2) $B_n(t;x)=\frac{n^2x+n}{(n+\beta)(n-2)}+\frac{\alpha}{n+\beta}\to x$

3) $B_n(t^2;x)=\frac{n^4x^2+n^3x^2+3n^3x+n^3x+2n}{(n+\beta)^2(n-2)(n-2)}+\frac{2\alpha xn^2+2n\alpha}{(n+\beta)^2(n-2)}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\to x^2$

$$\Rightarrow B_n(f(t);x)\to f(x)\quad \text{as } n\to\infty$$

البرهان

$$1)B_n(1;x)=(n-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\int_0^{\infty}p_{n,k}(t)\,dt=1$$

$$2)B_n(t;x)=(n-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\int_0^{\infty}p_{n,k}(t)\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right)dt$$

$$=\frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\int_0^{\infty}p_{n,k}(t)(nt+\alpha)\,dt$$

$$=\frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\left[n\int_0^{\infty}tp_{n,k}(t\,dt)+\alpha\int_0^{\infty}\alpha p_{n,k}(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\left[\frac{n(k+1)!(n-3)!}{k!(n-1)!}+\frac{\alpha k!(n-2)!}{k!(n-1)!}\right]$$

$$=\frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\left[\frac{n(k+1)k!(n-3)!}{k!(n-1)(n-2)(n-3)!}+\frac{\alpha k!(n-2)!}{k!(n-1)(n-2)!}\right]$$

$$=\frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\frac{n(k+1)!}{(n-1)(n-2)}+\frac{\alpha(n-1)}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{n(nx+1)}{(n+\beta)(n-2)} + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$= \frac{nx^2+n}{(n+\beta)(n-2)} + \frac{\alpha}{n+\beta} \to x$$

3) $$B_n(t^2;x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right)^2 dt$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)(nt+\alpha)^2\,dt$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)(n^2t^2+2\alpha nt+\alpha^2)\,dt$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)n^2t^2\,dt\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)2nt\alpha\,dt + \int_0^{\infty} p_{n,k}(t)\alpha^2\,dt\right]$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[n^2\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)t^2\,dt\right.$$

$$\left.+2n\int_0^{\infty} p_{n,k}t\alpha\,dt + \int_0^{\infty} p_{n,k}(t)\alpha^2\,dt\right]$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\frac{n^2(k+2)(n-4)!}{k!(n-1)!} + \frac{2n\alpha(k+1)(n-3)!}{k!(n-1)!} + \frac{\alpha^2k!(n-2)!}{k!(n-1)!}\right]$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\frac{n^2(k+2)(k+1)k!(n-4)!}{k!(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!} + \frac{2n\alpha(k+1)k!(n-3)!}{k!(n-1)(n-2)(n-3)!} + \frac{\alpha^2k!(n-2)!}{k!(n-1)(n-2)!}\right]$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\frac{n^2(k+2)(k+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\frac{2n\alpha(k+1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$+\frac{n-1}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\tfrac{\alpha^2}{n-1}$$

$$=\tfrac{n^2}{(n+\beta)^2(n-2)(n-3)}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)(k+2)(k+1)+\tfrac{2n\alpha}{(n+\beta)^2(n-2)}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)(k+1)$$

$$+\tfrac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)$$

$$=\tfrac{n^2}{(n+\beta)^2(n-2)(n-3)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)k^2+3\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)k+2\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\right]$$

$$+\tfrac{2n\alpha}{(n+\beta)^2(n-2)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)k+\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)\right]+\tfrac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)$$

$$=\frac{n^2(n^2x^2nx^2+3nx+nx+2)}{(n+\beta)^2(n-2)(n-3)}+\frac{2n\alpha(nx+1)}{(n+\beta)^2(n-2)}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\frac{n^4x^2+n^3x^2+3n^3x+n^3x+2n^2}{(n+\beta)^2(n-2)(n-3)}+\frac{2\alpha xn^2+2n\alpha}{(n+\beta)^2(n-2)}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\to x^2$$

3 - 3 تعريف المؤثر $\tilde{B}_n(f(t);x)$

تعرف متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة من الفضاء $C_h[0,\infty)$ الى نفسه كما يلي

$$\tilde{B}_n(f(t);x)=(n-1)\sum_{k=0}^{\infty}p_{n+2,k}(x)\int_0^{\infty}p_{n,k+1}(t)f(t)\,dt$$

4 - 3 مبرهنة كورفكن للمؤثر $\tilde{B}_n(f(t);x)$

لتكن $\tilde{B}_n(f(t);x)$ متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة $L.P.O$ تحقق الشروط التالية

1) $\tilde{B}_n(1;x)=1\to 1$

2) $\tilde{B}_n(t;x)=\dfrac{(n+2)x+2}{n-2}\to x$

$$3)\ \tilde{B}_n(t^2;x) = \frac{(n+2)(n+3)x^2 + 6(n+2)x + 6}{(n-3)(n-2)} \to x^2$$

$$\Rightarrow \tilde{B}(f(t);x) \to f(x) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

البرهان

$$1)\ \tilde{B}_n(1;x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k+1}(t)\,dt$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\left[\frac{(k+1)!(n-2)!}{(k+1)!(n-2)!}\right] = 1$$

$$2)\ \tilde{B}_n(t;x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k+1}(t)t\,dt$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\left[\frac{(k+2)!(n-3)!}{(k+1)!(n-1)(n-2)(n-3)!}\right]$$

$$= \frac{1}{n-2}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\,(k+2)$$

$$= \frac{1}{n-2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n+2,k}(x) + 2\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{n-2}[nx+2] = \frac{(n+2)x+2}{n-2}$$

$$3)\ \tilde{B}_n(t^2;x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k+1}(t)t^2\,dt$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\left[\frac{(k+3)!(n-4)!}{(k+1)!(n-1)!}\right]$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\left[\frac{(k+3)(k+2)(k+1)!(n-4)!}{(k+1)!(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\left[\frac{k^2+5k+6}{(n-2)(n-3)}\right]$$

$$= \frac{1}{(n-2)(n-3)}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\left[k^2+5k+6\right]$$

$$= \frac{1}{(n-2)(n-3)}\left[\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)k^2+5\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)k+6\sum_{k=0}^{\infty} p_{n+2,k}(x)\right]$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)x^2+6(n+2)x+6}{(n-2)(n-3)}$$

المصادر

[1] أ.د. اميل شكر الله ، كتاب التحليل العددي التطبيقي: باب نظرية التقريب، 2018 م.

[2] د. امل خليل ، رسالة ماجستير في علوم الرياضيات (لمؤثر لوباس الاعتيادي) ، 2005 م.

[3] د. نوري فرحان المياحي ، محاضرات في التحليل الدالي ، 2005 م.

[4] د. نزار حمدون شكري ، كتاب الجبر الخطي ، 2001 م.

[5] ووتر دورن ، مبادئ التحليل الرياضي ، 2002 م.

[6] P.P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory, 1959.