وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة البصرة

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات الدراسة الصباحية

دراسة الدوال غير المستمرة

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

فاطمة محسن

إشراف

ا.د. هاشم عبدالخالق كشكول

2025 م

1446 هـ

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

وَآخِرُ دَعواهُم أَنِ الحَمدُ لِلَّهِ رَبِّ العالَمينَ ﴿١٠﴾

سورة يونس

الإهداء

الى ...

النبي الأكرم معلم الامة الاعظم ، والى آل بيتة الطيبين الطاهرين ، الى من هم منبع العلم والدين ، عليهم صلوات الله وسلامة أجمعين .

الى امين الله وشمس الهدى أمام الخلق وبحر الندى الأمام المهدي المنتظر (عجل الله فرجه الشريف) .

الى شهداء العراق الابرار من الجيش و الشرطة ومجاهدي الحشد الشعبي الذين ضحوا من اجل تراب الوطن .

الى من علمونا حروفا من ذهب وكلمات كالدرر وعبارات من اسمى واجل عبارات في العلم (أساتذتنا الافاضل).

الى من سعى وشقي لانعم بالراحة والهناء الى الذي لم يبخل بشئ من اجل دفعي في طريق النجاح وان ارتقي سلم الحياة بحكمة وصبر (والدي الحبيب).

الى التي كلما نطقت شفاها كانت بالدعاء لنا ، نبع الحنان الصافي ورمز التفاني والتضحية وعموان المحبة (والدتي الحبيبة) .

الى رياحين حياتي وسند قلبي (اخواني واخواتي) .

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر الجزيل و الثناء الجميل إلى **د. هاشم عبدالخالق كشكول** كان له الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا ملاحظاته وإنجازه لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاه الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

الملخص

في هذا البحث درسنا مفهوم عدم الاستمرارية للدوال الحقيقية. حيث قدمنا في الفصل الاول المفاهيم الاساسية للدوال و في الفصل الثاني درسنا نقاط عدم الاستمرارية للدوال الحقيقية وصنفناها الى عدة انواع و اعطينا امثلة لكل نوع ، ودرسنا ايضاً المشتقات عند الدوال غير المستمرة و كذلك التكامل لهذه الدوال وكيف يمكن ان دالة غير مستمرة تكون مستمرة بالتكامل. واخيرا درسنا التقارب للدوال غير المسمتمرة حيث يمكن ان تكون متتابعة من الدوال غير المستمرة تتقارب الى دالة مستمرة.

مقدمة

تعد الدوال من أهم المفاهيم الرياضية التي تعبر عن العلاقة بين المتغيرات، حيث تربط كل عنصر في مجموعة معينة بعنصر وحيد في مجموعة أخرى. تلعب الدوال دورًا أساسيًا في مختلف فروع الرياضيات، مثل التحليل والجبر والإحصاء، كما تمتد تطبيقاتها إلى العلوم الطبيعية والهندسية والاقتصادية. فهي تساعد في فهم التغيرات، التنبؤ بالاتجاهات، وحل المشكلات المعقدة في مجالات متعددة.[4]

من بين الخصائص المهمة للدوال خاصية الاستمرارية، التي تحدد مدى سلاسة تغير القيم دون انقطاعات. ومع ذلك، هناك العديد من الظواهر التي لا يمكن تمثيلها بدوال مستمرة، مما يجعل دراسة **الدوال غير المستمرة** ضرورية. هذه الدوال هي التي تحتوي على نقاط يحدث فيها تغير مفاجئ في القيم، مما يعني أنها لا تأخذ مسارًا سلسًا كما هو الحال في الدوال المستمرة.[3]

هذا النوع من الدوال له أهمية كبيرة في العديد من المجالات، حيث يمثل الظواهر التي تتغير بشكل مفاجئ أو غير منتظم. في الرياضيات، تعتبر دراسة الدوال غير المستمرة ضرورية في التحليل الرياضي ونظرية الدوال، حيث تساعد في فهم السلوكيات غير المتوقعة وحل المعادلات التي تتضمن تغيرات فجائية. وفي الفيزياء، تظهر الدوال غير المستمرة في النماذج التي تصف الانتقالات الطورية، والنبضات الكهربائية، والموجات غير المنتظمة. أما في الهندسة، فهي تُستخدم في تحليل الإشارات، ونظرية التحكم، والنظم الديناميكية. كما أن للاقتصاد دورًا في استخدام الدوال غير المستمرة في دراسة الأسواق المالية والتغيرات المفاجئة في الأسعار والطلب.[6]

لذلك، فإن دراسة الدوال غير المستمرة لا تقل أهمية عن دراسة الدوال المستمرة، حيث تساهم في تحليل وفهم الظواهر الطبيعية والاصطناعية التي لا يمكن نمذجتها باستخدام الدوال المستمرة فقط.[1]

الفصل الأول

مفاهيم اساسية

1 - 1 العلاقات والدوال

تعريف 1 - 1 - 1 (العلاقة) [1]

اي مجموعة من الازواج المرتبة تسمى علاقة

ملاحظة

اذا كانت S علاقة. فإن مجموعة كل العناصر التي تكن في المسقط الاول تسمى بالمجال. ومجموعة كل العناصر التي تكون في المسقط الثاني تسمى بالمدى.

تعريف 1 - 1 - 2 (الدالة) [1]

الدالة F هي مجموعة الازواج المرتبة (x, y) بحيث لا يوجد زوجين مرتبين بنفس المسقط الاول. اي ان اذا كان $(x, y) \in F$ و $(x, z) \in F$ فإن $y = z$.

ملاحظة

تعريف الدالة يتطلب ان كل عنصر من المجال مثل x يجب ان يوجد عنصر واحد فقط مثل y بحيث $(x, y) \in F$.

نسمي y قيمة الدالة F عند x ونكتب

$$y = F(x)$$

مثال 1 - 1 - 1

كل مما يأتي يمثل دالة على $\mathbb{R}$

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sin\sqrt{x^2 - 1}\}$

ولكن المجموعات التالية لا تمثل دالة على $\mathbb{R}$

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 10\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = \cos y\}$

لان $(1, 3), (1, -3) \in A$ و $(1, 0), (1, 2\pi) \in B$

1 - 2 الغاية و الاستمرارية [4]

تعريف 1 - 2 - 1 (الغاية) [4]

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a,b). نفرض ان $c \in (a,b)$ اذا كان $f(x) \to A$ عندما $x \to c$ من خلال قيم اكبر من c نقول ان A هي غاية اليمين للدالة f عند c ونكتب

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = A$$

نرمز لغاية اليمين بالرمز $f(c^+)$. بشكل ادق لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(c^+)| < \epsilon, \quad \text{if } c < x < c + \delta < b$$

ملاحظة

غاية اليسار تعرف بشكل مشابه اذا كانت $c \in (a,b)$ فإن غاية اليسار تعرف بالشكل

$$f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) = B$$

حيث x تاخذ قيم اصغر من c.

تعريف 1 - 2 - 2 (الاستمرارية من اليمين) [4]

اذا كانت الدالة f معرفة عند c وكان $f(c^+) = f(c)$ نقول ان f مستمرة من اليمين عند c

مثال 1 - 2 - 1

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ تكون مستمرة من اليمين عند $x = 0$ لأن

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

تعريف 1 - 2 - 3 (الاستمرارية من اليسار) [4]

اذا كانت الدالة f معرفة عند c وكان $f(c^-) = f(c)$ نقول ان f مستمرة من اليسار عند c

مثال

الدالة $f(x) = \sqrt{-x}$ تكون مستمرة من اليسار عند $x = 0$ لان

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0 = f(0)$$

تعريف 1 - 2 - 4 (الاستمرارية) [4]

اذا كانت $a < c < b$. فإننا نقول ان f دالة مستمرة عند $x = c$ اذا وفقط اذا كان

$$f(c) = f(c^+) = f(c^-)$$

اي تكون للدالة غاية من اليمين واليسار عند c وكذلك تكون الدالة معرفة عند c.

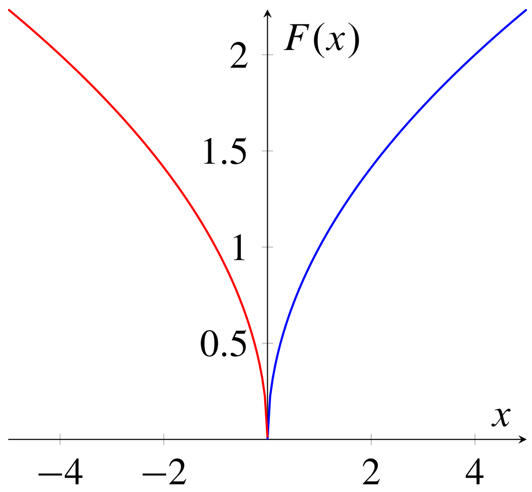
مثال 1 - 2 - 2

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غير مستمرة عند $x = 0$ لان غاية اليسار غير موجودة وكذلك الدالة $g(x) = -\sqrt{x}$ غير مستمرة عند $x = 0$ لان غاية اليمين غير موجودة. ولكن الدالة المعرفة بالشكل

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & x < 0 \end{cases}$$

تكون مستمرة عند $x = 0$ لان

$$f(0^+) = f(0^-) = 0 = f(0)$$



1 - 3 المشتقة [3]

تعريف 1 - 3 - 1

لتكن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة (a, b) ولتكن $c \in (a, b)$ فإن f تكون قابلة للاشتقاق عند c اذا كانت الغاية

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة. وتسمى المشتقة للدالة f عند c.

1 - 4 التقارب للدوال [1]

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$ ونفرض ان لكل $n \in \mathbb{N}$ توجد دالة $f_n : A \to \mathbb{R}$ سوف نقول ان (f_n) متتابعة من الدوال على A.

تعريف 1 - 4 - 1 [التقارب النقطي] [1]

لتكن (f_n) متتابعة من الدوال على $A \subseteq \mathbb{R}$. لتكن $A_0 \subseteq A$ ولتكن $f : A_0 \to \mathbb{R}$. نقول ان المتتابعة (f_n) تتقارب نقطياً الى الدالة f اذا كان لكل $x \in A_0$ فإن المتتابعة $f_n(x)$ تتقارب الى $f(x)$.

مثال 1 - 4 - 1

لتكن لدينا المتتابعة من الدوال

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

ولتكن $f(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$. نلاحظ ان لكل $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n} = 0 = f(x)$$

مثال 1 - 4 - 2

لتكن لدينا المتتابعة

$$g_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

ولتكن $g(x) = x$. فإن لكل $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + nx}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} + x = x = g(x)$$

تعريف 1 - 4 - 2 [التقارب المنتظم] [1]

متتابعة من الدوال (f_n) على $A \subseteq \mathbb{R}$ تقترب بشكل منتظم الى الدالة $f : A_0 \to \mathbb{R}$ اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $K(\epsilon)$ بحيث اذا كان $n \geq K(\epsilon)$ فإن

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad x \in A_0 \text{ لكل}$$

ملاحظة

التقارب المنتظم يحافظ على استمرارية الدالة. اي اذا كانت لدينا متتابعة من الدوال المستمرة فإن التقارب المنتظم لها هو دالة مستمرة.

1 - 5 التكامل [6]

سوف نتعامل مع الدوال المعرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، التجزئة للفترة عبارة عن فترات

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots, [x_{n-1}, x_n] \tag{1}$$

حيث

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \tag{2}$$

نرمز للتجزئة بالرمز

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

اكبر طول من اطوال الفترات الجزئية في (1) يكون طول التجزئة، ويكتب بالشكل

$$||P|| = \max_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1})$$

اذا كانت f معرفة على الفترة $[a, b]$ ، فإن المجموع

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1})$$

حيث

$$x_{j-1} \leq c_j \leq x_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

يسمى مجموع ريمان للدالة f على التجزئة P

تعريف 1 - 5 - 1 (تكامل ريمان) [6]

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a, b]$ ، نقول ان f دالة قابلة لتكامل ريمان على الفترة $[a, b]$ اذا وجد عدد L يحقق الآتي: لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta < 0$ بحيث

$$|\sigma - L| < \epsilon$$

حيث σ هو اي مجموع ريمان على التجزئة P للفترة $[a, b]$ بحيث ان $||P|| < \delta$ في هذه الحالة نقول L هو تكامل ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ ونكتب

$$\int_a^b f(x)\, dx = L$$

تعريف 1 - 5 - 2 (التكامل العلوي والسفلي) [6]

اذا كانت f دالة مقيدة على الفترة $[a, b]$ و $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ هي تجزئة للفترة ، لتكن

$$M_j = \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x)$$

و

$$m_j = \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x)$$

المجموع العلوي للدالة f على P يكون

$$S(P) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1})$$

و التكامل العلوي يكون القيمة الصغرى لجميع المجاميع العلوية ويرمز له بالرمز

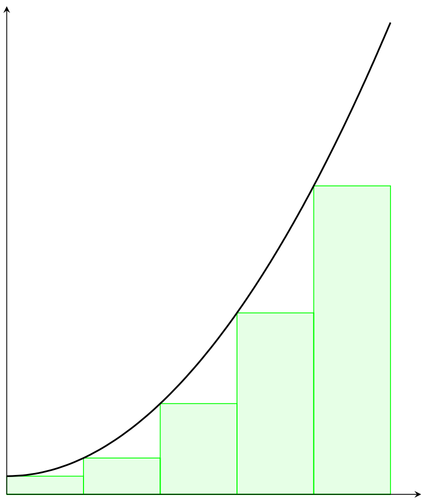
$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

المجموع السفلي للدالة f على P يكون

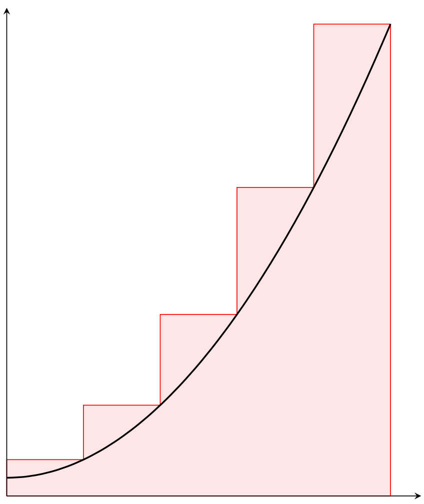
$$s(P) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1})$$

و التكامل السفلي يكون القيمة العظمى لجميع المجاميع السفلية ويرمز له بالرمز

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$



شكل 1 - 1: المجموع السفلي



شكل 1 - 2: المجموع العلوي

الفصل الثاني

الدوال المستمرة وخصائصها

2 - 1 تركيب الدوال المستمرة

تعريف 2 - 1 - 1 (التركيب) [6]

لتكن f و g دوال معرفة على المجالات D_f و D_g على التوالي. اذا كانت D_g تمتلك مجموعة جزئية غير خالية T بحيث $g(x) \in D_f$ لكل $x \in T$ ، فأن تركيب الدالتين $f \circ g$ يعرف بالشكل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in T.$$

مبرهنة 2 - 1 - 1

افرض ان $g(x)$ دالة مستمرة عند x_0 و $f(x)$ مستمرة عند $g(x_0)$ ، فأن $f \circ g$ مستمرة عند x_0.

البرهان

نفرض ان $\epsilon > 0$ ، بما ان f مستمرة عند $g(x_0)$ ، اذن يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$|f(t) - f(g(x_0))| < \epsilon \quad \text{if} \quad |t - g(x_0)| < \delta_1 \tag{1}$$

وبما ان g مستمرة عند x_0 اذن يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|g(x) - g(x_0)| < \delta_1 \quad \text{if} \quad |x - x_0| < \delta \tag{2}$$

اذن من المعادلتين (1) و (2) نحصل على

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \epsilon \quad \text{if} \quad |x - x_0| < \delta.$$

بالتالي $f \circ g$ دالة مستمرة عند x_0. □

مثال 2 - 1 - 1

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مستمرة لكل $x > 0$ ، والدالة

$$g(x) = \frac{9 - x^2}{x + 1}$$

مستمرة لكل $x \neq -1$ وبالتالي فأن دالة التركيب

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x + 1}}$$

مستمرة لكل نقاط مجالها $(-\infty, -3) \cup (1, 3)$

2 - 2 الاستمرارية المنتظمة [6]

تعريف 2 - 2 - 1

يقال ان f دالة مستمرة بإنتظام على المجموعة S ، اذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد δ بحيث

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{whenever} \quad |x - y| < \delta \text{ and } x, y \in S$$

مثال 2 - 2 - 1

الدالة $f(x) = 2x$ مستمرة بإنتظام على $(-\infty, \infty)$ لأن

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{if} \quad |x - y| < \frac{\epsilon}{2}$$

مثال 2 - 2 - 2

اذا كان $r > 0$ فإن الدالة $g(x) = x^2$ مستمرة بإنتظام على الفترة $[-r, r]$ ، لرؤية ذلك ، نلاحظ

$$|g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2r|x - y|$$

لذا

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{if} \quad |x - y| < \delta = \frac{\epsilon}{2r} \quad \text{and} \quad -r < x, y < r$$

مثال 2 - 2 - 3

الدالة

$$f(x) = \cos\frac{1}{x}$$

مستمرة على الفترة $(0, 1]$ ولكن غير مستمرة بأنتظام على نفس الفترة ، لأن

$$\left|f\left(\frac{1}{n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)\right| = 2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

مبرهنة 2 - 2 - 1

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، فإن f دالة مستمرة بأنتظام على الفترة $[a,b]$.

البرهان

لنفرض ان $\epsilon > 0$ ، بما أن f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، لذا فأن لكل $t \in [a,b]$ يوجد عدد موجب $\delta_t > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{if} \quad |x - t| < 2\delta_t \quad \text{and} \quad x \in [a,b] \tag{3}$$

اذا كانت $I_t = (t - \delta_t, t + \delta_t)$ ، فأن التجميعة

$$H = \{I_t : t \in [a,b]\}$$

تمثل غطاء مفتوح للفترة المغلقة $[a,b]$ ، وبما أن $[a,b]$ متراصة ، بأستخدام مبرهنة هاين - بورل يوجد عدد منته من النقاط $t_1, t_2, \ldots, t_n$ في $[a,b]$ بحيث $I_{t_1}, I_{t_2}, \ldots, I_{t_n}$ تغطي $[a,b]$ ، الآن نعرف

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} \tag{4}$$

الآن سوف نثبت اذا كان

$$|x - y| < \delta \quad \text{and} \quad x, y \in [a,b] \tag{5}$$

فأن $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. من المتراجحة المثلثية

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(t_r) + f(t_r) - f(y)| \\ &\le |f(x) - f(t_r)| + |f(t_r) - f(y).| \end{aligned} \tag{6}$$

بما ان $I_{t_1}, I_{t_2}, \ldots, I_{t_n}$ تغطي $[a,b]$ ، العنصر x يجب ان ينتمي الى واحدة من هذه الفترات ، نفرض ان $x \in I_r$ ، أي أن

$$|x - t_r| < \delta_{t_r} \tag{7}$$

من (3) مع $t = t_r$

$$|f(x) - f(t_r)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{8}$$

من (5) و (7) و المتراجحة المثلثية

$$|y - t_r| = |y - x + x - t_r| \leq |y - x| + |x - t_r| < \delta + \delta_{t_r} \leq 2\delta_{t_r}$$

وبالتالي من (3) مع $t = t_r$ و استبدال x بـــ y نحصل على

$$|f(y) - f(t_r)| < \frac{\epsilon}{2}$$

(6) و (8) تؤدي الى

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

وبالتالي الدالة f مستمرة بأنتظام على الفترة $[a, b]$. □

نتيجة 2 - 2 - 2

لتكن f دالة مستمرة على مجموعة T ، فأن f مستمرة بأنتظام على اي فترة مغلقة محتواة في T.

2 - 3 الاستمرارية وقابلية الاشتقاق [6]

في هذا البند سوف نناقش علاقة قابلية الاشتقاق لدالة معينة مع استمراريتها عند نقطة معينة

مبرهنة 2 - 3 - 1

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 ، فأنها مستمرة عند نفس النقطة.

البرهان

من تعريف المشتقة عند النقطة x_0 فأن

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

هذه الغاية موجودة و منتهية ، نريد اثبات ان f دالة مستمرة عند x_0 اي بمعنى

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x)$$

الآن

$$f(x) = f(x_0) + \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right](x - x_0)$$

الآن، نأخذ الغاية للطرفين عندما $x \to x_0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0) + \lim_{x\to x_0}\left\{\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right](x-x_0)\right\}\\ &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0\\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

بالتالي f دالة مستمرة عند x_0. □

ملاحظة

عكس المبرهنة السابقة ليس دائماً صحيح. ويمكن رؤية ذلك من خلال المثال القادم

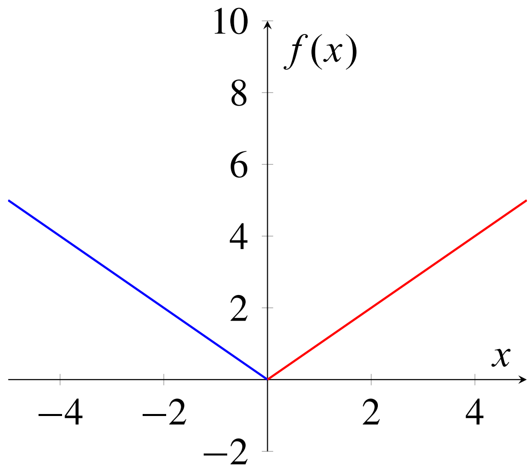
مثال 2 - 3 - 1

الدالة $f(x) = |x|$ مستمرة لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0. لأن

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1$$

بالتالي فأن الغاية للمشتقة غير موجودة ، اذن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0.



شكل 2 - 1: Plot of $f(x) = |x|$

2 - 4 الاستمرارية وقابلية التكامل [6]

مبرهنة 2 - 4 - 1

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ فأنها دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$.

البرهان

لتكن $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ تجزئة للفترة $[a, b]$ ، بما ان الدالة f مستمرة على $[a, b]$ ، توجد نقاط c_j , c_j' بحيث

$$f(c_j) = M_j = \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$$

و

$$f(c_j') = m_j = \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$$

وبالتالي

$$S(P) - s(P) = \sum_{j=1}^{n} \left[f(c_j) - f(c_j') \right] (x_j - x_{j-1}) \tag{9}$$

بما ان الدالة مستمرة بأنتظام على الفترة $[a, b]$ (مبرهنة 2 - 2 - 1) ، اذن لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

اذا كانت $x, x' \in [a, b]$ و $|x - x'| > \delta$ ، اذا كان $||P|| > \delta$ فأن $|c_j - c_j'| > \delta$ ، ومن (9)

$$S(P) - s(P) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \epsilon.$$

وبالتالي f دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$.

ملاحظة

عكس المبرهنة السابقة ليس صحيح دائماً. سنوضح ذلك في المثال القادم

مثال 2 - 4 - 1

لنأخذ الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1/2 \\ 0 & x \in [0,1], x \neq 1/2 \end{cases}$$

هذه الدالة قابلة للتكامل ، لاثبات ذلك ، نفرض $\epsilon > 0$ ونكون التجزئة P حيث

$$P = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{\delta}{2}, 1\right]$$

الآن

$$S(P) = 1 \cdot \delta$$

$$s(P) = 0$$

وبالتالي

$$|S(P) - s(P)| = \delta$$

بأخذ $\epsilon > \delta$ نثبت قابلية التكامل. ولكن الدالة غير مستمرة عند $1/2$ لأن

$$\lim_{x \to 1/2} f(x) = 0 \neq 1 = f(1/2).$$

الفصل الثالث

الدوال غير المستمرة

3 - 1 نقاط عدم الاستمرارية

تعريف 3 - 1 - 1 (نقاط عدم الاسترمرارية) [4]

نقول ان $x = c$ هي نقطة عدم استمرارية اذا كانت f غير مستمرة عند c

ملاحظة

في هذه الحالة واحدة من الحالات الاتية متحقق

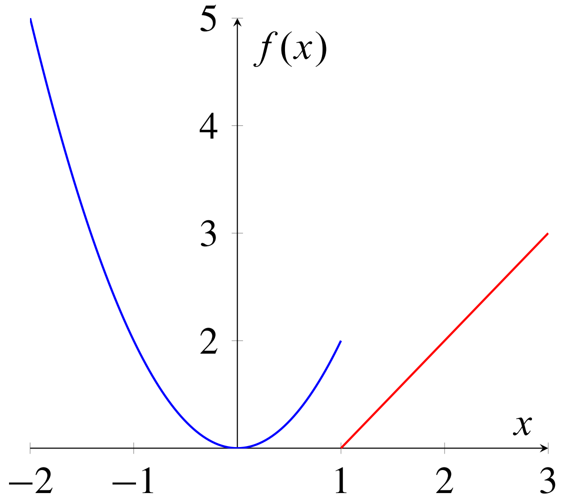
1. اما $f(c^+)$ او $f(c^-)$ غير موجودة.
2. كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجود ولكن لهما قيم مختلفة اي ان $f(c^+) \neq f(c^-)$
3. كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجودة ولكن $f(c^+) = f(c^-) \neq f(c)$.

امثلة على الحالات الثلاثة

1. الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ معرفة على الفترة $[0, \infty]$ اي ان $f(0-)$ غير موجودة وبالتالي $x = 0$ هي نقطة عدم استمرارية
2. الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

غير مستمرة عند $x = 1$ لان $f(1^+) = 1 \neq 2 = f(1^-)$

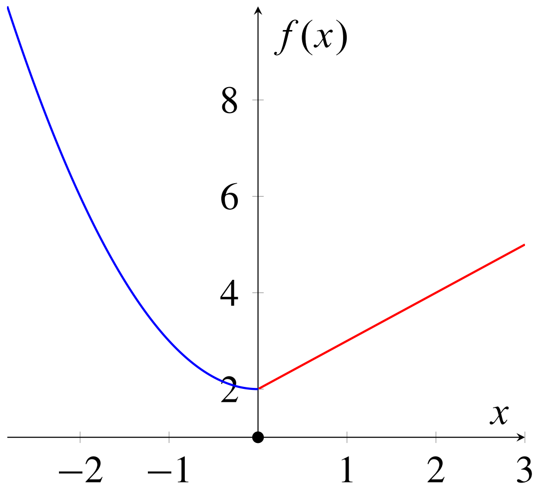


شكل 3 - 1: Plot of $f(x)$

3. الدالة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ x+2 & x>0\\ x^2+2 & x<0\end{cases}$$

غير مستمرة عند $x=-1$ لان $f(0)=1$ ولكن $f(0^+)=2=f(0^-)$



شكل 3 - 2: Plot of $f(x)$

تعريف 3 - 1 - 2 (عدم الاستمرارية القابلة للحذف) [4]

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ و $c\in[a,b]$ فإن c تكون نقطة عدم استمرارية قابلة للحذف اذا كان $f(c^+)=f(c^-)\neq f(c)$. ويتم حذف عدم الاستمرارية بإعادة تعريف الدالة f عند c حيث يكون $f(c^+)=f(c^-)=f(c)$.

تعريف 3 - 1 - 3 (عدم الاستمرارية غير القابلة للحذف) [4]

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ فإن c تكون نقطة عدم استمرارية غير قابلة للحذف اذا كانت $f(c^+)$ غير موجودة او $f(c^-)$ غير موجودة او $f(c^+)\neq f(c^-)$

تعريف 3 - 1 - 4 (عدم الاستمرارية القفزية) [4]

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ اذا كانت كلا $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجودة على نقطة داخلية مثل c فإن:

1. $f(c)-f(c^-)$ تسمى بالقفزة من اليسار

2. $f(c^+) - f(c)$ تسمى بالقفزة من اليمين

3. $f(c^+) - f(c^-)$ تسمى بالقفزة

اذا كانت واحدة من القيم الثلاثة اعلاه لاتساوي صفراً. فإن c تسمى نقطة عدم استمرارية قفزية Jump Discontinuty

ملاحظة

بالنسبة لنهايتي الفترة a, b فقط القفزة من جهو واحدة تأخذ بعين الاعتبار. بالنسبة الى a ناخذ $f(a^+) - f(a)$ وبالنسبة الى b ناخذ $f(b) - f(b^-)$

تعريف 3 - 1 - 5 (عدم الاستمرارية الاساسية) [4]

تكون الدالة $f(x)$ تمتلك عدم استمرارية اساسية essential discontinuty عند $x = c$ اذا كانت الغاية $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة. وعلى الاقل واحدة من الغايات اليمينية او اليسارية ايضاً غير موجودة (ربما كليهما).

الآن نلخص انواع عدم الاستمرارية

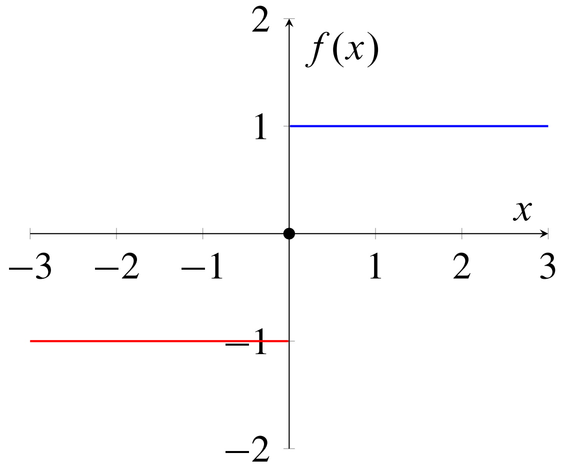
1. عدم الاستمرارية قابلة للحذف removable discontinuty.
2. عدم الاستمرارية غير قابلة للحذف non-romvable discontinuty.
3. عدم الاستمرارية القفزية jump discontinuty.
4. عدم الاستمرارية الاساسية essential discontinuty.

الآن نأخذ بعض الامثلة لنغطي على جميع الانواع.

مثال 3 - 1 - 1

الدالة $f(x) = x/|x|$ تمتلك عدم استمرارية قفزية عند $x = 0$ لان

$$f(0^+) = 1, \quad f(0^-) = -1$$



شكل 3 - 3: Plot of $f(x) = x/|x|$

مثال 3 - 1 - 2

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية قابلة للحذف عند $x = 0$ لان

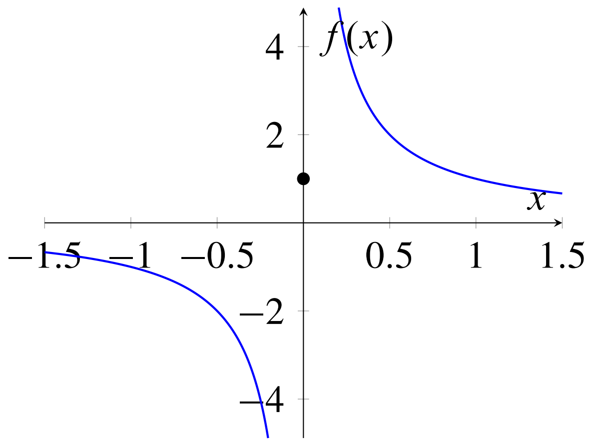
$$f(0) = 0$$
$$f(0^+) = f(0^-) = 1$$

مثال 3 - 1 - 3

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية غير قابلة للحذف عند $x = 0$ لان $f(c^-), f(c^+)$ غير موجودة



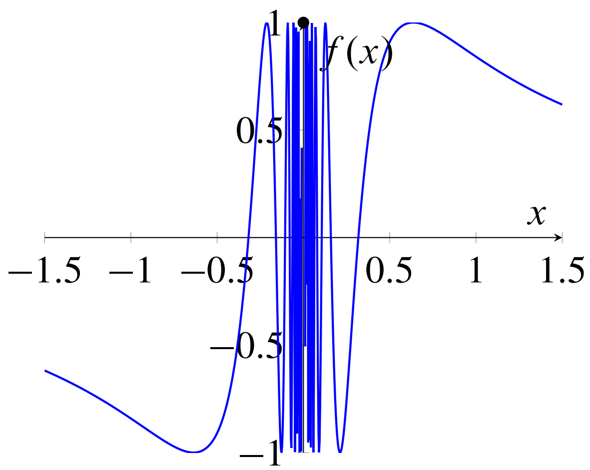
شكل 3 - 4: Plot of $f(x) = 1/x$ for $x \neq 0$

مثال 3 - 1 - 4

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ A & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية غير قابلة للحذف عند $x = 0$ لان $f(0^-), f(0^+)$ غير موجودة (لان كلما كان قيمة x تقترب من الصفر سواء من اليمين او من اليسار فإن قيمة الدالة f تتناوب بين -1 و 1 وكما موضح في الشكل 2 - 5)



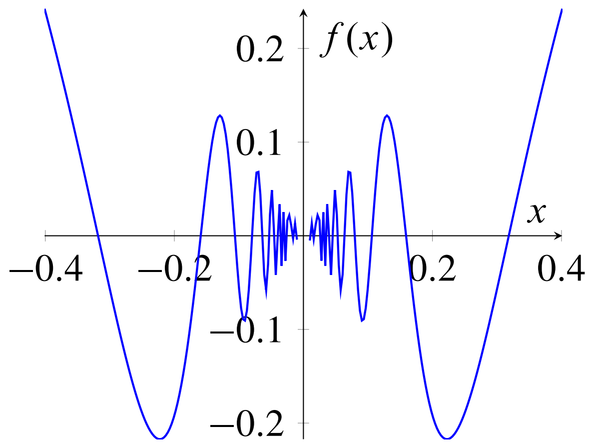
شكل 3 - 5: Plot of $f(x) = \sin(1/x)$ for $x \neq 0$

مثال 3 - 1 - 5

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

تمتلك عدم استمرارية قابلة للحذف لان $f(0+) = f(0-) = 0$ و $f(0) = 1$



شكل 3 - 6: Plot of $f(x) = x\sin(1/x)$ for $x \neq 0$

مثال 3 - 1 - 6

الدالة $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ تمتلك عدم استمرارية اساسية عند $x = 0$ لأن الغايات

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$

غير موجودة ولكن

$$\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

مثال 3 - 1 - 7

اوجد نقاط عدم الاستمرارية للدالة وصنفها

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

الحل

نلاحظ

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

ولكن $f(2) = 1$ اذن $x = 2$ نقطة عدم استمرارية قابلة للحذف. وذلك بأعادة تعريف الدالة عند $x = 2$ لتكون $f(2) = 4$.

مثال 3 - 1 - 8

اوجد نقاط عدم الاستمرارية وصنفها

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{2x-2} & x > 1 \\ 3 & x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

الحل

نوجد غاية اليمين عند $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-3)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{2} = -1$$

بينما غاية اليسار

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

ولكن $f(1) = 3$. اذن $x = 1$ نقطة عدم استمرارية غير قابلة للحذف لأنه لا يمكن اعادة تعريف الدالة عند $x = 1$ لتكون الدالة مستمرة عند تلك النقطة وذلك لأن غاية اليمين لا تساوي غاية اليسار.

3 - 2 المشتقات عند الدوال غير المستمرة [4]

لدراسة الدوال غير المستمرة في الاشتقاق. نقدم مفهوم المشتقة من اتجاه واحد والمشتقة اللا نهائية.

تعريف 3 - 2 - 1 (المشتقة من اتجاه واحد)

لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a, b]$ نقول ان f تمتلك مشتقة يمينية عند c اذا كانت الغاية

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

موجودة كقيمة نهائية او ان الغاية هي $+\infty$ او $-\infty$ و نرمز لها بالرمز $f'_+(x)$. المشتقة اليسارية تعرف بنفس الاسلوب

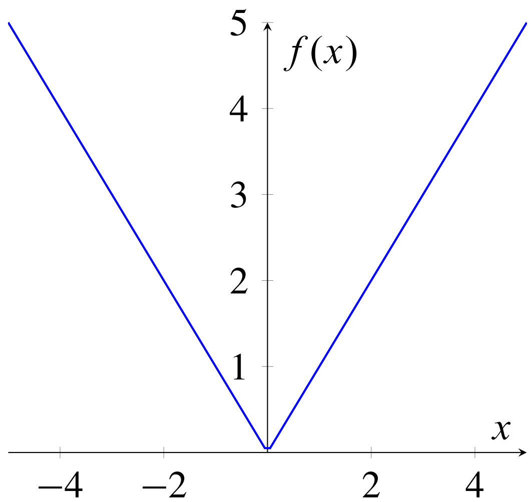
$$f'_-(c) := \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

مثال 3 - 2 - 1

لتكن الدالة $f(x) = |x|$، رأينا في المثال 1 - 3 - 1 ان الدالة لا تمتلك مشتقة عند $x = 0$ ولكن

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



شكل 3 - 7: $f(x) = |x|$

مثال 3 - 2 - 2

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & x \le 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

الدالة غير مستمرة عند $x = 2$ لأن

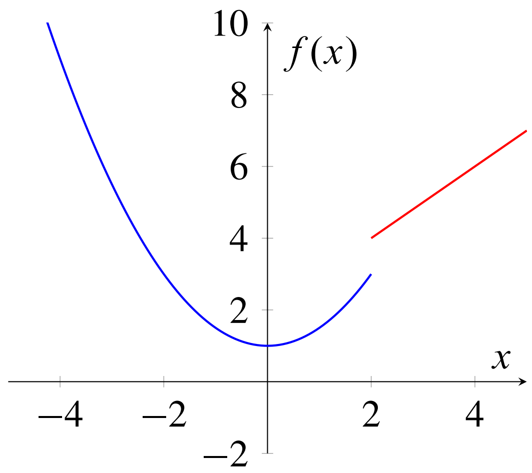
$$f(2^+) = 4 \neq 2 = f(2^-)$$

ولكن

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x+2-3}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = -\infty \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 - 3}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{2}(x^2-4)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{2}(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2}(x+2) \\ &= 2 \end{aligned}$$



شكل 3 - 8: Plot of $f(x)$

3 - 3 الاستمرارية بالاجزاء [5]

تعريف 3 - 3 - 1 (الاستمرارية بالأجزاء)

نقول ان الدالة $f(x)$ مستمرة بالاجزاء على الفترة المغلقة $[a, b]$ اذا كانت مستمرة عند عدد منتهٍ من نقاط عدم الاستمرارية القفزية

مثال 3 - 3 - 1

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

ملاحظة

ليس مطلوب ان تكون الدالة $f(x)$ معرفة عند نقاط عدم الاستمرارية القفزية. لنفر ض ان $a_1, \ldots, a_n$ مواقع عد الاستمرارية القفزية للدالة f في الفترة $[a, b]$ ونفرض ان $a_i < a_{i+1}$ لكل i، على الفترة (a_i, a_{i+1}) يمكننا جعل $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a_i, a_{i+1}]$ من خلال تعريف

$$f(a_i) = \lim_{x \to a_i^+} f(x), \quad f(a_{i+1}) = \lim_{x \to a_{i+1}^-} f(x)$$

و لأن الدالة المستمرة على الفترة المغلقة تكون مقيدة لدينا المبر هنة التالية

مبرهنة 3 - 3 - 1

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a,b]$ فإن $f(x)$ تكون مقيدة.

3 - 4 تكامل الدوال المستمرة بالاجزاء [2]

تعريف 3 - 4 - 1

اذا كانت $f(x)$ مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a,b]$ ونقاط عدم الاستمرارية عند $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$، لتكن $a = a_0, b = a_{k+1}$. كما لاحظنا فإننا من الممكن جعل الدالة f مستمرة على $[a_i, a_{i+1}]$ وبالتالي من الممكن تعريف التكامل المحدد للدالة f على الفترة $[a,b]$ كما يلي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx$$

مثال 3 - 4 - 1

نجد التكامل للدالة $f(x)$ المعرفة بالشكل

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

على الفترة $[0,t]$ حيث $t \in [0,\infty)$. لدينا احتمالان هنا:

1. اذا كان $t \in [0,1)$ فإن

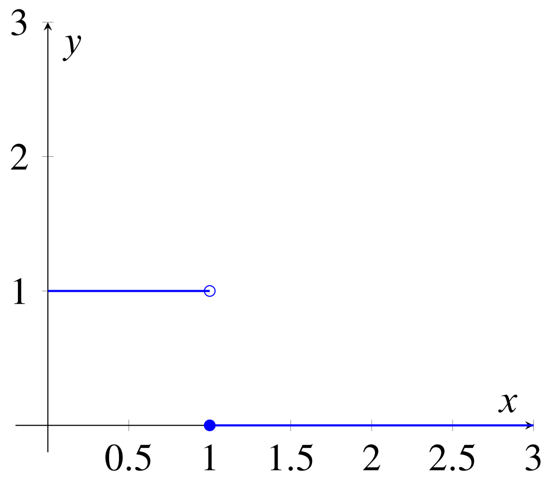
$$\int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t 1\,dx = t$$

2. اذا كان $t \in [1,\infty)$ فإن

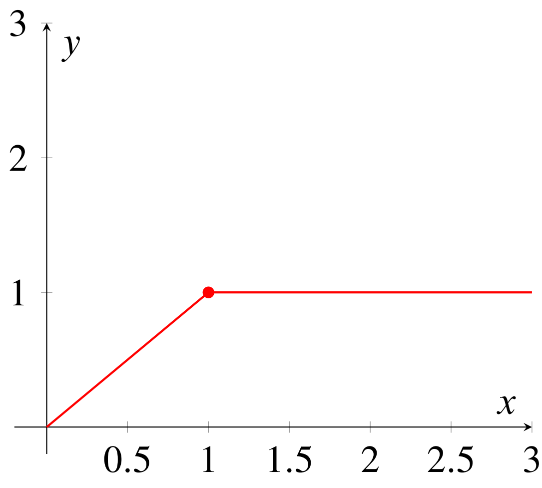
$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^t f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 1\,dx + \int_1^t 0\,dx \\ &= 1\end{aligned}$$

اذن

$$\int_0^t f(x)\,dx = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t < \infty \end{cases}$$



(a) plot of $f(x)$



(b) plot of $\int_0^t f(x)\,dx$

ملاحظة

نلاحظ ان الدالة $\int_0^x f(u)\,du$ مستمرة على الرغم من كون الدالة $f(x)$ دالة غير مستمرة. وهذا دائماً صحيح مادام ان الدالة $f(x)$ تمتلك عدد منتهٍ من نقاط عدم الاستمرارية القفزية.

مبرهنة 3 - 4 - 1

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على الفترة $[a,b]$ وأن $c, t \in [a,b]$. فإن التكامل $\int_c^t f(x)\,dx$ دالة مستمرة للمتغير t.

البرهان

لتكن

$$F(t) = \int_c^t f(x)\,dx$$

بما ان $f(x)$ دالة مستمرة بالاجزاء على $[a,b]$ اذن هي مقيدة. لنفرض $|f(x)| \le B$ لبعض $B > 0$. نفرض $\epsilon > 0$. فإن

$$|F(t+\epsilon) - F(t)| \le \int_t^{t+\epsilon} |f(x)|\,dx \le \int_t^{t+\epsilon} B\,dx = B\epsilon$$

اذن $F(t) = \lim_{\epsilon \to 0} F(t+\epsilon)$ ومنه $F(t^{+}) = F(t)$ بطريقة مماثلة $F(t^{-}) = F(t)$ وهذا يثبت استمرارية $F(t)$

3 - 5 التقارب للدوال غير المستمرة [3]

سوف نناقش بعض الامثلة لدوال مستمرة تقترب بشكل نقطي الى دالة غير مستمرة. ومثال على متتابعة على من الدوال غير المستمرة تقترب نقطياً الى دالة مستمرة

مثال 3 - 5 - 1

لتكن لدينا المتتابعة من الدوال المستمرة $f_n(x) = x^n$. نلاحظ اذا كان $x = 1$ فإن

$$\lim_{n \to \infty} f_n(1) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

بينما اذا كان $0 < x < 1$ فإن

$$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$$

اي ان

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

وهذه الدالة غير مستمرة عند $x = 1$.

مثال 3 - 5 - 2

لنأخذ المتتابعة من الدوال غير المستمرة

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

هذه الدالة غير مستمرة لكل $x \in \mathbb{R}$ ولكن نلاحظ ان اذا كان $x \in \mathbb{Q}$ فإن $f_n(x) = 0 \to 0$ و اذا كان $x \notin \mathbb{Q}$ فإن

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{as } x \to \infty$$

اي ان المتتابعة تتقارب بشكل نقطي الى الدالة $f(x) = 0$ بشكل نقطي. وهي دالة مستمرة.

الاستنتاجات

من خلال دراسة موضوع الدوال المستمرة وغير المستمرة، يمكن الوصول إلى مجموعة من الاستنتاجات العامة التي تبرز أهمية هذا الموضوع في الرياضيات ومجالاتها التطبيقية:

1. الدوال تُعد من الأسس الجوهرية في الرياضيات، وفهم خصائصها يُسهم في بناء قاعدة علمية متينة لتحليل المسائل الرياضية بمختلف أنواعها.
2. التمييز بين الدوال المستمرة وغير المستمرة أمر ضروري لفهم سلوك النماذج الرياضية، حيث أن هذا التمييز يساعد في اختيار الطرق المناسبة للتحليل أو المعالجة.
3. الاستمرارية تُعتبر خاصية مركزية تضمن سلاسة وانتظام تغير القيم، وهي ضرورية في الكثير من التطبيقات مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد.
4. الدوال غير المستمرة، رغم تعقيداتها، تحمل أهمية كبيرة، فهي تمثل أنماطًا من التغيرات الفجائية أو الظواهر غير المنتظمة التي تظهر في الواقع.
5. دراسة خصائص الدوال، كقابلية الاشتقاق والتكامل، تفتح المجال لفهم أعمق لكيفية تعامل هذه الدوال مع التغيرات وتأثيرها في الحلول الرياضية.
6. الربط بين الجوانب النظرية والتطبيقية للدوال يساهم في تطوير مهارات التحليل الرياضي، ويجعل من الرياضيات أداة أكثر فاعلية لفهم العالم من حولنا.

المصادر

[1] Brain S. Thomson, Judith B. Bruckner, and Andrew M. Bruckner, *Elementary Real Analysis*, Prentice-Hall, 2008.

[2] Gabriel Nagy, *Ordinary Differential Equations*, Michigan State University, 2021.

[3] Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Wiley, 2000.

[4] Tom M. Apostol, *Mathemtical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[5] William A. Adkins and Mark G. Davidson, *Ordinary Differential Equations*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2012.

[6] William F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Pearson Eduction, 2009.