وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

معادلات الفروق

Differences Equations

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالب

حسين عبدالحي سنيد محمد

إشراف

م.د. خالد عبدالاله عبدالزهرة

2025 م

1446 هـ

المحتويات

الملخص

يتناول هذا البحث دراسة معمّقة لمعادلات الفروق، من حيث مفهومها وأهم الاستراتيجيات المتبعة لحلّها. كما تم تسليط الضوء على أوجه الاختلاف الأساسية بينها وبين المعادلات التفاضلية، بالإضافة إلى نقاط الالتقاء والتشابه في بنيتها الرياضية وأساليب معالجتها.

في الفصل الأول، تم تقديم تعريف شامل للمعادلات التفاضلية، مع عرض موجز لبعض الطرائق المستخدمة في حلها. أما الفصل الثاني، فقد خُصص لتعريف معادلات الفروق بصيغها العامة، واستعراض أبرز الأساليب المعتمدة في حلّها وتحليلها.

مقدمة

تُعد معادلات الفروق (Difference Equations) من الأدوات الرياضية الأساسية في تحليل الأنظمة المتقطعة والزمنية، حيث تمثل العلاقة بين قيم متتابعة لكمية معينة عبر فترات زمنية منفصلة. ويمكن اعتبارها النظير التفاضلي للمعادلات التفاضلية، ولكن بدلاً من التعامل مع التغير المستمر، فإنها تتعامل مع تغير القيم عند نقاط زمنية محددة.

تُستخدم معادلات الفروق على نطاق واسع في مجالات متعددة مثل الاقتصاد، علم الحاسوب، الهندسة، ونظرية التحكم، حيث تُستخدم لنمذجة الأنظمة الرقمية، ودراسة النمو السكاني، وتحليل الأسواق المالية، وتصميم الأنظمة التفاعلية. ومن أبرز مزاياها أنها تُستخدم بكفاءة في دراسة الأنظمة التي لا يمكن نمذجتها بسهولة باستخدام المعادلات التفاضلية بسبب الطبيعة المتقطعة للبيانات أو الزمن.

وتكمن أهمية معادلات الفروق في قدرتها على التنبؤ بالقيم المستقبلية بناءً على القيم السابقة، مما يجعلها أداة قوية في مجالات التنبؤ، التحكم، والتحليل العددي. كما أنها تُعد الأساس الرياضي للعديد من الخوارزميات العددية والحسابات الرقمية المستخدمة في الحواسيب والبرمجيات الهندسية.

في الختام، تمثل معادلات الفروق جسراً بين الرياضيات النظرية والتطبيقات العملية، وهي تُمكّن الباحثين والمهندسين من دراسة وتحليل الأنظمة الديناميكية المتقطعة بطريقة منظمة وفعالة.

الفصل الأول

المعادلات التفاضلية

1 - 1 المعادلات التفاضلية الاعتيادية و الجزئية

تسمى المعادلات التي تحتوي على مشتقات لمتغير معتمد او اكثر بالنسبة الى متغير مستقل او اكثر بالمعادلة التفاضلية

- يكون الهدف هو ايجاد حل المعادلة التفاضلية الذي يتمثل بايجاد الدالة المجهولة (المتغير المعتمد) الذي يحقق المعادلة التفاضلية
- نسمي المعادلة التفاضلية بالاعتيادية اذا كان هناك متغير مستقل واحد وتكون جزئية اذا كان هناك اكثر من متغير مستقل.

مثال 1 - 1 - 1

لدينا المعادلات التفاضلية

$$k\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.2}$$

المعادلة (1) تكون اعتيادية لان فيها متغير مستقل واحد اما المعادلة (2) هي جزئية لان فيها ثلاث متغيرات مستقلة.

في هذا البحث سوف نركز فقط على المعادلات التفاضلية الاعتيادية.

1 - 2 رتبة المعادلة التفاضلية

رتبة المعادلة التفاضلية هي اعلى رتبة لمشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية.

مثال 1 - 2 - 1

لدينا المعادلات التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1 \tag{1.3}$$

$$m\frac{d^2y}{dx^2} = F \tag{1.4}$$

المعادلة (3) من الرتبة الاولى. اما المعادلة (4) من الرتبة الثانية.

- الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n يكون

$$F\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dx}, y, t\right) = 0$$

1 - 3 المعادلات التفاضلية الخطية واللا خطية

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال بأنها خطية اذا كانت تأخذ الشكل

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

اذا كانت $f(t) = 0$ فإن المعادلة تسمى متجانسة وتكون غير متجانسة اذا كانت $f(t) \neq 0$.

1 - 4 المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

في هذا البند سوف نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التي تكون على الشكل

$$a\frac{d^2 x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \tag{1.5}$$

عند تعويض $x(t) = e^{kt}$ في (1.5) نحصل على

$$a\frac{d^2}{dt^2}(e^{kt}) + b\frac{d}{dt}(e^{kt}) + ce^{kt} = 0$$

$$ak^2 e^{kt} + bke^{kt} + cr^{kt} = 0$$

$$e^{kt}(ak^2 + bk + c) = 0$$

بما ان $e^{kt} \neq 0$ فإن

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{1.6}$$

تسمى المعادلة (1.6) بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية المتجانسة (1.5). وهي معادلة جبرية من الدرجة الثانية في k يكون لها جذران في ثلاث حالات كالآتي:

أ - جذران حقيقيان مختلفان

لنفرض k_1, k_2 جذرا المعادلة (1.6) حيث $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ و $k_1 \neq k_2$. اذن الحل العام للمعادلة (1.5) هو

$$x(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t}$$

مثال 1 - 4 - 1

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x'' - 2x' = 0 \tag{1.7}$$

الحل

عند تعويض $x(t) = e^{kt}$ في (1.7) نحصل على المعادلة المميزة

$$k^2 - 2k = 0$$

وبحل هذه المعادلة

$$k(k-2) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 2$$

اي ان k_1, k_2 حقيقيان مختلفان بالتالي الحل العام يكون

$$x(t) = Ae^{0t} + Be^{2t} = A + Be^{2t}$$

ب - جذران حقيقيان متساويان

نفرض $k_1 = k_2 \in \mathbb{R}$ جذرا المعادلة (1.6) فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية (1.5) يكون

$$x(t) = (A + Bt)e^{kt}$$

حيث $k = k_1 = k_2$.

مثال 1 - 4 - 2

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x'' + 2x' + x = 0 \tag{1.8}$$

التي تمتلك الشروط الابتدائية

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

الحل

نعوض $x(t) = e^{kt}$ في المعادلة التفاضلية (1.8) نحصل على المعادلة المميزة

$$k^2 + 2k + 1$$

بحل هذه المعادلة

$$(k+1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -1$$

اذن الجذور حقيقية متكررة لذا الحل العام يكون

$$x(t) = (A + Bt)e^{-t}$$

الآن بما ان $x(0) = 0$ اذن

$$0 = (A+0)e^0 \Rightarrow A = 0$$

بالتالي

$$x(t) = Bt^{-t} \Rightarrow x'(t) = B(e^{-t} - te^{-t})$$

وبما ان $x'(0) = 1$ فإن

$$1 = B(e^0 - 0) \Rightarrow B = 1$$

وبالتالي فإن الحل النهائي يكون

$$x(t) = te^{-t}$$

جـ - جذران عقديان

عندما يكون جذرا المعادلة (1.6) غير حقيقيين، أي ان $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ فإنهما يكونا على الشكل

$$k_1, k_2 = p \pm iw$$

فحل المعادلة التفاضلية (1.5) يكون

$$x(t) = e^{pt}[A\cos(wt) + B\sin(wt)]$$

حيث A, B ثوابت اختيارية

مثال 1 - 4 - 3

جد حل المعادلة التفاضلية

$$x'' + 2x' + 5x = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0 \tag{1.9}$$

الحل

نفرض $x(t) = e^{kt}$ ونعوض في المعادلة (1.9) ، نحصل على

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

وبحل هذه المعادلة المميزة نحصل على

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ &= -1 \pm 2i \end{aligned}$$

اذن $p = -1, w = 2$ وبالتالي ان الحل العام للمعادلة (1.9) يكون

$$x(t) = e^{-t}[A\cos(2t) + B\sin(2t)]$$

$$x'(t) = e^{-t}[(2B - A)\cos 2t - (2A + B)\sin 2t]$$

باستخدام الشروط $x(0) = 1, x'(0) = 0$ نجد

$$\begin{aligned} A = 1, \quad 2B - A = 0 \\ \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اذن الحل النهائي

$$x(t) = e^{-t}[\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t]$$

1 - 5 المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

في هذا البند نناقش الحصول على الحل العام للمعادلات التفاضلية التي تكون على الشكل

$$a\frac{d^2x}{dx^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=f(t) \tag{1.10}$$

حيث $f(t)\neq 0$، يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (1.10) على الشكل

$$x(t)=Ay_1(t)+By_2(t)+x_p(t)$$

حيث $Ay_1(t)+By_2(t)$ هو حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$a\frac{d^2x}{dx^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0$$

ونرمز له $x_c(t)$ ويسمى بالحل التام. اما $x_p(t)$ هو الحل الخاص والذي يعتمد على شكل الدالة $f(t)$. الآن نناقش بعض الحالات الخاصة للدالة $f(t)$ وكيفية الحصول على الحل الخاص.

أ - عندما تكون $f(t)$ تكون كثيرة حدود

اذا كانت $f(t)$ كثيرة حدود من الدرجة n فإننا نخمن الحل الخاص

$$x_p(t)=c_nt^n+c_{n-1}t^{n-1}+\cdots+c_1t+c_0$$

ونعوض في (1.10) لايجاد المجاهيل $c_0,\ldots,c_n$

مثال 1 - 5 - 1

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x''+x'-6x=12 \tag{1.11}$$

الحل

نجد اولاً الحل التام $x_c(t)$ الذي يحقق المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$x''+x'-6x=0$$

التي تمتلك المعادلة المميزة

$$k^2+k-6=0$$

بحل هذه المعادلة نجد $k_1 = -3, k_2 = 2$ اذن

$$x_c(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$$

الان لأن الطرف الايمن من المعادلة (1.11) هو كثيرة حدود من الدرجة 0 فإننا نفرض $x_p(t) = c$ اذن $x'_p(t) = x''_p(t) = 0$ نعوض في المعادلة (1.11) نجد

$$0 + 0 - 6c = 12 \Rightarrow c = -2$$

اذن الحل العام

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t} - 2$$

مثال 1 - 5 - 2

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x'' + x' - 6x = 216t^3 \tag{1.12}$$

الحل

الحل التام من المثال السابق يكون

$$x_c(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$$

اما الحل الخاص. نفرض

$$x_p(t) = Ct^3 + Dt^2 + Et + F$$

لأن الطرف الايمن من المعادلة (1.12) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة. الآن

$$x'_p(t) = 3Ct^2 + 2Dt + E$$
$$x''_p(t) = 6Ct + 2D$$

نعوض في المعادلة التفاضلية الاصلية (1.12) نجد

$$(6Ct + 2D) + (3Ct^2 + 2Dt + E) - 6(Ct^3 + Dt^2 + Et + F) = 216t^3$$

ومنه

$$-6Ct^3 + (3C - 6D)t^2 + (6C + 2D - 6E)t + (2D + E - 6F) = 216t^3$$

اذن

$$\left.\begin{aligned} -6C &= 216 \\ 3C - 6D &= 0 \\ 6C + 2D - 6E &= 0 \\ 2D + E - 6F &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C &= -36 \\ D &= -18 \\ E &= -42 \\ F &= -13 \end{aligned}$$

بالتالي الحل الخاص يكون

$$x_p(t) = -36t^3 - 18t^2 - 42t - 13$$

اذن الحل العام يكون

$$x(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t} - 36t^3 - 18t^2 - 42t - 13$$

ب ـ عندما تكون $f(t)$ تكون دالة أُسية

لو كانت $f(t) = ae^{kt}$ فإننا نفرض الحل الخاص $x_p(t) = ce^{kt}$ والهدف ايجاد المجهول c من خلال تعويض في المعادلة (1.10). ولكن ننوه ان هذه الفرضية تكون في حالة كون الدالة $f(t)$ ليست حلاً للجزء المتجانس

$$a\frac{d^2x}{dx^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

اما اذا كانت الدالة e^{kt} حلاً للمعادلة التفاضلية المتجانسة، فإنه لا يمكن ان يكون حلاً خاصاًونأخذ الحالات التالية

1. اذا كانت المعادلة التفاضلية المتجانسة تمتلك جذور غير متكررة فإننا نفرض الحل الخاص

$$x_p(t) = cte^{kt}$$

2. اذا كانت المعادلة التفاضلية المتجانسة تمتلك جذور متكررة فإننا نفرض الحل الخاص

$$x_p(t) = ct^2e^{kt}$$

مثال 1 - 5 - 3

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x'' + x' - 6x = 4e^{-2t} \tag{1.13}$$

الحل

الحل التام من الامثلة السابقة

$$x_c(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$$

نرى ان e^{-2t} ليست حلاً للجزء المتجانس، اذن نفرض الحل الخاص

$$x_p(t) = Ce^{-2t}$$

بالتالي

$$x_p'(t) = -2Ce^{-2t}$$

$$x_p''(t) = 4Ce^{-2t}$$

نعوض في المعادلة الاصلية (1.13) نحصل على

$$4Ce^{-2t} - 2Ce^{-2t} - 6Ce^{-2t} = 4e^{-2t}$$

$$(4C - 2C - 6C)e^{-2t} = 4e^{-2t}$$

اذن

$$-4C = 4 \Rightarrow C = -1$$

منه

$$x_p(t) = -e^{-2t}$$

بالتالي

$$x(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t} - e^{-2t}$$

مثال 1 - 5 - 4

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x'' + x' - 6x = 5e^{-3t} \tag{1.14}$$

الحل

الحل التام من الامثلة السابقة

$$x_c(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$$

نرى ان e^{-3t} حلاً للجزء من المتجانس الذي يمتلك جذور غير متكررة ، اذن نفرض الحل الخاص

$$x_p(t) = Cte^{-3t}$$

$$x_p'(t) = Ce^{-3t} - 3Cte^{-3t}$$

$$x_p''(t) = -6Ce^{-3t} + 9Cte^{-}3t$$

نعوض في المعادلة التفاضلية الاصلية (1.14) نحصل على

$$(-6Ce^{-3t} + 9Cte^{-}3t) + (Ce^{-3t} - 3Cte^{-3t}) - 6(Cte^{-3t}) = 5e^{-3t}$$

اذن

$$(-6C + C)e^{-3t} + (9C - 3C - 6C)te^{-3t} = 5e^{-3t}$$

$$\Rightarrow -6C + C = 5 \Rightarrow C = -1$$

اذن الحل الخاص

$$x_p(t) = -te^{-3t}$$

الحل العام يكون

$$x(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t} - te^{-3t}$$

مثال 1 - 5 - 5

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x'' + 2x' + x = 6e^{-t} \tag{1.15}$$

الحل

من خلال الامثلة السابقة ، رأينا ان الحل التام

$$x_c(t) = (A + Bt)e^{-t}$$

اذن e^{-t} هو حل المعادلة التفاضلية المتجانسة التي تمتلك جذور متكررة. بالتالي نفرض الحل الخاص

$$x_p(t) = Ct^2e^{-t}$$

اذن

$$x_p'(t) = 2Cte^{-t} - Ct^2e^{-t}$$

$$x_p''(t) = 2Ce^{-t} - 4Cte^{-t} + Ct^2e^{-t}$$

الآن نعوض في (1.15) نحصل على

$$(2Ce^{-t} - 4Cte^{-t} + Ct^2e^{-t}) + 2(2Cte^{-t} - Ct^2e^{-t}) + (Ct^2e^{-t}) = 6e^{-t}$$

بجمع الحدود المتشابهة

$$(C - 2C + C)t^2e^{-t} + (-4C + 4C)te^{-t} + 2Ce^{-t} = 6e^{-t}$$

ومنه

$$2C = 6 \Rightarrow C = 3$$

اذن الحل الخاص

$$x_p(t) = 3t^2e^{-t}$$

وبالتالي فإن الحل العام يكون

$$x(t) = (A + Bt)e^{-t} + 3t^2e^{-t}$$

الفصل الثاني

معادلات الفروق

2 - 1 التعريف

المعادلة التي تربط بين قيم x_n لقيم مختلفة من n تسمى معادلة فروق، ورتبة معادلة الفروق هي الفرق الاكبر بين اي دليلين موجودين في المعادلة

مثال 2 - 1 - 1

لدينا معادلات الفروق التالية

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, nh) \tag{2.1}$$

$$x_{n+1} = 2^{n+7} + \cos x_n \tag{2.2}$$

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \exp(x_{n-3}) \tag{2.3}$$

نلاحظ ان المعادلتين (1) و (2) من الرتبة الاولى ، ولكن المعادلة (3) من الرتبةالخامسة لأن $((n+2)-(n-3)=5)$

2 - 2 معادلات الفروق من الرتبة الاولى

معادلة الفروق من الرتبة الاولى تربط القيمة التالية لـ x مع قيمتها الحالية. وتكون صيغتها العامة بالشكل

$$F(x_n, x_{n+1}, n) = 0$$

سوف نقتصر هنا على دراسة معادلات الفروق التي يمكن فيها التعبير عن x_{n+1} بشكل صريح بدلالة x_n.

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

مثال 2 - 2 - 1

لنأخذ معادلة فروق خطية بسيطة من الرتبة الاولى

$$x_{n+1} = kx_n$$

لنفترض اننا نعرف x_0 فإنه من السهل ايجاد x_n. لدينا

$$x_1 = kx_0$$

$$x_2 = kx_1 = k(kx_0) = k^2x_0$$

$$x_3 = kx_2 = k(k^2x_0) = k^3x_0$$

وبشكل عام نرى ان $x_n = k^n x_0$.

2 - 3 معادلات الفروق من الرتبة الثانية: الدالة المتممة والحل الخاص

نركز الآن على معادلات الفروق الخطية من الرتبة الثانية التي تكون على الشكل

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f_n \tag{2.4}$$

كما فعلنا مع المعادلات التفاضلية سوف نجزء حل المعادلة (2.4) الى ايجاد حل المعادلة المتجانسة

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$$

ومن ثم ايجاد الحل الخاص للمعادلة (2.4).

2 - 4 معادلات الفروق المتجانسة

اولا نتعامل مع معادلات الفروق المتجانسة

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \tag{2.5}$$

سوف نخمن ان الحل هو $x_n = k^n$ ونعوض في المعادلة (2.5) نحصل على

$$ak^{n+2} + bk^{n+1} + ck^n = 0$$

بإختصار k^n نحصل على المعادلة المساعدة

$$ak^2 + bk + c = 0$$

حصلنا على معادلة تربيعية في k. و حل المعادلة (2.5) يعتمد على طبيعة الجذور.

أ - جذور حقيقية مختلفة

اذا كانت المعادلة المساعدة تمتلك جذران حقيقيان مختلفان مثل k_1, k_2 اذن $x_n = k_1^n$ و $x_n = k_2^n$ كلاهما يكون حلاً للمعادلة (2.5). بالتالي فإن الحل العام يكون

$$x_n = Ak_1^n + Bk_2^n$$

مثال 2 - 4 - 1

لنجد صيغة لعدد فيبوناتشي النوني (*nth* Fibonacci number) الذي يحقق معادلة الفروق

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \tag{2.6}$$

اذا كانت $x_0 = 1, x_1 = 1$ ، حيث الحدود الاولى تكون

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

لحل معادلة الفروق (2.6) نفترض ان $x_n = k^n$ نجد

$$k^2 = k + 1$$

هذه المعادلة تمتلك الجذور

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

لذا فإن الحل العام للمعادلة (2.6) يكون

$$x_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

والشروط الابتدائية تتطلب

$$\alpha + \beta = 1 \qquad (1+\sqrt{5})\alpha + (1-\sqrt{5})\beta = 2$$

وبالحل من اجل α, β

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

اذن عدد فيبوناتشي النوني

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

ب - جذور حقيقية متكررة

اذا كانت المعادلة المساعدة تمتلك جذر حقيقي مكرر k فإن الحل العام لمعادلة الفروق (2.5)

$$x_n = Ak^n + Bnk^n$$

مثال 2 - 4 - 2

جد الحل العام لمعادلة الفروق

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$$

الحل

نفرض $x_n = k^n$ في المعادلة ، نحصل على المعادلة المساعدة

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

الذي يكون حلها $k = 2$ (مرتان) ، لذا فإن الحل العام يكون

$$x_n = A2^n + Bn2^n$$

جـ - جذور عقدية

من الممكن الحصول على جذور عقدية للمعادلة المساعدة، اي ان $k = a \pm ib$. فإننا نحتاج ان نكتب k بالصيغة القطبية

$$k = re^{\pm i\theta}$$

حيث

$$r^2 = a^2 + b^2, \qquad \theta = \tan^{-1}(b/a)$$

فإن الحل العام لمعادلة الفروق المتجانسة (2.5)

$$x_n = r^n[\cos n\theta + B\sin n\theta]$$

مثال 2 - 4 - 3

جد الحل العام لمعادلة الفروق

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

الحل

نعوض $x_n = k^n$ في المعادلة ، ونحصل على المعادلة المساعدة

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

التي تمتلك الجذور

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

وبما ان

$$1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm i\pi/4}$$

الحل يكون

$$x_n = 2^{n/2}[A\cos(n\pi/4) + B\sin(n\pi/4)]$$

2 - 5 الحلول الخاصة

عندما يكون لدينا معادلة فروق والطرف الايمن فيها غير صفري

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f_n$$

هنا نستخدم نفس الاسلوب في المعادلات التفاضلية. حيث نخمن شكل الحل الخاص ونعوضه في المعادلة الاصلية لتحديد قيم المجاهيل.

أ - عندما تكون f_n كثيرة حدود في n

عندما يكون الطرف الايمن كثيرة حدود بالنسبة الى n. فإن التخمين هو كيثرة حدود عامة بنفس درجة كثيرة الحدود في الطرف الايمن. ولكن اذا كان تخميننا يكون حلاً للجزء المتجانس من المعادلة الاصلية ، نضرب التخمين في n.

مثال 2 - 5 - 1

جد الحل العام لمعادلة الفروق

$$x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = -36n$$

الحل

اولا نحل معادلة الفروق المتجانسة $y_n - y_{n-1} - 6y_{n-2} = 0$ حيث نفرض $y_n = k^n$ نحصل على المساعدة

$$k^2 - k - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-3)(k-2) = 0$$

اذن الدالة المتممة $y_n = A3^n + B(-2)^n$. من اجل الحل الخاص نفرض $x_n = \alpha n + \beta$ ونعوض

في المعادلة الاصلية ، نحصل على

$$\alpha n + \beta - (\alpha(n-1) + \beta) - 6(\alpha(n-2) + \beta) = -6\alpha n + 13\alpha - 6\beta$$

بالتالي $\alpha = 6, \beta = 13$. اذن الحل الخاص $x_n = 6n + 13$. ومنه نحصل على الحل العام

$$x_n = A3^n + B(-2)^n + 6n + 13$$

مثال 2 - 5 - 2

جد الحل العام لمعادلة الفروق

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 8.$$

لحل المعادلة المتجانسة $y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = 0$ نجرب $y_n = k^n$ نحصل على المعادلة المساعدة

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

التي تمتلك جذر متكرر $k = 1$ لذا فإن الدالة المتممة

$$y_n = A + Bn$$

من اجل الخاص لا يمكننا ان نجرب $x_n = c$ (A جزء من الدالة المتممة). ولا يمكننا ان نجرب $x_n = cn$ (لان Bn جزء من الدالة المتممة)، لذا نجرب $x_n = cn^2$. نعوض في المعادلة الاصلية

$$c(n+1)^2 - 2cn^2 + c(n-1)^2 = c[n^2 + 2n + 1 - 2n^2 + n^2 - 2n + 1] = 2c = 8$$

اي ان $c = 4$. بالتالي الحل الخاص $x_n = 4n^2$. والحل العام

$$x_n = 4n^2 + A + Bn$$

ب - عندما تكون $f_n = a^n$

هذه الحالة مشابهة للحالة في المعادلات التفاضلية عندما يكون في الطرف الايمن دالة اسية. اذا كان a ليس حلاً للمعادلة المساعدة فإننا نجرب $x_n = Ca^n$. اذ ا كان a جذراً غير مكرر للمعادلة المساعدة فإننا نجرب $x_n = Cna^n$. بينما اذا كان a جذراً مكرراً للمعادلة المساعدة نجرب $x_n = Cn^2a^n$

مثال 2 - 5 - 3

جد الحل العام لمعادلة الفروق

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 12(-2)^n$$

الحل

نجد الحل اولا للمعادلة المتجانسة $y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 0$ نفرض $y_n = k^n$ نحصل على المعادلة المساعدة

$$k^2 + k - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (k+3)(k-2) = 0$$

اذن $k = -3, k = 2$ والدالة المتممة تكون

$$y_n = A2^n + B(-3)^n$$

بما ان $(-2)^n$ ليس حلاً للمعادلة المتجانسة. نفرض $x_n = C(-2)^n$ من اجل الحل الخاص. ونعوض في المعادلة الاصلية

$$C(-2)^{n+2} + C(-2)^{n+1} - 6C(-2)^n = 12(-2)^n$$

بالقسمة على $(-2)^n$ نحصل على

$$(-2)^2C + (-2)C - 6C = 12$$

اي ان $C = -3$ بالتالي الحل الخاص يكون $x_n = -3(-2)^n$ والحل العام

$$x_n = A2^n + B(-3)^n - 3(-2)^n$$

مثال 2 - 5 - 4

جد الحل العام لمعادلة الفروق

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 30 \times 2^n$$

الحل

وجدنا اعلاه ان الدالة المتممة تكون $y_n = A2^n + B(-3)^n$. بما ان الطرف الايمن موجود في الدالة المتممة وبما ان 2 حل غير مكرر للمعادلة المساعدة، نفرض الحل الخاص $x_n = Cn2^n$ ونعوض في المعادلة الاصلية

$$C(n+2)2^{n+2} + C(n+1)2^{n+1} - 6Cn2^n = 30 \times 2^n$$

بالقسمة على 2^n

$$C[4(n+2)+2(n+1)-6n]=10C=30$$

اذن $C=3$. بالتالي الحل الخاص يكون $x_n=3n2^n$. والحل العام

$$x_n=A2^n+B(-3)^n+3n2^n$$