



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات



جبر الزمر وجبر الحلقات

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

حنين

إشراف

م. جاسم محمد جواد

2025 - 2024

المحتويات

الفصل الأول : نظرية الزمر

3	1 - 1 مفاهيم أولية
6	2 - 1 تعريف الزمرة وبعض خصائصها
7	3 - 1 زمرة التناظر (التباديل)
11	4 - 1 زمرة الاعداد الصحيحة مقياس n
13	5 - 1 الزمرة الجزئية

الفصل الأول

نظرية الزمر

1 - 1 مفاهيم أولية

تعريف 1 - 1 (العملية الثنائية)

لتكن G مجموعة غير خالية ، نطلق على التطبيق $G \rightarrow G \times G : *$ بأنه عملية ثنائية على G .

ملاحظة

إذا كانت $*$ عملية ثنائية على مجموعة G سنكتب العلاقة بين عناصرها بالشكل $a * b$ بدل من $*(a, b)$ لغرض السهولة.

مثال 1 - 1

عملية الجمع الاعتيادية على مجموعة الاعداد الصحيحة والطبيعية والنسبية والحقيقية تمثل عملية ثنائية وكذلك عملية الضرب الاعتيادي.

مثال 2 - 1

لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ ، العملية $*$ معرفة على المجموعة X بالشكل

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	1
3	3	1	3

نلاحظ ان $*$ تمثل عملية ثنائية.

تعريف 2 - 1 (الانغلاق)

لتكن $*$ عملية ثنائية على المجموعة X ، المجموعة الجزئية A من G تسمى مغلقة تحت العملية $*$ اذا كان $a * b \in A$ لكل عنصرين $a, b \in A$.

مثال 3 - 1

نحن نعلم ان $+$ عملية الجمع الاعتيادي على مجموعة الاعداد الحقيقية ، نلاحظ ان $+$ عملية ثنائية مغلقة على مجموعة الاعداد الصحيحة لأن

$$a + b \in \mathbb{Z}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

تعريف 1 - 3 (النظام الرياضي)

هو مجموعة غير خالية G مع عملية ثنائية واحدة او اكثر معرفة عليه. ويرمز له بالرمز المرتب $(G, *, #)$ او $(G, *)$.

تعريف 1 - 4 (العملية التجميعية)

ليكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً مع $*$ عملية ثنائية معرفة عليه ، يقال ان العملية $*$ تجميعية اذا حققت الشرط

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in G$$

مثال 1 - 4

لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ ، العملية $*$ معرفة على المجموعة X بالشكل

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	2
3	3	3	3

نلاحظ ان $*$ تمثل عملية تجميعية.

مثال 1 - 5

لتكن $*$ عملية معرفة على \mathbb{Z} كما يأتي : $a * b = a + b - 1$ لكل عنصرين $a, b \in \mathbb{Z}$ ، فإن $*$ عملية تجميعية.

تعريف 1 - 5 (العنصر المحايد)

ليكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً ، يقال ان النظام الرياضي $(G, *)$ يمتلك عنصراً محايداً بالنسبة للعملية الثنائية $*$ اذا وجد عنصر $e \in G$ بحيث ان

$$a * e = e * a = a, \quad \forall a \in G$$

مبرهنة 1 - 1

لتكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً بعنصر محايد فإن المحاييد وحيد.

البرهان

لتكن e, e' عنصران محايدان بالنسبة للعملية $*$ اذن

$$e * e' = e' \text{ لأن } e \text{ عنصر محايد.}$$

$$e * e' = e' \text{ لأن } e' \text{ عنصر محايد.}$$

$$\text{اذن } e = e'.$$

□

تعريف 1 - 6 (monoid)

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة ، اذا كانت تمتلك عنصر محايد فإنها تسمى (monoid).

تعريف 1 - 7 (المعكوس)

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بمحايد اذا كان $a \in G$ يحقق الخاصية : $a' * a = a * a' = e$ حيث ان $a' \in G$ ، فإن العنصر a' يسمى معكوس العنصر a بالنسبة للعملية $*$ ويرمز له بالرمز a^{-1} .

ملاحظة

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بعنصر محايد e فإن $e^{-1} = e$

مبرهنة 1 - 2

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بعنصر محايد وليكن $a \in G$ وله معكوس في G فإن المعكوس وحيد.

تعريف 1 - 8 (العملية ابدالية)

ليكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً مع $*$ عملية ثنائية معرفة عليه ، يقال ان العملية $*$ ابدالية اذا حققت الشرط

$$a * b = b * a, \quad \forall a, b \in G$$

مثال 1 - 6

عمليات الجمع والضرب الاعتياديتين على مجموعة الاعداد الحقيقية والصحيحة والنسبية $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ تمثل عمليات ثنائية ابدالية.

2 - 1 تعريف الزمرة وبعض خصائصها

تعريف 1 - 9 (الزمرة)

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة Group اذا كان كل عنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية $*$. او نقول ان $(G, *)$ زمرة اذا تحققت الشروط التالية

$$1 \quad \boxed{\text{مغلقة بالنسبة للعملية } * \text{ اي : } a * b \in G, \forall a, b \in G}$$

$$2 \quad \boxed{\text{العملية } * \text{ تجميعية : } a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G}$$

$$3 \quad \boxed{G \text{ تمتلك عنصر محايد مثل } e : a * e = e * a = a, \forall a \in G}$$

$$4 \quad \boxed{\text{كل عنصر } a \in G \text{ يمتلك معكوس : } a * a^{-1} = a^{-1} * a = e, \forall a \in G, \exists a^{-1} \in G}$$

مثال 1 - 7

كل الانظمة الرياضية التالية تمثل زمرة

$$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$$

تعريف 1 - 10 (الزمرة الابدالية)

الزمرة $(G, *)$ تسمى زمرة ابدالية اذا كانت العملية $*$ عملية ثنائية ابدالية.

مثال 1 - 8

كل الانظمة الرياضية التالية تمثل زمرة ابدالية

$$(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$$

تعريف 1 - 11 (الزمرة المنتهية وغير المنتهية)

الزمرة $(G, *)$ تسمى زمرة منتهية اذا كانت المجموعة G منتهية. عدا ذلك تسمى الزمرة $(G, *)$ زمرة غير منتهية.

تعريف 1 - 12 (رتبة الزمرة)

لتكن $(G, *)$ زمرة منتهية ، نطلق على عدد عناصر المجموعة G اسم رتبة الزمرة ويرمز له بالرمز $O(G)$ اما اذا كانت المجموعة غير منتهية فتكون رتبته غير منتهية ايضاً.

تعريف 1 - 13 (قوى العنصر)

لتكن $(G, *)$ زمرة وليكن n عدد موجب فإن $a^n = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ من المرات}}$

مبرهنة 1 - 3

لتكن $(G, *)$ زمرة وليكن $n, m \in \mathbb{Z}$ فإن

$$1 \quad e^n = e$$

$$2 \quad a^0 = e, \forall a \in G$$

$$3 \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4 \quad a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$5 \quad a^{-m} = (a^{-1})^m$$

تعريف 1 - 14 (الزمرة الدوارة)

$(G, *)$ تسمى زمرة دوارة اذا وجد عنصر فيها $a \in G$ بحيث ان اي عنصر اخر في الزمرة $b \in G$ يمكن كتابته بالصيغة $b = a^k, k \in \mathbb{Z}$ ، يطلق على العنصر a بالعنصر المولد للزمرة. او يقال ان الزمرة G مولدة بواسطة العنصر a ونكتب $G = \langle a \rangle$ او $G = (a)$

مثال 1 - 9

لتكن $G = \{1, -1, i, -i\}$ حيث ان $i = \sqrt{-1}$ ، فإن (G, \cdot) تمثل زمرة دوارة.

مبرهنة 1 - 4

الزمرة $(G, *)$ تكون ابدالية اذا وفقط اذا كان $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$.

3 - 1 زمرة التناظر (التباديل)

تعريف 1 - 15 (زمرة التناظر)

لتكن X مجموعة غير خالية، الدالة $f : X \rightarrow X$ تسمى تبديل على X اذا كانت f تقابل على X ، مجموعة كل التبديلات على X يرمز لها بالرمز $\text{sym } X$ حيث ان

$$\text{sym } X = \{f \mid f : X \rightarrow X \text{ bijective}\}$$

مثال 1 - 10

لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ و $f \in S_3$ معرفة كالاتي

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$$

نستطيع كتابة عناصر الدالة f بالشكل التالي

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ترتيب الاعمدة هنا ليس مهماً فنستطيع كتابة الدالة كما يأتي

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة

طريقة تعريف دالة التركيب على عناصر $f, g \in S_n$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \end{pmatrix},$$

فإن دالة التركيب تكتب بالشكل

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \cdots & f(g(n)) \end{pmatrix},$$

وتكتب الدالة المحايدة بالشكل

$$(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

وتكتب دالة المعكوس بالشكل

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

تعريف 1 - 16

لتكن $f \in S_n$ بحيث ان x_1, x_2, \dots, x_n فإذا كان $f(x_i) = x_{i+1}$ لكل $1 \leq i \leq n-1$ وأن

$f(x_n) = x_1$ اذن نستطيع كتابة f بشكل دورة $(x_1 x_2 \dots x_n)$ وتسمى دورة ذات طول n

مثال 1 - 11

لنفرض ان $f, g \in S_5$ حيث ان

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

اذن $f = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ وهذا يعني انها دورة ذات طول 4 ، اما $g = (2 \ 3)$ وهذا يعني انها دورة ذات طول 2.

تعريف 1 - 17

اي دورة طولها 2 فقط تسمى مناقلة.

ممهدة 1 - 5

معكوس اي مناقلة هي المناقلة نفسها.

$$\text{مثال: } (2 \ 3)^{-1} = (2 \ 3)$$

ممهدة 1 - 6

لتكن $(x_1 x_2 \dots x_n)$ دورة ذات طول n فإن

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{-1} == (x_1 x_{n-1} x_{n-2} \dots x_2)$$

مثال 1 - 12

معكوس الدورة $(4 \ 5 \ 6 \ 7)$ الدورة $(4 \ 7 \ 6 \ 5)$.

ملاحظة

نكتب العنصر المحايد في الزمرة S_n بشكل دورة ذات طول 1، ويرمز له بالرمز (1)

مبرهنة 1 - 7

كل دورة $(x_1 x_2 \dots x_n)$ ممكن كتابتها على صورة حاصل ضرب مناقلات وهذا التعبير غير وحيد

$$(x_1 x_2 \dots x_n) = (x_1 x_n)(x_2 x_n) \dots (x_{n-1} x_n)$$

مثال 1 - 13في الزمرة S_8

$$(3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) = (3\ 8)(3\ 7)(3\ 6)(3\ 5)(3\ 4)$$

$$(1\ 3\ 2)(5\ 8\ 6\ 7) = (1\ 2)(1\ 3)(5\ 7)(5\ 6)(5\ 8)$$

نتيجة 1 - 8

كل تبديل نستطيع كتابته على شكل حاصل ضرب مناقلات

تعريف 1 - 18

التبديل f يسمى تبديل زوجي (فردى) اذا كان يكتب على شكل حاصل ضرب عدد زوجي (فردى) من المناقلات

مثال 1 - 14

(1 2) تبديل فردى.

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2) \text{ تبديل زوجى.}$$

ممهدة 1 - 9الدورة (التبديل) ذات الطول n تكون تبديل فردى اذا كان الطول زوجى والعكس بالعكس.**مثال 1 - 15**

(1 2) دورة ذات طول 2 اذن تبديل فردى

(1 2 3) دورة ذات طول 3 اذن تبديل زوجى.

مبرهنة 1 - 10

عند ضرب تبديلين زوجيين او فرديين فالناتج يكون تبديل زوجى ، اما عند ضرب تبديل فردى بتبديل زوجى او العكس فالناتج تبديل فردى.

مثال 1 - 16

حاصل الضرب (1 2 3)(5 4)(7 8 9) ، التبديل الاول والثالث زوجيان اما التبديل الثانى فردى ، اذن الناتج يكون تبديل زوجى.

ممهدة 1 - 11

(S_n, \circ) ليست زمرة ابدالية لكل $n \geq 3$.

البرهان

لنأخذ $(1\ 2), (2\ 3) \in S_n$ نلاحظ ان $(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$ بينما $(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2)$ لذلك فإن $(2\ 3)(1\ 2) \neq (1\ 2)(2\ 3)$ بالتالي فإن (S_n, \circ) ليست زمرة ابدالية. \square

تعريف 1 - 19

مجموعة كل التبديلات الزوجية في الزمرة S_n مع عملية التركيب \circ تسمى الزمرة المتناوبة ويرمز لها بالرمز (A_n, \circ) ورتبتها $\frac{n!}{2}$. $O(A_n) = \frac{n!}{2}$.

4 - 1 زمرة الاعداد الصحيحة مقياس n

تعريف 1 - 20

ليكن $n \in \mathbb{Z}_+$ نعرف العلاقة \equiv_n (او قياس n) على \mathbb{Z} كما يلي: $a \equiv_n b$ اذا فقط اذا $a - b$ يقبل القسمة على n او $a - b = kn$ او $a = b + kn$

مثال: $3 \equiv_2 1$ او $3 \equiv 1 \pmod{2}$

مبرهنة 1 - 12

علاقة القياس n (\equiv_n) لمجموعة الاعداد الصحيحة هي علاقة تكافؤ.

ملاحظة

بما ان العلاقة \equiv_n هي علاقة تكافؤ على الاعداد الصحيحة (عكسية ، متناظرة ، متعدية) اذن هي تشكل تجزئة على \mathbb{Z} وتوجد صفوف تكافؤ او صفوف التكافؤ، حيث نستخدم اقل عدد موجب لتمثيل صف التكافؤ بشكل عام، اذا كان $a \in \mathbb{Z}$ فإن

$$\begin{aligned} [a] &= \{x \in \mathbb{Z} \mid a = x \pmod{n}\} \\ &= \{x \mid a - x = kn, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \mid a = x + kn, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

مبرهنة 1 - 13

الزوج المرتب $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ يشكل زمرة ابدالية التي يطلق عليها زمرة الاعداد الصحيحة مقياس n

البرهان

1] لنبرهن ان \mathbb{Z}_n مغلقة تحت العملية $+_n$ ، لنفرض ان $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$ نجد ان

$$[a] +_n [b] = [a + b] \in \mathbb{Z}_n$$

2] لبرهان ان $+_n$ تجميعية على \mathbb{Z}_n لنفرض ان $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_n$ نجد

$$\begin{aligned} [a] +_n ([b] +_n [c]) &= [a] +_n [b + c] \\ &= [a + b + c] \\ &= [a + b] +_n [c] \\ &= ([a] +_n [b]) +_n [c] \end{aligned}$$

3] $[0] \in \mathbb{Z}_n$ هو العنصر المحايد لـ \mathbb{Z}_n لأن لكل $[a] \in \mathbb{Z}_n$

$$[a] +_n [0] = [a + 0] = [a]$$

4] ليكن $[a] \in \mathbb{Z}$ فإن $[a]^{-1} = [n - a]$ لأن

$$[a] +_n [n - a] = [a + n - a] = [n] = [0]$$

5] لبرهان خاصية الابدال لنفرض ان $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$ فان

$$[a] +_n [b] = [a + b] = [b + a] = [b] +_n [a]$$

ملاحظة

تكتب عناصر \mathbb{Z}_n بالشكل a بدل من $[a]$ و $-a$ بدل من $[n - a]$

مبرهنة 1 - 14

الزمرة $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ تشكل زمرة دوارة مولدة بواسطة العنصر 1.

ملاحظة

اي عنصر في \mathbb{Z}_n ممكن ان يكون مولد للزمرة اذا وفقط اذا $\gcd(a, n) = 1$

ملاحظة

تعرف عملية الضرب على المجموعة \mathbb{Z}_n كالآتي

$$[a] \cdot_n [b] = [a \cdot b], \forall [a], [b] \in \mathbb{Z}_n$$

مثال 1 - 17

$$5 \cdot_6 4 = 2, \quad 7 \cdot_9 2 = 5, \quad 3 \cdot_4 2 = 2$$

ملاحظة

الزوج المرتب $(\mathbb{Z}_n - \{0\}, \cdot_n)$ ربما يكون زمرة إذا كان n عدد أولي. للتوضيح أكثر $(\mathbb{Z}_4 - \{0\}, \cdot_4)$ لا تمثل زمرة لأن 2 لا يملك معكوس ضربى بينما $(\mathbb{Z}_5 - \{0\}, \cdot_5)$ تمثل زمرة.

ملاحظة

العنصر a في \mathbb{Z}_n يمتلك معكوس ضربى إذا وفقط إذا كان $\gcd(a, n) = 1$

1 - 5 الزمرة الجزئية**تعريف 1 - 21**

لتكن $(G, *)$ زمرة و H مجموعة غير خالية جزئية من G فإن $(H, *)$ تسمى زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ إذا كانت H هي زمرة كذلك ونكتب $(H, *) \leq (G, *)$

مثال 1 - 18

كل زمرة على الأقل لها زميرتان جزئيتان هما $(G, *)$ و $(\{e\}, *)$.

تعريف 1 - 22

الزمرة الجزئية $(H, *)$ تسمى زمرة جزئية فعلية من $(G, *)$ إذا كانت H هي مجموعة جزئية فعلية $H \subset G$.

تعريف 1 - 23

الزمرة الجزئية $(H, *)$ تسمى زمرة جزئية غير تافهة إذا كانت $\emptyset \neq H \neq G$.

مثال 1 - 19

$(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ جميع هذه الانظمة هي زمر جزئية غير تافهة من زمرة الاعداد المركبة $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{C}, +)$ على التوالي

مبرهنة 1 - 15

لتكن $(G, *)$ زمرة و $H \subseteq G$ و $H \neq \emptyset$ اذن $(H, *)$ تكون زمرة جزئية من $(G, *)$ اذا وفقط اذا حققت الشرط

$$a * b^{-1} \in H, \forall a, b \in H$$

مثال 1 - 20

$$(\mathbb{Z}_e, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$$

الحل

نفترض ان $a, b \in \mathbb{Z}_e$ اذن يوجد $n, m \in \mathbb{Z}$ بحيث ان $a = 2n, b = 2m$

$$a * b^{-1} = a - b = 2n - 2m = 2 \underbrace{(n - m)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}_e$$

$$\text{اذن } (\mathbb{Z}_e, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$$

مثال 1 - 21

$$\text{وضح ان } (A_3, \circ) \leq (S_3, \circ)$$

الحل

\circ	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)

من الجدول اعلاه نلاحظ ان $a \circ b^{-1} \in A_3$ لأي $a, b \in A_3$ اذن $(A_3, \circ) \leq (S_3, \circ)$

مثال 1 - 22

$$\text{وضح ان } (A_n, \circ) \leq (S_n, \circ)$$

الحل

نلاحظ ان $A_n \subseteq S_n$ و $(1) \in A_n$ ان $A_n \neq \emptyset$ ، لنفترض ان $f, g \in A_n$ وهذا يعني كل من f, g تبديلات زوجية ، نبين ان f^{-1} تبديل زوجي ، نلاحظ ان $f \circ f^{-1} = (1)$ وهذا يعني f^{-1} تبديل زوجي وبالتالي $g \circ f^{-1} \in A_n$ كذلك اي ان $g \circ f^{-1} \in A_n$ ان $A_n \leq S_n$. \square

ملاحظة

كل زمرة جزئية من زمرة ابدالية تكون ابدالية.

تعريف 1 - 24

لتكن $(G, *)$ زمرة ، مجموعة كل العناصر في G التي تتبادل مع جميع عناصر G تسمى مركز الزمرة G ويرمز لها بالرمز $\text{cent } G$.

$$\text{cent } G = \{c \in G : x * c = c * x, \forall x \in G\}$$

مثال 1 - 23

$$\text{cent } \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n, \quad \text{cent } S_n = (1)$$

ملاحظة

$$(\text{cent } G, *) \leq (G, *)$$

مقدمة 1 - 16

الزمرة $(G, *)$ تكون ابدالية اذا وفقط اذا $\text{cent } G = G$.

مبرهنة 1 - 17

لتكن كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فإن $(K \cap H, *) \leq (G, *)$ بمعنى اخر تقاطع اي زمريتين جزئيتين هو زمرة جزئية.

البرهان

لتكن $a, b \in K \cap H$ ان $a, b \in H$ و $a, b \in K$ ولأن كل منهما زمرة جزئية ، فإن $a * b^{-1} \in H$ و $a * b^{-1} \in K$ لذلك فإن $a * b^{-1} \in K \cap H$ وبالتالي $(K \cap H, *) \leq (G, *)$. \square

ملاحظة

إذا كان كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فليس من الضروري أن يكون $(G, *) \leq (K \cup H, *)$ ، بمعنى آخر اتحاد أي زمريتين جزئيتين لا يعطي بالضرورة زمرة جزئية.

مبرهنة 1 - 18

لتكن كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فإن $(G, *) \leq (K \cup H, *)$ إذا وفقط إذا كان إما $K \subseteq H$ أو $H \subseteq K$.

تعريف 1 - 25

لتكن $(G, *)$ زمرة و $\emptyset \neq S \subseteq G$ ولتكن $(S) = \{H : S \subseteq H, (H, *) \leq (G, *)\}$ تسمى $((S), *)$ زمرة جزئية مولدة بواسطة المجموعة S .

ملاحظة

الزمرة الجزئية $((S), *)$ هي اصغر زمرة تحتوي على المجموعة S .

تعريف 1 - 26

لتكن $(G, *)$ زمرة وليكن $a \in G$ فإن الزمرة الجزئية $(\{a\}, *)$ وتكتب بالصيغة $((a), *)$ وهي الزمرة الجزئية المولدة بواسطة العنصر a .

ملاحظة

1. لتكن $(G, *)$ زمرة ، إذا كان $a \in G$ يمتلك رتبة منتهية فإن $O(a) = O(\{a\})$
2. لتكن $(G, *)$ زمرة ، إذا كان $a \in G$ فإن $(a) = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

مثال 1 - 24

جد $(\mathbb{Z}, +)$ في (3)

الحل

$$(3) = \{3^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

مثال 1 - 25

اوجد (2) في $(\mathbb{Z}_8, +_8)$.

الحل

$$(2) = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

تعريف 1 - 27

لتكن كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فإن حاصل ضرب الزمرتين الجزئيتين يعرف بالشكل $H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$.

مثال 1 - 26

ليكن $H = (2)$ و $K = (3)$ زمرتان جزئيتان من الزمرة $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ اوجد $H_{12}K$

الحل

$$\text{اذن } K = \{0, 3, 6, 9\}, H = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$H +_{12} K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = \mathbb{Z}_{12}$$

ملاحظة

لتكن كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فإن حاصل ضرب الزمرتين الجزئيتين $H * K$ ربما لا يكون زمرة جزئية من $(G, *)$.

مبرهنة 1 - 19

لتكن كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فإن حاصل ضرب الزمرتين الجزئيتين $(H * K, *)$ يكون زمرة اذا كان $H * K = K * H$.

ملاحظة

لتكن كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فإن $(H * K, *) = (H \cup K, *)$.

مثال 1 - 27

لتكن $H = \{3\}$ و $K = \{4\}$ زمرتان جزئيتان من الزمرة $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ اوجد $(H \cup K, +_{12})$

الحل

$$\text{اذن } K = \{0, 4, 8\}, H = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$H \cup K = H +_{12} K = \{0, 4, 8, 3, 7, 11, 6, 10, 2, 9, 1, 5\} = \mathbb{Z}_{12}$$

مبرهنة 1 - 20

لتكن $(G, *)$ زمرة ابدالية و لتكن كل من $(K, *)$ و $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$ فإن

$$(H * K, *) \leq (G, *)$$

مبرهنة 1 - 21

لتكن $((a), *)$ زمرة دائرية تمتلك رتبة منتهية n فإن $(a) = \{a^0 = e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$

مثال 1 - 28

اوجد $((1 \ 2 \ 3))$ في (S_3, \circ) .

الحل

$$((1 \ 2 \ 3)) = \{(1), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\} \Leftarrow O((1 \ 2 \ 3)) = 3$$

تعريف 1 - 28

لتكن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ وأن $a \in G$ ، تسمى المجموعة المعرفة بالشكل التالي

$$a * H = \{a * h : h \in H\}$$

بالمجموعة المشاركة (المصاحبة) اليسارية لـ H في G ، وتسمى

$$H * a = \{h * a : h \in H\}$$

بالمجموعة المشاركة (المصاحبة) اليمينية.

مثال 1 - 29

ليكن $H = \{0, 2, 4\}$ اوجد $1 +_6 H, 2 +_6 H, 3 +_6 H, 4 +_6 H, 5 +_6 H$

الحل

$$1 +_6 H = \{1 +_6 0, 1 +_6 2, 1 +_6 4\} = \{1, 3, 5\}$$

$$2 +_6 H = \{2 +_6 0, 2 +_6 2, 2 +_6 4\} = \{2, 4, 0\}$$

$$3 +_6 H = \{3 +_6 0, 3 +_6 2, 3 +_6 4\} = \{3, 5, 1\}$$

$$4 +_6 H = \{4 +_6 0, 4 +_6 2, 4 +_6 4\} = \{4, 0, 2\}$$

$$5 +_6 H = \{5 +_6 0, 5 +_6 2, 5 +_6 4\} = \{5, 1, 3\}$$

مبرهنة 1 - 22

لتكن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ فإن

$$1. a * H = H \iff a \in H$$

$$2. H * a = H \iff a \in H$$

البرهان

ليكن $a * H = H$ اذن $a \in G$ و $e \in H$ نحصل على $a = a * e \in a * H = H$ اذن $a \in H$

لنفترض $a \in H$ وليكن $x \in a * H$ يوجد $h \in H$ بحيث $x = a * h$ اذن $x \in a * H \subseteq H$ وبالتالي ، الآن نفترض $y \in H$ فإن $y = a * (a^{-1} * y) \in a * H$ اذن $H \subseteq a * H$ وبالتالي $a * H = H$ \square

تعريف 1 - 29

لتكن $(H, *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(G, *)$ ، يسمى عدد كل من المجموعات المشتركة اليمنى او اليسرى بدليل الزمرة الجزئية H في G ويرمز له بالرمز $[G : H]$.

مثال 1 - 30

$$[A_n : S_n] = 2$$

مبرهنة 1 - 23 (مبرهنة لاكرانج)

لتكن $(G, *)$ زمرة منتهية ، فإن كل من رتبة ودليل اي زمرة جزئية H منها تقسم رتبته $O(G)$.

البرهان

بما ان $(G, *)$ زمرة منتهية و $(H, *)$ زمرة جزئية منها ، اذن مجموعة كل المجموعات المشاركة تشكل تجزئة للزمرة G وكذلك يوجد عدد منتهى من المجموعات المشاركة المختلفة كالاتي

$$G = H \cup a_1 * H \cup a_2 * H \cup \dots \cup a_k * H \iff H, a_1 * H, a_2 * H, \dots, a_k * H$$

$$O(G) = O(H) + O(a_1 * H) + O(a_2 * H) + \dots + O(a_k * H)$$

اي اثنين من المجموعات المشاركة المختلفة لذلك $O(G) = \underbrace{O(H) + O(H) + \dots + O(H)}_{k \text{ من المرات}}$

ومنه نحصل على $O(G) = k \cdot O(H)$ بالتالي $O(G) = [G : H]O(H)$ \square

ملاحظة

عكس مبرهنة لاكرانج ربما لا يكون صحيح دائماً لأي زمرة منتهية (لأي قاسم من قواسم رتبة الزمرة المنتهية توجد هنالك زمرة جزئية رتبته ذلك القاسم).

مثال 1 - 31

الزمرة A_4 رتبته 12 لكن لا توجد زمرة جزئية منها رتبته 6.

نتيجة 1 - 24

لتكن $(G, *)$ زمرة منتهية وليكن $a \in G$ فإن رتبة العنصر $O(a)$ عامل من عوامل رتبة الزمرة ، هذا يعني $a^{O(G)} = e$.

البرهان

الزمرة الجزئية $((a), *)$ رتبته تساوي رتبة العنصر a أي $O((a)) = O(a)$ هو عامل من عوامل $O(G)$.

نتيجة 1 - 25

لتكن $(G, *)$ زمرة منتهية رتبته مركبة (قابلة للتحليل الى عوامل) فإن $(G, *)$ تمتلك زمرة جزئية غير تافهة.

البرهان

إذا كانت $(G, *)$ زمرة ليست دائرية فإنه يوجد عنصر $a \in G$ بحيث يولد زمرة جزئية $((a), *)$ غير تافهة.

أما إذا كانت $(G, *)$ زمرة دائرية مولدة بواسطة العنصر a ، بما ان رتبة الزمرة قابلة للتحليل فإن $O(G) = mn$ حيث $m, n \in \mathbb{Z}$ ان كل من $m, n \neq 1$ اذن $a^{mn} = (a^n)^m = e$ ولكن $(a^n)^{m_1} = e$ حيث ان $0 < m_1 < m$ ، اذن $((a), *)$ رتبته تساوي m_1 وبالتالي فإنها زمرة جزئية غير تافهة. \square