



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة البصرة  
كلية التربية للعلوم الصرفة  
قسم الرياضيات



---

## طريقة تكرارية جديدة ذات الخطوتين لحل المعادلات غير الخطية

---

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة  
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

زهراء كريم

إشراف

م.م. هدى جبار سعيد

2025 - 2024

## الآية

قال تعالى

(وَلَسَوْفَ يُعْطِيكَ رَبُّكَ فَتَرْضَىٰ)

صدق الله العلي العظيم  
سورة الضحى (5)

## الإهداء

الى ...

النبي الأكرم معلم الامة الاعظم ، والى آل بيته الطيبين الطاهرين ، الى من هم منبع العلم والدين ، عليهم صلوات الله وسلامه أجمعين .

الى امين الله وشمس الهدى أمام الخلق وبحر الندى الأمام المهدي المنتظر  
(عجل الله فرجه الشريف ) .

الى شهداء العراق الابرار من الجيش و الشرطة ومجاهدي الحشد الشعبي الذين ضخوا من اجل تراب الوطن .  
الى من علمونا حروفا من ذهب وكلمات كالدرر وعبارات من اسمى واجل عبارات في العلم  
(أساتذتنا الافاضل ) .

الى من سعى وشقي لانعم بالراحة والهناء الى الذي لم يبخل بشئ من اجل دفعي في طريق النجاح وان ارتقي  
سلم الحياة بحكمة وصبر (والدي الحبيب) .

الى التي كلما نطقت شفاها كانت بالدعاء لنا ، نبع الحنان الصافي ورمز التفاني والتضحية وعموان المحبة  
( والدتي الحبيبة ) .

الى رياحين حياتي وسند قلبي ( اخواني واخواتي ) .

## شكر و تقدير

الحمد لله والشكر له بما من علينا به من عظيم نعمه والصلاة والسلام على سيد المرسلين وخاتم النبيين محمد وعلى آله الطيبين الطاهرين وصحبه المنتجبين . أتقدم بكل عبارات الشكر والعرفان والأمتنان لأستاذتي الفاضلة (م. م. هدى جبار سعيد ) بالأشراف على هذا البحث وما بذلته من جهد متواصل وتوجيه مستمر اذ كان لجهودها المميزة ومتابعتها المستمرة دون ملل الأثر الكبير في انجاز هذا البحث فجزاها الله عني خير الجزاء واسأل الله ان يسدد خطاها العلمية التربوية في حياتها المستقبلية. والشكر الجزيل الى اساتذتي المربين الأعزاء الافاضل ذوي البصمة الباقية في قلوبنا كل أساتذة قسم الرياضيات اسئل الله ان يبارك في أعمارهم ويزيد من مسراتهم ويحقق كل امانيتهم دائماً وابدأ فقد كانوا والله خير عوناً لنا بعد الله . كما أتوجه بخالص شكري وتقديري الى كل من ساعدني من قريب او بعيد من زملائي وزميلاتي على انجاز واطتمام هذا العمل المتواضع .

# المحتويات

1

الملخص

## الفصل الأول : مفاهيم أساسية

3

..... الحل المضبوط

4

..... القيمة التقريبية

4

..... رتبة التقارب

4

..... دليل الكفاءة

4

..... اختيار القيمة الابتدائية

## الفصل الثاني : الصيغة التكرارية الجديدة لحل المعادلات غير الخطية

7

..... مقدمة

7

..... اشتقاق الطريقة التكرارية

9

..... تحليل رتبة التقارب

## الفصل الثالث : النتائج العددية

12

..... مقدمة

14

..... الاستنتاجات

15

..... المصادر

## المخلص

في هذه الدراسة نقدم طريقة تكرارية جديدة (ZKM) مكونة من خطوتين لحل المعادلات غير الخطية باستخدام مفكوك تايلور وبعض التقنيات العددية المختلفة. نعرض تقارب الطريقة التكرارية الجديدة وايضا نحسب مؤشر كفاءة الطريقة التكرارية المقترحة تحليلياً ونقارنه مع طرائق تكرارية ذات صلة. لقد قمنا بإظهار كفاءة واداء طريقتنا التكرارية باستخدام عدد من الامثلة العددية.

# الفصل الأول

## مفاهيم أساسية

## 1- مقدمة

يعتبر إيجاد جذور المعادلة إحدى أقدم الطرائق في الرياضيات حيث نشأ عن هذه الفكرة فرع كامل من الرياضيات سمي نظرية المعادلات، هنا سوف ندرس جزء بسيط منها. هذا الفصل يهتم بدراسة تلك الطرائق القابلة للتطبيق في إيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة غير الخطية التي تكون بالشكل التالي

$$f(x) = 0 \quad (1.1)$$

حيث  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  دالة حقيقية وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة  $I$  وفي معظم الأحيان لا توجد طريقة صحيحة لحل هذا النوع من المعادلات و عليه لا يمكن إيجاد حل مضبوط لها. ولكن يمكن إيجاد جذور تقريبية ذات دقة معينة باستخدام بعض الطرائق العددية المعروفة. الآن سوف نتطلع على بعض المفاهيم الأساسية التي تساعدنا على الفهم الصحيح للموضوع.

### تعريف 1 - 1 : المعادلات غير الخطية

هي المعادلة التي يكون فيها على الأقل حد واحد بحيث يكون معامل المجهول مجهول آخر. أي أن درجة المعادلة تكون أكبر من واحد. أي هذه المعادلة التي تحتوي على قوى مختلفة لـ  $x$ .  
أو دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية أو ما يطلق عليها (Transcendental Functions).  
بعض الأمثلة على ذلك

$$f_1(x) = x^2 - 2x - 4$$

$$f_2(x) = \csc x + \sin x + 5$$

$$f_3(x) = \sqrt{x + 9}$$

$$f_4(x) = \log(x + 3)$$

$$f_5(x) = e^x$$

### تعريف 1 - 2 : الحل المضبوط (Exact Solution)

القيمة العددية تدعى جذر (Root) للمعادلة (1.1) إذا عوضنا بدل  $x$  بالقيمة  $\beta$  و تبقى المعادلة صادقة أي أن  $f(\beta) = 0$ . على سبيل المثال أن 1 يكون جذراً للمعادلة

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$



$$1^2 - 6(1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 6 - 6 = 0$$

### تعريف 1 - 3 : القيمة التقريبية (Approximation Value)

ان القيمة  $\alpha$  تدعى القيمة التقريبية للجذر  $\gamma$  اذا كانت القيمة المطلقة للدالة  $f(\alpha)$  اصغر من  $\epsilon$  و الفرق بين القيمتين  $\alpha, \gamma$  اصغر من  $\delta$  حيث  $\delta, \epsilon$  كميات صغيرة و موجبة ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة الرياضية التالية

$$f(x) = 0 \iff (|f(\alpha)| < \epsilon) \wedge (|\alpha - \gamma| < \delta)$$

### تعريف 1 - 4 : رتبة التقارب Order of Convergence

المتتابعة التكرارية  $\{x_n : n \geq 0\}$  تقترب الى الجذر  $\alpha$  بالرتبة  $p \geq 1$  اذا كان

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c |\alpha - x_n|^p, \quad k \geq 0$$

لبعض قيم  $c$  الموجبة. فإذا كان  $p = 1, 2, 3$  فإن المتتابعة تقترب الى الجذر بشكل علاقة خطية، تربيعية و تكعيبية على التوالي. يعرف  $c$  على انه معدل اقتراب  $x$  الى القيمة  $\alpha$

### تعريف 1 - 5 : دليل الكفاءة (Efficiency Index)

دليل كفاءة الطريقة التكرارية المستخدمة لايجاد حل المعادلة غير الخطية يعرف بالصيغة

$$E.I. = p^{\frac{1}{m}}$$

حيث  $m$  تمثل عدد الدوال الحسابية في كل خطوة تكرارية.

### تعريف 1 - 6 : اختيار القيمة الابتدائية (Choice of Initial Value)

ان اغلب الطرائق العددية المستخدمة في حل المعادلة (1.1) هي من انواع الطرائق التكرارية لذا فإننا نحتاج الى قيمة ابتدائية مثل  $x_0$  لبدء الطريقة التكرارية و منها يمكن توليد متتابعة  $x_n$  من القيم التقريبية التي تكون اقرب الى الجذر  $\alpha$  كلما زادت قيمة  $n$ . الاختيار الجديد للقيمة الابتدائية يؤثر على تقارب الطريقة بعدد اقل من العمليات التكرارية. ولضمان ذلك اعتماد عدة اساليب منها

1. اسلوب الرسم البياني (الرسم المفرد و المزدوج)

2. اسلوب البيانات الجدولية

في النهاية نجد ان لا يوجد قانون او نظرية مباشرة لايجاد جذور المعادلة لذلك يتم اللجوء الى الطرق العددية و الجذور لهذه المعادلات وهذه الحلول تكون تقريبية و غير مضبوطة بالمقارنة لو كانت هناك حلول

نظرية لهذه المعادلات وتعتمد طريقة الحل العددي بشكل عام على دقة الخطأ الذي يتم الوصول اليه. على اي حال يمكن اعتماد الطرائق العددية المعتمدة كأفضل وسيلة لايجاد الحل التقريبي خاصة اذا كانت المعادلات غير خطية ولا يمكن ايجاد حلول لها بالطرق النظرية وعلى هذا الاساس تحديدها عددا هي بالاساس يمكن تحديدها تقريبا بالرسم او الحساب التقريبي.

و اهم هذه الطرائق:

● طريقة نيوتن-رافسون

● طريقة تنصيف

● طريقة القاطع

و تعد اسرع الطرق من حيث الوصول الى قيمة الجذر وبالدقة المطلوبة هي نيوتن رافسون.

## الفصل الثاني

الصيغة التكرارية الجديدة لحل المعادلات  
غير الخطية

## 1. مقدمة

في هذا الفصل نقترح ونقدم طريقة تكرارية معدلة ذات معلمة واحدة من خطوتين لحل المعادلات غير الخطية باستخدام مفكوك تايلر وبعض التقنيات العددية.

## 2. اشتقاق الطريقة التكرارية

من المعادلة  $f(x) = 0$  و باستخدام مفكوك تايلر حول النقطة  $x_0$  وإهمال الحدود من الرتبة الثالثة فما فوق نحصل على

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) = 0 \quad (2.1)$$

نسحب  $(x - x_0)$  عامل مشترك من المعادلة (2.1) نحصل على

$$(x - x_0) \left[ f'(x_0) + \frac{x - x_0}{2} f''(x_0) \right] = -f(x_0) \quad (2.2)$$

الآن بحل المعادلة (2.2) بالنسبة إلى  $x$  نحصل على

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) + \frac{x - x_0}{2} f''(x_0)} \quad (2.3)$$

بإعادة ترتيب المعادلة (2.3) للحصول على

$$x - x_0 = -\frac{2f(x_0)}{2f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0)} \quad (2.4)$$

الآن من المعادلة (2.4) نحصل على المعادلة أدناه

$$x = x_0 - \frac{2f(x_0)}{2f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0)} \quad (2.5)$$

باستخدام صيغة شبيهة نيوتن  $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)+wf(x_0)}$  نعوضها في المعادلة (2.5)

$$x = x_0 - \frac{2f(x_0)}{2f'(x_0) + \left( \frac{f(x_0)}{f'(x_0) + wf(x_0)} \right) f''(x_0)}$$

بعد تبسيط المعادلة نحصل على

$$x = x_0 - \frac{2f(x_0)(f'(x_0) + wf(x_0))}{2f'(x_0)(f'(x_0) + wf(x_0)) - f(x_0)f''(x_0)} \quad (2.6)$$

من الصيغة اعلاه يمكن الحصول على صيغة تكرارية جديدة ذات خطوة واحدة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)[f'(x_n) + wf(x_n)]}{2f'(x_n)[f'(x_n) + wf(x_n)] - f(x_n)f''(x_n)} \quad (2.7)$$

نقوم بتحويل الصيغة التكرارية ذات الخطوة الواحدة الى ذات الخطوتين باستخدام المضمن المصحح لتحسين رتبة التقارب

$$y_n = x_n - \frac{f(x_0)}{f'(x_n) + wf(x_0)}$$

$$x_n = y_n - \frac{2f(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)]}{2f'(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)] - f(y_n)f''(y_n)} \quad (2.8)$$

من اجل تنفيذ هذه الصيغة يتعين علينا حساب المشتقة الثانية للدالة  $f(x)$  مما قد يخلق بعض المشاكل عند حساب المشتقات من الرتب العليا. للتغلب على هذه المشكلة وايضاً لتحسين الكفاءة لصيغتنا التكرارية نقرب هذه المشتقة باستخدام الفروقات المقسمة المعرفة بالشكل

$$f''(y_n) = \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{y_n - x_n} = A(x_n, y_n) \quad (2.9)$$

الان بتعويض (2.9) في (2.8)، الصيغة التكرارية الجديدة تصبح

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)]}{2f'(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)] - f(y_n)A(x_n, y_n)} \quad (2.10)$$

حيث

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + wf(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad w \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

### 3. تحليل رتبة التقارب

**مبرهنة:** لتكن  $a \in I$  جذراً للمعادلة غير الخطية (1.1) وليكن  $x_0$  حل ابتدائي مناسب للجذر  $\alpha$ . فإن الصيغة التكرارية المعدلة تقترب تقارباً من الرتبة الخامسة على الأقل.

**البرهان:** ليكن  $\alpha$  جذراً للمعادلة (1.1) حيث  $(f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0)$  باستخدام مفكوك تايلر حول النقطة  $\alpha$  نجد

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f^{(3)}(\alpha)(x_n - \alpha)^3 + \dots + O(x_n - \alpha)^5 \end{aligned}$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^5)]$$

$$e_n = x_n - \alpha \text{ و } c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}; k = 1, 2, 3, \dots \text{ حيث}$$

من التعريف  $f''(y_n) = A(x_n, y_n)$

$$f''(y_n) = \frac{f'(y_n - x_n)}{(y_n - x_n)} = A(x_n, y_n)$$

نفرض ان

$$y_n = \alpha + (c_2 + w)e_n^2 + (-w^2 - 2wc_2 - 2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + O(e_n^5)$$

، الآن باستخدام مفكوك تايلر للدوال  $f(y_n), f'(y_n), f'(y_n)^2$  حول النقطة  $\alpha$  نحصل على

$$f(y_n) = (c_2 + w)e_n^2 + (-w^2 - 2wc_2 - 2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + \dots + O(e_n^5)$$

$$f'(y_n) = 1 + 2c_2(c_2 + w)e_n^2 - 4(c_2^2 + wc_2 + \frac{1}{2}w^2 - 2c_3)c_2e_n^3 + \dots + O(e_n^5)$$

$$f'(y_n)^2 = 1 - 4c_2(c_2 + w)e_n^2 - 8(c_2^2 + wc_2 + \frac{1}{2}w^2 - 2c_3)c_2e_n^3 + \dots + O(e_n^5)$$

ثم بتعويض المعادلات اعلاه في الصيغة التكرارية الجديدة نحصل على

$$x_{n+1} = \alpha - \frac{1}{2}(c_2^2 + w)[w + c_2 - w(2c_2 + w)]e_n^4 + O(e_n^5)$$

بما ان  $x_n = \alpha + e_n$  نحصل على

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2}(c_2^2 + w)(w + c_2 - w(2c_2 + 2w))e_n^4 + O(e_n^5)$$

## الفصل الثالث

### النتائج العددية



## 1. مقدمة

في هذا الفصل نظهر كفاءة وقوة اداء الطريقة التكرارية الجديدة (ZKM) من خلال بعض الامثلة العددية مقارنة بالطرق المعطاة على النحو التالي

طريقة نيوتن (NM)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

طريقة هالي الكلاسيكية (HM)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

كل الحسابات نفذت بصيغة الدقة المضاعفة عند  $\epsilon = 0.5$  باستخدام برنامج Maple. ولتحقيق التقارب في الخوارزمية اعتمدنا شرطي التوقف

$$1. |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

$$2. |f(x_{n+1})| < \epsilon$$

جدول (3 - 1):

$f(x) = 2x^3 - 5x - 2, \quad x_0 = 1$				
Method	IT	$x_n$	$ x_{n+1} - x_n $	$f(x_{n+1})$
NM	8	2.85078	$9.97220 \times 10^{-13}$	$1.98810 \times 10^{-34}$
HM	6	2.85078	$1.86308 \times 10^{-33}$	$-4.03983 \times 10^{-99}$
ZKM	4	0.35078	$5.15939 \times 10^{-40}$	$4.67777 \times 10^{-239}$

جدول (3 - 2):

$f(x) = x^2 - e^x + 3x + 2, \quad x_0 = 2.0$				
Method	IT	$x_n$	$ x_{n+1} - x_n $	$f(x_{n+1})$
NM	19	2.99223	$2.94158 \times 10^{-26}$	$-7.75741 \times 10^{-51}$
HM	7	2.99223	$1.81427 \times 10^{-35}$	$2.40134 \times 10^{-104}$
ZKM	4	-0.60899	$2.37478 \times 10^{-45}$	$1.21578 \times 10^{-224}$

جدول (3 - 3):

$f(x) = \cos(x) - x, \quad x_0 = 1.7$				
Method	IT	$x_n$	$ x_{n+1} - x_n $	$f(x_{n+1})$
NM	5	0.73909	$2.34491 \times 10^{-10}$	$-2.031971 \times 10^{-112}$
HM	5	0.73909	$2.25412 \times 10^{-44}$	$-2.22041 \times 10^{-132}$
ZKM	4	0.73909	$5.67243 \times 10^{-56}$	$-5.13844 \times 10^{-278}$

جدول (3 - 4):

$f(x) = x^3 - e^{-x}, \quad x_0 = 3.5$				
Method	IT	$x_n$	$ x_{n+1} - x_n $	$f(x_{n+1})$
NM	9	0.77288	$6.54706 \times 10^{-20}$	$8.94918 \times 10^{-39}$
HM	6	0.77288	$4.43261 \times 10^{-26}$	$7.46517 \times 10^{-77}$
ZKM	5	0.77288	$5.95606 \times 10^{-45}$	$2.46351 \times 10^{-221}$

## 2. الاستنتاجات

في هذا لبحث تم تطوير عائلة تكرارية جديدة ذات الخطوتين من الرتبة الخامسة لحل المعادلات غير الخطية التربيعية بالاعتماد على مفكوك تايلر وبعض التقنيات العددية. نلاحظ من خلال النتائج العددية في الجداول اعلاه ان الطريقة التكرارية الجديدة (ZKM) ذات المعلمة الواحدة اعطت نتائج جيدة من حيث عدد التكرارات وسرعة التقارب مقارنة بطريقة نيوتن - رافسون (NM) وطريقة هالي (HM) حيث اعطت الطريقة التكرارية الجديدة ZKM افضل النتائج بإختيار قيمة المعلمة (0.5).

## المصادر

- [1] Chun, C. A new iterative method for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 2006, 178, 415-422.
- [2] T.G.I Fernando and S. Weerakoon, Improved Newton's method for finding roots of a nonlinear equation, proceedings of the 53<sup>rd</sup> Annal sessions of srilnoka Association for the advancement of science (SL.A.A.S), El. 22, 309 (1997).
- [3] K. Inayat Noor, M, Aslam Noor, Predictor-correcter Halley method for nonlinear equations, Appl. Math. Comput. - (2006).
- [4] Ali, A.H. Pales, Z. Taylor-type expansion in terms of exponential polynomials , Math-Inequalities Appl. 2022, 25, 1123-1141.