وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

مؤثر برينستين

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

سارة عباس

إشراف

م.م. جنان عبدالامام نجم

2025 - 2024

الآية

قال تعالى

(يَرْفَع اللهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ)

صدق الله العلي العظيم
سورة المجادلة (11)

الإهداء

إلى الكهف الحصين وغياث المضطر المستكين وملاذ المؤمنين ومنقذ العالمين حضرة جناب الموقر صاحب الزمان (عج).

إلى من بها أعلوا وعليها ارتكز ، إلى الينبوع الذي لا يمل من العطاء ، والدعاء المستجاب (والدتي العزيزة).

إلى والدي المبجل أطال الله في عمره وأمده بالصحة والعافية.

إلى خير سند (اخوتي واخواتي).

الى اكثر استاذة الهمتني وحببتني بالتخصص... كلمة الشكر لا توفيها، كانت بصمة جميلة في حياتي اسأل الله كل التوفيق لها ... الى (م.م. جنان عبدالامام نجم)

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر الجزيل و الثناء الجميل إلى **م.م. جنان عبدالامام نجم** كان لها الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا ملاحظاتها وإنجازها لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاها الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

مقدمة

نظرية التقريب تلعب دوراً مهماً في التحليل الرياضي والتحليل العددي. حيث تقدم طرائق لتقريب دوال معقدة بواسطة دوال ابسط منها. واحد من اكثر الادوات المعروفة هو مؤثر برينستين. الذي قدمه العالم برينستين في عام 1912 كجزء من برهانه لنظرية وايرستراس للتقريب.

يكون التقريب للدالة الذي قدمه برينستين بواسطة مجموع لكثيرات حدود تسمى بكثيرات حدود القاعدة لبرينستين التي تمثل اداة قوية وفعّالة في التقريب لانها تحافظ على خصائص معينة للدالة. مثل عدم السالبية والرتابة. كما تستخدم في نطاق واسع في الرسومات الحاسبية والتحليل العددية ونظرية الاحتمالات وفي دراسة منحنيات بيزير **Bezier curves**.

الفصل الأول

مفاهيم اساسية

الفصل الثانـي

مؤثر برينستين

2 - 1 تعريف مؤثر برينستين

تعريف 2 - 1 - 1

لتكن $f(t) \in C[0,1]$. مؤثر برينستين من الرتبة n يعرف بالشكل

$$B_n(f(t);x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

مبرهنة 2 - 1 - 1

الدوال $b_{n,k}(x)$ تمتلك الخواص التالية

1. $\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = 1$
2. $\sum_{k=0}^{n} k b_{n,k}(x) = nx$
3. $\sum_{k=0}^{n} k^2 b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx$
4. $\sum_{k=0}^{n} k^3 b_{n,k}(x) = n(n-1)(n-2)x^3 + 3n(n-1)x^2 + nx$
5. $\phi_{n,m}(x) = \dfrac{n!}{(n-m)!}x^m + \dfrac{m(m-1)}{2}\dfrac{n!}{(n-m+1)!}x^{m-1} + \mathrm{TLP}(x)$

حيث $\mathrm{TLP}(x)$ تعني الحدود للقوى الدنيا لــ x

البرهان

.1

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

.2

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k b_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^{k+1}(1-x)^{n-1-k}$$

$$= nx \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(x) = nx$$

.3

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 b_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{n(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} \\
&= nx \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) b_{n-1,k}(x) \\
&= nx \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} k b_{n-1,k}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k}(x) \right\} \\
&= nx \left\{ (n-1)x + 1 \right\} \\
&= n(n-1)x^2 + nx
\end{aligned}$$

.4

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^3 b_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^3 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} k^3 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \frac{n(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} \\
&= nx \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 b_{n-1,k}(x) \\
&= nx \sum_{k=0}^{n-1} (k^2+2k+1) b_{n-1,k}(x) \\
&= nx\Big[(n-1)(n-2)x^2 + (n-1)x + 2\big[(n-1)x\big] + 1\Big] \\
&= n(n-1)(n-2)x^3 + (1+2)n(n-1)x^2 + nx \\
&= n(n-1)(n-2)x^3 + 3n(n-1)x^2 + nx
\end{aligned}
$$

5. من العلاقة التكرارية $\phi_{n,m+1}(x) = x(1-x)\phi'_{n,m}(x) + nx\phi_{n,m}(x)$ لدينا

$$
\begin{aligned}
\phi_{n,4}(x) &= x(1-x)\phi'_{n,3}(x) + nx\phi_{n,3}(x) \\
&= (x-x^2)[3n(n-1)(n-2)x^2 + 2n(n-1)(2+1)x + n] \\
&\quad + nx[n(n-1)(n-2)x^3 + n(n-1)(2+1)x^2 + nx] \\
&= [-3n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)]x^4 \\
&\quad + [3n(n-1)(n-2) - 2n(n-1)(2+1) + n^2(n-1)(2+1)]x^3 \\
&\quad + \mathrm{TLP}(x) \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)x^4 \\
&\quad + [3n(n-1)(n-2) + n(n-1)(2+1)(n-2)]x^3 + \mathrm{TLP}(x) \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)x^4 + n(n-1)(n-2)(3+2+1)x^3 + \mathrm{TLP}(x)
\end{aligned}
$$

بالتالي نخمن

$$
\phi_{n,m}(x) = \frac{n!}{(n-m)!}x^m + \frac{m(m-1)}{2}\frac{n!}{(n-m+1)!}x^{m-1} + \mathrm{TLP}(x)
$$

نكمل البرهان بالاستقراء الرياضي. نفرض العلاقة صحيحة عند m. نحتاج ان نبرهن صحة العلاقة عند $m+1$. باستخدام العلاقة التكرارية للدالة $\phi_{n,m+1}(x)$ نحصل على

$$\begin{aligned}
\phi_{n,m+1}(x) &= x(1-x)\phi'_{n,m}(x) + nx\phi_{n,m}(x)\\
&= (x-x^2)\frac{d}{dx}\left[\frac{n!}{(n-m)!}x^m + \frac{m(m-1)}{2}\frac{n!}{(n-m+1)!}x^{m-1} + \mathrm{TLP}(x)\right]\\
&\quad + nx\left[\frac{n!}{(n-m)!}x^m + \frac{m(m-1)}{2}\frac{n!}{(n-m+1)!}x^{m-1} + \mathrm{TLP}(x)\right]\\
&= (x-x^2)\left[\frac{n!}{(n-m)!}mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{n!}{(n-m+1)!}(m-1)x^{m-2} + \mathrm{TLP}(x)\right]\\
&\quad + nx\left[\frac{n!}{(n-m)!}x^m + \frac{m(m-1)}{2}\frac{n!}{(n-m+1)!}x^{m-1} + \mathrm{TLP}(x)\right]\\
&= x^{m+1}\left[-\frac{n!}{(n-m)!}m + n\frac{n!}{(n-m)!}\right]\\
&\quad + x^m\left[\frac{n!}{(n-m)!} - \frac{m(m-1)}{2}\frac{n!}{(n-m+1)!} + n\frac{m(m-1)}{2}\frac{n!}{(n-m+1)!}\right]\\
&\quad + \mathrm{TLP}(x)\\
&= x^{m+1}\frac{n!}{(n-m)!}(n-m)\\
&\quad + x^m\frac{n!}{(n-m)!}\left[m - \frac{m(m-1)}{2}\frac{1}{(n-m+1)}(m-1) + n\frac{m(m-1)}{2}\frac{1}{n-m+1}\right]\\
&\quad + \mathrm{TLP}(x)\\
&= x^{m+1}\frac{n!}{(n-m+1)!}\\
&\quad + x^m\frac{n!}{(n-m)!}\left[m - \frac{m(m-1)^2}{2(n-m+1)} + n\frac{m(m-1)}{2(n-m+1)}\right]\\
&\quad + \mathrm{TLP}(x)\\
&= x^{m+1}\frac{n!}{(n-m+1)!}\\
&\quad + x^m\frac{n!}{(n-m)!}\left[m + \frac{m(m-1)}{2(n-m+1)}[n-(m-1)]\right] + \mathrm{TLP}(x)\\
&= x^{m+1}\frac{n!}{(n-m+1)!} + x^m\frac{n!}{(n-m)!}\left[m + \frac{m(m-1)}{2}\right] + \mathrm{TLP}(x)\\
&= x^{m+1}\frac{n!}{(n-m+1)!} + x^m\frac{n!}{(n-m)!}\left[\frac{m^2+2m-m}{2}\right] + \mathrm{TLP}(x)\\
&= \frac{n!}{(n-(m+1))!}x^{m+1} + \frac{(m+1)m}{2}\frac{n!}{(n-(m+1)+1)!}x^m + \mathrm{TLP}(x)
\end{aligned}$$

اذن العلاقة صحيحة عند $m+1$

مبرهنة 2 - 1 - 2

لتكن $f(t)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ او على $[0, \infty)$ و $B_n(f; x)$ تحقق الشروط التالية

1. $B_n(1; x) \to 1$ as $n \to \infty$
2. $B_n(t; x) \to x$ as $n \to \infty$
3. $B_n(t^2; x) \to x^2$ as $n \to \infty$

فإن $f(x) \to B_n(f; x)$ عندما $n \to \infty$

البرهان

1. $B_n(1; x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \cdot 1 = 1 \to 1$ as $n \to \infty$.
2. $B_n(t; x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \cdot \left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot nx = x \to x$ as $n \to \infty$.
3. $B_n(t^2; x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \cdot \left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot [n(n-1)x^2 + nx] \to x^2$ as $n \to \infty$.

اذن $f(x) \to B_n(f; x)$ عندما $n \to \infty$

2 - 2 العزوم من الرتبة m

تعريف 2 - 2 - 1

نعرف العزوم من الرتبة m لمؤثر برينستين $B_n(f; x)$ كالتالي

$$T_{n,m}(x) = B_n((t-x)^m; x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) \left(\frac{k}{n} - x\right)^m$$

مبرهنة 2 - 2 - 1

لدينا

1. $T_{n,0}(x) = 1$
2. $T_{n,1}(x) = 0$
3. $T_{n,2}(x) = \dfrac{x(1-x)}{n}$

البرهان

.1

$$T_{n,0}(x) = B_n((t-x)^0; x) = B_n(1; x) = 1$$

.2

$$\begin{aligned} T_{n,1}(x) &= B_n((t-x)^1;x) \\ &= B_n(t-x;x) \\ &= B_n(t;x) - B_n(x;x) \\ &= x - xB_n(1;x) = x - x = 0 \end{aligned}$$

.3

$$\begin{aligned} T_{n,2}(x) &= B_n((t-x)^2;x) \\ &= B_n(t^2 - 2xt + x^2;x) \\ &= B_n((t^2;x) - 2xB_n(t;x) + x^2B_n(1;x) \\ &= \frac{1}{n^2}\Big[n(n-1)x^2 + nx\Big] - 2x\cdot x + x^2 \\ &= \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

مثال

اوجد متعددة حدود تقريبية من الدرجة الثالثة للدالة $\sin t \in C[0,1]$

الحل

التقريب بواسطة مؤثر برينستين يعطي متعددة حدود تقريبية من الدرجة n. اذن

$$\begin{aligned} B_3(\sin t;x) &= \sum_{k=0}^{3} b_{3,k}(x)\sin\left(\frac{k}{3}\right) \\ &= b_{3,0}(x)\sin\left(\frac{0}{3}\right) + b_{3,1}(x)\sin\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\qquad + b_{3,2}(x)\sin\left(\frac{2}{3}\right) + b_{3,3}(x)\sin\left(\frac{3}{3}\right) \end{aligned}$$

2 - 3 نشر تيلر للدالة $f(t)$

متسلسلة تايلر هي تمثيل دالة قابلة للاشتقاق $f(t)$ بعدد غير منتهٍ من الحدود بإستخدام مشتقاتها حول نقطة معينة مثل x. يعطى التمثيل الرياضي لها بالشكل

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x)}{m!}(t-x)^m$$

الآن بأخذ مؤثر برينستين للطر فين، نحصل على

$$B_n(f(t);x) = B_n\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}(t-x)^m;x\right)$$

الآن بما ان مؤثر برينستين هو مؤثر خطي نحصل على

$$B_n(f(t);x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}B_n\left((t-x)^m;x\right)$$

ومن تعريف العزوم

$$B_n(f(t);x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}T_{n,m}(x)$$