وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

# من تطبيقات الجبر الخطي

# Some Applications of Linear Algebra

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

زهراء كريم

إشراف

م. تهاني عبدالمجيد

2025 - 2024

# الاهداء

الى خالق الروح والقلم وبارئ الذر والنسل وخالق كل شي من العدم الى من بلغ الرساله وادى الامانه .. ونصح الامه .. الى نبي الرحمه ونور العالمين الى الساده الاطهار وعترته الوثقى .. اهل بيت النبوه

الى مراد قلبي والاقرب لي من نفسي المغيب عن الابصار والكامن بعين البصيره الى بقيه الله الاعظم... صاحب العصر والزمان (عجل الله تعالى فرجه)

الى من علمني ان الدنيا كفاح ... وسلاحها العلم والمعرفه الى الذي لم يبخل علي بعلمه ووقته ... سعى لاجل راحتي ونجاحي الى عضدي واعتز رجل في الكون
ابي العزيز

الى تلك الحبيبه ذات القلب النقي الى من اوصاني الرحمن.. بها برا واحسانا الى من سعت وعانت من اجلي الى من كان دعائها سر نجاحي
امي الحبيبه

الى من شاركهم لحظاتي .. الى من يفرحون لنجاحي وكأنه نجاحهم... اخوتي واصدقائي الذين بكل اهدايكم هذا جهدي المتواضع

# المحتويات

**مقدمة** 1

**الفصل الأول : مفاهيم أساسية**

1 - 1 المصفوفات ........ 3

1 - 2 حجم المصفوفة ........ 3

1 - 3 خصائص المصفوفة ........ 3

1 - 4 العمليات الحسابية على المصفوفات ........ 3

1 - 5 محدد المصفوفة [ ] ........ 5

1 - 6 انواع المحددات ........ 5

**الفصل الثاني :**

2 - 1 ايجاد معادلة المستقيم المار بنقطة معطاة ........ 9

2 - 2 ايجاد معادلة خط المستقيم بواسطة ميل معطى ونقطة ........ 9

2 - 3 ايجاد معادلة المستقيم المار بنقطتين ........ 11

2 - 4 معادلة الدائرة ........ 12

2 - 5 القطع المكافئ ........ 14

2 - 6 خصائص القطع المكافئ ........ 14

**المصادر** 18

# مقدمة

المصفوفات هي إحدى أهم البنى الرياضية التي تُستخدم على نطاق واسع في الرياضيات والهندسة والعلوم التطبيقية. تتكون المصفوفة من مجموعة من الأعداد أو الرموز مرتبة في صفوف وأعمدة داخل جدول مستطيل الشكل، مما يسهل التعامل مع البيانات وتمثيل الأنظمة المعقدة بطريقة منظمة وفعالة.

تلعب المصفوفات دورًا حيويًا في العديد من المجالات، مثل الجبر الخطي، الإحصاء، الفيزياء، والهندسة. ومن أبرز تطبيقاتها:

- **تمثيل وحل الأنظمة الخطية:** حيث تُستخدم لحل مجموعة من المعادلات الخطية بطريقة مبسطة باستخدام العمليات المصفوفية مثل ضرب المصفوفات وعكسها.
- **تحليل البيانات والذكاء الاصطناعي:** إذ تُستخدم في معالجة الصور، التعلم العميق، وتحليل البيانات الكبيرة.
- **فيزياء الكم والرسومات الحاسوبية:** حيث تُستخدم في تدوير الأجسام وتحويل الإحداثيات في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

# الفصل الأول

# مفاهيم أساسية

## 1 - 1 المصفوفات

يمكن تعريف المصفوفات بأنها ترتيب معين للاعداد على شكل اعمدة وصفوف . تكتب المصفوفات عادة على شكل صندوق مربع او مستطيل الشكل ويسمى الخط العمودي داخل المصفوفة بالعمود اما الخط الافقي فيسمى صفاً ويمكن التعبير عن حجم المصفوفة من خلال عدد الصفوف والاعمدة التي تحتويها كما يلي

## 1 - 2 حجم المصفوفة

هو عدد الصفوف وعدد الاعمدة فمثلاً اذا كان عدد الصفوف في مصفوفة ما هو 2 وعدد الاعمدة هو 3 فإنه يتم التعبير عن حجمها بــ $3 \times 2$ وهكذا. وتعرف المصفوفات والاعمدة بأبعاد المصفوفة.

## 1 - 3 خصائص المصفوفة

يعرف كل ما يوجد داخل المصفوفة بعناصر المصفوفة سواء كانت ارقام او رموز او مقادير جبرية وابرز هذه الخصائص

1. اذا كان عدد صفوف واعمدة احدى المصفوفات مساوياً لعدد صفوف واعمدة مصفوفة اخرى فإن هاتين المصفوفتين تعتبران متساويتين بالحجم
2. يمكن تسمية المصفوفة بأي حرف من احرف اللغة العربية اما في اللغة الانكليزية فيتم التعبير عنها باستخدام احد الاحرف الكبيرة.
3. ما داخل المصفوفة اي العناصر فيتم التعبير عنها عن طريق كتابة الحرف الذي يعبر عن اسم المصفوفة وكتابة رقم كل من الصف والعمود لذلك العنصر على الترتيب اسفل ذلك الحرف اي اسم المصفوفة صف وعمود.

## 1 - 4 العمليات الحسابية على المصفوفات

### 1. جمع وطرح المصفوفات

يجب عند جمع او طرح المصفوفات ان تكون متساوية في الحجم اي يجب لعدد الصفوف والاعمدة ان يكون متساوياً في كلا المصفوفتين.

**مثال توضيحي:** اذا كان عدد الصفوف في مصفوفة ما 3 صفوف و 5 اعمدة فإنه يمكن جمعها مع مصفوفة اخرى اذا كان عدد صفوفها 3 صفوف وعدد اعمدتها 5. وفي المقابل لا يمكن مثلاً جمعها الى مصفوفة اخرى عدد الصفوف فيها 3 وعدد اعمدتها 4.

ويتم الجمع عن طريق جمع كل عنصر متطابقين في الموقع بين المصفوفتين وكذلك الامر في عملية الطرح.

**مثال**

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} - \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & -11 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

**2. ضرب المصفوفات**

يمكن ضرب مصفوفتين ببعضهما فقط اذا كان عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى مساوياً لعدد الصغوف في المصفوفة الثانية ليكون حجم المصفوفة الناتجة هو عدد صفوف المصفوفة الاولى × عدد اعمدة المصفوفة الثانية

**مثال**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

حجم المصفوفة الناتجة

$$[A]_{2\times 3} \cdot [B]_{3\times 3} \Rightarrow [AB]_{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 26 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

طريقة الحل

$$2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 2 = 11$$

$$2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 = 12$$

$$2\cdot 5 + 3\cdot 4 + 1\cdot 4 = 26$$ وهكذا

## 1 - 5 محدد المصفوفة [ ]

المحدد هو دالة رياضية تعتمد على بعد المصفوفة $n$ ويربط بقيمة قياسية (scalar) هي $\det A$ بكل مصفوفة مربعة $n \times n$ والمعنى الهندسي الاساسي للمحدد هو أنه بمثابة عامل المقياس للحجم عندما تعد المصفوفة $A$ تحويلا خطيا ويرمز عادة للمحدد لمصفوفة ما بالرمز $|A|$ . و لا يمكن حساب المحدد الا للمصفوفة المربعة

**تعريف:** لتكن $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$ اي ان $A = [a_{ij}]_n$ وتساوي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ندعوا الرمز $|A|$ او $\det A$ بمحدد المصفوفة من الرتبة $n$ ونكتب

$$|A| = |A|_n = |a_{ij}|_n = \det A$$

## 1 - 6 انواع المحددات

### 1. المحدد من الرتبة الاولى

$$A = [a_{11}] \Rightarrow |A|_1 = |a_{11}|$$

**طريقة الحساب:** يملك نفس قيمة العنصر الوحيد للمصفوفة المقابلة

### 2. المحدد من الرتبة الثانية

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

حساب المحدد لمصفوفة ابعادها $2 \times 2$ يكون وفق القانون

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

### 3. المحدد من الرتب العليا $(3 \times 3)$ او $(4 \times 4)$

تحسب وفق الطرائق الآتية

#### 1. طريقة ساروس (الشعاعية)

تتلخص بأخذ العمودين الاول و الثاني ونضعهما على يمين العمود الثالث ونقوم بمد شعاع على عناصر القطر الرئيسي من اعلى اقصى اليسار الى اسفل اقصى اليمين بعدها نمد شعاع بالاتجاه المعاكس اي من عناصر القطر الثانوي من اسفل اقصى اليسار الى اقصى اليمين وكما موضح

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}]$$
$$- [a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}]$$

**مثال**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$|B| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 0 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right.$$

$$= (56 + 0 - 45) - (21 + 0 + 20)$$
$$= -30$$

## 2. طريقة المحيدد (اختيار صف او عمود)

تلائم هذه الطريقة المصفوفات من الرتبة $2 \times 2$ و $3 \times 3$ و $4 \times 4$
وهو اختيار احد الصفوف او الاعمدة في مثالنا. قمنا باختيار الصف الاول ثم نثبت الاشارات البدء بالحساب بالاشارات الموجبة وبعدها السالبة وبعدها الموجبة (بالتناوب).

**مثال**

$$B = \begin{bmatrix} \overbrace{2}^{+} & \overbrace{1}^{-} & \overbrace{-3}^{+} \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\begin{aligned} |B| &= 2\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(28) - 20 + (-3)(22) \\ &= -30 \end{aligned}$$

# الفصل الثاني

## 2 - 1 ايجاد معادلة المستقيم المار بنقطة معطاة

الخط المستقيم تم تعريفه هندسياً على انه خط لا بداية له و لا نهاية له و لا يوجد له طول معين ايضاً وبعد ذلك تم الوصول بأن هذا التعريف خاطئ لان المستقيم في اعتقاد بعض العلماء له بداية وله نهاية لانه يتواجد في كل زاوية حولنا.

### المنحني المستوي

هو منحنى يقع في مستوي ما. قد يكون المنحني المستوي مغلقاً او مفتوحاً. المنحنيات التي تكون مثيرة للاهتمام لسبب ما و التي تم التحقيق في خصائصها تسمى المنحنيات الخاصة.
بعض المنحنيات الاكثر شيوعاً هي الخط و القطع الزائد وبعض المنحنيات المغلقة الاكثر شيوعاً هي الدائرة و القطع الناقص.

### ميل الخط المستقيم

الميل من اهم خصائص الخط المستقيم ويرمز له بالحرف $m$. يصف الميل مدى انحدار هذا الخط المستقيم عن المحور الافقي (محور السينات او محور $X$) سواء اتجه نحو الاعلى او انخفض

## 2 - 2 ايجاد معادلة خط المستقيم بواسطة ميل معطى ونقطة

$$y = mx + b$$

حيث $m$: ميل الخط المستقيم و $b$: العدد ؛

**مثال**

جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ويمر بالنقطة $(-1, 1)$

**الحل**

$y = mx + b$. الميل $m = 2$ اذن $y = 2x + b$. نعوض النقطة $(-1, 1)$ في معادلة الخط المستقيم

$$-1 = 2(1) + b$$
$$-1 = 2 + b$$
$$b = -1 - 2 = -3$$

اذن المعادلة $y = 2x - 3$

**حساب ميل الخط المستقيم**

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

بحيث أن $m$ ميل الخط المستقيم

$$y = mx + b$$

و $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ نقطتان تقع على خط المستقيم

**مثال**

جد ميل المستقيم الذي تقع عليه النقطتين $A(2,4)$ و $B(6,8)$

**الحل**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$$

**مثال**

جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2,5), (4,7)$

**الحل**

معادلة المستقيم هي $y = mx + b$. نجد الميل

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{7-5}{4-2} \\ &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

نعوض الميل و احدى النقطتين في معادلة المستقيم

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ 5 &= 1(2) + b \\ b &= 5 - 2 \Rightarrow b = 3 \end{aligned}$$

اذن معادلة المستقيم هي $y = x + 3$

## 2 - 3 ايجاد معادلة المستقيم المار بنقطتين

اذا كانت لدينا نقطتان $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ في المستوي ونريد ايجاد معادلة المستقيم المار بهما فإن هذه المعادلة هي على الصورة

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0$$

حيث $a_1, a_2, a_3$ اعداد حقيقية لا تساوي صفر
اذا كانت $(x, y)$ اي نقطة على هذا المستقيم فإننا نحصل على نظام المعادلات المتجانس

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3 &= 0 \\ a_1x_1 + a_2y_1 + a_3 &= 0 \\ a_1x_2 + a_2y_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

حيث $a_1, a_2, a_3$ مجاهيل. لذا فإن محدد مصفوفة المعاملات للنظام يجب ان يساوي صفراً، أي ان

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**مثال**

استخدم المحددات لايجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 1), (2, 3)$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right. = 0$$

$$\Rightarrow (3x - y + 2) - (2y + x - 3) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 5 = 0$$

**مثال**

استخدم المحددات لايجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(2,7),(2,5)$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right. = 0$$

$$\Rightarrow (5x+2y+14)-(10+7x+2y)=0 \Rightarrow -2x+2=0$$

**مثال**

استخدم المحددات لايجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(3,4),(1,4)$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right. = 0$$

$$\Rightarrow (4x+y+12)-(4+4x+3y)=0 \Rightarrow -2y+8=0$$

## 2 - 4 معادلة الدائرة

نعلم من الدروس الهندسة اي ثلاث نقاط $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ وليست على استقامة واحدة تعين دائرة وحيدة وأن معادلة الدائرة هي على الصورة

$$a_1(x^2+y^2)+a_2x+a_3y+a_4=0$$

حيث $a_1 \neq 0$

اذا كانت $(x,y)$ اي نقطة على الدائرة فإننا نحصل على النظام المتجانس

$$\begin{aligned} a_1(x^2+y^2)+a_2x+a_3y+a_4&=0 \\ a_1(x_1^2+y_1^2)+a_2x_1+a_3y_1+a_4&=0 \\ a_1(x_2^2+y_2^2)+a_2x_2+a_3y_2+a_4&=0 \\ a_1(x_3^2+y_3^2)+a_2x_3+a_3y_3+a_4&=0 \end{aligned}$$

حيث $a_1, a_2, a_3, a_4$ مجاهيل وإننا نبحث عن حل غير تافه للنظام.

**مثال**

استخدم المحددات لايجاد معادلة الدائرة المارة بالنقاط $(-1,1), (1,-1), (1,0)$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x^2+y^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

اي ان

$$(x^2+y^2)(-2) - x(2) + y(-2) - (-4) = 0$$

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$$

**مثال**

استخدم المحددات لايجاد معادلة الدائرة المارة بالنقاط $(2,1), (1,2), (0,0)$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x^2+y^2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ y\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

اي ان

$$3x^2 + 3y^2 - 5x - 5y = 0$$

**مثال**

استخدم المحددات لايجاد معادلة الدائرة المارة بالنقاط $(-1,2), (1,3), (2,0)$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x^2+y^2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\, y\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

اي ان

$$7x^2 + 7y^2 - 3x + 6y + 22 = 0$$

## 2 - 5 القطع المكافئ

القطع المكافئ هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوي التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل.

و القطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل و المار بالبؤرة ويسمى هذا المستقيم محور التماثل وتسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل بالرأس وتسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل بالوتر البؤري ويقطع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

## 2 - 6 خصائص القطع المكافئ

**1. القطع المكافئ المفتوح رأسياً الى اعلى او الى اسفل**

**معادلة القطع:** $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

**خصائص القطع:**

1. الاتجاه: المنحني مفتوح رأسياً.
2. الرأس: $(h, k)$.
3. البؤرة: $(h, k+p)$
4. معادلة محور التماثل: $x = h$
5. معادلة الدليل: $y = k + p$

6. طول الوتر البؤري: $|4p|$

### 2. القطع المكافئ المفتوح افقياً الى اليمين او الى اليسار

**معادلة القطع:** $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

**خصائص القطع:**

1. الاتجاه: المنحني مفتوح رأسياً.
2. الرأس: $(h, k)$.
3. البؤرة: $(h+p, k)$
4. معادلة محور التماثل: $y = k$
5. معادلة الدليل: $x = h - p$
6. طول الوتر البؤري: $|4p|$

**مثال 1**

جد معادلة القطع المكافئ المار بالنقاط $(2,0), (1,3), (-1,2)$. **الحل**
معادلة القطع المكافئ العامة

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \tag{1}$$

بما ان النقاط تمر بالقطع فإنها تحقق المعادلة (1)

$$\begin{aligned}(2-h)^2 &= 4p(0-k)\\ (1-h)^2 &= 4p(3-k)\\ (-1-h)^2 &= 4p(2-k)\end{aligned}$$

بترتيب المعادلات نحصل على

$$(h-2)^2 = -4pk \tag{2}$$

$$(h-1)^2 = 12p - 4pk \tag{3}$$

$$(h+1)^2 = 8p - 4pk \tag{4}$$

بطرح المعادلتين (3) و (4) نحصل على

$$(h-1)^2 - (h+1)^2 = 4p$$

$$(h^2-2h+1)-(h^2+2h+1)=4p$$
$$-4h=4p \Rightarrow \boxed{p=-h}$$

نعوض في $(2)$ و $(4)$

$$(h-2)^2=4hk$$
$$(h+1)^2=4hk-8h$$

بعد التبسيط نحصل على

$$h^2-4h+4=4hk \tag{5}$$
$$h^2+2h+1=4hk-8h \tag{6}$$

بطرح المعادلتين $(5)$ و $(6)$ نحصل على

$$-6h+3=8h \Rightarrow 14h=3 \Rightarrow \boxed{h=\frac{3}{14}}$$

بما ان $p=-h$ فإن

$$\boxed{p=\frac{-3}{14}}$$

نعوض عن قيمة $h, p$ في $(2)$ للحصول على قيمة $k$

$$\left(\frac{3}{14}-2\right)^2=-4\frac{-3}{14}k \Rightarrow \boxed{k=\frac{625}{168}}$$

اذن معادلة القطع المكافئ

$$\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{-6}{7}\left(y-\frac{625}{168}\right)$$

بعد التبسيط وفتح الاقواس

$$7x^2-3x+6y-22=0$$

**مثال 2**

المعادلة $ax^2+bx+cy+d=0$، $a\neq 0$، $c\neq 0$ تصف قطعاً مكافئاً

(أ) باستخدام المحددات عين صيغة لمعادلة القطع المكافئ المار بالنقاط $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ التي لا تقع على استقامة واحدة.

(ب) استخدم (أ) لايجاد معادلة القطع المكافئ المار بالنقاط $(2,0),(1,3),(-1,2)$.

**الحل**

(أ) المعادلة العامة

$$ax^2 + bx + cy + d = 0$$

اذا كانت النقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ تمر بالقطع المكافئ نحصل على النظام المتجانس

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + cy + d &= 0\\
ax_1^2 + bx_1 + cy_1 + d &= 0\\
ax_2^2 + bx_2 + cy_2 + d &= 0\\
ax_3^2 + bx_3 + cy_3 + d &= 0
\end{aligned}$$

باستخدام المحددات

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(ب) نعوض النقاط $(-1, 2), (1, 3), (2, 0)$ في المحدد

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
x^2(6+0 + 2 + 3 - 4 - 0) - x(12 + 0 + 2 - 3 - 8 - 0)&\\
+ y(4 + 2 - 1 - 1 + 4 - 2) - (8 + 6 - 0 - 0 + 12 - 4) &= 0
\end{aligned}$$

$$7x^2 - 3x + 6y - 22 = 0$$

# المصادر


[1] Brown, L. (2012). *Linear Algebra and Its Applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

[2] Williams, R. (2018). *Matrix Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Lee, S. (2016). *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

[4] عبد الرحمن الشهري، "الجبر الخطي وتطبيقاته في الهندسة"، جامعة الملك سعود، الرياض، 2010. ص 25-40.

[5] محمد عبد العزيز، "المصفوفات وتطبيقاتها في الهندسة الكهربائية"، جامعة القاهرة، القاهرة، 2005. ص 60-75.

[6] سعيد الغامدي، "تحليل المصفوفات وتطبيقاتها في الهندسة الميكانيكية"، جامعة الملك فهد للبترول والمعادن، الظهران، 2012. ص 100-115.