المحتويات

الفصل الأول : المتجهات

1 - 1 مقدمة.. 3
1 - 2 تعريف المتجهات 3
1 - 3 العمليات على المتجهات (العمليات الجبرية)............................ 3
1 - 4 خواص المتجهات.. 5
1 - 5 متجه الوحدة 6
1 - 6 الضرب العددي النقطي.. 6
1 - 7 الزاوية بين المتجهين.. 7
1 - 8 الضرب الاتجاهي.. 8

الفصل الثاني : فضاء المتجهات

2 - 1 مقدمة.. 12
2 - 2 الفضاء الجزئي.. 15
2 - 3 الجمع المباشر 16
2 - 4 التركيب الخطي 17
2 - 5 مولد فضاء المتجهات 18
2 - 6 الاستقلال الخطي و الارتباط الخطي 19
2 - 7 الاساس والبعد 21

الفصل الأول

المتجهات

1 - 1 مقدمة

المتجهات او ما يطلق عليها الكمية المتجهة هي طريقة يتم من خلالها قياس الكميات والتعرف على مقادير الاشياء. وقد تكون معرفة الكمية المتجهة من الامور الطبيعية في حياتنا والتي لها فوائد متعددة في جميع المجالات الحياتية

1 - 2 تعريف المتجهات

هي كميات رياضية لها مقدار واتجاه. تستخدم المتجهات في العديد من المجالات مثل: الملاحة والطيران والطقس. تتميز المتجهات بخصائص مثل: الجمع والطرح والضرب.

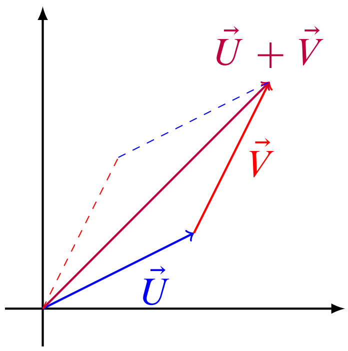
1 - 3 العمليات على المتجهات (العمليات الجبرية)

1. جمع المتجهات

عند جمع متجهين معاً يصبح عندها متجه جديد يختلف عنهما بالمقدار والاتجاه. ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة

$$\begin{aligned}\vec{U}+\vec{V} &= (U_1, U_2, \ldots, U_n) + (V_1, V_2, \ldots, V_n)\\ &= (U_1+V_1, U_2+V_2, \ldots, U_n+V_n)\end{aligned}$$

الشكل 1 - 1 يبين التمثيل الهندسي لعملية جمع المتجهات.



شكل 1 - 1: التمثيل الهندسي لجمع النتجهات

مثال

لجمع المتجهين

$\vec{W} = (3, -2)$ و $\vec{V} = (5, 4)$ نتبع الخطوات التالية

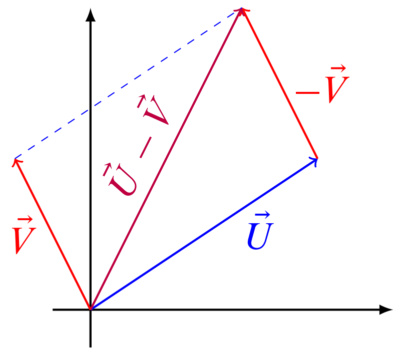
$$\begin{aligned}\vec{W} + \vec{V} &= (5, 4) + (3, -2)\\ &= (5 + 3, 4 - 2)\\ &= (8, 2)\end{aligned}$$

2. طرح المتجهات

يعطى بالعلاقة التالية

$$\vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V})$$

الشكل 1 - 2 يبين التمثيل الهندسي لطرح المتجهات.



شكل 1 - 2: التمثيل الهندسي لطرح النتجهات

مثال

ليكن $\vec{V} = (5, 7), \vec{W} = (4, 2)$ فإن

$$\begin{aligned}\vec{V} - \vec{W} &= (5, 7) + (-4, -2)\\ &= (5 - 4, 7 - 2)\\ &= (1, 5)\end{aligned}$$

اي بمعنى اخذ النظير الجمعي للمتجه الثاني وتصبح العملية كأنها عملية جمع.

3. ضرب عدد في متجه

عند ضرب عدد في متجه يتغير الطول فقط. وعند ضرب المتجه في عدد سالب يتغير الاتجاه، للتعبير عنه يعطى بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} k\vec{U} &= k(U_1, U_2, \ldots, U_n) \\ &= (kU_1, kU_2, \ldots, kU_n) \end{aligned}$$

مثال

جد ناتج $12\vec{V}$ حيث $\vec{V} = (1, -9, 0, 2)$

الحل

$k = 12, \vec{V} = (1, -9, 0, 2)$

$$\begin{aligned} k\vec{V} &= 12(1, -9, 0, 2) \\ &= (12 \times 1, 12 \times -9, 12 \times 0, 12 \times 2) \\ &= (12, -108, 0, 24) \end{aligned}$$

1 - 4 خواص المتجهات

لتكن $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$ متجهات في $\mathbb{R}^n$ و c, k ثوابت

1. $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$
2. $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$
3. $\vec{U} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{U} = \vec{U}$
4. $\vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$
5. $(ck)\vec{U} = c(k\vec{U})$
6. $k(\vec{U} + \vec{V}) = k\vec{U} + k\vec{V}$
7. $(c + k)\vec{U} = c\vec{U} + k\vec{U}$
8. $1 \cdot \vec{U} = \vec{U}$

1 - 5 متجه الوحدة

هو متجه ذو مقدار وحدة واحدة، يستخدم عادةً للاشارة الى الاتجاه. يعطى بالعلاقة التالية

$$\vec{U} = \frac{1}{||\vec{V}||} \cdot \vec{V}$$

مثال

ليكن $\vec{W} = (4, -2, 1)$ متجه. جد متجه الوحدة

الحل

$$\vec{U} = \frac{1}{||\vec{W}||} \cdot \vec{W}$$

$$\begin{aligned} ||W|| &= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 1} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (4, -2, 1) = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

1 - 6 الضرب العددي النقطي

ليكن $\vec{U}, \vec{V}$ متجهين في $\mathbb{R}^n$ فإن الضرب النقطي لهما يعطى بالعلاقة

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

لضرب متجهين جبرياً نقطياً. نقوم بضرب العدد الاول من المتجه الاول في العدد الاول من المتجه الثاني، العدد الثاني من المتجه الاول في العدد الثاني من المتجه الثاني وهكذا...

مثال

ليكن $\vec{U} = (-8, 0, -12), \vec{V} = (5, 7, 1)$ اوجد $\vec{U} \cdot \vec{V}$.

الحل

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \vec{V} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= (-8)(5) + (0)(7) + (-12)(1) \end{aligned}$$

$$= -40 + 0 - 12$$

$$= -52$$

خواص الضرب النقطي

1. $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
2. $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$
3. $k(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (k\vec{U}) \cdot \vec{V}$
4. $\vec{V} \cdot \vec{V} = ||\vec{V}||^2$
5. $\vec{V} \cdot \vec{0} = \vec{0}$

1 - 7 الزاوية بين المتجهين

تعطى بالعلاقة التالية

$$\cos\alpha = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{||\vec{U}|| \cdot ||\vec{V}||}$$

من العلاقة السابقة نستطيع ان نحصل على

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = ||\vec{U}|| \cdot ||\vec{V}|| \cdot \cos\alpha$$

مثال

ليكن $\vec{U} = (1, 0, 0), \vec{V} = (0, 0, 1)$ جد الزاوية بين هذين المتجهين

الحل

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$= (1)(0) + (0)(0) + (0)(1)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$||\vec{U}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$||\vec{V}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{||\vec{U}||\cdot||\vec{V}||} = \frac{0}{1} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

1 - 8 الضرب الاتجاهي

ليكن $\vec{U}\,,\,\vec{V}$ متجهين في $\mathbb{R}^3$ فإن الضرب الاتجاهي لهما يكون كالاتي

$$\vec{U}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$
$$= i(U_2V_3 - U_3V_2) - j(U_1V_3 - U_3V_1) + k(U_1V_2 - U_2V_1)$$

مثال

ليكن $\vec{U} = (2,3,-2), \vec{V} = (1,-1,0)$ اوجد $\vec{U}\times\vec{V}$

الحل

$$\vec{U}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= i[(3)(0) - (-2)(-1)] - j[(2)(0) - (-2)(1)] + k[(2)(-1) - (3)(1)]$$
$$= i(0-2) - j(0+2) + k(-2-3)$$
$$= -2i - 2j - 5k$$

خصائص الضرب الاتجاهي

1. $\vec{U}\times\vec{V} = -(\vec{V}\times\vec{U})$
2. $\vec{U}\times(\vec{V}+\vec{W}) = (\vec{U}\times\vec{V}) + (\vec{U}\times\vec{V})$
3. $(\vec{U}+\vec{V})\times\vec{W} = (\vec{U}\times\vec{W}) + (\vec{U}\times\vec{W})$
4. $c(\vec{U}\times\vec{V}) = (c\vec{U})\times\vec{V} = \vec{U}\times(c\vec{V})$

5. $\vec{U} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{U} = \vec{0}$
6. $\vec{U} \times \vec{U} = \vec{0}$

متطابقة لاكرانج

$$||\vec{U} \times \vec{V}||^2 = ||\vec{U}||^2 \cdot ||\vec{V}|| - (\vec{U} \cdot \vec{V})^2$$

مثال

ليكن $\vec{U} = (-2, 1, 0), \vec{V} = (4, 2, -5)$ طبق متطابقة لاكرانج عليهما

الحل

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= i(-5-0) - j(10-0) + k(-4-4)$$

$$= -5i - 10j - 8k$$

$$||\vec{U} \times \vec{V}||^2 = (-5)^2 + (-10)^2 + (-8)^2$$

$$= 25 + 100 + 64$$

$$= 189$$

$$||\vec{U}||^2 = (-2)^2 + 1^2 + 0^2$$

$$= 4 + 1 + 0$$

$$= 5$$

$$||\vec{V}|| = 4^2 + 2^2 + (-5)^2$$

$$= 16 + 4 + 25$$

$$= 45$$

$$(\vec{U}\cdot\vec{V})^2 = [(-2,1,0)\cdot(4,2,-5)]^2$$
$$= (-8+2+0)^2$$
$$= (-6)^2$$
$$= 36$$

نطبق العلاقة

$$189 = 5\times 45 - 36$$
$$189 = 225 - 36$$
$$189 = 189$$

اذن نلاحظ ان الطرف الايمن يجب ان يساوي الطرف الايسر لكي يحقق المتطابقة.

الفصل الثاني

فضاء المتجهات

2 - 1 مقدمة

تلعب الفضاءات المتجهة (الخطية) دوراً هاماً في العلوم الرياضية وتطبيقاتها وعناصرها قد تكون دوال او متتاليات عددية ... الخ ، يمكن جمعها و اجراء عمليات حسابية عليها وتكون نتيجة هذه العمليات من الفضاء نفسه.

تعريف

الفضاء المتجهي على الحقل F هو مجموعة غير خالية V من العناصر $\{x, y, \ldots\}$ (تدعى متجهات) وهذه المجموعة مزودة بعمليتين جبريتين:

العملية الاولى: داخلية نرمز لها بـ "+" اي الجمع المتجهي حيث يربط كل عنصرين x, y من V بعنصر ثالث $x + y$ ينتمي الى V.
العملية الثانية: خارجية نرمز لها بـ "." اي الضرب المتجهي الذي ينتج من ضرب عنصر x من الفضاء V بعنصر من الحقل التبديلي F.
نسمي الثلاثي $(V, +, \cdot)$ فضاء متجهي او فضاء خطي على F ونرمز له بـ $V(F)$ اذا حقق الشروط التالية:

لكل V, U, W متجهات و a, b اعداد:

1. $U + V = V + U$
2. $U + (V + W) = (U + V) + W$
3. $U + 0 = 0 + U = U$
4. $U + (-U) = 0$
5. $a(U + V) = aU + aV$
6. $(a + b) \cdot U = aU + bU$
7. $(ab) \cdot U = a \cdot (bU)$
8. $1 \cdot U = U$

مثال

اذا فرضنا $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ لنعرف على $\mathbb{R}^n$ العمليتين "+" و "." بالشكل

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, x_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

1) $x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, x_n)$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

$= (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) = y + x$

2) $x + (y + z) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + [(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)]$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$

$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \ldots, x_n + y_n + z_n)$

$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1 + z_2, \ldots, z_n)$

$= (x + y) + z$

يوجد عنصر محايد وهو الصفر $(0, 0, \ldots, 0) = 0$ بحيث

3) $x + 0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)$

$= x$

لكل متجه $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ نظيره $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$

4) $x + (-x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0) = 0$

5) $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 1 \cdot x$

$= 1 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= x$

6) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \alpha(x+y)$

$$= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n))$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n)$$

$$= \alpha x + \alpha y$$

7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\alpha + \beta) \cdot x$

$$= (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, \ldots, (\alpha + \beta)x_n)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n)$$

$$= \alpha x + \beta x$$

8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n : (\alpha\beta) \cdot x$

$$= (\alpha\beta)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \ldots, \alpha\beta x_n)$$

$$= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n))$$

$$= \alpha \cdot (\beta x)$$

2 - 2 الفضاء الجزئي

ليكن $V(F)$ فضاءاً متجهياً على الحقل F و $\varnothing \neq W \subseteq V$ نسمي W فضاء متجه جزئي من فضاء المتجهات $V(F)$ اذا كان W فضاءاً متجهياً بحد ذاته بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب.

ويكون W فضاء متجهي اذا تحقق :

1. W مغلقة بالنسبة لعملية الجمع : $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$
2. W مغلقة بالنسبة لعملية الضرب : $\forall \alpha \in F, \forall x \in W \Rightarrow \alpha \cdot x \in W$

ويمكن دمج الشرطين بشرط واحد :

$$\forall \alpha, \beta \in F, \forall x, y \in W \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$$

ملاحظة

ان كل فضاء متجهي $V(F)$ يحوي فضائين متجهين جزئيين على الاقل هما $W = \{0\}$ و $W = V(F)$.

مثال

هل ان $W = \{(x, y, 0) : x, y \in R\}$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.

الحل

$\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ عندئذٍ تأخذ العناصر الشكل

$$x = (a, b, 0), y = (c, d, 0)$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(a, b, 0) + \beta(c, d, 0) \\ &= (\alpha a, \alpha b, 0) + (\beta c, \beta d, 0) \\ &= (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d, 0) \in W \end{aligned}$$

اذن W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.

مبرهنة 2 - 2 - 1

تقاطع اي فضائين جزئين هو فضاء جزئي.

البرهان

لنفرض W_1, W_2 فضائين جزئين من فضاء المتجهات $V(F)$ ونبرهن ان $W_1 \cap W_2$ فضاء جزئي من

.$V(F)$

$$\forall \alpha, \beta \in F; \forall x, y \in W_1 \cap W_2$$

$$\Rightarrow \alpha, \beta \in F; x, y \in W_1, x, y \in W_2$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in W_1, \alpha x + \beta y \in W_2$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in W_1 \cap W_2.$$

ومنه $W_1 \cap W_2$ فضاء متجهات جزئي.

2 - 3 الجمع المباشر

ليكن M_1, M_2 فضائين جزئيين من الفضاء V نقول ان V هو الجمع المباشر لـ M_1 و M_2

$$V = M_1 \oplus M_2$$

اذا تحقق الشرطان

1. تقاطع M_1 و M_2 يحتوي فقط المتجه الصفري

$$M_1 \cap M_2 = \{0\}$$

2. كل عنصر في V يمكن كتابته بشكل (وحيد) كمجموع عنصرين احداهما من M_1 و الآخر من M_2

$$v = m_1 + m_2, \forall v \in V$$

مثال

ليكن $V = \mathbb{R}^2$ و $M = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ و $N = \{(0.b) : b \in \mathbb{R}\}$ هل ان $V = M \oplus N$؟

الحل

1. نوجد التقاطع

$$\forall (x, y) \in M \cap N \Rightarrow (x, y) \in M \wedge (x, y) \in N$$

$$\Rightarrow y = 0 \wedge x = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$M \cap N = \{0\}$$

2. لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ نلاحظ

$$(x,y)=\underbrace{(x,0)}_{\in M}+\underbrace{(0,y)}_{\in N}$$

اذن $\mathbb{R}^2=M\oplus N$.

2 - 4 التركيب الخطي

ليكن V فضاء متجهات وان $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ متجهات في V يقال للمتجه $\vec{v}$ بأنه تركيب خطي من $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ اذا امكن التعبير عن $\vec{v}$ بالشكل

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdots+\vec{v}_n$$

مثال

ليكن $\vec{v}_1=(1,2,1)$ و $\vec{v}_2=(1,0,-3)$ و $\vec{v}_3=(-1,0,0)$ متجهات من $\mathbb{R}^3$
هل ان $\vec{v}=(2,-2,5)$ تركيب خطي من $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$

الحل

لتكن k_1,k_2,k_3 اعداد حقيقية بحيث

$$\vec{v}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+k_3\vec{v}_3$$

$$(2,-2,5)=k_1(1,2,1)+k_2(1,0,-3)+k_3(-1,0,0)$$

$$(2,-2,5)=(k_1,2k_1,k_1)+(k_2,0,-3k_2)+(-k_3,0,0)$$

$$(2,-2,5)=(k_1+k_2-k_3,2k_1,k_1-3k_2)$$

نحصل على نظام من 3 معادلات في 3 متغيرات

$$k_1+k_2-k_3=2 \tag{1}$$

$$2k_1=-2 \tag{2}$$

$$k_1-3k_2=5 \tag{3}$$

من المعادلة (2) نحصل على $k_1=-1$ نعوض في المعادلة (3)

$$-1-3k_2=5\Rightarrow -3k_2=6\Rightarrow k_2=-2$$

الان نعوض في (1)

$$-1-2-k_3 = 2 \Rightarrow -k_3 = 5 \Rightarrow k_3 = -5$$

اذن للمنظومة حل و $\vec{v}$ تركيب خطي من $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ حيث

$$\vec{v} = -\vec{v}_1, -2\vec{v}_2 - 5\vec{v}_3$$

2 - 5 مولد فضاء المتجهات

ليكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء المجهات V ، تكون S مولد لـ V اذا كان كل المتجهات هي تركيب خطي من S اي ان

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n$$

مثال

ليكن $V = \mathbb{R}^3$ و $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ حيث

$$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 0, 2), v_3 = (1, 1, 0)$$

هل ان S تولد V؟

الحل

لكي نثبت ان S تولد V يجب اثبات ان كل متجه ينتمي الى V هو تركيب خطي من عناصر S ، كما يلي نفرض $v = (a, b, c)$ و $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ ، حسب تعريف التركيب الخطي فإن

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$$

$$(a, b, c) = k_1(1, 2, 1) + k_2(1, 0, 2) + k_3(1, 1, 0)$$

$$(a, b, c) = (k_1, 2k_1, k_1) + (k_2, 0, 2k_2) + (k_3, k_3, 0)$$

$$(a, b, c) = (k_1 + k_2 + k_3, 2k_1 + k_3, k_1 + 2k_2)$$

بالتالي نحصل على نظام المعادلات

$$k_1 + k_2 + k_3 = a$$

$$2k_1 + k_3 = b$$

$$k_1 + 2k_2 = c$$

نأخذ مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نأخذ لها المحدد

ملاحظات

1. اذا كان محددها يساوي صفراً فإنها غير قابلة للانعكاس وبالتالي ليس لها معكوس ، اي ان النظام ليس له حل ومنه نحصل على ان S لا تولد V.
2. اذا كان محددها لايساوي صفراً فإن المصفوفة تكون قابلة للانعكاس اي ان يوجد معكوس ومنه نحصل على المعاملات لها وبالتالي فإن S تولد V.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$= 0 + 1 + 4 - (0 + 2 + 0)$$

$$= 5 - 2$$

$$= 3 \neq 0$$

بما إن محدد المصفوفة لا يساوي صفر ، اذن S تولد V.

2 - 6 الاستقلال الخطي و الارتباط الخطي

في الجبر الخطي تدعى مجموعة من المتجهات مجموعة مستقلة خطياً اذا كان من المستحيل كتابة اي من المتجهات في المجموعة كتركيبة خطية من عدد نهائي من المتجهات الاخرى في المجموعة. اذا لم يتحقق ذلك ، تسمى هذه المجموعة مجموعة تابعة خطياً (مرتبطة خطياً).

تعريف

لتكن $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية من المتجهات في فضاء المتجهات V ، تكون S:

1. **مستقلة خطياً** اذا وجدت العناصر $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ كلها اصفاراً بحيث $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$.
2. **مرتبطة خطياً** اذا وجدت العناصر $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ ليست كلها اصفاراً بحيث

$$.k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$$

مثال

ليكن $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ بحيث

$$v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (0, -1, 3), v_3 = (-2, 0, 1)$$

متجهات في $\mathbb{R}^3$ حدد فيما اذا كانت S مستقلة ام مرتبطة خطياً ؟

الحل

لتكن $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$$

$$k_1(1, 0, 2) + k_2(0, -1, 3) + k_3(-2, 0, 1)$$

ومن حل هذه المعادلات نحصل على المعادلات الخطية التالية

$$k_1 - 2k_3 = 0$$

$$-k_2 = 0$$

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0$$

وبحل المعادلات اعلاه نحصل على $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ اذن S مستقلة خطياً.

مثال

هل المتجهات التالية $v_1 = (1, -1), v_2 = (2, -3), v_3 = (5, 1)$ مستقلة ام مرتبطة خطياً؟

الحل

لتكن $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

$$k_1(1, -1) + k_2(2, -3) + k_3(5, 1) = 0$$

ومن حل هذه المعادلات نحصل على

$$k_1 + 2k_2 + 5k_3 = 0$$

$$-k_1 - 3k_2 + k_3 = 0$$

هذا النظام مكون من معادلتين وثلاث متغيرات فيكون له ما لانهاية من الحلول ولايجاد احدى هذه الحلول نفرض ان k_3 يساوي قيمة اختيارية ثم نجد بدلالتها k_1, k_2 وكما يلي:

نفرض $k_3 = 1$ نحصل على

$$k_1 + 2k_2 = -5 \qquad (1)$$

$$-k_1 - 3k_2 = -1 \qquad (2)$$

بجمع (1) مع (2) نحصل على $-k_2 = -6$ اذن $k_2 = 6$. نعوض في المعادلة (1) نحصل على

$$k_1 + 12 = -5 \Rightarrow k_1 = -17$$

اذن S مرتبطة خطياً.

2 - 7 الاساس والبعد

لتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء المتجهات V ، نقول ان S اساس للفضاء V اذا تحقق الشرطان

1. S تولد V.
2. S مستقلة خطياً.

مثال

لتكن $S = \{v_1, v_2\}$ بحيث $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$ هل ان S اساس للفضاء $\mathbb{R}^3$؟

الحل

ليكن $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

.1

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$$

$$k_1(1, 1) + k_2(1, -1) = 0$$

$$(k_1, k_1) + (k_2, -k_2) = 0$$

$$(k_1 + k_2, k_1 - k_2) = 0$$

نحصل النظام

$$k_1 + k_2 = 0$$

$$k_1 - k_2 = 0$$

نجد مصفوفة النظام

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نجد المحدد

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

اذن S تولد $\mathbb{R}^2$

2. من حل المعادلات اعلاه نجد $k_1 = k_2 = 0$ بالتالي S مستقلة خطياً. اذن S اساس للفضاء $\mathbb{R}^2$.

تعريف

اذا كانت $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ اساس للفضاء V فإن عدد المتجهات n في S يسمى بعد dimension للفضاء V ونكتب $\dim V = n$

مثال

المجموعة $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ اساس الفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

اذن

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$