وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة البصرة

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات

التقريب بإستخدام مؤثر لوباس

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

زهراء حسين سموم عجة

إشراف

م.م. تهاني عبدالمجيد

2025 - 2024

الآية

قال تعالى

(وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ)

صدق الله العلي العظيم

سورة يونس (10)

الإهداء

إلى الكهف الحصين وغياث المضطر المستكين وملاذ المؤمنين ومنقذ العالمين حضرة جناب الموقر صاحب الزمان (عج).

إلى من بها أعلوا وعليها ارتكز ، إلى الينبوع الذي لا يمل من العطاء ، والدعاء المستجاب (والدتي العزيزة).

إلى والدي المبجل أطال الله في عمره وأمده بالصحة والعافية.

إلى خير سند (اخوتي واخواتي).

شكر و تقدير

الحمد لله ما تناهى درب ولا ختم جهداً ولا تم سعي الا بفضله اللهم ليس بجهدي واجتهادي وانما بفضلك وتوفيق كرمك.

وقبل ان نمضي نقدم اسمى ايات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة الى الذين حملوا اقدس رسالة في الحياة ، الى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة ، الى جميع اساتذتنا الافاضل.

ونخص بالشكر والتقدير الاستاذة (تهاني عبدالمجيد).

اتشرف بوقوفي امام حضرتكم اليوم

المحتويات

الفصل الأول

مفاهيم اساسية

المقدمة

1 - 1 نظرية التقريب (Approximation theory)

في الكثير من التطبيقات العلمية في الرياضيات أو الهندسة والتكنولوجيا، يمكن أن نحصل على دوال معقدة وأحيانًا غير مألوفة، وبذلك تصبح عملية دراسة هذه الدوال من حيث اتصالها وقابليتها للتفاضل أو التكامل وغيره من الموضوعات الصعبة جدًا والتي تستغرق الكثير من الوقت. كذلك يمكن أن نتقابل مع ما يسمى **الدوال المجدولة أو دوال البيانات** وهي تلك الدوال التي تعطى على شكل الثنائيات المرتبة:

$$\{(x_i , y_i)\}_{i=0}^{n}$$

حيث يكون المطلوب هو معرفة شكل العلاقة أو الدالة التي تربط بين فئة العقد $\{x_i\}$ وفئة قيم الدالة $\{y_i\}$ عند هذه العقد.

لكل هذه الأسباب وغيرها، يكون من الضروري والمفيد استبدال دالة بسيطة وغير معقدة بدالة ذات شكل رياضي معقد أو دالة بيانات بحيث يمكن اعتبارها بديلاً للدالة المعطاة. في الواقع، أن **نظرية التقريب** تتعامل مع كل المفاهيم السابقة.

والتقريب يمكن أن يكون بواسطة الدوال كثيرات حدود جبرية أو غير جبرية أو بواسطة دوال أسية أو دوال مثلثية وغيرها.

2 - 1 الدالة (Function)

تعريف: هي علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B بحيث يقترن كل عنصر في A بعنصر واحد فقط في B. وتسمى المجموعة A **مجال الدالة** والمجموعة B **النطاق المرافق**. ويرمز لمجموعة القيم بالصورة:

$$f : A \to B$$

والمجموعة الجزئية من B التي تتألف من جميع صور عناصر A في الدالة f تسمى **مدى الدالة** ويرمز له بالرمز:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

3 - 1 الدالة الخطية (Linear function)

تعريف: هي علاقة تربط عددًا حقيقيًا x بعدد حقيقي آخر ax، وتسمى **دالة خطية** معاملها هو a. الدالة الخطية تكتب على الشكل:

$$f(x) = ax$$

4 - 1 المؤثر (Operator)

تعريف: المجال D للمؤثر S عبارة عن مجموعة غير خالية من الدوال الحقيقية جميعها لها نفس المجال X، ولكل $f \in D$ تكون $S(f)$ دالة حقيقية في المجال X.

5 - 1 مؤثر لوباس (Lupas operator)

هو نوع من المؤثرات الخطية المستخدمة في التقريب وتحليل الدوال، وهو مرتبط بأساليب التقريب من خلال المؤثرات الإيجابية التي تحافظ على بعض الخصائص المهمة للدوال. يتم استخدام **مؤثر لوباس** في التقريب التوافقي وتحليل الوظائف الرياضية، حيث يستعمل بشكل خاص في تقريب الدوال المستمرة بواسطة متعددات الحدود.

6 - 1 المؤثر الخطي (Linear operator)

تعريف: المؤثر F من X إلى Y يقال إنه خطي إذا تحقق:

$$F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in D(F), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ويرمز لمجموعة المؤثرات الخطية من X إلى Y بالرمز $L(X, Y)$.

7 - 1 فضاء المتجهات (Vector space)

تعريف: لتكن V مجموعة غير خالية معرف عليها عمليتا الجمع والضرب بعدد ثابت. يقال إن V فضاء متجهات إذا تحققت البديهيات التالية لكل متجه u, v, w ولكل عدد حقيقي c, d:

1) $u + v \in V$

2) $u + v = v + u$

3) $u + (v + w) = (u + v) + w$

يوجد متجه صفري في V بحيث ان لكل $u \in V$

4) $0 + u = u + 0 = u$

لكل $u \in V$ يوجد متجه $(-u \in V)$ بحيث

5) $u + (-u) = (-u) + u - 0$

6) $cu \in V$

7) $c(u + v) = cu + cv$

8) $(c + d)u = cu + du$

9) $c(du) = (cd)u$

10) $1 \cdot u = u$

1 - 8 الفضاء الجزئي Subspace

تعريف: لتكن M مجموعة جزئية من فضاء المتجهات V يقال ان M فضاء جزئي من V اذا كان M هو فضاء متجهات بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب بعدد معرف على V.

1 - 9 فضاء $C_h[0, \infty)$

$$C_h[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) : |f(t)| \leq m(1 + t)^h \text{for some } m > 0, h > 0\}$$

1 - 10 مبرهنة كوروفكن (Korovkin's Theorem)

لتكن $S_n(f(x);x)$ متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة $L.P.O$ و الشروط التالية متحققة:

1. $S_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$
2. $S_n(t;x) = x + \beta_n(x)$
3. $S_n(t^2;x) = x^2 + \delta_n(x)$

حيث $\alpha_n(x), \beta_n(x), \delta_n(x)$ متتابعات متقاربة بانتظام إلى 0 في الفترة $[a,b]$، فإن:

$$S_n(f(t);x) \to f(x) \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

الفصل الثاني

تحسين مؤثر لوباس الاعتيادي

2 - 1 مؤثر لوباس (Lupas) الاعتيادي

تعرف متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة من الفضاء $C_h[0,\infty)$ إلى نفسه كما يلي:

$$L_n(f(t);x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)f(k/n)$$

حيث:

$$p_{n,k}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-(n+k)},\quad x\in[0,\infty)$$

بعض النتائج المباشرة للدالة $p_{n,k}(x)$

1) $\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}=1$

2) $\sum_{k=0}^{\infty}kp_{n,k}=nx$

3) $\sum_{k=0}^{\infty}k^2p_{n,k}=n^2x^2+nx^2+nx$

البرهان

1) $\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}=1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_{n,k}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-(n+k)}$$

$$=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k$$

$$=\frac{1}{(1+x)^n}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-n}=1.$$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k} = nx$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(n+k-1)!}{k(k-1)!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(n+k-1)!}{k(k-1)!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)(n+k-1)!}{k!(n-1)!} x^{k+1} (1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$= \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (n+k) p_{n,k}(x)$$

$$I = \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} n p_{n,k}(x) + I$$

$$(1+x)I = x(n+I)$$

$$I + xI = nx + xI$$

$$I = nx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}(x) = nx$$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k} = n^2x^2 + nx^2 + nx$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(n+k-1)!}{k(k-1)!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(n+k-1)!}{k(k-1)!(n-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(n+k)(n+k-1)!}{(k!(n-1)!} x^{k+1} (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(n+k) p_{n,k}(x)$$

$$= \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + (1+n)k + n) p_{n,k}(x)$$

$$= \frac{x}{1+x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k} + (1+n) \sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k} + n \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} \right)$$

$$I = \frac{x}{x+1}(I + (1+n)nx + n)$$

$$(1+x)I = Ix + nx^2 + n^2x^2 + nx$$

$$I + Ix = Ix + nx^2 + n^2x^2 + nx$$

$$I = nx^2 + n^2x^2 + nx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{n,k} = n^2x^2 + nx^2 + nx$$

2 - 2 تعريف المؤثر $B_n(f(t);x)$

متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة من الفضاء $C_h[0,\infty)$ الى نفسه كما يلي

$$B_n(f(t);x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt$$

اثبات ان المؤثر $B_n(f(t);x)$ خطي وموجب

1) نثبت ان المؤثر $B_n(f(t);x)$ هو خطي

$$B_n((af+bg)(t);x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)(af+bg)\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[a\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt + b\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) g\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt\right]$$

$$= (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[a\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt\right] + (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[b\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) g\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt\right]$$

$$= aB_n(f(t);x) + bB(g(t);x)$$

اذن المؤثر خطي.

2) نثبت ان المؤثر $B_n(f(t);x)$ هو موجب

$$B_n(f(t);x) \geq 0 \iff f(t) \geq 0$$

$(\Leftarrow)$ نفرض ان $B_n(f(t);x) \geq 0$ ونبرهن $f(t) \geq 0$

$$\Rightarrow (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

بما ان $p_{n,k} \geq 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) \geq 0$$

$(\Rightarrow)$ نفرض ان $f(t) \geq 0$ ونبرهن $B_n(f(t);x) \geq 0$

$$\Rightarrow f(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

بما ان $p_{n,k} \geq 0$

$$\Rightarrow (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t) f\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right) dt \geq 0$$

$$\Rightarrow B_n(f(t);x) \geq 0$$

3 - 2 مبرهنة كورفكن للمؤثر $B_n(f(t);x)$

لتكن $B_n(f(t);x)$ متتابعة من المؤثرات الخطية الموجبة $L.P.O$ و الشروط التالية متحققة

1) $B_n(1;x) = 1$

2) $B_n(t;x) = \frac{n^2+n}{(n+\beta)(n-2)} + \frac{\alpha}{n+\beta} \to x$

3) $B_n(t^2;x) = \frac{n^4x^2+n^3x^2+3n^3x+n^3x+2n}{(n+\beta)^2(n-2)(n-2)} + \frac{2\alpha x n^2+2n\alpha}{(n+\beta)^2(n-2)} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} \to x^2$

$$\Rightarrow B_n(f(t);x) \to f(x) \quad \text{as } n \to \infty$$

البرهان

1)

$$B_n(1;x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)\,dt = 1$$

2)

$$B_n(t;x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)\left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right)dt$$

$$= \frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)(nt+\alpha)\,dt$$

$$= \frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[n\int_0^{\infty} tp_{n,k}(t\,dt) + \alpha\int_0^{\infty} \alpha p_{n,k}(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\frac{n(k+m)!(n-m-2)!}{k!(n-1)!} + \frac{\alpha(k+m)!+(n-m-2)!}{k!(n-1)!}\right]$$

$$= \frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\frac{n(k+1)!(n-3)!}{k!(n-1)!} + \frac{\alpha k!(n-2)!}{k!(n-1)!}\right]$$

$$= \frac{n-1}{n+\beta}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\left[\frac{n(k+1)k!(n-3)!}{k!(n-1)(n-2)(n-3)!} + \frac{\alpha k!(n-2)!}{k!(n-1)(n-2)!}\right]$$

$$= \frac{n-1}{n+\beta} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{n(k+1)!}{(n-2)(n-2)} + \frac{\alpha(n-1)}{n+\beta} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{n(nx+1)}{(n+\beta)(n-2)} + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$= \frac{nx^2+n}{(n+\beta)(n-2)} + \frac{\alpha}{n+\beta} \to x$$

3)

$$B_n(t^2;x) = (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k}(t) \left(\frac{nt+\alpha}{n+\beta}\right)^2 dt$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k}(t)(nt+\alpha)^2\, dt$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k}(t)(n^2t^2+2\alpha nt+\alpha^2)\, dt$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \left[\int_0^{\infty} p_{n,k} n^2 t^2\, dt \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} p_{n,k} 2nt\alpha\, dt + \int_0^{\infty} p_{n,k}\alpha^2\, dt\right]$$

$$= \frac{n-1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \left[n^2 \int_0^{\infty} p_{n,k} t^2\, dt \right.$$

$$\left. + 2n \int_0^{\infty} p_{n,k} t\alpha\, dt + \int_0^{\infty} p_{n,k}\alpha^2\, dt\right]$$