وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

الإشتقاق في $\mathbb{R}^n$

Differentiation in $\mathbb{R}^n$

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

فاطمة جبار حسن

إشراف

د. خالد عبدالاله

1445 هـ - 2024 م

الإهداء

إلى الكهف الحصين وغياث المضطر المستكين وملاذ المؤمنين ومنقذ العالمين حضرة جناب الموقر صاحب الزمان (عج).

إلى من بها أعلوا وعليها ارتكز ، إلى الينبوع الذي لا يمل من العطاء ، والدعاء المستجاب (والدتي العزيزة).

إلى والدي المبجل أطال الله في عمره وأمده بالصحة والعافية.

إلى خير سند (اخوتي واخواتي).

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر الجزيل و الثناء الجميل إلى الأستاذ الدكتور خالد عبد الاله الذي كان له الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا ملاحظاته وإنجازه لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاه الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

مقدمة

الإشتقاق يعتبر من أهم المواضيع في الرياضيات التطبيقية أن لم يكن أهمها ، حيث يعد من الركائز الأساسية التي يستند عليها معظم مجالات الرياضيات المختلفة فضلاً عن العلوم الأخرى ، و بهذا أي نتيجة نحصل عليها تخص الاشتقاق نتوقع لها تطبيقاً في الرياضيات أو في العلوم الأخرى. في بادئ الأمر تمت دراسة الاشتقاق على الدوال في الفضاء أحادي البعد $\mathbb{R}$ و تم تعريف المشتقة بأنها ميل المماس لدالة عند نقطة معينة وبعد ذلك تم توسعة مفهوم المشتقة لدالة على مجموعة من النقاط و بعد ذلك تم اثبات العديد من النتائج المهمة التي تخص المشتقة في $\mathbb{R}$. و لكن في معظم الحالات في حياتنا العملية نتعامل مع مسائل في أكثر من بعد ، من هذا المنطلق كان يجب أن نوسع مفهوم المشتقة لكي نستطيع تطبيقه بشكل موسع في حياتنا

في بحثنا هذا سوف نحاول توسعة مفهوم الاشتقاق من الفضاء أحادي البعد إلى الفضاء متعدد الأبعاد $\mathbb{R}^n$ ، حيث نحاول أن نفهم ماذا يعني أن تكون دالة إتجاهية قابلة للإشتقاق عند نقطة من نقاط مجالها التي سوف تمثل متجه بطبيعة الحال ، وبعد أن نفهم قابلية الاشتقاق سوف ننتقل إلى مفهوم التفاضل التام الذي سوف يساعدنا في تقريب بعض المسائل العددية التي يصعب ايجاد الحل الحقيقي لها.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1-1 المشتقة

تعريف 1-1-1

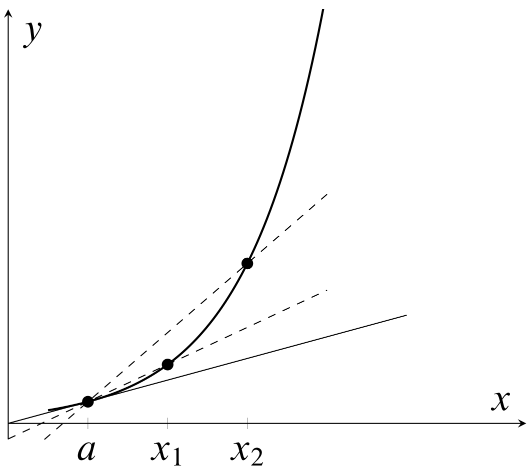
f دالة حقيقية يقال بأنها قابلة للإشتقاق عند نقطة $a \in \mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كانت الدالة f معرفة عند فترة تحوي a والغاية

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

موجودة. في هذه الحالة $f'(a)$ تسمى مشتقة الدالة f عند a. إذا فرضنا $x = a + h$ فإن (1) تصبح بالشكل

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

إذن عندما $x \to a$ فإن ميل الوتر الذي يمر بالنقاط $(x, f(x))$ و $(a, f(a))$ يُقرب ميل المماس الدالة $y = f(x)$ عند $x = a$ كما موضح بالشكل 1-1



شكل 1-1: تقارب مستقيمات الوتر للمماس

ملاحظة 2-1-1

إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند كل نقطة في مجموعة E ، فإن f' هي دالة على E. هذه الدالة لها عدة ترميزات

$$D_x f = \frac{df}{dx} = f^{(1)} = f'$$

عندما $y = f(x)$ ، سوف نستخدم الترميز dy/dx أو y'

ملاحظة 1-1-3

المشتقات من الرتب العليا تعرف بشكل متكرر، ذلك بأن، إذا كان $n \in \mathbb{N}$ ، إذن $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$ ونستخدم للمشتقات العليا الرموز $d^n f/dx^n$ أو $f^{(n)}$ أو بحالة $y = f(x)$ فإننا نكتب $d^n y/dx^n$ أو $y^{(n)}$.

مبرهنة 1-1-4

f دالة حقيقية تكون قابلة للإشتقاق عند a إذا وفقط إذا وجدت دالة T من الشكل $T(x) := mx$ بحيث

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = 0 \tag{2}$$

البرهان

أفرض أن f قابلة للإشتقاق ، و أجعل $m = f'(a)$. إذن بواسطة (1) نحصل على

$$\frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \to 0$$

عندما $h \to 0$

بالعكس إذا كانت (2) متحققة للدالة $T(x) := mx$ و $h \neq 0$ ، إذن

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= m + \frac{f(a+h) - f(a) - mh}{h} \\ &= m + \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{h} \end{aligned}$$

بواسطة (2).الغاية للصيغة الأخيرة عليها وتساوي m. وبالتالي $m \to \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ عندما $h \to 0$؛ وهذا يعني $f'(a)$ موجودة وتساوي m. □

مبرهنة 1-1-5

إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند a ، إذن f مستمرة عند a.

البرهان

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)-f(a) &= \lim_{x\to a} f(x)-f(a)\cdot\frac{x-a}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\ &= f'(a)\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

إذن $f(a) \to f(x)$ عندما $a \to x$ ، وبالتالي f مستمرة عند a. $\square$

مثال 1-1-6

برهن أن الدالة $f(x)=|x|$ مستمرة عند 0 ولكن غير قابلة للإشتقاق عند 0

البرهان

عندما $x \to 0$ هذا يؤدي إلى أن $|x| \to 0$ و بالتالي فإن f مستمرة عند a ، من الناحية الأخرى ، بما أن

$$|h| = \begin{cases} h & h>0\\ -h & h<0\end{cases}$$

لدينا

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-1$$

$\square$

تعريف 1-1-7

لتكن I فترة

1. الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على I إذا وفقط إذا كانت الغاية

$$f_I'(a) := \lim_{\substack{x\to a\\ x\in I}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

موجودة ومنتهية لكل $a \in I$.

2. يقال بأن f قابلة للإشتقاق بشكل مستمر على I إذا وفقط إذا كانت f_I' موجودة و مستمرة على I.

ملاحظة 1-1-8

إذا كانت a ليست نقطة نهاية للفترة I فإنه $f_I'(a) = f'(a)$ ، لذا بالعادة نستخدم الرمز f' بدلاً من f_I'. بالخصوص إذا كانت f قابلة للإشتقاق على $[a, b]$ فإن

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

ملاحظة 1-1-9

اشتقاق بعض الدوال المهمة

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x^n	nx^{n-1}
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cos(x)$

مثال 1-1-10

الدالة $f(x) = x^{3/2}$ قابلة للإشتقاق على الفترة $[0, \infty)$ و $f'(x) = 3\sqrt{x}/2$ لكل $x \in [0, \infty)$.

البرهان

باستخدام قانون المشتقة للقوى فإن $f'(x) = 3\sqrt{x}/2$ لكل $x \in (0, \infty)$ وبإستخدام التعريف نجد أن

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{3/2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sqrt{h} = 0$$

□

تعريف 1-1-11

نرمز إلى مجموعة الدوال التي تمتلك n من المشتقات الموجودة و المستمرة على الفترة I بالرمز $C^{(n)}(I)$ أي أن

$$C^{(n)}(I) := \{f \mid f : I \to \mathbb{R}; f^{(n)} \text{موجودة و مستمرة}\}$$

وسوف نرمز إلى مجموعة الدوال التي تنتمي إلى $C^{(n)}(I)$ لكل $n \in \mathbb{N}$ بالرمز $C^{\infty}(I)$.

مبرهنة 1-1-12

لتكن f, g دوال حقيقية و $\alpha \in \mathbb{R}$. إذا كانت f, g دوال قابلة للإشتقاق عند a فإن

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \tag{3}$$

$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a) \tag{4}$$

$$(f \cdot g)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a) \tag{5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}, \quad g(a) \neq 0 \tag{6}$$

مبرهنة 1-1-13 [قاعدة السلسلة]

لتكن f, g دوال حقيقية. اذا كانت f قابلة للإشتقاق عند a و g قابلة للإشتقاق عند $f(a)$ فإن $g \circ f$ قابلة للإشتقاق عند a مع

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]f'(a)$$

2-1 مبرهنة القيمة المتوسطة

مبرهنة 1-2-1

افرض أن $a, b \in \mathbb{R}$ مع $a < b$.

i. [مبرهنة القيمة المتوسطة المعممة] إذا كانت f, g دوال مستمرة على $[a, b]$ و قابلة للإشتقاق على (a, b) إذن يوجد عدد $c \in (a, b)$ بحيث

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

ii. [مبرهنة القيمة المتوسطة] إذا كانت f دوال مستمرة على $[a, b]$ و قابلة للإشتقاق على (a, b) إذن يوجد عدد $c \in (a, b)$ بحيث

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

3-1 الضرب الديكارتي

تعريف 1-3-1

لتكن $E_1, E_2, \ldots, E_n$ تجمع منتهٍ من المجموعات ، فإن الضرب الديكارتي يعرف بالشكل

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in E_j \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n\}$$

إذن الضرب الديكارتي إلى n من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ هو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$

الفصل الثاني

قابلية الإشتقاق في $\mathbb{R}^n$

2-1 المشتقة الجزئية

تعريف 2-1-1

لتكن $f:\{x_1\}\times\cdots\times\{x_{j-1}\}\times[a,b]\times\{x_{j+1}\}\times\cdots\times\{x_n\}\to\mathbb{R}$ ، سوف نرمز للدالة التالية

$$g(t):=f(x_1,\ldots,x_{j-1},t,x_{j+1},\ldots,x_n),\quad t\in[a,b]$$

بالرمز $f(x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n)$. إذا كانت g قابلة للإشتقاق عند بعض $t_0\in(a,b)$ ، إذن المشتقة الجزئية (أو المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى) إلى الدالة f عند $(x_1,\ldots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\ldots,x_n)$ بالنسبة إلى x_j تعرف بالشكل

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\ldots,x_n):=g'(t_0)$$

كذلك نرمز لهذه المشتقة الجزئية بالرمز $f_{x_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},t_0,x_{j+1},\ldots,x_n)$. إذن من تعريف المشتقة من الفصل الأول أن المشتقة الجزئية f_{x_j} موجودة عند نقطة $\mathbf{a}$ إذا وفقط إذا كانت الغاية

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}):=\lim_{h\to0}\frac{f(\mathbf{a}+h\,\mathbf{e}_j)-f(\mathbf{a})}{h}$$

موجودة. سوف نوسع مفهوم المشتقة الجزئية إلى دوال إتجاهية بالطريقة التالية. أفرض أن $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_m):\{a_1\}\times\cdots\times\{a_{j-1}\}\times I\times\{a_{j+1}\}\times\cdots\times\{a_n\}\to\mathbb{R}^m$ حيث $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ و I فترة مفتوحة تحوي a_j. اذا كان لكل $k=1,2,\ldots,m$ المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى $\partial f_k/\partial x_j$ موجودة عند $\mathbf{a}$ عندها نعرف المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى للدالة $\mathbf{f}$ بالنسبة إلى x_j لتكون الدالة الإتجاهية

$$\mathbf{f}_{x_j}(\mathbf{a}):=\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}):=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}),\ldots,\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)$$

المشتقات الجزئية من الرتب العليا تعرف بالتكرار. على سبيل المثال المشتقة الجزئية من الرتبة

الثانية للدالة $\mathbf{f}$ بالنسبة إلى x_j و x_k تعرف بالصورة التالية عندما تكون موجودة

$$\mathbf{f}_{x_j x_k} := \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_k \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}\right)$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية تسمى مختلطة عندما $j \neq k$.

2-2 الفضاء C^∞

تعريف 2-2-1

لتكن V مجموعة غير خالية. مجموعة جزئية مفتوحة من $\mathbb{R}^n$ ولتكن $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ دالة و $p \in \mathbb{N}$

i. يقال أن $\mathbf{f}$ تنتمي إلى C^p على V إذا وفقط إذا كانت كل مشتقة جزئية من الرتبة $k \leq p$ موجودة و مستمرة على V.

ii. يقال أن $\mathbf{f}$ تنتمي إلى C^∞ على V إذا وفقط إذا كانت $\mathbf{f}$ تنتمي إلى C^p على V لكل $p \in \mathbb{N}$.

ملاحظة 2-2-2

للتبسيط سوف ننص كل النتائج و المبرهنات في هذا الفصل من أجل $n = 2$ و$m = 1$ مستخدمين x من أجل x_1 و y من أجل x_2.

ملاحظة 2-2-3

بما أن المشتقات الجزئية هي من الأساس مفاهيم أحادية البعد، لذلك كل نتيجة تخص المشتقة أحادية البعد تحتوي معلومات حول المشتقات الجزئية ، و هنا مثالين :

1. بإستخدام قاعدة الضرب (مبرهنة 1-1-12) ، إذا كانت f_x و g_x موجودة، إذن

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}$$

2. بإستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة (مبرهنة 1-2-1). إذا كانت $f(\cdot, y)$ مستمرة على الفترة $[a, b]$ والمشتقة الجزئية $f_x(\cdot, y)$ موجودة على (a, b) ، إذن يوجد عدد $c \in (a, b)$ (الذي من الممكن أن يعتمد على y) حيث

$$f(b, y) - f(a, y) = (b - a)\frac{\partial f}{\partial x}(c, y)$$

مبرهنة 2-2-4

افرض ان V مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ وأن $(a, b) \in V$ نقطة ، وأن $f : V \to \mathbb{R}$ دالة ، إذا كانت $f \in C^1(V)$ و واحدة من المشتقات المختلطة من الرتبة الثانية للدالة f موجودة على V ومستمرة عند النقطة (a, b). إذن المشتقة المختلطة من الرتبة الثانية الأخرى موجودة عند (a, b) و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

المثال التالي يبين أن المبرهنة 2-2-4 خاطئة إذا كانت الاستمرارية غير متحققة بالنسبة إلى المشتقة المختلطة من الرتبة الثانية.

مثال 2-2-5

أثبت أن الدالة

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تنتمي إلى $C^1(\mathbb{R}^2)$ وأن كلا المشتقتين المختلطتين من الرتبة الثانية موجودة على $\mathbb{R}^2$. ولكنها لا تتبادل عند $(0, 0)$ ، أي أن $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

البرهان

عندما $(x, y) \neq (0, 0)$ و بإستخدام قاعدتي الضرب و القسمة أحادية البعد ، نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(xy)\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= xy\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

بما أن $x^2 + y^2 \leq 2|xy|$ لدينا $|f_x(x,y)| \leq 2|y|$ وبالتالي $f_x(x,y) \to 0$ عندما $(x,y) \to (0,0)$. من الناحية الأخرى بإستخدام التعريف

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} y\left(\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}\right) = -y$$

لكل $y \in \mathbb{R}$ ، إذن $f_x(0,0) = 0$ هذا يثبت أن f_x موجودة و مستمرة على $\mathbb{R}^2$ مع القيمة $-y$ عند $(0,y)$. وبأسلوب مشابه نثبت أن f_y موجودة ومستمرة على $\mathbb{R}^2$ مع القيمة x عند $(x,0)$. وهذا يعني أن المشتقات الجزئية المختلطة من الرتبة الثانية موجودة على $\mathbb{R}^2$ ولكن

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

□

مثال 6-2-2

أحسب كل المشتقات الجزئية المختلطة من الرتبة الثانية لكل الدوال الآتية وتحقق من تساويها.

1) $f(x,y) = y^2e^x$ 2) $f(x,y) = \sin(xy)$ 3) $f(x,y) = \dfrac{x-2y}{1-2y^2}$

الحل

1) $f(x,y) = y^2e^x$

$$f_x = y^2e^x \Rightarrow f_{xy} = 2ye^x$$

و

$$f_y = 2ye^x \Rightarrow f_{yx} = 2ye^x$$

إذن $f_{xy} = f_{yx}$.

$f(x,y)=\sin(xy)$ (2

$$f_x = y\cos(xy) \Rightarrow f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

و

$$f_y = x\cos(xy) \Rightarrow f_{yx} = \cos xy - xy\sin(xy)$$

إذن $f_{xy} = f_{yx}$.

$f(x,y)=\dfrac{x-2y}{1-2y^2}$ (3

$$f_x = \frac{1}{1-2y^2} \Rightarrow f_{xy} = \frac{4y}{(1-2y^2)^2}$$

و

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{(1-2y^2)(-2)-(x-2y)(-4y)}{(1-2y^2)^2} \\ &= \frac{-2+4y^2+4xy-8y^2}{(1-2y^2)^2} \\ &= \frac{4xy-4y^2-2}{(1-2y^2)^2} \Rightarrow f_{yx} = \frac{4y}{(1-2y^2)^2} \end{aligned}$$

إذن $f_{xy} = f_{yx}$.

مثال 7-2-2

أحسب f_x للدالة الآتية وحدد أين تكون مستمرة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6+y^6}{x^3+y^3} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

الحل

عندما $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^6+y^6}{x^3+y^3}\right) \\ &= \frac{(x^3+y^3)(6x^5)-(x^6+y^6)(3x^2)}{(x^3+y^3)^2} \\ &= \frac{3x^8+6x^5y^3-3x^2y^6}{(x^3+y^3)^2} \end{aligned}$$

وهذه المشتقة مستمرة عند كل $(x,y) \neq (0,0)$. الآن نناقش استمرارية المشتقة f_x عند النقطة $(0,0)$. حسب التعريف لدينا

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^6+0}{h^3+0}-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$$

الآن نلاحظ عندما $(x,y) \to (0,0)$

$$3x^8+6x^5y^3-3x^2y^6 \leq 3x^2(x^6+2x^3y^3+y^6) = 3x^2(x^3+y^3)^2$$

إذن

$$|f_x(x,y)| \leq \frac{3x^2(x^3+y^3)^2}{(x^3+y^3)^2} = 3x^2 \longrightarrow 0$$

عندما $x \to 0$. إذن f_x مستمرة عند جميع نقاط $\mathbb{R}^2$.

3-2 تعريف قابلية الاشتقاق في $\mathbb{R}^n$

تعريف 1-3-2

أفرض أن $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ وأن V مجموعة مفتوحة تحوي $\mathbf{a}$. لتكن $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ دالة فإن

i. يقال بأن $\mathbf{f}$ قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$ إذا وفقط إذا وجدت $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^m)$ بحيث أن الدالة

$$\epsilon(\mathbf{h}) := \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{T}(\mathbf{h})$$

تحقق $\epsilon(\mathbf{h})/\,\|\mathbf{h}\| \to 0$ عندما $\mathbf{h} \to 0$.

ii. يقال بأن $\mathbf{f}$ قابلة للاشتقاق على مجموعة E إذا وفقط إذا كانت E مجموعة غير خالية و $\mathbf{f}$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في E.

مبرهنة 2-3-2

إذا كانت $\mathbf{f}$ دالة إتجاهية قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$ ، إذن $\mathbf{f}$ دالة مستمرة عند $\mathbf{a}$.

البرهان

افرض أن $\mathbf{f}$ دالة قابلة للاشتقاق عند $\mathbf{a}$. إذن بواسطة التعريف 2-3-1 يوجد تحويل خطي $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^m)$ وعدد $\delta > 0$ بحيث $\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{T}(\mathbf{h})\| \leq \|\mathbf{h}\|$ لكل $\delta > \|\mathbf{h}\|$.
الآن بواسطة المتراجحة المثلثية وتعريف طول المتجه ، ينتج

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leq \|\mathbf{T}\|\,\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{h}\|$$

لكل $\delta > \|\mathbf{h}\|$. بما أن $\|\mathbf{T}\|$ عدد حقيقي منتهٍ. نستنتج من مبرهنة الساندويتش بأن $\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \to \mathbf{f}(\mathbf{a})$ عندما $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. بعبارة أخرى $\mathbf{f}$ مستمرة عند $\mathbf{a}$. $\square$

مبرهنة 2-3-3

لتكن $\mathbf{f}$ دالة اتجاهية. إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $\mathbf{a}$ إذن كل المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة $\mathbf{f}$ موجودة عند $\mathbf{a}$. أبعد من ذلك فإن المشتقة الكلية للدالة $\mathbf{f}$ عند $\mathbf{a}$ تكون وحيدة وتحسب كالآتي

$$D\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{m\times n} := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

البرهان

بما أن $\mathbf{f}$ قابلة للاشتقاق ، نعرف أنه توجد مصفوفة $B := [b_{ij}]$ من الحجم $m \times n$ بحيث أن

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - B\,\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \to \mathbf{0} \quad \text{عندما} \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0} \tag{1}$$

نحدد $n \geq j \geq 1$ ونختار $\mathbf{h} = t\,\mathbf{e}_j$ لبعض $t > 0$. بما أن $\|\mathbf{h}\| = t$ لدينا

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - B\,\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} := \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t} - B\,\mathbf{e}_j$$

نأخذ الغاية عندما $t \to 0^+$ و بإستخدام (1) وتعريف ضرب المصفوفات ، نحصل على

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+t\,\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t} = B\,\mathbf{e}_j = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$$

بأسلوب مشابه نثبت أن الغاية عندما $t \to 0^-$ أيضاً تساوي $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$. بما أن الدالة الاتجاهية متقاربة إذا وفقط إذا كانت مركباتها متقاربة وبهذا ينتج أن المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى لكل مركبة f_i بالنسبة إلى x_j موجودة عند $\mathbf{a}$ وتحقق

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = b_{ij}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, m$. بالخصوص. لكل دالة $\mathbf{f}$ قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$ يوجد تحويل خطي وحيد $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^m)$ تحقق التعريف 2-3-1 ويكون الاشتقاق التام (الكلي) بالشكل

$$D\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) := [b_{ij}]_{m\times n} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{m\times n}$$

□

ملاحظة 2-3-4

الآن لدينا عدة طرق لمعرفة ما إذا كانت الدالة الاتحاهية $\mathbf{f}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة $\mathbf{a}$. بالتأكيد تكون $\mathbf{f}$ قابلة للاشتقاق عند $\mathbf{a}$ إذا وجدت مصفوفة B من حجم $m \times n$ بحيث

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - B\,\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

إذا وفقط إذا

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - B\,\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

أو إذا وفقط إذا

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\,\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \qquad (2)$$

ملاحظة 2-3-5

أول شرطين يمكن تطبيقهما بدون حساب المشتقات الجزئية للدالة $\mathbf{f}$. أما الشرط الأخير ملموس أكثر ولكن يُطبق فقط في حالة قدرتنا على على حساب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة $\mathbf{f}$.

ملاحظة 2-3-6

إذا كان $n = 1$ أو $m = 1$. المصفوفة $D\,\mathbf{f}$ تصبح متجهاً ويصبح لدينا عدة أشكال

i) إذا كان $n = 1$ ، فإن

$$D\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{bmatrix}$$

في بعض الأحيان نستخدم تعبير المتجهات

$$\mathbf{f}'(a) := (f_1'(a), \ldots, f_m'(a)$$

ii) إذا كانت $m = 1$ ، فإن

$$D\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right]$$

في بعض الأحيان نستخدم تعبير المتجهات

$$\nabla\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right)$$

حيث $\nabla\,\mathbf{f}$ يسمى إنحدار الدالة $\mathbf{f}$.

مبرهنة 2-3-7

لتكن V مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ و $\mathbf{a} \in V$ ولتكن $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ دالة اتجاهية. إذا كانت كل المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة $\mathbf{f}$ موجودة في V ومستمرة عند $\mathbf{a}$ إذن $\mathbf{f}$ قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$.

البرهان

بما أن الدالة تتقارب إذا وفقط إذا كانت كل مركباتها متقاربة إذن يمكننا فرض $m = 1$ وبواسطة التعريف يكفي أن نثبت أن f دالة حقيقية تمتلك مشتقات مستمرة من الرتبة الأولى في V وبعدها

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

لتكن $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ونفرض أن $r > 0$ صغيرة جداً بحيث $B_r(\mathbf{a}) \subset V$. نحدد $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) \neq \mathbf{0}$. الآن بإستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة 1-2-1 (أحادية البعد)، نستطيع أن نختار c_j بين a_j و $a_j + h_j$ بحيث

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) \\ &\quad + \cdots + f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n+h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}, h_{j+1}, \ldots, a_n+h_n). \end{aligned}$$

وبالتالي

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\delta} \tag{3}$$

حيث $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^n$ متجه مركباته

$$\delta_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1} + h_{j+1}, \ldots, a_n + h_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_n).$$

بما أن المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى مستمرة عند $\mathbf{a}$ للدالة f فإن $\delta_j \to 0$ لكل $1 \le j \le n$ (بمعنى $\|\boldsymbol{\delta}\| \to 0$ عندما $\mathbf{h} \to 0$) أبعد من ذلك بواسطة (3) ومتراجحة كوشي شوارز نحصل على

$$0 \le \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{|\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\delta}|}{\|\mathbf{h}\|} \le \|\boldsymbol{\delta}\| \tag{4}$$

ومن مبرهنة الساندويتش يتبع بأن الكسر الأول في (4) يتقارب إلى 0 عندما $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. وبالتالي f قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$ بواسطة التعريف (2-3-1) □

هذه النتائج تقترح أن نجري الخطوات التالية لتحديد ما إذا كانت الدالة الاتجاهية $\mathbf{f}$ قابلة للاشتقاق عند نقطة $\mathbf{a}$.

1. نحسب كل المشتقات الجزئية للدالة من الرتبة الأولى للدالة $\mathbf{f}$ عند $\mathbf{a}$. إذا كانت واحدة منها غير موجودة ، إذن $\mathbf{f}$ غير قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$.
2. إذا كانت كل المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى موجودة و مستمرة عند $\mathbf{a}$. إذن $\mathbf{f}$ قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$.
3. إذا كانت المشتقات الجزئية موجودة ولكن واحدة منها فشلت أن تكون مستمرة عند $\mathbf{a}$. عندئذ نستخدم تعريف قابلية الاشتقاق بصورة مباشرة. □

مثال 2-3-8

هل الدالة $f(x, y) = (\cos(xy), \ln x - e^y)$ قابلة للإشتقاق عند النقطة $(1, 1)$.

الحل

بما أن $f_x = (-y\sin(xy), \frac{1}{x})$ و $f_y = (-x\sin(xy), -e^y)$ كلتاهما موجودة و مستمرة عند أي نقطة $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ بحيث $x > 0$ ، تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، $x > 0$ بالخصوص عند $(1, 1)$.

مثال 2-3-9

هل الدالة

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند $(0, 0)$.

الحل

بالنظر إلى المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى. عندما $(x, y) \neq (0, 0)$ ، إذن

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

عندما $(x, y) = (0, 0)$ نطبق تعريف المشتقة الجزئية

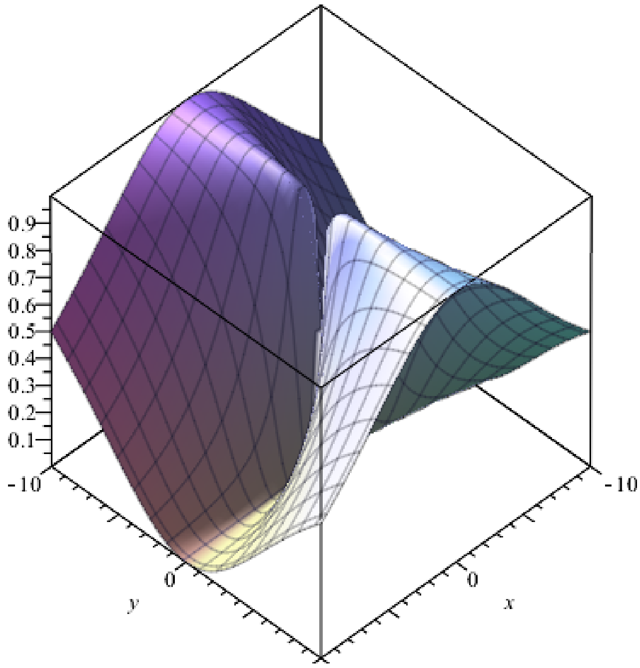
$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

إذن $f_x(0, 0) = 0$ موجودة. ولكن ماذا عن $f_y(0, 0)$ ؟ بالتعريف نلاحظ

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(k, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{k}$$

وهذه الغاية غير موجودة $\Leftarrow$ $f_y(0, 0)$ غير موجودة $\Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق عند $(0, 0)$.
(أنظر شكل 2-1)

مثال 2-3-10



شكل 2-1: الدالة $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

اثبت أن الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^2$ ولكنها قابلة للاشتقاق بصورة غير مستمرة عند $(0,0)$.

البرهان

عندما $(x,y)\neq(0,0) \Leftarrow f_x$ و f_y موجودة و مستمرة مع :

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. الآن بما أن $f_x(x,0)$ ليس لها غاية عندما $x\to 0$

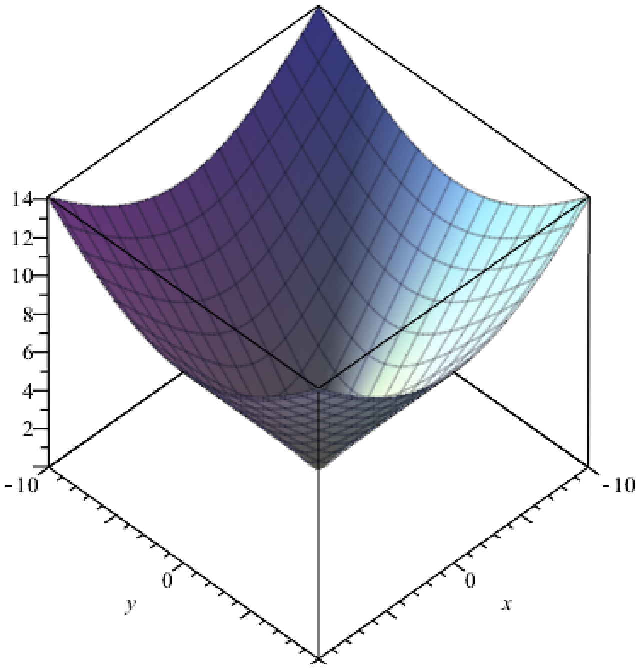
$\Leftarrow f_x$ ليست مستمرة عند $(0,0)$. لايجاد $f_x(0,0)$ نستخدم التعريف

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{|h|} = 0$$

بنفس الطريقة نجد أن $f_y(0,0) = 0$ وبالتالي $\nabla f(0,0) = (0,0)$ ، لاثبات أن f قابلة للاشتقاق عند $(0,0)$ نستخدم التعريف (2)

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\|(h,k)\|} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$$

عندما $(h,k)\to(0,0)$ إذن f قابلة للاشتقاق عند $(0,0)$. (أنظر شكل 2-2) $\square$



شكل 2-2: الدالة $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

مثال 2-3-11

أثبت أن الدالة $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $(0,0)$.

البرهان

أولاً نجد المشتقات الجزئية عند $(0,0)$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

إذن المشتقات الجزئية موجودة عند $(0,0)$ ومنه $\nabla f(0,0)=(0,0)$. الآن نستخدم التعريف لتحديد قابلية الاشتقاق

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\|(h,k)\|}=\frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

وعند أخذ الغاية عندما $(h,k)\to(0,0)$ نلاحظ الاقتراب على المسار $k=0$ يعطي

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{\sqrt{h^2}}=0$$

أما الاقتراب على المسار $h=k$ يعطي

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h^2|}}{\sqrt{2h^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{\sqrt{2}\,|h|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن الغاية غير موجودة وبالتالي الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند $(0,0)$. (أنظر شكل 2-3) □

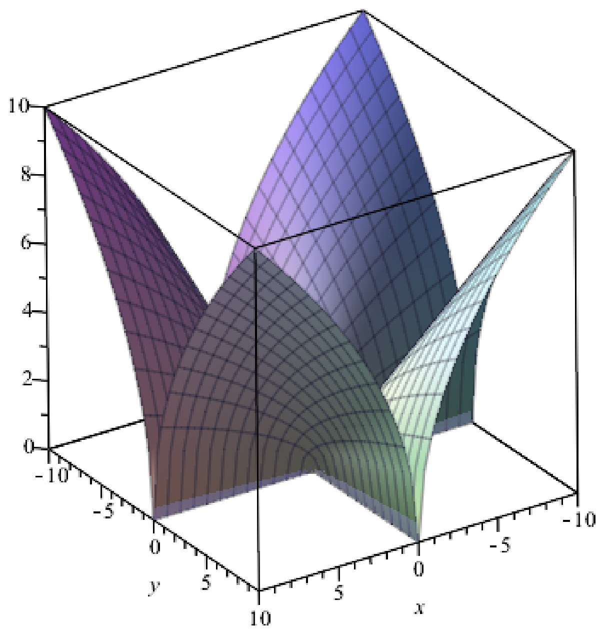
مثال 2-3-12

أثبت أن الدالة

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2y^2}{1-\cos\sqrt{x^2-3y^2}} & 0<\|(x,y)\|<\pi\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $(0,0)$.

البرهان



شكل 2-3: الدالة $f(x,y)=\sqrt{xy}$

نجد المشتقة الجزئية بالنسبة إلى x عند $(0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^2-0}{1-\cos\sqrt{h^2-0}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{1-\cos|h|} \end{aligned}$$

وهذه الغاية غير موجودة وبالتالي $f_x(0,0)$ غير موجودة $\Leftarrow$ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $(0,0)$. $\square$

مبرهنة 2-3-13

لتكن $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ و أن $\mathbf{f},\mathbf{g}$ دوال إتجاهية فإذا كان كل من $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ دوال قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$ فإن $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\alpha\,\mathbf{f}$ و $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ كلها دوال قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$. في الحقيقة

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\,\mathbf{f}(a) + D\,\mathbf{f}(b) \tag{5}$$

$$D(\alpha\,\mathbf{f})(\mathbf{a}) = \alpha D\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) \tag{6}$$

و

$$D(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{a})D\,\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{a})D\,\mathbf{g}(\mathbf{a}) \tag{7}$$

مثال 2-3-14

إثبت أن الدوال الإتجاهية التالية قابلة للإشتقاق في مجالها ومن ثم أوجد $D(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x})$ و $D(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x})$.

(a) $\mathbf{f}(x,y) = 2x - 4y, \quad \mathbf{g}(x,y) = 2x^2 + y^3$

(b) $\mathbf{f}(x,y,z) = (-y, x+z), \quad \mathbf{g}(x,y,z) = (x+y+z, xyz)$

الحل

(a) نجد المشتقات

$$\mathbf{f}_x = 2,\ \mathbf{f}_y = -4 \quad \mathbf{g}_x = 4x,\ \mathbf{g}_y = 3y^2$$

المجال هو $\mathbb{R}^2$. نلاحظ أن المشتقات الجزئية موجودة و مستمرة عند جميع نقاط $\mathbb{R}^2$ بالتالي فإن $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^2$. الآن

$$\begin{aligned} D\,\mathbf{f} &= \begin{bmatrix}\mathbf{f}_x & \mathbf{f}_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -4\end{bmatrix} \\ D\,\mathbf{g} &= \begin{bmatrix}\mathbf{g}_x & \mathbf{g}_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4x & 3y^2\end{bmatrix} \end{aligned}$$

إذن

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = D\,\mathbf{f} + D\,\mathbf{g} = \begin{bmatrix}2+4x & -4+3^2\end{bmatrix}$$

كذلك

$$\begin{aligned} D(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x})D\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})D\,\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= (2x^2+y^3)\begin{bmatrix}2 & -4\end{bmatrix} + (2x-4y)\begin{bmatrix}4x & 3y^2\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}4x^2+2y^3 & -8x^2-4y^3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8x^2-16xy & 6xy-12y^3\end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 12x^2 + 2y^3 - 16xy & -16y^3 - 8x^2 + 6xy^2 \end{bmatrix}$$

(b) المجال هو جميع نقاط $\mathbb{R}^3$. نجد المشتقات

$$\mathbf{f}_x = (0,1),\ \mathbf{f}_y = (-1,0),\ \mathbf{f}_z = (0,1)$$
$$\mathbf{g}_x = (1,yz),\ \mathbf{g}_y = (1,xz),\ \mathbf{g}_z = (1,xy)$$

المشتقات الجزئية جميعها موجودة و مستمرة عند جميع نقاط $\mathbb{R}^3$ إذن كل من $\mathbf{f},\mathbf{g}$ دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^3$. الآن

$$D\,\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x & \mathbf{f}_y & \mathbf{f}_z \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D\,\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_x & \mathbf{g}_y & \mathbf{g}_z \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$$

إذن

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = D\,\mathbf{f} + D\,\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1+yz & xz & 1+xy \end{bmatrix}$$

كذلك

$$\begin{aligned} D(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x})\,D\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x})\,D\,\mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} x+y+z & xyz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y & x+z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -y+xyz+yz^2 & -y+x^2z+xz^2 & -y+x^2y+xyz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} xyz & -x - \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -y+2xyz+yz^2 & xz^2+2x^2-x-2y-z & -y+x^2y+2xyz \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مبرهنة 2-3-15

لتكن $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f$ دالة قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$ و $\Delta\,\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ ، فإن

$$\frac{\Delta z - dz}{\|\Delta\,\mathbf{x}\|} \to 0 \quad \text{عندما} \quad \Delta\,\mathbf{x} \to \mathbf{0}$$

حيث $z = f(\mathbf{x})$ و $\Delta z = f(\mathbf{a} + \Delta\,\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$. بالخصوص فإن dz تقريب جيد Δz.

البرهان

بالتعريف ، إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند $\mathbf{a}$ ، إذن $\epsilon(\mathbf{h}) := f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$ يحقق $\epsilon(\mathbf{h})/\,\|\mathbf{h}\| \to \mathbf{0}$ عندما $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. بما أن $\Delta z = f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ لـ $\mathbf{h} := \Delta\,\mathbf{x}$ و $dz = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$ فإنه يبتع بأن $(\Delta z - dz)/\,\|\Delta\,\mathbf{x}\| \to \mathbf{0}$ عندما $\Delta\,\mathbf{x} \to \mathbf{0}$. $\square$

مثال 16-3-2

إستخدم التفاضل لتقريب التغير في $f(x, y) = x^2 y - x^3$ عندما نتحرك من $(0, 1)$ إلى $(0.02, 1.01)$.

الحل

ليكن $z = x^2 y - x^3$, $a = 0$, $b = 1$ إذن

$$dx = 0.02 - 0 = 0.02$$
$$dy = 1.01 - 1 = 0.01$$

الآن

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= 2xy\,dx + (x^2 - 3y^2)dy \end{aligned}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} \Delta z \approx dz(0, 1) &= 2(0)(1)(0.02) + (0^2 - 3(1))(0.01) \\ &= 0 + (-3)(0.01) = -0.03 \end{aligned}$$

نلاحظ أن القيمة الحقيقية $\Delta z = f(0.02, 1.01) - f(0, 1) = -0.29897$ قريب جداً من -0.03.

مثال 2-3-17

استخدم التفاضل لتقريب المقدار $(5.97)\sqrt[4]{16.03}$

الحل

ليكن $z = y\sqrt[4]{x}$, $a = 16$, $b = 6$ إذن

$$dx = 16.03 - 16 = 0.03, \quad dy = 5.97 - 6 = -0.03$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{y}{4\sqrt[4]{x^3}}dx + \sqrt[4]{x}dy \end{aligned}$$

إذن

$$\Delta z \approx \frac{6(0.03)}{4\sqrt[4]{16^3}} + \sqrt[4]{16}(-0.03) = -0.054375$$

ومنه

$$z \approx 6\sqrt[4]{16} - 0.059375 = 11.945625$$

القيمة الحقيقية هي 11.945593 إذن التقريب جيد إلى ثلاث مراتب عشرية.

الخلاصة

بعد الإنتهاء من البحث صرنا عارفين بكيفية التعامل مع الإشتقاق داخل الفضاء $\mathbb{R}^n$. حيث تم توسعة تعريف المشتقة أحادية البعد وتطبيق نظرياتها في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ، وأيضاً تعرفنا على مفهوم قابلية الإشتقاق الذي كان يشابه إلى حد كبير (لكن ليس تماماً) مفهوم قابلية الإشتقاق في $\mathbb{R}$ ، و بعد ذلك تعرفنا على الشرط الكافي و الضروري لتكون الدالة الإتجاهية قابلة للإشتقاق و أثناء ذلك عرّفنا الإشتقاق التام (الكلي) الذي هو من نقاط الشبه مع مشتقة الدالة في الفضاء $\mathbb{R}$. و أخيراً تعرفنا على مفهوم التفاضل الذي مكّننا من تقريب بعض المسائل التي يصعب إيجاد قيمة حقيقية لها.

المصادر

[1] Boas, Ralph P., and Jr., *Primer of Real Functions*, Carus Monograph 13. New York: Mathematical Association of America, John Wiley, and Sons, Inc., 1960.

[2] Susan J.Colley, *Vector Calculus*, Upper Saddle River, 2006.

[3] Taylor and Angus E., *Advanced Calculus*, Boston: Ginn and Company, 1995.

[4] William R. Wade, *An Introduction to Analysis*, Practice Hall, 2009.