



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات الدراسة المسائية



انظمة المعادلات الخطية وبعض طرق حلها

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة
وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

رسل حسين فاخر

إشراف

ا.م. مرتضى جاسم محمد

2025 - 2024

الآية

قال تعالى

(يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ)

صدق الله العلي العظيم

سورة المجادلة (11)

الإهداء

الحمد لله حبا وشكرا وامتنانا، ماكنت لأفعل هذا لو لا فضل الله فالحمد لله على البدء وعلى الختام
(وَأَخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ)

أهدي هذا النجاح الى نفسي الطموحة جدالم تكن الرحلة قصيرة ، لم يكن الحلم قريبا والطريق كان
محفوفاً بالتسهيلات لكني فعلتها لقد ظننت انني لا أستطيع ولكن من قال انا لها نالها وان ابت رغما عنها
اتيت بها وها انا اليوم اختم بحث تخرجي فالحمد لله اللهم لا تجعله اخر عهدي من العلم واجعلها خير
بداية لطريق أعظم اللهم بارك لنا في عملنا وانفعنا بما علمتنا .

بكل حُب أهدي هذا النجاح لمن انتظروا هذه اللحظة كثيرا ليفخروا بي، كما أفخر بهم وبوجودهم.

إلى ابي الغالي

من علمني أن الدنيا كفاح وسلاحها العلم والمعرفة، إلى الذي لم يبخل عليّ يوماً بأي شيء، ومن سعى
لأجل راحتي ونجاحي الذي سعى طوال حياته لكي نكون افضل منه إلى سندي وأعظم رجل في حياتي .

إلى امي الغالية

كانت دعواتها تحبطني وسر نجاحي وحنانها بلسم جراحي التي كانت لي الام والأخت والصديقة داعمي
الأول ووجهتي التي استمد منها القوة أنتِ نجاح الرحلة، وكفاح القلب، وإصرار التحدي، التي طالما
تمنت ان تقر عينها برؤيتي في يوماً كهذا .

إلى زوجي الحبيب

رفيق روحي و الدرب وشريك الأحلام الذي شاركني خطوات هذا الطريق وهون تعب الطريق
وشجعني ودفعني للأمام .
إلى عوضي في الحياة وقرّة عيني، إلى جبر قلبي وصديق أيامي وأنيس روحي إلى من معه وُلدت من
جديد، وبه أصبحت أقوى .. طفلي علي

شكر و تقدير

الحمد لله الذي وفقني لإتمام هذا البحث وأعانني على تجاوز جميع التحديات، والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله اجمعين.

أتوجه بخالص الشكر والتقدير إلى أساتذتي الأفاضل على دعمهم وتوجيهاتهم القيمة طوال مسيرتي الدراسية، وعلى رأسهم الأستاذ المشرف مرتضى جاسم محمد الذي كان خير معين لي في إتمام هذا البحث. فله الفضل بعد الله في توجيه مساري البحثي، ولم يبخل عليّ بالنصح والتوجيه. كما أشكر كل من علمني حرفاً في حياتي الدراسية، وأخص منهم كل من درسني الرياضيات يوماً، سواء في الصفوف المدرسية أو لاحقاً عندما تخصصت الرياضيات في جامعة البصرة

وأخيراً، أوجه شكري لكل من ساهم بشكلٍ مباشر أو غير مباشر في إنجاز هذا البحث، سائلاً الله أن جعل هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم، وأن ينفع به الجميع

المحتويات

1	الملخص
2	مقدمة
الفصل الأول : مفاهيم اساسية	
5	(1 - 1) انواع المعادلات التفاضلية
5	(2 - 1) بعض طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية
10	(3 - 1) المعنى الهندسي للنظام الخطي
الفصل الثاني : بعض طرق حل الانظمة الخطية	
15	(1 - 2) طريقة كرامر
16	(2 - 2) طريقة معكوس المصفوفة
17	(3 - 2) طريقة كاوس - جوردان للحذف
18	المصادر

المخلص

تمت دراسة مفهوم المعادلة الرياضية وبعض أنواعها وتم إيجاد بعض الحلول العددية والجبرية لأنظمة من المعادلات الجبرية التي ليس لها حل بالطرق التحليلية من خلال بعض الطرق المباشرة وبعض طرق غير مباشرة إذا كانت خطية وغير خطية.

مقدمة

نشأت أنظمة المعادلات الخطية في أوروبا مع تقديم الاحداثيات في الهندسة في عام 1637 م بواسطة رينيه ديكارت في الواقع في هذه الهندسة الجديدة التي تسمى الان الهندسة الديكارتية يتم تمثيل الخطوط والمستويات بالمعادلات الخطية ويصل حساب التقاطعات الى حل أنظمة المعادلات الخطية استخدمت الطرق المنهجية الأولى لحل الأنظمة الخطية المحددات والتي درسها لايبنييز لأول مرة في عام 1693م وعام 1750م استخدمها غابرييل كرامر لإعطاء حلول صريحة للأنظمة الخطية والتي تسمى الان طريقة كرامر وفي الوقت لاحق وصف جاوس طريقة الازالة والتي تم ادراجها في البداية على انها تقدم في الجيوديسيا في عام 1844م نشر هيرمان جراسمان نظرية الامتداد التي تضمنت موضوعات تأسيسية جديدة لما يسمى اليوم بالجبر الخطي وفي عام 1848م قدم جيمس جوزيف سلفستر مصطلح المصفوفة وهو لاتيني يعني الرحم.

ويهدف بحثنا الحالي الى دراسة أنظمة المعادلات الخطية اذا ان المعادلات الخطية أهمية في معظم العلوم والأنشطة ان لم نقل كلها حيث نستخدم أكثر من طريقة اليجاد حلول أنظمة المعادلات الخطية حيث يتضمن الفصل الأول من البحث مقدمة عن أنظمة المعادلات الخطية وتعريف مختلفة عن أنظمة المعادلات الخطية ونظام الخطي وكذلك المعنى الهندسي للنظام الخطي. ويتضمن الفصل الثاني مقدمة بسيطة عن طرق الحل وكذلك طرق حل أنظمة المعادلات الخطية (طريقة كرامر وطريقة معكوس المصفوفة وطريقة كأوس- جوردان للحذف)

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

سنتعرف في هذا الفصل على المعادلة بشكل عام وعلى أنواع المعادلات ومن ثم نتعرف على النظام ومكونات النظام زنتطرق الى أنظمة المعادلات سواء في متغير واحد او في n من المتغيرات.

المعادلة الرياضية (1 - 1)^[1]:

هي عبارات رياضية تربط بينها علامة المساواة ويكون لها حدان متساويان في القيمة احدهما على الجانب الايمن والآخر على الجانب الايسر حيث يتم استخدامها في ايجاد المتغير المجهول سواء كان متغير واحد او اكثر.

المعادلة الجبرية (2 - 1)^[1]:

هي مساواة بين مقدارين جبريين يحوي احدهما او كلاهما متغيراً او اكثر حيث القيمة العددية للمقدار الاول لا تساوي القيمة العددية للمقدار الثاني الا مع قيم خاصة للمتغيرات. على سبيل المثال معادلة حدودية احادية المتغير تأخذ الشكل التالي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

حيث a_0, \dots, a_n هي معاملات المعادلة، الهدف هو ايجاد جميع القيم المجهولة لـ x .

يقال عن متعددة الحدود انها من الدرجة الاولى اذا كانت اعلى قوة لـ x تظهر في المعادلة هي واحد. وانها من الدرجة الثانية اذا كانت اعلى قوة لـ x هي 2 وهكذا ...

المعادلة التفاضلية (3 - 1)^[1]:

هي معادلة تحوي مشتقات و تفاضلات لبعض الدوال الرياضية وتظهر فيها بشكل متغيرات المعادلة ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو ايجاد هذه الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات.

● **درجة المعادلة الرياضية :** تتحدد درجة المعادلة التفاضلية حسب اس المشتقة ذات الرتبة الاعلى.

- رتبة المعادلة التفاضلية : هي رتبة أعلى مشتقة تحتوي عليها هذه المعادلة.
مثال:

الرتبة	الدرجة	المعادلة التفاضلية
الاولى	الثانية	$(y')^2 + 5x^3y = 2x + 5y$

(1 - 1) انواع المعادلات التفاضلية

1. معادلات تفاضلية اعتيادية (ordinary differential equations) تحتوي على توابع ذات متغير مستقل واحد ومشتقات هذا المتغير

مثال: $y'' + 3y = x^2$

2. معادلات تفاضلية جزئية partial differential equations هي معادلات تفاضلية تحتوي على دالة واحدة او اكثر من الدوال المجهولة ومشتقاتها الجزئية.
مثال:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(2 - 1) بعض طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية

- فصل المتغيرات:

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستقلة الى معادلة تفاضلية اعتيادية.

- التحويلات التكاملية:

يتم تحويل المعادلة الجزئية ذات n من المتغيرات المستقلة الى معادلة تفاضلية جزئية ذات $n - 1$ من المتغيرات المستقلة ومن ثم بهذه الطريقة يمكن تحويل المعادلة الجزئية ذات المتغيرين الى معادلة اعتيادية.

- طريقة الدوال الذاتية:

يتم ايجاد حل المعادلة الجزئية كمجموع عدد غير منته من الدوال الذاتية وهذه الدوال توجد بحل

يسمى المناظرة للمسائل الأصلية.

المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية (1 - 4)

كل من المعادلات التفاضلية العادية و الجزئية يمكن ان تصنف الى خطية وغير خطية وتكون المعادلة التفاضلية خطية بشرطين:

• اذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط او ثوابت.

• اذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة لأسس اي كلها من الدرجة الاولى.

• وتكون غير خطية فيها عدا ذلك

كل معادلة تفاضلية خطية هي من الدرجة الاولى بينما ليست كل المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى هي خطية لان الدرجة تتحدد حسب اس التفاضل الاعلى ومن الممكن ان تكون التفاضلات الاقل مرفوعة لأسس غير الواحد دون ان يؤثر ذلك على الدرجة وهذا يخل بشرط المعادلة الخطية. وبهذا تكون غير خطية.

امثلة:

$$1. \quad x^2 y'' + x y' + x^2 y = e^x \sin x \quad \text{معادلة تفاضلية خطية.}$$

$$2. \quad y y'' + y' = x \quad \text{معادلة تفاضلية غير خطية.}$$

النظام الخطي (1 - 5)^[1]:

هو نظام مكون من m من المعادلات و n من المتغيرات. او هو مجموعة تحتوي m من المعادلات الخطية لكل منها n من المتغيرات ويعبر عن ذلك النظام عادة بالشكل

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1-1)$$

بالتالي فإن المعادلة (1-1) هي $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ تسمى a_{ij} بالثوابت. تسمى S_i التي تحقق كل معادلة خطية في النظام اعلاه بحل النظام المعادلات الخطية

$$a_1x_1 + a_2 + \dots + a_nx_n = b$$

حل المعادلة الخطية (1 - 6)^[1]:

هو متتابعة من n من الاعداد S_1, S_2, \dots, S_n تحقق المعادلة عند اجراء التعويض وتسمى الفئة المكونة من كل حلول المعادلة بفئة الحل لها.

انظمة المعادلات الخطية في متغيرين (1 - 7)^[2]:

هذا النظام يكون بالشكل

$$A_1X_1 + B_1X_2 = C_1$$

$$A_2X_1 + B_2X_2 = C_2$$

حل هذا النظام هو مجموعة الأزواج المرتبة من الاعداد الحقيقية والتي تحقق المعادلتين. سوف نستخدم طريقة الحذف والتعويض الخلفي لحل هذا النظام.

مثال

اوجد حل النظام

$$3X - 4Y = 28 \quad (2-1)$$

$$X + 2Y = 6 \quad (3-1)$$

الحل

من المعادلة (3-1)

$$X = 6 - 2Y \quad (4-1)$$

نعوض (4-1) في (2-1)

$$3(6 - 2Y) - 4Y = 28$$

$$18 - 6Y - 4Y = 28$$

$$-10Y = 10$$

$$\Rightarrow Y = -1$$

نعوض في (4-1)

$$X = 6 - 2(-1) = 6 + 2 = 8$$

النظام يمتلك حل وحيد.

انظمة المعادلات في ثلاث متغيرات (1 - 8)^[1]:

تكون بالشكل

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

مثال

حل النظام

$$2x + 2y - 3z = 1 \quad (5-1)$$

$$5x + 3y - 4z = 4 \quad (6-1)$$

$$7x - 3y + 2z = 6 \quad (7-1)$$

الحل

يكون الحل بطريقة الحذف. نضرب المعادلة (5-1) بـ 3- و المعادلة (6-1) بـ 2 نحصل على

$$-6x - 6y + 9z = -3 \quad (8-1)$$

$$10x + 6y - 8z = 8 \quad (9-1)$$

بجمع (8-1) و (9-1) نحصل على

$$4x + z = 5 \quad (10-1)$$

الآن نجمع (6-1) مع (7-1) نحصل على

$$12x - 2z = 10 \Rightarrow 6x - z = 5 \quad (11-1)$$

بجمع (10-1) و (11-1) نحصل على

$$10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

نعوض في (10-1)

$$4(1) + z = 5 \Rightarrow z = 1$$

نعوض الآن عن x, z في (5-1)

$$2(1) + 2y - 3(1) = 1 \Rightarrow y = 1$$

نتحقق من ان $x = 1, y = 1, z = 1$ يحقق حل النظام.

$$2(1) + 2(1) - 3(1) = 1$$

$$5(1) + 3(1) - 4(1) = 1$$

$$7(1) - 3(1) + 2(1) = 1$$

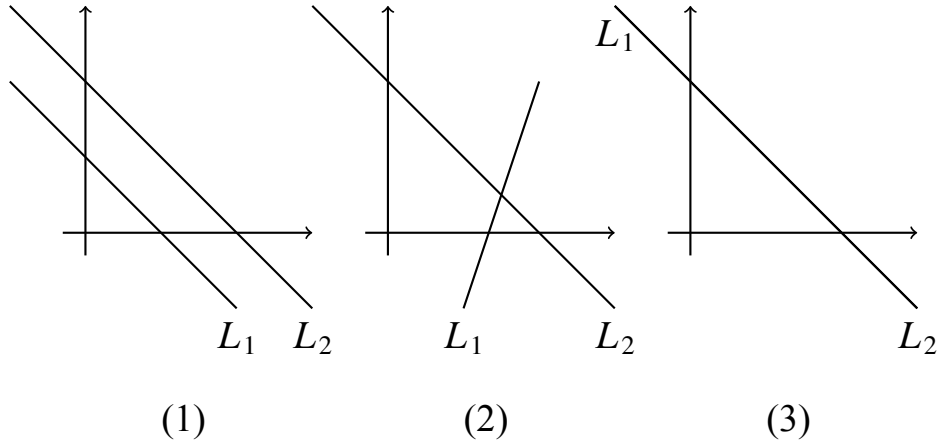
(3 - 1) المعنى الهندسي للنظام الخطي [1]:

النظام الخطي العام المتكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين x, y يمثل بالصيغة التالية

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

ان الشكل الهندسي لهذه المعادلات هو الخطوط المستقيمة L_1, L_2 كما في الشكل (1 - 1) ولما كانت النقطة (x, y) تقع على المستقيم اذا وفقط اذا كانت x, y تحقق معادلة المستقيم فإن حلول النظام الخطي تقابل المستقيمين كما موضح في الشكل (1 - 1)



الشكل (1-1)

من خلال الشكل (1-1) يتضح ان هناك ثلاث احتمالات للحلول هي

1. المستقيمان متوازيان اي لا يوجد نقطة تقاطع وعليه فليس للنظام الخطي حل (الشكل (1) من ((1-1)).
2. يتقاطعان بنقطة واحدة وهذا يعني ان النظام الخطي له حل واحد فقط. (الشكل (2) من ((1-1)).
3. المستقيمان متطابقان اي يوجد عدد غير محدد من الحلول (الشكل (3) من ((1-1)).

نستنتج من ذلك ان اي نظام خطي اما ليس له حل او له حل وحيد او له عدد غير منته من الحلول. تسمى المجموعة المنتهية من m من المعادلات الخطية التي تحتوي على n من المتغيرات X_1, X_2, \dots, X_n

بنظام من المعادلات الخطية.

وتسمى أيضاً بالنظام الخطي اما المتتابعة المتكونة من n من الاعداد الحقيقية $S_1, S_2, \dots, S_n = X_n$ حلاً لكل معادلة من النظام الخطي.

ويمكن كتابة النظام الخطي من m من المعادلات التي تحتوي على n من المتغيرات بالصيغة

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m$$

حيث X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات و a_{ij} ثوابت حيث $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ يعتبر وضع الدليلين لمعادلة المجاهيل وسيلة مقيدة نستخدمها لتحديد موضع المعامل في النظام. يشير الدليل الايسر للمعامل توجد a_{ij} الى المعادلة التي تقع فيها المعامل ويشير الدليل الايمن الى المجهول المضروب فيه. ولهذا فإن a_{n2} في المعادلة الاولى تضرب في المجهول x_2 يمكننا كتابة النظام الخطي على الشكل

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

ويسمى هذا الترتيب بالمصفوفة الممتدة للنظام.

مستطيل من الاعداد وتظهر المصفوفات فيه. ويستخدم لفظ مصفوفة في الرياضيات ليبدل على ترتيب مقامات عديدة.

لتوضيح ان المصفوفة الممتدة لنظام المعادلات.

$$X + 2Y + 2Z = 4$$

$$X + Y + 4Z = 6$$

$$2X - 6Y - 2Z = -2$$

هي

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & -6 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

ملاحظة:

عند بناء اي مصفوفة ممتدة يجب كتابة المجاهيل بنفس الترتيب في كل معادلة. الطريقة الاساسية لحل جديد له نفس الحل ولكن ابسط في الحل اي نظام لمعادلات خطية هي النظام المعطى بنظام يتم الحصول بشكل عام على النظام الجديد من سلسلة من الخطوات بواسطة تطبيق الانواع الثلاثة الآتية من عمليات حذف منتظم من المجاهيل.

1. ضرب المعادلة بأكملها بثابت غير صفري.

2. التبديل بين اي معادلتين.

3. اضافة مضاعف لصف آخر.

تسمى هذه العمليات بعمليات اولية على المصفوفة. سنوضح في المثال التالي كيفية استخدام هذه العمليات.

مثال:

حل النظام الخطي

$$X - 2Y + 3Z = 9$$

$$-X + 3Y = -4$$

$$2X - 5Y + 5Z = 17$$

الحل:

1. المصفوفة الممتدة للنظام

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right)$$

2. نجمع الصف الاول مع الصف الثاني. ونضرب الصف الاول بـ 2- ونجمعها مع الصف الثالث

نحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

3. نجمع الصف الثاني والثالث نحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

أي نحصل على

$$X - 2Y + 3Z = 9 \quad (12-1)$$

$$Y + 3Z = 5 \quad (13-1)$$

$$2Z = 4 \quad (14-1)$$

من معادلة (14-1) نحصل على

$$Z = 2$$

نعوض في (13-1) نحصل على

$$Y + 3(2) = 5 \Rightarrow Y = -1$$

الآن نعوض في (12-1) نحصل على

$$X - 2(-1) + 3(2) = 9 \Rightarrow X = 1$$

الفصل الثاني

بعض طرق حل الانظمة الخطية

سنتعرف في هذا الفصل على بعض طرق حل الانظمة الخطية وهناك طرق عديدة. سنقتصر على بعض انواع الطرق وهي طريقة كرامر وطريقة معكوس المصفوفة ثم طريقة كاوس جوردان للحذف.

(1 - 2) طريقة كرامر

لحل النظام $AX = b$ فإن

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

حيث A_i هي المصفوفة A مع استبدال العمود i مع المتجه b .

مثال:

اوجد حل النظام الخطي التالي باستخدام طريقة كرامر

$$2X_1 - 3X_2 = 8$$

$$3X_1 + X_2 = 1$$

الحل:

نكتب النظام بالشكل

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}}_b$$

$$\Rightarrow |A| = 2 + 9 = 11$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_1| = 8 + 3 = 11$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{11}{11} = 1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = 2 - 24 = -22$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-22}{11} = -2$$

(2 - 2) طريقة معكوس المصفوفة

ليكن $AX = b$ منظومة المعادلات الخطية مكونة من n من المعادلات والمتغيرات. في حال عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل نستخدم القانون التالي لحل النظام

$$X = A^{-1}b$$

حيث X قيم المتغيرات و A مصفوفة المعاملات وهي قابلة للانعكاس و b متجه القيم المطلقة.

مثال:

باستخدام معكوس المصفوفة جد حل النظام الخطي التالي

$$4X_1 - 2X_2 = 10$$

$$3X_1 - 5X_2 = 11$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -20 + 6 = -14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = -5$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -3$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = 2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = 4$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} C^T \\ &= \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/14 & -1/7 \\ 3/14 & -2/7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

نحسب قيم المتغيرات X_1, X_2 باستخدام القانون $X = A^{-1}b$

$$X = \begin{pmatrix} 5/14 & -1/7 \\ 3/14 & -2/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/14 - 11/7 \\ 30/14 - 22/7 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \frac{50}{14} - \frac{11}{7} = 2$$

$$X_2 = \frac{30}{14} - \frac{22}{7} = -1$$

(2 - 3) طريقة كاوس - جوردان للحذف

لحل النظام $AX = B$ بطريقة كاوس - جوردان نتبع الخطوات التالية:

1. نحول النظام الخطي الى المصفوفة الممتدة.
2. نحول المصفوفة الممتدة الى المصفوفة المحايدة.
3. عند تحويل المصفوفة الى مصفوفة محايدة نستخدم العمليات الصفية الاولى.
4. نصفر العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي.
5. نصفر العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي.
6. نجعل عناصر القطر الرئيسي تساوي 1.

مثال

جد حل النظام الخطي التالي

$$X - 6Y = -11$$

$$5X - Y = 3$$

الحل

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -11 \\ 5 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

نصفر العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي. حيث نضرب الصف الاول بـ 5- ونضيفه الى الصف

الثاني

$$R_2 \rightarrow -5R_1 + R_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -6 & -11 \\ 0 & 29 & 58 \end{array} \right)$$

الآن نضرب الصف الثاني بـ 6 ونضرب الصف الاول بـ 29 ونجمع

$$R_1 \rightarrow 6R_2 + 29R_1 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 29 & 0 & 29 \\ 0 & 29 & 58 \end{array} \right)$$

نجعل عناصر القطر الرئيسي يسوي 1.

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow \frac{1}{29}R_1 \\ R_2 &\rightarrow \frac{1}{29}R_2 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

نستخرج قيم X, Y

$$X = 1, \quad Y = 2$$

المصادر

- [1] اسماعيل بوقفه و عايش الهناودة ، المعادلات التفاضلية حلول وتطبيقات.
- [2] آية عبدالعالي علي زيدان ، مشروع بحث ، ليبيا جامعة سبها ، 2015 - 2016.
- [3] حسن مصطفى العويضي ، المعادلات التفاضلية الجزء الثاني ، مكتبة رشيد.
- [4] مجدي الطويل ، المصفوفات ، النظرية و التطبيق ، القاهرة ، 1417 هـ - 1996 م.