وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

جبر الزمر وجبر الحلقات

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

حنين

إشراف

م. جاسم محمد جواد

2025 - 2024

المحتويات

الفصل الأول : نظرية الزمر

الفصل الأول

نظرية الزمر

تعريف 1 - 1 (العملية الثنائية)

لتكن G مجموعة غير خالية ، نطلق على التطبيق $* : G \to G \times G$ بأنه عملية ثنائية على G.

ملاحظة

اذا كانت $*$ عملية ثنائية على مجموعة G سنكتب العلاقة بين عناصرها بالشكل $a * b$ بدل من $*(a, b)$ لغرض السهولة.

مثال 1 - 1

عملية الجمع الاعتيادية على مجموعة الاعداد الصحيحة والطبيعية والنسبية والحقيقية تمثل عملية ثنائية وكذلك عملية الضرب الاعتيادي.

مثال 1 - 2

لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ ، العملية $*$ معرفة على المجموعة X بالشكل

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	1
3	3	1	3

نلاحظ ان $*$ تمثل عملية ثنائية.

تعريف 1 - 2 (الانغلاق)

لتكن $*$ عملية ثنائية على المجموعة X ، المجموعة الجزئية A من G تسمى مغلقة تحت العملية $*$ اذا كان $a * b \in A$ لكل عنصرين $a, b \in A$.

مثال 1 - 3

نحن نعلم ان $+$ عملية الجمع الاعتيادي على مجموعة الاعداد الحقيقية ، نلاحظ ان $+$ عملية ثنائية مغلقة على مجموعة الاعداد الصحيحة لأن

$$a + b \in \mathbb{Z}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

تعريف 1 - 3 (النظام الرياضي)

هو مجموعة غير خالية G مع عملية ثنائية واحدة او اكثر معرفة عليه. ويرمز له بالرمز المرتب $(G, *, \#)$ او $(G, *)$.

تعريف 1 - 4 (العملية التجميعية)

ليكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً مع $*$ عملية ثنائية معرفة عليه ، يقال ان العملية $*$ تجميعية اذا حققت الشرط

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in G$$

مثال 1 - 4

لتكن $X = \{1, 2, 3\}$ ، العملية $*$ معرفة على المجموعة X بالشكل

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	2
3	3	3	3

نلاحظ ان $*$ تمثل عملية تجميعية.

مثال 1 - 5

لتكن $*$ عملية معرفة على $\mathbb{Z}$ كما يأتي : $a * b = a + b - 1$ لكل عنصرين $a, b \in \mathbb{Z}$ ، فإن $*$ عملية تجميعية.

تعريف 1 - 5 (العنصر المحايد)

ليكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً ، يقال ان النظام الرياضي $(G, *)$ يمتلك عنصراً محايداً بالنسبة للعملية الثنائية $*$ اذا وجد عنصر $e \in G$ بحيث ان

$$a * e = e * a = a, \quad \forall a \in G$$

مبرهنة 1 - 1

لتكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً بعنصر محايد فإن المحايد وحيد.

البرهان

لتكن e, e' عنصران محايدان بالنسبة للعملية $*$ اذن

$e * e' = e'$ لان e عنصر محايد.

$e * e' = e'$ لان e' عنصر محايد.

اذن $e = e'$. □

تعريف 1 - 6 (monoid)

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة ، اذا كانت تمتلك عنصر محايد فإنها تسمى (monoid).

تعريف 1 - 7 (المعكوس)

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بمحايد اذا كان $a \in G$ يحقق الخاصية : $a' * a = a * a' = e$ حيث ان $a' \in G$ ، فإن العنصر a' يسمى معكوس العنصر a بالنسبة للعملية $*$ ويرمز له بالرمز a^{-1}.

ملاحظة

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بعنصر محايد e فأن $e^{-1} = e$

مبرهنة 1 - 2

لتكن $(G, *)$ شبه زمرة بعنصر محايد وليكن $a \in G$ وله معكوس في G فأن المعكوس وحيد.

تعريف 1 - 8 (العملية الابدالية)

ليكن $(G, *)$ نظاماً رياضياً مع $*$ عملية ثنائية معرفة عليه ، يقال ان العملية $*$ ابدالية اذا حققت الشرط

$$a * b = b * a, \quad \forall a, b \in G$$

مثال 1 - 6

عمليتي الجمع والضرب الاعتياديتين على مجموعة الاعداد الحقيقية والصحيحة والنسبية $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ تمثل عمليات ثنائية ابدالية.

تعريف 1 - 9 (الزمرة)

لتكن $(G,*)$ شبه زمرة بعنصر محايد فأن G تسمى زمرة Group اذا كان كل عنصر فيها له معكوس بالنسبة للعملية الثنائية $*$. او نقول ان $(G,*)$ زمرة اذا تحققت الشروط التالية

$\boxed{1}$ مغلقة بالنسبة للعملية $*$ اي : $a*b \in G, \forall a,b \in G$.

$\boxed{2}$ العملية $*$ تجميعية : $a*(b*c)=(a*b)*c, \forall a,b,c \in G$.

$\boxed{3}$ G تمتلك عنصر محايد مثل e : $a*e=e*a=a, \forall a \in G$.

$\boxed{4}$ كل عنصر $a \in G$ يمتلك معكوس : $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

مثال 1 - 7

كل الانظمة الرياضية التالية تمثل زمرة

$$(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot), \quad (\mathbb{R}-\{0\},\cdot), \quad (\mathbb{Q},+), \quad (\mathbb{R},+), \quad (\mathbb{Z},+)$$

تعريف 1 - 10 (الزمرة الابدالية)

الزمرة $(G,*)$ تسمى زمرة ابدالية اذا كانت العملية $*$ عملية ثنائية ابدالية.

مثال 1 - 8

كل الانظمة الرياضية التالية تمثل زمرة ابدالية

$$(\mathbb{R}-\{0\},\cdot), \quad (\mathbb{Q},+), \quad (\mathbb{R},+), \quad (\mathbb{Z},+)$$

تعريف 1 - 11 (الزمرة المنتهية وغير المنتهية)

الزمرة $(G,*)$ تسمى زمرة منتهية اذا كانت المجموعة G منتهية. عدا ذلك تسمى الزمرة $(G,*)$ زمرة غير منتهية.

تعريف 1 - 12 (رتبة الزمرة)

لتكن $(G,*)$ زمرة منتهية ، نطلق على عدد عناصر المجموعة G اسم رتبة الزمرة ويرمز له بالرمز $O(G)$ اما اذا كانت المجموعة غير منتهية فتكون رتبتها غير منتهية ايضاً.