الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1- مقدمة

يعتبر ايجاد جذور المعادلة احدى اقدم الطرائق في الرياضيات حيث نشأ عن هذه الفكرة فرع كامل من الرياضيات سمي نظرية المعادلات، هنا سوف ندرس جزء بسيط منها. هذا الفصل يهتم بدراسة تلك الطرائق القابلة للتطبيق في ايجاد الجذور الحقيقية للمعادلة غير الخطية التي تكون بالشكل التالي

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

حيث $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة حقيقية و قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة I و في معظم الاحيان لا توجد طريقة صحيحة لحل هذا النوع من المعادلات و عليه لا يمكن ايجاد حل مضبوط لها. و لكن يمكن ايجاد جذور تقريبية ذات دقة معينة بإستخدام بعض الطرائق العددية المعروفة. الان سوف نتطلع على بعض المفاهيم الاساسية التي تساعدنا على الفهم الصحيح للموضوع.

تعريف 1 - 1 : المعادلات غير الخطية

هي المعادلة التي يكون فيها على الاقل حد واحد بحيث يكون معامل المجهول مجهول آخر. اي ان درجة المعادلة تكون اكبر من واحد. اي هذه المعادلة التي تحتوي على قوى مختلفة لــ x.
او دوال مثلثية او اسية أو لوغارتمية او ما يطلق عليها (Transcendental Functions).
بعض الامثلة على ذلك

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2 - 2x - 4 \\
f_2(x) &= \csc x + \sin x + 5 \\
f_3(x) &= \sqrt{x+9} \\
f_4(x) &= \log(x+3) \\
f_5(x) &= e^x
\end{aligned}$$

تعريف 1 - 2 : الحل المضبوط (Exact Solution)

القيمة العددية تدعى جذر (Root) للمعادلة (1.1) اذا عوضنا بدل x بالقيمة β و تبقى المعادلة صادقة اي ان $f(\beta) = 0$. على سبيل المثال ان 1 يكون جذراً للمعادلة

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$1^2 - 6(1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 6 - 6 = 0$$

تعريف 1 - 3 : القيمة التقريبية (Approximation Value)

ان القيمة α تدعى القيمة التقريبية للجذر γ اذا كانت القيمة المطلقة للدالة $f(\alpha)$ اصغر من ϵ و الفرق بين القيمتين α, γ اصغر من δ حيث ϵ, δ كميات صغيرة و موجبةو يمكن التعبير عن ذلك بالعلاقة الرياضية التالية

$$f(x) = 0 \iff (|f(\alpha)| < \epsilon) \wedge (|\alpha - \gamma| < \delta)$$

تعريف 1 - 4 : رتبة التقارب Order of Convergence

المتتابعة التكرارية $\{x_n : n \geq 0\}$ تقترب الى الجذر α بالرتبة $p \geq 1$ اذا كان

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p, \quad k \geq 0$$

لبعض قيم c الموجبة. فإذا كان $p = 1, 2, 3$ فإن المتتابعة تقترب الى الجذر بشكل علاقة خطية، تربيعية و تكعيبية على التوالي. يعرف c على انه معدل اقتراب x الى القيمة α

تعريف 1 - 5 : دليل الكفاءة (Efficiency Index)

دليل كفاءة الطريقة التكرارية المستخدمة لايجاد حل المعادلة غير الخطية يعرف بالصيغة

$$E.I. = p^{\frac{1}{m}}$$

حيث m تمثل عدد الدوال الحسابية في كل خطوة تكرارية.

تعريف 1 - 6 : اختيار القيمة الابتدائية (Choice of Initial Value)

ان اغلب الطرائق العددية المستخدمة في حل المعادلة (1.1) هي من انواع الطرائق التكرارية لذا فإننا نحتاج الى قيمة ابتدائية مثل x_0 لبدء الطريقة التكرارية و منها يمكن توليد متتابعة x_n من القيم التقريبية التي تكون اقرب الى الجذر α كلما زادت قيمة n. الاختيار الجديد للقيمة الابتدائية يؤثر على تقارب الطريقة بعدد اقل من العمليات التكرارية. ولضمان ذلك اعتماد عدة اساليب منها

1. اسلو ب الرسم البياني (الرسم المفرد و المزدوج)

2. اسلوب البيانات الجدولية

في النهاية نجد ان لا يوجد قانون او نظرية مباشرة لايجاد جذور المعادلة لذلك يتم اللجوء الى الطرق العددية و الجذور لهذه المعادلات وهذه الحلول تكون تقريبية و غير مضبوطة بالمقارنة لو كانت هناك حلول نظرية لهذه المعادلات وتعتمد طريقة الحل العددي بشكل عام على دقة الخطأ الذي يتم الوصول اليه. على اي حال يمكن اعتماد الطرائق العددية المعتمدة كأفضل وسيلة لايجاد الحل التقريبي خاصة اذا كانت المعادلات غير خطية ولا يمكن ايجاد حلول لها بالطرق النظرية وعلى هذا الاساس تحديدها عددا هي بالاساس يمكن تحديدها تقريباً بالرسم او الحساب التقريبي.

و اهم هذه الطرائق:

- طريقة نيوتن-رافسون
- طريقة تنصيف
- طريقة القاطع

و تعد اسرع الطرق من حيث الوصول الى قيمة الجذر وبالدقة المطلوبة هي نيوتن رافسون.

الفصل الثاني

الصيغة التكرارية الجديدة لحل المعادلات غير الخطية

1. مقدمة

في هذا الفصل نقترح ونقدم طريقة تكرارية معدلة ذات معلمة واحدة من خطوتين لحل المعادلات غير الخطية باستخدام مفكوك تايلر وبعض التقنيات العددية.

2. اشتقاق الطريقة التكرارية

من المعادلة $f(x) = 0$ و باستخدام مفكوك تايلر حول النقطة x_0 واهمال الحدود من الرتبة الثالثة فما فوق نحصل على

$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) = 0 \tag{2.1}$$

نسحب $(x - x_0)$ عامل مشترك من المعادلة (2.1) نحصل على

$$(x - x_0) \left[f'(x_0) + \frac{x - x_0}{2} f''(x_0) \right] = -f(x_0) \tag{2.2}$$

الان بحل المعادلة (2.2) بالنسبة الى x نحصل على

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0) + \frac{x - x_0}{2} f''(x_0)} \tag{2.3}$$

باعادة ترتيب المعادلة(2.3) للحصول على

$$x - x_0 = -\frac{2f(x_0)}{2f'(x_0) + (x - x_0) f''(x_0)} \tag{2.4}$$

الان من المعادلة (2.4) نحصل على المعادلة ادناه

$$x = x_0 - \frac{2f(x_0)}{2f'(x_0) + (x - x_0) f''(x_0)} \tag{2.5}$$

باستخدام صيغة شبيهة نيوتن $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)+wf(x_0)}$ نعوضها في المعادلة (2.5)

$$x = x_0 - \frac{2f(x_0)}{2f'(x_0) + \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0) + wf(x_0)}\right) f''(x_0)}$$

بعد تبسيط المعادلة نحصل على

$$x = x_0 - \frac{2f(x_0)(f'(x_0) + wf(x_0))}{2f'(x_0)(f'(x_0) + wf(x_0)) - f(x_0)f''(x_0)} \tag{2.6}$$

من الصيغة اعلاه يمكن الحصول على صيغة تكرارية جديدة ذات خطوة واحدة

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)[f'(x_n) + wf(x_n)]}{2f'(x_n)[f'(x_n) + wf(x_n)] - f(x_n)f''(x_n)} \tag{2.7}$$

نقوم بتحويل الصيغة التكرارية ذات الخطوة الواحدة الى ذات الخطوتين باستخدام المخمن المصحح لتحسين رتبة التقارب

$$y_n = x_n - \frac{f(x_0)}{f'(x_n) + wf(x_0)}$$

$$x_n = y_n - \frac{2f(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)]}{2f'(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)] - f(y_n)f''(y_n)} \tag{2.8}$$

من اجل تنفيذ هذه الصيغة يتعين علينا حساب المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ مما قد يخلق بعض المشاكل عند حساب المشتقات من الرتب العليا. للتغلب على هذه المشكلة وايضاً لتحسين الكفاءة لصيغتنا التكرارية نقرب هذه المشتقة باستخدام الفروقات المقسمة المعرفة بالشكل

$$f''(y_n) = \frac{f'(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = A(x_n, y_n) \tag{2.9}$$

الان بتعويض (2.9) في (2.8)، الصيغة التكرارية الجديدة تصبح

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)]}{2f'(y_n)[f'(y_n) + wf(y_n)] - f(y_n)A(x_n, y_n)} \tag{2.10}$$

حيث

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + wf(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad w \in \mathbb{R} \qquad (2.11)$$

3. تحليل رتبة التقارب

مبرهنة: لتكن $a \in I$ جذراً للمعادلة غير الخطية (1.1) و ليكن x_0 حل ابتدائي مناسب للجذر α. فإن الصيغة التكرارية المعدلة تقترب تقارباً من الرتبة الخامسة على الاقل.

البرهان: ليكن α جذراً للمعادلة (1.1) حيث $(f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0)$ باستخدام مفكوك تايلر حول النقطة α نجد

$$\begin{aligned} f(x_n) = &\ f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}f^{(3)}(\alpha)(x_n - \alpha)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\alpha)(x_n - \alpha)^4 \\ &+ \frac{1}{5!}f^{(5)}(\alpha)(x_n - \alpha)^5 + \frac{1}{6!}f^{(6)}(\alpha)(x_n - \alpha)^6 + \cdots \\ &+ O((x_n - \alpha)^{11}) \\ = &\ f'(\alpha)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + \cdots + O(e_n^{11})] \end{aligned}$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha)[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + \cdots + O(e_n^{10})]$$

حيث $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{\frac{1}{k!}}; k = 1, 2, 3, \ldots$ و $e_n = x_n - \alpha$

من التعريف $f(y_n), f'(y_n), f'(y_n)^2$ و $A = (x_n, y_n)$

$$f(y_n) = \frac{f'(y_n - x_n)}{(y_n - x_n)} = A(x_n, y_n)$$

نفرض ان

$$y_n = \alpha + (c_2 + w)e_n^2 + (-w^2 - 2wc_2 - 2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + O(e_n^{10})$$

الفصل الثالث

النتائج العددية

1. مقدمة

في هذا الفصل نظهر كفاءة وقوة اداء الطريقة التكرارية الجديدة (ZKM) من خلال بعض الامثلة العددية مقارنة بالطرق المعطاة على النحو التالي

طريقة نيوتن (NM)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

طريقة الكلاسيكية (HM)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

كل الحسابات نفذت بصيغة الدقة المضاعفة عند $0.5 = \epsilon$ باستخدام برنامج .Maple ولتحقيق التقارب في الخوارزمية اعتمدنا شرطي التوقف

1. $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
2. $|f(x_{n+1})| < \epsilon$

جدول (3 - 1):

$f(x) = 2x^3 - 5x - 2, \quad x_0 = 1$				
Method	**IT**	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$f(x_{n+1})$
NM	8	2.85078	9.97220×10^{-13}	1.98810×10^{-34}
HM	6	2.85078	1.86308×10^{-33}	-4.03983×10^{-99}
ZKM	4	0.35078	5.15939×10^{-40}	4.67777×10^{-239}

جدول (3 - 2):

$f(x) = x^2 - e^x + 3x + 2, \quad x_0 = 2.0$				
Method	**IT**	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$f(x_{n+1})$
NM	19	2.99223	2.94158×10^{-26}	-7.75741×10^{-51}
HM	7	2.99223	1.81427×10^{-35}	2.40134×10^{-104}
ZKM	4	-0.60899	2.37478×10^{-45}	1.21578×10^{-224}

جدول (3 - 3):

$f(x)=\cos(x)-x, \quad x_0=1.7$				
Method	**IT**	x_n	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$	$f(x_{n+1})$
NM	5	0.73909	2.34491×10^{-10}	-2.031971×10^{-112}
HM	5	0.73909	2.25412×10^{-44}	-2.22041×10^{-132}
ZKM	4	0.73909	5.67243×10^{-56}	-5.13844×10^{-278}

جدول (3 - 4):

$f(x)=x^3-e^{-x}, \quad x_0=3.5$				
Method	**IT**	x_n	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$	$f(x_{n+1})$
NM	9	0.77288	6.54706×10^{-20}	8.94918×10^{-39}
HM	6	0.77288	4.43261×10^{-26}	7.46517×10^{-77}
ZKM	5	0.77288	5.95606×10^{-45}	2.46351×10^{-221}

2. الاستنتاجات

في هذا لبحث تم تطوير عائلة تكرارية جديدة ذات الخطوتين من الرتبة الخامسة لحل المعادلات غير الخطية التربيعية بالاعتماد على مفكوك تايلر وبعض التقنيات العددية. نلاحظ من خلال النتائج العددية في الجداول اعلاه ان الطريقة التكرارية الجديدة (ZKM) ذات المعلمة الواحدة اعطت نتائج جيدة من حيث عدد التكرارات وسرعة التقارب مقارنة بطريقة نيوتن - رافسون (NM) وطريقة هالي (HM) حيث اعطت الطريقة التكرارية الجديدة ZKM افضل النتائج بإختيار قيمة المعلمة (0.5).

المراجع