الرياضيات المتقطعة

فاطمة كفاء

اشراف
د. مضر عباس مجيد

مقدمة

مقدمة

الرياضيات المتقطعة هي فرع من فروع الرياضيات التي تهتم بدراسة الكيانات المنفصلة والمحدودة، مثل الأعداد الصحيحة والمجموعات والمنطق. تختلف الرياضيات المتقطعة عن الرياضيات التحليلية التي تركز على الكيانات المستمرة كالزمن أو المسافة. وتعتبر الرياضيات المتقطعة حجر الزاوية في العديد من التطبيقات العملية في علوم الكمبيوتر، نظرية المعلومات، والذكاء الصناعي، حيث تُستخدم في معالجة البيانات واتخاذ القرارات وتنظيم المعلومات.

الرياضيات المتقطعة هي فرع من فروع الرياضيات التي تهتم بدراسة الكيانات المنفصلة والمحدودة، مثل الأعداد الصحيحة والمجموعات والمنطق. تختلف الرياضيات المتقطعة عن الرياضيات التحليلية التي تركز على الكيانات المستمرة كالزمن أو المسافة. وتعتبر الرياضيات المتقطعة حجر الزاوية في العديد من التطبيقات العملية في علوم الكمبيوتر، نظرية المعلومات، والذكاء الصناعي، حيث تُستخدم في معالجة البيانات واتخاذ القرارات وتنظيم المعلومات.

من بين المواضيع الأساسية في الرياضيات المتقطعة، نجد نظرية البيان و الجبر البولياني، اللتين تلعبان دورًا محوريًا في بناء أساسيات العديد من التطبيقات الحديثة.

الفصل الاول

الجبر البولياني

تعريف

نفرض B مجموعة غير خالية معرف عليها عمليتان ثنائيتان $(+)$ و $(.)$ و عملية أحادية يرمز لها بالرمز $(^{-})$ و معها عنصران مختلفان هما 0 و 1.
عندئذ نسمي B جبراً بوليانياً اذا تحققت المسلمات التالية حيث x, y, z عناصر من B

(1) قوانين التبديل

$$\forall x, y \in B \Rightarrow \begin{cases} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases}$$

(2) قوانين التوزيع

$$\forall x, y, z \in B \Rightarrow \begin{cases} x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \end{cases}$$

نقول أن العنصر (1) هو عنصر محايد بالنسبة للعملية $(\cdot)$.

(3) قوانين الاتمام

$$\forall x \in B \exists \bar{x} : \begin{cases} x + \bar{x} = \bar{x} + x = 1 \\ x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = 0 \end{cases}$$

(4) قوانين التطابق (العنصر المحايد)

$$\forall x \in B \Rightarrow x + 0 = 0 + x = x$$

نقول أن العنصر (0) هو عنصر محايد بالنسبة للعملية $(+)$.

$$\forall x \in B \Rightarrow x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

تعريف

يعرف الجبر البولياني بقيمتين على مجموعة من عنصرين $B = \{0, 1\}$ حيث العمليتان الثنائيتان $(+)$ و $(\cdot)$ و عملية الاتمام معطاة كما يلي:

تعريف

يعرف الجبر البولياني بقيمتين على مجموعة من عنصرين $B = \{0, 1\}$ حيث العمليتان الثنائيتان $(+)$ و $(\cdot)$ و عملية الاتمام معطاة كما يلي:

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

تعريف

نقول أن المتغير x انه متغير بولياني اذا كان يأخذ قيمة من المجموعة $B = \{0,1\}$ فقط.
أي أن اذا كانت قيمته 0 أو 1.
من التعريف السابق يكون قد تحدد لدينا المجال المقابل. الآن نحدد المجال
نأخذ الضرب الديكارتي للمجموعة B بنفسها n من المرات أي $\underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{n \text{ من المرات}}$

نحصل على B^n حيث

$$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B; 1 \leq i \leq n\}$$

الدالة البولياني

تعريف

هي تعبير جبري يتألف من المتغيرات الثنائية و الثوابت 0 و 1 و العمليات المنطقية، مجاله المجموعة B^n و مجاله المقابل B. و نحدد درجة الدالة حسب قيمة n.

تعريف

هي تعبير جبري يتألف من المتغيرات الثنائية و الثوابت 0 و 1 و العمليات المنطقية، مجاله المجموعة B^n و مجاله المقابل B. و نحدد درجة الدالة حسب قيمة n.

مثال

الدالة $F_1 = x + \bar{y} + \bar{x} \cdot y$ هي دالة بوليانية من الدرجة الثانية لأنها يقرن كل زوج (x, y) من B^2 بـ $x + \bar{y} + \bar{x} \cdot y$

أما الدالة $F_2 = x + \bar{y} \cdot z$ هي دالة من الدرجة الثالثة لأنها تقرن كل ثلاثي (x, y, z) من B^3 بـ $x + \bar{y} \cdot z$

الفصل الثاني

نظرية البيان

تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

ملاحظات

تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

ملاحظات

1. كل سهم له عقدة او عقدتين مرتبطتين تسمى أطراف السهم Endpoints.

تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

ملاحظات

1. كل سهم له عقدة او عقدتين مرتبطتين تسمى أطراف السهم Endpoints.
2. يسمى السهم الذي له عقدة واحدة مرتبطة به بالحلقة Loop.

تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

ملاحظات

1. كل سهم له عقدة او عقدتين مرتبطتين تسمى أطراف السهم Endpoints.
2. يسمى السهم الذي له عقدة واحدة مرتبطة به بالحلقة Loop.
3. تسمى الاسهم التي تتشارك بنفس النهايات بالاسهم المتوازية Parallel.

تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

ملاحظات

1. كل سهم له عقدة او عقدتين مرتبطتين تسمى أطراف السهم Endpoints.
2. يسمى السهم الذي له عقدة واحدة مرتبطة به بالحلقة Loop.
3. تسمى الاسهم التي تتشارك بنفس النهايات بالاسهم المتوازية Parallel.
4. تسمى العقدتين المرتبطتين بالسهم على انهما متجاورتين Adjacent.

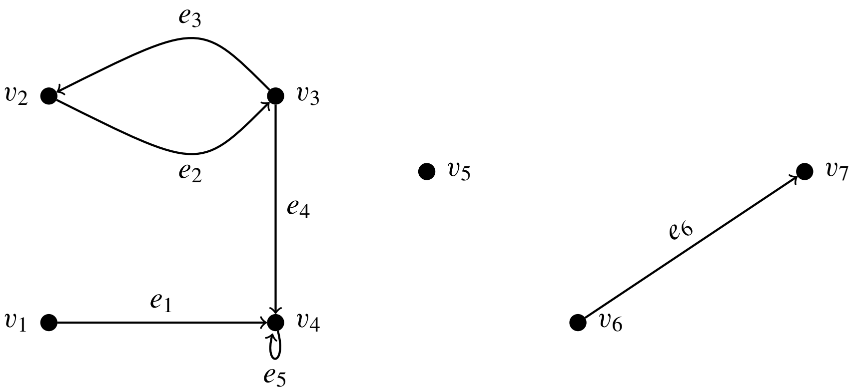
تعريف

البيان G عبارة عن ثنائي مرتب (V, E) حيث V هي مجموعة غير خالية منتهية من العقد Vertcies و E هي مجموعة الاسهم Edges.

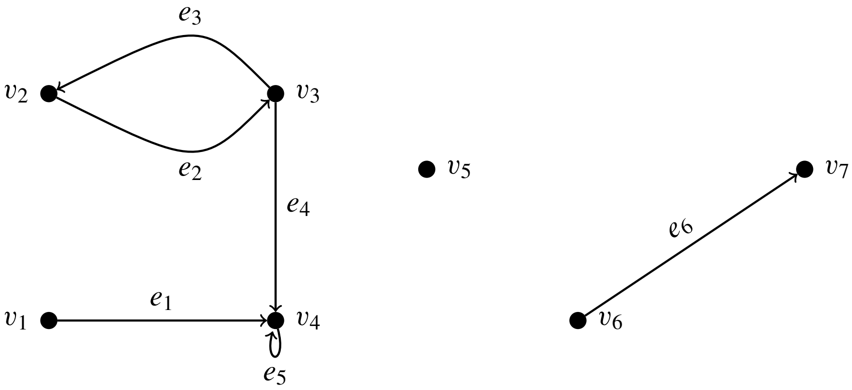
ملاحظات

1. كل سهم له عقدة او عقدتين مرتبطتين تسمى أطراف السهم Endpoints.
2. يسمى السهم الذي له عقدة واحدة مرتبطة به بالحلقة Loop.
3. تسمى الاسهم التي تتشارك بنفس النهايات بالاسهم المتوازية Parallel.
4. تسمى العقدتين المرتبطتين بالسهم على انهما متجاورتين Adjacent.
5. تسمى العقدة التي ليس لها اسهم واردة بالمعزولة Isolated.

مثال



مثال



في الشكل اعلاه السهم e_5 مثال على الحلقة و e_2, e_3 أسهم متوازية و العقدة v_5 مثال على العقدة المعزولة و العقدتان v_6, v_7 مثال على العقد المتجاورة.

البيان البسيط

ليكن G بيان، يسمى G بيان بسيط اذا كان لا يحتوي أية حلقات أو أسهماً متوازية. في البيان البسيط نرمز للسهم المحدد بالطرفين v, w بــــ $\{v, w\}$

البيان البسيط

ليكن G بيان، يسمى G بيان بسيط اذا كان لا يحتوي أية حلقات أو أسهماً متوازية. في البيان البسيط نرمز للسهم المحدد بالطرفين v, w بـــ $\{v, w\}$

مثال

لتكن $V = \{u, v, wx\}$ مجموعة عقد و لدينا سهمان احدهما $\{u, v\}$، عدد الاسهم الممكنة من اربعة عقد هي 6 اسهم كما يلي

$$\{u, v\}, \{u, w\}, \{u, x\}, \{v, w\}, \{v, x\}, \{w, x\}$$

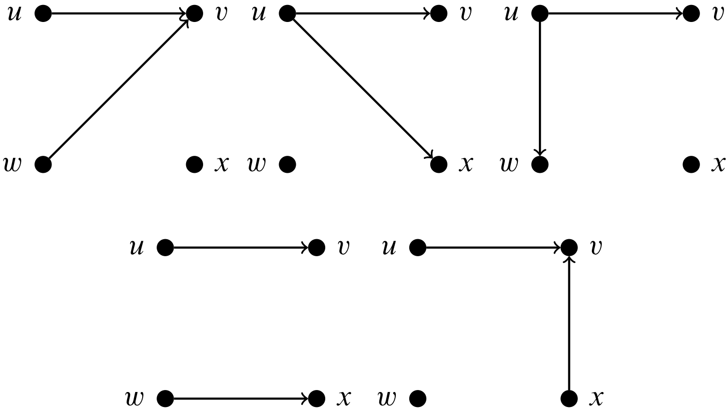
واحد منها هو $\{u, v\}$ بالتالي السهم الثاني يمكن ان يكون واحد من الاسهم الخمسة المتبقية

خواص البيان

وهي كالآتي

خواص البيان

وهي كالآتي



البيان الموجه

البيان $G = (V, E)$ حيث V مجموعة غير خالية من العقد و E هي مجموعة الاسهم الموجهة، حيث كل سهم يرتبط بزوج مرتب من العقد ندعوها طرفي السهم Endpoints.

البيان الموجه

البيان $G = (V, E)$ حيث V مجموعة غير خالية من العقد و E هي مجموعة الاسهم الموجهة، حيث كل سهم يرتبط بزوج مرتب من العقد ندعوها طرفي السهم Endpoints.

مثال

في البيان الموجه اذا وجد سهم من v الى w فليس من الضروري ان يوجد سهم من w الى v اي لدينا زوج مرتب $\{v, w\}$ بمعنى $\{w, v\} \neq \{v, w\}$ نسمي العقدة v بالذيل tail و w بالرأس head

مصفوفة الجوار

ليكن لدينا البيان غير الموجه $G = (G, V)$ المكون من مجموعة العقد $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ نعرف مصفوفة الجوار للبيان G على انها المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات البعد $n \times n$ المعرفة على النحو التالي a_{ij} يساوي عدد الاسهم التي تربط العقدة v_i بالعقدة v_j.

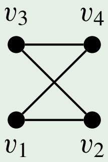
تمثيل البيانات

مصفوفة الجوار

ليكن لدينا البيان غير الموجه $G = (G, V)$ المكون من مجموعة العقد $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ نعرف مصفوفة الجوار للبيان G على انها المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ ذات البعد $n \times n$ المعرفة على النحو التالي a_{ij} يساوي عدد الاسهم التي تربط العقدة v_i بالعقدة v_j.

مثال

اوجد مصفوفة الجوار للبيان التالي



الحل

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$