author1hash=a73eed4e316eca77c9a0f097018eb748family=, familyi=., given= , giveni=.. author1hash=2487f26e9c65f8164fac74ff9c7ec8f2family=, familyi=., given= , giveni=.... author1hash=3aa208ff8aebb2957f0c66f4b55da9e6famil familyi=., given= , giveni=.... author1hash=df573e4c8e9e9bc3da0f9d9a2865ce0cfam familyi=., given= , giveni=.... author1hash=016867a37daf96153ecf00ab96b0e0a4fam familyi=., given= , giveni=.......... author1hash=27b9f11ba8b8ced5f65ed5a4353da474 familyi=., given= , giveni=...... author1hash=9e10a3d0c3d4402138295d08b8a01597f familyi=., given= , giveni=........... author1hash=8eb76621171467e8d6dfa0834e608fa familyi=., given= , giveni=......

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات - للدراسة المسائية

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بمتسلسلات القوى

Solving Ordinary Differential Equations by Power Series

بحث تخرج تقدم به الى

قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

منى وليد عباس

اشراف

م. د. مهند موسى عيسى

1446 هـ

2025 م

الآية

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمٰنِ الرَّحيمِ

وَآخِرُ دَعواهُم أَنِ الحَمدُ لِلَّهِ رَبِّ العالَمينَ ﴿١٠﴾

سورة يونس

ما نجحنا وما علونا وما تفوقنا إلا برضاه الحمدلله الذي ما اجتزنا درباً ولا تخطينا جهداً إلا بفضله وإليه ينسب الفضل بعد مسيرة دراسية دامت سنوات حملت في طياتها الكثير من الصعوبات والتعب ها انا اليوم اقف على عتبة تخرجي اقطف ثمار تعبي وارفع قبعتي بكل فخر وامتنان. فالحمدلله حباً وشكراً وامتناناً،ما كنت افعل هذا لو لا فضل الله فالحمدالله على البدء وعلى الختام...

الإهداء

اهدي هذا النجاح لنفسي اولاً،

ثم الى كل من سعى معي لإتمام هذا المسيرة دمتم لي سنداً لا عمر له والى من كالحوا في صمت وشموخ من اجل ان اشق طريقي الى من افهموني ان الحياة جهد وكفاح

(اهلي)

الى شريك ايامي الذي امدني بالقوة وأمن بي ودعمني في كافة الاوقات لأصل ما انا عليه الان

(زوجي)

إلى من أناروا لنا دروب العلم والمعرفة، إلى أساتذتنا الأفاضل الذين لم يبخلوا علينا بعلمهم وتوجيهاتهم، والذين كانوا لنا خير قدوة في طريق التعلم

شكر و تقدير

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين. يسرني أن أتقدم بالشكر

الجزيل و الثناء الجميل إلى **د. مهند موسى عيسى** كان له الأثر الطيب في إنجاز هذا البحث ولو لا ملاحظاته وإنجازه لما خرج البحث بالصورة النهائية فجزاه الله خير الجزاء.

واتقدم بخالص شكري وتقديري لجميع أساتذتي في قسم الرياضيات - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة بدون استثناء.

المحتويات

المستخلص

في هذا البحث سوف نقدم طريقة متسلسلات القوى لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية. حيث في الفصل الاول سوف نقدم اهم المفاهيم الاساسية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية مثل تعريف المعادلة التفاضلية الاعتيادية و رتبة المعادلة و تعريف حل المعادلة ...

وفي الفصل الثاني سوف نقدم بعض الامثلة لكيفية حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية بإستخدام متسلسلات القوى.

مقدمة

تُعَدُّ المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODEs) من الأدوات الأساسية في الرياضيات التطبيقية والعلوم الهندسية، حيث تُستخدم لنمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية، والهندسية، والاقتصادية، والبيولوجية. فهي تصف العلاقات بين الدوال ومشتقاتها، مما يساعد في فهم كيفية تغيّر الأنظمة الديناميكية مع الزمن أو عبر متغيرات أخرى. وتبرز أهمية حل هذه المعادلات في مجالات متعددة مثل تحليل الدوائر الكهربائية، ميكانيكا الموائع، علم الفلك، ونظرية التحكم.

من بين الطرق المتاحة لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية، تأتي طريقة متسلسلات القوى كأداة فعالة، خاصة عندما لا يمكن إيجاد الحل بصيغة مغلقة باستخدام الطرق التحليلية التقليدية مثل طريقة الفصل أو عامل التكامل. تعتمد هذه الطريقة على تمثيل الحل كمتسلسلة قوى حول نقطة معينة، ثم تحديد معاملات هذه المتسلسلة من خلال التعويض في المعادلة التفاضلية.

تتميز طريقة متسلسلات القوى بأنها توفر حلولًا دقيقة في شكل موسّع يمكن استخدامه لإيجاد تقديرات عددية للحل، كما أنها تُعطي تمثيلًا للحل حتى في نقاط يصعب فيها استخدام طرق أخرى، مثل النقاط الشاذة العادية. وتُستخدم هذه الطريقة في حل المعادلات ذات المعاملات المتغيرة التي لا يمكن حلها بالطرق التقليدية، كما تُعد الأساس لطريقة فروبينياس التي تعالج الحالات التي تحتوي على نقاط شاذة مفردة.

في هذا السياق، سنتناول في هذا البحث منهجية حل المعادلات التفاضلية باستخدام متسلسلات القوى، بدءًا من التعريف بمفهوم المتسلسلات، مرورًا بالخطوات العملية لتطبيق الطريقة، وانتهاءً ببعض التطبيقات المهمة التي تبرز فاعليتها.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1 - 1 المعادلة التفاضلية [diff_eqs_sols_apps]

هي علاقة بين المتغير المعتمد والمتغير المستقل (المتغيرات المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية اعتيادية إذا كان المتغير المعتمد دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي إلا على مشتقات عادية. حيث الشكل العام لها

$$F(x, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

حيث $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$ المشتقة من الرتبة n للمتغير y بالنسبة إلى x.

مثال 1 - 1

ليكن x هو المتغير المستقل و y هو المتغير المعتمد. فالعلاقات التالية تمثل معادلات تفاضلية اعتيادية

$$\frac{dy}{dx} + y = 3\sin x \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{2}$$

1 - 2 رتبة المعادلة التفاضلية [diff_eqs_sols_apps]

إذا كانت المشتقة النونية $y^{(n)}$ هي أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية الاعتيادية قيل أن هذه المعادلة من الرتبة n.

مثال 1 - 2

المعادلة (1) هي معادلة اعتيادية من الرتبة الأولى. أما المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية اعتيادية من الرتبة الثانية.

1 - 3 درجة المعادلة التفاضلية [diff_eqs_sols_apps]

هي الاس المرفوع إليها أعلى مشتقة تظهر في المعادلة التفاضلية ، وقبل تحديد درجة المعادلة التفاضلية يجب وضعها في أبسط صورة قياسية صحيحة من حيث المشتقات.

مثال 1 - 3

المعادلة

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right) + x^2y^3 = 0$$

هذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية و الدرجة الثالثة. أما المعادلة

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{1/2} + 3\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) + xy = 0$$

قبل تحديد درجة المعادلة يجب وضعها على صورة خالية من الجذور. بإجراء عمليات بسيطة نلاحظ أن

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(3\frac{d^2y}{dx^2} + xy\right)^2$$

$$\Rightarrow 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 6xy\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2y^2 - 1 = 0$$

و هذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الثانية

1 - 4 المعادلة التفاضلية الخطية [diff_eqs_sols_apps]

هي المعادلة الخطية في المتغير المعتمد و مشتقاته جميعاً. الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = Q(x)$$

أو

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^{(i)} = Q(x)$$

حيث المتغير المعتمد y و جميع مشتقاته مرفوعة إلى الاس واحد و لا توجد حواصل ضرب مشتركة في ما بينها ، و الدوال $Q(x)$ و $p_i(x)$ هي دوال للمتغير المستقل x خطية أم غير خطية لا تؤثر على خطية المعادلة التفاضلية.

ملاحظة

من تعريف المعادلة التفاضلية الخطية يمكننا القول أي معادلة تفاضلية فيها المتغير المعتمد y أو أحد مشتقاته مرفوعة إلى اس غير الواحد أو وجدنا حاصل ضرب في ما بينها. سوف نطلق عليها معادلة تفاضلية غير خطية.

مثال 1 - 4

لدينا المعادلة

$$x^2y'' + xy' + y = \cos x$$

معادلة تفاضلية اعتيادية خطية. أما المعادلة

$$yy' + y'' = e^{3x}$$

هذه المعادلة التفاضلية غير خطية لوجود حاصل الضرب yy'. وأيضا لدنيا

$$y' + x\sqrt[4]{y} = \cot x$$

وهذه كذلك ليست خطية فيها المتغير المعتمد y مرفوع إلى الاس $1/4$ (غير الواحد).

1 - 5 حل المعادلة التفاضلية [diff_eqs_pt1]

تسمى الدالة $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ إذا كانت

1. قابلة للاشتقاق n من المرات
2. تحقق المعادلة التفاضلية أي أن $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))$

مثال 1 - 5

أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت.

الحل

نشتق العلاقة ونقوم بتعويضها في المعادلة التفاضلية

$$y = c \sin x \Rightarrow y' = c \cos x \Rightarrow y'' = -c \sin x$$

الآن نعوض

$$y'' + y = -c \sin x + c \sin x = 0$$

□

1 - 6 الحل العام و الحل الخاص [diff_eqs_pt1]

الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية.

أما الحل الخاص هو أي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشتمل على أي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه احيانا بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة.

مثال 1 - 6

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية.

ونجد أن بعض الحلول الخاصة على الصور

$$y = 3 + 5e^{2x}, \quad y = 5 - 2e^{3x}, \quad y = e^{2x} + e^{3x}$$

1 - 7 المتتابعات و المتسلسلات [mathanal]

تعريف 1 - 7 - 1

لتكن X مجموعة ما، نسمي متتابعة من X، كل دالة u من $\mathbb{N}$ الى X ، نرمز لذلك بالرمز (u_n) حيث صورة العدد n بواسطة الدالة u ويسمى بالحد العام للمتتابعة $(u_n)_{n\geq 0}$

مثال

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \to u_n = 2n + 1$$

تعريف 1 - 7 - 2

لتكن (u_n) متتابعة عددية، ان العبارة

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3}$$

تسمى متسلسلة عددية و الاعداد $u_1, u_2, \ldots$ تسمى بحدود المتسلسلة. اما u_n يسمى بالحد العام للمتسلسلة.

نعتبر المجاميع الجزئية

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_2 = u_1 + u_2 \\ \vdots \\ S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \end{cases}$$

(S_n) تسمى متتابعة المجاميع الجزئية. اذا كانت الغاية

$$\lim_{n \to \infty} S_n \tag{4}$$

موجودة و منتهية ، أي أن $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ فإننا نسميها مجموع المتسلسلة (3). ونكتب

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \tag{5}$$

تعريف 1 - 7 - 3

في الرياضيات، متسلسلة القوى (في متغير واحد) هي متسلسلة لانهائية تأخذ الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots \tag{6}$$

حيث c يسمى مركز المتسلسلة، في الكثير من الحالات المركز يساوي صفراً $c = 0$ وفي هذه الحالة نسمي المتسلسلة بمتسلسلة ماكلورين وتأخذ الشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{7}$$

1 - 8 بعض متسلسلات القوى للدوال

1. المتسلسلة الهندسية

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad (|x| < 1)$$

2. الدالة الاسية

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad (|x| < \infty)$$

3. الدوال المثلثية

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \quad (|x| < \infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad (|x| < \infty)$$

4. الدوال الزائدية

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \quad (|x| < \infty)$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad (|x| < \infty)$$

الفصل الثاني

طريقة متسلسلات القوى لحل المعادلات التفاضلية

2 - 1 مقدمة

سوف نقدم في هذا الفصل طريقة لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية الخطية بطريقة متسلسلات القوى. حيث يمكن حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة بطريقة عامة. وذلك بفرض الحل هو متسلسلة قوى x ، ثم نعوض عن y ومشتقاتها بالمعادلة المعلومة ونجد معاملات قوى x. وسنوضح ذلك بالامثلة التالية

2 - 2 بعض الامثلة التطبيقية [diff_eqs_methods]

مثال 2 - 1

جد الحل المتسلسل للمعادلة التفاضلية $y' = y$

الحل

نفرض ان حل المعادلة التفاضلية هي متسلسلة القوى التالية

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ولأجل تحديد المعاملات $c_1, c_2, \ldots$ نجد

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$$

بالتعويض عن y, y' في المعادلة الاصلية نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

وبتساوي المعاملات المتشابهة نحصل على

$$(n+1) c_{n+1} = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

عندما $n = 0$

$$c_1 = c_0$$

عندما $n = 1$

$$2c_2 = c_1 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{2}$$

عندما $n = 3$

$$3c_3 = c_2 \Rightarrow c_3 = \frac{c_2}{3} \Rightarrow c_3 = \frac{c_0}{6}$$

ان حل المعادلة التفاضلية هو

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_0 x + \frac{c_0}{2!}x^2 + \frac{c_0}{3!}x^3 + \cdots \\ &= c_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= c_0 e^x \end{aligned}$$

حيث c_0 من الممكن ان يأخذ اي قيمة حقيقية

مثال 2 - 2

جد الحل المتسلسل للمعادلة التفاضلية $y'' + y$

الحل

نفرض ان الحل هو متسلسلة بالشكل التالي

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n$$

$$y'' = 1\cdot 2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n$$

بالتعويض عن y, y'' في المعادلة الاصلية وبجمع الحدود المشابهة

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n\right]x^n = 0$$

اذن نحصل على العلاقة التكرارية

$$c_{n+2} = \frac{-c_n}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

عندما $c = 0$

$$c_2 = \frac{-c_0}{2}$$

عندما $n = 1$

$$c_3 = \frac{-c_1}{6}$$

عندما $n = 2$

$$c_4 = \frac{-c_2}{12} \Rightarrow c_4 = \frac{c_0}{24}$$

عندما $n = 3$

$$c_5 = \frac{-c_3}{20} \Rightarrow c_5 = \frac{c_1}{120}$$

وعلى هذا فإن حل المعادلة التفاضلية هو

$$y = c_0 + c_1x - \frac{c_0}{2}x^2 - \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_0}{24}x^4 + \frac{c_1}{120}x^5 + \cdots$$

$$= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

حيث c_0, c_1 ثوابت اختيارية

مثال 2 - 3

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

الحل

نفرض ان الحل هو متسلسلة بالشكل التالي

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$y'' = 1 \cdot 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n$$

نعوض عن y, y', y'' في المعادلة الاصلية نحصل على

$$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^{n+2}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) c_{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6 c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^n = 0$$

$$2c_2+6c_3x-2c_1x+6c_0+6c_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\big[(n+1)(n+2)c_{n+2}-(n(n-1)+2n-6)c_n\big]x^n = 0$$

$$(2c_2+6c_0)+(6c_3+4c_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\big[(n+1)(n+2)c_{n+2}-(n^2+n-6)c_n\big]x^n = 0$$

$$(2c_2+6c_0)+(6c_3+4c_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\big[(n+1)(n+2)c_{n+2}-(n+3)(n-2)c_n\big]x^n = 0$$

بالمساواة مع الطرف الآخر نحصل على

$$\begin{cases} c_2 = -3c_0 \\ c_3 = \dfrac{-2c_1}{3} \\ c_{n+2} = \dfrac{(n+3)(n-2)}{(n+1)(n+2)}c_n, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

عندما $n = 2$

$$c_4 = 0$$

عندما $n = 3$

$$c_5 = \frac{6}{(4)(5)}c_3 = -\frac{c_1}{5}$$

عندما $n = 4$

$$c_6 = \frac{(7)(2)}{(5)(2)}c_4 = 0$$

اذن الحل النهائي

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x - 3c_0x^2 + \frac{2}{3}c_1x^3 + \frac{1}{5}c_1x^5 + 0 + \cdots \\ &= c_0(1-3x^2) + c_1\left(x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right) \end{aligned}$$

حيث c_0, c_1 ثوابت اختيارية.

مثال 2 - 4

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - \frac{y}{1+x^2} = 0$$

الحل

نفرض ان الحل هو متسلسلة بالشكل التالي

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$$

$$y'' = 1 \cdot 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n$$

يمكن كتابة المعادلة الاصلية بالشكل

$$(1+x^2) y'' - y = 0$$

حيث ان $1 + x^2 \neq 0$ الان بتعويض عن y'', y في المعادلة، نحصل على

$$(1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$2c_2 + 6c_3x - c_0 - c_1x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n = 0$$

$$(2c_2 - c_0) + (6c_3 - c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n - \sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n = 0$$

$$(2c_2 - c_0) + (6c_3 - c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n(n-1)-1)c_n\right]x^n = 0$$

$$(2c_2 - c_0) + (6c_3 - c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n^2-n-1)c_n\right]x^n = 0$$

بمساواة المعاملات ، نحصل على

$$2c_2 - c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{2}, \quad 6c_3 - c_1 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{c_1}{6}$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n^2-n-1)c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{1+n-n^2}{(n+1)(n+2)}c_n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

عندما $n = 2$

$$c_4 = \frac{-1}{12}c_2 = \frac{-1}{12}\frac{1}{2}c_0 = \frac{-1}{24}c_0$$

عندما $n = 3$

$$c_5 = \frac{-5}{20}c_3 = \frac{-5}{20}\frac{1}{6}c_1 = \frac{-5}{120}c_1$$

عندما $n = 4$

$$c_6 = \frac{-11}{30}c_4 = \frac{-11}{30}\frac{-1}{24}c_0 = \frac{11}{720}c_0$$

عندما $n = 5$

$$c_7 = \frac{-19}{42}c_5 = \frac{-19}{42}\frac{-5}{120}c_1 = \frac{95}{2880}c_1$$

اذن الحل العام يكون

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + \cdots$$

$$y = c_0 + c_1x + \frac{1}{2}c_0x^2 + \frac{1}{6}c_1x^3 - \frac{1}{24}c_0x^4 - \frac{5}{120}c_1x^5 + \frac{11}{720}c_0x^6 + \frac{95}{2880}c_1x^7 + \cdots$$

$$y = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{11}{720}x^6 + \cdots\right] + c_1\left[x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{120}x^5 + \frac{95}{2880}x^7 + \cdots\right]$$

حيث c_0, c_1 ثوابت اختيارية.

الاستنتاجات

من خلال دراسة طريقة متسلسلات القوى لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية، توصلنا إلى عدة استنتاجات مهمة تتعلق بكفاءة هذه الطريقة ودورها في إيجاد الحلول في الحالات التي يصعب فيها استخدام الطرق التحليلية الأخرى. يمكن تلخيص أهم هذه الاستنتاجات كما يلي:

1. قابلية التطبيق على معادلات متنوعة: تُعد طريقة متسلسلات القوى أداة قوية لحل المعادلات التفاضلية التي تحتوي على معاملات متغيرة، والتي قد لا تكون قابلة للحل باستخدام الطرق التقليدية مثل الفصل أو التكامل المباشر.
2. تمثيل الحل بشكل دقيق: من خلال التعبير عن الحل كسلسلة لا نهائية من الحدود، يمكن الحصول على تمثيل دقيق للحل في منطقة التقارب، مما يسهل إيجاد تقديرات عددية محسنة عند الحاجة.
3. القدرة على التعامل مع النقاط الشاذة العادية: يمكن استخدام متسلسلات القوى لحل المعادلات التي تحتوي على نقاط شاذة عادية، وهو ما يجعلها مفيدة في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية حيث تتغير معاملات المعادلة التفاضلية.

المصادر