وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة البصرة
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات

كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني

مقدم إلى قسم الرياضيات كلية التربية للعلوم الصرفة جامعة البصرة

وهو جزء من متطلبات نيل شهادة بكالوريوس علوم الرياضيات

من قبل الطالبة

زهراء مؤيد قاهر

إشراف

م.م. ايمان عزيز عبدالصمد

2025 - 2024

الإهداء

إلى الكهف الحصين وغياث المضطر المستكين وملاذ المؤمنين ومنقذ العالمين حضرة جناب الموقر صاحب الزمان (عج).

إلى من بها أعلوا وعليها ارتكز ، إلى الينبوع الذي لا يمل من العطاء ، والدعاء المستجاب (والدتي العزيزة).

إلى والدي المبجل أطال الله في عمره وأمده بالصحة والعافية.

إلى خير سند (اخوتي واخواتي).

الى اكثر استاذة الهمتني وحببتني بالتخصص... كلمة الشكر لا توفيها، كانت بصمة جميلة في حياتي اسأل الله كل التوفيق لها ... الى (م.م. ايمان)

المحتويات

الخلاصة

درسنا في هذا المشروع كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني. في الفصل الاول عرفنا بعض المفاهيم الاساسية وبالاضافة الى تعريف كثيرات حدود شيبشيف من النوع الاول وبعض خواصها. وفي الفصل الثاني وضحنا كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني وبعض خواصها وكذلك تعرفنا على العلاقات الرياضية التي تربط بين النوع الاول والنوع الثاني.

المقدمة

كانت مسألة التقريب محط اهتمام الكثير من العلماء في الرياضيات والفيزياء. وتعد القدرة على استبدال دالة معطاة بأخرى ابسط منها مثل كثيرات الحدود من الامور المفيدة جداً في مسائل الرياضيات التي توصف ظواهر معينة في الفيزياء والكيمياء وغيرها، حيث توضع شروط وقيود تكون في معظم الاحيان شروطاً صعبة ليس من السهل معها الحصول على الحلول الدقيقة ولا تطابق قيك هذه الدالة المعطاة ولكن اما ان تكون قريبة منها بالقدر الكافي او انها تتحكم بدرجة التقريب.

في الرياضيات حدوديات شيبشيف (**chebyshev polynomials**) هي حدوديات يعود اسمها الى عالم الرياضيات الروسي بافنوتي شيبشيف في عام (1953) (مؤسس علم التقريب المنتظم) هي متتالية من حدوديات متعامدة ذات اهمية اساسية في العديد من العلوم وفروع الرياضيات ونظرية التقريب وتطبيقاتها. وساهم الكثير من الباحثين باستخدام كثيرات الحدود المتعامدة في حل مسائل قيم حدية ومسائل قيم ابتدائية المتمثلة بمعادلات تفاضلية اعتيادية غير خطية والتي لها تطبيقات عملية عديدة في الهندسة التفاضلية والفيزياء اللا خطية والعلوم التطبيقية وغيرها. سنهتم بشكل اساسي بدراسة النوع الثاني لكثيرات حدود شيبشيف.

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

1 - 1 كثيرات الحدود

كثيرة الحدود: عبارة عن تعبيرات رياضية تتكون من متغيرات ومعاملات وعمليات الجمع والطرح والضرب والاسس غير السالبة.

1 - 2 الدوال الزوجية و الدوال الفردية

الدالة الزوجية: يقال للدالة $f(x)$ دالة زوجية اذا تحقق ان $f(-x) = f(x)$ لكل x ويكون منحني الدالة الزوجية متماثل مع المحور y.

الدالة الفردية: يقال للدالة $f(x)$ دالة فردية اذا تحقق ان $f(-x) = -f(x)$ لكل x ويكون منحني الدالة الزوجية متماثل مع نقطة الاصل $(0, 0)$.

1 - 3 الدوال المتعامدة

لنفرض الدالتين $h_1(x)$ و $h_2(x)$ المعرفتين و القابلتين للتفاضل و التكامل على الفترة $[a, b]$ اذا كان

$$\int_a^b w(x)h_1(x)h_2(x)\,dx = 0$$

حيث ان $w(x) > 0$ هي دالة الوزن القابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ فإنه يقال أن الدالة $h_1(x)$ متعامدة على الدالة $h_2(x)$ في الفترة $[a, b]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x)$.

1 - 4 التقريب

التقريب في الرياضيات هو عملية استبدال عدد حقيقي بقيمة قريبة منه ولكن أبسط أو أسهل في التعامل معها، مع الحفاظ على دقة معقولة حسب الحاجة. يتم ذلك لتسهيل العمليات الحسابية أو لتقريب النتيجة إلى أقرب عدد يمكن استخدامه بسهولة.

1 - 5 الأخطاء

الخطأ: تنتج الاخطاء نتيجة لعدم حصولنا على القيمة الحقيقية فالخطأ من جهة النظر الر ياضية هو الفرق بين القيمة المحسوبة و القيمة الحقيقية الدقيقة.

أخطاء القطع: أن الآلات الحاسبة الالكترونية لا تدور الاعداد غالبا و انما تقطعها الى مرتبة معينة. و ينتج هذا الخطأ عند بتر عدد ذو مراتب عشرية عديدة الى عدد ذو مراتب عشرية اقل و بدون تدوير.

1 - 6 كثيرة حدود شيبشيف من النوع الاول

تعرف كثيرات حدود شيبشيف من النوع الاول بالشكل التالي

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x); \quad n \geq 0, x \in [-1, 1] \tag{1}$$

$$T_0(x) = \cos(0) = 1$$ (كثيرة حدود شيبشيف من الدرجة 0)

$$T_1(x) = \cos(\cos^{-1}x) = x$$ (كثيرة حدود شيبشيف من الدرجة 1)

العلاقة التكرارية

الان لايجاد العلاقة التكرارية لكثيرة حدود شيبشيف نضع

$$\theta = \cos^{-1}x \iff x = \cos\theta$$

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \tag{2}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta \tag{3}$$

بجمع المعادلتين (2) و (3) نحصل على

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

$$T_{n+1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - T_{n-1}(x)$$

$$T_{n+1(x)} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{4}$$

بعض خواص كثيرة شيبشيف

1. بما ان $-1 \leq \cos x \leq 1$ فإن $-1 \leq T_n(x) \leq 1$
2. درجة كثيرة حدود شيبشيف هي n.
3. بما ان $\cos x$ هي دالة زوجية فإن $T_n(x) = T_{-n}(x)$ و كذلك $T_{2n}(x) = T_{2n}(-x)$ و $T_{2n+1}(-x) = -T_{2n+1}(x)$ وعليه فإن جميع كثيرات حدود شيبشيف $T_{2n}(x)$ هي دوال زوجية اما $T_{2n+1}(x)$ فهي دوال فردية اي $T_n(-x) = (-1)^{-n}T_n(x)$

4. كثيرة حدود شيبشيف متعامدة على المجال $[-1, 1]$ بالنسبة لدالة الوزن $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. التركيب :(compositiion) $T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x)$
6. جذور كيثرة حدود شيبشيف هي $r = 1, 2, \ldots, n$, $\quad x_r = \left[\cos\left(\dfrac{2r-1}{2n}\pi\right)\right]$

برهان خاصية (4)

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x)\, dx$$

نفرض

$$x = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(x) \Rightarrow d\theta = \frac{1}{1-x^2}\, dx$$

$$x = -1 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$x = 1 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{\pi} T_n(\cos\theta) T_m(\cos\theta)\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(n+m)\theta \cos(n-m)\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m} - \frac{\sin(n-m)\theta}{n-m}\right]_0^{\pi} \\
&= \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \pi & ; n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; n = m \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

برهان خاصية (5)

$$\begin{aligned} T_{nm}(\cos\theta) &= \cos(nm\theta) \\ &= \cos(n(m\theta)) \\ &= T_n(\cos(m\theta)) \\ &= T_n(T_m(x)) \end{aligned}$$

برهان خاصية (6)

$$\begin{aligned} T_n\left(\frac{2r-1}{2n}\pi\right) &= \cos\left(n\frac{2r-1}{2n}\pi\right) \\ &= \cos\left[(2r-1)\frac{\pi}{2}\right] \\ &= \cos\frac{\pi}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

الفصل الثاني

كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني مع بعض خواصها

2 - 1 المقدمة

كثيرة حدود شيبشيف هي عبارة عن متتالية من كثيرات حدود متعامدة وهي اربعة انواع كثيرة حدود من النوع الاول و يرمز لها $T_n(x)$ و كثيرات حدود من النوع الثاني و يرمز لها بالرمز $U_n(x)$ وكثيرة حدود من النوع الثالث ويرمزلها $V_n(x)$ و كثيرة حدود من النوع الرابع و يرمز لها $W_n(x)$. حيث النوع الاول والنوع الثاني تم اشتقاقها من حلول المعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0 \tag{1}$$

n عدد صحيح أكبر من الصفر. و هذه المعادلة لها حلان مستقلان هما

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x) \qquad -1\le x\le 1, \quad n\ge 0 \tag{2}$$

$$U_n(x)=\sin(n\cos^{-1}x) \qquad -1\le x\le 1, \quad n\ge 0 \tag{3}$$

و هنا سوف نهتم بدراسة النوع الثاني فقط

2 - 2 التعريف و العلاقة التكرارية

تعريف 2 - 1

كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني $U_n(x)$ تعرف كالاتي

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad n\ge 0 \quad -1\le x\le 1$$

حيث $x=\cos\theta \iff \theta=\cos^{-1}(x)$

الآن لايجاد الصيغة التكرارية لكثيرة حدود شيبشيف نضع

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) &= \frac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin[(n+1)\theta+\theta]}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(n+1)\theta\cos\theta+\sin\theta\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \tag{4}$$

$$U_{n-1}(x)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin[(n+1)\theta + \theta]}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta\cos\theta - \sin\theta\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{5}$$

حيث استخدمنا المتطابقات المثلثية (دالة الجيب لمجموع و طرح زاويتين). الآن بجمع المعادلتين (4) و (5) نحصل على

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{2\sin(n+1)\theta\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= 2\cos\theta \cdot \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \\ &= 2xU_n(x) \end{aligned}$$

بالتالي

$$\boxed{U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{6}$$

نلاحظ

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = 2x$$

و هذه اول سبع حدود لكثيرات حدود شيبشيف بأستخدام العلاقة التكرارية (6)

$$U_2(x) = 2xU_1(x) - U_0(x) = 2x(2x) - 1 = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 2xU_2(x) - U_1(x) = 2x(4x^2 - 1) - 2x = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 2xU_3(x) - U_2(x) = 2x(8x^3 - 4x) - (4x^2 - 1) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} U_5(x) &= 2xU_4(x) - U_3(x) \\ &= 2x(16x^4 - 12x^2 + 1) - (8x^3 - 4x) \\ &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_6(x) &= 2xU_5(x) - U_4(x) \\ &= 2x(32x^5 - 32x^3 + 6x) - (16x^4 - 12x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$U_7(x) = 2xU_6(x) - U_5(x)$$
$$= 2x(64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1) - (32x^5 - 32x^3 + 6x)$$
$$= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 80x$$

2 - 3 التعبير عن الدوال x^n بكثيرات حدود شيبشيف

يمكن التعبير عن أي دالة أسية x^n لأي متعددة حدود بإستخدام كثيرات حدود شيبشيف بالشكل التالي

$$1 = U_0(x)$$
$$x = \frac{1}{2}U_1(x)$$
$$x^2 = \frac{1}{4}[U_0(x) + U_2(x)]$$
$$x^3 = \frac{1}{8}[U_3(x) + 2U_1(x)]$$
$$x^4 = \frac{1}{16}[U_4(x) + 3U_2(x) + 2U_0(x)]$$
$$x^5 = \frac{1}{32}[U_5(x) + 4U_3(x) + 5U_1(x)]$$

مثال 2 - 2

عبر عن الدالة $f(x) = x^4 - x^3 + 3x + 2$ باستخدام كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني

الحل

بإستخدام كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني نستطيع التعبير عنها

$$f(x) = \frac{1}{16}[U_4(x) + 3U_2(x) + 2U_0(x)] - \frac{1}{8}[U_3(x) + 2U_1(x)]$$
$$+ \frac{3}{2}U_1(x) + 2U_0(x)$$

$$= \frac{1}{16}U_4(x) + \frac{3}{16}U_2(x) - \frac{1}{8}U_3(x)$$

$$+\left[\frac{-2}{8}+\frac{3}{2}\right]U_1(x)+\left[\frac{2}{16}+2\right]U_0(x)$$

$$=\frac{1}{16}U_4(x)-\frac{1}{8}U_3(x)+\frac{3}{16}U_2(x)+\frac{5}{4}U_1(x)+\frac{17}{8}U_0(x)$$

مثال 2 - 3

عبر عن الدالة e^x للحد من الدرجة الثالثة بإستخدام متسلسلة تايلور و كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني

الحل

الحدود لغاية الدرجة الثالثة بإستخدام متسلسلة تايلور

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

بإستخدام كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني نستطيع التعبير عنها

$$e^x=U_0(x)+\frac{1}{2}U_1(x)+\frac{1}{2}\frac{1}{4}[U_0(x)+U_2(x)]+\frac{1}{6}\frac{1}{8}[2U_1(x)+U_3(x)]$$

$$=U_0(x)+\frac{1}{2}U_1(x)+\frac{1}{8}U_0(x)+\frac{1}{8}U_2(x)+\frac{1}{24}U_1(x)+\frac{1}{48}U_3(x)$$

$$=\frac{9}{8}U_0(x)+\frac{13}{24}U_1(x)+\frac{1}{8}U_2(x)+\frac{1}{48}U_3(x)$$

مثال 2 - 4

عبر عن الدالة $\sin x$ للحد من الدرجة الخامسة بإستخدام متسلسلة تايلور و كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني

الحل

الحدود لغاية الدرجة الخامسة بإستخدام متسلسلة تايلور

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

بإستخدام كثيرات حدود شيبشيف من النوع الثاني نستطيع التعبير عنها

$$\sin x=\frac{1}{2}U_1(x)-\frac{1}{6}\frac{1}{8}[2U_1(x)+U_3(x)]+\frac{1}{120}\frac{1}{32}[U_5(x)+5U_1(x)+4U_3(x)]$$

$$=\frac{1}{2}U_1(x)-\frac{1}{24}U_1(x)-\frac{1}{48}U_3(x)+\frac{1}{3840}U_5(x)+\frac{1}{768}U_1(x)+\frac{1}{960}U_3(x)$$

$$= \frac{353}{768}U_1(x) - \frac{19}{960}U_3(x) + \frac{1}{3840}U_5(x)$$

بعض خواص كيثرة شيبشيف من النوع الثاني

1. $U_n(-x) = (-1)^{n+1}U_n(x)$
2. جذور كثيرة شيبشيف من النوع الثاني هي $x_r = \cos\left(\frac{r}{n+1}\pi\right), r = 1, 2, \ldots, n$
3. كثيرة حدود شيبشيف من النوع الثاني متعامدة في المجال $[-1, 1]$ بالنسبة لدالة الوزن $w = \sqrt{1-x^2}$ حيث

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}U_n(x)U_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ; n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & ; n = m \end{cases}$$

برهان خاصية (1)

$$\begin{aligned} U_n(-x) &= \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}(-x)]}{\sin(\cos^{-1}(-x))} \\ &= \frac{\sin[(n+1)(\pi - \cos^{-1}x)]}{\sin(\pi - \cos^{-1}x)} \\ &= \frac{-\sin[(n+1)\cos^{-1}x]\cos(n+1)\pi}{-\sin(\cos^{-1}x)} \\ &= (-1)^{n+1}U_n(x) \end{aligned}$$

برهان خاصية (2)

$$\begin{aligned} U_n\left(\frac{r}{n+1}\pi\right) &= \frac{\sin\left[(n+1)\frac{r}{n+1}\pi\right]}{\sin\left(\frac{r}{n+1}\pi\right)} \\ &= \frac{\sin(r\pi)}{\sin\left(\frac{r}{n+1}\pi\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

برهان خاصية (3)

نفرض

$$x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta d\theta$$

$$x = -1 \Rightarrow \theta = \pi, \quad x = 1 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}U_n(x)U_m(x)\,dx \\
&= \int_{\pi}^{0} \sin\theta U_n(\cos\theta)U_m(\cos\theta)(-\sin\theta)\,d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(n-m)\theta - \cos(n+m+2)\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} - \frac{\sin(n+m+2)\theta}{n+m+2}\right]_0^{\pi} \\
&= \begin{cases} 0 & ;n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & ;n = m \end{cases}
\end{aligned}$$

2 - 4 العلاقة بين النوع الاول و النوع الثاني

بما أن

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

فإن

$$T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

و بالتالي

$$T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x) = 2\sin(n\theta)\sin\theta = 2\sin^2\theta\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

إذن

$$T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x) = 2(1 - x^2)U_{n-1}(x) \tag{7}$$

بطرح المعادلتين (4) و (5)

$$U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x) = \frac{2\sin\theta\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} = 2\cos(n+1)\theta$$

إذن

$$U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x) = 2T_{n+1}(x) \tag{8}$$