2.1. Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a convex set, with $x_1, \cdots x_k \in C$, and let $\theta_1, \cdots \theta_k \in \mathbb{R}$ satisfy $\theta_i \geq 0$, $\theta_1 + \cdots +_\theta k = 1$. Show that $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$. (The definition of convexity is that this holds for $k = 2$; you must show it for arbitrary k.) Hint. Use induction on k.

Si $k = 2$, esto es simplemente la definición de convexidad. Suponga que se cumple para un cierto $k \geq 2$ que, para cualesquiera $x_1, x_2, ...x_k \in C$, si $\theta_1, ...\theta_k$ son reales no negativos cuya suma es 1, se tiene que $\theta_1 x_1 + \cdots \theta_k x_k \in C$. Demostraremos que esta propiedad se cumple para $k+1$. Tomemos $x_1, x_2, ...x_{k+1} \in C$ y $b_1, ...b_{k+1}$ reales no negativos cuya suma sea 1. Los reales $\theta_i = b_i/(b_1 + \cdots b_k)$ con i variando entre 1 y k, son no negativos y su suma es 1, por lo tanto por hipótesis de inducción, $\theta_1 x_1 + \cdots \theta_k x_k \in C$. Además, como C es convexo, $(1 - b_{k+1})(\theta_1 x_1 + \cdots \theta_k x_k) + b_{k+1}x_{k+1} \in C$. Ahora observe que para todo $1 \leq i \leq k$, $(1 - b_{k+1})\theta_i = \dfrac{b_i(b_1 + \cdots b_k)}{b_1 + \cdots b_k} = b_i$, de manera que $(1-b_{k+1})(\theta_1 x_1 + \cdots \theta_k x_k) + b_{k+1}x_{k+1} = b_1 x_1 + \cdots b_{k+1}x_{k+1} \in C$. Esto era justamente lo que se quería demostrar.

2.3. Midpoint convexity. A set C is midpoint convex if whenever two points a, b are in C, the average or midpoint $(a+b)/2$ is in C. Obviously a convex set is midpoint convex. It can be proved that under mild conditions midpoint convexity implies convexity. As a simple case, prove that if C is closed and midpoint convex, then C is convex.

En primer lugar, mostraremos que si $x_1, x_2 \in C$, y B es un número racional entre 0 y 1 de la forma $A/2^n$, con $n \geq 0$(no necesariamente simplificado), entonces $Bx_1 + (1-B)x_2 \in C$. Haremos inducción sobre n. El caso $n = 0$ es trivial. Suponga que esto se tiene para un cierto n, y mostraremos que se tiene para $n+1$. Considere $B = A/2^{n+1}$, con $0 \leq A \leq 2^{n+1}$. Si $0 \leq A \leq 2^n$, entonces por hipótesis de inducción,$\dfrac{A}{2^n}x_1 + (1 - \dfrac{A}{2^n})x_2$, pero como C es convexo para puntos medios, $\dfrac{1}{2}(\dfrac{A}{2^n}x_1 + (1 - \dfrac{A}{2^n})x_2) + \dfrac{1}{2}x_2 = Bx_1 + (1-B)x_2 \in C$. Ahora, si $2^n \leq A \leq 2^{n+1}$, existe un $0 \leq a \leq 2^n$ tal que $A = a + 2^n$. Por hipótesis, $\dfrac{a}{2^n}x_1 + (1 - \dfrac{a}{2^n})x_2 \in C$. Ahora, como C es convexo para puntos medios, $\dfrac{1}{2}(\dfrac{a}{2^n}x_1 + (1 - \dfrac{a}{2^n})x_2) + \dfrac{1}{2}x_1 \in C$. Pero observe que $(1/2)\frac{a}{2^n} + 1/2 = \frac{a+2^n}{2^{n+1}} = \frac{A}{2^{n+1}}$, de modo que $\frac{1}{2}(\frac{a}{2^n}x_1 + (1 - \frac{a}{2^n})x_2) = \frac{A}{2^{n+1}}x_1 + (1 - \frac{A}{2^{n+1}})x_2 = Bx_1 + (1-B)x_2 \in C$, que es lo que queríamos demostrar. Esto completa la inducción.

Ahora, dado $0 \leq \theta \leq 1$, para mostrar que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$ si $x_1, x_2 \in C$, haremos lo siguiente. Construimos una sucesión de fracciones entre 0 y 1 de la forma $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ de manera que converjan a θ(esto se puede hacer, por ejemplo, considerando su expansión en base 2). Por el lema anterior, $b_n x_1 + (1-b_n)x_2 \in C$ para todo n. Ahora, haciendo $n \to \infty$, vemos que $b_n x_1 + (1-b_n)x_2 \to \theta x_1 + (1-\theta)x_2$. Pero como C es cerrado, toda sucesión de puntos de C que converja, convergerá a punto de C, es decir que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$ y entonces C es convexo, como queríamos demostrar.

2.4. Show that the convex hull of a set S is the intersection of all convex sets that contain S. (The same method can be used to show that the conic, or affine, or linear hull of a set S is the intersection of all conic sets, or affine sets, or subspaces that contain S.)

Como $Conv(S)$ es en sí mismo un conjunto convexo que contiene a S, bastará probar que si H es cualquier conjunto convexo que contiene a S, entonces $Conv(S) \subseteq H$. Sabemos que $Conv(S)$ está compuesto por las combinaciones lineales de los elementos de S, donde en esas combinaciones todos los escalares son positivos y su suma es 1. Pero en el ejercicio 2.1 se demostró que cualquiera de estas combinaciones debe estar dentro de cualquier conjunto convexo que contenga todos los elementos de S, esto es, dicho de otra forma, que $Conv(S) \subseteq H$, lo cual es lo que se quería demostrar.

2.5. What is the distance between two parallel hyperplanes $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2\}$?

Como el vector a es normal a ambos hiperplanos, para encontrar la distancia entre ambos hiperplanos, podemos tomar puntos x_1 y x_2 de H_1 y H_2 respectivamente, considerar el vector que los une$(x_2 - x_1)$ y luego calcular la magnitud de la proyección de dicho vector sobre a, la cual será la distancia buscada D. Entonces, $D = ||Proy_a(x_2 - x_1)|| = ||\dfrac{a \cdot (x_2 - x_1)}{||a||^2} a|| = \dfrac{|a \cdot (x_2 - x_1)|}{||a||} = \dfrac{|b_2 - b_1|}{||a||}$, el cual es el valor buscado.

2.8. Which of the following sets S are polyhedra? If possible, express S in the form $S = \{x | Ax \preceq b, Fx = g\}$.

(a) $S = \{y_1 a_1 + y_2 a_2 | -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, where $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$.

(b) $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, 1^T x = 1, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i = b_1, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i^2 = b_2\}$, where $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ and $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, x^T y \leq 1$ for all y with $||y||_2 = 1\}$.

(d) $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0,\ x^T y \leq 1$ for all y with $\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i| = 1\}$.

2.8a) Para mostrar que S es un poliedro, mostraremos que es el casco convexo del conjunto $H = \{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_2 - v_1, -v_1 - v_2\}$. Tomemos cualquier combinación convexa v de H, y veamos que está en S. Entonces $v = \theta_1(v_1 + v_2) + \theta_2(v_1 - v_2) + \theta_3(v_2 - v_1) + \theta_4(-v_1 - v_2)$ donde $\theta_i \geq 0$ y $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 1$. Luego $v = (\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4)v_1 + (\theta_1 + \theta_3 - \theta_2 - \theta_4)v_2$, pero observe que como la suma de los θ_i es 1, debemos tener que $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$ y $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$ se encuentran entre -1 y 1, es decir, $v \in S$.

Ahora, tomemos un elemento w de S y veamos que se puede escribir como combinación convexa de elementos de H. Luego, $w = y_1 v_1 + y_2 v_2$, con $|y_1|, |y_2| \leq 1$. Debemos encontrar $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 no negativos cuya suma sea 1, y tales que $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = y_1$ y $\theta_1 + \theta_3 - \theta_2 - \theta_4 = y_2$. Esto se reduce a encontrar $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ no negativos cuya suma sea a lo más 1, y tales que $\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{y_1 + 1}{2}$ y $\theta_1 + \theta_3 = \dfrac{y_2 + 1}{2}$. Sea $m = min\{\dfrac{y_1 + 1}{2}, \dfrac{y_2 + 1}{2}\}$. Nótese que $0 \leq m \leq 1$. Si $m = \dfrac{y_1 + 1}{2}$, tomemos $\theta_1 = m$, $\theta_2 = 0$ y $\theta_3 = \dfrac{y_2 + 1}{2} - m$, y si $m = \dfrac{y_2+1}{2}$, $\theta_1 = m$, $\theta_3 = 0$ y $\theta_2 = \dfrac{y_1+1}{2} - m$. En ambos casos los θ_i son no negativos y su suma no excede 1, como se quería. En conclusión, $w \in conv(H)$, es decir que $S = conv(H)$ y S es un poliedro.

2.8b) Observe que S se puede describir de la siguiente manera: $S = \{-Ix \preceq 0, Ax = b\}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Concluimos que S es un poliedro.

2.8c) S no es un poliedro. Para ver esto, veamos en primer lugar, que $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, ||x|| \leq 1\}$. Primero, observe que claramente $0 \in S$. Si $x \neq 0$, entonces se debe tener que $x^T x/||x|| = ||x|| \leq 1$. Para ver que esto es suficiente, observe que para todo $||y|| = 1$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $x^T y \leq ||x|| ||y|| = ||x|| \leq 1$. Esto es lo que se quería demostrar.

Suponga, por contradicción, que S es un poliedro. Entonces debe ser la unión del casco convexo de k vectores con el casco cónico de n vectores, pero por lo demostrado anteriormente S es acotado, luego S no puede contener cascos cónicos, es decir, debe ser el casco convexo de un conjunto de k vectores distintos $v_1, v_2, ...v_k$. Si $S = Conv(v_1, v_2, ...v_k)$ entonces claramente debemos tener que $Conv(v_1, v_2, ...v_k)$ contiene infinitos vectores de norma 1. Pero se mostrará que en el mejor de los casos, solo hay k vectores de norma 1 en $Conv(v_1, v_2, ...v_k)$. Esto nos permitirá llegar a la contradicción deseada. En primer lugar, note que la norma de cada uno de los v_i debe ser a lo más 1.

Suponga que tenemos una combinación convexa de $m \leq n$ vectores $\theta_1 v_1 + \cdots \theta_m v_m$ cuya norma es 1. Claramente, podemos exigir que todos los θ_i sean distintos de cero. Ahora, observe que $||\theta_1 v_1 + \cdots \theta_m v_m|| \leq \theta_1 ||v_1|| + \cdots + \theta_m ||v_m|| \leq \theta_1 + \cdots + \theta_m = 1$, luego para que la segunda desigualdad sea una igualdad, debemos tener que $\theta_i ||v_i|| = \theta_i$ para todo i, es decir que $||v_i|| = 1$. Para todo i. Ahora, para que la primera desigualdad sea una igualdad, los vectores $\theta_1 v_1, ...\theta_m v_m$ deben ser colineales, es decir que existen $k_1, ...k_m$ escalares tales que $\theta_i v_i = k_i \theta_1 v_1$ para todo i. De manera que si $m \geq 2$, en particular, $||\theta_2 v_2|| = \theta_2 = k_2 \theta_1$. De donde $\theta_2 v_2 = \theta_2 v_1$, pero esto es una contradicción puesto que $\theta_2 \neq 0$ y $v_1 \neq v_2$. Concluimos que $m = 1$ y por lo tanto, los únicos vectores de $Conv(v_1, ..v_k)$ que pueden ser de norma 1 son los mismos $v_1, v_2, ...v_k$. Esto prueba que como mucho hay k vectores de norma 1 en $Conv(v_1, v_2, ...v_k)$, como queríamos.

2.8d) En primer lugar, veamos que $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \in [0, 1], 1 \leq i \leq n\}$. Para ver esto, observe que si $(x_1, ...x_n)$ tiene todas sus coordenadas entre 0 y 1, entonces si $M = max\{x_1, ...x_n\}$ observe que $M \leq 1$ y además, para todo $|y_1| + \cdots |y_n| = 1$ se tiene que $|x_1 y_1 + \cdots x_n y_n| \leq x_1|y_1| + \cdots x_n|y_n| \leq M(|y_1| + \cdots |y_n|) = M \leq 1$, luego $(x_1, ...x_n) \in S$. Para ver la implicación contraria, observe que si $(x_1, ...x_n) \in S$, entonces si y es el vector que tiene un 1 en la i-ésima componente donde se encuentra la mayor componente de x y cero en el resto, entonces $x^T y = x_i \leq 1$, luego todas las componentes de x deben ser no negativas y a lo más uno. Esto se puede expresar en términos de la desigualdad vectorial $Ax \preceq b$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$ y

$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ \cdots \\ -1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, S es un poliedro.

2.9. Voronoi sets and polyhedral decomposition. Let $x_0, \cdots, x_K \in \mathbb{R}^n$. Consider the set of points that are closer (in Euclidean norm) to x0 than the other x_i, i.e., $V = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0||_2 \leq ||x - x_i||_2, \ i = 1, \cdots, K\}$. V is called the Voronoi region around x0 with respect to $x_1, \cdots, x_K$.

(a) Show that V is a polyhedron. Express V in the form $V = \{x | Ax \preceq b\}$.

2.9a) Note que la condición de que $||x - x_0||_2 \leq ||x - x_i||_2$ es equivalente a que $(x - x_0)(x - x_0)^T \leq (x - x_i)(x - x_i)^T$. Desarrollando la expresión de la izquierda y usando que $x_0^T x = x^T x_0$, vemos que $x^T x - 2x_0^T x + x_0^T x_0 \leq x^T x -$

$2x_i^T x + x_i^T x_i$. Esta última desigualdad se puede reescribir como $2(x_i - x_0)^T x \leq x_i^T x_i - x_0^T x_0$. Como estas desigualdades deben tenerse para todo i, vemos que $x \in V$ si y sólo si $Ax \preceq b$, donde $A = \begin{bmatrix} x_1^T - x_0^T \\ x_2^T - x_0^T \\ \cdots \\ x_K^T - x_0^T \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} x_1^T x_1 - x_0^T x_0 \\ x_2^T x_2 - x_0^T x_0 \\ \cdots \\ x_K^T x_n - x_0^T x_0 \end{bmatrix}$.
Por lo tanto V es un poliedro.

2.10. Solution set of a quadratic inequality. Let $C \in \mathbb{R}^n$ be the solution set of a quadratic inequality, $C = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Ax + b^T x + c \leq 0\}$, with $A \in S_n, b \in \mathbb{R}^n$, and $c \in \mathbb{R}$.

(a) Show that C is convex if $A \in S_n^+$.

(b) Show that the intersection of C and the hyperplane defined by $g^T x + h = 0$ (where $g \neq 0$) is convex if $A + \lambda gg^T \succeq 0$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.10a) Es fácil ver que un conjunto es convexo si y sólo si su intersección con cualquier recta es convexa. Veamos como aplicar este lema para mostrar que C es convexo. Tomemos una recta cualquiera $x + tv$ con $v \neq 0$, e intersectémosla con C. Entonces, $(x + tv)^T A(x + tv) + b^T(x + tv) + c \leq 0$ y desarrollando la expresión de la izquierda, la desigualdad se simplifica en $\alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0$, donde $\alpha = v^T av$, $\beta = b^T v + 2x^T Av$ y $\gamma = c + b^T x + x^T Ax$, es decir que $C \cap \{x + tv | t \in \mathbb{R}\} = \{x + tv | \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$.Como este conjunto es un subconjunto de una recta, será convexo si y sólo si $D = \{t | \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$ es un intervalo(el vacío también se considera un intervalo). Pero $A \in S_n^+$, luego $v^T av \geq 0$ para todo v, entonces si $v^T av = 0$ claramente el conjunto $\{t | \beta t + \gamma \leq 0\}$ ha de ser un intervalo, y si $v^T av > 0$, entonces la parábola $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$ abre hacia arriba y el conjunto D también es un intervalo. Por el lema anterior, esto prueba que C es convexo. Ahora, veamos que el recíproco también es cierto. Supongamos que A no es semidefinida positiva y tomemos un elemento x tal que $x^T Ax < 0$. Es fácil ver que podemos encontrar un λx, con $\lambda > 0$ tal que $\lambda^2 x^T Ax + \lambda b^T x + c \leq 0$, es decir, tal que $\lambda x \in C$. Tomemos cualquier recta que contenga a λx, es decir, una de la forma $\lambda x + tv$, e intersectémosla con C. Sabemos que obtenemos el conjunto $\{x + tv | \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$. Ahora, note que el conjunto $D = \{t | \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$

no es vacío(contiene a 0) y además, como $\alpha = \lambda^2 x^T ax < 0$, la parábola abre hacia abajo y D no es un intervalo, luego $C \cap \{x + tv | t \in \mathbb{R}\}$ no es convexo y C no es convexo.

2.10b) Sea $B = A + \lambda gg^T$. Entonces $A = B - \lambda gg^T$ y $x^T Ax + b^T x + c \leq 0$ si y sólo si $x^T(B - \lambda gg^T)x + b^T x + c \leq 0$, reoorganizando, $x^T Bx - \lambda(g^T x)^T(g^T x) + b^T x + c \leq 0$, y si $g^T x + h = 0$, obtenemos que $x^T Bx + b^T x + (c - \lambda h^2) \leq 0$. Por el punto anterior, como $B \in S_n^+$, el conjunto de los x que satisfacen dicha desigualdad que es convexo, pero dicho conjunto es precisamente la intersección entre C y el hiperplano $g^T x + h = 0$, como queríamos demostrar.

2.13. Conic hull of outer products. Consider the set of rank-k outer products, defined as $\{XX^T | X \in R^{nxk}, rankX = k\}$. Describe its conic hull in simple terms.

Mostraremos que la envolvente cónica de los productos exteriores de rango k corresponde a las matrices definidas positivas de rango mayor o igual a k. En primer lugar, observe que cualquier matriz de la forma XX^T es semidefinida positiva y además, $rank(XX^T) = rank(X) = k$. Ahora, mostraremos que si tenemos dos matrices A y B de rango por lo menos k, el rango de cualquier combinación $cA + dB$, con $c, d > 0$, es por lo menos k. Para ver esto, observe que $rank(cA) = rank(A)$ y $rank(dB) = rank(B)$. Ahora, sea v tal que $(cA + dB)v = 0$, sabemos que si A es una matriz semidifinida positiva, entonces $v^T Av = 0$ si y sólo si $Av = 0$, luego $(cA + dB)v = 0$ si y sólo si $cv^T Av + dv^T Bv = 0$, como A y B son semidefinidas positivas, esto es cierto si y sólo si $v^T Av = v^T Bv = 0$, esto es, si y sólo si $Av = Bv = 0$. Esto muestra que el kernel de $A + B$ está contenido en el de A y el de B, por lo tanto $Nul(A+B) \leq Nul(A)$. Esto implica que $rank(A+B) \geq rank(A) \geq k$, como se quería demostrar.

2.14. Expanded and restricted sets. Let $S \in \mathbb{R}^n$, and let $|| \cdot ||$ be a norm on $\mathbb{R}^n$.

(a) For $a \geq 0$ we define S_a as $\{x | dist(x, S) \leq a\}$, where $dist(x, S) = inf_{y \in S} ||x - y||$. We refer to S_a as S expanded or extended by a. Show that if S is convex, then S_a is convex.

(b) For $a \geq 0$ we define $S_{-a} = \{x | B(x, a) \in S\}$, where B(x, a) is the ball (in the norm $|| \cdot ||$), centered at x, with radius a. We refer to S_{-a} as S shrunk or restricted by a, since S_{-a} consists of all points that are at least a distance a from $R^n - S$. Show that if S is convex, then S_{-a} is convex

2.14a) Sean $x_1, x_2 \in S_a$ Debemos mostrar que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S_a$ para todo $0 \leq \theta \leq 1$. Para ver esto, es suficiente mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe un $y \in S$ tal que $||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - y|| \leq a + \epsilon$, pues esto implica que $dist(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, S) = inf_{y \in S}||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - y|| \leq a$. Para ver esto, observe que por definición de dist(x, S), existen $y_1, y_2 \in S$ tales que $||x_1 - y_1|| \leq$dist$(x_1, S) + \epsilon \leq a + \epsilon$ y $||x_2 - y_2|| \leq$dist$(x_2, S) + \epsilon \leq a + \epsilon$. Como S es convexo, tenemos que $\theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in S$. Ahora, observe que $||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - \theta y_1 - (1-\theta)y_2|| \leq \theta||x_1 - y_1|| + (1-\theta)||x_2 - y_2|| \leq \theta(a+\epsilon) + (1-\theta)(a+\epsilon) = a + \epsilon$. Por lo discutido anteriormente, como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S_a$

2.14b) Sean $x_1, x_2 \in S_{-a}$. Debemos mostrar que para todo $0 \leq \theta \leq 1$ y todo y tal que $||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - y|| \leq a$, se tiene que $y \in S$. Para ver esto, note en primer lugar que tanto $v_1 = (1-\theta)(x_1 - x_2) + y$ como $v_2 = \theta(x_2 - x_1) + y$ están en S, puesto que $||x_1 - v_1|| = ||x_2 - v_2|| = ||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - y|| \leq a$ y $x_1, x_2 \in S_{-a}$. Como S es convexo, $\theta v_1 + (1-\theta)v_2 = \theta(1-\theta)(x_1 - x_2) + \theta y + \theta(1-\theta)(x_2 - x_1) + (1-\theta)y = y \in S$, tal como se quería demostrar.

2.15. Some sets of probability distributions. Let x be a real-valued random variable with $prob(x = a_i) = p_i$, $i = 1, \cdots, n$, where $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Of course $p \in \mathbb{R}^n$ lies in the standard probability simplex $P = \{p | 1^T p = 1, p \succeq 0\}$. Which of the following conditions are convex in p? (That is, for which of the following conditions is the set of $p \in P$ that satisfy the condition convex?)

(a) $\alpha \leq Ef(x) \leq \beta$, where Ef(x) is the expected value P of f(x), i.e., $Ef(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i f(a_i)$. (The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given.)

(b) $prob(x > \alpha) \leq \beta$.

(c) $E|x^3| \leq \alpha E|x|$.

(d) $Ex^2 \leq \alpha$.

(e) $Ex^2 \geq \alpha$.

(h) $quartile(x) \geq \alpha$, where $quartile(x) = inf\{\beta | prob(x \leq \beta) \geq 0.25\}$.

(i) $quartile(x) \leq \alpha$.

2.15a) Este espacio corresponde a la intersección de los dos semiplanos $v^T p \geq \alpha$ y $v^T p \leq \beta$, donde $v^T = [f(a_1), ...f(a_n)]$, por lo tanto es convexo

2.15b) Note que $Prob(x \geq \alpha) = \sum_{i:a_i \geq \alpha} p_i \leq \beta$, luego dicho conjunto es convexo pues representa un semiplano.

2.15c) Observe que $E|x^3| = \sum_i p_i |a_i|^3$ y $\alpha E|x| = \sum_i \alpha p_i |a_i|$, por lo tanto la desigualdad dada se puede expresar como $\sum_i p_i(|a_i|^3 - \alpha |a_i| \leq 0$, luego dicho conjunto es convexo pues representa un semiplano.

2.15d) Este espacio corresponde al semiplano $v^T p \leq \alpha$, donde $v^T = [a_1^2, ...a_n^2]$, por lo tanto es convexo.

2.15e) Este espacio corresponde al semiplano $w^T p \geq \alpha$, donde $w^T = [a_1^2, ...a_n^2]$, por lo tanto es convexo.

2.15h) La desigualdad dada es equivalente a equivalente a que $prob(x \leq \beta) < 0.25$ para todo $\beta < \alpha$. Si $\alpha \leq a_1$, esto siempre se tiene. Ahora, si $\alpha > a_1$, sea k el mayor índice tal que $a_k < \alpha$. Entonces, podemos escribir la desigualdad anterior como $\sum_{i=1}^{k} p_i < 0.25$, y esta última desigualdad define un semiplano abierto, el cual, al igual que el cerrado, es convexo.

2.15i) La desigualdad dada es equivalente a equivalente a que $prob(x \leq \alpha) \geq 0.25$. Si $\alpha \geq a_n$, esto siempre es cierto. Ahora, si $\alpha < a_n$, sea k el menor índice tal que $a_k > \alpha$. Entonces, podemos escribir la desigualdad anterior como $\sum_{i=1}^{k-1} p_i \geq 0.25$, y esta última desigualdad define un semiplano, el cual es convexo(si $k = 1$ el semiplano es vacío).

2.16. Show that if S_1 and S_2 are convex sets in $\mathbb{R}^{m+n}$, then so is their partial sum $S = \{(x, y_1 + y_2)|x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$.

Debemos demostrar que si $(x_1, y_1 + y_2), (x_2, y_3 + y_4) \in S$, entonces para todo $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(x_1, y_1+y_2)+(1-\theta)(x_2, y_3+y_4) \in S$. Como $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S_1$ y S_1 es convexo, $(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta y_1 + (1-\theta)y_3) \in S_1$ Un argumento análogo muestra que $(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta y_2 + (1-\theta)y_4) \in S_2$, por lo tanto $\theta(x_1, y_1 + y_2) + (1-\theta)(x_2, y_3 + y_4) = (\theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta y_1 + \theta y_2 + (1-\theta)y_3 + (1-\theta)y_4) \in S$, como se quería demostrar.

Image of polyhedral sets under perspective function. In this problem we study the image of hyperplanes, halfspaces, and polyhedra under the perspective function $P(x, t) = x/t$, with $domP = R_n$ x R_{++}. For each of the following sets C, give a simple description of $P(C) = \{v/t|(v, t) \in C, t > 0\}$.

(a) The polyhedron $C = conv\{(v_1, t_1), \cdots, (v_K, t_K)\}$ where $v_i \in \mathbb{R}^n$ and $t_i > 0$.

(b) The hyperplane $C = \{(v, t)|f^T v + gt = h\}$ (with f and g not both zero).

(c) The halfspace $C = \{(v, t)|f^T v + gt \leq h\}$ (with f and g not both zero).

(d) The polyhedron $C = \{(v, t)|Fv + gt \preceq h\}$.

2.17a) $P(C) = \{\dfrac{\theta_1 v_1 + \cdots \theta_k v_k}{\theta_1 t_1 + \cdots \theta_k t_k}, \theta_i \geq 0, \theta_1 + \cdots \theta_k = 1\}$

2.17b) Los elementos de $P(C)$ son los puntos del hiperplano $f^T x = \frac{h}{t} - g$, con $t > 0$.

2.17c) Los elementos de $P(C)$ son los puntos del semiplano $f^T x \leq \frac{h}{t} - g$, con $t > 0$.

2.17d) Los elementos de $P(C)$ son los puntos del hiperplano $Fx \preceq \frac{h}{t} - g$, con $t > 0$.

2.18. Invertible linear-fractional functions. Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be the linear-fractional function $f(x) = (Ax+b)/(c^x+d)$, $dom f = \{x | c^T x + d > 0\}$.

Suppose the matrix $Q = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix}$ is nonsingular. Show that f is invertible and that f^{-1} is a linear-fractional mapping. Give an explicit expression for f^{-1} and its domain in terms of A, b, c, and d. Hint. It may be easier to express f^{-1} terms of Q.

Para mostrar que f es invertible, basta mostrar que es inyectiva. Suponga entonces que $\frac{Ax+b}{c^T x + d} = \frac{Ay+b}{c^T y + d}$ y veamos que $x = y$. En primer lugar, observe que $(c^T y + d) \begin{pmatrix} Ax+b \\ c^T x + d \end{pmatrix} = (c^T x + d) \begin{pmatrix} Ay+b \\ c^T y + d \end{pmatrix}$ por la igualdad anterior. Pero observe que $Q \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax+b \\ c^T x + d \end{pmatrix}$. Entonces, como $c^T x + d > 0$, existe λ tal que $Q \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda Q \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$. Como Q es no singular, tenemos que $\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, lo cual implica que $\lambda = 1$ y $x = y$. Esto es lo que se quería demostrar.

Ahora, procedemos a encontrar la inversa de f. Observe en primer lugar que un mapeo lineal fraccional g se puede representar como $g(x) =$

$P[G\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}]$ donde G es una matriz de $n+1$x $n+1$ y la última coordenada de $G\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$ es positiva. Con esto en mente, volviendo al ejercicio, observe que $Q^{-1}\begin{pmatrix}\frac{Ax+b}{c^Tx+d}\\1\end{pmatrix} = \frac{Q^{-1}\begin{pmatrix}Ax+b\\c^Tx+d\end{pmatrix}}{c^Tx+d} = \frac{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}}{c^Tx+d}$. Por lo tanto, si $c^Tx+d>0$, note que

$$f^{-1}(\frac{Ax+b}{c^Tx+d}) = P(Q^{-1}\begin{pmatrix}\frac{Ax+b}{c^Tx+d}\\1\end{pmatrix}) = P(\frac{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}}{c^Tx+d}) = x, \text{ como queríamos.}$$

Concluimos que f es una función lineal fraccional.