# معادلات دیفرانسیل

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# مفاهیم و مقدمات معادلات دیفرانسیل

## ۱.۱ تعریف معادله ی دفرانسیل

- رابطه ی بین یک تابع و مشتق های آن
- معادله ای که خود تابع و مشتق آن تابع در آن حضور داشته باشند

- $y = 2x \leftarrow$ معادله
- $y \geq 2x \leftarrow$ نامعادله

## ۲.۱ انواع معادلات دیفرانسیل

- ODE : Ordinary Differential Equations
- PDE : Partitionary Differential Equations

در معادله ی دیفرانسیل نیازی نیست که حتماً تابع باشد ، اما مشاق تابع حتماً باید باشد . مثل :

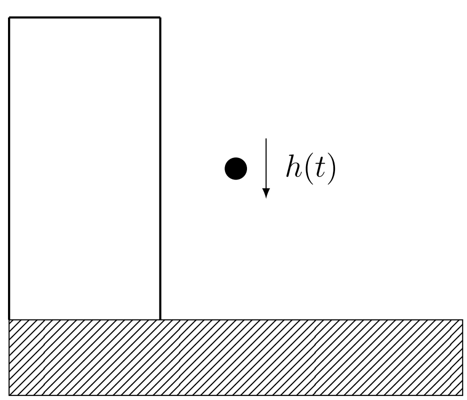
- $y + y' = 5$
- $y'' + y' = 0$
- $y'y'' = 7$

## ۳.۱ کاربرد معادلات دیفرانسیل

- سقوط آزاد اجسام
- به دست آوردن دمای مرکز خورشید

**مثال**

فاصله ی گلوله در ثانیه ی t ام از مبدا چقدر است ؟



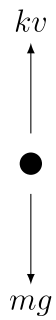

مکان در لحظه ی t $= S = \quad h(t)$

سرعت در لحظه ی t $= V = \quad h'(t) = \frac{ds}{dt}$

شتاب در لحظه ی t $= a = \quad h''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

**مثال**

به دست آوردن شتاب گرانش ( g ) در سقوط آزاد ؟




$$\begin{aligned}\sum F = ma &\to mg - kv = ma\\ &\to mg = ma + kv\\ &\to g = a + \frac{k}{m}v\\ &\to g = S'_t + \frac{k}{m}S''_t\end{aligned}$$

- معادلات دیفرانسیل Ordinary برای توابع یک متغیره است
- معادلات دیفرانسیل Partitionary برای توابع چند متغیره است که دارای مشتق ضمنی با جزیی هستند

نماد معادلات دیفرانسیل معمولی

- $F(x, y', y'', \dots, y^n) = 0$

## ۴.۱ مرتبه ی معادلات دیفرانسیل

بالاترین مرتبه ی مشتق موجود در معادله ی دیفرانسیل را مرتبه ی معادله ی دیفرانسیل می نامیم .

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y' = \cos x$ | خطی | درجه ۱ | مرتبه ۱ |
| $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ | خطی | درجه ۱ | مرتبه ۱ |
| $y'' + y = x$ | خطی | درجه ۱ | مرتبه ۲ |
| $y'' + (3y')^3 + 2x = 5$ | غیر خطی | درجه ۱ | مرتبه ۲ |
| $(y''')^3 + (y'')^4 + y' = x$ | غیر خطی | درجه ۳ | مرتبه ۳ |
| $x^2y'' + \sin y' = x^2 + 1$ | غیر خطی | درجه ۱ | مرتبه ۲ |

## ۵.۱ تعریف خطی بودن

معادله ی دیفرانسیل به فرم :

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y^1 + a_0(x)y = g(x)$$

خطی نامیده می شود به شرطی که در آن ضرایب $a(x)$ فقط بر حسب x باشند .

**مثال**

معادله ی دیفرانسیل زیر غیر خطی است . زیرا ضرایب فقط بر حسب x نیست .

$$y''' + \underbrace{2y}\, y'' + y = 2x$$

**مثال**

معادله ی دیفرانسیل زیر غیر خطی است . زیرا مشتق توان بیشتر از ۱ یا توان منفی نباید داشته باشد .

$$\underbrace{(y''')^2} + 2xy'' + y = 2x$$

**مثال**

معادله ی دیفرانسیل زیر خطی است .

$$y'' + xy' = 4x$$

## ۶.۱ درجه ی معادله ی دیفرانسیل

توان بالاترین مشتق ( توان مرتبه ) ، درجه ی معادله ی دیفرانسیل نامیده می شود .

فرق چند جمله ای و چند ضابطه ای

- معادله ی زیر یک چند جمله ای است

$$f(x) = 3x^5 + 4x^2 + 5$$

- معادله ی زیر یک چند ضابطه ای است اما چند جمله ای نیست ، چون در چند جمله ای x باید آزاد باشد

$$f(x) = \sin x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} - 2$$

## ۷.۱ مفهوم دسته منحنی

در معادله ی

$$y = F(x, c)$$

به ازای مقادیر مختلفی که c اختیار می کند ، منحنی های بی شماری رسم می شوند ، به این دلیل به آن دسته منحنی می گوییم .

## ۸.۱ جواب معادله دیفرانسیل

هر تابعی که در معادله ی دیفرانسیل صدق کند جواب آن نامیده می شود .

$$y' = \cos x \to y = \sin x$$
$$y'' + y = x \to y = x$$

## ۹.۱ انواع جواب معادله ی دیفرانسیل

- جواب عمومی : یک خانواده ی n پارامتری از جوابهای یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n ام .
- جواب خصوصی : با مقدار دهی به پارامتر ها می توان جواب خصوصی معادله ی دیفرانسیل را به دست آورد .
- جواب غیر عادی : منحنی نمایش آن بر تمام منحنی های جواب عمومی مماس باشد .

## ۱۰.۱ متغیر مستقل و متغیر وابسته

در تابع

$$y = f(x)$$

به x متغیر مستقل و به y متغیر وابسته می گوییم .

# فصل ۲

# معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

به معادلات دیفرانسیل به فرم کلی

$$F(x, y, y') = 0$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول می گوییم .

$$F(x, y, y') = 0$$

$$y' = f(x, y) \qquad y = f(x, y') \qquad x = f(y, y')$$

## ۱.۲ انواع معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

- مجزا ( جدا شدنی )
- همگن
- کامل
- خطی مرتبه ی اول
- خطی مرتبه ی دوم

## ۲.۲ روال حل معادلات دیفرانسیل

- تشخیص
- حل

## ۳.۲ معادلات دیفرانسیل جدا شدنی

اگر $y' = f(x,y)$ را بتوان به صورت

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

نوشت ، در این صورت به آن معادله ی جداشدنی می گویند . برای به دست آوردن جواب عمومی این معادله ی دیفرانسیل کافی است از طرفین معادله انتگرال بگیریم .

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = \int 0$$

## ۴.۲ روش های حل انتگرال

- از طریق مشتق
- جز به جز

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

- تجزیه ی کسر ها
- تغییر متغیر

$$y^2 = u$$
$$2ydy = du$$

**مثال**

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$\begin{aligned}
y' = \frac{x}{y} &\to \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\
&\to ydy = xdx \\
&\to \int ydy = \int xdx \\
&\to \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \\
&\to y^2 = 2\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x^2 + 2C \\
&\to y^2 = x^2 + 2C
\end{aligned}$$

نکته :

- $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

**مثال**

$$y' = \frac{2x + xy}{x^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}
y' = \frac{2x+xy}{x^2+4} &\to \frac{dy}{dx} = \frac{x(y+2)}{x^2+4} \\
&\to \frac{dy}{y+2} = \frac{xdx}{x^2+4} \\
&\to \int \frac{dy}{y+2} = \int \frac{xdx}{x^2+4} \\
&\to x^2+4 = u \\
&\to 2xdx = du \\
&\to xdx = \frac{1}{2}du \\
&\to \int \frac{dy}{y+2} = \int \frac{1}{2}\frac{du}{u} \\
&\to \ln{(y+2)} = \frac{1}{2}\left(\ln u + \ln c\right) \\
&\to \ln{(y+2)} = \frac{1}{2}\left(\ln cu\right) \\
&\to \ln{(y+2)} = \ln{(cu)}^{\frac{1}{2}} \\
&\to y+2 = \sqrt{cu} \\
&\to y+2 = \sqrt{c(x^2+4)}
\end{aligned}$$

**مثال**

$$e^{y^2}(x^2+2x+1) = -(xy+y)y'$$

$$\to e^{y^2}(x+1)^2 = -(x+1)yy'$$

$$\to e^{y^2}(x+1) = -y\frac{dy}{dx}$$

$$\to (x+1)dx = \frac{-ydy}{e^{y^2}}$$

$$\to y^2 = u$$

$$\to 2ydy = du$$

$$\to ydy = \frac{1}{2}du$$

$$\to -ydy = -\frac{1}{2}du$$

$$\to (x+1)dx = -\frac{1}{2}\frac{du}{e^u}$$

$$\to (x+1)dx = -\frac{1}{2}e^{-u}du$$

$$\to xdx + dx = -\frac{1}{2}e^{-u}du$$

$$\to \int xdx + \int dx = \int -\frac{1}{2}e^{-u}du$$

$$\to \frac{x^2}{2} + x = -\frac{1}{2} - e^{-u} + C$$

$$\to \frac{x^2}{2} + x = \frac{1}{2}e^{-u} + C$$

$$\to u = y^2$$

$$\to \frac{x^2}{2} + x = \frac{1}{2}e^{-y^2} + C$$

$$\to 2\left(\frac{x^2}{2} + x - C\right) = e^{-y^2}$$

$$\to \ln\left(x^2 + 2x - 2C\right) = \ln e^{-y^2}$$

$$\to -y^2 = \ln\left(x^2 + 2x - 2C\right)$$

$$\to y^2 = -\ln\left(x^2 + 2x - 2C\right)$$

**مثال**

$$y' \cot x = 2 + y$$

$$\begin{aligned} y' \cot x = 2 + y &\to \frac{dy}{dx} \times \frac{\cos x}{\sin x} = 2 + y \\ &\to \frac{dy}{2+y} = \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &\to \cos x = u \\ &\to - \sin x dx = du \\ &\to \ln (y+2) = - \ln \cos x + \ln c \\ &\to \ln (y+2) = \ln \frac{c}{\cos x} \\ &\to y + 2 = \frac{c}{\cos x} \end{aligned}$$

**مثال**

$$y' = \frac{(1+y^2)}{xy(1+x^2)}$$

$$\begin{aligned} y' = \frac{(1+y^2)}{xy(1+x^2)} &\to \frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)}{xy(1+x^2)} \\ &\to \frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + y^2 &= u \\ 2ydy &= du \\ ydy &= \frac{1}{2} du \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1 + x^2 &= w \\ 2xdx &= dw \\ -xdx &= -\frac{1}{2} dw \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+Cx}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$$
$$\to A = 1$$
$$\to A+B = 0 \to B = -1$$
$$\to C = 0$$
$$\to \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}$$

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{dw}{w}$$
$$\to \frac{1}{2}\ln u = \ln x - \frac{1}{2}\ln w$$
$$\to \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \frac{1}{2}\ln 1 + x^2$$
$$\to \ln\sqrt{1+y^2} + \ln\sqrt{1+x^2} = \ln x$$
$$\to \ln\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2} = \ln x$$
$$\to \sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x^2} = x$$
$$\to (1+y^2)\times(1+x^2) = x^2$$

## ۵.۲ معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول همگن

- تعریف تابع همگن : تابع $f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه ی n نامیده می شود اگر به ازای هر t مثبت در این رابطه صدق کند .

$$t > 0 \to f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

**مثال**

تابع زیر همگن از درجه ی ۲ می باشد .

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + xy + y^2 \\ \to f(tx,ty) &= (tx)^2 + (tx)(ty) + (ty)^2 \\ &= t^2x^2 + t^2xy + t^2y^2 \\ &= t^2\left(x^2 + xy + y^2\right) \\ &= t^2 f(x,y) \end{aligned}$$

**نکته**

- درجه ی n می تواند کسری یا صفر نیز باشد .

**مثال**

همگن از درجه ی $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{x}\sin\frac{x}{y} \\ f(tx,ty) &= \sqrt{tx}\sin\frac{tx}{ty} \\ &= \sqrt{t}\sqrt{x}\sin\frac{x}{y} \\ &= \sqrt{t}f(x,y) \\ &= t^{\frac{1}{2}}f(x,y) \end{aligned}$$

**مثال**

همگن از درجه ی صفر

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x}{x+y} \\
f(tx,ty) &= \frac{tx}{tx+ty} \\
&= \frac{tx}{t(x+y)} \\
&= \frac{x}{x+y} \\
&= t^0 \frac{x}{x+y}
\end{aligned}
$$

## ۶.۲ معادله ی دیفرانسیل همگن

$y' = f(x,y)$ را همگن می نامیم هرگاه درجه ی همگنی آن صفر باشد ، برای حل معادله ی دیفرانسیل همگن از تغییر متغیر $y = vx$ استفاده می کنیم ، با این تغییر متغیر ، معادله ی دیفرانسیل همگن به یک معادله دیفرانسیل مجزا تبدیل می شود .

$$
\begin{aligned}
y &= vx \\
dy &= vdx + xdv
\end{aligned}
$$

**مثال**

همگن بودن معادله ی دیفرانسیل زیر را بررسی می کنیم .

$$2xydy + (x^2 - y^2)dx = 0$$

روش اول :

$$\begin{aligned}
2xydy + (x^2 - y^2)dx = 0 \rightarrow 2xydy &= (x^2 - y^2)dx \\
\rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 - x^2}{2xy} \\
f(tx, ty) &= \frac{t^2y^2 - t^2x^2}{2 \times tx \times ty} = \frac{t^2(y^2 - x^2)}{t^2 2xy} \\
&= \frac{(y^2 - x^2)}{2xy} \\
&= t^0 \frac{(y^2 - x^2)}{2xy} \\
&\rightarrow n = 0
\end{aligned}$$

روش دوم :

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) = 2xy \rightarrow f_1(tx, ty) &= 2txty \\
&= t^2 \times 2xy \\
&= t^2 f_1(x, y) \\
&\rightarrow n = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x, y) = x^2 - y^2 \rightarrow f_2(tx, ty) &= t^2x^2 - t^2y^2 \\
&= t^2(x^2 - y^2) \\
&= t^2 f_2(x, y) \\
&\rightarrow n = 2
\end{aligned}$$

**مثال**

$$2xydy + (x^2 - y^2)dx = 0$$

$$\begin{aligned}
y &= vx \\
dy &= vdx + xdv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2x.vx.(vsx+xdv)+(x^2-v^2x^2)dx=0\\
&\to 2vx^2(vsx+xdv)+x^2dx-v^2x^2dx=0\\
&\to 2v^2x^2dx+2vx^3dv+x^2dx-v^2x^2dx=0\\
&\to x^2v^2dx+x^2dx+2vx^3dv=0\\
&\to x^2(1+v^2)dx+2vx^3dv=0\\
&\to \frac{x^2}{x^3}dx+\frac{2v}{1+v^2}=0\\
&\to \frac{dx}{x}+\frac{2v}{1+v^2}dv=0\\
&\to \ln x+\ln 1+v^2=\ln c\\
&\to \ln x(1+v^2)=\ln c\\
&\to x(1+v^2)=c\\
&\to y=vx\to v=\frac{y}{x}\\
&\to x\left(1+(\frac{y}{x})^2\right)=c
\end{aligned}$$

**مثال**

$$(y^2+2xy)dx-x^2dy=0$$

$$\begin{aligned}
f_1(x,y)=y^2+2xy\to f_1(tx,ty)&=t^2y^2+2.tx.ty\\
&=t^2y^2+t^2.2xy\\
&=t^2(y^2+2xy)\\
&=t^2f_1(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x,y)=-x^2\to f_2(tx,ty)&=-t^2x^2\\
&=t^2(-x^2)\\
&=t^2f_2(x,y)
\end{aligned}$$

پس معادله ی دیفرانسیل همگن می باشد .

$$y = vx$$
$$dy = vdx + xdv$$

$$((vx)^2 + 2x.vx)dx - x^2(vdx + xdv) = 0$$
$$\to (v^2x^2 + 2vx2)dx - vx^2dx - x^3dv = 0$$
$$\to v^2x^2dx + 2vx^2dx - vx^2dx - x^3dv = 0$$
$$\to v^2x^2dx + vx^2dx - x^3dv = 0$$
$$\to x^2(v + v^2)dx - x^3dv = 0$$
$$\to \div(v + v^2) \quad \div x^3$$
$$\to \frac{x^2}{x^3}dx - \frac{1}{v + v^2}dv = 0$$
$$\to \frac{dx}{x} - \frac{dv}{v + v^2}$$
$$\to \frac{dx}{x} - \frac{dv}{v(1 + v)} = 0$$

$$\frac{1}{v(1+v)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1+v}$$
$$= \frac{A + A.v + B.v}{v(1+v)}$$
$$= \frac{(A+B)v + A}{v(1+v)}$$
$$\to A = 1$$
$$\to A + B = 0 \to B = -1$$
$$\to \frac{1}{v(1+v)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{1+v}$$

$$\to \frac{dx}{x} - \left(\frac{dv}{v} - \frac{dv}{1+v}\right) = 0$$
$$\to \frac{dx}{x} - \frac{dv}{v} + \frac{dv}{1+v} = 0$$
$$\to \ln x - \ln v + \ln 1 + v = \ln c$$
$$\to \ln x + \ln \frac{1+v}{v} = \ln c$$
$$\to y = v.x \to v = \frac{y}{x}$$
$$\to x.\frac{1+v}{v} = c$$
$$\to x + \frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}} = c$$

## ۷.۲ معادله ی دیفرانسیل کامل

معادله ی $y' = f(x,y)$ می تواند به فرم خطی

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

تبدیل شود و این معادله کامل نامیده می شود اگر $F(x,y)$ وجود داشته باشد که :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

یعنی از F مشتق گرفته شده نسبت به x و شده M(x،y)

و

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

یعنی از F مشتق گرفته شده نسبت به y و شده N(x،y)

## ۸.۲ جواب معادله ی دیفرانسیل کامل

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int (N - scentences\ \ without\ \ x)dy$$

**مثال**

چگونگی ساختن یک معادله ی دیفرانسیل کامل

$$F(x,y) = x^2 + xy + y^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y$$

در نتیجه معادله ی دیفرانسیل زیر یک معادله ی دیفرانسیل کامل است .

$$(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$$

**نکته**

برای اینکه متوجه شویم معادله ی دیفرانسیل

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

معادله ی دیفرانسیل کامل است ، باید تساوی زیر برقرار باشد .

$$(M(x,y)dx)dy = (N(x,y)dy)dx$$

یعنی از M(x،y) که مشتق F نسبت به x است ، بار دیگر نسبت به y مشتق می گیریم .
و از N(x،y) که مشتق F نسبت به y است ، بار دیگر نسبت به x مشتق میگیریم .
و این دو باید با هم برابر باشند .

**مثال**

$$(-3x^2y + \sin x)dx - (x^3y)dy = 0$$

$$M(x,y) = -3x^2y + \sin x \to \frac{\partial M}{\partial y} = -3x^2$$
$$N(x,y) = -x^3 - y \to \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2$$

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+\int (N-scentences\ \ without\ \ x)dy$$

$$\begin{aligned}&\int e^x\sin y dx-\int 3x^2dx+\int \frac{1}{3}y^{\frac{-1}{3}}dy\\&=\sin y e^x-3\times\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{y^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1}+C\\&=e^x.\sin y-x^3+\frac{1}{3}\times\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=F(x,y)\end{aligned}$$

## ۹.۲ معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه ی اول

$$a_1(x)y'+a_2(x)y=r(x)$$

۲ شرط برای خطی بودن :

- مشتق ها توانشان ۱ باشد .
- تمام ضرایب مشتق بر حسب x باشد .

برای به دست آوردن جواب عمومی باید فرم معادله را به فرم استاندارد تبدیل کنیم .
فرم معادله استاندارد به صورت زیر می باشد .

$$y'+p(x)y=q(x)$$

جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ی اول در صورتی که معادله را به صورت استاندارد در بیاوریم به صورت زیر می باشد .

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

**مثال**

$$y' - xy = x$$

این معادله استاندارد است و داریم :

$$p(x) = -x \quad q(x) = x$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right] \\ &= e^{-\int -xdx}\left[\int xe^{\int -xdx}dx + C\right] \\ &= e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx + C\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{2} &= u \\ -\frac{1}{2} \times 2xdx &= du \\ -xdx &= du \\ xdx &= -du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-u}\left[\int e^u du + C\right] \\ &= e^{-u}\left[e^u + C\right] \\ &= e^{-u}.e^u + c.e^{-u} \\ &= e^0 + c.e^{-u} \\ &= 1 + c.e^{-u} \\ &= 1 + c.e^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

# فصل ۳

# معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم

## ۱.۳ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ی دوم

خطی یعنی :

- توان ۱
- ضریب بر حسب x

فرم کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ی دوم به صورت زیر می باشد .

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad a_2(x) \neq 0$$

و فرم استاندارد آن به صورت زیر است :

$$\frac{a_2(x)}{a_2(x)}y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \frac{f(x)}{a_2(x)}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

اگر $r(x) \neq 0$ می شود معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی غیر همگن
اگر $r(x) = 0$ می شود معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی همگن

**نکته**

تابع $y(x) = 0$ به ازای هر x ای همواره جواب معادله دیفرانسیل همگن می باشد .

**سوال**

آیا این معادله جواب غیرصفر دیگری هم دارد ؟
بله ، اصطلاحاً به آن ترکیب جوابها می گوییم :

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

## ۲.۳ جواب معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه ی دوم غیر همگن

در صورتی که $y_1(x)$ جواب معادله ی دیفرانسیل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

و $y_2(x)$ جواب معادله ی دیفرانسیل

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

باشد .
آنگاه جواب معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی غیر همگن برابر است با

$$y_1(x) + y_2(x)$$

**نکته**

برای به دست آوردن جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه ی دوم باید پیش نیاز های زیر را بدانیم :

- وابستگی خطی
- استقلال خطی

## ۳.۳ تعریف وابسته خطی

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مضرب ثابتی از هم باشند ، در این صورت وابسته خطی نامیده می شوند .

$$f(x) = k.g(x)$$

**مثال**

تابع $f(x) = 2x^2$ و $g(x) = x^2$ وابسته خطی هستند زیرا

$$2x^2 = 2 \times x^2$$

تابع $f(x) = e^{2x}$ و $g(x) = e^{3x}$ مستقل خطی هستند زیرا با هیچ ضریب ثابتی با هم مساوی در نمی آیند .

- می توان برای تشخیص وابستگی خطی یا استقلال خطی از دترمینان رونسکین استفاده کرد
- در صورتی که دترمینان رونسکین برابر با صفر نبود دو تابع مستقل خطی اند
- در صورتی که دترمینان رونسکین برابر با صفر بود دو تابع وابسته خطی هستند

## ۴.۳ تعریف دترمینان رونسکین دو تابع

$$w(f \circ g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

**مثال**

دو تابع $f(x) = e^{2x}$ و $g(x) = e^{3x}$ مستقل خطی اند زیرا :

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0$$

دو تابع $f(x) = 2x^2$ و $g(x) = x^2$ وابسته خطی اند زیرا :

$$\begin{vmatrix} 2x^2 & x^2 \\ 4x & 2x \end{vmatrix} = 4x^3 - 4x^3 = 0$$

دو تابع وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر

$$w(y_1(x), y_2(x)) = 0$$

دو تابع مستقل خطی هستند اگر و تنها اگر

$$w(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$$

**سوال**

وابستگی خطی و استقلال خطی چه کمکی برای تعیین جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی همگن یا غیر همگن می کند ؟

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی باشند ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی برابر است با :

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

## ۵.۳ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه ی دوم با ضرایب ثابت و همگن

$$y'' + py' + qy = 0$$

مثل : $y'' + 3y' + 5y = 0$

برای حل ابتدا معادله مشخصه ی آن را تشکیل می دهیم ( از مشتق خلاص می شویم )

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad\qquad y'' \to r^2$$
$$y' \to r$$
$$\to r^2 + pr + q = 0 \qquad\qquad y \to 1$$

- اگر $\Delta > 0$ معادله ۲ ریشه ی غیر برابر دارد
- اگر $\Delta = 0$ معادله ۲ ریشه ی برابر دارد
- اگر $\Delta < 0$ معادله ۲ ریشه ی مختلط دارد

اگر $\Delta > 0$ باشد ، معادله مشخصه ۲ ریشه ی حقیقی متمایز $(r_1, r_2)$ دارد و جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی برابر است با :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{r_1 x} \\ y_2 &= e^{r_2 x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

**مثال**

$$y'' - y' - 6y = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

$$y'' - y' - 6y = 0 \Rightarrow r^2 - r - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{6}{2} = 3 \\ -\dfrac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

جواب عمومی :

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{3x} \\ y_2(x) = e^{-2x} \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y'(0) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 3 \\ 3c_1 - 2c_2 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2c_1 + 2c_2 = 6 \\ 3c_1 - 2c_2 = -4 \end{array}\right\}$$

$$5c_1 = 2 \to c_1 = \frac{2}{5}$$

$$c_1 + c_2 = 3 \to \frac{2}{5} + c_2 = 3 \to c_2 = 3 - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} \to c_2 = \frac{13}{5}$$

جواب خصوصی :

$$y(x) = \frac{2}{5} e^{3x} + \frac{13}{5} e^{-2x}$$

**مثال**

$$y'' - 4y = 0 \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

$$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

جواب عمومی :

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-2x} \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y'(x) = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y'(0)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ 2c_1-2c_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2c_1+2c_2=0 \\ 2c_1-2c_2=3 \end{array}\right\}$$

$$4c_1 = 3 \to c_1 = \frac{3}{4}$$

$$c_1 + c_2 = 0 \to c_2 = -\frac{3}{4}$$

جواب خصوصی :

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{-2x}$$

اگر $\Delta = 0$ باشد ، در این صورت معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی همگن جواب عمومی به فرم زیر دارد ( فرض کنید ریشه ی تکراری r باشد )
اگر r دوبار تکرار شود :

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{rx}$$

اگر r سه بار تکرار شود :

$$y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{rx}$$

**مثال**

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow= r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$$

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

جواب عمومی :

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

اگر $\Delta < 0$ باشد ، آنگاه معادله مشخصه دو ریشه ی مختلط دارد

$$\begin{cases} r_1 = \alpha + \beta i \\ r_2 = \alpha - \beta i \end{cases}$$

در این صورت جواب عمومی به فرم زیر است :

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

**مثال**

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 4 = 4 - 16 = -12$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-3}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \sqrt{3} \end{cases}$$

جواب عمومی :

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)$$

## ۶.۳ معادلات دیفرانسیل خطی همگن مرتبه ی دلخواه n با ضرایب ثابت

### ۱.۶.۳ حالت اول

معادله ی مشخصه دارای n ریشه ی متمایز $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ باشد ، در این صورت فرم جواب عمومی به صورت زیر می باشد .

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$$

**مثال**

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \to r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$$

**نکته**

مجموع ضرایب مساوی صفر می باشد

$$1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

پس یکی از ریشه ها $r = 1$ می باشد ، پس معادله بر $r - 1$ بخش پذیر می باشد .

$$
\begin{array}{r|l}
r^3 - 2r^2 - 5r + 6 & r - 1 \\
\cline{2-2}
-\quad r^3 - r^2 & r^2 - r - 6 \\
\hline
-r^2 - 5r + 6 & \\
-\quad -r^2 + r & \\
\hline
-6r + 6 & \\
-\quad -6r + 6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow (r-1)(r^2 - r - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} r - 1 = 0 \rightarrow r = 1 \\ r^2 - r - 6 = 0 \end{cases}$$

$$r^2 - r - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{6}{2} = 3 \\ -\dfrac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

جواب عمومی :

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$$

**مثال**

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \rightarrow r^3 - 2r2 - 3r = 0 \rightarrow r(r^2 - 2r - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r^2 - 2r - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} \\ -\frac{2}{2} \end{cases}$$

جواب عمومی :

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{0\times x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-1\times x}$$

### ۲.۶.۳ حالت دوم

حالت دوم : اگر معادله مشخصه دارای m ریشه تکراری از n ریشه باشد

**مثال**

$$y^{(4)} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$$

$$\begin{aligned} & y^{(4)} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0 \\ \to \quad & r^4 - 6r^3 + 12r^2 - 8r = 0 \\ \to \quad & r(r^3 - 6r^2 + 12r - 8) = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r^3 - 6r^2 + 12^r - 8 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

اتحاد مکعب : $r^3 - 6r^2 + 12^r - 8 = 0$

اتحاد مکعب :

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b) \\ &= a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r-2)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = 2 \\ r = 2 \end{cases}$$

جواب عمومی :

$$y(x) = c_1 e^{0\times x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{2x}$$

### ۳.۶.۳ حالت سوم

حالت سوم : معادله مشخصه ریشه ی مختلط هم داشته باشد .

**مثال**

$$y^{(4)} + 4y'' = 0$$

$$y^{(4)} + 4y'' = 0 \to r^4 + 4r^2 = 0 \to r^2(r^2+4) = 0 \to \begin{cases} r^2 = 0 \\ r^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$r^2 + 4 = 0 \to r^2 = -4 \to r = \pm\sqrt{-4} \to r = \pm 2i \to r = 0 + 2i \to \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

جواب عمومی :

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{0\times x} + e^{0\times x}(c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)$$

### ۴.۶.۳ حالت چهارم

حالت چهارم : مختلط تکراری هم در بین ریشه ها وجود دارد .

**مثال**

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$$

$$\begin{aligned} & y^{(5)} + 2y''' + y' = 0 \\ \rightarrow \quad & r^5 + 2r^3 + r = 0 \\ \rightarrow \quad & r(r^4 + 2r^2 + 1) = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \rightarrow (r^2+1)^2 = 0 \rightarrow (r^2+1)(r^2+1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (r^2+1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^2 + 1 = 0 \rightarrow r^2 = -1 \rightarrow r = \pm i \rightarrow r = 0 \pm i \\ r^2 + 1 = 0 \rightarrow r^2 = -1 \rightarrow r = \pm i \rightarrow r = 0 \pm i \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

جواب عمومی :

$$y(x) = c_1 e^{0\times x} + e^{0\times x}((c_2 + c_3 x)\cos x + (c_4 + c_5 x)\sin x)$$

## ۷.۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی با ضرایب ثابت غیر همگن

$$y'' + py' + qy = r(x)$$

جواب عمومی این نوع معادلات دیفرانسیل برابر مجموع جواب عمومی بخش همگن و جواب خصوصی بخش غیر همگن است .

$$\begin{matrix} y_{\text{همگن}} \\ y_{\text{غیر-همگن}} \end{matrix} \Rightarrow \quad y = y_{\text{همگن}} + y_{\text{غیر-همگن}}$$

$$y(x) = y_h(x) \ + \ y_p(x)$$

که $y_h(x)$ جواب عمومی بخش همگن و $y_p(x)$ جواب خصوصی بخش غیر همگن است
روش های مختلفی برای به دست آوردن جواب خصوصی بخش غیر همگن وجود دارد از جمله :

- ضرایب نامعین
- (operator) عملگر
- سری

### ۱.۷.۳ روش ضرایب نامعین

از این روش فقط در مورد معادلات خطی با ضرایب ثابت می توان استفاده کرد ، قابل ذکر است r(x) باید تابعی باشد که در حالت های مختلف ذکر می شود .
در هر یک از حالات و یا ترکیبی از آنها $y_p$ به تناسب آن حالت به صورت یک تابع با ضرایب نامعین نوشته می شود .
پس از آن با قرار دادن $y_p$ در معادله دیفرانسیل و هم ارز قرار دادن با سمت راست معادله ضرایب مجهول به دست می آید .

**حالت های مختلف r(x) که با روش ضرایب نامعین حل می شوند**

**r(x) به فرم یک چند جمله ای از درجه ی n باشد**

$$y_p = \ x^m \ \times \quad \text{(یک-چند-جمله-ای-کامل-از-درجه-ی-n)}$$

m تعداد ریشه های صفر معادله مشخصه می باشد

**مثال**

$$y'' - 9y = 1$$

به دست آوردن $y_h(x)$ :

$$r^2-9=0\rightarrow r^2=9\rightarrow r=\pm 3$$
$$\rightarrow y_h(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$$

به دست آوردن $y_p(x)$ :

$$r(x)=1\rightarrow r(x)=1\times x^0\Rightarrow n=0$$
$$\Rightarrow y_p(x)=x^0\times A\Rightarrow \begin{cases} y_p(x)=A \\ y_p'=0 \\ y_p''=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y''-9y=1\rightarrow 0-9A=1\rightarrow A=-\frac{1}{9}$$

جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی غیر همگن :

$$\Rightarrow y(x)=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+-\frac{1}{9}$$

**مثال**

$$y''-4y=2x^2-3$$

همانطور که میبینید r(x) چند جمله ای از درجه ی ۲ می باشد .
به دست آوردن $y_h(x)$ :

$$r^2-4=0\rightarrow r^2=4\rightarrow r=\pm 2$$
$$\Rightarrow y_h(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$$

به دست آوردن $y_p(x)$ :

$$y_p(x)=x^0\times(Ax^2+Bx+C)=(Ax^2+Bx+C)$$
$$y_p'(x)=2Ax+B$$
$$y_p''(x)=2A$$

$$
\begin{aligned}
&y'' - 4y = 2x^2 - 3\\
&2A - 4(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3\\
&2A - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 2x^2 - 3\\
&-4Ax^2 - 4Bx + 2A - 4C = 2x^2 - 3\\
&\Rightarrow \begin{cases} -4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \\ -4B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ 2A - 4C = -3 \Rightarrow -1 - 4C = -3 \Rightarrow -4C = -2 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \end{cases}\\
&\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

جواب عمومی :

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

**مثال**

$$y'' - y' = 2x$$

چند جمله ای r(x) از درجه ی ۱ می باشد .
به دست آوردن $y_h(x)$ :

$$y'' - y' = 0 \to r^2 - r = 0 \to r(r-1) = 0 \to \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{0\times x} + c_2 e^{1\times x} = c_1 + c_2 e^x$$

به دست آوردن $y_p(x)$ :

$$
\begin{aligned}
&y_p(x) = x^1 \times (Ax + B) = Ax^2 + Bx\\
&y_p'(x) = 2Ax + B\\
&y_p''(x) = 2A
\end{aligned}
$$

$$y'' - y' = 2x \to 2A - 2Ax - B = 2x \to -2Ax + 2A - B = 2x$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 2 \to A = -1 \\ 2A - B = 0 \to -2 - B = 0 \to B = -2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y_p(x) = -x^2 - 2x$$

جواب عمومی :

$$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 e^x - x^2 - 2x$$

**اگر r(x) به صورت** $M(x)e^{tx}$ **باشد**

که در آن M(x) یک چند جمله ای از درجه ی n می باشد .

در این صورت جواب خصوصی پیشنهادی به صورت زیر می باشد .

$$y_p = \ x^m \times e^{tx} \times \text{(یک-چند-جمله-ای-کامل-از-درجه-ی-n)}$$

m تعداد t در ریشه های معادله مشخصه می باشد .

**مثال**

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^x$$

همانطور که میبینید ، داریم :

$$5e^{1\times x} \to t = 1$$

به دست آوردن $y_h(x)$ :

$$
\begin{aligned}
&y'' - 5y' + 6y = 0 \to r^2 - 5r + 6 = 0 \\
&\to \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6) = 25 - 24 = 1 \\
&r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

به دست آوردن $y_p(x)$ :

$$
\begin{aligned}
y_p &= x^0 e^x (A) = Ae^x \\
y_p' &= Ae^x \\
y_p'' &= Ae^x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y'' - 5y' + 6y = 5e^x \to Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = 5e^x \\
&\to 2Ae^x = 5e^x \\
&\to 2A = 5 \to A = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

جواب عمومی :

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{5}{2} e^x$$

**مثال**

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$$

همانطور که میبینید ، داریم :

$$M(x) = 1 \quad t = -2$$

به دست آوردن $y_h(x)$ :

$$\begin{aligned}
& y'' + 3y' + 2y = 0 \to r^2 + 3r + 2 = 0 \\
\to\ & \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1 \\
\to\ & r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -\frac{4}{2} = -2 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

به دست آوردن $y_p(x)$ :

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= x^1 e^{-2x}(A) = Axe^{-2x} \\
y_p'(x) &= (Ae^{-2x} + -2e^{-2x}Ax) = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} \\
y_p''(x) &= -2Ae^{-2x} - 2(Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}) \\
&= -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} \\
&= -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} \\
& \to -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} + 3(Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}) + 2Axe^{-2x} = e^{-2x} \\
& \to -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} + 3Ae^{-2x} - 6Axe^{-2x} + 2Axe^{-2x} = e^{-2x} \\
& \to -Ae^{-2x} = e^{-2x} \to -A = 1 \to A = -1 \\
& \to y_p(x) = Axe^{-2x} \Rightarrow y_p(x) = -xe^{-2x}
\end{aligned}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه ی دوم خطی غیر همگن :

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} - xe^{-2x}$$

# فصل ۴

# تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل

## ۱.۴ تعریف تبدیل لاپلاس

$$L\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \times f(t)dt$$

$$L\left[f(t)\right] = F(s)$$

$$f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right]$$

**مثال**

$$f(t) = 1$$

$$\begin{aligned}
L[1] = F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \times 1 \times dt \\
&= \lim_{u\to\infty} \int_0^4 e^{-st} dt \\
&= \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^u \\
&= \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-su} - \left(-\frac{1}{s}e^{-s\times 0}\right)\right] \\
&= \lim_{u\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-su} + \frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

**نکته**

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

**مثال**

$$f(t) = k$$

$$L[k] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \times k \times dt = k \times \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = k \times \frac{1}{s} = \frac{k}{s}$$

$$
\begin{aligned}
L[1] &= \frac{1}{s} \\
L[k] &= \frac{k}{s} \\
L[k \times f(t)] &= k \times L[f(t)] \\
L[f(t) + g(t)] &= L[f(t)] + L[g(t)]
\end{aligned}
$$

**مثال**

$$f(t) = t$$

$$
\begin{aligned}
L[t] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.tdt &= \int_0^\infty te^{-st}dt \\
&= \lim_{u\to\infty} \int_0^u te^{-st}dt \\
& f = t \qquad g' = e^{-st} \\
& f' = t \qquad g = -\frac{1}{s}e^{-st} \\
& \int fg' = fg - \int f'g \\
&= \lim_{u\to\infty} \left[ t \times -\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^u - \int_0^u -\frac{1}{s}e^{-st}dt \\
& \lim_{u\to\infty} \left[ -\frac{t}{s}e^{-st} \right]_0^u + \frac{1}{s}\int_0^u e^{-st}dt \\
& \lim_{u\to\infty} -\frac{u}{s}e^{-st} - \left( -\frac{0}{s} \times e^{-s\times 0} \right) + \frac{1}{s} \times \left( -\frac{1}{s}e^{-st} \right)_0^u \\
& \lim_{u\to\infty} \left[ -\frac{u}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\left( -\frac{1}{s}e^{-st} - \left( -\frac{1}{s}e^{-s\times 0} \right) \right) \right] \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

$$L[t] = \frac{1}{s^2}$$

**مثال**

$$f(t) = e^{at} \qquad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} L[e^{at}] = F(s) &= \int_0^\infty e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt \\ &= \lim_{u\to\infty} \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}\right]_0^u \\ &= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)u} - \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)\times 0}\right)\right] \end{aligned}$$

$$if \;\; s > 0 \to a < s \to a - s < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \;\; ; \;\; s > a$$

$$L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \;\; ; \;\; s > 0$$

**مثال**

$$f(t) = 8e^{2t} - e^{-t} + t$$

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L[8e^{2t} - e^{-t} + t] \\ &= L[8e^{2t}] - L[e^{-t}] + L[t] \\ &= 8L[e^{2t}] - L[e^{-t}] + L[t] \\ &= 8 \times \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-(-1)} + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{8}{s-2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

**مثال**

$$f(t) = t^a \quad ; \quad a > -1$$

$$L[t^a] = \frac{a!}{s^{a+1}} \qquad\qquad L[t^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$$

**مثال**

$$f(t) = \sin at$$

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

**مثال**

$$f(t) = \cos at$$

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

## ۲.۴ فرمولهای عکس لاپلاس

| $L^{-1}\left[F(s)\right]$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$ | $L[1]=\frac{1}{s}$ |
| $L^{-1}\left[\frac{k}{s}\right]=k$ | $L[k]=\frac{k}{s}$ |
| $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t$ | $L[t]=\frac{1}{s^2}$ |
| $L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$ | $L[e^{at}]=\frac{1}{s-a}\ ; s>a$ |
| $L^{-1}\left[\frac{a!}{s^{a+1}}\right]=t^a$ | $L[t^a]=\frac{a!}{s^{a+1}}$ |

## ۳.۴ عکس تبدیلات لاپلاس را محاسبه کنید

**مثال**

$$F(s)=\frac{1}{s^2+s-2}$$

$$s^2+s-2=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=1^2-4(-2)=1+8=9$$
$$s=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{2}{2}=1\\ \frac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s^2+s-2} &= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \\
&= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} \\
&= \frac{As+2A+Bs-B}{(s-1)(s+2)} \\
&= \frac{(A+B)s+2A-B}{(s-1)(s+2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
A+B=0 \to A=-B \\
2A-B=1 \to -2B-B=1 \to -3B=1 \to B=-\frac{1}{3} \to A=\frac{1}{3}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{\frac{1}{3}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+2} \\
L^{-1}\left[F(s)\right] &= L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{s-1}\right] + L^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{s+2}\right] \\
&= \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + (-\frac{1}{3})L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \\
&= \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t}
\end{aligned}
$$

**کاربرد تبدیل لاپلاس**

بعد از معرفی تبدیل لاپلاس و عکس تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل از آنها استفاده می کنیم .

۱. تبدیل لاپلاس مشتق

۲. تبدیل لاپلاس انتگرال

۳. مشتق تبدیل لاپلاس

۴. انتگرال تبدیل لاپلاس

از ۴ حالت فوق ، فعلاً به شماره ی ۱ می پردازیم .

## ۴.۴ تبدیل لاپلاس مشتق

### ۱.۴.۴ حالت اول

اگر تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه ی اول را حساب کنیم ، به فرم زیر تعیین می شود .

$$L\left[f'(t)\right] = sL\left[f(t)\right] - f(0)$$

**به کمک تبدیل لاپلاس جواب مسئله با شرط اولیه ی زیر را تعیین کنید**

$$y' + 2y = 4t \;\; ; \;\; y(0) = 5$$

$$\begin{aligned} L\left[y' + 2y\right] &= L\left[4t\right] \\ L\left[y'\right] + 2L\left[y\right] &= 4L\left[t\right] \end{aligned}$$

$$L[y'] = sL[y] - y(0)$$

$$\begin{aligned} sL[y] - y(0) + 2L[y] &= 4L[t] \\ (s+2)L[y] - 5 &= 4 \times \frac{1}{s^2} \quad ; L[y] = Y(s) \\ (s+2)Y(s) &= \frac{4}{s^2} + 5 \\ Y(s) &= \frac{4}{s^2(s+2)} + \frac{5}{s+2} \end{aligned}$$

$$L[y(t)] = Y(s) \qquad L^{-1}[Y(s)] = y(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{s^2(s+2)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}\\ &= \frac{As+B}{s^2}+\frac{C}{s+2}\\ &= \frac{(As+B)(s+2)+Cs^2}{s^2(s+2)}\\ &= \frac{As^2+2As+Bs+2B+Cs^2}{s^2(s+2)}\\ &= \frac{(A+C)s^2+(2A+B)s+2B}{s^2(s+2)}\end{aligned}$$

$$2B=4\to B=2$$
$$2A+2=0\to A=-1$$
$$A+C=0\to C=1$$

$$\to \frac{4}{s^2(s+2)}=\frac{-1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}$$

$$\begin{aligned}L^{-1}[Y(s)] &= L^{-1}\left[\frac{4}{s^2(s+2)}\right]+L^{-1}\left[\frac{5}{s+2}\right]\\ &= L^{-1}\left[\frac{-1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+2}\right]+5\times L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]\\ &= -1+2t+e^{-2t}+5\times e^{-2t}\end{aligned}$$

**مثال**

$$y'-y=\sin t-\cos t+e^t \quad ; \quad y(0)=-2$$

$$L[y'-y]=L[\sin t-\cos t+e^t]$$
$$L[y']-L[y]=L[\sin t]-L[\cos t]+L[e^t]$$

$$L[y'] = sL[y] - y(0)$$

$$\begin{aligned}
sL[y] - y(0) - L[y] &= L[\sin t] - L[\cos t] + L[e^t] \\
(s-1)L[y] + 2 &= \frac{a}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+a^2} + \frac{1}{s-1} \\
(s-1)L[y] &= \frac{a}{s^2+a^2} + -\frac{s}{s^2+a^2} + \frac{1}{s-1} - 2 \\
L[y] &= \frac{a}{(s^2+a^2)(s-1)} - \frac{s}{(s^2+a^2)(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-2}
\end{aligned}$$

$$\sin t \Rightarrow a = 1 \qquad\qquad \cos t \Rightarrow a = 1$$

$$L[y] = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1}$$

$$L[te^t] = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} - \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \\
&= \frac{A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+1)} \\
&= \frac{As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C}{(s-1)(s^2+1)} \\
&= \frac{(A+B)s^2 + (C-B)s + A - C}{(s-1)(s^2+1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&A-C=1\to A=C+1\to -B=B+1\to 2B=-1\to B=\frac{-1}{2}\\
&C-B=0\to C=B\to C=\frac{-1}{2}\\
&A+B=0\to A=-B\to A=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{-1}{2}s-\frac{1}{2}}{s^2+1}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}&=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}\\
&=\frac{(A+B)s^2+(C-B)s+A-C}{(s-1)(s^2+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A-C=0\to A=C\to C=\frac{1}{2}\\
&A+B=0\to A=-B\\
&C-B=1\to C=B+1\to A=B+1\\
&\to -B=B+1\to -2B=1\to B=\frac{-1}{2}\\
&\to A=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{-1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}$$

$$
\begin{aligned}
L^{-1}[Y(s)]&=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}\right]-L^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right]\\
&=L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{-1}{2}s-\frac{1}{2}}{s^2+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{-1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right]\\
&=-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{2}{s-1}\right]\\
&=-\sin t+te^t-2e^t
\end{aligned}
$$