جلسه دوم

۱-۰ احتمال شرطی

احتمال شرطی به ما کمک می‌کند تا احتمال وقوع یک رویداد (A) را با توجه به اینکه رویداد دیگری (B) اتفاق افتاده است محاسبه کنیم. به بیان دیگر، احتمال شرطی نشان می‌دهد که احتمال رخداد A در صورت رخداد B چقدر است.

فرمول احتمال شرطی به صورت زیر است:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{۱}$$

$$P(A|B) = P(B)P(A \cap B) \tag{۲}$$

مثال ساده:

فرض کنید یک جعبه حاوی ۳ توپ قرمز و ۲ توپ آبی داریم. ما می‌خواهیم احتمال اینکه توپی که بیرون آورده‌ایم قرمز باشد (A) ، با این فرض که می‌دانیم توپ بیرون آمده یک توپ است (B) .

داده‌ها:

- تعداد توپ‌های قرمز: ۳
- تعداد توپ‌های آبی: ۲
- کل توپ‌ها: ۵

احتمال شرطی اینکه توپ بیرون آمده قرمز باشد با فرض اینکه توپ بیرون آورده شده‌است، برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۳}{۵}$$

پس احتمال اینکه توپی که بیرون می‌آید قرمز باشد، ۶۰٪ است.

در اینجا یک برنامه ساده پایتون برای محاسبه احتمال شرطی آورده شده است:

```python
def conditional_probability(red_balls, blue_balls):
    #
    total_balls = red_balls + blue_balls

    #
    P_A_given_B = red_balls / total_balls
    return P_A_given_B

#
red_balls = 3
blue_balls = 2

#
probability = conditional_probability(red_balls, blue_balls)

#
print(f"                            : {probability:.2f}")
```

۰-۲ احتمال کل

احتمال کل (Total Probability) به ما کمک می‌کند تا احتمال یک رویداد را با استفاده از احتمال وقوع آن رویداد در شرایط مختلف (که به هر کدام از آن شرایط وزن یا احتمال خاصی داده می‌شود) محاسبه کنیم.

فرمول احتمال کل به صورت زیر است:

$$P(A) = P(A \cap B_۱) + P(A \cap B_۲) + ... + P(A \cap B_n)$$

یا به عبارت دیگر:

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) + ... + P(B_n)P(A|B_n)$$

مثال ساده: فرض کنید یک سبد شامل دو جعبه داریم:

- جعبه ۱ دارای ۳ توپ قرمز و ۲ توپ آبی است.
- جعبه ۲ دارای ۱ توپ قرمز و ۱ توپ آبی است.

احتمال انتخاب هر جعبه به صورت زیر است:

- احتمال انتخاب جعبه ۱: ۶۰٪ (یا ۰٫۶)
- احتمال انتخاب جعبه ۲: ۴۰٪ (یا ۰٫۴)

ما می‌خواهیم احتمال کل اینکه توپی که از سبد بیرون می‌آید قرمز باشد را محاسبه کنیم.

داده‌ها:

برای جعبه ۱:

- احتمال انتخاب جعبه ۱:

$$P(B_۱) = ۰٫۶$$

- احتمال قرمز بودن توپ در جعبه ۱:

$$P(A|B_۱) = \frac{۳}{۵} = ۰٫۶$$

برای جعبه ۲:

- احتمال انتخاب جعبه ۲:

$$P(B_۲) = ۰٫۴$$

- احتمال قرمز بودن توپ در جعبه ۲:

$$P(A|B_۲) = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

حال از فرمول احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲)$$

$$P(A) = (۰/۶)(۰/۶) + (۰/۴)(۰/۵) = ۰/۳۶ + ۰/۲ = ۰/۵۶$$

بنابراین احتمال کل اینکه توپی که بیرون می‌آید قرمز باشد برابر با ۰.۵۶ یا ۵۶% است.

```

#

#            1   2
P_B1 = 0.6
P_B2 = 0.4

#                  1   2
P_A_given_B1 = 3 / 5  #    1    3        5
P_A_given_B2 = 1 / 2  #    2    1        2

#
P_A = (P_B1 * P_A_given_B1) + (P_B2 * P_A_given_B2)
P_A
```

۰-۳ قانون بیز

قانون بیز (Bayes' Theorem) یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین قوانین در نظریه احتمال است که به ما امکان محاسبه احتمال یک رویداد را با استفاده از اطلاعات قبلی و احتمال شرطی می‌دهد. این قانون به خصوص در کاربردهایی مثل تشخیص پزشکی، یادگیری ماشین و تصمیم‌گیری بسیار کاربرد دارد.

فرمول قانون بیز:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

در اینجا:

- $P(A|B)$ به معنای احتمال وقوع رویداد A با توجه به اینکه رویداد B اتفاق افتاده است.
- $P(B|A)$ به معنای احتمال وقوع رویداد B با توجه به اینکه رویداد A اتفاق افتاده است.
- $P(A)$ به معنای احتمال وقوع رویداد A به تنهایی است (احتمال اولیه یا پیشین).
- $P(B)$ به معنای احتمال وقوع رویداد B است (احتمال کل).

مثال:

فرض کنید یک آزمایش پزشکی داریم که به ما می‌گوید احتمال بیمار بودن یک فرد (A) با توجه به نتیجه مثبت آزمایش (B) چقدر است.

داده‌ها:

- احتمال اینکه فردی بیمار باشد: $P(A) = ۰٫۰۱$ (یعنی ۱٪).
- احتمال اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد اگر فرد بیمار باشد: $P(B|A) = ۰٫۹$ (یعنی ۹۰٪).
- احتمال اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد (بدون توجه به بیماری): $P(B) = ۰٫۰۵$ (یعنی ۵٪). حال می‌خواهیم با استفاده از قانون بیز، احتمال اینکه فرد بیمار باشد با توجه به اینکه نتیجه آزمایش مثبت است، محاسبه کنیم:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{(۰٫۹) \cdot (۰٫۰۱)}{۰٫۰۵} = \frac{۰٫۰۰۹}{۰٫۰۵} = ۰٫۱۸۸$$

بنابراین احتمال اینکه فرد بیمار باشد با توجه به نتیجه مثبت آزمایش، ۱۸٪ است. نکته: قانون بیز به ما نشان می‌دهد که حتی اگر نتیجه آزمایش مثبت باشد، احتمال بیماری هنوز کم است چون احتمال وقوع خود رویداد بیماری (احتمال اولیه) بسیار کم است.

فرض کنید یک تست غربالگری برای یک بیماری نادر دارید. این بیماری فقط در ۱٪ از جمعیت رخ می‌دهد. تست دارای ویژگی‌های زیر است:

- اگر فردی واقعاً بیمار باشد، نتیجه تست در ۹۰٪ موارد مثبت است (یعنی دقت تست برای افراد بیمار ۹۰٪

است، یا $P(\text{Test+}|\text{Disease}) = ۰/۹$.

• اگر فردی بیمار نباشد، نتیجه تست در ۹۵٪ موارد منفی است (یعنی تست در ۵٪ موارد مثبت کاذب دارد، یا $P(\text{Test+}|\neg\text{Disease}) = ۰/۰۵$.

حالا اگر فردی نتیجه تست مثبت داشته باشد، چقدر احتمال دارد که واقعاً بیمار باشد؟ یعنی می‌خواهیم $P(\text{Disease}|\text{Test+})$ را حساب کنیم.

داده‌ها: • $P(\text{Disease}) = ۰/۰۱$ (احتمال پیشین بیماری) • $P(\neg\text{Disease}) = ۰/۹۹$ (احتمال پیشین عدم وجود بیماری) • $P(\text{Test+}|\text{Disease}) = ۰/۹$ • $P(\text{Test+}|\neg\text{Disease}) = ۰/۰۵$

محاسبه با استفاده از قانون بیز: قانون بیز به ما می‌گوید:

$$P(\text{Disease}|\text{Test+}) = \frac{P(\text{Test+}|\text{Disease}) \cdot P(\text{Disease})}{P(\text{Test+})}$$

ابتدا باید $P(\text{Test+})$ را پیدا کنیم. از فرمول احتمال کل برای $P(\text{Test+})$ استفاده می‌کنیم:

$$P(\text{Test+}) = P(\text{Test+}|\text{Disease}) \cdot P(\text{Disease}) + P(\text{Test+}|\neg\text{Disease}) \cdot P(\neg\text{Disease})$$

$$P(\text{Test+}) = (۰/۹ \times ۰/۰۱) + (۰/۰۵ \times ۰/۹۹) = ۰/۰۰۹ + ۰/۰۴۹۵ = ۰/۰۵۸۵$$

حالا که $P(\text{Test+})$ را داریم، می‌توانیم $P(\text{Disease}|\text{Test+})$ را محاسبه کنیم:

$$P(\text{Disease}|\text{Test+}) = \frac{(۰/۹ \times ۰/۰۱)}{۰/۰۵۸۵} = \frac{۰/۰۰۹}{۰/۰۵۸۵} \approx ۰/۱۵۳۸$$

نتیجه: احتمال اینکه فردی که نتیجه تست مثبت دارد، واقعاً بیمار باشد، برابر با ۱۵۳۸.۰ یا ۳۸.۱۵٪ است. این مثال نشان می‌دهد که حتی با وجود نتیجه مثبت در تست، احتمال واقعی بیمار بودن فرد همچنان نسبتاً پایین است، زیرا بیماری نادر است و درصد کمی از مردم آن را دارند.