



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

طراحی الگوریتم

تمرین دوم

بهمن ماه ۱۳۹۴

• حل n معادله n مجهول با استفاده از روش کرامر:

برای حل n معادله n مجهول ها، می توان از روش کرامر استفاده کرد.

فرض کنید ما دو معادله و دو مجهول زیر را داشته باشیم:

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

می توانیم این معادلات را به صورت زیر نیز نشان دهیم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

با توجه به روش کرامر می توان X و Y را به شکل زیر محاسبه کرد:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

به طور کلی برای محاسبه n معادله و n مجهول زیر:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

می توان با روش کرامر گفت:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)}b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)}b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

در این مساله ما n معادله را به صورت ماتریس ارائه می دهیم. به این صورت که خط اول ورودی تعداد مجهولات n است. سپس در n خط بعدی ماتریس A و بعد از آن نیز ماتریس B را در یک خط به شما می دهیم. برنامه باید در n خط به ترتیب جواب مجهولات را چاپ کند.

ورودی نمونه:
2 1 2 3 4 5 11
خروجی نمونه:
1 2

در این مثال ورودی، در خط اول گفتیم که دو معادله داریم، در دو خط بعدی ماتریس A را نشان داده ایم. (بین اعداد space است). سپس در خط آخر ماتریس B را نشان داده ایم؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

که جواب های آن می شود:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

پس به ترتیب 1 و 2 را چاپ کرده ایم.

برنامه شما باید آدرس فایل ورودی را بگیرد و در خروجی مطابق نمونه داده شده خروجی را چاپ کند.

راهنمایی : مثالی از حل دترمینان

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a * \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b * \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c * \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

• پریش

همه ما با مساله پریش آشنا هستیم!

فرض کنید n اثر هنری توسط n هنرمند ساخته شده اند. در مراسمی عجیب، هنرمندان تصمیم می گیرند که آثار هنری خود را به یکی دیگر از هنرمندان داخل سالن هدیه بدهند. به این صورت که ابتدا تمام آثار هنری جمع می شود. و سپس در انتهای مراسم به صورت کاملاً تصادفی، هر فرد یک اثر هنری را بردارد. مشکلی که ممکن است بوجود بیاید این است که یک اثر هنری، به دست صاحبش برسد.

ما از شما می خواهیم برنامه‌ای بنویسید که نشان دهد به چه احتمالی، هیچ اثری به دست صاحبش نخواهد رسید. و مراسم به صورت کاملاً صحیح انجام خواهد شد؟

ورودی مساله تعداد هنرمندان است. خروجی مساله احتمال به صورت کسری است. صورت کسر تعداد حالت های درست برای توزیع آثار هنری است و مخرج کسر تمام حالات توزیع یعنی $n!$. کسر باید تا جای ممکن ساده شود.

ورودی نمونه:
3
خروجی نمونه:
1/3

ورودی نمونه:
6
خروجی نمونه:
53/144

برنامه شما باید ورودی را از کاربر بگیرد و خروجی مورد نظر را چاپ کند.

با توجه به مساله بالا، زمان اجرای رابطه بازگشتی مربوط به محاسبه‌ی پریش را محاسبه کنید.

• آمار و احتمال

۱. فرض کنید کیسه ای در اختیار دارید که دو نوع مهره ی قرمز و آبی در آن وجود دارد. در هر بار برداشتن یک مهره، این مهره با احتمال p قرمز و با احتمال $1-p$ آبی است (پس از برداشتن و ملاحظه هر مهره آن را دوباره در کیسه قرار می دهیم). در این تمرین می خواهیم دفعات مشاهده‌ی مهره قرمز نسبت به کل دفعات برداشتن مهره ها از کیسه (q) را بررسی کنیم. برای این تمرین برنامه ای بنویسید که p را از کاربر بگیرد و برای $n=30, 300, 3000, 30000$ این نسبت را محاسبه کند. برای این منظور می توانید به صورت تصادفی عددی تولید کنید و با توجه به مقدار این عدد به شمارنده ی مربوط به مهره های قرمز اضافه کنید. در نهایت این مقدار را بر n تقسیم کنید. در گزارش این تمرین نمودار q بر حسب n را ترسیم کنید.

۲. تمرین قبل را در نظر بگیرید. فرض کنید این بار n نوع مهره در کیسه وجود دارد. بر روی هر مهره عددی بین ۱ تا n نوشته شده است. احتمال خارج شدن مهره ها متفاوت است. می خواهیم امید ریاضی عدد روی مهره ها را حساب کنیم.

برای این تمرین در هر مرتبه عددی به صورت تصادفی تولید کنید. سپس با توجه به مقدار عدد تولید شده به شمارنده ی مربوط به مهره متناسب به آن اضافه کنید. در نهایت مجموع اعداد را بر تعداد کل مهره های مشاهده شده تقسیم کنید. این عدد میانگین اعداد روی مهره های موجود در است. این فرایند را $m = 30, 300, 3000, 3000$ بار تکرار کنید. در گزارش مربوط به این سوال نمودار این میانگین را بر حسب m رسم کنید.

ورودی نمونه:	
3	
0.2 0.4 0.4	

که خط اول تعداد مهره ها و خط بعد احتمال وقوع آن ها را به ترتیب نشان می دهد.

۳. در این تمرین قصد بررسی توزیع های آماری را داریم.

در پوشه ی مربوط به این سوال تعدادی مجموعه داده وجود دارد. برنامه ای بنویسید که میانگین، انحراف معیار و واریانس این مجموعه ها را حساب کند.

موفق و پیروز باشید.