Введение

Из курса физики все помнят правило рычага: если две материальные точки A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 соединены жёстким невесомым стержнем, то на этом стержне найдётся единственная точка M такая, что, если подвесить стержень в этой точке, то система будет в равновесии. Более того, для расстояний A_1M и A_2M верно равенство $m_1 \cdot A_1M = m_2 \cdot A_2M$. Величины $m_1 \cdot A_1M$ и $m_2 \cdot A_2M$ называются моментами сил тяжести соответствующих точек. Для краткости материальные точки будем называть просто точками (или говорить, что масса расположена в точке) и не будем указывать размерность масс.

1. Массы $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$ расположены на числовой прямой в точках A_1 и A_2 с координатами x_1 и x_2 соответственно. Найдите координаты точки опоры и докажите, что она единственная.

Отрицательные массы

Ещё из курса физики все помнят закон архимеда про выталкивание из воды. В этом случае будем считать, что точка имеет отрицательную массу.

2. Решите предыдущую задачу если масса $m_1 < 0$.

Несколько точек на прямой

Пусть теперь есть несколько материальных точек. Точка опоры рассчитывается так же, как и в предыдущем пункте: сумма моментов сил тяжести относительно этой точки должна быть равна нулю. Это определение совпадает с предыдущим, если считать и массу m с учетом знака и плечо силы MA с учетом направления (тоже выбор знака).

3. Найдите центр масс M_{12} м.т. (A_1, m_1) и (A_2, m_2). После чего найдите центр масс M точек $(M_{12}, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3). Проделайте аналогичные вычисления с другим порядком выбора точек.

Центр масс

Материальной точкой называется пара (A, m), где A – точка плоскости, а m ненулевое вещественное число (масса точки). Материальные точки $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$ образуют систему материальных точек $\mathfrak{A}$, если их сумма масс $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ не равна нулю. Точка M называется центром масс системы $\mathfrak{A}$, если выполнено векторное равенство $m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$

4. Докажите, что если M – центр масс системы материальных точек $\mathfrak{A}$, то для любой точки O плоскости верно равенство $m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n} = m\overrightarrow{OM}$.
5. Докажите следующие два свойства центра масс системы материальных точек $\mathfrak{A}$:
   (a) Если у подсистемы $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ с суммарной массой m есть центр масс – точка M и у системы, получающейся из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{A}$ добавлением точки (M, m), есть центр масс точка N, то точка N также является центром масс системы $\mathfrak{B}$.
   (b) Центр масс существует и при этом единственен.

Задачи

6. Найдите центр масс системы материальных точек $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)$, имеющих координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ соответственно.
7. **Теорема Архимеда.** Докажите, что три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и каждая из медиан делится этой точкой в отношении $2 : 1$. (Подумайте над трёхмерным случаем).
8. Внутри треугольника ABC выбрана точка D. Докажите, что найдутся такие действительные числа a, b, c, что D – центр масс точек $(A, a), (B, b)$ и (C, c). Покажите, что тройка (a, b, c) определена однозначно с точностью до ненулевого множителя.

9. **Теорема Ван-Обеля.** Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}$.
10. На прямых AB, BC и AC, выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответсвенно. Докажите, что равенство
    (a) $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1$ равносильно пересечению прямых AA_1, BB_1 и CC_1 в одной точке.
    (b) $\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1$ равносильно принадлежности точек C_1, A_1 и B_1 одной прямой.
11. Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они проходят через одну точку.
12. Точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ – середины последовательных сторон шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают между собой.
13. В четырёхугольнике $ABCD$ отмечены точки M и N – середины сторон AB и CD. Точка K – середина отрезка MN, а P – точка пересечения медиан треугольника BCD. Докажите, что точки A, K и P лежат на одной прямой.
14. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{HO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$
15. **Теорема Ньютона.** Докажите, что центр окружности, вписанной в выпуклый четырёхугольник, лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей
16. Пусть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, O – центр окружности, E – точка пересечения диагоналей, X – точка пересечения внутренних касательных к окружностям, вписанным в треугольники AOB и COD. Докажите что точки O, E и X лежат на одной прямой.
17. На плоскости дан четырёхугольник $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей F .Пусть r_1, r_2, r_3 и r_4 – радиусы вписанных окружностей в треугольники ABF, BCF, CDF и DAF соответственно. Докажите, что $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$ тогда и только тогда, когда четырёхугольник $ABCD$ описанный.
18. Докажите предыдущее утверждение, если вместо ABF, CBF, CDF и DAF используются треугольники ABC, CBD, CDA и DAB.