Турниры

Турниром называется ориентированный граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним ребром. Турнир называется *сильно связанным*, если для любых двух различных вершин a и b есть путь из a в b.

1. **Теорема Редеи-Камиона.** Докажите, что в каждом турнире есть гамильтонов путь.
2. Докажите, что для любого турнира T равносильны условия
   (a) T не содержит циклов длины 3;
   (b) T не содержит циклов;
   (c) Ориентация рёбер в T задаёт строгий линейный порядок на множестве вершин T;
   (d) T содержит ровно один гамильтонов путь.
3. **Теорема Редеи-Камиона.** Докажите, что в турнире есть гамильтонов цикл, если и только если этот турнир сильно связанный.

Теорема Татта

Пусть G – простой граф, а S – произвольное множество его вершин. Через $odd(G \setminus S)$ обозначим количество компонент связности с нечётным количеством вершин в графе, который получается из G удалением всех вершин множества S и всех рёбер, смежных с ними. Напомним, что *паросочетанием* в графе называется любой множество попарно несмежных рёбер, паросочетание называется *совершенным*, если эти рёбра инцидентны всем вершинам графа.

4. **Теорема Татта.** Докажите, что граф G обладает совершенным паросочетанием, если и только если для любого набора его вершин S верно неравенство $|S| \geqslant |\,odd(G \setminus S)|$.
5. **Формула Татта–Бержа.** Докажите, что максимальное паросочетание в графе G не инцидентно $\max\limits_{S \subset V} (|\,odd(G \setminus S)| - |S|)$ вершинам.
6. **Теорема Петерсона.** Пусть G – двусвязный граф, в котором степень каждой вершины равна трём. Докажите, что в нём есть совершенное паросочетание.