

## Дискретная непрерывность

1. В ряд выложено 50 белых и 50 чёрных шариков.
  - а) Крайние шарики белые. Докажите, что есть подряд идущие шарики (но не все), начиная с левого, среди которых поровну белых и чёрных.
  - б) Докажите, что есть 30 подряд идущих шариков, среди которых поровну белых и чёрных.
2. Дана последовательность  $(a_n)$  такая, что  $a_1 = 1$ ,  $a_{100} = 19$  и  $a_{n+1} - a_n \in \{0, 1\}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что  $a_k = k/5$  для некоторого натурального  $k$ .
3. Существуют ли 2024 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.
5. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 монет, половина из которых – фальшивые. Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две непустые кучки. Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет или поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на 25-й день?
6. Есть 8 единичных кубиков, у каждого из которых по 3 белых и 3 чёрных граней. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб со стороной 2, на поверхности которого чёрных и белых квадратов поровну.
7. На плоскости отметили  $n$  синих и  $n$  красных точек общего положения ( $n \geq 2$ ). Докажите, что есть прямая, в каждой из полуплоскостей относительно которой синих и красных точек поровну (но не нуль).