Метод Штурма

1. Замену чисел $0 < a < b \in \mathbb{R}$ на числа $a+t$, $b-t$, где $t \in [0, (b-a)/2]$, назовём *сближением с фиксированной суммой*, а замену на числа ta, b/t, где $t \in [1, \sqrt{b/a}]$, – *сближением с фиксированным произведением.* Пусть $n \in \mathbb{N}$. Как при сближении ведут себя (уменьшаются или увеличиваются) величины:
   (a) ab; (b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; (c) a^n+b^n; (d) $1/a^n+1/b^n$?
2. Сумма неотрицательные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n равна 1. Докажите, что $(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \le 2 \cdot n!$.
3. Для неотрицательных чисел a, b и c докажите, что верно неравенство $(a+b+c)^5 \ge 81abc(a^2+b^2+c^2)$.
4. Сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 1. Докажите неравенства $0 \le xy+yz+zx-2xyz \le \dfrac{7}{27}$.
5. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, (a) наибольшую площадь; (b) наибольший периметр имеет правильный n-угольник.
6. Пусть x_1, x_2, $\ldots$, $x_n > 0$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$. Докажите неравенство
$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \ge (n-1)^n.$$
7. Для действительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \ge 1$ докажите неравенство
$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}.$$