

Симметрические многочлены

1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен. Докажите, что существует единственный многочлен $g(y_1, \dots, y_n)$ такой, что $f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.
2. Выразите следующие многочлены через элементарные симметрические многочлены:
а) $(a+b)(b+c)(c+a)$; б) $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$.
3. Пусть $f(x, y)$ – кососимметрический многочлен, т.е. $f(y, x) = -f(x, y)$. Докажите, что $f(x, y) : (x - y)$ и частное является симметрическим многочленом.
4. Пусть α и β – корни соответственно многочленов $f(x)$ и $g(x)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что найдётся многочлен $h(x) \neq 0$ с рациональными коэффициентами, корнем которого является $\alpha + \beta$.
5. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{10}$ является квадратом целого числа.
6. (Ньютон) Пусть $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$. Докажите, что $s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0$, где $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \dots = 0$.
7. Целые числа x_1, x_2, \dots, x_5 таковы, что $x_1 + x_2 + \dots + x_5$ и $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$ делятся на нечётное число n . Докажите, что $x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_5^5 - 5x_1 x_2 \dots x_5 : n$.
8. На доске выписаны несколько комплексных чисел таких, что сумма любых их натуральных степеней одна и та же. Докажите, что все эти суммы целые.
9. Все корни приведённого многочлена $P(z)$ с целыми коэффициентами лежат на окружности $|z| = 1$. Докажите, что $(z^m - 1) : P(z)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$.