Представимость многочлена в виде суммы квадратов

Рассмотрим два многочлена нескольких переменных с вещественными коэффициентами таких, что все их значения неотрицательны, но сами многочлены нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов.

1. **T. S. Motzkin, 1967 г.** Положим $F(x, y) = x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) + 1$.
   (a) Докажите, что $F(x, y) \geqslant 0$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) Предположим, что $F(x, y) = \sum f_j^2(x, y)$. Докажите, что каждое слагаемое $f_j(x, y)$ имеет вид $f_j(x, y) = c_j + xyh_j(x, y)$, где $c_j \in \mathbb{R}$, а $h_j(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$, и получите противоречие.
2. **R. M. Robinson, 1973 г.** Рассмотрим многочлен двух переменных $S(x, y) = x^2(x^2 - 1)^2 + y^2(y^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1)$.
   (a) Докажите, что $S(x, y) \geqslant 0$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) Предположим, что $S(x, y) = \sum f_j^2(x, y)$. Докажите, что каждый $f_j(x, y)$ имеет степень не выше третьей и обращается в нуль в следующих восьми точках: $(\pm 1; \pm 1)$, $(\pm 1; 0)$, $(0; \pm 1)$.
   (c) Пусть $f \in \mathbb{R}[x, y]$ и $\deg f \leqslant 3$. Присвоим точкам $(\pm 1; \pm 1)$ вес 1, точкам $(\pm 1; 0)$ и $(0; \pm 1)$ вес -2, а точке $(0; 0)$ — вес 4. Докажите, что взвешенная сумма значений многочлена f по всем этим точкам равна нулю, и получите противоречие.

Теорема о девяти точках на кубике

Рассмотрим общее утверждение, частный случай которого мы доказали в задаче 2. *Кубической кривой* (сокращённо, *кубикой*) называется множество точек на плоскости, заданное равенством $P(x, y) = 0$, где $P \in \mathbb{R}[x, y]$ и $\deg P \leqslant 3$. Теорема о девяти точках на кубике гласит: *„Если кубика проходит через восемь из девяти точек, образованных пересечением двух троек прямых, то она проходит и через девятую точку.”*

3. Пусть многочлен $P(x, y)$ зануляется в бесконечном количестве точек прямой $ax + by + c = 0$. Докажите, что $P(x, y)$ делится на $ax + by + c$.
4. Пусть кубики $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$ пересекаются в трёх точках на прямой $ax + by + c = 0$, причём Q не делится на $ax + by + c$. Докажите, что $P(x, y) - tQ(x, y)$ делится на $ax + by + c$ при некотором $t \in \mathbb{R}$.
5. Докажите теорему о девяти точках на кубике.
6. **Теорема Паскаля.** Докажите, что, если вершины замкнутой шестизвенной ломанной лежат на конике (кривой второго порядка), то точки пересечения прямых, содержащих противоположные звенья, лежат на одной прямой.
7. **Упражнение.** Рассмотрите вырожденные случаи теоремы Паскаля в явном виде, используя понятие кратности, а не апеллируя к предельным переходам.