Векторы и три точки на одной прямой

1. (a) На стороне AC треугольника ABC взята такая точка D, что $AD : DC = m : n$. Докажите равенство $\overrightarrow{BD} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{BA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$.

   (b) Докажите, что точка D находится на прямой AC тогда и только тогда, когда для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и произвольной точки B верно равенство
$$\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BA} + (1-\lambda)\overrightarrow{BC}.$$

   (c) Точки M и N делят отрезки AB и CD соответственно в равных отношениях, т.е. $AM : MB = CN : ND = m : n$. Докажите, что
$$\overrightarrow{MN} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}.$$

2. Вершина параллелограмма соединена с серединами противоположных сторон. В каком отношении делят проведённые отрезки диагональ параллелограмма, противоположную данной вершине?

3. Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC. Докажите, что верно равенство
$$S_{BPC}\cdot\overrightarrow{PA} + S_{CPA}\cdot\overrightarrow{PB} + S_{APB}\cdot\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

4. Дан треугольник ABC и точка M на стороне BC. Докажите, что $AM\cdot BC \le AB\cdot MC + AC\cdot BM$.

5. Точки K, L, M и N – середины сторон BC, CD, DE и EA пятиугольника $ABCDE$, точки P и Q – середины отрезков KM и LN. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны и найдите PQ/AB.

6. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC. Докажите равенство $a^2\cdot\overrightarrow{AA_1}+b^2\cdot\overrightarrow{BB_1}+c^2\cdot\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.