

Прогрессии

1. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – арифметическая прогрессия с положительными членами. Докажите равенства:

$$(a) \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_n a_1};$$

$$(b) \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

2. Докажите, что прогрессия $a, a+d, a+2d, \dots, a, d > 0$, содержит как подпоследовательность бесконечную геометрическую прогрессию, если и только если $a/d \in \mathbb{Q}$.

3. Числа $1, 2, \dots, 100$ содержатся в объединении N геометрических прогрессий. Докажите, что $N \geq 31$.

4. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует непостоянная арифметическая прогрессия длины n , состоящая из

(a) членов последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$;

(b) попарно взаимно простых натуральных чисел;

(c) степеней (больше первой) натуральных чисел.

Существует ли бесконечные такие прогрессии?

5. Существует ли непостоянная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, число делителей членов которой является неубывающей последовательностью?

6. Докажите, что для каждого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени больше первой найдётся непостоянная бесконечная в обе стороны целочисленная арифметическая прогрессия, которая не содержит ни одного члена вида $P(k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

7. Докажите, что множество значений многочлена $x^2 + 1$ в целых точках не содержит ни одной непостоянной геометрической прогрессии.

8. Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, а p_n – наибольший простой делитель a_n при каждом натуральном n . Докажите, что последовательность $\left(\frac{a_n}{p_n}\right)$ неограничена.

9. По окружности движутся $n > 4$ точек, каждая – с постоянной скоростью. Для любых четырёх из них есть момент времени, когда все они встречаются. Докажите, что есть момент, когда все точки встречаются.