

## Предел функции и непрерывность

Число  $A$  является *пределом* функции  $f$  в *точке*  $x_0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R} : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap D(f) \setminus \{x_0\} : |f(x) - A| \leq \varepsilon$ .

1. Вычислите следующие пределы:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5}{2x + 1}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{8x - 2}}{x^2 - 1}$ ; (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

2. Дайте определение  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  и вычислите пределы

(a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5 - 2x}$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

3. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  равносильно тому, что для любой последовательности  $(x_n) \rightarrow x_0$ , все элементы которой отличны от  $x_0$ , верно  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Функция *непрерывна в точке*  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Функция, непрерывная в каждой точке области  $D \subset \mathbb{R}$ , называется *непрерывной на  $D$* , а функция непрерывная на всей области определения называется просто *непрерывной*.

4. Докажите, что дробно-рациональная функция непрерывна во всех точках, не являющихся корнями знаменателя.

5. Функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $g$  непрерывна в точке  $f(x_0)$ . Докажите, что их композиция  $g \circ f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

6. Функция  $f$  непрерывна на отрезке. Докажите, что на нём

(a)  $f$  ограничена;

(b)  $f$  принимает наибольшее и наименьшее значения;

(c)  $f$  принимает все значения между наибольшим и наименьшим;

(d)  $f$  равномерно непрерывна, т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$x_1, x_2 \in [a, b] \ \& \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

7. Функция  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  непрерывна. Докажите, что у неё есть неподвижная точка.

8. Докажите, что непрерывная инъективная функция является монотонной.
9. Докажите, что степенная функция  $x^n$  непрерывна  $(0, +\infty)$  при всех  $n \in \mathbb{Q}$ .
10. Докажите непрерывность функций  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  и  $\operatorname{arccotg} x$  во всех точках, где они определены.
11. Вычислите пределы
  - (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$ ;
  - (b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{tg} 2x}$ ;
  - (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .
12. Найдите мощность множества всех непрерывных на отрезке  $[0; 1]$  функций.
13. Существует ли функция  $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , которая
  - (a) разрывна во всех точках отрезка  $[0; 1]$ ;
  - (b) непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках этого отрезка;
  - (\*) разрывна во всех иррациональных точках и непрерывна во всех рациональных точках этого отрезка?