

Критерий перпендикулярности. Теорема Карно

1. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
2. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, а точка I – центр вписанной. На лучах BC и AC отмечены соответственно точки A_1 и B_1 такие, что $AB_1 = BA_1 = AB$. Докажите, что $A_1B_1 \perp OI$.
3. (Карно) Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 соответственно на стороны BC, CA, AB треугольника ABC , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + C_1B^2 + B_1A^2.$$

4. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон вписанного четырехугольника на противолежащие стороны, пересекаются в одной точке.
5. (Штейнер) На плоскости отмечены шесть точек: A, B, C, A_1, B_1 и C_1 . Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 соответственно на прямые BC, AC и AB , пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C соответственно на прямые B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 , также пересекаются в одной точке.
6. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.
7. Пусть A_1, B_1, C_1 – основания перпендикуляров из вершин A, B, C треугольника ABC на прямую ℓ . Докажите, что перпендикуляры из A_1, B_1, C_1 соответственно на BC, AC, AB пересекаются в одной точке.