Комбинаторная теорема о нулях

Через F везде будет обозначаться произвольное поле, элементы которого мы будем называть просто числами. Для конечного множества $A \subset F$ и его элемента a положим $\varphi_A(a) = \prod\limits_{b \neq a} (a-b)$.

1. Пусть $p \in F[x]$ и $|A| \geqslant \deg p + 2$. Докажите, что $\sum\limits_{a \in A} \frac{p(a)}{\varphi_A(a)} = 0$.

Многочлены нескольких переменных

Одночлен $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ назовём *старшим* в многочлене $p \in F[x_1, \ldots x_n]$, если в любом его другом одночлене степень хотя бы одной переменной меньше, чем в $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$.

2. **Комбинаторная теорема о нулях.** Пусть одночлен $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ старший в многочлене $p \in F[x_1, \ldots x_n]$ и даны множества $A_1, \ldots, A_n$ чисел такие, что $|A_i| = d_i + 1$ при всех $i = \overline{1, n}$. Докажите, что в p коэффициент при $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}$ равен $\sum\limits_{a_1 \in A_1} \sum\limits_{a_2 \in A_2} \cdots \sum\limits_{a_n \in A_n} \frac{p(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\varphi_{A_1}(a_1) \cdot \varphi_{A_2}(a_2) \cdot \ldots \cdot \varphi_{A_n}(a_n)}$.

Коэффициент при $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ в $p \in F[x_1, \ldots x_n]$ далее будем обозначать через $[d_1, \ldots, d_n] p(x_1, \ldots, x_n)$.

3. **Мультиномиальная теорема.** Докажите следующее тождество: $[d_1, \ldots, d_n](x_1 + \ldots + x_n)^{d_1 + \ldots + d_n} = \binom{d_1 + \ldots + d_n}{d_1, \ldots, d_n}$.
4. **Теорема Коши-Дэвенпорта.** Докажите, что при $A, B \subset \mathbb{F}_p$ и $A, B \neq \varnothing$ верно неравенство $|A + B| \geqslant \min(|A| + |B| - 1, p)$.
5. **Лемма о перманенте.**Пусть A – матрица размера $n \times n$, $\operatorname{Per} A \neq 0$. Докажите, что для любого вектора $b = (b_1, \ldots, b_n)$ и любого набора $(S_1, \ldots, S_n)$ двухэлементных множеств найдётся $x \in S_1 \times \ldots \times S_n$ такой, что Ax отличается от b во всех координатах.
6. **Гипотеза Артина.** p – простое число и $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$. Докажите, что, если $\sum \deg P_i < n$ и у многочленов P_i есть общий корень, то у них есть ещё по крайней мере один общий корень.
7. **Теорема Алона–Фридланда–Калаи.** Для некоторого простого числа p в простом графе $G = (V, E)$ степени всех вершин не превышают $2p - 1$, а средняя степень вершин больше $2p - 2$. Докажите, что в этом графе есть p-регулярный подграф.
8. **Гипотеза Эрдёша–Хейльбронна.** Для произвольных $A, B \subset \mathbb{F}_p$ определим $A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B, b \neq a\}$. Докажите, что, если $A \neq B$, то $|A \oplus B| \geqslant \min(|A| + |B| - -2, p)$, а если $A = B$, то $|A \oplus A| \geqslant \min(2|A| - 3, p)$.
9. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в каждых двух соседних вершинах были различными.

10. Пусть G — ориентированный граф, содержащий остовный подграф, в котором у каждой вершины входящая и выходящая степени равны 1. Каждой вершине $v \in V$ присвоили множество $S_v \subset \mathbb{R}$, $|S_v| = 2$. Докажите, что можно выбрать числа $c(v) \in S_v$ так, чтобы для любой вершины u выполнялось равенство $\sum\limits_{v\in V,\,(u,v)\in E} c(v) \neq 0$.
11. Пусть p – простое число. Докажите, что в любом наборе из $2p-1$ целых чисел можно выбрать p таких, что их сумма делится на p.
12. Пусть p – простое число и $G = (V, E)$ – граф на $|V| > d(p-1)$ вершинах. Докажите, что существует непустое подмножество U его вершин такое, что количество d-клик в G, пересекающихся с U, кратно p.
13. **Теорема Алона и Фюреди.** Найдите наименьшее количество гиперплоскостей (задаются уравнениями первой степени), которое необходимо, чтобы покрыть все вершины куба в $\mathbb{R}^n$, кроме одной.
14. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим в трёхмерном пространстве множество $S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$, состоящее из $(n+1)^3 - 1$ точек. Найдите наименьшее возможное количество плоскостей, объединение которых покрывает всё S, кроме точки $(0, 0, 0)$.
15. Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Вначале клетчатая доска размера $n \times n$ пуста. Каждую минуту делают одну из следующих операций:

    • Если на доске есть три пустых клетки, образующие уголок вида  (поворачивать уголок нельзя), то в каждую из этих клеток можно положить камешек.

    • Если в каждой клетке некоторого ряда (строки или столбца) лежит по камешку, то можно убрать камешки из всех клеток этого ряда.

    Найдите все n, при которых через ненулевое количество ходов можно получить пустую доску.
16. Найдите $[(n-1)d, \dots, (n-1)d] \prod\limits_{i<j} (x_i - x_j)^{2d}$, где n – количество переменных, а d – произвольное натуральное число.
17. Пусть $A, B \subset \mathbb{F}_p$ и $|A| = |B| < p$. Докажите, что существуют такие перестановки $A = (a_1, \dots, a_k)$ и $B = (b_1, \dots, b_k)$, что все элементы вида $a_i + b_i$, $i = \overline{1, k}$, различны.
18. Пусть n – натуральное число. Набор из $2n+1$ различных конечных множеств разбили на 2 непустых поднабора. Докажите, что существует не меньше $2n$ различных симметрических разностей между множествами разных поднаборов.