

Дискретная непрерывность

1. В ряд выложено 50 белых и 50 чёрных шариков.
 - а) Крайние шарики белые. Докажите, что есть подряд идущие шарики (но не все), начиная с левого, среди которых поровну белых и чёрных.
 - б) Докажите, что найдутся 32 подряд идущих шариков, среди которых поровну белых и чёрных.
2. Дана последовательность (a_n) такая, что $a_1 = 1$, $a_{100} = 19$ и $a_{n+1} - a_n \in \{0, 1\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $a_k = k/5$ для некоторого натурального k .
3. Существуют ли 2024 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.
5. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 монет, половина из которых – фальшивые. Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две непустые кучки. Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет или поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на 25-й день?
6. Есть 8 единичных кубиков, у каждого из которых по 3 белых и 3 чёрных граней. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб со стороной 2, на поверхности которого чёрных и белых квадратов поровну.
7. На плоскости отметили n синих и n красных точек общего положения ($n \geq 2$). Докажите, что есть прямая, в каждой из полуплоскостей относительно которой синих и красных точек поровну (но не нуль).