Комбинаторика множеств

1. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновременно следующим условиям:
   (i) каждое множество состоит из 4 элементов;
   (ii) любые 2 различных множества имеют ровно 2 общих элемента;
   (iii) никакие 2 элемента не принадлежат вместе всем множествам.
2. В множестве из 20 элементов выбраны $2k+1$ различное семиэлементное подмножество, каждое из которых пересекается ровно с k другими выбранными подмножествами. Найдите наибольшее возможное k.
3. Таблицу $n \times n$ назовём *хорошей*, если её клетки можно покрасить в три цвета так, чтобы для любых двух различных строк и любых двух различных столбцов четыре клетки, стоящие на их пересечении, не были покрашены в один цвет.
   (a) Покажите, что существует хорошая таблица размера 9×9.
   (b) Докажите, что $n < 11$ для всякой хорошей таблицы $n \times n$.
4. Дано конечное семейство конечных множеств такое, что всякие два элемента принадлежат одновременно не более, чем двум множествам. Докажите, что, если любые 10 элементов покрываются объединением некоторых двух множеств, то все элементы покрываются объединением некоторых двух множеств.
5. В городе N существует множество оппозиционных обществ, каждое из которых состоит из 10 членов. Известно, что для любых 2004 обществ найдётся человек, состоящий хотя бы в 11 из них. Докажите, что правительство может арестовать 2003 человека так,чтобы в каждом обществе хотя бы один член был арестован.
6. Дано натуральное число k. В городе несколько детей, они ходят в несколько кружков. Известно, что в каждый кружок ходит не более $3k$ детей, любой ребёнок ходит ровно в три кружка, и для любых двух детей есть кружок, в который они оба ходят. Какое наибольшее количество детей может быть в городе?
7. Дано множество F, состоящее из попарно пересекающихся конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Можно ли утверждать, что существует конечное множество $Y \subset \mathbb{N}$ такое, что для любых $A, B \in F$ пересечение $A \cap B \cap Y$ непусто? Предположим, что нам известно, что все элементы F имеют одинаковую мощность, изменит ли это ответ на вопрос?
8. Дан набор $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ подмножеств n-элементного множества S, такой что $2 \leqslant |A_i| < n$, $i = \overline{1,k}$. Найдите наибольшее значение k, при котором гарантированно возможно выписать все элементы S в таком порядке, что никакое подмножество A_i из данного набора не состоит из подряд идущих элементов.