“Уголки” в графах

1. Двести школьников приняли участие в олимпиаде. Им предстояло решить шесть задач. Известно, что каждую задачу правильно решили не менее 120 участников. Докажите, что найдутся два школьника, такие что каждая задача решена хотя бы одним из них.

2. Все стороны и диагонали 43-угольника раскрашены либо в красный, либо в синий цвет так, что каждая вершина является концом 20 красных и 22 синих отрезков. Скажем, что три вершины многоугольника образуют *одноцветный* треугольник, если все его стороны одного цвета. Оказалось, что количество синих одноцветных треугольников равно 2022. Найдите количество красных одноцветных треугольников.

3. Множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ конечные. Докажите, что

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} |A_i|\Big)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_i \cap A_j|.$$

4. Каждый из семи преподавателей поставил “зачёт” или “незачёт” каждому из 42 студентов. Докажите, что найдутся два преподавателя, которые поставили одинаковые оценки хотя бы 18 студентам.

5. В конкурсе самодеятельности участвовали восемь певцов, которые исполнили m различны песен. Каждую песню исполнил квартет и каждая пара певцов вместе спела одинаковое количество песен. Найдите наименьшее возможное значение числа m.

6. Докажите, что любой связный простой граф с чётным числом рёбер можно разбить на “уголки”, которые могут пересекаться по вершинам, но не по рёбрам.