

Во всех задачах, связанных с разбиением на слагаемые, считается, что все слагаемые натуральные и (если не сказано иное) могут повторяться, а порядок их следования не важен.

1. Докажите, что для каждого натурального числа его количество разбиений в сумму попарно различных слагаемых равно количеству разбиений на нечётные слагаемые.

Рассмотрим всевозможные разбиения числа n на натуральные слагаемые и обозначим через $p(n)$ количество всех таких разбиений.

2. Докажите, что число разбиений на k слагаемых равно количеству разбиений, в которых наибольшее равно k .
3. Докажите неравенство $p(n+2) + p(n) \geq 2p(n+1)$.
4. Докажите, что при $n \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$ количество разбиений n на сумму чётного числа различных слагаемых равно количеству разбиений n на сумму на нечётного числа различных слагаемых, а при $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ разбиений на сумму чётного числа слагаемых на $(-1)^k$ больше.
5. Докажите тождество Эйлера $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}$.
6. Положим $\varphi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$ и $\pi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$, где $p(0) = 1$. Докажите тождество $\varphi(x)\pi(x) = 1$.
7. Вычислите $p(13)$.

Диаграмма Юнга, состоящая из n клеток и заполненная числами от 1 до n так, что числа возрастают при движении слева направо и сверху вниз, называется **таблицей Юнга**. Количество способов превратить диаграмму Юнга в таблицу – её **количество заполнений**. **Крюк клетки** – это она сама, а также клетки, расположенные справа от нее, и клетки, расположенные снизу. **Длина крюка** – это количество его клеток.

8. Пусть диаграмма Юнга сама является крюком. Сколько у неё есть заполнений?
9. Найдите количество заполнений диаграммы–прямоугольника $2 \times n$.
10. Докажите, что любой антисимметрический многочлен $g(x, y)$ имеет вид $g(x, y) = (x - y)h(x, y)$ для некоторого симметрического многочлена $h(x, y)$.
11. Докажите **формулу Крюков**: количество заполнений диаграммы равно факториалу количества ее клеток, деленному на произведение длин всех её крюков.