

## Сравнение скоростей роста

1. На плоскости отмечено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой отмеченной прямой будет меньше, чем до любой из отмеченных точек.
2. а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы квадрата и куба натуральных чисел.  
б) Докажите, что найдётся натуральное число  $n$  такое, что уравнение  $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = n$  имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.
3. Двое игроков отмечают точки на плоскости. Сначала первый игрок отмечает точку красным цветом, затем второй – 100 точек синим цветом, затем снова первый игрок отмечает одну точку красным цветом, а второй – 100 точек синим цветом и так далее. (Перекрашивать уже отмеченные точки нельзя.) Докажите, что первый игрок сможет отметить красным цветом три вершины некоторого правильного треугольника.
4. Площадь ограниченной фигуры на плоскости больше 1. Докажите, что её можно сдвинуть на ненулевой целочисленный вектор так, чтобы исходная фигура и её образ пересекались.
5. Из клетчатой плоскости вырезали все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Докажите, что оставшиеся клетки нельзя обойти конём, побывав на каждой по одному разу.
6. Докажите, что равными выпуклыми семиугольниками невозможно покрыть плоскость без наложений.