Многочлены Чебышёва

1. Последовательность многочленов $\big(T_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ определяется рекуррентно: $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$ и

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \text{ при } n\in\mathbb{N}.$$

Докажите, что $T_n(\cos\varphi)=\cos(n\varphi)$ для любого $\varphi\in\mathbb{R}$.

2. Пусть $P\in\mathbb{R}[x]$ – многочлен степени n, старший коэффициент которого равен 1. Докажите, что если $|P(x)|\le\dfrac{1}{2^{n-1}}$ при всех $x\in[-1,1]$, то $P(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

3. Числа x_1, x_2, …, $x_n\in[-1,1]$ попарно различные. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n}1/\prod_{j\ne i}|x_j-x_i|\ge 2^{n-2}$.

4. Пусть $P\in\mathbb{R}[x]$ – приведённый многочлен положительной степени. Оказалось, что $|P(x)|\le 2$ при всех $x\in[a,b]$. Докажите, что $b-a\le 4$.

5. Дан многочлен $P\in\mathbb{R}[x]$ степени $n\in\mathbb{N}$ такой, что $|P(x)|\le 1$ при всех $x\in[-1,1]$. Докажите, что для любого $x\notin[-1,1]$ верно неравенство $|P(x)|\le|T_n(x)|$.

6. Докажите, что если $|y|>1$, то выполнено равенство

$$T_n(y)=\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2-1})^n+\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2-1})^n.$$

7. Пусть a_0, a_1, …, a_n – действительные числа такие, что $|a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0|\le 1$ при всех $x\in[-1,1]$. Докажите, что тогда при всех $x\in[-1,1]$ выполнено неравенство $|a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n|\le 2^{n-1}$.

8. a) Для любого натурального n приведите пример многочлена P с целыми коэффициентами такого, что

$$P(x+x^{-1})\equiv x^n+x^{-n}.$$

b) Докажите, что если оба числа α и $\cos(\alpha\pi)$ рациональные, то $\cos(\alpha\pi)\in\{0,\pm1/2\}$.