

Функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *целозначной*, если её значение в каждой целой точке является целым числом. Для многочлена  $p \in \mathbb{R}[x]$  *конечной разностью I порядка* называется многочлен  $\Delta_p^1(x) = p(x+1) - p(x)$ . Конечные разности высших порядков задаются рекуррентными равенствами  $\Delta^{n+1}p(x) = \Delta^n p(x+1) - \Delta^n p(x)$ ,  $n \geq 1$ .

1. Докажите тождество  $\Delta_p^m(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} p(x+i)$ .
2. Докажите, что многочлен  $p \in \mathbb{R}[x]$  является целозначным, если и только если он представим в виде  $b_0 \binom{x}{m} + b_1 \binom{x-1}{m-1} + \dots + b_{m-1} \binom{x}{1} + b_m$ , где  $b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$ .
3. Дробь  $\frac{p(x)}{q(x)}$ ,  $p, q \in \mathbb{R}[x]$  рациональна при всех  $x \in \mathbb{N}$ . Докажите, что она – отношение двух взаимно простых многочленов из  $\mathbb{Z}[x]$ .
4. Дробь  $\frac{p(x)}{q(x)}$ ,  $p, q \in \mathbb{R}[x]$  принимает целые значения в бесконечном количестве точек  $x \in \mathbb{N}$ . Докажите, что она – целозначный многочлен.
5. Докажите, что у целозначного многочлена множество всех простых делителей его значений в целых точках бесконечно.
6. Пусть  $p$  и  $q$  – взаимно простые целозначные многочлены. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел  $r$  таких, что  $r$  делит  $p(n)$  и не делит  $q(n)$  при некотором натуральном  $n$ .
7. Пусть  $p$  – неприводимый целозначный многочлен. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$  таких, что в число  $p(n)$  по крайней мере один простой делитель входит в первой степени.
8. Непостоянный многочлен  $p \in \mathbb{Z}[x]$  таков, что для каждого  $n \in \mathbb{N}$  значение  $p(n)$  является  $k$ -ой степенью целого числа. Докажите, что  $p$  является  $k$ -ой степенью многочлена с целыми коэффициентами.
9. Многочлен  $P \in \mathbb{Z}[x]$  удовлетворяет следующим двум условиям:
  - для каждого  $a \in \mathbb{Z}$  есть ровно одно  $y \in \mathbb{Z}$  такое, что  $P(a, y) = 0$ ;
  - для каждого  $b \in \mathbb{Z}$  есть ровно одно  $x \in \mathbb{Z}$  такое, что  $P(x, b) = 0$ .
  - а) Докажите, что, если степень многочлена  $P(x, y)$  равна двум, то он делится на многочлен  $x - y + C$  либо  $x + y + C$ , где  $C$  – целое число.
  - б) Существует ли такой многочлен  $P(x, y)$ , не кратный ни одному многочлену вида  $x - y + C$  и  $x + y + C$ , где  $C$  – целое число?
10. Дан целозначный многочлен  $p$  такой, что  $\text{НОД}\{p(n) : n \in \mathbb{N}\} = 1$ . Докажите, что каждое натуральное число можно бесконечным количеством способов представить в виде  $\pm p(1) \pm p(2) \pm \dots \pm p(m)$ .
11. Дана целозначная функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Известно, что для любого простого  $p$  существует многочлен  $Q_p \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $\deg Q_p \leq 2023$ , такой, что  $p \mid f(n) - Q_p(n)$  при всех  $n \in \mathbb{Z}$ . Верно ли, что существует многочлен  $g \in \mathbb{Q}[x]$  такой, что  $g(n) = f(n)$  для любого целого  $n$ ?
12. Даны числа  $m, n, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ . Али и Мухамед играют в игру. На каждом ходу Али выбирает числа  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$ , после чего Мухамед выбирает число  $s \in \mathbb{N}$ , образует новую последовательность  $\{c_i = a_i + b_{i+s}\}_{i=1}^m$  и заменяет набор  $\{a_i\}$  на набор  $\{c_i\}$ . Если все числа полученной последовательности кратны  $n$ , то побеждает Али, иначе игра продолжается. Найдите все пары  $(m, n)$  такие, что Али может выиграть за конечное количество ходов при любом наборе  $a_1, \dots, a_m$ .