

Число A является *пределом* функции f в *точке* x_0 , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R} : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap D(f) \setminus \{x_0\} : |f(x) - A| \leq \varepsilon$.

1. Вычислите следующие пределы:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5}{2x + 1}$; (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{8x - 2x}}{x^2 - 1}$; (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

2. Дайте определение $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ и вычислите пределы

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1}$; (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{8x - 2x}}{x^2 - 1}$; (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

3. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ равносильно тому, что для любой последовательности $(x_n) \rightarrow x_0$, все элементы которой отличны от x_0 , верно $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Функция *непрерывна в точке* x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке области $D \subset \mathbb{R}$, называется *непрерывной на D* , а функция непрерывная на всей области определения называется просто *непрерывной*.

4. Докажите, что дробно-рациональная функция непрерывна во всех точках, не являющихся корнями знаменателя.

5. Функция f непрерывна в точке x_0 , а функция g непрерывна в точке $f(x_0)$. Докажите, что их композиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0 .

6. Функция f непрерывна на отрезке. Докажите, что на нём

(a) f ограничена;

(b) f принимает наибольшее и наименьшее значения;

(c) f принимает все значения между наибольшим и наименьшим;

(d) f равномерно непрерывна, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$x_1, x_2 \in [a, b] \ \& \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

7. Функция $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ непрерывна. Докажите, что у неё есть неподвижная точка.

8. Докажите, что непрерывная инъективная функция является монотонной.
9. Докажите, что степенная функция x^n непрерывна $(0, +\infty)$ при всех $n \in \mathbb{Q}$.
10. Докажите непрерывность функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arccotg} x$ во всех точках, где они определены.
11. Вычислите пределы
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 3x}$;
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{tg} 2x}$;
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.
12. Найдите мощность множества всех непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций.
13. Существует ли функция $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, которая
 - (a) разрывна во всех точках отрезка $[0; 1]$;
 - (b) непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках этого отрезка;
 - (*) разрывна во всех иррациональных точках и непрерывна во всех рациональных точках этого отрезка?