ВНИМАНИЕ! Техника полиномиального движения есть довольно мощный инструмент, однако к нему стоит относиться крайне осознанно и осторожно! Любое подобное решение на олимпиаде расценивается как *счётное*, потому малейшая ошибка/неправильное понимание, описание **может стоить вам задачи**.

Понятие *проективной плоскости* $\mathbb{RP}^2$ достаточно широкое: так, для изучения и доказательства свойств нам будет удобнее смотреть на него как на пучок плоскостей и прямых, проходящих через точку $O(0,0,0)$ пространства $\mathbb{R}^3$, с точки зрения использования бывает полезным и "более привычное плоское".

Всякая *точка* в $\mathbb{RP}^2$ задаётся **тремя** координатами $[a_0 : b_0 : c_0]$ с точностью до пропорциональности и отождествляется с **прямой в** $\mathbb{R}^3$, проходящей через точки O и $X(a_0, b_0, c_0)$.

Всякая *прямая* в $\mathbb{RP}^2$ также задаётся **тремя** координатами $[k_0 : l_0 : m_0]$ с точностью до пропорциональности и отождествляется **плоскостью в** $\mathbb{R}^3$, задаваемую уравнением $k_0x + l_0y + m_0z = 0$.

Здесь и далее нас будет интересовать семейство $\mathcal{F}$ отображений $f : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^2$ проективной прямой, играющей роль времени (по аналогии с $\mathbb{RP}^2$ она задаётся двумя координатами t_1 и t_2), в проективную плоскость, для которых

$$f(t_1, t_2) = [P(t_1, t_2) : Q(t_1, t_2) : R(t_1, t_2))],$$

где P, Q, R – однородные многочлены равной степени, взаимно простые в совокупности. Степенью зависимости точки $A = f(t_1, t_2)$ называется число $d = \deg P$. Аналогично вводится определение степени зависимости для прямых.

1. Докажите, что отображение, задающее линейное движение точки по прямой в $\mathbb{RP}^2$ есть элемент $\mathcal{F}$.

2. Точка A степени не больше a и точка B степени не больше b совпадают в $a+b+1$ положении (различных элементах $\mathbb{RP}^1$). Тогда A и B всегда совпадают.

3. (*Лемма о сложении степеней*) Если степень точки A не больше a, а степень точки B не больше b, то степень прямой AB не больше $a + b$. Сформулируйте двойственное утверждение для прямых.

4. Докажите, что центральная проекция и параллельный перенос сохраняют степень точки. Выведите отсюда, что проективное преобразование одной прямой (или же пучка прямых) в другую сохраняет степень точки.

5. (*Лемма об удвоении степени на конике*) Точка A лежит на конике $\mathcal{C}$, а точка B движется по прямой ℓ со степенью b. Тогда вторая точка пересечения прямой AB с $\mathcal{C}$ движется по $\mathcal{C}$ со степенью не больше $2b$.

6. Окружность ω касается прямой ℓ, а точка X проективно движется по ω. Тогда точка пересечения касательной к ω в X с ℓ также движется проективно.

7. Точка X проективно движется по окружности $\mathcal{C}$, а I – фиксированная точка, не лежащая на $\mathcal{C}$. Движется ли проективно $IX \cap \mathcal{C}$, отличная от X?

8. Прямая ℓ проективно вращается в пучке точке P. Точка $S \neq P$ — фиксирована. Движется ли основание перпендикуляра из точки S на ℓ проективно?

Реальные задачи

9. Пусть I – инцентр ΔABC, а Γ – его описанная окружность. Прямая AI повторно пересекает Γ в точке D. Пусть E – точка на дуге BDC окружности Γ, а F – точка на стороне BC, для которых $\angle BAF = \angle CAE = \frac{1}{2}BAC$. Докажите, что прямая через точку D и середину IF пересекает прямую EI на Γ.

10. Пусть H – ортоцентр ABC, а ℓ_1 и ℓ_2 – прямые через H, перпендикулярные друг другу. Прямая ℓ_1 пересекает BC и продолжение AB в точках D и Z соответственно, а прямая ℓ_2 пересекает BC и продолжение AC в точках E и X соответственно. Пусть Y – точка, такая что $YD \parallel AC$ и $YE \parallel AB$. Докажите, что точки X,Y и Z лежат на одной прямой.

11. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF, а также отмечена точка пересечения медиан G. Лучи DG, EG и FG повторно пересекают описанную окружность треугольника DEF в точках D', E' и F' соответственно. Докажите, что AD', BE' и CF' пересекаются в одной точке.

12. Дан треугольник ABC с центром описанной O и точка X внутри него. Пусть P, Q, R – основания перпендикуляров из X на стороны AB, AC и BC соответственно. Средняя линия треугольника ABC, параллельная BC, пересекает прямую PQ в точке T. Докажите, что ортополюс прямой OX относительно треугольника ABC лежит на прямой TR.

13. В остроугольном треугольнике ABC точки O, I – центры описанной и вписанной окружностей, P – произвольная точка на отрезке OI, точки P_A, P_B и P_C — вторые точки пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью ABC. Докажите, что биссектрисы углов BP_AC, CP_BA и AP_CB конкуррентны.

14. Пусть Ω – описанная окружность остроугольного треугольника ABC. Точки M и N – середины дуг BC окружности Ω, содержащей и не содержащей точку A соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку AN пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Описанная окружность треугольника XYN повторно пересекает Ω в точке Z. Докажите, что прямая MZ проходит через ортоцентр треугольника ABC.

15. Пусть ABC – остроугольный треугольник с центром O описанной окружности Ω и инцентром I. Точка S – середина дуги BC окружности Ω, **не содержащая** точку A. Точки E и F взяты на прямой OI так, что BE и CF перпендикулярны OI. Точка X взята так, что $XE \perp AC$ и $XF \perp AB$. Точка Y взята так, что $YE \perp SC$ и $YF \perp SB$. Наконец, точка D взята на BC так, что $DI \perp BC$. Докажите, что точки X, Y и D коллинеарны.