Момент инерции

Величина $I_P = m_1PA_1^2 + m_2PA_2^2 + \ldots + m_nPA_n^2$ называется *моментом инерции* системы точек (A_i, m_i), $i = \overline{1, n}$, относительно точки P. Момент инерции относительно центра масс данной системы называется центральным.

1. Докажите, что момент инерции I_P произвольной точки P и центральный момент I_M связаны равенством $I_P = I_M + mPM^2$.
2. Докажите, что центральный момент инерции I_M равен $\frac{1}{m}\Sigma_{i<j}m_im_jA_iA_j^2$.
3. **Теорема Дарбу**. Докажите, что если перенести массы некоторой группы материальных точек в их центр масс, то при этом центральный момент инерции не изменится.

Задачи

4. В плоскости даны две точки A и B и задано дествительное число $\lambda \neq 1$. Найдите множество всех точек X плоскости, таких что $\dfrac{|AX|}{|BX|} = \lambda$.
5. Внутри окружности радиуса R расположено n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не превосходит n^2R^2.
6. Докажите равенство $OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.
7. **Теорема Эйлера.** Докажите тождество $OI^2 = R^2 - 2Rr$.
8. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты такие точки A_1 и B_2, B_1 и C_2, C_1 и A_2 соответвственно, так, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 параллельны сторонам треугольника и пересекаются в точке P. Докажите, что $A_1P \cdot PA_2 + B_1P \cdot PB_2 + C_1P \cdot PC_2 = R^2 - OP^2$, где O и R – центр и радиус описанной окружности треугольника ABC.
9. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на окружности ω, а точка M – их центр масс. Прямые $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$ повторно пересекают оркужность ω в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Докажите неравенство $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n \geq MB_1 + MB_2 + \ldots + MB_n$.
10. **Неравенство Коши-Буняковского**.
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$
11. Докажите, что для положительных дейтсвительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ верно следующее неравенство:
$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$
12. Найдите все такие конфигурации из шести точек общего положения на плоскости, что треугольник, образованный любыми тремя из них равен треугольнику, образованному тремя остальными.
13. Даны точки $A_1, ..., A_n$. Рассмотрим окружность радиуса R, содержащую некоторые из них. Построим затем окружность радиуса R с центром в центре масс точек, лежащих внутри первой окружности, и т. д. Докажите, что этот процесс остановится, т. е. окружности начнут совпадать.