

Поля

В кольцах операции „+” и „ \cdot ” называются *сложением* и *умножением* соответственно. Кольцо \mathcal{F} такое, что $\mathcal{F} \setminus \{0\}$ – абелева группа по умножению, называется *полем*. В дальнейшем, если речь будет идти о кольце или поле, знак умножения будем для краткости опускать.

1. Определите, какие из колец $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_n, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}_n, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, являются полями, а какие – нет.
2. Докажите, что $\mathbb{Q}[i\sqrt{3}]$, определённое по аналогии с $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, – поле.

Факториальность колец многочленов

Пусть \mathcal{F} – поле, например, \mathbb{Q} или \mathbb{R} . Поскольку для многочленов из $\mathcal{F}[x]$ определено деление с остатком, то $\mathcal{F}[x]$ – евклидово кольцо с нормой \deg . В частности, $\mathcal{F}[x]$ всегда факториально. Хотя кольцо $\mathbb{Z}[x]$ и не евклидово, однако оно факториально, как показывает задача 4.

3. **Лемма Гаусса.** Содержанием многочлена $p \in \mathbb{Z}[x]$ называется наибольший общий делитель его коэффициентов, обозначение: $\text{cont}(p)$. Докажите тождество $\text{cont}(pq) = \text{cont}(p) \cdot \text{cont}(q)$.
4. Докажите, что многочлен $p \in \mathbb{Z}[x]$ приводим в $\mathbb{Q}[x]$ тогда и только тогда, когда он приводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Поле отношений целостного кольца \mathcal{K} строится так же, как \mathbb{Q} строилось из \mathbb{Z} . А именно, рассмотрим множество дробей $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathcal{K}$, $b \neq 0$. При этом, дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ отождествим, если $ad = bc$, а действия с дробями определим привычным образом.

5. Докажите, что поле отношений, действительно, является полем.

Пусть \mathcal{K} ещё и факториально. Одновременно с $\mathcal{K}[x]$ полезно рассматривать $\mathcal{L}[x]$, где \mathcal{L} – поле отношений кольца \mathcal{K} .

6. Объясните, почему кольца $\mathcal{L}[x]$ и $\mathcal{K}[x]$ факториальны.
7. Докажите, что кольцо $\mathcal{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ факториально.

Из результата последней задачи в частности следует факториальность кольца $\mathcal{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, для произвольного поля \mathcal{F} .

Теорема Виета

Многочлен, не изменяющийся при любых перестановках своих переменных называется симметрическим. Зафиксируем натуральное число n и для каждого k от 1 до n построим многочлен σ_k от n переменных: x_1, x_2, \dots, x_n , равный сумме всех произведений по k переменных.

8. **Теорема Виета.** Многочлен $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n корней с учётом кратности: x_1, x_2, \dots, x_n . Докажите равенства $\sigma_1 = -a_{n-1}/a_n$, $\sigma_2 = a_{n-2}/a_n, \dots, \sigma_n = (-1)^n a_0/a_n$.

Рассмотрим *лексикографический* порядок на множестве многочленов: одночлен $a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ старше одночлена $b x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, $a, b \neq 0$, если

для некоторого номера k , $0 \leq k \leq n$, выполнено неравенство $\alpha_k > \beta_k$, а также $\alpha_s = \beta_s$ при всех $s < k$.

9. Можно ли выписать бесконечную последовательность одночленов от n переменных, в которой каждый следующий младше предыдущего?
10. Докажите, что любой симметрический многочлен представим в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Ещё немного о полях

Характеристикой поля называется наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ раз}} = 0$. Если такого числа не существует, то говорят, что поле имеет характеристику нуль.

11. Докажите, что ненулевая характеристика поля – простое число.
В некотором смысле, поля \mathbb{F}_p и \mathbb{Q} минимальны. *Изоморфизмом* полей K и L называется такая биекция $\varphi: K \rightarrow L$, что для любых $a, b \in K$ верны равенства $\varphi(a +_K b) = \varphi(a) +_L \varphi(b)$ и $\varphi(a \cdot_K b) = \varphi(a) \cdot_L \varphi(b)$.
12. K – поле характеристики p . Докажите, что в K есть подполе, изоморфное \mathbb{Z}_p .
13. K – поле характеристики 0. Докажите, что в K есть подполе, изоморфное \mathbb{Q} .

Упражнения

14. Пусть $\overline{a_n \dots a_0}$ – десятичная запись числа 65^k при некотором $k \geq 2$. Докажите, что у многочлена $a_n x^n + \dots + a_0$ нет рациональных корней.
15. **Критерий Эйзенштейна.** Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ и для некоторого простого числа p все коэффициенты, кроме a_n , делятся на p , а свободный член не делится на p^2 . Докажите, что многочлен $f(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .
16. Пусть p – простое число. Докажите, что многочлен деления круга $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ неприводим.
17. Найдите все числа $a \in \mathbb{N}$, для которых найдётся многочлен $p \in \mathbb{Z}[x]$, удовлетворяющий равенствам $p(\sqrt{2} + 1) = 2 - \sqrt{2}$ и $p(\sqrt{2} + 2) = a$.
18. **Тождества Ньютона.** Пусть x_1, \dots, x_n – вещественные числа. Для каждого натурального m обозначим $S_m = x_1^m + \dots + x_n^m$. При всех $m > n$ положим $\sigma_m = 0$. Для каждого $m > 1$ докажите равенство $S_m = \sigma_1 S_{m-1} - \sigma_2 S_{m-2} + \dots + (-1)^m \sigma_{m-1} S_1 + (-1)^{m+1} m \sigma_m$.
19. Многочлен $ax^n - ax^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x^2 - n^2 b x + b$ имеет ровно n положительных корней. Докажите, что все корни равны между собой.
20. Найдите наибольшее число C , при котором для любой тройки вещественных чисел (x, y, z) такой, что $x + y + z = -1$, верно неравенство $C \cdot |x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leq |x^5 + y^5 + z^5 + 1|$.