

Принцип крайнего в теории чисел

1. Решите уравнение $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ в целых числах.
2. В десятичной записи некоторого числа цифры расположены слева направо в порядке строгого убывания. Может ли это число быть кратным числу 111?
3. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.
4. Докажите, что сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ не является целым числом при всех целых $n \geq 2$.
5. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.
6. Докажите, что $n \nmid 2^n - 1$ при всех целых $n \geq 2$.
7. Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n - 1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.
8. Имеются 15 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 14 гирь можно так разложить на две чашки весов, по семь на каждую, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют одну и ту же массу.
9. Можно ли при каком-либо натуральном n разбить числа $1, 2, \dots, n$ на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?