Соображения типа теоремы Безу

Для разложения на множители многочленов нескольких переменных часто оказывается полезной идея о том, что среди делителей многочлена нужно искать подстановки, зануляющие его.

1. Многочлен $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ зануляется во всех точках прямой $\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) == a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b = 0$. Докажите, что $\ell \mid p$.
2. Разложите на множители многочлен $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
3. Разложите на множители многочлен $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.
4. Разложите на множители многочлен $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – попарно различные, а $y_0, y_1, \ldots, y_n$ – произвольные вещественные числа. Исследуем вопрос: существует ли многочлен p степени не выше n такой, что $p(x_i) = y_i$ при всех i от 0 до n?

5. Докажите, что найдётся не больше одного такого многочлена p.
6. Придумайте формулу, в явном виде дающую искомый многочлен p.
7. На плоскости даны 2023 точки, любые четыре из которых лежат на параболе. Докажите, что они все лежат на одной и той же параболе.
8. Верно ли предыдущее утверждение, если слово «парабола» заменить на «график кубического многочлена»?

КТО для многочленов

Пусть $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – попарно взаимно простые, а $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ – произвольные многочлены над некоторым полем.

9. Докажите, чт существует, притом один, многочлен $p(x)$ такой, что $p(x) - a_i(x)$ делится на $p_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, и $\deg p < \deg p_1 + \ldots + \deg p_n$.

Упражнения

10. Выразите многочлен $(x_1+x_2+1)(x_2+x_3+1)(x_3+x_1+1)$ через основные симметрические многочлены.
11. Вещественные числа a, b, c удовлетворяют равенству $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.
12. Вещественные числа a, b, c удовлетворяют равенствам $a + b + c = a^2+b^2+c^2 = a^3+b^3+c^3$. Найдите все возможные значения выражения $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c - 2)$.
13. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x + y + z = = xy+yz+xz = -1$. Докажите, что $(xy-z^2)(yz-x^2)(zx-y^2) = xyz-1$.
14. Решите уравнение $c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b^2 \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a^2 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^2$, где a, b, c — заданные различные вещественные числа.
15. Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет равенствам $P(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$, $k = \overline{0, n}$. Найдите значение $P(n + 1)$.

16. Разложите на множители многочлен $(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4$.
17. Даны множество $M \subset \mathbb{R}$ и многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ и $\deg p < n < |M|$. Для каждого элемента $a \in M$ положим $\varphi(a) = \prod\limits_{M \ni b \neq a} (a-b)$. Докажите равенство $\sum_{a\in M} \frac{p(a)}{\varphi(a_i)} = 0$.

Задачи

18. Заданы целые числа $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Докажите, что среди значений многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, найдётся число, по модулю не меньшее $n!/2^n$.
19. Многочлен $P(x)$ имеет степень, не большую $2n$. Известно, что для каждого целого $k \in [-n, n]$ выполнено неравенство $|P(k)| \leqslant 1$. Докажите, что для всех $x \in [-n, n]$ верно неравенство $|P(x)| \leqslant 2^{2n}$.
20. Многочлен $P(x)$ степени n удовлетворяет $P(k) = k/(k+1)$ при всех $k = \overline{0, n}$. Найдите значение $P(n+1)$.
21. Учитель загадал многочлен $p(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщает ученикам k целых чисел $n_1, \ldots, n_k$ и число $p(n_1) \cdot p(n_2) \cdot \ldots \cdot p(n_k)$. При каком наименьшем k можно подобрать многочлен p и числа n_i так, что дети однозначно определят задуманный многочлен.
22. Дана функция $f(x)$ значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2023, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n. Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?
23. Фокусница готовится показать трюк. Она называет аудитории натуральное число n и $2n$ вещественных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$. После этого случайный зритель загадывает многочлен $p(x)$ степени n с вещественными коэффициентами, вычисляет $2n$ значений: $p(x_1), \ldots, p(x_{2n})$, и записывает полученные $2n$ значений на доску в порядке неубывания. Глядя на числа, записанные на доске, фокусница должна назвать многочлен, задуманный зрителем. Может ли фокусница придумать стратегию, гарантирующую ей успешное выполнение трюка?