

Принцип крайнего

1. Из точки, лежащей внутри выпуклого многоугольника, опустили высоты на все стороны этого многоугольника. Докажите, что по крайней мере одно из оснований высот лежит на стороне, а не на продолжении.
2. На плоскости даны n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что всего есть не менее $2n - 3$ различных отмеченных точек.
3. На плоскости даны n точек такие, что площадь любого треугольника с вершинами в них не превышает 1. Докажите, что все данные точки можно накрыть треугольником площади 4.

Принцип Дирихле

4. Докажите, что в любом выпуклом $2n$ -угольнике есть диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.
5. Каждая из девяти данных прямых разбивает квадрат на два четырёхугольника, площади которых относятся как $2 : 3$. Докажите, что через некоторую точку проходят по крайней мере три прямые.

Проекция

6. Ломанная длины 200 нарисована внутри единичного квадрата. Докажите, что можно провести прямую, параллельную одной из сторон квадрата, которая имеет с ломанной не менее 101 общей точки.
7. На плоскости расположено конечное множество не обязательно выпуклых многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.

Индукция

8. Найдите все $n > 3$ такие, что возможно нарисовать n точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходили ровно три отрезка.
9. Конечный набор прямых разбивает плоскость на несколько частей. Докажите, что части можно раскрасить в два цвета так, что никакие две части, имеющие общую сторону, не будут окрашены в один цвет.

Упражнения

10. Множество S , состоящее из $n \geq 3$ точек плоскости таково, что любые три различные точки S можно покрыть бесконечной полоской ширины 1. Докажите, что всё S можно покрыть полоской ширины 2.
11. Выпуклый многоугольник P лежит внутри выпуклого многоугольника Q . Докажите, что периметр Q больше периметра P .
12. На плоскости даны $n \geq 3$ точек общего положения. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из данных точек.
13. Из каждой вершины многоугольника провели высоты ко всем сторонам, у которых она не является концевой. Докажите, что основание по крайней мере одной из высот лежит на соответствующей стороне, а не на её продолжении.
14. Какое наименьшее количество точек можно отметить внутри выпуклого n -угольника так, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах этого n -угольника была отмечена хотя бы одна точка?
15. На плоскости отмечено конечное количество точек так, что на любой прямой, соединяющей две отмеченные точки, лежит по крайней мере ещё одна отмеченная точка. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной прямой.
16. На плоскости отметили n точек, не все из которых лежат на одной прямой. Докажите, что есть не менее n различных прямых, соединяющих эти точки.
17. Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник можно разбить непесекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.
18. Докажите, что в выпуклом n -угольнике невозможно провести больше, чем n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.
19. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$. Докажите, что описанная окружность некоторого треугольника $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ содержит весь этот многоугольник.
20. На отрезке длины 1 закрашено несколько отрезков, причём расстояние между любыми двумя закрашенными точками не равно 0.1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превышает 0.5.