Производная

Функция f называется *бесконечно малой по сравнению с функцией* g *в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. Обозначение $o(g)$ читается как „o-малое от g", при этом, сама точка x_0 не указывается и считается известной из контекста.

Производной функции f *в точке* x_0 называется предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если он существует. *Производной функции* f называется функция $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

1. Проверьте следующие свойства:
   (a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \iff f(x)=A+o(1)$;
   (b) f непрерывна в точке $x_0 \iff f(x)=f(x_0)+o(1)$;
   (c) если производная функции f в точке x_0 существует, то $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)$.
   (d) если для некоторого числа $A\in\mathbb{R}$ верно равенство $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+o(h)$, то $f'(x_0)=A$.
2. Приведите пример функции, непрерывной в некоторой точке, но не имеющей в ней производной.

Дифференцирование – это вычисление производной. Функция называется *дифференцируемой в точке*, если она имеет в ней производную.

3. Вычислите производные функций $f(x)\equiv C$ и $f(x)=x$.
4. Докажите, что, если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, а $k,\ell\in\mathbb{R}$, то $kf\pm\ell g$ тоже дифференцируемы в точке x_0, причём $(kf(x_0)\pm\ell g(x_0))'=kf'(x_0)\pm\ell g'(x_0)$.
5. Докажите, что, если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то $f\cdot g$ тоже дифференцируема в точке x_0, причём $(f(x_0)\cdot g(x_0))'=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.
6. Докажите, что, если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то $\frac{1}{f}$ тоже дифференцируема в точке x_0, причём $(\frac{1}{f(x_0)})'=-\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

7. Функции f и g дифференцируемы в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$. Выведите формулу производной отношения $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.
8. Докажите, что, если функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то их композиция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0, причём $(g(f(x_0)))' = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.
9. Докажите, что, если монотонная функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $f^{-1}(x_0)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и верно равенство $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$, т. е. $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
10. Вычислите производную степенной функции x^n для показателя n вида $-k$ и $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Получите формулу производной степенной функции x^n для произвольного n.
11. Найдите производные тригонометрических функций: sin, cos, tg, ctg.
12. Найдите формулы для производных обратных тригонометрических функций.
13. Продифференцируйте следующие функции:
    (a) $\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}$; (b) $x \sin x + \cos x$; (c) $(x^2 + 3x - 5)^4$;
    (d) $\sqrt[4]{1 + \cos^2 5x}$; (e) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; (f) e^x; (g) x^x.

Касательная в точке x_0 к графику функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

14. Докажите, что, если a – корень кратности k многочлена $p(x)$, то a – корень кратности $k - 1$ производной $p'(x)$.
15. Пусть касательная к графику многочлена p в точке x_0 имеет уравнение $y = kx + b$. Докажите, что x_0 – кратный корень многочлена $p(x) = kx - b$.