ТЧ – 8

1. Дано простое число $p > 100$. Нечётное составное число $n < 4p^2$ назовём *странным*, если для каждого его собственного (отличного от 1 и n) делителя q хотя бы одно из чисел $q + 2p$ или $q - 2p$ также является натуральным делителем числа n. Докажите, что количество странных чисел не превосходит $p/3$.
2. Дано натуральное число n. Множество A, составленное из натуральных чисел таково, что для каждого натурального числа m, не превосходящего n, во множестве A есть число, кратное m. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A?
3. Дано n различных натуральных чисел. Рассмотрим все $\frac{1}{2}n(n-1)$ попарных сумм этих чисел. Для каждой из этих попарных сумм на доску выписали количество исходных чисел, меньших этой суммы, на которые эта сумма делится. Какое наибольшее значение может принимеать сумма выписанных на доску чисел?
4. Назовём множество натуральных чисел, не превосходящих 10^{100}, *консервативным*, если ни один из его элементов не является делителем произведения всех остальных элементов, и *прогрессивным*, если вместе с любым своим элементом оно содержит все кратные ему числа, не превосходящие 10^{100}. Одноэлементные множества считаются консервативными. Каких множеств больше: прогрессивных или консервативных?
5. На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$ месте?
6. Даны $2n$-значное натуральное число a и натуральное число k. Числа a и ka записали на ленте и каждую из двух записей разрезали на двузначные числа, начиная с последних цифр (при этом числа 00, 01, …, 09 здесь тоже считаются двузначными; если в числе ka оказалось нечётное количество цифр, к нему спереди приписали 0). Оказалось, что у числа a полученные двузначные числа строго убывают справа налево, а у числа ka – строго возрастают. Докажите, что $k \geqslant n$.
7. Дано нечётное натуральное число a, большее 100. На доску выписали все натуральные числа вида $\frac{a-n^2}{4}$, где n – натуральное число. Оказалось, что при $n \leqslant \sqrt{a/5}$ все они простые. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску числе простое или равно единице.
8. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k < 2020$) удовлетворяют следующему условию: для любого из них можно выбрать из остальных одно

или несколько так, чтобы сумма их 1024-ых степеней делилась на его 1024-ую степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

9. Дано натуральное число n. За одну операцию можно либо вычесть из имеющегося числа любое натуральное число, меньшее его наименьшего простого делителя, либо разделить его на него наименьший простой делитель. Существует ли такое составное n, что из него нельзя получить простое число менее, чем за 2024 операции?
10. Дано натуральное число k, большее 1. Натуральное число n, большее 1 и взаимно простое с k, назовём *правильным*, если для любого натурального делителя d ($d < n$) чисúа n число $d + n$ не взаимно просто с n. Докажите, что количество правильных чисел конечно.
11. На доске написано несколько рациональных чисел. Если есть числа x и y, то можно дописать число $\frac{x+y}{1-xy}$. Докажите, что какое-то рациональное число нельзя получить с помошью таких операций.
12. Докажите, что для любых натуральных чисел $d > 1$ и m в последовательности $a_n = 2^{2^n} + d$ найдутся два числа a_k и a_ℓ ($k \neq \ell$), у которых наибольший общий делитель больше m.