

Будем говорить, что точка X_t движется линейно, если ее декартовы координаты могут быть записаны как $(at + b, ct + d)$, где a, b, c, d – некоторые фиксированные числа, а t – переменное время.

Будем говорить, что прямая ℓ_t движется линейно, если существует такой фиксированный вектор v , что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\ell_t = \ell_0 + t \cdot v$ (где под прибавлением вектора подразумевается параллельный перенос на него).

1. Докажите или опровергните:
 - (а) Середина отрезка между двумя линейно движущимися точками движется линейно.
 - (б) Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно.
 - (с) Прямая, проведённая через две линейно движущиеся точки, движется линейно.
 - (д) Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно
2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. На отрезках BC_1 и AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1 .
3. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K и L соответственно так, что $\angle AKD = \angle CLD$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BKL , равноудален от A и C .
4. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая ℓ , перпендикулярная стороне BC , пересекает отрезок BC в точке S и пересекает отрезки BB_1 и CC_1 в точках D и E . Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на прямой AS .
5. Три линейно движущиеся точки три раза легли на одну прямую. Докажите, что они всегда лежат на одной прямой.
6. Вершины четырехугольника движутся линейно. Оказалось, что его диагонали три раза перпендикулярны, докажите, что они всегда перпендикулярны.
7. Точка P выбирается на стороне BC равностороннего треугольника ABC . Докажите, что прямые Эйлера треугольников $BA P$ и $CA P$ пересекаются на стороне BC .
8. Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного в окружность четырехугольника, лежат на одной прямой.
9. Две параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2 пересекают стороны треугольника BC , CA и AB в точках X_i, Y_i, Z_i соответственно ($i = 1, 2$). Перпендикуляры, проведенные к соответствующим сторонам треугольника через точки X_i, Y_i и Z_i , образуют два треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников касаются.