Лемма о хороводах для орграфов

1. Дан орграф G. Докажите, что если исходящая
   (a) степень каждой его вершины равна 1, то граф G содержит хотя бы ориентированный цикл;
   (b) и входящая степени каждой его вершины равны 1, то граф G является объединением непересекающихся ориентированных циклов.
2. Выбежав после уроков во двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, чтобы члены одной команды друг в друга снежками не бросали.
3. Найдите все целые числа $n \geq 2$, обладающие следующим свойством: для любых целых чисел a_1, a_2, …, a_n, сумма которых не делится на n, существует индекс $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такой, что ни одно из чисел a_i, $a_i + a_{i+1}$, …, $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$ не делится на n (считаем, что $a_{j+n} = a_j$).
4. Все рёбра многогранника ориентированы стрелками так, что у каждой вершины многогранника есть входящее ребро и есть исходящее ребро. Докажите, что для некоторой грани многогранника рёбра на её границе образуют ориентированный цикл.
5. Таблица с 2^n строками и n столбцами заполнена ± 1 так, что все строки в таблице попарно различные. В произвольном подмножестве клеток числа заменили на нули. Докажите, что можно выбрать непустое подмножество строк так, чтобы в выбранных строках сумма чисел в каждом столбце равна нулю.