ЧУМ. Теоремы Мирского и Дилуорса

Бинарное отношение $\preceq$ на множестве S называется *отношением частичного порядка*, если для любых x, y, $z \in S$

- $x \preceq x$ (рефлексивность);
- из $x \preceq y$, $y \preceq x$ следует, что $x = y$ (антисимметричность);
- из $x \preceq y$, $y \preceq z$ следует, что $x \preceq z$ (транзитивность).

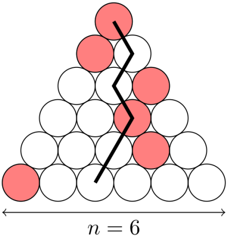
Цепью (*антицепью*) в ЧУМе называется его подмножество, любые два элемента которого сравнимы (несравнимы).

1. (`Мирский`) Пусть S – конечное частично упорядоченное множество. Докажите, что размер максимальной цепи в S равен минимальному числу непересекающихся антицепей, покрывающих всё множество S.

2. (`Эрдёш, Секереш`) Докажите, что в последовательности из $nm+1$ различных чисел найдётся или возрастающая подпоследовательность из $n+1$ чисел или убывающая подпоследовательность из $m+1$ чисел.

3. На прямой нарисовано конечное множество отрезков. Среди любых $n+1$ нарисованных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что можно отметить на прямой n точек таким образом, что на каждом отрезке хотя бы одна точка окажется отмеченной.

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Японский треугольник* состоит из $1+2+\ldots+n$ одинаковых кругов, выложенных в форме равностороннего треугольника так, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ ряд с номером i состоит ровно из i кругов, в точности один из которых покрашен в красный цвет.



Путём ниндзя в японском треугольнике называется последовательность из n кругов, построенная следующим образом: начинаем с круга в ряде 1 и затем поочередно спускаемся вниз, переходя от круга к одному из двух кругов непосредственно под ним, пока не дойдём до ряда n (см. пример японского треугольника для $n = 6$, а также пути ниндзя, содержащего два красных круга). При $n = 1023$ найдите наибольшее число k такое, что в любом японском треугольнике существует путь ниндзя, содержащий хотя бы k красных кругов.

5. (`Дилуорс`) Докажите, что размер максимальной антицепи в конечном ЧУМе S равен минимальному числу непересекающихся цепей, покрывающих всё S.

6. На доске записали различные натуральные числа. Среди любых $n + 1$ из них можно выбрать два числа так, что одно делится на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в n цветов так, чтобы из любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

7. В задании олимпиады n задач. Известно, что нет двух школьников, один из которых решил все задачи, решенные другим. Какое максимальное число школьников могло принимать участие в олимпиаде?

8. Докажите, что при любой правильной раскраске вершин графа G в $\chi(G)$ цветов найдётся путь длины $\chi(G)$, все вершины в котором разного цвета.

9. Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка A находится ниже и правее шашки B, то они находятся в соседних по диагонали клетках?