

## Сколько угодно много, но не бесконечно

1. Можно ли из последовательности чисел  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  выделить **а)** сколь угодно длинную; **б)** бесконечную арифметическую прогрессию?
2. Существует ли **а)** сколь угодно длинная; **б)** бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для любых трёх подряд идущих её элементов  $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$  верно равенство  $a_{k+2}^{-1} = a_k^{-1} + a_{k+1}^{-1}$ ?
3. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. На одно из них падает луч света. Докажите, что независимо от того, насколько мал угол, луч света отразится от зеркал лишь конечное число раз.
4. На плоскости дано конечное количество точек, причём любые три из них являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника. Докажите, что всегда можно добавить ещё одну точку так, что это свойство сохранится. Верно ли аналогичное утверждение для бесконечного количества точек?
5. Король стоит в левом нижем углу шахматной доски. Шахматную доску продлили вправо и влево на сто клеток. Может ли король обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? Тот же вопрос, если доску продлили вправо и влево до бесконечности.
6. Существует ли не постоянная **а)** сколь угодно длинная; **б)** бесконечная арифметическая прогрессия, состоящих из степеней натуральных чисел (степени  $\geq 2$ )?
7. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует **а)** сколь угодно длинная; **б)** бесконечная одноцветная арифметическая прогрессия?