Мультипликативные функции

Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ называется *мультипликативной функцией теории чисел*, если из НОД$(m, n) = 1$ следует $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$.

1. Докажите мультипликативность следующих трёх функций:
   (a) $d(n)$ – количество всех натуральных делителей числа n;
   (b) $\sigma(n)$ – сумма всех натуральных делителей числа n;
   (c) $\varphi(n)$ – количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.
2. Выразите значения этих функций через каноничекое разложение n.
3. **Теорема Эйлера.** Докажите, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ для любых взаимно простых чисел a и n.
4. Функция f мультипликативна. Докажите, что и $\sum_{d|n} f(d)$ – тоже.

Порядки

Наименьшее натуральное число d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ называется *порядком* a по модулю n и обозначается $\mathrm{ord}_n(a)$. Число a называется *первообразным корнем* по модулю n, если $\mathrm{ord}_n(a) = \varphi(n)$.

5. Докажите, что, если $a^m \equiv 1 \pmod{n}$, то $\mathrm{ord}_n(a) \mid m$.
6. Докажите равенство $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
7. Докажите, что для каждого простого числа p есть первообразный корень по модулю p и найдите их количество.
8. Числа p и q просты и $q \mid a^p - b^p$. Докажите, что либо $q \mid a - b$, либо $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Лемма об уточнении показателя (LTE lemma)

Пусть $p > 2$ – простое число, целые числа a и b таковы, что $p \mid a - b$, но p не делит ab, а n – произвольное натуральное число.

9. Пусть $p \nmid k$. Докажите равенство $v_p(a^{kn} - b^{kn}) = v_p(a^k - b^k)$.
10. Докажите равенство $v_p(a^{pn} - b^{pn}) = v_p(a^n - b^n) + 1$.
11. **LTE lemma,** $p > 2$ Докажите равенство $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$.
12. Пусть числа a, b и n нечётны. Докажите, что $v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b)$.
13. **LTE lemma, $p = 2$.** Пусть числа a и b нечётны, а n чётно. Докажите, что $v_2(a^n - b^n) = v_2(a^2 - b^2) + v_2(n) - 1$.

Упражнения

14. Найдите все натуральные числа n такие, которых найдутся простые p и q, $p + 2 = q$, такие, что числа $2^n + p$ и $2^n + q$ простые.
15. Найдите все натуральные числа n и k такие, что $(n - 1)! + 1 = n^k$.
16. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ натуральных чисел определена по следующим правилам: $a_1 = 1$ и $a_n = 5a_{n-1} + 3^{n-1}$ при всех $n \geqslant 2$. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится $a_{2^{2019}}$.
17. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что по крайней мере одно из чисел $2^{2^n} + 1$ и $2018^{2^n} + 1$ составное.

18. Аня и Боря играют в игру, делая ходы по очереди: за ход разрешается выбрать номер $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, не выбранный никем ранее, и цифру a_i ($p > 2$ – фиксированное простое число). Игра заканчивается, когда все номера выбраны. Аня ходит первой и она хочет, чтобы число $M = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \ldots + 10^{p-1} a_{p-1}$ делилось на p, а Боря пытается ей помешать. Докажите, что Аня может добиться своего.
19. Даны последовательности (a_n) натуральных чисел и (p_n) простых чисел такие, что для каждого $n \geqslant 1$ выполнены условия: $p_n | a_n$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{p_n}(p_n^{1009} - 1)$. Докажите, что в последовательности a_n найдётся число, кратное 2018.
20. Найдите все натуральные числа n такие, что $n^2 \mid 2^n + 1$.
21. Существует ли натуральное число $n > 1$ такое, что $n \mid 2^{n-1} + 1$?
22. Бесконечное множество $S \subset \mathbb{N}$ назовём *хорошим*, если для любых трёх попарно различных элементов $a, b, c \in S$ все натуральные делители числа $\frac{a^c - b^c}{a-b}$ принадлежат S. Докажите, что для каждого натурального числа $n > 1$ существует хорошее множество, не содержащее n.
23. Докажите, что для любого натурального числа m можно найти m последовательных натуральных чисел n таких, что произведение $(1^3 + 2018^3) \cdot (2^3 + 2018^3) \cdot \ldots \cdot (n^3 + 2018^3)$ не является степенью (выше первой) натурального числа.
24. Найдите все натуральные числа n, при которых $\frac{n^{3n-2} - 3n + 1}{3n-2} \in \mathbb{N}$.
25. Дано натуральное число n. Докажите, что для любого нечётного x найдётся y такой, что $y^y \equiv x \pmod{2^n}$.
26. Найдите все натуральные числа x, y и простые p такие, что оба числа: $x^{p-1} + y$ и $x + y^{p-1}$ являются степенями числа p.
27. Для каждого натурального числа n найдите НОД всех чисел вида $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$, $a \in \mathbb{N}$.
28. Найдите все простые числа p и q такие, что число $3p^{q-1} + 1$ делит число $11^p + 17^p$.
29. Найдите все тройки (a, b, k), $k \geqslant 2$, натуральных чисел такие, что число $(a^k + b)(b^k + a)$ является степенью двойки.