

Будем считать, что понимаем, как множество  $\mathbb{R}$  вещественных чисел строится с помощью десятичных дробей и на нём все арифметические операции определены корректно.

1. Докажите, что у каждого ограниченного подмножества  $M \subset \mathbb{R}$  есть супремум (и инфимум).
2. Докажите, что в любой последовательности вложенных отрезков числовой прямой, такой что их длины стремятся к нулю, есть, и притом ровно одна, общая точка.
3. Докажите, что у любой бесконечной последовательности есть бесконечная монотонная подпоследовательность.
4. Пусть  $M$  – бесконечное подмножество точек отрезка  $[a, b]$ . Докажите, что существует такая точка  $x \in [a, b]$ , что для любого интервала  $I \ni x$  пересечение  $I \cap M$  бесконечно.
5. **Компактность отрезка в  $\mathbb{R}$ .** Отрезок  $[a, b]$  покрыт набором интервалов  $(I_\alpha)_{\alpha \in M}$ . Докажите, что есть конечное подмножество  $P \subset M$ , такое что  $[a, b] \subset (I_\alpha)_{\alpha \in P}$ .
6. Про функцию  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  известно, что для любого интервала  $I \ni x$  функция  $f|_I$  ограничена. Докажите, что  $f$  ограничена на всём  $[a, b]$ .
7. Для отрезка  $[a, b]$  интервал  $(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3})$  назовём *средней третью*. Из отрезка  $[0, 1]$  вырезали среднюю треть, затем у каждого из двух оставшихся отрезков вырезали среднюю треть, потом у каждого из оставшихся четырёх отрезков вырезали среднюю треть и так до бесконечности. Выясните, счётно или нет множество всех невырезанных точек.
8. **Теорема Хелли на  $\mathbb{R}$ .** На числовой прямой отметили  $n \in \mathbb{N}$  промежутков, каждые два из которых пересекаются. Докажите, что все промежутки имеют общую точку.
9. Докажите, что утверждение задачи 8 верно для бесконечного числа отрезков и не всегда верно для бесконечного числа даже ограниченных интервалов.