Алгоритм Евклида

Хотя сам алгоритм Евклида прост и проходится в младших классах, на олимпиадах, всё равно, до сих пор появляются задачи, в которых этот алгоритм или его аналог является ключевой идеей.

1. На доске записаны два различных натуральных числа: a и b. Каждую секунду меньшее из записанных чисел стирается и вместо него записывается число $\frac{ab}{|a-b|}$. Этот процесс продолжается, пока на доске не будут записаны два равных числа. Докажите, что процесс когда-нибудь завершится. Чему будут равны числа в этот момент?

Степень вхождения

Степень вхождения простого числа p в натуральное число n – это такой показатель $v_p(n) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, для которого $p^{v_p(n)} \mid n$, но $p^{v_p(n)+1} \nmid n$.

2. Числа $x, y, z \in \mathbb{N}$ таковы, что сумма $\frac{xy^2}{z} + \frac{y^3z^4}{x} + \frac{z^5x^6}{y}$ – натуральное число. Докажите, что каждое слагаемое – натуральное число.
3. **Формула Лежандра.** Докажите тождество $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$.
4. Докажите тождество $v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$, где через s_p обозначена сумма цифр числа n в p-ичной системе счисления.

Упражнения

5. Докажите, что НОК(a, b) не равен НОК$(a + c, b + c)$ ни при каких натуральных a, b, c.
6. Найдите все пары натуральных чисел k и n, для которых верно равенство $k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \ldots (2^n - 2^{n-1})$.
7. Для натурального числа $n \geqslant 3$ через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ обозначим последовательность степеней в разложении числа $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ – простые числа. Найдите все натуральные $n \geqslant 3$, для которых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – геометрическая прогрессия.
8. Четвёрку (a, b, c, d) целых чисел назовём *хорошей*, если $ad - bc = 2018$. Две хорошие четвёрки назовём *непохожими*, если их нельзя получить друг из друга при помощи конечного числа операций следующих трёх видов: 1)$(a, b, c, d) \mapsto (-c, -d, a, b)$; 2)$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c + a, d + b)$; 3)$(a, b, c, d) \longrightarrow (a, b, c - a, d - b)$. Докажите, что существует не более 3030 попарно непохожих хороших четвёрок.
9. Даны $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ такие, что $ad \neq bc$ и НОД$(a, b, c, d) = 1$. Положим $S = \{\text{НОД}(an + b, cn + d) : n \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что S совпадает с множеством всех делителей некоторого натурального числа.
10. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такая, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ сумма $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}$ является целым числом при всех $n \geqslant k$. Докажите, что существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $a_n = a_{n+1}$ при всех $n \geqslant m$.