# ММИ в алгебре

1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите тождества:
   (a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
   (b) $1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$.
2. (`неравенство Бернулли`) Докажите, что при всех натуральных $n$ и действительных $x > -1$ верно неравенство $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
3. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым при любом $n \in \mathbb{N}$.
4. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства:
   (a) $\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;
   (b) $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$.
5. Пусть $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Найдите явную формулу для элементов последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
6. Докажите, что единицу можно представить в виде суммы $n \geq 3$ различных дробей вида $1/k$, $k \in \mathbb{N}$.
7. Докажите, что при всех целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произведение $(1+x_1^2)(1+x_2^2)\ldots(1+x_n^2)$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.
8. (`неравенство о средних`) Докажите, что для неотрицательных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ верно неравенство $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.
9. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Найдите явные формулы для сумм:
   (a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1)$;
   (b) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n-1}{n!}$.