1 Вокруг точки Микеля

Полный четырехсторонник — это система из четырех прямых (никакие три из которых не проходят через одну и ту же точку) и шести точек пересечения этих прямых.

Среди шести точек полного четырехсторонника есть три пары точек, которые еще не соединены прямыми. Отрезки прямых, соединяющие эти пары точек, называются диагоналями полного четырехсторонника. Во всех следующих свойствах пусть $ABCD$ будет четырехсторонником, таким, что лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Взяв любые три из четырех прямых полного четырехсторонника, мы можем получить четыре треугольника. Для полного четырехсторонника $ABCD$ этими треугольниками будут: ΔABQ, ΔBCP, ΔCDQ и ΔDAP.

1. **(Точка Микеля)** Докажите, что описанные окружности четырех треугольников, упомянутых выше, проходят через общую точку.

2. Докажите, что точка Микеля четырёхсторонника $ABCD$ лежит на прямой PQ тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ является вписанным.

3. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, вписанный в окружность ω с центром в точке O. Пусть R — пересечение диагоналей AC и BD. Пусть M — точка Микеля $ABCD$. Докажите, что:

   Точка M лежит на описанных окружностях ΔAOC и ΔBOD;

   Прямая OM перпендикулярна прямой PQ;

   Точки O, R, M лежат на одной прямой.

2 Всякие прямые

1. **(Прямая Симсона)** Докажите, что основания перпендикуляров из точки Микеля к сторонам полного четырёхсторонника лежат на одной прямой.

2. **(Прямая Обера)** Используя пункт 1 докажите, что ортоцентры четырех треугольников, упомянутых выше, лежат на одной прямой, которая параллельна прямой Симсона полного четырехсторонника.

3. **(Прямая Гаусса)** Используя пункт 2 докажите, что середины диагоналей полного четырехсторонника лежат на одной прямой, которая перпендикулярна прямым Симсона и Обера.

3 Упражнения

1. Докажите, что углы AMC, BMD и PMQ четырехсторонника $ABCD$ имеют общую биссектрису.

2. Точка H – ортоцентр треугольника ABC. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка F так, что $\angle AFH = 90°$. Докажите, что прямая FH проходит через середину отрезка BC.

3. Докажите, что направление прямой Гаусса изогонально направлению на точку Микеля относительно любого угла четырёхугольника.

4 Задачи

Понятно, что в задачах, связанных с точкой Микеля, бывает полезно отметить её, видеть ***4*** окружности, с ней связанные и видеть весь четырехсторонник (то есть систему из ***6*** точек).

1. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC второй раз в точке D. Окружность, проходящая через B и C, пересекает сторону AB второй раз в точке E, а первую окружность второй раз в точке F. Докажите, что если точки A, E, D и C лежат на окружности с центром O, то $\angle BFO = 90^\circ$.

2. Докажите теорему Микеля для пятиконечной звезды (звёздочка 1).

3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке T. Точка S лежит на луче BC, причем $AS \perp AT$. Точки B_1 и C_1 лежат на луче ST (причем C_1 находится между B_1 и S) так, что $B_1T = BT = C_1T$. Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны.

4. На боковых сторонах AC и AB равнобедренного треугольника ABC выбраны точки E и F соответственно так, что $AE = BF$. Точка D выбрана по ту же сторону от прямой EF, что и точка A, таким образом, что треугольники DFE и ABC подобны. Прямая EF пересекает прямую BC в некоторой точке K. Докажите, что прямая DK касается описанной окружности треугольника ABC.

5. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников APA_1 и CPC_1 во второй раз пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ADC. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Пусть E и F — соответствующие основания перпендикуляров из P на прямые AB и CD. Отрезки BF и CE пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые PQ и EF перпендикулярны.

7. Пусть ABC — треугольник с $AB = AC$, и пусть M — середина BC. Пусть P — точка такая, что $PB < PC$ и PA параллельна BC. Пусть X и Y — точки на прямых PB и PC соответственно, так что B лежит на отрезке PX, C лежит на отрезке PY, и $\angle PXM = \angle PYM$. Докажите, что четырехугольник $APXY$ вписанный.

5 Для тех, кто всё решил

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. Пусть $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$. Пусть ℓ — средняя линия треугольника PQR, параллельная QR. Покажите, что описанная окружность треугольника, образованного прямыми AB, AD, ℓ, касается описанной окружности треугольника, образованного прямыми CD, CB, ℓ.