

## Сочетания

1. Пусть  $n \geq k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Найдите количество способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  предметов.
2. Пусть  $n \geq k \in \mathbb{N}$ . Докажите, что
  - a)  $C_n^k = C_n^{n-k}$ ;
  - b)  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ .
3. Дана клетчатая доска  $n \times m$ . Найдите число всех кратчайших путей по линиям сетки, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний угол доски.
4. Сколько различных пятнадцатизначных чисел можно составить из 5 единиц, 5 двоек и 5 троек?
5. Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $x, y \in \mathbb{R}$ . Докажите, что
  - a)  $(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^n y^n$ ;
  - b)  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ ;
  - c)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$ .
6. Сколькими способами можно разложить по шести различным ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?
7. Сколькими способами можно выбрать  $k$  предметов из  $n$  предметов, стоящих
  - a) в ряд;
  - b) по кругу, если запрещено выбирать соседние предметы?
8. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что  $\sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$ .
9. Пусть  $a, b, c \in \mathbb{N}$  и  $a \geq c, b \geq c$ . Докажите, что  $C_a^0 \cdot C_b^c + C_a^1 \cdot C_b^{c-1} + C_a^2 \cdot C_b^{c-2} + \dots + C_a^c \cdot C_b^0 = C_{a+b}^c$ .
10. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Вычислите  $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$ .
11. Найдите количество способов выбрать  $k$  предметов  $n$  различных типов, если предметы одного типа не различаются и могут повторяться.
12. Вычислите коэффициент при  $x^{100}$  в многочлене  $(1+x+\dots+x^{100})^3$  после приведения подобных членов.