Деление многочленов с остатком

Через $\mathcal{K}[x]$ обозначается множество всех многочленов одной переменной с коэффициентами из $\mathcal{K}$. Для многочлена $p(x)$ через $\deg p$ обозначается его степень. *Разделить* $p \in \mathcal{K}[x]$ на $q \in \mathcal{K}[x]$ *с остатком в* $\mathcal{K}[x]$ означает следующее: найти многочлены $h, r \in \mathcal{K}[x]$ такие, что $p(x) = h(x)q(x) + r(x)$ и неравенство $\deg r < \deg q$ или $r \equiv 0$.

1. Разделите с остатком $2x^5 + 5x^2$ на $2x^3 + 3x^2$ в $\mathbb{Q}[x]$.
2. Возможно ли такое деление в $\mathbb{Z}[x]$?

Теорема Безу

3. **Теорема Безу.** Пусть $p \in \mathcal{K}[x]$ и $a \in \mathcal{K}$. Докажите, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на многочлен $x - a$ равен $p(a)$.

В частности, a – корень $p(x)$, если и только если $p(x)$ делится на $x - a$. Наибольшее k такое, что $(x-a)^k \mid p(x)$ называется *кратностью* корня a.

4. **Теорема о рациональных корнях.** Докажите, что, если несократимая дробь $p/q \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то $p \mid a_0$ и $q \mid a_n$.
5. Решите уравнение $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.

Основная теорема арифметики для многочленов

Поскольку для многочленов из $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ определено деление с остатком, то в нём работает алгоритм Евклида, вследствие чего верны все рассуждения, аналогичные используемым при доказательстве ОТА.

6. Докажите, что любой многочлен степени n из $\mathbb{Q}[x]$ или $\mathbb{R}[x]$ имеет не более n корней с учётом кратности.
7. Докажите, что, если значения двух многочленов степени не выше n из $\mathbb{Q}[x]$ или $\mathbb{R}[x]$ совпадают по крайней мере в $n+1$ различной точке, то эти два многочлена равны.
8. **Задача об освобождении от иррациональности.** Пусть многочлен $p \in \mathbb{Q}[x]$ неприводим над $\mathbb{Q}$, число $\alpha \in \mathbb{R}$ – его корень, а многочлены $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ удовлетворяют условию $g(\alpha) \neq 0$. Докажите, что существует многочлен многочлен $h \in \mathbb{Q}[x]$ такой, что $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = h(\alpha)$.

Вычеты

Для каждого натурального числа $n > 1$ через $\mathbb{Z}_n$ обозначим множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, в котором операции сложения и умножения проводятся по модулю n. Если p – простое число, то множество $\mathbb{Z}_p$ чаще обозначается как $\mathbb{F}_p$.

9. Докажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ определено, причём однозначно, деление с остатком, вследствие чего верна основная теорема арифметики.
10. Докажите, что любой многочлен степени n из $\mathbb{F}_p[x]$ имеет не более n корней с учётом кратности.

Упражнения

11. Найдите остаток от деления $p(x) = x^{2023} + 20x^{23} + 23x^{20} + x$ на $x^2 - 1$.
12. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами, имеющий больше трёх целых корней, не принимает простых значений ни в каких целых точках.
13. Решите уравнение $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$.
14. Найдите все многочлены $p \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющие тождеству **a)** $p(x+1) = p(x) + 2x + 1$; **b)** $x \cdot p(x-1) = (x-26)p(x)$.
15. Найдите все натуральные n, при которых многочлен $1 + x^2 + \ldots + x^{2n}$ делится на многочлен $1 + x + \ldots + x^n$?
16. Приведите пример многочленов $p, q \in \mathbb{F}_3$ таких, что $p \neq q$, однако $p(x) = q(x)$ при всех $x \in \mathbb{F}_3$.
17. Докажите, что, если значения двух многочленов степени не выше n из $\mathbb{F}_p[x]$ совпадают по крайней мере в $n+1$ различной точке, то эти два многочлена равны.
18. Можно ли утверждать, что любой многочлен степени n из $\mathbb{Z}_k[x]$ имеет не более n корней с учётом кратности?