Кто с Тебо дружен и знаком,
Тот не боится шесть геом

Это такая база

1. (*Лемма о трезубце*) а) Пусть I – инцентр, а I_A – A–эксцентр треугольника ABC. Точка S – середина дуги BC окружности (ABC), не содержащей точки A. Докажите, что $SB = SC = SI = SI_A$.
б) Пусть в той же конструкции I_B и I_C есть $B-$ и $C-$эксцентры треугольника ABC, а N – середина дуги BAC. Докажите, что $NB = NC = NI_B = NI_C$.
2. (*Лемма Архимеда*) Пусть окружности ω и Ω касаются внутренним образом в точке T, причём хорда AB окружности Ω касается ω в точке L. Докажите, что TL – биссектриса угла ATB.
3. На стороне BC треугольника ABC выбирается произвольная точка M. В криволинейный треугольник AMB вписаная окружность, касающаяся MA и MB в точках P и Q соответственно и окружность ABC – в точке T. Тогда:
а) окружность (ATP) проходит через центр I треугольника ABC;
б) прямая PQ проходит через точку I.
4. К двум окружностям провели общую внешнюю и общую внутреннюю касательные. Тогда прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности, и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров.
5. (*Теорема Тебо*) а) Пусть ABC – произвольный треугольник, M – точка на BC. В криволинейные треугольники AMB и AMC вписаны окружности с центрами I_1 и I_2. Докажите, что прямая I_1I_2 проходит через инцентр треугольника ABC.
б) Обобщите теорему Тебо на случай внешнего касания окружностей. Как изменится доказательство?
6. (*Окружность девяти точек*) Докажите, что середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами исходного треугольника, лежат на одной окружности.
7. (*Задача 255*) Вписанная окружность треугольника ABC касается CA и CB в точках M и N. Точки B_1 и C_1 – середины AC и AB. Докажите, что прямые B_1C_1, MN и биссектриса угла ABC пересекаются в одной точке, причём эта точка является проекцией вершиной A на биссектрису угла ABC.
8. (*Теорема Фейербаха*) Докажите, что окружность девяти точек исходного треугольника касается вписанной и трёх вневписанных окружностей.

Задачи

9. При помощи циркуля и линейки впишите в данный угол окружность, касающуюся данной окружности, которая **пересекает** стороны угла.

10. Вневписанная окружность треугольника ABC, соответствующая вершине C, касается продолжения стороны AC в точке P. Рассмотрим окружность ω, касающуюся AC в точке P и прямой, проходящей через B параллельно AC. Докажите, что ω касается описанной окружности треугольника ABC.

11. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

12. Пусть треугольник ABC вписан в окружность ω. A_0, B_0 — точки на сторонах BC и CA соответственно такие, что прямая A_0B_0 параллельна AB. В сегменты, стягиваемые хордами BC и CA окружности ω, не содержащие A и B соответственно, вписаны окружности ω_A, ω_B, касающиеся хорд BC и CA в точках A_0, B_0. Докажите, что общая касательная к окружностям ω_A, ω_B, «ближайшая» к AB, параллельна AB.

13. Пусть AM — медиана неравнобедренного треугольника ABC, T – точка касания вписанной окружности ω со стороной BC, S – вторая точка пересечения ω с отрезком AT. Докажите, что вписанная окружность треугольника δ, образованного прямыми AM, BC и касательной к ω в точке S, касается описанной окружности треугольника ABC.

14. Окружность касается продолжений сторон CA и CB треугольника ABC, а также касается стороны AB этого треугольника в точке P. Докажите, что радиус окружности, касающейся отрезков AP, CP и описанной около треугольника ABC окружности равен радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.