

Интерполяционный многочлен Лагранжа - 2

1. Целые числа a_1, a_2, \dots, a_n попарно различные. Докажите, что $\sum_{i=1}^n a_i^k / \prod_{j \neq i} (a_i - a_j) \in \mathbb{Z}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

2. Пусть $f \in \mathbb{R}[x]$ – приведённый многочлен степени n , а x_0, x_1, \dots, x_n – попарно различные целые числа. Докажите, что выполнено неравенство

$$\max(|f(x_0)|, |f(x_1)|, \dots, |f(x_n)|) \geq \frac{n!}{2^n}.$$

3. Пусть $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. На координатной плоскости отметили точки $A_1(f(1); g(1)), A_2(f(2); g(2)), \dots, A_n(f(n); g(n))$. Оказалось, что $A_1 A_2 \dots A_n$ – правильный n -угольник. Докажите, что степень хотя бы одного из многочленов f и g не меньше чем $n - 1$.

4. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – попарно различные действительные числа. Докажите, что значение выражения $\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{1 - x_i x_j}{x_i - x_j}$ равно остатку от деления n на 2.

5. Докажите, что любой приведённый многочлен степени n можно представить как среднее арифметическое двух приведённых многочленов степени n , каждый из которых имеет n вещественных корней.

6. Вася задумал многочлен десятой степени. Петя может назвать десять вещественных чисел и Вася сообщит ему значение многочлена при одном из названных значений переменной. При этом Вася не сообщает, какое именно число из названных Петей он подставил. Сможет ли Петя определить многочлен Васи за конечное число вопросов?