Лемма о трезубце

1. Пусть I, I_A, I_B, I_C – инцентр и эксцентры треугольника ABC. Точки V_A и W_A – середины дуг BAC и BC описанной окружности треугольника. Докажите, что
a) $V_AB = V_AC = V_AI_B = V_AI_C$;
b) $W_AB = W_AC = W_AI = W_AI_A$.

2. Внутри треугольнике ABC выбрана точка Р такая, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geq AI$, где I – инцентр треугольника ABC.

3. Пусть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник. Докажите, что инцентры треугольников ABC, BCD, CDA и DAB лежат в вершинах прямоугольника.

4. (Эйлер) Пусть O, I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника; R, r – радиусы этих окружностей. Докажите, что $IO^2 = R^2 - 2Rr$.

5. Пусть I – инцентр треугольника ABC $(AB > AC)$, V_A – середина дуги BAC его описанной окружности, а M – середина BC. Докажите, что $\angle IMC = \angle IV_AA$.

6. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Докажите, что $IO = IH$, где I – инцентр, O – центр описанной окружности, H – ортоцентр треугольника ABC.

7. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Оказалось, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть IA, IB и IC – центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC.