Скалярное произведение

Пусть дано векторное пространство V над $\mathbb{R}$. Операция $\cdot : V\times V\to\mathbb{R}$ называется *скалярным произведением*, если она удовлетворяет следующим трём условиям:

1. Коммутативность: для любых векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ верно равенство $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1$;

2. Линейность: для любых векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\in V$ и чисел $x,y\in\mathbb{R}$ верно равенство $\vec{v}_1\cdot(x\vec{v}_2+y\vec{v}_3)=x\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2+y\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3$;

3. Неотрицательность: для любого вектора $\vec{v}\in V$ верно неравенство $\vec{v}\cdot\vec{v}\geqslant 0$, причём равенство выполняется если и только если $\vec{v}=\vec{0}$.

Третье условие позволяет задать *длину* вектора $\vec{v}$ как $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. Из линейности скалярного произведения следует, что оно однозначно задано значениями произведений $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$ по всем парам $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$ базисных векторов. Однако, из-за третьего условия их нельзя выбрать произвольно:

1. Докажите, что $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1+\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2\geqslant 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2$ для любых $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$.
2. **Неравенство треугольника:** докажите, что $|\vec{v}_1|+|\vec{v}_2|\geqslant|\vec{v}_1+\vec{v}_2|$ для любых $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$.
3. **Неравенство Коши-Буняковского-Шварца:** докажите, что $|\vec{v}_1|^2\cdot|\vec{v}_2|^2\geqslant(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)^2$ для любых $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$.

Последнее неравенство показывает, как задать углы между векторами в произвольном векторном пространстве, а именно: угол между векторами $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ равен $\arccos(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|})$. При таком задании наш старое определение „произведение длин векторов и косинуса угла между ними" получается, как свойство, однако, неплохо бы убедиться, что определённые выше углы совпадают с привычным. Заметим, что привычное нам скалярное произведение также удовлетворяет условиям $\mathbf{1}-\mathbf{3}$ и, следовательно, однозначно определено значениями на некотором базисе.

4. Проверьте, что скалярное произведение получается, если для базиса $\vec{e}_1(1,0)$, $\vec{e}_2(0,1)$ положить $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=1$, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0$ и $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1$.
5. Запишите формулу такого скалярного произведения в координатах.

Ортогональность.

Векторы $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$, для которых верно равенство $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$, называются ортогональными. Скалярное произведение удобно записывать, если все базисные векторы имеют единичную длину и попарно ортогональны, такой базис называется *ортонормированным*. Базис называется *ортогональным*, если он состоит из попарно ортогональных векторов.

6. Пусть $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_k\}$ – множество ненулевых векторов в n-мерном векторном пространстве V. Докажите следующие утверждения:
   (a) Если $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_k$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

(b) Множество векторов, которые ортогональны каждому из $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_k$, образует подпространство W такое, что сумма размерностей подпространств $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle$ и W равна n.

(c) Любой набор попарно ортогональных векторов можно дополнить до ортогонального базиса.

(d) Если векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ попарно образуют тупые углы (т. е. их скалярные произведения отрицательны), то любые $k-1$ из них линейно независимы.

(e) Если попарные скалярные произведения векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ неположительны, то $k \leqslant 2n$. Исследуйте случай $k = 2n$.

7. Запишите неравенства треугольника и К-Б-Ш в координатной форме для векторов, записанных в ортонормированном базисе.

Задачи

8. В множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ выбрали подмножества S_1, S_2, …, S_m так что каждое состоит из нечётного количества элементов, а пересечение любых двух из них – из чётного. Докажите, что $m \leqslant n$.

9. Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перпендикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.

10. Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

11. Точка O лежит внутри выпуклого многогранника, имеющего n вершин $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Докажите, что среди всевозможных углов A_iOA_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, найдутся по крайней мере $n-1$ не острых (прямых, тупых или развёрнутых) углов.

12. В каждой вершине графа сто́ят лампочка и выключатель. Нажатие на выключатель меняет на противоположное состояние лампочек в этой вершине и всех смежных с ней. Изначально все лампочки были выключены. Докажите, что возможно их все включить.

13. Белоснежка и семь гномов живут в своём домике в лесу. В течение каждого из 16 последовательных дней некоторые гномы работали на алмазной шахте, в то время как остальные собирали грибы. Каждый гном выполнял только один вид работы в течение одного дня. Известно, что какие бы два дня ни выбрать, найдутся хотя бы три гнома, которые в эти два дня выполняли оба вида работы. Кроме того, в первый день все семь гномов работали на шахте. Докажите, что в один из этих 16 дней все гномы ходили за грибами.