Целозначные многочлены

Функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *целозначной*, если её значение в каждой целой точке является целым числом. Для многочлена $p\in\mathbb{R}[x]$ *конечной разностью I порядка* называется многочлен $\Delta_p^1(x)=p(x+1)-p(x)$. Конечные разности высших порядков задаются рекуррентными равенствами $\Delta^{n+1}p(x)=\Delta^n p(x+1)-\Delta^n p(x)$, $n\geqslant 1$.

1. Докажите тождество $\Delta_p^m(x)=\sum_{i=0}^m(-1)^{m-i}\binom{m}{i}p(x+i)$.
2. Докажите, что многочлен $p\in\mathbb{R}[x]$ является целозначным, если и только если он представим в виде $b_0\binom{x}{m}+b_1\binom{x}{m-1}+\ldots+b_{m-1}\binom{x}{1}+b_m$, где $b_0,b_1,\ldots,b_m\in\mathbb{Z}$.
3. Дробь $\frac{p(x)}{q(x)}$, $p,q\in\mathbb{R}[x]$ рациональна при всех $x\in\mathbb{N}$. Докажите, что она – отношение двух взаимно простых многочленов из $\mathbb{Z}[x]$.
4. Дробь $\frac{p(x)}{q(x)}$, $p,q\in\mathbb{R}[x]$ принимает целые значения в бесконечном количестве точек $x\in\mathbb{N}$. Докажите, что она – целозначный многочлен.
5. Докажите, что у целозначного многочлена множество всех простых делителей его значений в целых точках бесконечно.
6. Пусть p и q – взаимно простые целозначные многочлены. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел r таких, что r делит $p(n)$ и не делит $q(n)$ при некотором натуральном n.
7. Пусть p – неприводимый целозначный многочлен. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что в число $p(n)$ по крайней мере один простой делитель входит в первой степени.
8. Непостоянный многочлен $p\in\mathbb{Z}[x]$ таков, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ значение $p(n)$ является k-ой степенью целого числа. Докажите, что p является k-ой степенью многочлена с целыми коэффициентами.
9. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k. Пусть $P(x)$ – бицелозначный многочлен степени d, и пусть N_d – произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d\cdot P(x)$ целый.
10. Многочлен $P\in\mathbb{Z}[x]$ удовлетворяет следующим двум условиям:
    - для каждого $a\in\mathbb{Z}$ есть ровно одно $y\in\mathbb{Z}$ такое, что $P(a,y)=0$;
    - для каждого $b\in\mathbb{Z}$ есть ровно одно $x\in\mathbb{Z}$ такое, что $P(x,b)=0$.

    а) Докажите, что, если степень многочлена $P(x,y)$ равна двум, то он делится на многочлен $x-y+C$ либо $x+y+C$, где C – целое число.
    б) Существует ли такой многочлен $P(x,y)$, не кратный ни одному многочлену вида $x-y+C$ и $x+y+C$, где C – целое число?

11. Дана целозначная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Известно, что для любого простого p существует многочлен $Q_p \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg Q_p \leqslant 2023$, такой, что $p \mid f(n) - Q_p(n)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Верно ли, что существует многочлен $g \in \mathbb{Q}[x]$ такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n?
12. Дан целозначный многочлен p такой, что НОД$\{p(n) : n \in \mathbb{N}\} = 1$. Докажите, что каждое натуральное число можно бесконечным количеством способов представить в виде $\pm p(1) \pm p(2) \pm \ldots \pm p(m)$.
13. Даны числа $m, n, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$. Али и Мухамед играют в игру. На каждом ходу Али выбирает числа $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{N}$, после чего Мухамед выбирает число $s \in \mathbb{N}$, образует новую последовательность $\{c_i = a_i + b_{i+s}\}_{i=1}^{m}$ и заменяет набор $\{a_i\}$ на набор $\{c_i\}$. Если все числа полученной последовательности кратны n, то побеждает Али, иначе игра продолжается. Найдите все пары (m, n) такие, что Али может выиграть за конечное количество ходов при любом наборе $a_1, \ldots, a_m$.