

Сравнение со средним арифметическим

1. По кругу записаны 16 чисел, сумма которых равна 93. Докажите, что найдутся 5 подряд записанных чисел, сумма которых не меньше 30.
2. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое дежурили вместе не менее 14 раз.
3. 1000 рублей разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем рублей в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем рублей в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой нельзя.)
4. В таблице 20×20 в каждой клетке стоит крестик или нолик, причём в каждом столбце ровно 10 крестиков. Докажите, что можно найти две строки, которые совпадают, по крайней мере, в 10 позициях.
5. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Нужно приложить первое ожерелье ко второму (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок можно гарантированно получить?
6. Сумма действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 3$) равна 1. Докажите, что найдётся такая перестановка y_1, y_2, \dots, y_n этих чисел, что $y_1 y_2 + y_2 y_3 + \dots + y_n y_1 \leq \frac{1}{n}$.
7. Пусть p – простое число, а числа a_1, a_2, \dots, a_p – целые. Докажите, что существует целое число k , такое, что числа $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$ дают не менее $p/2$ различных остатков по модулю p .