

Сочетания

1. Найдите количество способов выбрать k предметов из n предметов. (Обозначают это число через C_n^k .)
2. Пусть $n \geq k \in \mathbb{N}$. Докажите, что
 - (а) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
 - (б) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.
3. Дана клетчатая доска $n \times m$. Найдите число всех кратчайших путей по линиям сетки, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний угол доски.
4. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что
 - (а) $(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^n y^n$;
 - (б) $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$;
 - (с) $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.
5. Сколькими способами можно выбрать k предметов из n предметов, стоящих (а) в ряд; (б) по кругу, если запрещено выбирать соседние предметы?
6. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.
7. Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$ и $a \geq c, b \geq c$. Докажите, что $C_a^0 \cdot C_b^c + C_a^1 \cdot C_b^{c-1} + C_a^2 \cdot C_b^{c-2} + \dots + C_a^c \cdot C_b^0 = C_{a+b}^c$.
8. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Вычислите $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$.
9. Найдите количество способов выбрать k предметов n различных типов, если предметы одного типа не различаются и могут повторяться. (Обозначают это число через \overline{C}_n^k .)
10. Найдите количество упорядоченных троек $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ таких, что $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ и $x + y + z = 100$.
11. Имеется n предметов k различных типов: n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа, ..., n_k предметов k -го типа, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Найдите количество различных перестановок этих предметов. (Обозначают это число через $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$.)