

1. Дано натуральное число  $n$ . Многочлен  $f(x, y)$  степени не выше  $n - 1$  таков, что при любых натуральных  $x, y \leq n, x + y \leq n + 1$ , выполняется равенство  $f(x, y) = x/y$ . Найдите все возможные значения  $f(0, 0)$ .
2. Рассмотрим на координатной плоскости множество точек вида  $(i, j)$ ,  $0 \leq i, j, i + j \leq n$ , и  $n(n + 1)/2$  вещественных чисел  $w_{i,j}$ . Нас будут интересовать многочлен  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  степени не выше  $n$ , удовлетворяющего равенствам  $f(i, j) = w_{i,j}$  при всех  $(i, j)$ ,  $0 \leq i, j, i + j \leq n$ .
  - (а) Докажите, что существует не более одного такого многочлена.
  - (б) Предположим, что  $w_{i,j} = 0$  при всех  $(i, j) < n$ . Докажите, что искомым многочлен имеет вид  $\sum_{i,j \geq 0, i+j=n} w_{i,j} \binom{x}{i} \binom{y}{j}$ .
  - (с) Докажите, что искомым многочлен всегда существует.
3. Пусть теперь заданы два произвольных множества  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  и набор из  $n(n + 1)/2$  вещественных чисел  $w_{i,j}$ , где  $0 \leq i, j, i + j \leq n$ . Нас интересует многочлен  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  степени не выше  $n$ , удовлетворяющий равенствам  $f(x_i, y_j) = w_{i,j}$  при всех  $(i, j)$ ,  $0 \leq i, j, i + j \leq n$ . Очевидно, что доказательство его единственности аналогично доказательству задачи 2а.
  - (а) Предположим, что  $w_{i,j} = 0$  при всех  $(i, j) < n$ . Докажите, приведя явную формулу, что искомым многочлен существует.
  - (б) Докажите, что искомым многочлен всегда существует.
4. Про многочлен  $P \in \mathbb{R}[x, y]$  известно, что для любого неотрицательного целого числа  $n$  каждый из многочленов  $P(n, y)$  и  $P(x, n)$  имеет степень не выше  $n$ . Докажите, что степень многочлена  $P(x, x)$  чётна.
5. Докажите, что для любого чётного числа  $n \geq 2$  найдётся многочлен степени  $n$ , удовлетворяющий условию предыдущей задачи.
6. Дано число  $d \in \mathbb{N}$ . Найдите все функции  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что для любых вещественных чисел  $A, B, C, D$  функция  $f(At + B, Ct + D)$  на всём  $\mathbb{R}$  совпадает с некоторым многочленом степени не выше  $d$ .
7. Существует ли функция  $g: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$  такая, что для любого рационального числа  $t$  функции  $g(t, y)$  и  $g(x, t)$  совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём  $\mathbb{Q}$ , но сама  $g$  не является многочленом?
8. Существует ли функция  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что для любого вещественного числа  $t$  функции  $f(t, y)$  и  $f(x, t)$  совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём  $\mathbb{R}$ , но сама  $f$  не является многочленом двух переменных?