Теоремы, равносильные аксиоме выбора

ZF_8(аксиома выбора) *Пусть A – непустое множество, а $P^*(A)$ – множество его непустых подмножеств. Тогда существует отображение $\varphi\colon P^*(A) \to A$ такое, что $\varphi(B) \in B$ для каждого $B \in P^*(A)$.*

Пусть задано **чум** M, *верхней (нижней) гранью* подмножества $N \subset M$ называется такой элемент $a \in M$, что $x \leq a$ ($x \geq a$) для всех $x \in N$; *цепь* (возрастающая последовательность элементов M) называется *максимальной*, если она является максимальным элементом в **чум** всех цепей из элементов M по включению.

1. Рассмотрим **чум** $\mathbb{N}$ с порядком „|" и подмножество $N \subset N$ состоит из двух чисел: a и b. a) Опишите множество всех верхних граней N и найдите в нём есть наименьший элемент. b) Опишите множество всех нижних граней N и найдите в нём есть наибольший элемент.
2. Пусть множество A конечно и состоит из n элементов. Рассмотрим множество $M = P(A)$ всех подмножеств множества A и частичный порядок „$\subset$" на нём. Опишите все максимальные цепи в M.

Мы уже приблизились к тому, чтобы доказать, что любые две мощности можно сравнить. Для этого вначале покажем, что на любом множестве можно задать хороший порядок (вполне упорядочить). Частично упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным*, если любые два элемента сравнимы. Линейно упорядоченное множество, удовлетворяющее условию минимальности называется *вполне упорядоченным*. Сформулируем три важные теоремы, каждая из которых эквивалентна аксиоме выбора:

Z(Теорема Цермело) *Любое множество можно вполне упорядочить.*

H(Теорема Хаусдорфа) *Любая цепь частично упорядоченного множества содержится в некоторой максимальной цепи.*

KZ(Теорема Куратовского–Цорна) *Если любая цепь частично упорядоченного множества M имеет верхнюю грань, то любой элемент меньше либо равен какого-то максимального элемента.*

Задачи

3. Докажите, что в любом векторном пространстве есть базис.
4. Опишите все решения функционального уравнения Коши $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
5. На отрезке $[0, 1]$ отмечено несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

6. Пусть S – конечное множество точек отрезка $[0, 1]$, содержащее 0 и 1 и такое, что любое расстояние между точками из S, кроме единицы, встречается по крайней мере два раза. Докажите, что все точки множества S имеют рациональные координаты.
7. Пусть p – простое число. Действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{p+1} таковы, что при удалении любого из них оставшиеся числа можно разделить на две группы с одинаковым средним арифметическим. Докажите, что числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{p+1} равны.
8. Натуральное число $n > 2$ назовём *хорошим*, если на плоскости существуют такие различные точки X_1, X_2, $\ldots$, X_n, что для любого индекса i от 1 до n векторы $\overrightarrow{X_iX_1}$, $\overrightarrow{X_iX_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{X_iX_n}$ можно разбить на два набора с равной суммой элементов. Найдите все хорошие натуральные числа.
9. Докажите, что прямоугольник можно разбить на квадраты, если и только если его стороны соизмеримы.
10. Приведите пример периодической суммы двух периодических функций с несоизмеримыми минимальными положительными периодами.
11. Докажите, что любой многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ степени n можно представить в виде суммы $n + 1$ периодической функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, но нельзя представить в виде суммы n таких функций.
12. Докажите импликацию $ZF_8 \Rightarrow Z$.
13. Докажите импликацию $Z \Rightarrow H$.
14. Докажите импликацию $H \Rightarrow KZ$.
15. Докажите импликацию $KZ \Rightarrow ZF_8$.
16. Докажите, что мощности любых двух множеств можно сравнить.

Третья проблема Гильберта

На плоскости (трёхмерном евклидовом пространстве) два многоугольника (многогранника) назовём *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на конечное число многоугольников (многогранников) и составить из них (перевести движениями в непересекающиеся части) второй. Очевидно, что у равносоставленных многоугольников (многогранников) равны площади (объёмы).

17. **Теорема Бойяи–Гервина.** Докажите, что любые два многоугольника одинаковой площади равносоставлены.
18. **Теорема Дена.** Докажите, что существуют неравносоставленные многогранники одинаковой площади.