Предварительные сведения

В этом листке предлагается тремя различными способами доказать основную теорему алгебры: *Многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учётом кратности.* Напомним, что из теоремы Безу следует, что достаточно доказывать существование по крайней мере одного корня у многочлена ненулевой степени, что мы и будем делать.

Аналитическое доказательство

Воспользуемся двумя утверждениями из школьного курса анализа, которые дословно переносятся и на комплексный случай: 1) многочлен является непрерывной функцией (между точками на комплексной плоскости определены расстояния); 2) любая непрерывная функции на ограниченном замкнутом множестве (нам достаточно будет круга) достигает максимума и минимума (это множество, как и отрезок можно делить на части меньшего диаметра).

Предположим, что многочлен $P \in \mathbb{C}[x]$ не имеет корней, тогда модуль его значения всегда ненулевой, а значит, положительный. Мы докажем, что существует минимум модулей его значений, но он не может быть больше нуля, что приведёт к противоречию.

1. Докажите, что у $|P(z)|$ есть минимум на всём $\mathbb{C}$.
2. Покажите, что можно считать, что $\min\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = P(0) = 1$.
3. Покажите, что можно считать, что $P(z) = 1 - z^k + b_{k+1}z^{k+1} + \ldots + b_n z^n$.
4. Докажите, что значения последнего многочлена бывают меньше единицы по модулю.

Алгебраическое доказательство

Выделим основные детали, которые нам известны: 1) любой многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ нечётной степени имеет вещественный корень; 2) любой квадратный трёхчлен $p \in \mathbb{C}[x]$ имеет два корня с учётом кратности в $\mathbb{C}$; 3) для каждого многочлена $p \in \mathbb{R}[x]$ существует расширение $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset K$, в котором p раскладывается на множители первой степени; более того, 4) значение каждого симметрический многочлена из $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{\deg p}]$ в точке, координаты которой – все корни p, вещественно.

5. Индукцией по $v_2(\deg p)$ докажите, что любой многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один комплексный корень.
6. Докажите, что любой многочлен $p \in \mathbb{C}[x]$ имеет хотя бы один комплексный корень.
7. **Упражнение.** Докажите, что сумма и произведение двух алгебраических чисел также являются алгебраическими числами.

„Дама с собачкой”

Рассмотрим ещё одно доказательство основной теоремы алгебры, которое, в отличие от предыдущих двух, будет не до конца обоснованным, но, зато, очень наглядным и красивым. Как и раньше предположим, что у многочлена $P(z)$ нет корней. Пусть точка z движется по окружности радиуса R с центром в нуле: $z(\varphi, R) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Исследуйте траекторию точки $P(z(\varphi, R))$ на комплексной плоскости:

8. Покажите, что, если R достаточно мaлó, то точка $P(z(\varphi, R))$ „гуляет” вокруг точки $a_0 \neq 0$ и не делает ни одного оборота относительно начала координат.
9. Покажите, что, если R достаточно великó, то точка $P(z(\varphi, R))$ делает n оборотов вокруг начала координат.

Из этого следует, что при непрерывном изменении R, в какой-то момент количество оборотов траектории вокруг начала координат должно измениться. Поскольку траектория изменяется непрерывно вместе с радиусом R, то в некоторый момент она должна пройти через начало координат, т. е. у многочлена P должен существовать корень.