

## Критерий перпендикулярности. Теорема Карно

1. Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны, если и только если  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

2. (Карно) Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  на стороны  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2.$$

3. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.

4. На серединных перпендикулярах к сторонам  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно выбраны точки  $D, E$  и  $F$ . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин  $A, B$  и  $C$  соответственно на прямые  $EF, FD$  и  $DE$ , пересекаются в одной точке.

5. В треугольнике точка  $O$  – центр описанной окружности,  $I$  – центр вписанной. Точки  $A'$  и  $B'$  на лучах  $BC$  и  $AC$  соответственно, таковы, что  $A'B = AB = AB'$ . Докажите, что  $A'B' \perp OI$ .

6. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон вписанного четырехугольника на противоположащие стороны, пересекаются в одной точке.

7. На плоскости нарисован правильный треугольник  $ABC$  и отмечена произвольная точка  $P$ . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников  $PAB, PBC$  и  $PCA$  на прямые  $AB, BC$  и  $CA$  соответственно, пересекаются в одной точке.