

Подсчёт двумя способами в геометрии

1. Длина высоты в равностороннем треугольнике ABC равна h . Докажите, что сумма
 - (а) расстояний от произвольной точки внутри треугольника ABC до его сторон равна h ;
 - (б) квадратов расстояний от произвольной точки описанной окружности треугольника ABC до его сторон равна h^2 .
2. Существует ли выпуклый 400-угольник, все углы которого выражаются целым числом градусов?
3. Рассмотрим все треугольники с вершинами в вершинах выпуклого $2n$ -угольника. Докажите, что любая точка, не лежащая на сторонах и диагоналях многоугольника, покрыта чётным числом треугольников.
4. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник M , причём все его вершины находятся в вершинах клеток, а его стороны не параллельны линиям сетки. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M , равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M .
5. На плоскости отметили n точек так, что для каждой отмеченной точки P отмечено не менее k точек, равноудалённых от P . Докажите, что $k < 1/2 + \sqrt{2n}$.
6. В единичном квадрате нарисовали несколько отрезков, параллельных сторонам квадрата. Сумма длин отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбит отрезками, найдётся такая, площадь которой не меньше 0,01.