

Принцип крайнего в геометрии

1. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, все грани которого имеют различное число сторон.
2. На каждой из 2025 планет, попарные расстояния между которыми различны, находится по астроному, который наблюдает за ближайшей к нему планетой. Докажите, что:
 - (а) за некоторой планетой не наблюдает никто;
 - (б) за каждой планетой наблюдает не больше 5 астрономов.
3. На плоскости дано 2025 точек таких, что среди любых трёх из них которых найдутся две на расстоянии меньше 1. Докажите, что существует круг радиуса 1, содержащий не меньше 1013 из этих точек.
4. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырёхугольник.
5. Докажите, что из шести рёбер любого тетраэдра можно сложить два треугольника.
6. На плоскости даны n точек, площадь любого треугольника с вершинами в которых не больше 1. Докажите, что все данные точки можно накрыть треугольником площади 4.
7. На плоскости даны n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что всего есть не менее $2n - 3$ различных отмеченных точек.
8. Внутри круга радиуса 1 лежат восемь точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.
9. Из каждой вершины многоугольника провели высоты ко всем сторонам, у которых она не является концевой. Докажите, что основание по крайней мере одной из высот лежит на соответствующей стороне, а не на её продолжении.
10. Из точки, лежащей внутри выпуклого многоугольника, опустили высоты на все стороны этого многоугольника. Докажите, что по крайней мере одно из оснований высот лежит на стороне, а не на продолжении.

11. Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.

12. Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

13. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике есть три диагонали, из которых можно составить треугольник

14. На плоскости даны n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

15. На плоскости отмечено конечное количество точек так, что на любой прямой, соединяющей две отмеченные точки, лежит по крайней мере ещё одна отмеченная точка. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной прямой.

16. Дан выпуклый $2n$ -угольник V , противоположные стороны которого попарно параллельны.

(а) Докажите, что в V найдётся такая пара противоположных сторон, что некоторая перпендикулярная им прямая пересекает обе эти стороны.

(б) Существует ли такое $n \geq 2$, при котором в V гарантированно найдутся две пары противоположных сторон, удовлетворяющих сформулированному в п. а) условию?

17. Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник можно разбить непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

18. На плоскости отметили n точек, не все из которых лежат на одной прямой. Докажите, что есть не менее n различных прямых, соединяющих эти точки.