Разнобой по ТЧ

1. Можно ли раскрасить плоскость в 2024 цвета так, чтобы внутри любого круга были точки всех 2024 цветов?
2. Докажите, что последовательность первых цифр чисел вида $2^n + 3^n$ непериодична.
3. Последовательность a_1, a_2, …, a_n, … целых чисел задана следующими правилами: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} > a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, причём a_{n+1} является наименьшим числом, при котором никакие три из чисел a_0, a_1, …, a_{n+1} не образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a_{2^n} = 3^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.
4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел 1, 2, …, 100 так, чтобы сумма никаких трёх различных выбранных чисел не была равна выбранному числу.
5. Натуральные числа 1, 2, …, 100 содержатся в объединении N геометрических прогрессий (не обязательно с целыми знаменателями). Докажите, что $N \geqslant 31$.
6. Из натуральных чисел от 1 до 501 выбрано 250 чисел. Докажите, что для любого целого числа t найдутся такие четыре выбранных числа a_1, a_2, a_3 и a_4, что $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - t$ делится на 23.
7. Даны непересекающиеся множества натуральных чисел A и B, состоящие из n и m элементов соответственно. Известно, что каждое натуральное число, принадлежащее A или B, удовлетворяет хотя бы одному из условий: $k + 17 \in A$ или $k - 31 \in B$. Докажите, что $17n = 31m$.
8. Дано натуральное число n. Известно, что существуют такие 2010 последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не делится на n, но их произведение кратно n. Докажите, что существуют такие 2004 последовательных числа, что ни одно из них не делится на n, но их произведение кратно n.
9. Можно ли раскрасить в 6 цветов все натуральные числа так, чтобы каждый цвет был использован и сумма любых пяти чисел разного цвета была окрашена в шестой цвет?
10. Даны натуральное число n и бесконечная последовательность правильных дробей $x_0 = \frac{a_0}{n}$, $x_1 = \frac{a_1}{n+1}$, $x_2 = \frac{a_2}{n+2}$, … $(a_i < n + i)$. Докажите, что существует такое натуральное число k и такие целые числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, что $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_kx_k = 1$.
11. Последовательность натуральных чисел строится по следующему правилу: каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением произведения всех его различных простых делителей. Докажите, что любые две последовательности, построенные таким образом, имеют общий член.

12. Докажите, что никакое число вида 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, не представимо в виде суммы чисел, обратных факториалам различных натуральных чисел.
13. Можно ли раскрасить все положительные вещественные числа в 10 цветов так, чтобы любые два числа, десятичная запись которых отличается ровно в одном разряде, были разного цвета? (Десятичные записи, в которых все цифры, начиная с некоторой – девятки, не рассматриваются.)
14. Докажите, что среди любых 100000 последовательных стозначных чисел найдётся такое число n, что длина периода десятичной записи числа $\frac{1}{n}$ больше 2011.
15. Пусть $p = 4k + 3$ – простое число, а $\frac{m}{n}$ – такая несократимая дробь, что
$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2+1} = \frac{m}{n}.$$
Докажите, что $2m - n$ делится на p.