

Теорема Холла для регулярных графов

1. В клубе на танцевальном вечере каждый юноша знаком не менее, чем с m девушками, а каждая девушка – не более, чем с m юношами. Докажите, что каждый юноша может пригласить на танец знакомую девушку (юноши приглашают девушек одновременно).
2. В каждой строке и в каждом столбце таблицы 8×8 отмечено 3 клетки. Докажите, что из отмеченных клеток можно выбрать восемь так, что в каждой строке и в каждом столбце будет выбрано по одной клетке.
3. Табло состоит из 100 лампочек. Двое играют в игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т.е. включает и выключает её). При этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
4. *Латинским* называется прямоугольник $m \times n$, где $m \leq n$, в каждой клетке которого записано число от 1 до n таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце записанные числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник $m \times n$ можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.
5. Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную?