Весенняя комбинаторика (черновик)

1. У Карабаса-Барабаса есть большой участок земли в форме выпуклого 12-угольника, в вершинах которого стоят фонари. Карабасу-Барабасу нужно поставить внутри участка некоторое конечное число фонарей, разделить его на треугольные участки с вершинами в фонарях и раздать эти участки актёрам театра. При этом каждый внутренний фонарь должен освещать не менее шести треугольных участков (фонарь светит недалеко, только на те участки, в вершине которых стоит). Какое максимальное количество треугольных участков может раздать Карабас-Барабас актёрам?
2. *Мельницей* назовём отрезок единичной длины, у которого отмечен один из концов – *центр поворота*. Женя нарисовал на плоскости конечный набор мельниц так, что никакие две из них не пересекаются и расстояние между любыми двумя центрами поворота больше $\sqrt{2}$. За ход Женя выбирает любую мельницу и поворачивает её в любую сторону на любой угол, лишь бы во время поворота он не пересекла никакую другую мельницу. Докажите, что Женя может за несколько ходов сделать так, что все мельницы будут одинаково направлены.
3. В гостинице есть ровно n номеров, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$; для каждого $i = \overline{1, n}$ в квартире номер i есть ровно i комнат. Каждую неделю в гостиницу приезжает группа, состоящая из n семей; каждая семья заранее запрашивает минимальное достаточное количество комнат для их номера (натуральное число). Перед прибытием новой группы, после выселения предыдущей, администратор вычисляет число A способов, которыми он может расселить семьи по комнатам так, чтобы удовлетворить все их запросы. Каждое такое число A он записывает себе в блокнот. Докажите, что в блокноте администратора будут записаны не более 2^{n-1} различного числа.
4. Каждая точка сферы окрашена в один из двух цветов. Докажите, что можно выбрать цвет, для которого найдётся равносторонний треугольник с вершинами этого цвета.
5. Дана доска клетчатая $(2n+1) \times (2n+1)$. *Змейкой* назовём последовательность $A_1A_2\ldots A_k$ клеток таких, что A_i и A_j имеют общую сторону, если и только если $|i-j| = 1$. Клетки A_1 и A_k назовём соответственно *головой* и *хвостом* змейки. Две непересекающиеся змейки полностью накрыли доску. Докажите, что центральная клетка занята головой или хвостом одной из змеек.
6. Каждая точка плоскости окрашена в один из трёх цветов. Докажите, что можно выбрать цвет так, для любого положительного числа d найдётся пара точек этого цвета на расстоянии d друг от друга.