НОД и НОК

1. Применим алгоритм Евклида к числам a и $b \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{llll} 0) & a = bq_0 + r_1, & & \ldots \\ 1) & b = r_1 q_1 + r_2, & n-1) & r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \\ 2) & r_1 = r_2 q_2 + r_3, & n) & r_{n-1} = r_n q_n. \end{array}$$

   Докажите, что
   (a) $\text{НОД}(a, b) = r_n$ (последний ненулевой остаток);
   (b) $au + bv = \text{НОД}(a, b)$ при некоторых u и $v \in \mathbb{Z}$.
2. Докажите, что любое целое $n \geq 2$ может быть разложено в произведение простых, и это разложение единственно с точностью до порядка множителей.
3. Пусть a, b и $c \in \mathbb{N}$. Докажите, что
   (a) $\text{НОД}\big(\text{НОК}(a, b), \text{НОК}(b, c), \text{НОК}(c, a)\big) = \\ = \text{НОК}\big(\text{НОД}(a, b), \text{НОД}(b, c), \text{НОД}(c, a)\big)$;
   (b) $\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) \geq a + b$.
4. Пусть a, n и m – натуральные числа. Докажите, что
   (a) $\text{НОД}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\text{НОД}(n,m)} - 1$ при $a > 1$;
   (b) $\text{НОД}(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) \leq 2$, если $n \neq m$.
5. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол $19°$ на 19 равных частей?
6. В прямоугольнике с целыми сторонами a и b, нарисованном по линиям клетчатой бумаги, проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит?
7. Натуральные числа m, a_1, a_2, …, a_n таковы, что $a_i \leq m$ и $\text{НОК}(a_i, a_j) > m$ при всех $i \neq j$. Докажите, что верно неравенство $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} < 2$.