

Теорема Холла для регулярных графов

- На танцевальном вечере каждый юноша знаком не менее, чем с $m \in \mathbb{N}$ девушками, а каждая девушка – не более, чем с m юношами. Докажите, что каждый юноша может пригласить на танец знакомую девушку (юноши приглашают девушек одновременно).
- Латинским* называется прямоугольник $m \times n$, где $m \leq n$, в каждой клетке которого записано число от 1 до n таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце записанные числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник $m \times n$ можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.
- Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную?
- 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девятыи остальным – другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого – 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?