Алгебраическая форма записи

Рассмотрим множество $\mathbb{C}$, состоящее из формальных выражений вида $z = x+yi$, где x и y — вещественные числа (вещественная и мнимая части, соответственно), а i — вспомогательный символ (мнимая единица). Стандартное обозначение: $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Элементы $\mathbb{C}$ называются компле́ксными числами и для них вводятся арифметические операции как для многочленов переменной i с дополнительным условием $i^2 = -1$. Для числа z его сопряжённым называется число $\overline{z} = x - yi$, а модулем — число $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Числа $x+yi$ и x_1+y_1i считаются равными, если и только если $x_1 = x$ и $y_1 = y$.

1. Докажите, что для любого комплексного числа $x + yi \neq 0 + 0i$ существует единственное обратное комплексное число $x' + y'i$ такое, что $(x + yi)(x' + y'i) = 1 + 0i$.
2. Проверьте очевидные равенства:
   $\overline{(\overline{z})} = z$; $z \cdot \overline{z} = |z|^2$; $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$; $\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$.
3. Проверьте очевидные импликации:
   $\operatorname{Im} z = 0 \iff z = \overline{z}$; $\operatorname{Re} z = 0 \iff z = -\overline{z}$; $z_1/z_2 \in \mathbb{R} \iff z_1\overline{z}_2 = \overline{z}_1 z_2$.
4. Решите уравнение $x^2 + 1 = 0$.
5. Докажите, что в $\mathbb{C}$ любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами имеет ровно два корня с учётом кратности.
6. Вычислите: $\sqrt{3-4i}$; $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$; $\sqrt[4]{-1}$; $\sqrt[3]{1}$.
7. Выведите явную формулу квадратного корня из комплексного числа.
8. Докажите, что в $\mathbb{C}$ любое квадратное уравнение с комплексными коэффициентами имеет ровно два корня с учётом кратности.
9. Решите уравнение $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$.

Тригонометрическая форма записи

Каждому комплексному числу $z = x + yi$ ставится в соответствие точка с координатами $(x; y)$ и угол, отложенный на плоскости Oxy от оси Ox к вектору (x, y). Этот угол называется *аргументом*, обозначается $\arg z$ и определён с точностью до 2π. Если $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$, то, как нетрудно видеть, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, такое представление называется *тригонометрической записью* комплексного числа. Принято отождествлять комплексное число z, точку $(x; y)$ и радиус-вектор $\overrightarrow{(x, y)}$ этой точки.

10. Представьте в тригонометрической форме числа:
    1; i; $1 + i$; $2 + \sqrt{3} + i$; $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$; $\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$.
11. Дайте геометрическую интерпретацию следующих неравенств:
    $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$; $|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||$; $|z-1| \leqslant |\arg z|$ при $|z| = 1$.
12. Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Корни n-й степени

13. Пусть $a = r(\cos\psi + i\sin\psi) \neq 0$, докажите, что существует ровно n корней n-ой степени из a (т. е. корней уравнения $z^n = a$) и выпишите их в явном виде.
14. Докажите, что корни n-й степени из комплексного числа лежат в вершинах правильного n-угольника.
15. Докажите, что все комплексные решения уравнения $z^n = 1$ можно записать как $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. Сколькими способами можно выбрать число ε?

Упражнения

16. Докажите, что произведение нескольких сумм квадратов пар целых чисел, представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.
17. Докажите, что, если комплексное число z является корнем многочлена $p \in \mathbb{R}$, то и число $\overline{z}$ тоже является его корнем.
18. Решите уравнения: $z^4 + (z-2)^4 = 32$; $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.
19. Какие множества на комплексной плоскости описываются условиями: $|z-i| \leqslant 1$; $|z| = z$; $\mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1$; $|iz+1| = 3$; $|z-i| + |z+i| = 2$?
20. Докажите равенство $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Дайте его геометрическую интерпретацию.
21. Пусть $k \neq 1$ – положительное вещественное число, а a и b – произвольные комплексные числа. Докажите, что равенство $|z-a| = k|z-b|$ задаёт окружность, центр которой лежит на прямой, проходящей через точки a и b. Дайте геометрическую интерпретацию.
22. Докажите тождества:
    (a) $\cos\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin(n\varphi/2)\cos((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$;
    (b) $\sin\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin(n\varphi/2)\sin((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$;
    (c) $\frac{\sin\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin(2n-1)\varphi}{\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi} = \operatorname{tg} n\varphi$.
23. Найдите суммы:
    (a) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$; (b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$; (c) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$;
    (d) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots$; (e) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$
24. Докажите равенство $\mathrm{C}_n^1 - \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^3 + \frac{1}{9}\mathrm{C}_n^5 - \ldots = \frac{2^n}{3^{(n-1)/2}}\sin\frac{n\pi}{6}$.
25. Правильный n-угольник вписан в окружность радиуса 1. Докажите следующие утверждения:
    (a) сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей равна n^2;
    (b) сумма длин всех сторон и всех диагоналей равна $n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$;
    (c) произведение длин всех сторон и всех диагоналей равно $n^{n/2}$.