Предел последовательности

Число A является *пределом* последовательности (a_n), если

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow |a_n - A| \leqslant \varepsilon \overset{\text{опр}}{\iff} \lim_{n\to+\infty} a_n = A.$$

1. Сформулируйте определения $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ и ∞.
2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} b + bq + \ldots + bq^{n-1} = \frac{b}{1-q}$ при $|q| < 1$.
3. Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена и что у любой ограниченной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.
4. Докажите, сходимость последовательности $(a_n) \subset \mathbb{R}$, такой что $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N : |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall\, m, n \geqslant N$.
5. Вычислите следующие пределы, считая, что фиксировано некоторое число $a \in (1, +\infty)$:
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n}$; (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$; (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n}$; (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$.
6. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.
7. Докажите, что последовательность $(1 + \frac{1}{n})^n$ сходится.
8. Вычислите следующие пределы:
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^3-20}$; (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+5^n+4^n}{n+5^n+2\cdot 3^n}$;
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+2025} - \sqrt{n})$; (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+2025n} - n)$;
   (e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$; (f) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+3})^n$; (g) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{3^n+n}{3^n})^{\frac{3^n}{2n-1}}$.
9. Докажите, что последовательности (x_n), заданные следующими рекуррентными соотношениями сходятся и найдите их пределы
   (a) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{x_n^2}{2}$; (b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$;
   (c) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$.
10. Последовательности $a_n = x_n + y_n$ и $b_n = x_n \cdot y_n$ сходятся. Обязательно ли (x_n) и (y_n) тоже сходятся?
11. Обязательно ли сходится последовательность (x_n), такая что (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n = 0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - 2x_n = 0$?