Мультипликативные функции

1. Через $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ обозначим соответственно количество и сумму делителей числа $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$\tau(n) < 2\sqrt{n} \quad \text{и} \quad \sigma(n) \geq \tau(n)\sqrt{n}.$$

2. Пусть $\varphi(n)$ – количество целых чисел меньших или равных $n \in \mathbb{N}$ и взаимно простых с ним. Докажите, что

$\varphi(n) \geq \sqrt{n}$ при $n \neq 2$, 6 и $\sigma(n)\varphi(n) < n^2$ при $n \geq 2$.

3. Сумма всех натуральных делителей числа $n \in \mathbb{N}$ более чем в 100 превосходит само число n. Докажите, что есть сто идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых имеет общий делитель с n больший 1.

4. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – строго возрастающая мультипликативная функция. Докажите, что если $f(2) = 2$, то $f(n) = n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

5. a) Дана мультипликативная функция f. Докажите, что функция $g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} f(d)$ мультипликативная.

b) Докажите, что $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$ и $\sum_{d|n} \mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases}$

6. (`Формула обращения Мёбиуса`) Дана произвольная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такую, что $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ при $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d).$$

7. Докажите, что $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \sum\limits_{d|n} \dfrac{\mu(d)}{d}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

8. a) Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим функцию $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n \leq x} f\left(\dfrac{x}{n}\right)$. Докажите, что $f(x) = \sum\limits_{n \leq x} \mu(n) g\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

b) Вычислите $\sum\limits_{n \leq x} \mu(n) \left[\dfrac{x}{n}\right]$ для любого $x \geq 1$.