Слова

1. Бинарное слово N состоит из нулей и единиц. Известно, что вычёркиванием букв из этого слова можно получить любое из 10000 слов, состоящих из 9999 единиц и одного нуля. Найдите наименьшее возможное количество букв в N.
2. Дано слово более чем из 10 букв, в котором любые две соседние буквы различны. Докажите, что можно поменять местами две соседние буквы так, чтобы полученное слово не было периодическим.
3. В ряд в некотором порядке выложены девять карточек с написанными на них натуральными числами от 1 до 9. За один ход можно выбрать любые несколько карточек, выложенных подряд, числа в которых упорядочены по возрастанию или убыванию, и переложить эти карточки в обратном порядке. Например, из ряда $91\underline{653}2748$ можно получить ряд $91\underline{356}2748$. Докажите, что можно упорядочить все карточки по убыванию или возрастанию за не более чем 12 ходов.
4. В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». **Словом** считается любая последовательность из $2n$ букв У и $2n$ букв Ы (число n фиксировано). Слова называются **похожими**, если одно из них можно получить из другого одной перестановкой соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы любые два из выбранных слов не были похожи?
5. Пусть n – натуральное число, а $S \subseteq \{0,1\}^n$ – некоторое подмножество бинарных слов длины n. Для нечётного набора $x_1, \ldots, x_{2k+1} \in S$ не обязательно различных бинарных слов, их **большинством** назовём бинарное слово $y \in \{0,1\}^n$, у которого бит i совпадает с наиболее встречающимся битом i среди $x_1, \ldots, x_{2k+1}$. (Например, при $n = 4$ большинством 0000, 0000, 1101, 1100, 0101 является 0100.) Известно, что для некоторого натурального числа k множество S удовлетворяет свойству P_k: для любых не обязательно различных $2k+1$ бинарных слов из S их большинство принадлежит S. Докажите, что S удовлетворяет свойству P_k при всех натуральных k.
6. Алфавит A состоит из n букв; S – множество слов конечной длины, составленных из букв этого алфавита. Известно, что любая бесконечная последовательность букв алфавита A начинается ровно с одного из слов множества S. Докажите, что S конечно.
7. В алфавите племени ААБ всего две буквы: А и Б. При этом, если в любом слове вставить или вычеркнуть сочетание ААА или БББ, то смысл слова не изменится. Кроме того, при замене друг на друга в любом месте слова сочетаний АБ и ББАА, а также БА и ААББ,

смысл слова тоже не изменится. Верно ли, что слова АБ и БА имеют одинаковый смысл?

8. В ряду $n+1$ позиция занумерована слева направо числами от 0 до n. Карточки с числами от 0 до n разложены по этим позициям в некотором порядке (на каждой позиции лежит ровно одна карточка). Требуется расположить карточки так, чтобы у каждой из них число совпадало с номером позиции. Пока они расположены в другом порядке, последовательно совершаются ходы. На каждом ходу выбирается наименьшее число k такое, что на позиции номер k лежит карточка с числом $\ell > k$; эта карточка убирается из ряда, все карточки с $k+1$ по ℓ позицию сдвигаются влево, а на освободившуюся позицию номер ℓ выкладывается карточка с номером k. Докажите, что процесс конечен, определите наибольшее возможное число ходов и найдите количество начальных расположений, для которых потребуется это число ходов.
9. Дано натуральное число n. `Словом` называется любая последовательность, состоящая из n букв (бесконечного) алфавита, а `расстоянием` $\rho(A, B)$ словами $A = a_1a_2\dots a_n$ и $B = b_1b_2\dots b_n$ называется количество позиций букв, в которых они отличаются (т. е. количество чисел $i \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $a_i \neq b_i$). Скажем, что слово C `лежит между` A и B, если $\rho(A, B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы среди любых трёх выбранных слов какое-то лежало между двумя другими?
10. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются `непохожими`, если они различаются хотя бы по 51 признаку. Докажите, что в справочнике не может находиться больше 34 попарно непохожих растений.
11. Пусть $B_n = \{0, 1\}^n$ – множество всех бинарных строк длины 2. `Расстоянием` между строками $(a_i)_{i=1}^n$ и $(b_i)_{i=1}$ называется сумма $d((a_i), (b_i)) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$. Подмножество $C_n \subset B_n$ называется PECC длины n и допуска m, если для каждой строки $(b_i) \in B_n$ существует единственная строка $(c_i) \in C_n$ такая, что $d((b_i), (c_i)) \leqslant m$. Докажите, что не существует PECC длины 90 и допуска 2.
12. Алфавит некоторого языка состоит из 25 букв, а `словами` являются все возможные последовательности, состоящие из 17 не обязательно различных букв. На бумажную полоску записали последовательность, состоящую из 5^{18} букв, а затем концы полоски склеили так, что получилось кольцо. Назовём слово `сингулярным`, если из кольца можно

вырезать кусок, с этим словом, но нельзя вырезать два непересекающихся таких куска. Известно, что из кольца можно вырезать 5^{16} непересекающихся кусков, содержащих одно и то же слово. Найдите наибольшее возможное количество сингулярных слов.

13. В стране учатся 4^9 школьников, живущих в четырёх городах. В конце учебного года правительство провело ЦЭ по 9 предметам, за каждый из которых каждый ученик получил 1, 2, 3 или 4 балла. Известно, что у любых двух учеников отметки хотя бы по одному учебному предмету различаются. При этом оказалось, что у любых двух учеников, живущих в одном городе, совпадают отметки хотя бы по одному предмету. Докажите, что найдётся такой предмет, что у любых двух детей, живущих в одном городе, совпадают отметки именно по этому предмету.