Мощность множества

Множествами A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить биекцию. Ясно, что „быть равномощными" – отношение эквивалентности и для конечных множеств оно согласуется с равенством мощностей. Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется *счётным.*

1. Докажите, что промежутки $[0,1]$ и $(0,10)$ равномощны.
2. Докажите счётность множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.
3. Докажите, что любое подмножество счётного множества конечно или счётно.
4. Докажите, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
5. Бесконечное множество M вещественных чисел таково, что сумма чисел любого его подмножества ограничена. Докажите, что M счётно.
6. Докажите, что любое из следующих множеств не более чем счётно:
   (a) набор непересекающихся интервалов числовой прямой;
   (b) множество точек, в которых происходит скачок монотонной функции;
   (c) множество точек строгого локального максимума функции вещественного аргумента счётно.
7. Придумайте биекцию между множествами всех бесконечных последовательностей, состоящих из $0, 1, 2$ и всех бесконечных последовательностей, состоящих из $0, 1$.
8. По плоскости бегает невидимый таракан, который стартует из точки с рациональными координатами и каждую секунду перемещается на вектор с рациональными координатами. В любую секунду можно выбрать точку и ударить по ней. Докажите, что есть стратегия, позволяющая гарантированно прихлопнуть таракана за конечное время.
9. Является ли счётным множество алгебраических чисел?

Сравнение мощностей

Если множество A равномощно подмножеству множества B, то говорят, что мощность множества A *меньше либо равна* мощности множества B. Если $|A| \leqslant |B|$ и множества A и B неравномощны, то говорят, что мощность множества A *меньше* мощности множества B.

10. **Теорема Кантора.** Докажите неравенство $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
11. Докажите, что мощность любого множества A меньше мощности множества 2^A его подмножеств.
12. **Теорема Кантора-Бернштейна.** Докажите, что, если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.
13. Докажите, что множества всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек плоскости.
14. *Восьмёркой* назовём фигуру, состоящую из двух касающихся окружностей. Можно ли нарисовать несчётное множество попарно непересекающихся восьмёрок?
15. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц, несчётно и равномощно множеству всех подмножеств натурального ряда.
16. Докажите, что множество бесконечных последовательностей вещественных чисел равномощно $\mathbb{R}$.
17. Докажите, что, если квадрат разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна квадрату.
18. Докажите, что, если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.