Гамильтоновы циклы

Во всём листке, если не оговорено иное, под словом *граф* подразумевается простой конечный граф на v вершинах, содержащий e рёбер. Через $d(a)$ будет обозначаться степень вершины a. Через K_n будет обозначаться полный граф на n вершинах.

Цикл или путь в графе называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам ровно по одному разу. Граф называется *гамильтоновым*, если в нём есть гамильтонов цикл.

Наибольшее количество попарно несмежных вершин графа называется его *числом независимости.*

Для любого графа его *рёберный граф* определяется следующим образом: вершины рёберного графа соответствуют рёбрам исходного графа и они соединены, если и только если в исходном графе они выходят из одной вершины.

Нетрудно видеть, что, если вершины a и b графа смежны, то из неравенства $d(a) + d(b) \geqslant v + 1$ следует, что в графе есть треугольник (цикл длины три) с вершинами a и b. Если a и b не смежны, то из неравенства $d(a) + d(b) \geqslant v - 1$ следует, что у a и b есть общий сосед.

1. Докажите, что, если $e \geqslant \lfloor \frac{v}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{v}{2} \rceil$, то в графе есть треугольник.
2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – путь максимальной длины $s \geqslant 2$ в графе G и $d(a_1) + d(a_s) \geqslant s$. Докажите, что в G есть цикл длины s.
3. **Теорема Óре.** Докажите, что, если в графе для любых двух несмежных вершин a и b выполняется неравенство $d(a) + d(b) \geqslant v$, то он гамильтонов.
4. **Теорема Óре.** Докажите, что, если $e \geqslant (v - 1)(v - 2)/2 + 2$, то граф гамильтонов. Покажите, что существует ровно один негамильтонов граф с $(v - 1)(v - 2)/2 + 1$ рёбрами — это K_{v-1}, соединённый единственным ребром с ещё одной вершиной.

Упражнения

5. В связном графе любые две вершины можно соединить простым путём чётной длины. Докажите, что любые две вершины этого графа можно соединить простым путём нечётной длины.
6. *Числом путей* графа назовём наименьшее количество попарно непересекающихся простых путей, которыми можно покрыть все вершины этого графа. Для каждого натурального числа $k > 1$ найдите наибольшее возможное число путей связного графа с числом независимости k.
7. Дан граф, у которого не менее шести вершин и степени всех вершин равны трём. Найдите все возможные значения, которые может принимать наибольший общий делитель длин всех циклов в этом графе.

Задачи

8. **Теорема По́ша.** Докажите, что, если $v \geqslant 3$ и для любого числа m, $1 \leqslant m < (v-1)/2$, выполнены условия: 1) число вершин со степенью, не превосходящей m, меньше m; и 2) при нечётных v число вершин со степенями, не превосходящими $(v-1)/2$, не больше $(v-1)/2$; то граф гамильтонов.
9. В однокруговом футбольном турнире участвуют $2n$ команд. В каждом туре все команды разбиваются на n пар не игравших между собой ранее команд и играют матчи в парах одновременно. Найдите наименьшее натуральное число k, при котором после k сыгранных туров может статься так, что следующий тур организовать не получится.
10. В федеративном государстве, состоящем из двух республик, каждые два города соединены дорогой с односторонним движением; при этом, двигаясь по дорогам, можно из любого города попасть в любой другой. Туристическое агентство „Гамильтон” предлагает n различных туристических маршрутов по городам первой республики и m – по городам второй (каждый из маршрутов предполагает посещение всех городов республики ровно по одному разу и возвращение в исходный, причём всё это – не выезжая за пределы республики). Докажите, что агентство „Гамильтон” может предложить не менее mn аналогичных маршрутов по всей федерации.
11. В графе G_1 с $2n$ вершинами степень каждой вершины равна 3. Докажите, что количество разбиений его рёберного графа G_2 на два непересекающихся гамильтоновых цикла в 2^{n-1} раз больше числа гамильтоновых циклов в самом графе G_1.
12. На некоторой планете находятся M стран, в которых суммарно расположены N городов. Некоторые города соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что:
    - в каждой стране есть хотя бы три города;
    - каждый город соединён авиалинией с по крайней мере половиной городов страны, в которой он расположен;
    - каждый город соединён ровно одной авиалинией, идущей за пределы страны, в которой он расположен;
    - для любых двух стран есть не больше двух авиалиний, соединяющих города этих стран между собой;
    - если в двух странах суммарно расположено менее $2M$ городов, то найдётся авиалиния, соединяющих города этих стран между собой.

    Докажите, что на планете есть простой круговой маршрут, проходящий по хотя бы $M + \frac{N}{2}$ городам.