Определение

Пусть даны точка R, действительное число λ и угол α. Поворотной гомотетией относительно точки R с коэффициентом λ на угол α называется преобразование плоскости, которое точку A переводит в точку A' такую, что $RA' = \lambda RA$ и $\angle A'RA = \alpha$.

Четырёхсторонником называется фигура, образованная четырьмя попарно непараллельными прямыми.

Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$. Тогда описанные окружности треугольников ADE, BCE, ABF, DCF пересекаются в одной точке M – точке Микеля.

Основные свойства

1. Существует единственная поворотная гомотетия $\mathfrak{H}$, переводящая отрезок AB в DC.
2. Центры гомотетий, переводящие следующие пары отрезков друг в друга, совпадают: AB – DC, AD – BC, DF – EB, EA – CF, ED – BF, EC – AF.
3. Если $\triangle ABK$ подобен $\triangle DCN$, то $\mathfrak{H}$ переводит также AK в DN.
4. Пусть N – середина AB, K – CD. Тогда N, K, E, M лежат на одной окружности.
5. Если A, B, C, D лежат на одной окружности с центром O, то описанные окружности треугольников AOC и BOD проходят через M.
6. Если A, B, C, D лежат на одной окружности с центром O, то $OME = 90°$.
7. $M \in EF$ тогда и только тогда, когда A, B, C, D лежат на одной окружности.

Упражнения

1. **Первая лемма о воробьях.** В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны точки C_0 и B_0 соответственно, N – середина дуги BAC описанной окружности ABC. Докажите, что $BC_0 = CB_0$ тогда и только тогда, когда A, B_0, C_0, N лежат на одной окружности.
2. **Вторая лемма о воробьях.** В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны точки C_0 и B_0 соответственно, I – центр вписанной окружности ABC. Докажите, что $BC_0 + CB_0 = BC$ тогда и только тогда, когда A, B_0, C_0, I лежат на одной окружности.
3. Пусть $ABCD$ выпуклый четырёхугольник, для которого $BC = DA$ и BC не параллельно DA. Пусть две переменные точки E и F лежат на сторонах BC и DA соответственно так, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF – в Q, прямые EF и AC – в R.
   Докажите, что описанная окружность PQR, при изменении E и F имеет постоянную точку, отличную от P.
4. Точки P, Q выбраны на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно так, что $BP = CQ$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке R. Описанные окружности треугольников BPR, CQR повторно пересекаются в точке S, отличной от точки R. Докажите, что R лежит на биссектрисе угла BAC.
5. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведённые в точках B и C, пересекаются в точке T. Точка S выбрана на луче BC так, что $AS \perp AT$. Точки B_1, C_1 лежат на луче ST, причём $B_1T = BT = C_1T$. Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны.
6. В остроугольном треугольнике ABC сторона BC наименьшая. Пусть P – переменная точка на стороне BC. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC соответственно так, что $BP = PD$ и $CP = PE$. Докажите, что при движении точки P по стороне BC

описанная окружность $\triangle ADE$ проходит через постоянную точку, отличную от A.

7. Дан треугольник ABC, точки D, E лежат на отрезках AB, AC соответственно так, что $CA = CD, BA = BE$. Пусть ω – описанная окружность $\triangle ADE$. P – точка, симметричная A относительно прямой BC, прямые PD, PE повторно пересекают ω в точках X, Y соответственно. Докажите, что прямые BX и CY пересекаются на окружности ω.

Задачи

8. Дан треугольник ABC. Симедиана, проведённая из вершины A, повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Из D опустили перпендикуляры DQ и DR на прямые AC и AB соответственно. На прямой QR выбирается произвольная (переменная) точка X, отличная от Q и R. Прямая, проходящая через X перпендикулярно прямой DX, пересекает прямые AC и AB в точках V и W соответственно.

   Определите ГМТ середин отрезков VW при всевозможных положениях X.

9. Точки E, F выбраны на сторонах AC, AB соответственно треугольника ABC, для которого выполняется $AC = AB$, так, что $AE = BF$. Точка D выбрана в той же полуплоскости, что и A относительно прямой EF так, что $\triangle DFE \sim \triangle ABC$. Прямые EF, BC пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK касается описанной окружности $\triangle ABC$.

10. Пусть I и I_A – центры вписанной и вневписанной против A окружностей треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает прямые BI_A и CI_A в E и F соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AID и I_AEF касаются.