Многочлены I

Простой разнобой

1. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?
2. Дан кубический многочлен $f(x)$. Назовём *циклом* такую тройку различных чисел (a, b, c), что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Известно, что нашлись восемь циклов (a_i, b_i, c_i), $i = 1 \ldots, 8$, в которых участвуют 24 различных числа. Докажите, что среди восьми чисел вида $a_i + b_i + c_i$ есть хотя бы три различных.
3. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству $P(x^2) = (P(x))^2$.
4. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству $P(x^2 - 2x) = (P(x-2))^2$.
5. Дан многочлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует не больше одного многочлена $Q(x)$ степени n, удовлетворяющего тождеству $Q(P(x)) = P(Q(x))$.
6. Даны $2n$ различных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ и таблица $n \times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца записано $a_i + b_j$. Докажите, что, если произведения чисел во всех столбцах, одинаковы, то и произведения чисел во всех строках тоже одинаковы.

$\mathbf{x - y \mid P(x) - P(y)}$

7. Пусть a, b, c – различные целые числа, а $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что следующие три равенства не могут выполняться одновременно: $P(a) = b$, $P(b) = c$,$P(c) = a$.
8. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две целые точки. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
9. Докажите, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}$ степени выше первой найдётся многочлен $Q(x) \in \mathbb{Z}$ такой, что многочлен $P(Q(x))$ приводим над $\mathbb{Z}$.
10. Многочлены $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, что для каждого натурального числа n верно равенство $a_n = \text{НОД}(f(n), g(n)) < 2019$. Докажите, что последовательность (a_n) периодична.
11. Дан многочлен $P(x) = x^2 - 2019$. Докажите, что не существует функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей тождеству $f(f(x)) = P(x)$.
12. Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – многочлен степени $n > 1$, а k – произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен $Q_k(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ (P применён k раз). Докажите, что существует не более n целых чисел t, при которых $Q_k(t) = t$.