Паросочетание в графе – это набор рёбер, попарно не имеющих общих вершин. Пусть дан двудольный граф с долями A и B. *Паросочетанием **из** A **в** B* называется любое паросочетание, в котором участвуют все вершины доли A.

1. **Теорема Холла.** Докажите, что паросочетание из A в B существует, если и только если для любого набора вершин $A_1 \subset A$ и их окружения $B_1 = \{b \in B : b$ смежна хоть с одной вершиной из $A_1\}$ верно неравенство $|A_1| \leqslant |B_1|$.
2. Даны два семейства $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ и $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$ непустых множеств, таких что $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. Множество $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ называется *системой общих представителей* (с.о.п.) семейств A и B, если: 1) $x_i \in A_i$ при всех $i = \overline{1, n}$ и 2) для некоторой перестановки σ верны $x_{\sigma(i)} \in B_i$ при всех $i = \overline{1, n}$. Докажите, что A и B имеют с.о.п. тогда и только тогда, когда для всех $m = 1, 2, \ldots, n$, объединение любых m множеств из семейства A содержит не более m множеств из семейства B.
3. **Теорема Кёнига–Эгервари.** Докажите, что в прямоугольной таблице, клетки которой заполнены нулями и единицами, минимальное количество рядов (строк и столбцов), содержащих все единицы, равно максимальному количеству единиц, которые могут быть выбраны так, чтобы никакие две из них не лежали в одном ряду.

Упражнения

4. У Пети имеется два квадратных листа бумаги размера 10×10. Его друг Вася расчертил их на 100 многоугольников, площадь каждого из которых равна 1, а после положил один лист поверх другого. Докажите, что Петя сможет воткнуть 100 булавок в верхний лист, проколов все 200 многоугольников, нарисованных на двух листах.
5. Пусть в двудольном графе степень всех вершин равна k. Докажите, что существует правильная раскраска рёбер графа в k цветов.
6. Круговой турнир по теннису (не бывает ничьих), в котором участвовало $2n$ команд, длился $2n - 1$ день. Каждая из команд играла ровно одну игру в день и в течение турнира сыграла со всеми по одному разу. Обязательно ли в каждый день турнира можно выбрать по одной команде, которая победила в этот день, так, что все выбранные команды будут различны?
7. Есть натуральные числа $k \leqslant m < n$. В графе G степени всех вершин не менее m и не более n. Докажите, что можно выкинуть несколько ребер, чтобы степени стали не менее $m - k$ и не более $n - k$.

8. В коробке лежит 1000 карандашей. Среди любых 10 карандашей с попарно различными цветами найдутся два карандаша одинакового размера, а среди любых 10 карандашей попарно различных размеров найдутся два одноцветных. Докажите, что в коробке найдётся 112 карандашей одного цвета или 112 карандашей одного размера.
9. В таблице $n \times n$ записаны неотрицательные числа так, что суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны 1. Докажите, что можно выбрать n клеток таблицы, из которых никакие две не стоят в одном и том же столбце и в одной и той же строке, и при этом в каждой выбранной клетке число будет положительным.

Задачи

10. Таблица $m \times n$, $m \leqslant n$, называется *латинским прямоугольником*, если элементы каждой строки этой матрицы образуют перестановку чисел от 1 до n и в каждом столбце все числа разные. Докажите, что в любой латинский прямоугольник можно дописать несколько строк так, что он станет латинским квадратом.
11. Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные зрителем. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен узнать спрятанную карточку. Могут ли они договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было узнать спрятанную?
12. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник закрывает две соседние цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?
13. Пусть m – натуральное число, а $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — это m (не обязательно различных) подмножеств конечного множества A. Известно, что для любого непустого подмножества I множества $\{1, 2 \ldots, m\}$, верно неравенство $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \geqslant |I|+1$. Докажите, что элементы множества A можно покрасить в два цвета так, чтобы каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ содержало элементы обоих цветов.
14. Дан граф $\mathcal{G}$, в котором степень каждой вершины равна 2020. Докажите, что в нём можно выделить подмножество рёбер так, чтобы граф, состоящий из всех вершин $\mathcal{G}$ и выбранных рёбер представлял собой объединение непересекающихся циклов, причём каждая вершина принадлежала ровно одному циклу.