Применение комплексных чисел

1. Клетчатый прямоугольник разбили на плитки двух видов: $1 \times m$ и $n \times 1$ (плитки нельзя поворачивать). Докажите, что это можно сделать плитками одного из видов.
2. Прямоугольник размера 8×9 замощают плитками двух видов: 3×1 и „дырявой" 1×3 (в дырявой плитке отсутствует центральная клетка, плитки нельзя поворачивать). Докажите, что можно указать на 18 клеток так, что, если плитками замостить 70 клеток прямоугольника, то две оставшиеся обязательно будут среди указанных.
3. Найдите все многочлены $P \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющие при всех $x \in \mathbb{R}$ равенству $P(x)P(x+1) = P(x^2+x+1)$.
4. Найдите все многочлены $P \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющие при всех $x \in \mathbb{R}$ равенству $P(x)P(2x^2) = P(2x^3+x)$.
5. Десятичная запись простого числа имеет вид $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, где $n > 1$ и $a_n > 1$. Докажите, что многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ неприводим над $\mathbb{Z}$.
6. Пусть $P \in \mathbb{Q}[x]$ — неприводимый многочлен степени n. Докажите, что количество многочленов $Q \in \mathbb{Q}[x]$ степени, меньшей n, таких, что $P(x) \mid P(Q(x))$, не превосходит n.
7. Многочлены $P, Q, R, S \in \mathbb{R}[x]$ удовлетворяют при всех $x \in \mathbb{R}$ равенству $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$. Докажите, что $P(x)$ делится на $x-1$.
8. Даны простое число $p > 2$ и множество $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Найдите количество подмножеств множества A, которые состоят из p элементов с суммой кратной p.
9. Пусть $f(n)$ – количество непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с суммой, кратной n. Докажите равенство $f(x) = 1 + \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{2 \nmid d \mid n} \varphi(d) 2^{\frac{n}{d}}$.
10. Даны натуральные числа $n > 1$ и $a_1, \ldots, a_m$. Через $f(k)$ обозначим количество m-ок $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ таких, что $1 \leqslant c_i \leqslant a_i$, $i = \overline{1, m}$, и $c_1 + c_2 + \ldots + c_m \equiv k \pmod{n}$. Докажите, что какое-то из a_i кратно n, если и только если $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1)$.
11. Даны натуральные числа $m, n > 1$ и $a_1, \ldots, a_n$, где никакое из a_i не кратно m^{n-1}. Докажите, что существует ненулевой набор целых чисел $e_1, \ldots, e_n$, меньших m по модулю, такой, что $m^n \mid e_1 a_1 + \ldots + e_n a_n$.
12. **Теорема Гаусса–Люка** Докажите, что все корни производной многочлена $P \in \mathbb{C}[x]$ принадлежат выпуклой оболочке множества всех корней этого многочлена на комплексной плоскости.
13. Докажите, что, если многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ принимает только неотрицательные значения, то его можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$.

14. Решите уравнение $(z-1)^n = (z+1)^n$ и выпишите сумму квадратов всех его корней.
15. Докажите, что $\sum\limits_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi m}{n}} = \frac{n^2-1}{3}$ при всех нечётных $n > 1$.
16. Вычислите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
17. **Теорема Лиувилля** Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ — корень неприводимого многочлена $p \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg p \geqslant 2$. Докажите, что существует вещественное число $c > 0$ такое, что для любого рационального числа $\frac{p}{q}$ выполняется неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n}$.
18. Придумайте вещественное число, не алгебраическое над $\mathbb{Q}$.
19. На окружности выбрали 100 точек и для каждой перемножили расстояния до остальных. Могли ли получиться числа от 1 до 100 (в некотором порядке)?