

Теорема Турана

1. Среди всех графов на v вершинах, не содержащих полного подграфа на $n \leq v$ вершинах, выберем граф T с наибольшим возможным количеством рёбер. Докажите, что для вершин графа T свойство „быть несмежными” транзитивно и получите явное описание этого графа.
2. Среди всех графов на v вершинах, и числом независимости меньшим n выберем граф G с наименьшим возможным количеством рёбер. Дайте явное описание этого графа.
3. На плоскости отметили n точек, попарные расстояния между которыми не больше 1. Докажите, что найдётся не более $\frac{n^2}{3}$ пар точек на расстоянии больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Даны n различных натуральных чисел, среди которых нет ни одного полного куба (т. е. ни одно из них не равно кубу целого числа). Найдите наибольшее возможное количество полных кубов среди попарных произведений этих чисел.
5. В Академии Наук Швамбрании 100 ученых и некоторые пары ученых обсуждают друг с другом физику или химию (каждая пара ученых обсуждает не более одной науки), причем никакие трое ученых не обсуждают попарно одну и ту же науку. Каково наибольшее возможное число пар ученых, говорящих друг с другом о какой-нибудь из двух наук?
6. Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
7. Решите задачу, аналогичную предыдущей, для m батареек, среди которых $k+1 \leq m$ хороших.

Теорема Турана

8. За круглым столом сидят n человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?
9. На планете Альфамегацентавра есть 2023 города, некоторые из них соединены между собой двухсторонними авиалиниями. При этом, среди любых четырёх городов найдутся два, между которыми нету прямого авиасообщения. Найдите наибольшее возможное количество троек городов Альфамегацентавры таких, что между любыми двумя городами тройки есть авиалиния.
10. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $n+1$ точек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее, чем $7n$ отрезков.
11. В компании, состоящей из 2021 человек, ровно 1400 являются диверсантами. Шерлоку необходимо определить хотя бы одного диверсанта. Для этого он может назначить несколько спецопераций, каждая из которых задействует ровно трёх участников компании. Спецоперация проваливается, если по крайней мере один её из участников является диверсантом. За одну попытку Шерлок выбирает трёх человек, отправляет их на спецоперацию и смотрит, провалится она или нет. Найдите наименьшее возможное количество операций, за которое Шерлок может достичь желаемого.