Целая и дробная части числа

1. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[x+\dfrac{i-1}{n}\right]=[nx]$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

2. Для любого натурального числа $n\geq 2$ докажите, что $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\ldots+[\sqrt{n^2-1}]=\dfrac{n(n-1)(4n+1)}{6}$.

3. Действительное число a удовлетворяет равенству $\{a\}+\{\frac{1}{a}\}=1$. Докажите, что $\{a^n\}+\left\{\frac{1}{a^n}\right\}=1$, $n\in\mathbb{N}$.

4. Докажите, что простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители с показателем

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

5. Докажите, что число $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$, $n\in\mathbb{N}$, нечётное.

6. Найдите наименьшее значение выражения

$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right]+\left[\frac{b+c+d}{a}\right]+\left[\frac{c+d+a}{b}\right]+\left[\frac{d+a+b}{c}\right],$$

где a, b, c, d – натуральные числа.

7. Докажите, что $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$, $n\in\mathbb{N}$.

8. Через $\sigma(k)$ обозначим сумму всех натуральных делителей числа $k\in\mathbb{N}$. Докажите, что

$$\sigma(1)+\ldots+\sigma(n)=n+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right],\ n\in\mathbb{N}.$$

9. Числа p, $q\in\mathbb{N}$ взаимно просты. Докажите, что

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

10. Пусть α, $\beta>1$. Докажите, что каждое натуральное число встречается в последовательности $[\alpha]$, $[\beta]$, $[2\alpha]$, $[2\beta]$, $[3\alpha]$, $[3\beta]$, $\ldots$ ровно один раз, если и только если α – иррациональное число и $1/\alpha+1/\beta=1$.