Частично упорядоченные множества

В этом листке для термина „частично упорядоченное множество” будем использовать сокращение **чум**. Биекция $f\colon A \to B$ между **чум**ами называется их *изоморфизмом*, если она сохраняет порядок, т. е. для любых $x, y \in A$ неравенства $x \le y$ и $f(x) \le f(y)$ равносильны. **Чум** A *вкладывается* **чум** B, если существует изоморфизм между A и подмножеством множества B.

1. Докажите, что **чум** вкладывается в множество своих подмножеств.

Элемент x **чум** M называется *минимальным*, если нет ни одного элемента y такого, что $y \lneq x$.

2. Найдите все минимальные элементы $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ с отношением порядка „$|$”.
3. Докажите, что для любого **чум** M равносильны следующие условия:
   (a) *Минимальности:* в любом непустом подмножестве $N \subset M$ есть хотя бы один минимальный элемент (минимальный в N, а не во всём M);
   (b) *Обрыва убывающих цепей:* любая убывающая последовательность $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge \ldots$ элементов M стабилизируется, т. е. $a_n = a_{n+1}$ при всех n, начиная с некоторого номера;
   (c) *Индуктивности:* Если условию $\mathfrak{P}$ удовлетворяют все минимальные элементы и из справедливости $\mathfrak{P}$ для всех элементов, меньших произвольного элемента a, следует справедливость $\mathfrak{P}$ для a; то все элементы множества M обладают свойством $\mathfrak{P}$.

Цепи и антицепи

Пусть задан **чум** M, *цепью* (*антицепью*) называется его подмножество, состоящее из попарно сравнимых (несравнимых) элементов.

4. **Теорема Мирского.** Докажите, что в конечном **чум** наибольшая длина цепи равна наименьшему количеству антицепей, на которые можно это **чум** разбить.
5. **Теорема Дилуорса.** Докажите, что в конечном **чум** наибольшая длина антицепи равна наименьшему количеству цепей, на которые можно это **чум** разбить.
6. **Лемма Шпернера.** Докажите, что максимально возможное количество подмножеств n-элементного множества, ни одно из которых не содержит другое, равно $C_n^{[n/2]}$.
7. Дано натуральное число n. *Японским треугольником* назовём фигуру треугольного вида, в которой в для каждого $i = \overline{1, n}$ ряд под номером i содержит ровно i кругов, ровно один из которых красный. *Путём ниндзя* в Японском треугольнике назовём последовательность, состоящую из n кругов, которая начинается из верхнего ряда, а каждый следующий круг выбирается из двух, расположенных непосредственно под текущим. Найдите наибольшее число k такое, что в каждом пути ниндзя есть по крайней мере k красных кругов.