

Принцип Дирихле в геометрии

1. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что хотя бы три из отмеченных точек можно покрыть кругом радиуса $1/7$.
2. Петя нарисовал окружность и отметил на ней 25 точек. Потом Вася провел какие-то 6 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что после этого Петя сможет провести еще один такой отрезок, не имеющий общих точек ни с одним из проведенных.
3. На сфере даны пять точек. Докажите, что некоторые четыре из них лежат на замкнутой полусфере.
4. Докажите, что любой выпуклый $2n$ -угольник имеет диагональ, не параллельную ни одной из его сторон.
5. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.
6. Внутри выпуклого $2n$ -угольника взята точка P . Через каждую вершину многоугольника и точку P проведена прямая. Докажите, что найдётся сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих внутренних точек.
7. Выпуклый многоугольник содержит $n^2 + 1$ точку с целыми координатами. Докажите, что среди них найдётся хотя бы $n + 1$ точка, лежащая на одной прямой.
8. На плоскости отметили $n^2 + 1$ точку. Докажите, что среди отмеченных точек можно выбрать $n + 1$ точку, никакие три из которых не являются вершинами остроугольного треугольника.