Раскраски циклов

1. В стране больше 101 города. Столица соединена со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно попасть в любой другой. Докажите, что можно так закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, что возможность попасть из любого города в любой сохранится.
2. Витя задумал набор из 100 множеств: A_1, A_2, ..., A_{100}. За один ход Маша называет любые два индекса $i \neq j$ от 1 до 100, а Витя в ответ выдаёт множества $A_i \cup A_j$ и $A_i \cap A_j$. Найдите наименьшее количество ходов, за которое Маша может гарантированно определить множества, загаданные Витей.
3. В стране Центумии некоторые пары городов соединены дорогами, причём из каждого города выходит 100 дорог. *Пучком* назовём набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков.
4. В стране 2023 города, любые два города соединены авиалинией. Цены билетов на всех авиалиниях различны. Могут ли все круговые маршруты, проходящие через каждый город по одному разу и возвращающиеся в исходный пункт, стоить одинаково?
5. Вершины правильного 2024-угольника разбили на пары и в каждой паре провели отрезок с концами в этих вершинах. Оказалось, что полученные 1012 отрезка не имеют общих точек. Докажите, что на этих отрезках можно расставить направления так, что сумма полученных векторов будет равна нулю.
6. Имеется $4n$ камушков массами $1, 2, \ldots, 4n$. Каждый из камушков покрашен в один из n цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равной массы так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.
7. Будем говорить, что граф является *n-хорошим*, если среди любых n его вершин проходит ребро. Найдите наименьшее натуральное число N такое, что в любом n-хорошем связном графе с N вершинами существует цикл, при удалении рёбер которого граф останется связным.
8. Дан граф $\mathcal{G}$, в котором степень каждой вершины равна 2024. Докажите, что в нём можно выделить подмножество рёбер так, чтобы граф, состоящий из всех вершин $\mathcal{G}$ и выбранных рёбер представлял собой объединение непересекающихся циклов, причём каждая вершина принадлежала ровно одному циклу.
9. В графе $2n$ вершин, причём все они степени 3. Докажите, что можно выбрать n рёбер так, правильная раскраска выбранных рёбер в три цвета будет однозначно задавать правильную раскраску в три цвета всех рёбер графа.