Орбиты

Пусть задана функция $f\colon A \to A$. *Орбитой* элемента x называется множество $\{x, f(x), f(f(x)), \ldots\}$, если функция является биективной, то в орбиту также добавляются итерации обратной функции. В ориентированном графе $(A, x \mapsto f(x))$ орбиты – это всевозможные пути.

1. На трассе, имеющей форму круга, расположены n машин в n различных точках. Все машины начали двигаться по трассе одновременно и с одинаковой скоростью, каждая – в своём направлении. Если две машины встречались в некоторой точке, они мгновенно разворачивались и продолжали движение в противоположных направлениях. Докажите, что в некоторый момент времени все машины будут находиться в начальных точках и двигаться в исходных направлениях.
2. Докажите, что для любой биекции $f\colon A \to A$ существуют функции $g_1, g_2\colon A \to A$ такие, что $f = g_2 \circ g_1$, а композиции $g_1 \circ g_1$ и $g_2 \circ g_2$ являются тождественными отображениями.

Упражнения

3. Обозначим $S = \{1, 2, \ldots, 999\}$. Функция $f\colon S \to S$ удовлетворяет двойному равенству $f^{\circ(n+f(n)+1)}(n) = f^{\circ(nf(n))}(n) = n$ при всех $n \in S$. Докажите, что существует элемент $a \in S$ такой, что $f(a) = a$.
4. Положим $S = \{1, \ldots, n\}$. Для любой биекции $f\colon S \to S$ через $c(f)$ обозначим количество её различных обит. Пусть даны k биекций $f_1, \ldots, f_k$ из S в себя, докажите, что $c(f_1) + \cdots + c(f_k) \leqslant n(k-1) + c(f_1 \circ \cdots \circ f_k)$.
5. Множество L состоит из 2020 прямых общего положения на плоскости. Будем говорить, что прямая $\ell_1 \in L$ *ограничивает* другую прямую $\ell_2 \in L$, если все точки пересечения ℓ_2 с прямыми из L лежат в одной полуплоскости относительно ℓ_1. Докажите, что найдутся прямые ℓ и ℓ' в L такие, что ℓ ограничивает ℓ', а ℓ' не ограничивает ℓ.
6. Множество M состоит из 2017 натуральных чисел. Для любого подмножества $A \subset M$ через $f(A)$ обозначим множество, состоящее из всех элементов множества M, которые делятся на нечётное количество элементов множества A. Найдите наименьшее количество цветов, в которое гарантированно возможно покрасить все непустые подмножества множества M так, чтобы из $A \neq f(A)$ следовало, что множества A и $f(A)$ окрашены в разные цвета.
7. S — конечное множество, а A — множество всех функций из S в S. Для некоторой функции $f \in A$ известно, что $f \circ g \circ f \neq g \circ f \circ g$ при всех $g \in A$, отличных от f. Докажите, что $f(f(S)) = f(S)$.
8. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что при всех $a, b \in \mathbb{Z}$ верно равенство
$$f^{\circ(a^2+b^2)}(a+b) = af(a) + bf(b).$$