Малая теорема Ферма

1. Пусть $a \in \mathbb{Z}$ не делится на простое p. Докажите, что
   (a) числа $1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, p \cdot a$ дают попарно различные остатки от деления на p;
   (b) $a^{p-1} - 1 \vdots p$.
2. Докажите, что $\underbrace{11\ldots1}_{p-1} \vdots p$ при любом простом $p > 5$.
3. Целые числа a, b и c таковы, что $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 7. Докажите, что произведение abc делится на 7.
4. Докажите, что $2^{2^p} - 4 \vdots 2^p - 1$ при любом простом p.
5. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.
6. Докажите, что
   (a) если число $a^2 + b^2$ (a, b – целые) делится на простое число вида $4k + 3$, то a и b также делятся на это простое число;
   (b) уравнение $y^2 = x^3 + 7$ не разрешимо в целых.
7. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если НОД$(a, 561) = 1$, то $a^{560} \equiv 1 (\bmod 561)$. (Числа, обладающие этим свойством, называются *числами Кармайкла.*)
8. Найдите все натуральные числа, взаимно простые со всеми членами бесконечной последовательности $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \geq 1$.
9. Пусть p – простое число. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.)