

Через F везде будет обозначаться произвольное поле, элементы которого мы будем называть просто числами. Для конечного множества $A \subset F$ и его элемента a положим $\varphi_A(a) = \prod_{b \neq a} (a - b)$.

1. Пусть $p \in F[x]$ и $|A| \geq \deg p + 2$. Докажите, что $\sum_{a \in A} \frac{p(a)}{\varphi_A(a)} = 0$.


Многочлены нескольких переменных

Одночлен $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ назовём *старшим* в многочлене $p \in F[x_1, \dots, x_n]$, если в любом его другом одночлене степень хотя бы одной переменной меньше, чем в $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$.

2. **Комбинаторная теорема о нулях.** Пусть одночлен $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ старший в многочлене $p \in F[x_1, \dots, x_n]$ и даны множества A_1, \dots, A_n чисел такие, что $|A_i| = d_i + 1$ при всех $i = \overline{1, n}$. Докажите, что в p коэффициент при $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_n^{d_n}$ равен $\sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \dots \sum_{a_n \in A_n} \frac{p(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\varphi_{A_1}(a_1) \cdot \varphi_{A_2}(a_2) \cdot \dots \cdot \varphi_{A_n}(a_n)}$.

Коэффициент при $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$ в $p \in F[x_1, \dots, x_n]$ далее будем обозначать через $[d_1, \dots, d_n]p(x_1, \dots, x_n)$.

3. **Мультиномиальная теорема.** Докажите следующее тождество: $[d_1, \dots, d_n](x_1 + \dots + x_n)^{d_1 + \dots + d_n} = \binom{d_1 + \dots + d_n}{d_1, \dots, d_n}$.
4. **Теорема Коши-Дэвенпорта.** Докажите, что при $A, B \subset \mathbb{F}_p$ и $A, B \neq \emptyset$ верно неравенство $|A + B| \geq \min(|A| + |B| - 1, p)$.
5. **Лемма о перманенте.** Пусть A – матрица размера $n \times n$, $\text{Per } A \neq 0$. Докажите, что для любого вектора $b = (b_1, \dots, b_n)$ и любого набора (S_1, \dots, S_n) двухэлементных множеств найдётся $x \in S_1 \times \dots \times S_n$ такой, что Ax отличается от b во всех координатах.
6. **Гипотеза Артина.** p – простое число и $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$. Докажите, что, если $\sum \deg P_i < n$ и у многочленов P_i есть общий корень, то у них есть ещё по крайней мере один общий корень.
7. **Теорема Алона–Фридмана–Калаи.** Для некоторого простого числа p в простом графе $G = (V, E)$ степени всех вершин не превышают $2p - 1$, а средняя степень вершин больше $2p - 2$. Докажите, что в этом графе есть p -регулярный подграф.
8. **Гипотеза Эрдёша–Хейльбронна.** Для произвольных $A, B \subset \mathbb{F}_p$ определим $A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B, b \neq a\}$. Докажите, что, если $A \neq B$, то $|A \oplus B| \geq \min(|A| + |B| - 2, p)$, а если $A = B$, то $|A \oplus A| \geq \min(2|A| - 3, p)$.
9. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в каждых двух соседних вершинах были различными.

10. Пусть G — ориентированный граф, содержащий остовный подграф, в котором у каждой вершины входящая и выходящая степени равны.
 1. Каждой вершине $v \in V$ присвоили множество $S_v \subset \mathbb{R}$, $|S_v| = 2$. Докажите, что можно выбрать числа $c(v) \in S_v$ так, чтобы для любой вершины u выполнялось равенство $\sum_{v \in V, (u,v) \in E} c(v) \neq 0$.
11. Пусть p — простое число. Докажите, что в любом наборе из $2p - 1$ целых чисел можно выбрать p таких, что их сумма делится на p .
12. Пусть p — простое число и $G = (V, E)$ — граф на $|V| > d(p - 1)$ вершинах. Докажите, что существует непустое подмножество U его вершин такое, что количество d -клик в G , содержащих U , кратно p .
13. **Теорема Алона и Фюреди.** Найдите наименьшее количество плоскостей, которое необходимо, чтобы покрыть все вершины куба в \mathbb{R}^n , кроме одной.
14. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим в трёхмерном пространстве множество $S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$, состоящее из $(n + 1)^3 - 1$ точек. Найдите наименьшее возможное количество плоскостей, объединение которых покрывает всё S , кроме точки $(0, 0, 0)$.
15. Пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Вначале клетчатая доска размера $n \times n$ пуста. Каждую минуту делают одну из следующих операций:
 - Если на доске есть три пустых клетки, образующие уголок вида  (поворачивать уголок нельзя), то в каждую из этих клеток можно положить камешек.
 - Если в каждой клетке некоторого ряда (строки или столбца) лежит по камешку, то можно убрать камешки из всех клеток этого ряда.
 Найдите все n , при которых через ненулевое количество ходов можно получить пустую доску.
16. Найдите $[(n - 1)d, \dots, (n - 1)d] \prod_{i < j} (x_i - x_j)^{2d}$, где n — количество переменных, а d — произвольное натуральное число.
17. Пусть $A, B \subset \mathbb{F}_p$ и $|A| = |B| < p$. Докажите, что существуют такие перестановки $A = (a_1, \dots, a_k)$ и $B = (b_1, \dots, b_k)$, что все элементы вида $a_i + b_i$, $i = \overline{1, k}$, различны.
18. Пусть n — натуральное число. Набор из $2n + 1$ различных конечных множеств разбили на 2 непустых поднабора. Докажите, что существует не меньше 2^n различных симметрических разностей между множествами разных поднаборов.