МПЗ? DM? МПВ?

Повторение

1. В библиотеке на полках стоят книги, при этом ровно k полок пусты. Книги переставили так, что теперь пустых полок нет. Докажите, что найдётся хотя бы $k+1$ книга, которая теперь стоит на полке с меньшим числом книг, чем стояла раньше.
2. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов, где $m < n$. В некоторых клетках таблицы стоя́т звёздочки так, что в каждом столбце стои́т хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна звёздочка такая, что в одной строке с ней находится больше звёздочек, чем в одном столбце с ней.
3. На фестиваль приехало D гномов и E эльфов. После фестиваля каждый гном подрался по крайней мере с одним эльфом, а каждый эльф – не более чем с десятью гномами. Также известно, что у каждого гнома соперников-эльфов было больше, чем у любого из них – соперников-гномов. Докажите, что $11D \leq 10E$.
4. На плоскости дано n окружностей радиуса 1, причём известно, что каждая пересекается хотя бы с одной другой окружностью и никакая пара не касается. Докажите, что все вместе окружности образуют не меньше n точек пересечения (в одной точке могут пересекаться более двух окружностей).
5. Таблица $n \times n$, $n \geqslant 1000$, заполнена нулями и единицами так, что, если в какой-то клетке стоит 0, то сумма всех чисел в объединении её столбца и строки не меньше 1000. Докажите, что сумма чисел в таблице не меньше $500n$.

Задачи

6. Дан выпуклый n-угольник и выбрано m красных точек, отличных от вершин, таких, что любой отрезок между вершинами n-угольника содержит по крайней мере одну красную точку. Докажите неравенство $m \geqslant n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\lfloor(n-1)/2\rfloor}\right)$.
7. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдутся два с общей стороной.
8. На плоскости нарисованы n прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, найдётся не менее $n-2$ треугольников.