

Окружность девяти точек

1. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром H , лежат на одной окружности с центром в середине отрезка OH .
2. В треугольнике ABC проведены высота BH , медиана BB_1 и средняя линия A_1C_1 (A_1 лежит на стороне BC , C_1 – на стороне AB). Прямые A_1C_1 и BB_1 пересекаются в точке M , а прямые C_1B_1 и A_1H – в точке N . Докажите, что прямые MN и BH параллельны.
3. Докажите, что отрезок, отсекаемый на стороне AB остроугольного треугольника ABC окружностью девяти точек, виден из её центра под углом $2|\angle A - \angle B|$.
4. Дан треугольник ABC . Пусть O – центр его описанной окружности, O_1 , O_2 и O_3 – точки, симметричные точке O относительно прямых AB , BC и AC соответственно. Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC и $O_1O_2O_3$ совпадают.
5. Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность Ω . Пусть M – точка пересечения его медиан, AH – высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A' . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB .
6. Пусть I – инцентр треугольника ABC , а D и E – точки пересечения прямых BI и CI со сторонами AC и AB соответственно. Докажите, что центр окружности девяти точек треугольника IDE лежит на прямой AI .