Неравенство мощностей

Из определения равномощных множеств легко получить определение неравномощных множеств: два множества будем называть *неравномощными*, если между ними нельзя установить взаимно-однозначное соответствие.

1. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей, состоящих из нулей и единиц, несчётно.

Частичный порядок

Пусть M – произвольное множество. Говорят, что оно *частично упорядочено*, если между некоторыми его элементами установлено *отношение порядка* „$\preceq$”, обладающее следующими тремя свойствами:

- *рефлексивность:* $x \preceq x$ для всех $x \in M$;
- *транзитивность:* если $x \preceq y$ и $y \preceq z$, то $x \preceq z$;
- *антисимметричность:* если $x \preceq y$ и $y \preceq x$, то $x = y$.

При этом, некоторые элементы могут быть несравнимыми друг с другом.

2. Проверьте, что множество натуральных чисел частично упорядочено с порядком „$|$”.
3. Проверьте, что множество, все элементы которого – множества, частично упорядочено с порядком „$\subset$”.

Сравнение мощностей

Как видно из первой задачи, неравномощные множества существуют. Естественный следующий шаг – определить отношение порядка на множествах по мощности. Если множество A равномощно подмножеству множества B, то будем говорить, что мощность множества A меньше либо равна мощности множества B и обозначать $|A| \leqslant |B|$, если при этом множества A и B неравномощны, то будем говорить, что мощность множества A меньше мощности множества B и обозначать $|A| < |B|$.

4. **Теорема Кантора.** Докажите неравенство $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
5. Докажите, что мощность любого множества A меньше мощности множества 2^A его подмножеств.
6. **Теорема Кантора-Бернштейна.** Докажите, что, если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.
7. Докажите, что определённое выше неравенство между мощностями является отношением порядка[1].

[1]Естественно, оно определено на любом множестве всех подмножеств некоторого множества, поскольку совокупность всех множеств не образует множество.

Упражнения

8. Докажите, что множества всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек плоскости.
9. Докажите, что квадрат (со внутренностью) равномощен отрезку.
10. Докажите, что, если квадрат разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна квадрату.
11. Докажите, что, если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.
12. Докажите, что n-мерное пространство $\mathbb{R}$ равномощно прямой $\mathbb{R}$.
13. Докажите, что множество бесконечных последовательностей вещественных чисел равномощно $\mathbb{R}$.
14. Докажите, что в частично упорядоченном множестве, содержащем $mn+1$ элемент, найдётся либо $m+1$ попарно несравнимых элементов, либо возрастающая последовательность из $n+1$ элементов.
15. В строку выписано 101 число. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся будут располагаться по возрастанию или убыванию.
16. Докажите, что у любой бесконечной числовой последовательности есть бесконечная монотонная подпоследовательность.