

## Непрерывность

1. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ . Докажите, что найдётся такое число  $x$ , что  $\frac{1}{n}(|x-x_1|+|x-x_2|+\dots+|x-x_n|) = \frac{1}{2}$ .
2. В противоположных углах квадратной доски со стороной 10 см сидели два жука. Не слезая с доски, они поменялись местами. Докажите, что в некоторый момент расстояние между жуками было равно 123 мм.
3. Пусть  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция такая, что  $f(0) = f(1)$ . Докажите, что для произвольного натурального числа  $n$  существует такое действительное число  $x \in [0, 1 - 1/n]$ , что  $f(x) = f(x + 1/n)$ .
4. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника найдётся прямая, делящая площадь пополам и
  - a) параллельная заданной прямой;
  - b) проходящая через заданную точку;
  - c) делящая периметр многоугольника пополам.
5. Пусть  $P(x)$  – многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами. Докажите, что уравнение  $P(P(x)) = 0$  имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение  $P(x) = 0$ .
6. Непрерывная функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  принимает значения разных знаков. Докажите, что найдётся арифметическая прогрессия  $a < b < c$  такая, что
$$f(a) + f(b) + f(c) = 0.$$
7. Есть несколько кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две кучки одинакового веса и одинаковой стоимости.