Теорема Менгера

Пусть a и b – две несмежные вершины графа G. Множество S вершин графа, не содержащее a и b, после удаления которого вершины a и b становятся несвязанными, называют *ab-**от**деляющим множеством.* Множество T рёбер графа, после удаления которых вершины a и b становятся несвязанными, называют *ab-**раз**деляющим множеством.*

1. **Теорема Менгера.** Докажите, что максимальное число простых цепей, соединяющих различные вершины a и b графа G и не имеющих общих вершин, кроме a и b, равно минимальной мощности ab-отделяющего множества.
2. **Теорема Форда–Фалкерсона.** Докажите, что максимальное число цепей, соединяющих различные вершины a и b графа G и не имеющих общих рёбер, равно минимальной мощности ab-разделяющего множества.
3. В союзном государстве есть две столицы A и B и конечное количество городов. Некоторые пары городов (считая столицы) соединены между собой дорогами с односторонним движением (между городами может проходить любое конечное количество дорог). Известно, что из столицы A в столицу B можно добраться, перемещаясь по этим дорогам, причём любые два маршрута, по которым это можно сделать, имеют хотя бы одну общую дорогу. Докажите, что в государстве есть дорога, через которую проходят все маршруты следования из A в B.

Повторение

4. Детектив Ниро Вульф расследует преступление. В деле замешаны 2023 человека, среди которых один — преступник, а ещё один — свидетель преступления (но неизвестно, кто это). Каждый день детектив может пригласить к себе одного или нескольких из этих 2023 человек и, если среди приглашённых есть свидетель, но нет преступника, то свидетель сообщит, кто преступник. Докажите, что детектив может гарантированно раскрыть дело за 14 дней.
5. Каждое ребро некоторого графа G окрашено в один из двух цветов. Для каждого из цветов все компоненты связности графа, образованного только рёбрами этого цвета, содержат не более $n > 1$ вершин. Докажите, что все вершины этого графа можно правильно покрасить в n цветов.

6. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. У Элвина есть таблица $n \times n$, заполненная вещественными числами (в каждой клетке записано ровно одно число). Назовём *ладейным множеством* множество из n клеток, расположенных как в различных столбцах, так и в различных строках. Предположим, что сумма чисел в клетках любого ладейного множества неотрицательна. За ход Элвин выбирает строку, столбец, а также вещественное число a; к каждому числу в выбранной строке он прибавляет a, а из каждого числа в выбранном столбце — вычитает a (таким образом, число в пересечении строки и столбца не изменяется). Докажите, что Элвин может, сделав несколько ходов, добиться, чтобы все числа в таблице стали неотрицательными.

Теорема Визинга

В графе G без петель наименьшее число $\chi'(G)$ цветов, необходимое для правильной раскраски рёбер, называется *рёберно-хроматическим числом.* Согласно **теореме Визинга,** $\Delta(G) \leqslant \chi'(G)\Delta(G) + 1$, где $\Delta(G)$ – наибольшая из степеней вершин графа G.

7. Приведите пример раскраски K_{2n+1} в $\chi_e(K_{2n+1}) = 2n + 1$ цветов.
8. Приведите пример раскраски K_{2n} в $\chi_e(K_{2n}) = 2n - 1$ цветов.
9. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$ для двудольного графа G.
10. Докажите теорему Визинга.