

Экстремум линейной функции

1. Пусть $a, b, c \in [0, 1]$. Докажите, что
$$1 \leq (1 - a)(1 - b)(1 - c) + a + b + c \leq 3.$$
2. Пусть $n \geq 2$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$. Докажите, что
$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1) \leq [n/2]$$
и определите, когда достигается равенство.
3. Даны неотрицательные числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Для любых чисел $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ докажите, что
$$\sum c_i c_j \min(a_i, a_j) + \sum d_i d_j \min(b_i, b_j) \geq 2 \sum c_i d_j \min(a_i, b_j).$$
4. Для упорядоченного набора действительных чисел $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ найдите такое число y , для которого сумма $|x_1 - y| + |x_2 - y| + \dots + |x_n - y|$ минимальна.
5. Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in [-1, 1]$. Докажите, что
$$|a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n| \geq |a_1 \dots a_n - b_1 \dots b_n|.$$
6. В вершинах дерева записали неотрицательные числа, сумма которых равна 1. Для каждого ребра графа посчитали произведение чисел в его концах и сложили полученные числа для всех рёбер. Найдите наибольшее возможное значение полученной суммы чисел.
7. Рома решил купить раков. На рынке продают больших раков по 5 рублей и маленьких по 3 рубля. Рома хочет купить не менее 15, но не более 25 раков, причём разница между количеством больших и маленьких раков не должна превышать по модулю 7. Помогите ему потратить как можно больше денег.
8. На складе 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых. Кроме того, левых и правых сапог поровну. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 правильных пар.