Сопряжения и нормы

Целые и рациональные числа

1. Докажите, что равенство $(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}$ не может выполняться ни при каких рациональных x, y, z и t.
2. Докажите, что равенство $(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n$ не может выполняться ни при каких натуральных m и n .
3. Докажите, что при любых натуральных m,n существует натуральное k такое, что $(\sqrt{m}+\sqrt{m+1})^n=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$.
4. Найдите 1012-ую цифру после запятой числа $(2+\sqrt{3})^{2024}$.

Многочлены

5. Числа $x,y\in\mathbb{R}$ удовлетворяют равенству $x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=\frac{3}{4}$. Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{y^2+1}+xy$.
6. Докажите, что если $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, то $x+y=0$.
7. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет равенству $(P(x))^2=1+x+x^{100}Q(x)$, где Q — некоторый многочлен; и $P(0)=1$. Найдите коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x)+1)^{100}$.
8. Докажите, что для каждого натурального числа n существуют многочлены $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ такие, что $\deg f=n$ и при всех $x\in\mathbb{R}$ верно равенство $(f(x))^2=(x^2-1)(g(x))^2+1$.
9. Докажите, что для каждого натурального числа n существуют ненулевые многочлены $P,Q\in\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$, удовлетворяющие тождеству $(x_1+x_2+\ldots+x_n)P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=Q(x_1^2,x_2^2,\ldots,x_n^2)$.

Упражнения

10. Докажите, что $v_2(\lfloor(1+\sqrt{3})^{2n+1}\rfloor)=n+1$ для каждого натурального n.
11. Существует ли многочлен $P\in\mathbb{Z}[x]$ такой, что $P(1+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$ и $P(3+\sqrt{5})=3+\sqrt{5}$?
12. Найдите все натуральные числа d, для которых найдутся многочлены $P,Q\in\mathbb{R}[x]$ такие, что $\deg P=d$ и при всех $x\in\mathbb{R}$ верно равенство $\left(P(x)\right)^2+1=(x^2+1)\left(Q(x)\right)^2$.
13. Даны непостоянные приведённые многочлены $P(x)$ и $Q(x)$. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов $P(x)$ и $Q(x)$.
14. Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – натуральные числа. Докажите, что $\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n}$ – натуральное число, только если каждое a_i, $i=\overline{1,n}$, – полный квадрат.