Равная мощность

Если между множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то такие множества будем называть *равномощными*. Другими словами, $|A| = |B|$ по определению означает, что существует биекция $A \to B$, ясно, что для конечных множеств такое определение согласуется с привычным равенством мощностей.

1. Докажите, что отрезки $[0, 1]$ и $[0, 2]$ числовой прямой равномощны.
2. Докажите, что мощность множества натуральных чисел равна мощности множества чётных натуральных чисел.
3. Докажите, что любые два интервала числовой прямой (считая полубесконечные и бесконечные) равномощны.
4. Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству подмножеств натурального ряда.

Счётные множества

Множество A называется счётным, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. При этом часто полезно вместо рассмотрения биекции $f\colon \mathbb{N} \to A$ считать, что множество A занумеровано натуральными числами, т. е. писать $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, имея в виду, что $a_n = f(n)$.

5. Докажите счётность множества a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{Q}$.

В некотором смысле, $\mathbb{N}$ – „самое маленькое” бесконечное множество:

6. Докажите, что:
   (a) любое подмножество счётного множества конечно или счётно;
   (b) любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Упражнения

7. Докажите, что объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.
8. Докажите, что каждое из перечисленных множеств счётно:
   (a) бесконечное множество непересекающихся интервалов числовой прямой;
   (b) множество точек, в которых происходит скачок монотонной функции;
   (c) множество точек строгого локального максимума функции вещественного аргумента счётно.

9*. Можно ли утверждать, что гарантированно счётно:
   (a) конечное декартово произведение счётных множеств?
   (b) счётное декартово произведение конечных множеств?
   (c) счётное декартово произведение счётных множеств?

Увлекательные бесконечности

10. Докажите, что из любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.
11. Можно ли из последовательности $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Выделить
    (a) бесконечную арифметическую прогрессию?
    (b) сколь угодно длинную арифметическую прогрессию?
12. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любая другая последовательность натуральных чисел получается из неё
    (a) вычёркиванием некоторых членов?
    (b) вычёркиванием конечного числа членов?
13. Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?
14. Можно ли каждую клетку бесконечной плоскости окрасить в один из двух цветов: белый и красный, так, чтобы каждая вертикальная полоса шириной в одну клетку содержала конечное количество белых клеток, а каждая горизонтальная полоса шириной в одну клетку содержала конечное количество красных клеток?
15. Докажите, что существуют такие угол α и множество $A \neq \varnothing$ точек на окружности, что при повороте на угол α множество A перейдёт в подмножество $A_1 \subset A$, $A_1 \neq A$.
16. Можно ли расставить во все клетки бесконечной клетчатой плоскости все натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и чтобы любые два числа, стоящие в одной сроке или столбце, были взаимно простыми.
17. Докажите, что существует такое подмножество $M \subset \mathbb{N}$, что каждое натуральное число единственным образом представимо в виде разности двух чисел из M.
18. Бесконечное множество M вещественных чисел таково, что сумма чисел любого его подмножества ограничена. Докажите, что M счётно.
19. Дан язык с конечным алфавитом. *Словом* в этом языке называется любая последовательность букв. Некоторые конечные слова считаются неприличными. Известно, что существуют сколь угодно длинные *вежливые* слова (т. е. слова, не содержащие неприличных подслов). Докажите, что существует и бесконечно длинное вежливое слово.
20. Придумайте явную биекцию между равномощными множествами бесконечных последовательностей, состоящих из цифр $0, 1, 2$ и бесконечных последовательностей цифр, состоящих из 0 и 1.