

Гомотетия

1. Окружность ω_1 касается сторон AB и AD , а окружность ω_2 – сторон CB и CD параллелограмм $ABCD$. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга в точке P . Докажите, что точка P лежит на диагонали AC .
2. В остроугольном треугольнике ABC с ортоцентром H проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Точки A_2 , B_2 и C_2 – основания высот из точки H на прямые B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в одной точке.
3. Дан острый угол AOB и точка C внутри него. С помощью циркуля и линейки постройте на стороне OA точку P , равноудалённую от стороны OB и точки C .
4. (лемма Архимеда) Окружность ω вписана в сегмент окружности Ω , стягиваемый хордой BC , и касается дуги в точке A , а хорды – в точке L . Докажите, что прямая AL – биссектриса угла BAC .
5. (прямая Эйлера) Пусть H – ортоцентр, M – точка пересечения медиан, O – центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MH}$.
6. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и инцентр I проведена прямая MI , которая пересекает высоту AN в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.
7. Пусть I – инцентр, O – центр описанной окружности треугольника ABC . Вписанная окружность касается его сторон в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой IO .