Абелева группа $V$ называется *векторным пространством над полем* $F$, если определено произведение $\cdot : F \times V \to V$ такое, что:

- для любого $\vec{a} \in V$ верно равенство $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- для любых $x, y \in F$ и $\vec{a} \in V$ верно равенство $x \cdot (y \cdot \vec{a}) = xy \cdot \vec{a}$;
- для всех $x, y \in F$ и $\vec{a} \in V$ верно равенство $(x + y) \cdot \vec{a} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{a}$;
- для всех $x \in F$ и $\vec{a}, \vec{b} \in V$ верно равенство $x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x \cdot \vec{a} + x \cdot \vec{b}$.

Нетрудно видеть, что следующие абелевы группы являются векторными пространствами (с обычным умножением): векторы на координатной плоскости: $\mathbb{R}^2$ над $\mathbb{R}$; $\mathbb{Q}[x]$ над $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ над $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

## Размерность

Пусть $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\} \in V$ – семейство векторов в векторном пространстве $V$ над полем $F$. Их *линейной оболочкой* называется множество всех *линейных комбинаций* $a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots a_k\vec{u}_k$, $a_i \in F$, обозначение: $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle$. Векторы называются *линейно зависимыми*, если какая-то их линейная комбинация, в которой не все коэффициенты – нули, равна нуль-вектору. Векторы образуют *базис*, если они линейно независимы и их линейная оболочка – всё $V$. *Размерностью* векторного пространства называется количество элементов базиса, если оно конечно. В противном случае говорят, что пространство *бесконечномерно.*

1. Докажите, что линейная оболочка любого набора векторов сама является векторным (под)пространством.
2. Убедитесь, что любое поле является одномерным векторным пространством над самим собой (относительно произведения в этом поле).
3. Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ любой базис имеет размерность 2, т. е. $\mathbb{R}^2$ двумерно.
4. Найдите минимальную мощность базиса $\mathbb{R}[x]$ над $\mathbb{R}$.
5. Докажите, что у векторного пространства $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ не может быть конечного, ни даже счётного базиса.
6. Докажите, что, если $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle = V$, то у пространства $V$ есть базис, состоящий из $\vec{u}_i$.
7. В конечномерном пространстве $V$ дан набор $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ линейно независимых векторов. Докажите, что, добавив к $U$ несколько векторов, можно получить базис пространства $V$.
8. Докажите, что определение размерности корректно, а именно: в конечномерном пространстве все базисы состоят из одинакового количества векторов.
9. Пусть $F$ – конечное поле, а $p$ – его характеристика. Докажите, что $F$ состоит из $p^k$ элементов, где $k$ – некоторое натуральное число.

## Задачи.

10. Докажите, что в любом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости $A_1BD$ и $CB_1D_1$ делят диагональ $AC_1$ на три равные части.
11. Функция $f$ каждому вектору $v$ линейного $n$-мерного пространства ставит в соответствие число $f(v)$, причём для любых векторов $u$, $v$ и любых чисел $\alpha$, $\beta$ значение $f(\alpha u+\beta v)$ не превосходит хотя бы одного из чисел $f(u)$ или $f(v)$. Какое наибольшее количество значений может принимать такая функция?
12. Определите, какое наибольшее количество чисел возможно выбрать из чисел $1, 2, \ldots, 100$ так, чтобы произведение всех чисел никакого набора выбранных чисел не являлось полным квадратом. (Если набор состоит из одного числа, то его считаем произведением чисел набора.)
13. В множестве $\{1, \ldots, n\}$ выбрали $n+1$ различное подмножество $A_1$, $A_2$, …, $A_{n+1}$. Докажите, что можно выбрать два непустых набора $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}\}$ и $\{Aj_1, \ldots, A_{j_q}\}$ так, что все числа $i_s$ и $j_\zeta$ различны, а объединение подмножеств первого набора совпадает с объединением подмножеств второго набора.