И т р о я и для двух переменных

1. Дано натуральное число n. Многочлен $f(x, y)$ степени не выше n таков, что при любых натуральных $x, y \leqslant n$, $x+y \leqslant n+1$, выполняется равенство $f(x, y) = x/y$. Найдите все возможные значения $f(0, 0)$.
2. Рассмотрим на координатной плоскости множество точек вида (i, j), $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$, и $n(n+1)/2$ вещественных чисел $w_{i,j}$. Нас будут интересовать многочлен $f \in \mathbb{R}[x, y]$ степени не выше n, удовлетворяющего равенствам $f(i, j) = w_{i,j}$ при всех (i, j), $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$.
   (a) Докажите, что существует не более одного такого многочлена.
   (b) Предположим, что $w_{i,j} = 0$ при всех $(i, j) < n$. Докажите, что искомый многочлен имеет вид $\sum\limits_{i,j \geqslant 0, i+j=n} w_{i,j} \binom{x}{i} \binom{y}{j}$.
   (c) Докажите, что искомый многочлен всегда существует.
3. Пусть теперь заданы два произвольных множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ и набор из $n(n+1)/2$ вещественных чисел $w_{i,j}$, где $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$. Нас интересует многочлен $f \in \mathbb{R}[x, y]$ степени не выше n, удовлетворяющий равенствам $f(x_i, y_j) = w_{i,j}$ при всех (i, j), $0 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$. Очевидно, что доказательство его единственности аналогично доказательству задачи 2a.
   (a) Предположим, что $w_{i,j} = 0$ при всех $(i, j) < n$. Докажите, приведя явную формулу, что искомый многочлен существует.
   (b) Докажите, что искомый многочлен всегда существует.
4. Про многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ известно, что для любого неотрицательного целого числа n каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ имеет степень не выше n. Докажите, что степень многочлена $P(x, x)$ чётна.
5. Докажите, что для любого чётного числа $n \geqslant 2$ найдётся многочлен степени n, удовлетворяющий условию предыдущей задачи.
6. Дано число $d \in \mathbb{N}$. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных чисел A, B, C, D функция $f(At+B, Ct+D)$ на всём $\mathbb{R}$ совпадает с некоторым многочленом степени не выше d.
7. Существует ли функция $g\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ такая, что для любого рационального числа t функции $g(t, y)$ и $g(x, t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём $\mathbb{Q}$, но сама g не является многочленом?
8. Существует ли функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что для любого вещественного числа t функции $f(t, y)$ и $f(x, t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём $\mathbb{R}$, но сама f не является многочленом двух переменных?