Разнобой по теории чисел

1. Существуют ли такие квадратные трёхчлены P, Q, R, что для любых целых x и y найдётся целое z, при котором $P(x) + Q(y) = R(z)$?
2. На отрезке натурального ряда есть ровно 10 четвёртых степеней и ровно 100 кубов. Докажите, что на нём не менее 2000 квадратов.
3. Дан многочлен $f(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и натуральное число a. Рассмотрим последовательность, заданную правилами $a_1 = a$ и $a_{n+1} = f(a_n)$. Известно, что множество простых чисел, делящих хотя бы один из членов этой последовательности, конечно. Докажите, что $f(x) = cx^k$ при некоторых $c, k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.
4. В пространстве расположен прямой параллелепипед (т. е. параллелепипед, одно из рёбер которого перпендикулярно грани), вершины которого имеют целые координаты, а других точек с целыми координатами на его гранях и рёбрах нет. Докажите, что объём этого параллелепипеда – сумма трёх полных квадратов.
5. Докажите, что при любом вещественном $\alpha > 0$ число $[\alpha n^2]$ чётно для бесконечного количества натуральных чисел n.
6. На рёбрах ориентированного графа расставлены целые числа, не кратные 2024. Назовём *весом вершины* разность между суммой всех чисел на входящих в неё рёбрах и суммой чисел на выходящих из неё рёбрах. Известно, что вес каждой вершины делится на 2024. Докажите, что на рёбрах этого графа можно расставить ненулевые целые числа, по модулю меньшие 2024 так, чтобы все вершины имели нулевой вес.
7. Существует ли такое натуральное n, что среди двухсотых цифр после запятой в десятичной записи чисел $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, \ldots, \sqrt{n+999}$ сто раз встречается 0, сто раз – единица, …, сто раз – девятка?
8. Дано вещественное число α. Последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ состоит из всех натуральных чисел n, для которых $\{n\alpha\} < \frac{1}{10}$. Докажите, что среди чисел $n_2 - n_1$, $n_3 - n_2$, … не более трёх различных.
9. *Набором показателей* натурального числа назовём неупорядоченный список показателей, с которыми простые числа входят в его разложение на простые множители. Две возрастающие арифметические прогрессии (a_n) и (b_n) таковы, что при каждом n числа a_n и b_n имеют одинаковые наборы показателей. Докажите, что эти прогрессии пропорциональны.
10. Пусть $P(n)$ – квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Для каждого натурального числа n у значения $P(n)$ нашёлся собственный делитель d_n (т. е. $1 < d_n < P(n)$), причём последовательность (d_n) возрастающая. Докажите, что либо $P(n)$ можно разложить в произведение двух линейных многочленов с целыми коэффициентами, либо значения $P(n)$ во всех натуральных точках делятся на одно и то же натуральное число $m > 1$.