

Принцип Дирихле в геометрии

1. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что хотя бы три из них можно покрыть кругом радиуса $1/7$.
2. На сфере даны пять точек. Докажите, что некоторые четыре из них лежат на замкнутой полусфере.
3. Внутри выпуклого $2n$ -угольника взята точка P . Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите, что найдётся сторона многоугольника, с которой ни одна из проведённых прямых не имеет общих внутренних точек.
4. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk .
5. Выпуклый многоугольник содержит $n^2 + 1$ точек с целыми координатами. Докажите, что среди них найдётся хотя бы $n + 1$ точек, которые лежат на одной прямой.
6. (теорема Минковского) Начало координат является центром симметрии выпуклого многоугольника, площадь которого больше 4. Докажите, что в многоугольнике есть хотя бы одна точка с целочисленными координатами, отличная от начала координат.
7. На плоскости отметили $n^2 + 1$ точек. Докажите, что можно выбрать $n + 1$ точек среди отмеченных, никакие три из которых не являются вершинами остроугольного треугольника.