Мультипликативные функции

1. Пусть $\tau(n)$ – количество делителей числа $n \in \mathbb{N}$.

a) Вычислите $\tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m})$.

b) Докажите, что $\tau(n) < 2\sqrt{n}$.

2. Пусть $\sigma(n)$ – сумму делителей числа $n \in \mathbb{N}$.

a) Вычислите $\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m})$.

b) Докажите, что $\sigma(n) \geq \tau(n)\sqrt{n}$.

3. Пусть $\varphi(n)$ – сумму делителей числа $n \in \mathbb{N}$.

a) Вычислите $\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m})$.

b) Докажите, что $\varphi(n) \geq \sqrt{n}$ при $n \neq 2,\ 6$.

4. a) Докажите, что $\sigma(n)\varphi(n) < n^2$ при $n \geq 2$.

b) Сумма всех натуральных делителей числа n более чем в 100 превосходит само число n. Докажите, что есть сто идущих подряд чисел, каждое из которых имеет общий делитель с n больший 1.

5. a) Дана мультипликативная функция f. Докажите, что функция $g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} f(d)$ мультипликативная.

b) Докажите, что $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$ и $\sum_{d|n} \mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases}$

6. (`Формула обращения Мёбиуса`) Дана произвольная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такую, что $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ при $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d).$$

7. Докажите, что $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \sum\limits_{d|n} \dfrac{\mu(d)}{d}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

8. a) Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим функцию $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n \leq x} f\left(\dfrac{x}{n}\right)$. Докажите, что $f(x) = \sum\limits_{n \leq x} \mu(n) g\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

b) Вычислите $\sum_{n \leq x} \mu(n)[x/n]$ для любого $x \geq 1$.