Формула включений-исключений

1. Индикаторной функцией множества $A \subset U$ называют функцию $\mathbf{1}_A$, которая равна 1 на элементах A и 0 на остальных элементах U. Для подмножеств $A_1, \ldots, A_n \subset U$ и элемента $u \in U$ докажите равенства:

a) $\chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(u) = 1 - \big(1 - \mathbf{1}_{A_1}(u)\big) \ldots \big(1 - \mathbf{1}_{A_n}(u)\big)$;

b) $\Big|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum\limits_{i} |A_i| - \sum\limits_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum\limits_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$.

2. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?

3. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырёх комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

4. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых никакие два из трех данных элементов a, b, c не стоят рядом (в каком-либо порядке)?

5. (`Функция Эйлера`) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Докажите, что количество натуральных чисел от 1 до n взаимно простых с n равно $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k}(1 - 1/p_i)$.

6. Каждое натуральное число покрасили в чёрный или белый цвет. Можно задавать вопросы вида: *Сколько белых делителей у числа k?* У числа n ровно 5 простых делителей. Как за 32 вопроса узнать его цвет?

7. Пусть $m < n$ – натуральные числа. Докажите, что $n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0$.

8. В классе n учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?