Формула включений-исключений

1. Индикаторной функцией множества $A \subset U$ называют функцию $\mathbf{1}_A$, которая равна 1 на элементах A и 0 на остальных элементах U. Для подмножеств A_1, …, $A_n \subset U$ и элемента $u \in U$ докажите равенства:
   (a) $\chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(u) = 1 - \big(1 - \mathbf{1}_{A_1}(u)\big) \ldots \big(1 - \mathbf{1}_{A_n}(u)\big)$;
   (b) $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum\limits_{i} |A_i| - \sum\limits_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum\limits_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$.
2. (`Функция Эйлера`) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Докажите, что количество натуральных чисел от 1 до n взаимно простых с n равно $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k}(1 - 1/p_i)$.
3. Каждое натуральное число покрасили в чёрный или белый цвет. Можно задавать вопросы вида: *Сколько белых делителей у числа k?* У числа n ровно 5 простых делителей. Как за 32 вопроса узнать его цвет?
4. Пусть $m < n$ – натуральные числа. Докажите, что $n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0$.
5. Пусть $m \le n$ – натуральные числа. Докажите, что
   (a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m = (-1)^m C_{n-1}^m$;
   (b) если в ФВИ выражение в правой части оборвать перед знаком "$+$", то равенство заменится на неравенство "$\ge$", а если перед знаком "$-$" – то на неравенство "$\le$".
6. Перестановка x_1, x_2, …, x_{2n} чисел 1, 2, …, $2n$ называется *хорошей*, если $|x_{i+1} - x_i| = n$ для хотя бы одного $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, и *плохой* иначе. Докажите, что хороших перестановок больше, чем плохих.