Bimestre 2

Proyecto de Aplicación de Matemáticas

Dumani Robles Lailah Valeria
Pagán Marrón Juan Pablo

Matemáticas
Profesor: Javier Mosqueda

Grupo: 502

Distancia entre dos puntos: Proyección de una Figura Tridimensional

Introducción

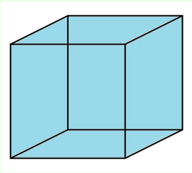
A lo largo de este proyecto usaremos las fórmulas vistas en clase para calcular la distancia entre dos puntos dadas las coordenadas, para poder localizar los vértices de un cubo tridimensional y proyectar dicha figura desde una perspectiva en donde se pueda apreciar la figura y su profundidad.
Asimismo, aplicaremos algunas fórmulas de otros temas vistos previamente, como el Teorema de Pitágoras y Razones Trigonométricas, para poder completar el desarrollo del proyecto.

Objetivo

Encontrar una fórmula aplicable para calcular la distancia entre dos puntos dadas sus coordenadas para poder proyectar un cubo tridimensional desde un plano. Pasar de una figura en 3D a una 2D.

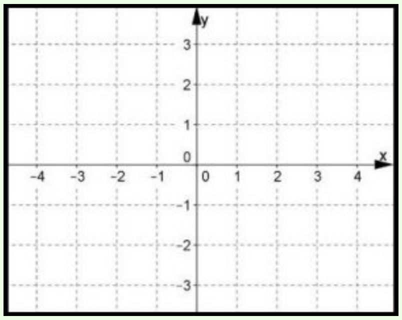
Marco Teórico

Cubo: en un cuerpo (poliedro) formado por seis caras cuadradas congruentes entre sí.



Dimensión: aspecto de un cuerpo que se asocia a la forma en que su volumen, tamaño y/o ancho cambia al agrandarlo o escalarlo proporcionalmente.

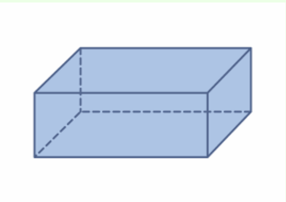
Proyección: es la imagen obtenida de un cuerpo al ser plasmado en un plano desde el punto de vista del observador. Se obtiene sobre una superficie mediante rectas que parten de un mismo punto.



Plano cartesiano: dos rectas numéricas perpendiculares entre sí (eje X y eje Y) que se conectan en un punto.

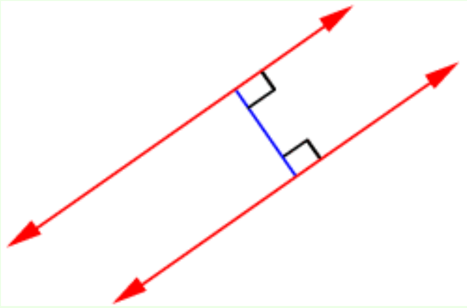
Profundidad: la distancia que existe entre un punto de referencia y su fondo.

Perspectiva: es la ciencia que permite representar en una superficie plana un elemento en tercera dimensión para identificar su alto, ancho y fondo.



Distancia: es el espacio que se recorre de un punto a otro.

Coordenada: líneas que sirven para determinar la posición de un punto.



Hipótesis

Usando un plano en el que proyectar los puntos encontraremos que si las proyecciones son puestas perpendiculares al plano tendremos un cubo en tres dimensiones.

Desarrollo del proyecto

Este proyecto tuvo un proceso muy interesante ya que nuestra fórmula pasó por tres iteraciones; originalmente nuestra fórmula hacia que básicamente todos los vértices se proyectaran al cuadro perpendicularmente, esto por que no había una separación entre la perspectiva y el cuadro. Hicimos un experimento viendo el cubo desde una de sus diagonales de manera que podíamos ver todos los vértices y dimos nuestra fórmula por terminada; sin embargo, experimentando más nos dimos cuenta de que si veías el cubo de frente solo verías cuatro de los vértices y no habría una profundidad, allí fue que nos vimos obligados a cambiar nuestra fórmula a nuestra segunda iteración.
En esta la perspectiva estaba separada y es muy parecida a la fórmula actual, sin embargo al hacer las imágenes explicatorias de este documento nos fijamos que se podía resumir bastante nuestro procedimiento (más de la mitad) y así se dio la fórmula que tenemos actualmente.

— — — — — —Fórmula y Variables— — — — — —

Valores que tenemos:
Perspectiva: **Px, Py, Pz**

Cuadro: **Cd** (Distancia de P al centro del cuadro).
Cx: Ángulo del cuadro en X.
Cy: Ángulo del cuadro en Y

Vértice Tri-Dimensional: **Vx, Vy, Vz**

— — — — — —Coordenada en X— — — — — —

Diferencias: **Dx, Dy, Dz (P - V)**

Ángulo de apertura en X: **Ax=** $Tan^{-1}(Dz/Dx) - Cx$

Resultado X: **Rx=** $Tan(Ax) * Cd$

— — — — — —Coordenada en Y— — — — — —

Hipotenusa/Distancia Tri-dimensional de V a P: **Hy=** $\sqrt{}Dx^2 + Dz^2 + Dy^2$

Ángulo de apertura en Y: **Ay=** $(Tan^{-1}(Dy/Hx))*-1 - Cy$

Resultado Y: **Ry=** $Tan(Ay) * Cy$

Vertice Bi-dimensional (Resultado Final) **= (Rx, Ry)**

Procedimiento (explicación):

Si lees esto Dios te salve… Dicho esto: Amén

En la sección de "Fórmulas y Variables" Vemos que tenemos tres cosas; La perspectiva o nuestro punto de vista (P) la cual nosotros colocamos en donde queramos, la Información de nuestro cuadro o plano y nuestro vértice tridimensional.

La perspectiva se puede explicar como una cámara de la cual estás viendo ya que no puedes simplemente convertir un objeto 3D a un plano 2D, ya que necesitas saber desde donde lo estás viendo. En este caso podemos ver la perspectiva en la imagen a la derecha representada como el punto en que las líneas negras convergen.

El cuadrado negro a la izquierda en la imagen es el Cuadro (C), al cual le tenemos que poner una distancia de este a nuestra perspectiva (Cd), y así como tu cabeza puede estar en el mismo punto y ser rotada hacia arriba y a los lados podemos rotar el cuadro en X y en Y para verlo con un ángulo; estos son los ángulos de Cx y Cy.

Para el vértice tú escoges uno de los vértices de la forma que quieras convertir a 2D y consigues su coordenada en X, Y y Z… Si… Tienes que hacer el procedimiento con cada vértice.

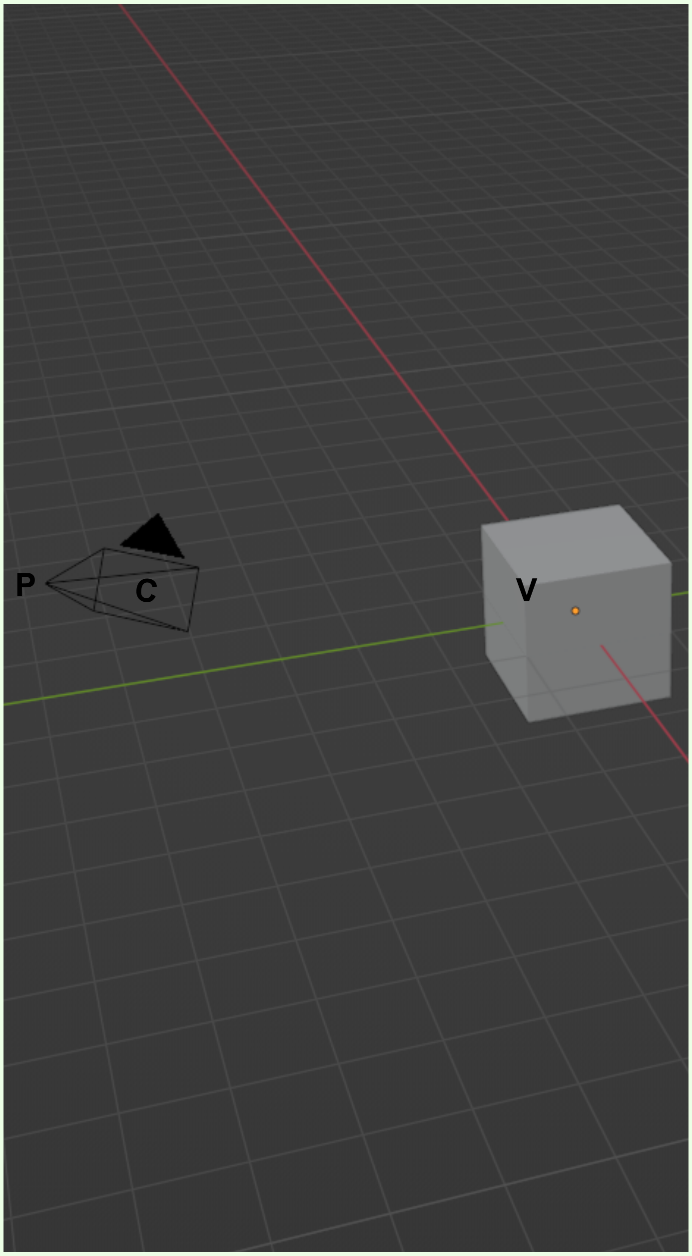


Imagen 1

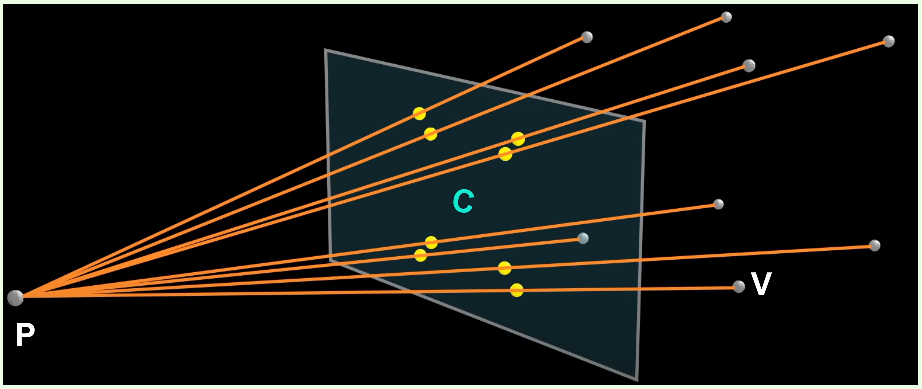


Imagen 2

En la imagen 2 podemos ver qué es lo que tenemos que hacer. Lo que necesitamos es proyectar una linea desde P hasta cada uno de los vértices, donde esta línea haga contacto con C es que es nuestro resultado en dos dimensiones.

Pero… ¿Cómo sacamos ese punto? Para entender como hacemos esto tenemos antes que simplificar como lo vemos; vamos a quitarle una dimensión a todo al verlo desde arriba (imágenes 3 y 4):

En esta vista no hay Y ni en el plano ni en nuestro cuadro, en otras palabras estamos quitándole una dimensión al espacio y una dimensión a nuestro cuadro.

Lo que buscamos es la distancia del centro del cuadro (el punto morado) a la intersección que tiene la linea morada (**C**) con la verde (**Hx**). Primero encontremos la distancia horizontal (**Rx**).

Para hacer esto primero entendamos que nuestra perspectiva es el punto negro ubicado en la esquina inferior izquierda marcado **P**, la linea intermitente gris saliente del centro de este a 45° es hacia donde esta viendo la perspectiva, las otras dos líneas intermitentes son simplemente ilustrativas para visualizar la conexión entre **P** y nuestro cuadro (**C**). **Cd** es nuestra distancia previamente mencionada entre **P** y el punto morado al centro de **C.** Modificar esta distancia ayuda a la manera en la que vez la profundidad; si estás viendo una cara de frente y no hubiera una distancia (**Cd**= 0) en lugar de ver los ocho vértices verías solo 4 ya que quedarían los otros cuatro en el mismo punto que los que estamos viendo.

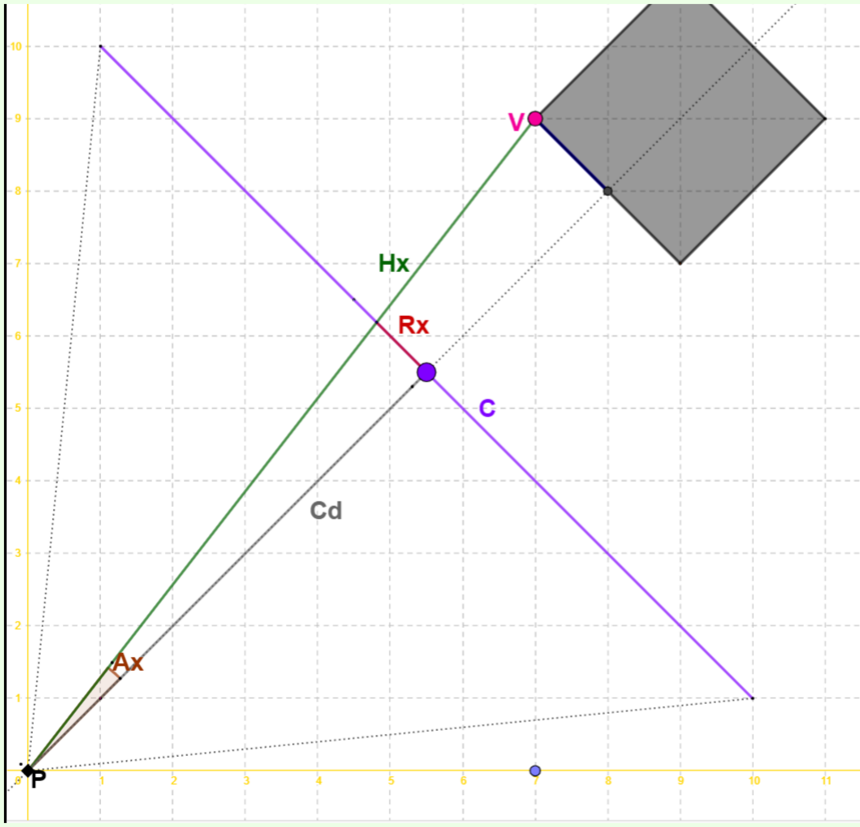


Imagen 3

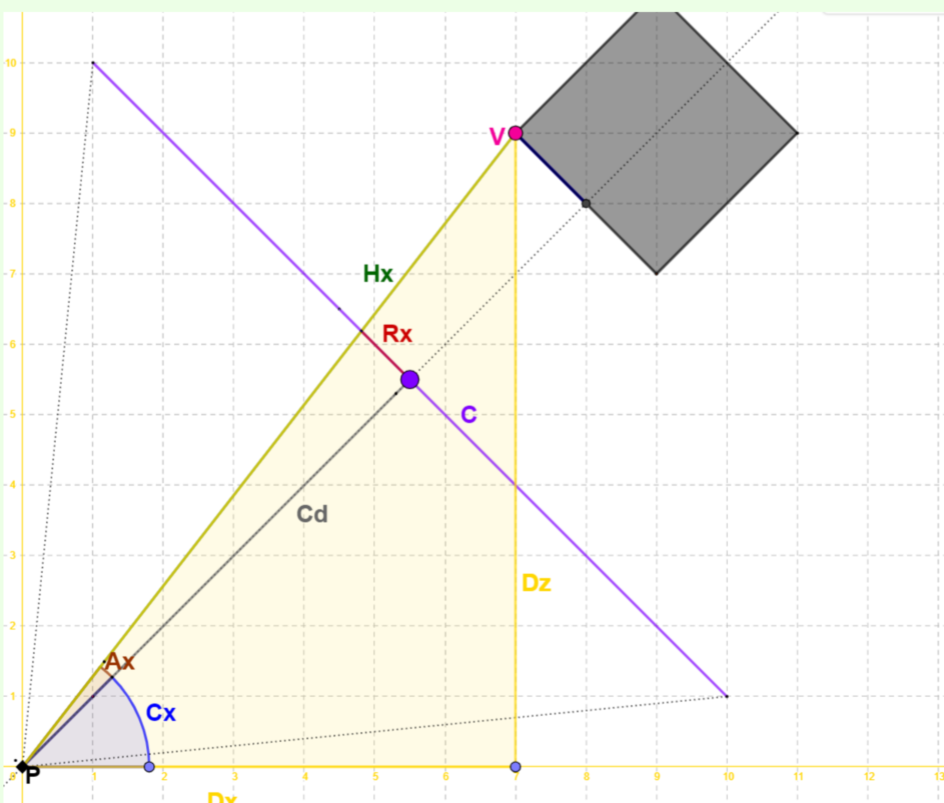


Imagen 4

Ahora que entendimos mejor la imagen, hagamos matemáticas.

Lo primero que debemos hacer es conseguir nuestro ángulo **Ax.**

Como vemos en la imagen 4 podemos formar un triangulo recto con las distancias que hay entre **P** y **V, y** en X y Z. Usando tangente podemos sacar el ángulo inferior izquierdo (**Ax** + **Cx**).

Tomamos tangente^{-1} de **Dz**/**Dx** y restamos **Cx**, que en este ejemplo es igual a 45° el cual es el ángulo que usamos de perspectiva. La fórmula quedaría así:

Ax= Tan^{-1}(Dz/Dx) - Cx

Teniendo el ángulo **Ax** podemos despejar Rx siendo el cateto opuesto a este usando tangente:

Rx= Tan(Ax) * Cd

Una vez que obtengamos las distancias de **Rx** de cada vértice, usaremos esos puntos para poder regresar a ver el problema en tres dimensiones.

Formaremos otro triángulo recto, tomando el previamente usado **Hx** como nuestro cateto adyacente, y la diferencia de V y P en Y (**Dy**).
Para sacar esta distancia usaremos la fórmula de distancia entre dos puntos (también conocida como Pitágoras) con un ligero cambio.
La fórmula para sacar **Hx** es:
$\sqrt{Dx^2 + Dz^2}$

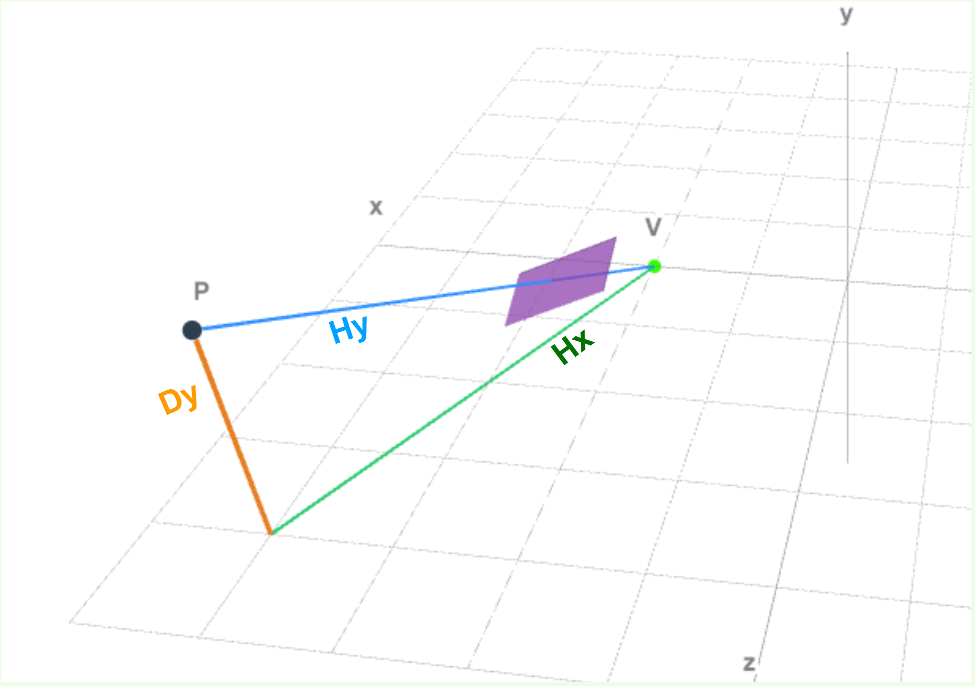


Imagen 5A

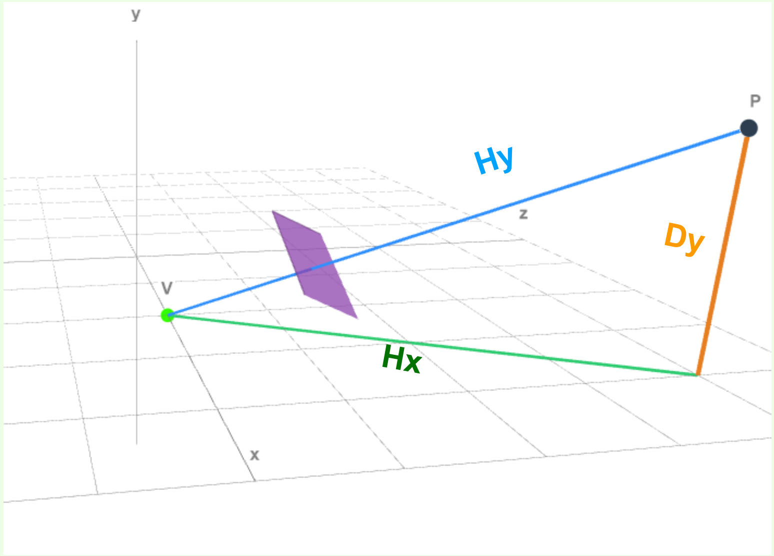


Imagen 5B

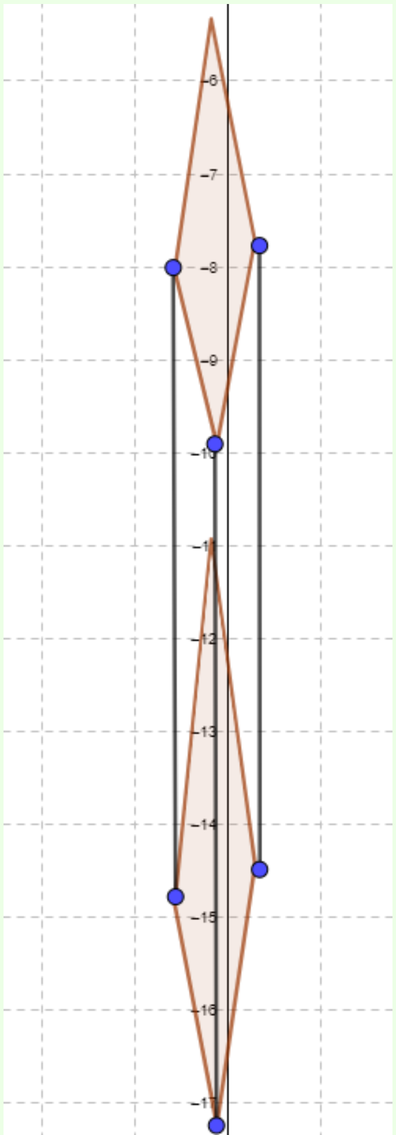
Ahora, para calcular la hipotenusa tenemos que usar la misma fórmula de Pitágoras. Para hacer esto recordamos el ejercicio visto en clase donde tuvimos que sacar la distancia de dos vértices en diagonal de una caja; así que como en esa ocasión haremos otro Pitágoras para sacar la hipotenusa con Y: **$Hy = \sqrt{Hx^2 + Dy^2}$.**
Estas dos fórmulas se pueden simplificar a una sola: **$Hy = \sqrt{Dx^2 + Dz^2 + Dy^2}$**

Con las medidas del triángulo, ahora podemos calcular el ángulo de apertura, con la siguiente fórmula: **$Ay = (\tan^{-1}(Dy/Hx))*-1 - Cy$**
Para finalizar saquemos la coordenada en Y del cuadro: **$Ry = \tan(Ay) * Cy$**

Ejecución:

Dado un cubo con vértice menor (XYZ más pegados a 0) ubicado en [1,0,2], con dimensiones de [3,4,3] y dada P en [10,10,10], dados Cd= 2, Cx=45, Cy= -45.
Calcula la proyección de los vértices en un plano bi-dimensional.

V[X,Y,Z]	[Dx, Dy, Dz]	Ax	Rx	Hy	Ay	Ry	R[Ry, Rx]
[1,0,2]	[9,10,8]	-3.366	-0.11	15.652	12.42	-9.91	[-9.91,-0.11]
[1,0,5]	[9,10,5]	-15.945	-2.28	14.352	10.133	-8.04	[-8.04,-2.28]
[4,0,2]	[6,10,8]	8.1232	-1.857	14.142	9.735	-7.720	[-7.72,-1.857]
[4,0,5]	[6,10,5]	-5.194	-2.090	12.688	6.757	-5.331	[5.526;-2.092]
[1,4,2]	[9,6,8]	-3.394	-2.059	13.453	20.964	-17.241	[-17.24,-2.05]
[1,4,5]	[9,6,5]	-15.969	-2.286	11.91	18.274	-14.859	[-14.85,-2.28]
[4,4,2]	[6,6,8]	8.123	-1.857	11.661	17.774	-14.425	[-14.425,-1.85]
[4,4,5]	[6,6,5]	-5.194	-2.091	9.848	13.649	-10.927	[-10.92,-2.09]



Resultados:

Como podemos ver estos vértices pasados a un Plano en Geogebra podemos ver que nos queda un cuadro muy apachurrado por la lejanía a la que lo estamos viendo

Conclusión:

Con los datos obtenidos pudimos concluir que nuestra hipótesis no fue correcta ya que como mencione en el desarrollo del proyecto la formula paso por iteraciones; originalmente parecía que si funcionaba, sin embargo conforme experimentamos nos dimos cuenta que las lineas tienen que tener un ángulo diferente a 90 con respecto a la cara ya que si no al ver el cubo de frente no puedes ver la profundidad de este.

Bibliografías:

Coordinate Plane. (s. f.). GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/VWN3g9rE

I Made a 3D Renderer with just redstone! (2022b, octubre 22). [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=hFRlnNci3Rs&feature=youtu.be

Math3d: Online 3d Graphing Calculator. (n.d.). Retrieved November 08, 2022 from https://www.math3d.org/

Especiales gracias al profesor Diego Julian Martin por su ayuda