Roll No. : 2481777 Total Pages : 8

MAT8047T

M.Sc. (SECOND SEMESTER) EXAMINATION, JUNE-2024

MATHEMATICS

[Paper : Second (DCC-5)]

(Complex Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 80

PART-A/ भाग-अ *[Marks :8× 2=16]*

*Answer all **eight** questions (Maximum **50** words each). **All** questions carry **equal** marks.*

***सभी आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

PART-B/ भाग-ब *[Marks :5×8=40]*

*Answer **five** questions (Maximum **200** words each), selecting one question from each unit. **All** questions carry **equal** marks.*

*प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 200 शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

PART-C/ भाग-स *[Marks :2×12=24]*

*Answer **any two** questions (Maximum **300** words each). **All** questions carry **equal** marks.*

***किन्हीं दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

PART-A/ भाग-अ

1. (i) Find the principle argument of the complex number $z=-1-i$.

सम्मिश्र संख्या $z=-1-i$ का मुख्य कोणांक ज्ञात कीजिए।

(ii) Define bilinear transformation.

द्विरेखीय रूपांतरण को परिभाषित कीजिए।

(iii) State Morera's theorem.

मोरेरा प्रमेय का प्रकथन दीजिए।

(iv) Give an example of simple closed curve.

सरल बंद वक्र का एक उदाहरण दीजिए।

(v) State Schwarz's Lemma.

श्वार्ज प्रमेयिका का प्रकथन दीजिए।

(vi) Define isolated singularity with an example.

पृथक विलक्षणता को एक उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

(vii) State Rouche's theorem.

रोउचे प्रमेय का प्रकथन दीजिए।

(viii) Define the circle of convergence of the power series.

घात शृंखला के अभिसरण चक्र को परिभाषित कीजिए।

PART-B/ भाग-ब

Unit-I / इकाई-I

2. State and prove the sufficient condition for the function $f(z)=u+iv$ to be analytic.

फलन $f(z)=u+iv$ के विश्लेषक फलन होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध को प्रकथन देकर सिद्ध कीजिए।

OR/ अथवा

Find the radius of convergence of the power series

$\sum a_n z^{2n}$, where

$$a_n = \begin{cases} (1+2i)^n; & \text{if } n \text{ is odd} \\ (2+3i)^n; & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

घात शृंखला के अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

$\sum a_n z^{2n}$,

जहाँ

$$a_n = \begin{cases} (1+2i)^n; & \text{यदि } n \text{ विषम संख्या हो} \\ (2+3i)^n; & \text{यदि } n \text{ सम संख्या हो} \end{cases}$$

Unit-II / इकाई-II

3. If $f(z)$ is entire function such that imaginary part of $f(z)$ is non-negative then prove that $f(z)$ is constant.

यदि $f(z)$ एक संपूर्ण फलन है जिसका काल्पनिक भाग अऋणात्मक हो, तो सिद्ध कीजिए कि $f(z)$ एक अचर फलन है।

OR/ अथवा

State and prove maximum modulus principle.

अधिकतम मापांक सिद्धान्त का प्रकथन देकर सिद्ध कीजिए।

Unit-III / इकाई-III

4. Find the singularities and classify them for the following function :

$f(z) = \operatorname{cosec} z$

निम्न फलन के लिए विलक्षणतायें ज्ञात कीजिए तथा उनको वर्गीकृत कीजिए :

$f(z) = \operatorname{cosec} z$

OR/ अथवा

Expand the following function in a Laurent's series for $|z-1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

निम्न फलन का $|z-1|<1$ के लिए लॉरेंट शृंखला में विस्तार कीजिए :

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

Unit-IV / इकाई-IV

5. Find the image of the infinite strip $\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}$ under the transformation $w=\frac{1}{z}$, where $z=x+iy$.

अनन्त पट्टी $\frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}$ का रूपांतरण $w=\frac{1}{z}$ के सापेक्ष इमेज ज्ञात कीजिए, जहाँ $z=x+iy$.

OR/ अथवा

Evaluate by the Cauchy's theorem of Residues :

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-4)}$$

where C : |z| =3

कोशी अवशेष प्रमेय का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए :

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-4)}$$

जहाँ C : |z| =3

Unit-V / इकाई-V

6. Find the bilinear transformation which maps the points $z_1 = 2, z_2 = i$ and $z_3 = -2$ into the points $w_1 = 1, w_2 = i$ and $w_3 = -1$ respectively.

द्विरेखीय रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जिसके बिन्दु $z_1 = 2, z_2 = i$ तथा $z_3 = -2$ क्रमशः $w_1 = 1, w_2 = i$ तथा $w_3 = -1$ को चित्रित करते हैं।

OR/ अथवा

Evaluate the integral using Cauchy's integral formula :

$$\int_C \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-2)} dz, \qquad C :| z |\le|$$

कोशी के समाकल सूत्र का प्रयोग करते हुए निम्न समाकल को ज्ञात कीजिए :

$$\int_C \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 (z-2)} dz, \qquad C :| z |\le|$$

PART-C/ भाग-स

7. If $f(z) = u + iv$ be an analytic function, then prove that $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

यदि $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषक फलन है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

8. If $f(z)$ is analytic with $f'(z)$ continuous inside and on a simple closed contour Γ, then prove that

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0$$

यदि $f(z)$ एक विश्लेषकफलन है तथा $f'(z)$ साधारण बंद कंटूरा Γ में तथा उस पर संतत् फलन हो तो सिद्ध कीजिए कि $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

9. Using by Cauchy's theorem of residues, prove that

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

कोशी की अवशेष प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

10. State and prove Jordan's Lemma.

जोर्डन प्रमेयिका का प्रकथन देकर सिद्ध कीजिए।

----- × -----